4. Continuidad

Una propiedad de las funciones es la continuidad, ésta es muy importante ya que hay varios conceptos que sólo pueden aplicarse si la función es continua en su dominio o en un intervalo dado.

La continuidad nos hace pensar en frases como llovía continuamente, debemos continuar sobre el camino, la película se presentará de forma continua. En estas situaciones quiere decir que no hay interrupciones o cortes en lo que está sucediendo.

Al referirnos a una función que es continua, pensamos que puede dibujarse sin que se despegue el lápiz del papel, si su gráfica no se interrumpe, no tiene huecos o no hay ruptura.

Así que la gráfica de una función continua se ve de la siguiente forma:

Imagen en blanco y negro

Descripción generada automáticamente con confianza media

Y, a su vez, una discontinua se graficaría de la siguiente manera:

|  |  |
| --- | --- |
| Imagen que contiene Gráfico  Descripción generada automáticamente | Diagrama, Dibujo de ingeniería  Descripción generada automáticamente |

Entonces, podemos decir que una función es continua si su gráfica se aprecia como un solo trazo sobre el papel y discontinua si su gráfica se “rompe” en al menos un punto.

Nos interesa comprender la propiedad de continuidad de una función, para ello nos resulta conveniente analizar “las formas en que una función ‘pierde’ su continuidad, es decir empecemos por considerar las funciones discontinuas” (Viveros et al., 2006). Esto debido a que la continuidad se manifiesta como una propiedad global, mientras que la discontinuidad lo hace como una propiedad puntual.

Pero, aunque la gráfica nos da un aspecto visual de la continuidad o discontinuidad de una función, no es suficiente; así nos resulta necesario hacer un análisis algebraico partiendo de la geometría.

Analicemos las formas en que una función pierde la continuidad en un punto, consideremos cuatro casos, para ello usemos gráficas de funciones que representan las posibles formas de discontinuidad, para posteriormente referirnos al estudio analítico de cada situación.

IT. Colocar la siguiente información en fichero horizontal, considerando que el nombre de cada pestaña se encuentra en una viñeta resaltada en amarillo.

* Removible

1. Consideremos la función:

IT. Colocar la siguiente información en un carrusel. Nota: la gráfica tiene un pequeño hueco en el 2,4 y así se debe representar.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Función | Gráfica  Gráfico, Gráfico de líneas  Descripción generada automáticamente | La gráfica de la función muestra que la curva tiene un hueco en , con lo cual no representa un trazo continuo de la función y decimos es discontinua. |

Aunque tiene un hueco, la función sí está definida para , la cual indica que y en la gráfica se tiene este punto, que, aunque está aparte, pertenece a la representación gráfica de la función.

¿Existe ?

Para determinar el valor del límite debemos de acercarnos al punto y ver cuáles son los valores de la función, si todos estos valores mayores que , notamos en la gráfica que los valores de la función se aproximan al punto , y cuando esto es, con valores menores que , notamos que los valores de la función también se aproximan a , con lo cual . Si calculamos el límite algebraicamente, tenemos:

1. y , así

El valor del límite en el punto es diferente al valor de la función en el punto, así representaremos algebraicamente la característica principal de este tipo de discontinuidad:

“Si se quiere eliminar la discontinuidad, en este caso, basta redefinir la función en el punto, por lo que este tipo de discontinuidad recibe el nombre de discontinuidad removible” (Viveros et al., 2006) o evitable**.**

* Salto

1. Consideremos ahora la función:

IT. Colocar la siguiente información en un carrusel.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Función | Gráfica | La función está definida en todos los puntos y donde cambia de expresión algebraica es en , examinemos lo que sucede en torno a este punto. |

Gráficamente la función en tiene un salto; pero sí está definida en el punto .

¿Existe ?

No hay una sola expresión algebraica asociada a la función alrededor de , así no podemos determinar el valor del límite evaluando en la función. Determinemos el límite calculando los límites unilaterales

y

Como los límites unilaterales son diferentes, el no existe. Entonces tenemos:

1. no existe

La característica de este tipo de discontinuidad es que no existe.

Esta discontinuidad se denomina discontinuidad de salto.

* Infinita

1. Sea la función definida de la siguiente manera:

IT. Colocar la siguiente información en un carrusel.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Función | Gráfica | La función cambia de expresión en , veamos qué características presenta  en torno a este punto. |

La función está definida en , .

¿Existe ?

Calculemos el límite

El límite es infinito, no existe.

¿Qué sucede con los límites unilaterales?

Los límites unilaterales son infinitos, no existen.

Algebraicamente, tenemos:

1. no existe

La característica de esta discontinuidad es que los límites unilaterales son infinitos.

“A este tipo de discontinuidad se le llama discontinuidad infinita” (Viveros et al., 2006).

* Oscilatoria

1. Finalmente consideremos la función definida como:

IT. Colocar la siguiente información en un carrusel.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Función | Gráfica | El punto donde cambia la definición de la función es en , en este punto la función está definida . |

Calculemos el límite en .

Calculemos el límite

Seno de infinito no existe, ya que los valores de la función no se aproximan a un mismo punto, la función oscila, luego el límite no existe.

¿Qué sucede con los límites unilaterales?

La función seno en menos infinito y en infinito no está definida, ya que la función oscila, luego los límites unilaterales no existen.

Algebraicamente, tenemos:

1. no existe
2. no existe
3. no existe

La característica de este tipo de discontinuidad es que los límites unilaterales no existen.

Este tipo de discontinuidad es el más complejo, en las funciones que veremos no es común y se denomina discontinuidad oscilatoria.

Hemos definido los tipos de discontinuidad y las razones por las que lo son. Definamos ahora la función continua usando las razones por las que se pierde la continuidad.

4.1 En un punto

La continuidad en un punto, como su nombre lo indica, se refiere a si la función es constante o continua en un punto de la recta, siempre y cuando cumpla con las siguientes características:

IT. Colocar la siguiente información en un cuadro de importante

Una función es continua en un punto si:

* La función está definida en
* Los límites unilaterales y existen y son finitos
* El existe
* El límite de la función cuando es igual al valor de la función en ,

Veamos los siguientes ejemplos.

1. Determinar si la función es continua en , si no es continua determinar el tipo de discontinuidad.

Para que la función sea continua debe de cumplir las condiciones de la definición:

* está definida en

, por definición

Calculemos el límite de la función

Factoricemos el numerador

El límite existe y vale .

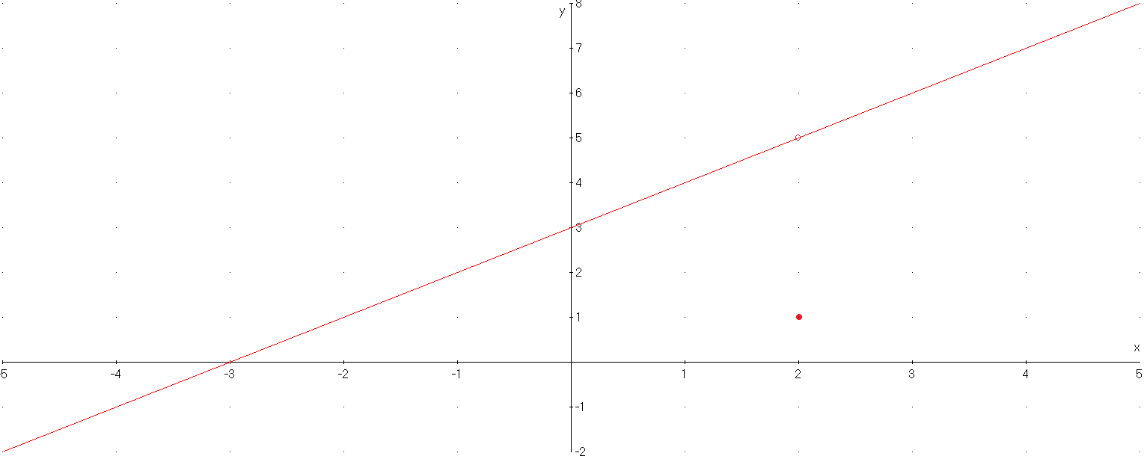
* y

El valor del límite es diferente al valor de la función.

No se cumple la última condición para tener la función continua, luego la función no es continua en .

La condición que no se cumple nos indica que la función tiene una discontinuidad removible en .

La gráfica de la función sería la siguiente:



1. Determinar si la función es continua en , si no es continua determinar el tipo de discontinuidad.

Para que la función mayor entero sea continua en , se deben de cumplir las condiciones de la definición:

* , el límite de la función es el valor al cual se aproximan los valores de la función conforme los valores de se acercan a , y por la definición de la función, si tomamos valores más pequeños o grandes que , cambia el resultado.

Tenemos

Así para determinar el límite calculemos los límites unilaterales

Como los límites unilaterales son diferentes, entonces no existe.

Como el límite no existe, la función no es continua en .

Por las características anteriores, de los límites unilaterales de la función que existen, únicamente en uno tenemos una discontinuidad de salto.

La gráfica de la función es:

Interfaz de usuario gráfica, Aplicación

Descripción generada automáticamente

Y tiene discontinuidad de salto en todos los enteros.

Ya que conoces cómo determinar si una función es continua, realiza el siguiente ejercicio.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: Ejercicio 20. Continuidad

Ejercicio 20. Continuidad

Instrucciones:

1. Determina si la función es continua en y en .
2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
3. Adjunta el archivo con el procedimiento y la respuesta en formato PDF.
4. Espera la realimentación.

Es posible que determinemos la continuidad de la función en un punto; pero ¿cómo determinamos la continuidad de una función que no está definida por una sola expresión? Para determinarla nos basamos en la manera en que determinamos la continuidad de funciones simples y mediante las operaciones de las funciones, éstas son suma, resta, producto, cociente, potencia y composición, las cuales se definen en los siguientes teoremas.

Teorema: si las funciones y son continuas en un punto y es una constante, entonces las funciones

IT. Colocar la siguiente información en una imagen, ya sea con las líneas o con una llave apuntando hacia el cuadro de texto que dice: Son continuas en

4. si
5. , para *n* entero positivo
6. , para *n* entero positivo y definida en un intervalo que contiene a

(Stewart, 2013)

Son continuas en

Otra de las operaciones es la composición de funciones, el siguiente teorema define esta operación.

IT. Colocar la siguiente información en un cuadro de importante

Teorema. Si la función es continua en el punto y si la función es continua en , entonces la función compuesta es continua en el punto .

Cuando determinamos la continuidad de una función compuesta, uno de los pasos es calcular el límite de la función, ¿sabemos cómo calcular éste? El siguiente teorema nos dice cómo se calcula el límite y así podremos concluir si es continua o no.

IT. Colocar la siguiente información en un cuadro de importante

Teorema. Si la función es continua en el punto y si , entonces , esto es, .

Revisemos el siguiente ejemplo.

Determina si la función es continua en .

Para que la función sea continua en , determinemos si las funciones y son continuas en .

Determinemos si las funciones son continuas:

* , la función está definida en

Por lo que la función es continua en .

* , la función está definida en

Por lo que la función es continua en .

Luego la función es continua en .

Podemos decir, entonces, que la composición de funciones se da cuando una de las funciones da entrada a otra y de esta manera generan una tercera. Es momento de que repases lo aprendido respecto a la composición de funciones.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: Ejercicio 21. Composición de funciones

Ejercicio 21. Composición de funciones

Instrucciones:

1. Determinar si la función es continua en .
2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
3. Adjunta el archivo con el procedimiento y la respuesta en formato PDF.
4. Espera la realimentación.

Una de las condiciones para que una función sea continua en un punto es que el límite exista y, de acuerdo con un teorema, el límite existe si los límites unilaterales existen y son iguales. Definamos la continuidad unilateral.

* Continuidad unilateral

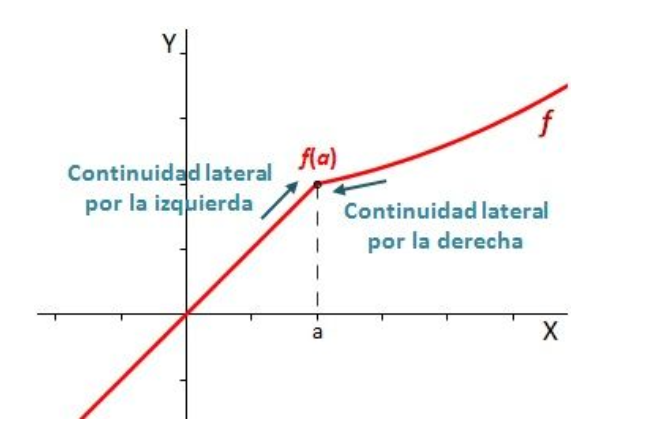
Recordemos que los límites unilaterales pueden ser diferentes cuando te acercas a un punto desde el lado izquierdo o derecho. Teniendo en cuenta esto, podemos definir la continuidad unilateral de la siguiente manera:

IT. Colocar la siguiente información en una caja de importante.

Una función es continua por la derecha en un número si y continua por la izquierda en un número si (Stewart, 2013).

Así, para la continuidad unilateral se tienen las condiciones siguientes:

IT. Realizar una animación tomando como referencia la siguiente imagen donde al dar clic en *Continuidad lateral por la izquierda* aparezca la información que se encuentra en la tabla; y cuando den clic en *Continuidad lateral por la derecha* aparezca la información que le corresponda. Las flechas de las dos gráficas de los ejemplos deben estar animadas.



|  |  |
| --- | --- |
| Continuidad por la derecha  es continua por la derecha en un número si:   * está definida en ,esto es, está definida * El límite por la derecha existe, entonces existe * El límite por la derecha de cuando es igual a ,   Dibujo de una función continua en el lateral derecho. | Continuidad por la izquierda  es continua por la izquierda en un número si:   * está definida en , esto es, está definida * El límite por la izquierda existe, entonces existe * El límite por la izquierda de cuando es igual a ,   Dibujo de una función continua en el lateral izquierdo. |

Como pudiste ver en la tabla anterior, se tienen condiciones análogas para la continuidad por la izquierda.

Esta definición de continuidad unilateral es útil para funciones definidas en intervalos abiertos, ejemplo:

1. Demostrar que la función es continua por la derecha en .

Vemos que se cumplen las condiciones

* , la función está definida en

Por lo que la función es continua por la derecha en .

La función tiene por dominio , así está definida en un intervalo abierto.

1. Demostrar que la función mayor entero es continua por la derecha de , pero no lo es por la izquierda de .

Continuidad por la derecha

* , la función está definida en

Así la función es continua por la derecha de .

Ya determinamos la continuidad y la continuidad unilateral de la función en un punto, definamos ahora la continuidad de una función en un intervalo.

4.2 En un intervalo

Cuando hablamos de la continuidad en un intervalo, nos referimos a una porción o segmento de la función, por lo tanto, podemos decir que:

IT. Colocar el siguiente contenido en una caja de importante

Una función es continua sobre un intervalo si es continua en todos los puntos del intervalo. En un punto extremo del intervalo entendemos a la continuidad como continuidad unilateral.

Esto quiere decir que una función es continua en un intervalo si es continua en todos sus puntos, si se llega a interrumpir o segmentar, sería discontinua, ejemplo:

* Determinar si la función es continua.

No nos indican un punto o intervalo donde se debe verificar si la función es continua, así que hay que verificar si es continua en los números reales.

Usando la definición del valor absoluto, la función se define como

El conjunto de los números reales se divide en dos intervalos y en cambia la expresión algebraica de la función, así determinaremos si la función es continua en:

1. o de manera equivalente en el intervalo
2. o de manera equivalente en el intervalo

Atendamos cada uno de los incisos anteriores.

IT. Colocar la siguiente información en un acordeón. El texto que debe llevar cada pestaña es la que se encuentra en cada inciso.

1. *¿La función es continua en el intervalo ?*

De acuerdo a la definición para que sea continua en el intervalo debe de ser continua en todos los puntos del intervalo.

Sea un punto cualquiera del intervalo y determinemos si la función es continua en el intervalo.

es continua en , si se cumple

* está definida en , porque
* , porque es un número negativo
* y , con lo cual

Y la función es continua para cualquier número real negativo.

1. *¿La función es continua en ?*

es continua en , si se cumple

* está definida en ,
* , para determinar si el límite existe debemos de calcular los límites unilaterales

y

Como los límites unilaterales son iguales, el existe y vale .

* y , con lo cual

Y la función es continua para .

1. *¿La función es continua en el intervalo ?*

De acuerdo a la definición para que sea continua en el intervalo debe de ser continua en todos los puntos del intervalo.

Sea un punto cualquiera del intervalo y determinemos si la función es continua en el intervalo.

es continua en , si se cumple

* está definida en , porque
* , porque es un número positivo
* y , con lo cual

Y la función es continua para cualquier número real positivo.

Como la función es continua en , en y en , es continua para todo número real.

En general, para funciones que están definidas en un intervalo, se tiene que la función es continua y podemos decir también que es continua en su dominio. Por lo tanto, aseguramos que:

IT. Colocar el siguiente contenido en una caja de importante

Toda función es continua en su dominio, por consecuencia todas las funciones polinomiales, racionales, radicales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas son continuas en su dominio. Así para determinar dónde es continua una función, podemos determinar su dominio.

Veamos el ejemplo correspondiente:

* Determina dónde es continua la función .

La función es racional y su numerador está formado por dos raíces.

Empecemos calculando dónde son válidas las raíces.

Dominio de

Dividimos en casos

1. y

y

Se cumplen ambas condiciones si .

1. y

y

Se cumplen ambas condiciones si .

Dominio es .

Dominio de

Dividimos en casos

1. y

y

Se cumplen ambas condiciones si .

1. y

y

Se cumplen ambas condiciones si .

Dominio es .

La función racional no está definida si el denominador es cero, esto es, .

El dominio es .

El dominio de la función son todos los valores que cumplan las condiciones anteriores, así el dominio es la intersección

Como la función es continua en su dominio, decimos que la función es continua en .

Realiza el siguiente ejercicio de continuidad en punto e intervalo.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: Ejercicio 22. Continuidad en punto e intervalo

Ejercicio 22. Continuidad en punto e intervalo

Instrucciones:

1. Determinar la continuidad de las siguientes funciones:
2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
3. Adjunta el archivo con el procedimiento y la respuesta en formato PDF.
4. Espera la realimentación.

Conclusión

Con lo desarrollado en este tema podemos determinar la continuidad de una función, ya sea en un punto o en un intervalo, y nos permite referirnos a la propiedad de una función de ser continua, la cual es una condición requerida en varios de los conceptos que se abarcan como lo son la derivada y la integral de una función.

En la siguiente unidad temática revisaremos lo correspondiente a la derivada y sus aplicaciones, abordaremos diferentes problemas de cambio, relacionadas, diferenciales y optimización a partir de las reglas y criterios de derivación.