Unidad 4. Técnicas de integración

4.1 Antiderivada e integración indefinida

En la unidad temática anterior se definió la derivada, se resolvieron algunos ejemplos y se abordaron sus aplicaciones como son la diferencial, la razón de cambio, los valores extremos y la optimización. En este tema veremos la operación inversa a la derivada, llamada antiderivada. Comencemos con su definición:

IT. Colocar la siguiente información en una caja de importante.

Antiderivada

Una función es la antiderivada de la función en un intervalo si para toda .

Así para determinar la antiderivada de una función debemos de tener una función cuya derivada es conocida, el conocer la derivada de las funciones algebraicas y de las funciones trascendentes nos ayuda a poder asociar una función antiderivada a una función , la cual se puede verificar al calcular la derivada.

Por ejemplo, si tenemos la función , debemos de buscar la función cuya derivada es la raíz de . Hay que aplicar la regla de derivación de una potencia para obtener la función definida en . Tenemos que . Si calculamos la derivada, tenemos con lo cual la derivada es la función .

Pero también las funciones , , tienen la misma derivada, esto es:

Ya que la regla de derivación nos dice que la derivada de la constante es cero, así al agregar cualquier constante a la función nos da cero su derivada y la parte algebraica de la derivada no se altera. Esto lo justifica el teorema siguiente.

Teorema: si la función es una antiderivada de la función en un intervalo , entonces la forma de otra antiderivada de en el intervalo es donde es una constante.

Se dice que la antiderivada es antiderivada general de la función .

Si determinamos la antiderivada general de la función es .

A partir de las reglas de derivación es posible determinar antiderivadas. En el siguiente recurso podrás ver las equivalencias.

IT. Colocar en un recurso, considerando las propiedades de la plataforma (Roberto).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Algebraicas | | | |
| Función | Derivada | Función | Antiderivada |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Logarítmicas | | | |
| Función | Derivada | Función | Antiderivada |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Exponenciales | | | |
| Función | Derivada | Función | Antiderivada |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Trigonométricas | | | |
| Función | Derivada | Función | Antiderivada |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Trigonométricas inversas | | | |
| Función | Derivada | Función | Antiderivada |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Hiperbólicas | | | |
| Función | Derivada | Función | Antiderivada |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Hiperbólicas inversas | | | |
| Función | Derivada | Función | Antiderivada |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

El recurso anterior nos mostró las antiderivadas que se obtienen de las reglas de derivación de funciones específicas. Es posible determinar la derivada de cualquier otra función que emplea cualquiera de las funciones básicas.

Con la antiderivada pueden emplearse las propiedades de linealidad, esto es, si es la antiderivada de la función y es la antiderivada de la función , entonces, para la función la antiderivada es y la general es , para la constante .

Para la función la antiderivada es y la general . Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Determinar la antiderivada de la función .

Primero expresemos la función como la suma de fracciones

Usando la tabla tenemos las antiderivadas, en cada uno de los sumandos se tiene una potencia, por lo cual usamos la antiderivada siguiente:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Así

Y la antiderivada general es

Ejemplo 2. Determinar la antiderivada de la función . Considera que dicha función está en su forma más simple.

Por las funciones que se tienen en la función, se emplean las antiderivadas siguientes:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

La antiderivada es

Y la antiderivada general es

De esta manera, podemos ver una aplicación directa de las antiderivadas.

Para reafirmar tu conocimiento, realiza el siguiente ejercicio de antiderivadas.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: 35. Antiderivada

Ejercicio 35. Antiderivada

Instrucciones:

1. Determina la antiderivada de las siguientes funciones.
2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
3. Sube tu documento a la plataforma con la siguiente nomenclatura: *Apellido paterno\_Apellido materno\_Nombre(s)\_E35* para que quede tu evidencia registrada.
4. Comparte tu experiencia con tus compañeros y maestro en clase.

Con el recurso anterior que contenía las tablas de equivalencia de derivadas y antiderivadas, es posible determinar varias antiderivadas o si usamos la definición es posible ir calculando la antiderivada, aunque no es un proceso simple. Pero, aun así, no es posible determinar la antiderivada de funciones como . Para poder determinar antiderivadas como la de esta función, necesitamos procedimientos específicos y no se tienen dentro del cálculo de la antiderivada, sino del cálculo de la integral, definamos a continuación ésta.

Integración indefinida

La integral definida nos proporciona una estrategia para calcular la antiderivada de una función, ya que suele considerarse que la antiderivada y la integral indefinida son conceptos equivalentes, por lo tanto, su definición sería:

IT. Colocar la siguiente información en una caja de importante.

Integral indefinida

La integral indefinida, denotada como , se define como:

Donde:

* es una antiderivada de la función y es una constante.
* La función es llamada integrando y en la diferencial se tiene la variable de integración.

Con lo cual la integral indefinida es igual a la antiderivada general de una función.

A partir del recurso donde se muestran las antiderivadas y que se revisó anteriormente, podemos definir las reglas de integración básicas, las cuales se justifican por ser antiderivadas de las funciones.

|  |  |
| --- | --- |
| Reglas de integración | |
|  |  |
| , constante |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  | , |
|  | , |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Cuando se usaron las reglas de derivación que nos permitieron llegar a definir la tabla de antiderivadas, notamos que se obtienen las seis antiderivadas de las funciones trigonométricas inversas y que cada dos de ellas eran iguales salvo un signo negativo, esto es:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Para las reglas de integración se elige la positiva como principal y se tienen sólo tres reglas de integración:

en donde se usa una constante y no sólo .

Y con las funciones hiperbólicas inversas, se tienen dos antiderivadas para la misma función:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

Como regla de integración se tiene como una función por partes y el resultado depende del valor de la constante y de .

Una de las fórmulas de integración básicas lo constituye la regla de la potencia:

con

Para poder calcular el valor de una integral de una función que sea una suma, una resta o el producto de una función por una constante, se tienen las propiedades siguientes para la integral.

IT. Colocar la siguiente información en una caja de importante.

Propiedades

, para constante

Lo que nos permite determinar la derivada de una función con operaciones tales como la suma, la resta y el producto por una constante. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Determinar la integral de la función dada

Las reglas de integración en general se definen sobre funciones constituidas por una expresión o por sólo un término. La integral que se pide calcular tiene más de una expresión y varias operaciones, siendo la principal un cociente, así que expresemos esta función como sumas o restas, que de acuerdo con la propiedad anterior nos permite dividirla en varias integrales.

Usando las leyes de los exponentes

Así, la integral es

Usando propiedades

Calculando la integral con la regla de la potencia

La integral es

No se tiene una regla de integración para este tipo de función , se tiene la regla de la potencia; pero es para una función de la forma , esto es, para la potencia de la variable. Para poder determinar el valor de la integral desarrollemos la potencia del binomio.

Así la integral es

Aplicando propiedades

Calculando las integrales

La integral es

No se tiene definida una regla de integración para el tipo de función que se tiene en el integrando, usemos identidades trigonométricas para llegar a una expresión en la función que sí pueda calcular la integral.

Así la integral es

Usando propiedades

Usando las reglas de integración

El valor de la integral es

Las reglas de integración y el uso de las propiedades nos dan la posibilidad de calcular la integral de funciones que tienen definida una integral y de funciones que algebraicamente pueden expresarse como funciones que tienen asociada una integral; sin embargo, hay funciones para las que no es posible calcular su integral, como la que se mencionó en antiderivada, ésta es:

Realiza el siguiente ejercicio para reforzar el tema de integración indefinida.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: 36. Integración indefinida

Ejercicio 36. Integración indefinida

Instrucciones:

1. Determina el valor de las siguientes integrales.
2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
3. Sube tu documento a la plataforma con la siguiente nomenclatura: *Apellido paterno\_Apellido materno\_Nombre(s)\_E36* para que quede tu evidencia registrada.
4. Comparte tu experiencia con tus compañeros y maestro en clase.

Ya que en las propiedades se define la suma y la resta; pero no se define la integral de un producto de funciones o de un cociente de funciones. Para solucionar ésta y otras integrales que no tienen una regla de integración se desarrollan métodos de integración, los cuales veremos en los siguientes temas de esta unidad.