4.2 Integración por sustitución

Anteriormente calculamos integrales de funciones usando las reglas de integración, mismas que surgen de las antiderivadas de funciones, éstas nos permiten determinar integrales de algunas funciones; pero no de todas ellas. Para poder ampliar el cálculo de integrales de funciones veremos los métodos de integración, empezando por el método de sustitución.

Cuando calculamos derivadas, empezamos calculando la derivada de funciones básicas de *x*, así calculamos derivadas de funciones como , , , , etc.; pero también habían funciones como , , , en las cuales se emplearon la misma función potencia, la exponencial natural, el logaritmo natural y coseno, aunque no de la variable *x*, sino de una función, esta situación se resolvió en la unidad sobre derivadas con la *regla de la cadena.*

Con integrales tenemos que también se pide calcular la integral de funciones no sólo de la variable , sino de otra función, esto es la integral de una función compuesta.

La regla de la cadena permite determinar la derivada de una función compuesta y nos dice que:

IT. Colocar la siguiente información en un recuadro de importante.

Si las funciones y son funciones derivables, la función compuesta definida por es derivable (Purcell et al., 2007) y su derivada se define como

Con lo cual la antiderivada de la función es igual a la función y como la integral es igual a la antiderivada, se tiene:

Este hecho es básico para definir la integración por sustitución, llamada también cambio de variable.

Si las funciones y son funciones derivables, tal que la imagen de la función está contenida en el dominio de la función , y si es una antiderivada de la función , entonces

Si hacemos el cambio de variable y teniendo que la diferencial de es , la integral puede expresarse como

Con lo cual la integración por sustitución es la antiderivada de la regla de la cadena. Este método nos permite usar las reglas de integración, que se definieron anteriormente y fueron revisadas en funciones.

Al aplicar el método de sustitución se propone que la función de *x*, que se tiene ahora en lugar de sólo la variable *x*, sea la función . Para tener en la integral la variable que se necesita se calcula la diferencial de la función *u*, ésta es , así la diferencial de *u* es la derivada de por la diferencial de *x*.

Cuando cambiamos en el integrando la variable *x* por una función, podemos definir algunas opciones.

Una de las opciones es, en vez de la variable *x*, la función *u* con la forma o donde es una constante, por ejemplo:

1. Calcular el valor de la integral .

Si aplicamos la integración por sustitución, proponemos que .

Determinamos la diferencial de la variable *u*, , esto es .

La integral es

Calculamos la integral

Sustituyendo el valor de

Si se hubiese resuelto usando sólo las reglas de integración, se tendrían que desarrollar la potencia y calcular la integral de la suma. Con este proceso el procedimiento es más directo, en este caso se identifica a la función *u*, se determina la diferencial y se aplica la regla de integración.

1. Calcular el valor de la integral .

Se tiene la regla de integración para la función ; pero como el ángulo no es , no se puede aplicar esta regla de integración. Por lo tanto, apliquemos el método de sustitución.

Sea , la diferencial de *u* es .

En la integral , no tenemos que el multiplique a , por lo que no puede aplicarse de manera directa la sustitución. Así que multipliquemos y dividamos, para que no se altere la expresión, por 7

Así

En este caso, ya no basta con identificar la función y calcular la diferencial, ya que la expresión en la integral no está completa al faltar el factor constante.

Podemos también tener un factor para la variable *x* y una constante que se suma, veámoslo en el siguiente ejemplo.

1. Calcular el valor de la integral .

Aplicamos propiedades y tenemos

El denominador no es la variable, sino que está modificada por constantes que suman y multiplican.

Usemos la sustitución y calculemos la diferencial .

Al igual que en el ejemplo anterior no tenemos el , por lo que multiplicamos y dividimos por . Así

Luego

Éste es una combinación de los dos anteriores y se tiene que agregar también el factor que falta.

Otro de los casos en donde se aplica el método de sustitución es donde la variable se modifica no sólo por una constante, como los casos siguientes.

Para poder aplicar la integración por sustitución en funciones como es necesario que el integrando contenga a la derivada de la función , ya que al ser variable no se puede multiplicar y dividir por ella y aplicar este procedimiento para su solución. En el caso anterior, cuando faltaba un número real sí era posible agregarlo.

1. Calcular el valor de la integral .

La función es exponencial general de base .

Tomamos y calculamos su diferencial .

El integrando tiene a la función y su diferencial, sólo falta la constante , así que multiplicamos por este valor

Luego

1. Calcular el valor de la integral .

La función en la integral tiene numerador constante y como denominador un producto de funciones, para aplicar el método de sustitución debemos de elegir una función como *u* y se debe de tener la diferencial de *u.*

En el denominador se tienen dos funciones, que se identifican porque están dentro de los paréntesis, y en general buscamos elegir como *u* la función más compleja. De las dos que se tienen, elegimos por lo que la diferencial es .

Así

Haciendo la sustitución

Luego

En este método la *u* puede ser cualquier función, puede estar en el numerador, en el denominador, ser una función principal o parte de una función, lo importante es que se tenga su diferencial o que pueda completarse la diferencial de la función. No todas las integrales pueden resolverse por este procedimiento.

1. Calcular el valor de la integral .

Se tienen varias funciones en el integrando, las principales son la del numerador y la del denominador, la más compleja es la del denominador . Si ésta se elige como *u*, al calcular la derivada se tiene una función compleja, la cual es y no está en el integrando, entonces no es opción el elegir esta función como *u*.

Si elegimos la función del numerador como , tenemos y su diferencial es . Veamos cómo se modifica la función usando esta *u*.

Aún no tenemos , pero en la integral aún hay expresiones de *x*. No se puede calcular una integral si se tienen las dos funciones *u* y *x*. Si se emplea la sustitución, debe de quedar sólo la variable *u*.

Tenemos

Esta integral no se tiene en una regla de integración y hasta el momento sólo podemos resolverla por sustitución, así que apliquemos nuevamente este método.

Hagamos la sustitución y su diferencial es .

En la integral falta un , lo agregamos y tenemos

Sustituyendo el valor de

Así

Este ejemplo nos presentó un caso donde se aplicó dos veces la integración por sustitución, depende de la integral que se tenga para seleccionar el procedimiento a usar.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: 37. Integración por sustitución

Ejercicio 37. Integración por sustitución

Instrucciones:

1. Calcula el valor de las siguientes integrales por sustitución:
2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
3. Sube tu documento a la plataforma con la siguiente nomenclatura: *Apellido paterno\_Apellido materno\_Nombre(s)\_E37* para que quede tu evidencia registrada.
4. Comparte tu experiencia con tus compañeros y maestro en clase.

La integral por sustitución es el primero de los métodos de integración y nos permite resolver integrales en las que su antiderivada se obtiene con la regla de la cadena. Hay muchas otras integrales que no pueden resolverse por este procedimiento, principalmente porque no es posible tener completa la diferencial y no siempre se puede agregar lo necesario para tener completa la diferencial. El siguiente método de integración que se desarrolla es la integración por partes en donde el integrando es un producto de funciones; pero las propiedades de la integral no incluyen el producto de funciones.