4.3 Integración por partes

Hasta el momento hemos calculado integrales usando las reglas de integración para definir las antiderivadas y el método por sustitución, en donde se calcula el valor de una integral que tiene por integrando una función compuesta. Pero estas estrategias no son suficientes para el cálculo de todas las integrales, mencionamos anteriormente que no era posible calcular la antiderivada y en consecuencia la integral de funciones como , en donde se tiene el producto de funciones, así que veamos cómo determinar la integral de un producto de funciones.

En general, las funciones son de diferente tipo, ya sean algebraicas o trascendentes en su gran variedad, la integración por partes se puede aplicar a funciones del mismo tipo, pero es menos común.

La regla de derivación para un producto de funciones es

Así la antiderivada de la función y en consecuencia la integral es

Usando las propiedades de las integrales

De donde

Y

Esta igualdad nos define la integración por partes y calculamos la integral de un producto entre una función y la derivada de otra función. Entonces podemos decir que:

IT: Colocar la siguiente información en una caja de importante.

Integración por partes

Si y son funciones con derivadas continuas, entonces

Si hacemos y , tenemos que la diferencial de es y la diferencial de es , por lo que la integral puede expresarse como

(Larson y Edwards, 2010)

La integración por partes se basa en la antiderivada de la regla de derivación del producto de funciones y es la opción para determinar la integral del producto de funciones.

Cuando aplicamos la integración por partes, se deben de elegir las funciones y de acuerdo con la expresión en la integral. Se tiene que elegir de manera que se calcule su diferencial y de forma que se calcule su integral. En general se tiene definida la derivada de cualquier función, por lo que cualquiera de las funciones que se tienen en el integrando puede ser ; pero no todas las funciones tienen integral, por lo que este hecho es determinante para la elección de las funciones y .

Veamos el ejemplo del cálculo de la integral de un producto de funciones.

Ejemplo 1.Calcular el valor de la integral .

El integrando está formado por dos funciones y , debemos elegir una función para determinar su diferencial y una para integrar, ambas funciones tienen definida su derivada y su integral, así que cualquiera de ellas se puede elegir para ser y . Elijamos la más simple para ser

y su diferencial

con lo cual

Así

Hay que calcular la integral , que también es un producto de funciones, por lo que volvemos a aplicar funciones por partes.

Al aplicar nuevamente la integración por partes, la elección de y se hace con funciones del mismo tipo que en la aplicación anterior del método de integración.

Resolviendo .

Tomamos

y su diferencial

con lo cual

Luego

Las funciones que se definen como inversas no tienen asociada una regla de integración. Si queremos determinar el valor de estas integrales, se usa integración por partes, de las funciones más comunes en donde se emplea este método es . Calculemos la integral de la función .

Ejemplo 2. Calcular el valor de la integral .

Sólo se tiene una función, cuando sucede eso la función del integrando se usa como y la diferencial de como .

Así

así

así

Calculemos la integral por sustitución.

Hacemos

así

Luego

También se tiene la situación en la que al determinar el valor de una integral y aplicar la integración por partes se obtiene una integral cíclica, en donde finalmente se resuelve como una ecuación. Ésta se presenta, por ejemplo, con funciones que tienen la misma derivada o que se repiten como son las funciones exponenciales y las trigonométricas.

Veamos un ejemplo de ello.

Ejemplo 3. Calcular el valor de la integral .

Elegimos con lo cual .

Y así

Calculemos el valor de la integral usando la integración por partes.

Elegimos con lo cual .

Y así

es la misma integral que aquélla para la que se pidió determinar su valor en el ejercicio.

Tenemos lo siguiente

De donde

Cuando usamos la integración por sustitución, elegimos una función que sea y ésta puede estar en cualquier forma: sumando, factor, numerador, denominador, etc. Pero cuando se usa integración por partes, las funciones que se emplean para y deben de ser factores.

Ejemplo 4. Calcular el valor de la integral .

La función que se tiene en la integral no es un cociente y tampoco un producto, por lo que no se pensaría elegir para su solución la integración por partes; sin embargo, es un procedimiento mediante el cual se puede determinar la solución y es una función donde este método se selecciona como última opción.

Expresemos la integral como sigue para tener un producto

Se debe de elegir una función como y otra como ; pero como se debe de conservar el producto, no es posible elegir y . Este proceso sí es posible por medio de la sustitución, entonces se aplica para que se pueda conservar el producto y .

Pero no se puede calcular la integral de la función , ya que al aplicar el método de sustitución no se tiene completa la diferencial.

Así que expresemos la integral de la siguiente manera

Elegimos con lo cual .

Y así .

Calculemos esta integral por sustitución

, sea así

Con lo cual

Luego

La integral que resolvíamos por partes es

Calculemos la integral

Calculemos esta integral por sustitución

, sea así

Con lo cual

Con lo cual

Tenemos que

Con los anteriores ejemplos pudiste observar de qué manera se puede aplicar la integración por partes. Ahora realiza el siguiente ejercicio para practicar lo aprendido.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: 38. Integración por partes

Ejercicio 38. Integración por partes

Instrucciones:

1. Calcula el valor de las siguientes integrales por partes:
2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
3. Sube tu documento a la plataforma con la siguiente nomenclatura: *Apellido paterno\_Apellido materno\_Nombre(s)\_E38* para que quede tu evidencia registrada.
4. Comparte tu experiencia con tus compañeros y maestro en clase.

La integración por partes amplía los procedimientos que permiten determinar la integral de una función, en este caso una función que se expresa como un producto de funciones. Con los dos métodos de integración vistos hasta el momento, sustitución y por partes, aún nos faltan estrategias para determinar integrales de funciones, por ejemplo, falta determinar la integral de funciones trigonométricas, que es el método que se presenta a continuación. Así que prosigamos revisando las estrategias para la solución de integrales.