4. Integrales trigonométricas y sustitución trigonométrica

Al determinar la integral de una función, podemos tener funciones algebraicas solamente o podemos tener funciones que se combinan con funciones trascendentes; pero también es posible el tener únicamente funciones trigonométricas. ¿Cuál es el procedimiento que podemos aplicar si las funciones son sólo trigonométricas? Al igual que se calcula el valor del límite o una derivada de una función trigonométrica, usaremos las identidades trigonométricas para poder calcular el valor de la integral.

Calculemos el valor de una integral donde usemos las identidades.

Ejemplo 1. Calcular el valor de la integral .

Como la única función es , no se tiene una regla de integración con la potencia de la función ; pero podemos usar la integración por sustitución, así que necesitamos una función para y otra que sea . La única opción para y la diferencial es , no tenemos la función , usemos las identidades

Usemos esta igualdad en la integral

De donde obtenemos 3 integrales

La primera de ellas es una regla de integración y las otras las resolvemos por sustitución

y

Así

Ejemplo 2. Calcular el valor de la integral .

, si usamos identidades, no llegamos a una integral que tenga solución. Usemos un procedimiento algebraico, esto es, racionalicemos multiplicando por el conjugado.

Así

Resolvemos la integral usando sustitución.

Hacemos con lo cual , así

La segunda integral , la resolvemos nuevamente por sustitución.

Hacemos con lo cual , así

Luego

Sustituyendo , tenemos

Al calcular el valor de la integral usamos las identidades, procedimientos algebraicos y la integración por sustitución. Existe otro tipo de integrales de funciones trigonométricas en donde se tienen potencias de estas funciones, como lo son seno y coseno o secante y tangente, y para su solución se emplean las identidades trigonométricas junto con las reglas de derivación.

En el caso de las potencias de las funciones seno y coseno, para determinar el valor de la integral buscamos expresar la función como el producto de la potencia de una de las funciones seno o coseno y la función coseno y seno, según corresponda.

Ejemplo 3. Calcular el valor de la integral .

Como las funciones seno y coseno tienen la misma potencia, cualquiera de ellas se puede dejar como función principal.

Expresemos la función del integrando como una función de seno

Así

Haciendo con lo cual

Ejemplo 4. Calcular el valor de la integral .

La función del integrando no da la oportunidad de tener una función y su diferencial. Si tenemos en el integrando funciones como y para poder determinar el valor de la integral, usamos una de las identidades y . Sustituyamos ambas.

Resolvemos cada una de estas integrales

Para la integral , usamos sustitución con lo cual

Para determinar el valor de la integral , aplicamos la sustitución y luego la identidad

Hacemos con lo cual

Como

Para determinar el valor de la integral , primero aplicamos sustitución

Hacemos con lo cual

Resolvamos la integral por sustitución.

con lo cual

Retomando la integral que resolvíamos

Y

Como

Luego

Cuando tenemos el producto de potencias de seno y coseno, tenemos las opciones de expresarla como el producto de la potencia seno por coseno o como la potencia de coseno por seno, o usar las identidades para el cuadrado del seno o del coseno, que generalmente se aplican cuando ambas tienes potencias impares.

Otra opción es el tener en el integrando el producto de la potencia de las funciones secante y tangente, en donde se usan las derivadas de estas funciones y , para poder tener una de las funciones como la función y su derivada .

Ejemplo 5. Calcular el valor de la integral .

La función es . No es posible que , ya que al ser la derivada se debe de separar en la función y nos quedaría , y las identidades no permiten dejar sólo la potencia de la tangente y secante cuadrada, así que la opción es usar sustitución con y con diferencial , para ello, tenemos:

Haciendo la sustitución con lo cual

El procedimiento, que se emplea para determinar la integral de funciones que tiene potencias de tangente y secante, también se puede aplicar a las potencias de las funciones cotangente y cosecante.

Ejemplo 6. Calcular el valor de la integral .

Hagamos la sustitución con lo cual , tenemos

Luego

Así

Con estos ejemplos puedes ver cómo se calcula el valor de una integral donde se usan las identidades, por lo tanto, es momento de aplicar lo revisado hasta ahora resolviendo el siguiente ejercicio.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: 39. Integrales con identidades

Ejercicio 39. Integrales con identidades

Instrucciones:

1. Determina la integral de las funciones siguientes.
2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
3. Sube tu documento a la plataforma con la siguiente nomenclatura: *Apellido paterno\_Apellido materno\_Nombre(s)\_E39* para que quede tu evidencia registrada.
4. Comparte tu experiencia con tus compañeros y maestro en clase.

Las integrales de funciones trigonométricas se pueden determinar usando identidades trigonométricas, lo que nos permite transformar la función en una forma que sea integrable, o se pueden aplicar los procedimientos que se mostraron para potencias de las funciones seno y coseno, tangente y secante, y cotangente y cosecante. Pero hay ocasiones en que la manera de resolver una integral es cambiando la variable algebraica a una variable trigonométrica, éstas son las integrales por sustitución trigonométrica, que veremos a continuación.

* Integrales por sustitución trigonométrica

Algunas de las expresiones que se pueden presentar al calcular una integral son de la forma , y , éstas pueden presentarse cuando, por ejemplo, se desea determinar el área de una circunferencia.

Cuando se tiene en una integral alguna de las raíces cuadradas mencionadas, es posible resolverla si se tiene además un factor adicional que nos permita tener completa la diferencial, como lo es la función y cuya integral se puede resolver por sustitución; pero si no se tiene completa la función y la diferencial, hay que usar otros procedimientos, uno de ellos es el que desarrollaremos al cambiar la variable por una trigonométrica.

La manera en que cambiamos la variable de algebraica a trigonométrica es usando el triángulo rectángulo, al cambiar la posición con respecto a los catetos adyacente y opuesto y la hipotenusa de los valores de la variable y de la constante . Veamos los diferentes casos que dan pie a cada una de las sustituciones trigonométricas que se pueden hacer.

* Primera sustitución
* IT. Realizar la siguiente figura con sus valores.

Cateto opuesto y cateto adyacente con lo cual la hipotenusa es , Diagrama

Descripción generada automáticamenteque se obtiene al aplicar el teorema de Pitágoras.

Los valores de los catetos determinan la tangente del ángulo , así

De donde

Ésta es la sustitución que debe de aplicarse, para la cual

La sustitución trigonométrica que se hace para este caso es con lo cual .

Y se identifica cuando en la función se tiene la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de la variable y de una constante.

* Segunda sustitución
* IT. Realizar la siguiente figura con sus valores.

Diagrama, Forma

Descripción generada automáticamenteCateto opuesto e hipotenusa con lo cual el cateto adyacente es que se obtiene al aplicar el teorema de Pitágoras.

Los valores del cateto opuesto y de la hipotenusa determinan el seno del ángulo , así

De donde

Ésta es la sustitución que debe de aplicarse, para la cual

La sustitución trigonométrica que se hace para este caso es con lo cual .

Y se identifica cuando en la función se tiene la raíz cuadrada de la diferencia del cuadrado de una constante y de la variable.

* Diagrama

  Descripción generada automáticamente con confianza mediaTercera sustitución
* IT. Realizar la siguiente figura con sus valores.

Hipotenusa y cateto adyacente con lo cual el cateto opuesto es , que se obtiene al aplicar el teorema de Pitágoras.

Los valores de la hipotenusa y del cateto adyacente determinan la secante del ángulo , así

De donde

Ésta es la sustitución que debe de aplicarse, para la cual

La sustitución trigonométrica que se hace para este caso es con lo cual .

Y se identifica cuando en la función se tiene la raíz cuadrada de la diferencia del cuadrado de la variable y de una constante.

Ejemplo 7. Determina el valor de la integral .

La expresión de la integral se ve simple ya que sólo es una función; sin embargo, no existe una regla de integración para determinar su valor. No puede usarse integración por sustitución, ya que no se tiene completa la diferencial, faltaría que multiplique a la función. Se recomienda emplear la integración por partes, ya que como es sólo una función, ésta deberá de ser y al derivarla la expresión se hace más compleja.

Usando la sustitución trigonométrica determinamos el valor de la integral, apliquemos el método.

Como la expresión en la raíz es una suma de la forma , la sustitución que se hace es con lo cual y .

Haciendo estas sustituciones tenemos

Para determinar el valor de esta integral usamos integración por partes

Sea con lo cual

Calculamos la integral , usemos identidades trigonométricas

Así

De donde

Resolvemos la ecuación

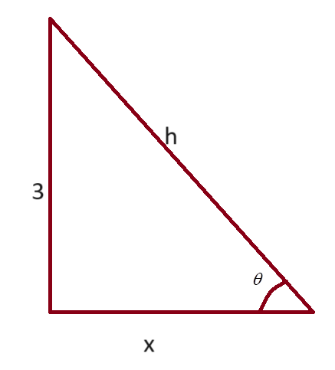
Así

Luego

Tenemos la solución de la integral trigonométrica, cambiemos a la variable .

El cambio de variable que hicimos es , el triángulo rectángulo de donde se obtiene es

IT. Realizar la siguiente figura con sus valores.



y .

La hipotenusa es .

Y .

Sustituyendo en la integral

Ejemplo 8. Determina el valor de la integral .

Usamos la sustitución trigonométrica.

Como la expresión en la raíz es una diferencia de la forma , la sustitución que se hace es con lo cual y .

Haciendo estas sustituciones tenemos

Usamos la identidad , así

Resolviendo la integral , usamos sustitución

con lo cual

Luego

Posteriormente

Tenemos la solución de la integral trigonométrica, cambiemos a la variable .

El cambio de variable que hicimos es , el triángulo rectángulo de donde se obtiene es

IT. Realizar la siguiente figura con sus valores.

Forma, Polígono

Descripción generada automáticamente

y .

El cateto adyacente es .

Y .

Sustituyendo en la integral

Ejemplo 9. Determina el valor de la integral .

La raíz que se tiene en la integral no es de la forma de suma o diferencia de cuadrados. Para usar la sustitución trigonométrica, debemos de expresar el radicando como suma o diferencia de cuadrados.

Completemos a un binomio al cuadrado la expresión del radicando, así

Con lo cual

Resolvamos esta integral usando la integración por sustitución.

Sea con lo cual , debemos de tener ahora una función en *,* así

Podemos resolver la integral usando la sustitución trigonométrica.

Por la forma de la raíz se hace la sustitución con lo cual y

Calculemos cada una de las integrales de .

Para determinar el valor de esta integral usamos integración por partes

Sea con lo cual

Calculamos la integral , usemos identidades trigonométricas

Así

De donde

Resolvemos la ecuación

Esta integral se resuelve usando una regla de integración .

Así

Tenemos la solución de la integral trigonométrica, cambiemos a la variable .

El cambio de variable que hicimos es , el triángulo rectángulo de donde se obtiene es

IT. Realizar la siguiente figura con sus valores.

Forma, Polígono

Descripción generada automáticamente

y .

El cateto adyacente es .

Y .

Sustituyendo en la integral

Usemos ahora la sustitución para que nos permita tener el resultado en términos de *,*

Así

Esperamos que, con los ejemplos anteriores, haya quedado claro el procedimiento para realizar las integrales por sustitución trigonométrica. Ahora resuelve el siguiente ejercicio relacionado con el tema.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: 40. Integrales por sustitución trigonométrica

Ejercicio 40. Integrales por sustitución trigonométrica

Instrucciones:

1. Determina el valor de la integral:
2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
3. Sube tu documento a la plataforma con la siguiente nomenclatura: *Apellido paterno\_Apellido materno\_Nombre(s)\_E40* para que quede tu evidencia registrada.
4. Comparte tu experiencia con tus compañeros y maestro en clase.

Hemos agregado dos métodos para el cálculo de integrales con los cuales se da solución a integrales de funciones trigonométricas y de expresiones algebraicas, en donde se tiene la raíz cuadrada de la suma o resta de cuadrados; pero aún falta por ver un método que se enfoca en la solución de integrales de funciones racionales que pueden ser expresadas como sumas de fracciones, mismo que se desarrolla en el tema siguiente.