4.5 Integrales de funciones racionales por fracciones parciales

Hemos desarrollado varios métodos de integración y empleado como integrando una gran variedad de funciones; pero aún nos falta un método por desarrollar. Éste se enfoca en las funciones racionales, también llamadas fracciones, y están formadas por polinomios en el numerador y en el denominador. Algunos de los métodos vistos pueden ser útiles para resolver este tipo de funciones; pero no es posible resolver todas ellas.

En álgebra se definieron las funciones racionales y se identificaron las fracciones propias y las impropias. Las fracciones impropias son aquéllas con el grado del numerador mayor que el grado del denominador. El método que desarrollaremos es para fracciones propias, esto es, aquéllas formadas por un cociente de polinomios y donde el grado del polinomio del numerador es menor que el del polinomio del denominador.

Cuando se tiene una fracción propia, si el grado del numerador es mayor a , es posible que se exprese como producto de factores más simples y la fracción puede expresarse como la suma de fracciones. Esta descomposición de una fracción propia como suma de fracciones es lo que llamamos fracciones parciales y nos da una forma diferente de expresar una fracción.

De acuerdo con el tipo de factorización que se hace en el denominador, es posible dividir en diferentes casos a las fracciones parciales.

Para calcular la integral de una función racional la expresaremos como una suma de fracciones parciales, algunas de las integrales con funciones racionales son:

, , y

Clasificaremos las funciones racionales en cuatro tipos dependiendo de la forma en la que puede expresarse el denominador, como producto de factores simples o como factores cuadráticos irreducibles.

1. Denominador con factores lineales diferentes

Cuando tenemos una función racional con factores lineales diferentes en el denominador, como

Para determinar las fracciones a las que es igual, se tiene

Una vez que se tiene esta expresión, se suman las fracciones propuestas y al comparar los numeradores se tiene un sistema de ecuaciones, lo ilustramos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1. Determinar el valor de la integral .

Si queremos resolver la integral por sustitución, tomamos con lo cual .

La diferencial no está completa, es posible sumar y restar el valor faltante; pero la integral que no se resuelva por sustitución se resuelve por fracciones parciales, así que desde el inicio usemos integrales de funciones racionales.

Expresemos la función del integrando como una suma de fracciones usando fracciones parciales

El denominador se puede factorizar como sigue

Así

Como las fracciones son iguales, tenemos

Luego

Así

Tenemos

Sumando

Y

La función racional se expresa como sigue

Con lo cual la integral

Usando propiedades de logaritmo

1. Denominador con factores lineales repetidos

Cuando la función racional tiene factores lineales repetidos en el denominador, como

Estos factores se representan de la siguiente manera

Como no se pueden conocer a partir de la fracción cuáles de los diferentes exponentes son los que llevan a obtenerla, se emplean todos los posibles exponentes.

Una vez que se tiene esta expresión, se suman las fracciones propuestas y al comparar los numeradores se tiene un sistema de ecuaciones, lo ilustramos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2. Determinar el valor de la integral .

Usemos fracciones parciales para expresar la función racional del integrando como suma de fracciones.

La función del integrando es .

Factoricemos el denominador

Así

Expresemos por medio de fracciones parciales,

Sumamos las fracciones, para ello determinamos el máximo común divisor

Igualando las fracciones tenemos

Así

entonces y ,

entonces y

entonces y

,

La fracción

Luego

Calculemos la integral

1. Denominador con factores cuadráticos irreducibles

Cuando la función racional tiene factores cuadráticos irreducibles en el denominador, como

O

Al factorizar el polinomio que se sitúa en el denominador la forma más simple que se tiene es una cuadrática que no es reducible, ya que su solución serán los números complejos.

La fracción puede expresarse como sigue

O

Aquí se proponen como sumas las expresiones con cada uno de los factores del denominador de la fracción y como numerador un polinomio de grado , ya no es una constante.

Una vez que se tiene esta expresión se suman las fracciones propuestas y al comparar los numeradores se tiene un sistema de ecuaciones, lo ilustramos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3. Calcular .

La resolvemos usando fracciones parciales para expresar la función racional, así que iniciemos factorizando el denominador

No es posible reducir los términos cuadráticos, ya que se tendría y no números reales tales que su cuadrado sea un número negativo.

Luego la función queda expresada del modo siguiente

Determinemos a qué suma de fracciones es igual

Como las fracciones son iguales

Así multiplicando por la igualdad se tiene .

Sumando las igualdades y .

Tenemos de donde y, por lo tanto, .

Multiplicando por la igualdad se tiene .

Sumando las igualdades y .

Tenemos y .

Con lo cual .

Así

Luego

Ya es posible calcular la integral

Así

1. Denominador con factores cuadráticos irreducibles repetidos

Cuando la función racional tiene factores cuadráticos irreducibles repetidos en el denominador, como

O

Al factorizar el polinomio que se encuentra en el denominador la forma más simple que se tiene es una cuadrática que no es reducible, ya que su solución serán los números complejos y en este caso elevada a una potencia .

La fracción puede expresarse como sigue

O

Al ser términos cuadráticos irreducibles, nuevamente se tienen en el numerador expresiones lineales y se consideran las diferentes potencias en la suma desde hasta .

Posteriormente se suman las fracciones propuestas y al comparar los numeradores se tiene un sistema de ecuaciones.

Ejemplo 4. Calcular .

Veamos si se puede factorizar la expresión cuadrática, para descomponer la función en factores simples

Resolvamos la cuadrática .

Al no ser la solución un número real, la cuadrática es irreducible.

Así que aplicaremos el procedimiento de fracciones parciales con factores cuadráticos irreducibles repetidos

Sumemos las fracciones

Igualando con la fracción inicial, tenemos

De donde

Con lo cual

Calculemos la integral

Hay que resolver dos integrales y .

Resolvemos la primera de ellas

Se divide en dos, resolvamos ahora estas integrales

La resolvemos por sustitución.

Sea con lo cual

Ahora calculamos la integral

Ésta la calcularemos por sustitución

Hacemos el cambio de variable con lo cual

Así es posible calcular la primera de las integrales y tenemos

Calculemos ahora la segunda integral, que se obtuvo por fracciones parciales

La función del denominador es la misma que se tiene en la integral anterior y al usar el cambio de variable llegamos a determinar el valor de la integral, así que la resolvemos usando sustitución

Hacemos el cambio de variable con lo cual

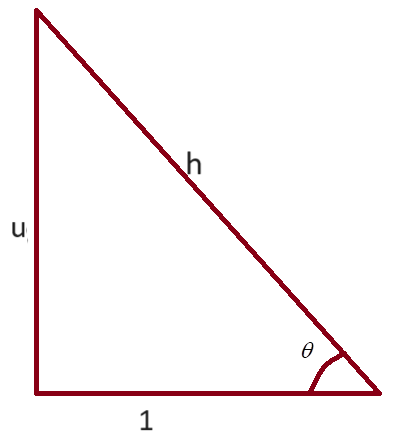
No se tiene una regla de integración y no se puede aplicar nuevamente sustitución porque no está completa la diferencial. Usemos sustitución trigonométrica, ya que se tiene una suma de cuadrados, y para tener la raíz cuadrada hacemos lo siguiente

Sea , así y

Para determinar el valor de la integral usamos la identidad trigonométrica , así

Volvemos a aplicar la identidad ; pero ahora para el ángulo , con lo cual

Expresemos este resultado con respecto al ángulo

Cambiemos la variable a , para ello usemos el triángulo rectángulo

con lo que se tiene el triángulo rectángulo con cateto opuesto y con cateto adyacente 1 e hipotenusa

Y

Como , tenemos

Ya tenemos el valor de las dos integrales, así

Resuelve el siguiente ejercicio que te ayudará a reafirmar el conocimiento adquirido hasta este momento.

IT. Colocar una caja de ejercicio con el siguiente nombre: 41. Integrales de funciones racionales por fracciones parciales

Ejercicio 41. Integrales de funciones racionales por fracciones parciales

Instrucciones:

1. Determina el valor de las integrales siguientes:
2. Realiza los procedimientos necesarios, ya sea a mano o en un documento.
3. Sube tu documento a la plataforma con la siguiente nomenclatura: *Apellido paterno\_Apellido materno\_Nombre(s)\_E41* para que quede tu evidencia registrada.
4. Comparte tu experiencia con tus compañeros y maestro en clase.

En este tema mostramos un ejemplo de cada uno de los tipos de descomposiciones que se pueden hacer de la función racional; pero también es posible combinarlos.

Conclusiones

El uso de fracciones parciales para calcular el valor de una integral nos da una estrategia para determinar el valor de una integral; pero depende de la descomposición que pueda hacerse del denominador para que este método nos lleve a una solución o, en su caso, si son aplicables los métodos de integración por sustitución, integrales trigonométricas o sustitución trigonométrica.

Los métodos que se han desarrollado nos proporcionan estrategias para la solución de integrales; pero aún con todas estas opciones puede suceder que algunas integrales no tengan solución. A continuación, veremos el concepto de integral definida, la integración numérica que nos permitirá determinar la integral definida de integrales que tal vez no tengan solución algebraica y diferentes aplicaciones de la integral.