

# 计算流体力学期末作业

曹林博 2200011012

## 1 数理算法原理

### 1.1 问题描述

针对 Sod 激波管问题，求解一维欧拉方程：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0.$$

其中：

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad E = \rho e = \rho \left( C_v T + \frac{1}{2} u^2 \right)$$

初始条件（在  $t = 0$ ）为：

$$\begin{cases} x < 0 : & (\rho_L, u_L, p_L) = (1, 0, 1), \\ x \geq 0 : & (\rho_R, u_R, p_R) = (0.125, 0, 0.1). \end{cases}$$

### 1.2 Riemann 精确解

该问题流程中，在连续部分满足控制方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(E)}{\partial t} + \frac{\partial(Eu + pu)}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

其中， $E = \rho e = \rho(C_v T + \frac{1}{2} u^2)$ .

在间断部分满足间断条件 Rankine – Hugoniot 关系式：

$$\begin{cases} \rho_1(u_1 - Z) = \rho_2(u_2 - Z) \\ \rho_1 u_1(u_1 - Z) + p_1 = \rho_2 u_2(u_2 - Z) + p_2 \\ E_1(u_1 - Z) + u_1 p_1 = E_2(u_2 - Z) + u_2 p_2 \end{cases}$$

其中， $Z$  为激波运动速度。

满足以上两个方程组的流场中可能产生三种波：

1. **激波**：密度、速度、压力突变，满足 Rankine – Hugoniot 关系式。
2. **膨胀波**：等熵波，内部物理量连续光滑，头尾物理量连续但导数不连续。
3. **接触间断**：两侧速度、压力相同，仅密度突变。

因此流场组合共有以下五种：

1. 激波、接触间断、激波
2. 膨胀波、接触间断、激波
3. 激波、接触间断、膨胀波
4. 膨胀波、接触间断、膨胀波
5. 膨胀波、膨胀波

经过对上述情况分析，我们将激波、膨胀波前后速度-压力的依赖关系写成统一的形式：

1. 左波（激波或膨胀波） $u^* = u_1 - f(p^*, p_1, \rho_1)$
2. 右波（激波或膨胀波） $u^* = u_2 + f(p^*, p_2, \rho_2)$

其中， $u^*, p^*$  表示接触间断速度和压力，且有：

$$f(p^*, p_i, \rho_i) = \begin{cases} \frac{p^* - p_i}{\rho_i c_i [\frac{\gamma+1}{2\gamma} (\frac{p^*}{p_i}) + \frac{\gamma-1}{2\gamma}]^{1/2}}, & p^* > p_i \\ \frac{2c_i}{\gamma-1} [(\frac{p^*}{p_i})^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1], & p^* < p_i \end{cases}$$

基于上述分析，我们可编写代码并求出 Riemann 精确解。

## 2 代码生成与调试

### 2.1 Riemann 精确解

我们在 `riemann.m` 文件中完成对 Sod 问题的 Riemann 精确解求解。算法流程分为以下三个步骤：

1. 根据公式  $F(p^*) = f(p^*, p_1, \rho_1) + f(p^*, p_2, \rho_2) - u_1 + u_2$ ，利用牛顿迭代法求解中心区域压力值。
2. 根据公式  $u^* = \frac{1}{2}[u_1 + u_2 + f(p^*, p_2, \rho_2) - f(p^*, p_1, \rho_1)]$  计算中心区域速度。并按前述公式确定两侧行波类型，计算中心区接触间断两侧的密度以及左右行波传播速度，及膨胀波区域内物理量。
3. 将求解结果保存为三个视频，以可视化结果。

## 3 结果讨论

### 3.1 Riemann 精确解

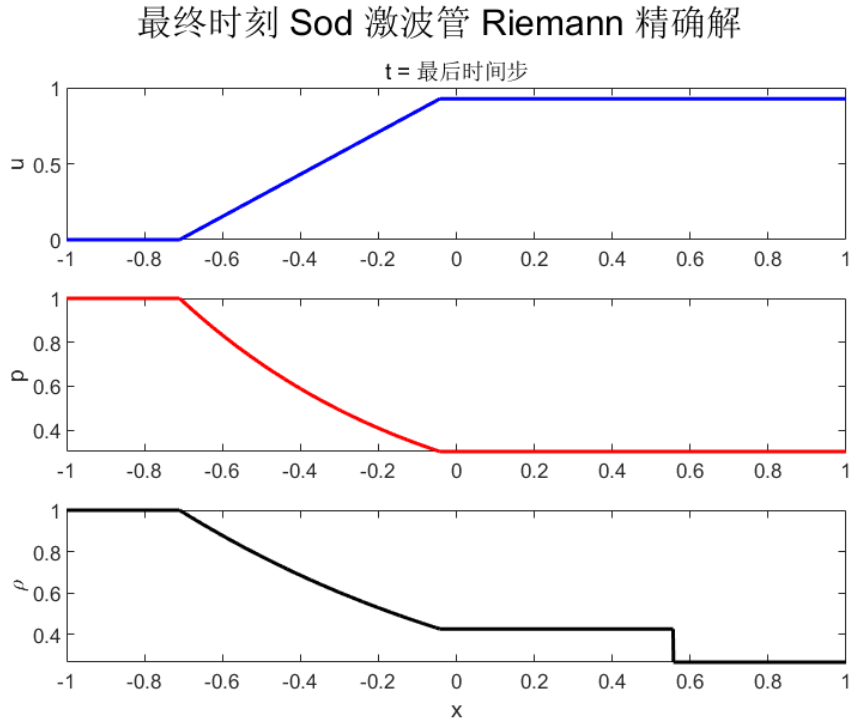


Figure 1: Riemann 精确解

结果表明，该问题解为右行激波、左行膨胀波的情况，并分别展示了速度、压强和密度的演化。在密度结果图中我们也发现了接触间断的位置。

## 4 附录

1. 本题在作流场二次涡图时使用 chatGPT 帮助撰写绘图 matlab 代码。
2. 本题代码文件设置较为清楚，且较为简单，故不使用 git 管理增加负担，无 git 管理记录。