

计算流体力学期末作业

曹林博 2200011012

1 数理算法原理

1.1 问题描述

针对 Sod 激波管问题，求解一维欧拉方程：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0.$$

其中：

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad E = \rho(e + \frac{1}{2}u^2) = \rho \left(C_v T + \frac{1}{2}u^2 \right)$$

初始条件（在 $t = 0$ ）为：

$$\begin{cases} x < 0 : & (\rho_L, u_L, p_L) = (1, 0, 1), \\ x \geq 0 : & (\rho_R, u_R, p_R) = (0.125, 0, 0.1). \end{cases}$$

1.2 Riemann 精确解

该问题流程中，在连续部分满足控制方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(E)}{\partial t} + \frac{\partial(Eu + pu)}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

其中， $E = \rho(e + \frac{1}{2}u^2) = \rho(C_v T + \frac{1}{2}u^2)$.

在间断部分满足间断条件 Rankine – Hugoniot 关系式：

$$\begin{cases} \rho_1(u_1 - Z) = \rho_2(u_2 - Z) \\ \rho_1 u_1(u_1 - Z) + p_1 = \rho_2 u_2(u_2 - Z) + p_2 \\ E_1(u_1 - Z) + u_1 p_1 = E_2(u_2 - Z) + u_2 p_2 \end{cases}$$

其中， Z 为激波运动速度。

满足以上两个方程组的流场中可能产生三种波：

1. **激波**：密度、速度、压力突变，满足 Rankine – Hugoniot 关系式。
2. **膨胀波**：等熵波，内部物理量连续光滑，头尾物理量连续但导数不连续。
3. **接触间断**：两侧速度、压力相同，仅密度突变。

因此流场组合共有以下五种：

1. 激波、接触间断、激波
2. 膨胀波、接触间断、激波
3. 激波、接触间断、膨胀波
4. 膨胀波、接触间断、膨胀波
5. 膨胀波、膨胀波

经过对上述五种情况分别分析（这里由于篇幅原因不予展示具体分析过程），我们将激波、膨胀波前后速度-压力的依赖关系写成统一的形式：

1. 左波（激波或膨胀波） $u^* = u_1 - f(p^*, p_1, \rho_1)$
2. 右波（激波或膨胀波） $u^* = u_2 + f(p^*, p_2, \rho_2)$

其中， u^*, p^* 表示接触间断速度和压力，且有：

$$f(p^*, p_i, \rho_i) = \begin{cases} \frac{p^* - p_i}{\rho_i c_i [\frac{\gamma+1}{2\gamma} (\frac{p^*}{p_i}) + \frac{\gamma-1}{2\gamma}]^{1/2}}, & p^* > p_i \\ \frac{2c_i}{\gamma-1} [(\frac{p^*}{p_i})^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1], & p^* < p_i \end{cases}$$

基于上述分析，我们可编写代码并求出 Riemann 精确解。

1.3 NND+FVS+RK3 方法

接下来, 我们首先从 NND 格式 (GVC 格式思想下一类具体实现方法) 入手撰写激波捕捉格式, 然后使用 FVS 类下 Steger_Warming 通量分裂方法进行通量处理, 最后使用 Runge-Kutta 方法推进时间积分。

考察空间中心差分格式, 针对 $a > 0$ 的情况, 我们得到离散格式及其对应的修正方程分别为:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_j + a \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = 0 \quad (1)$$

$$u_t + au_x = -\frac{a\Delta x^2}{6}u_{xxx} - \frac{a\Delta x^4}{120}u_{xxxx} + \cdots \quad (2)$$

我们考察 $\mu_3 < 0$, 仅满足间断后的条件, 可以预料最初的不合理解产生于间断前。

考察二阶迎风格式, 针对 $a > 0$ 的情况, 我们可以得到离散格式及其修正方程分别为:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_j + a \frac{3u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2}}{2\Delta x} = 0 \quad (3)$$

$$u_t + au_x = \frac{a\Delta x^2}{3}(1 - c^2)u_{xxx} + \frac{a\Delta x^3}{4}u_{xxxx} + \cdots \quad (4)$$

我们考察 $\mu_3 > 0$, 仅满足间断前的条件, 可以预料到间断后首先出现非物理现象。

根据上面分析, 我们可以将两个不同的格式组合起来, 构造出一个在间断前后都合理的格式, 即得到 GVC 格式 (书上写作 NND 格式):

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_j = \begin{cases} -a \frac{3u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2}}{2\Delta x}, & \text{间断前} \\ -a \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}, & \text{间断后} \end{cases}$$

针对一般方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

这里 $f = f(u)$ 是一个通量, 可以分解为 $f = f^+ + f^-$ 。对例如 $f = au$ 的情况, 定义

$$f^+ = \frac{1}{2}(a + |a|)u, \quad f^- = \frac{1}{2}(a - |a|)u.$$

于是得到如下的半离散格式:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_j = \begin{cases} -\frac{-3f_j^+ + 4f_{j-1}^+ + f_{j-2}^+}{2\Delta x} - \frac{f_{j+1}^- - f_{j-1}^-}{2\Delta x}, & \text{间断前} \\ -\frac{f_{j+1}^+ - f_{j-1}^+}{2\Delta x} - \frac{-3f_j^- + 4f_{j+1}^- - f_{j+2}^-}{2\Delta x}, & \text{间断后} \end{cases}$$

可以把上述数值格式统一写为如下守恒形式：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}(h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}}).$$

其中，

$$\begin{aligned} h_{j+\frac{1}{2}} &= f_{j+\frac{1}{2}L}^+ + f_{j+\frac{1}{2}R}^- \\ f_{j+\frac{1}{2}L}^+ &= \begin{cases} f_j^+ + \frac{1}{2}\Delta f_{j-1/2}^+, \\ f_j^+ + \frac{1}{2}\Delta f_{j+1/2}^+, \end{cases} \\ f_{j+\frac{1}{2}R}^- &= \begin{cases} f_{j+1}^- - \frac{1}{2}\Delta f_{j+1/2}^-, \\ f_{j+1}^- - \frac{1}{2}\Delta f_{j+3/2}^-, \end{cases} \\ \Delta f_{j+1/2}^\pm &= f_{j+1}^\pm - f_j^\pm \end{aligned}$$

通过上述数学分析，我们可以结合通量的分解，得到原欧拉方程组的 NND 格式（GVC 格式）为：

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}(H_{j+\frac{1}{2}} - H_{j-\frac{1}{2}})$$

其中，

$$H_{j+\frac{1}{2}} = F_{j+\frac{1}{2}L}^+ + F_{j+\frac{1}{2}R}^- \quad (5)$$

$$F_{j+\frac{1}{2}L}^+ = F_j^+ + \frac{1}{2}\minmod(\Delta F_{j-1/2}^+, \Delta F_{j+1/2}^+) \quad (6)$$

$$F_{j+\frac{1}{2}R}^- = F_{j+1}^- - \frac{1}{2}\minmod(\Delta F_{j+1/2}^-, \Delta F_{j+3/2}^-) \quad (7)$$

而对于通量项，我们可由 Steger_Warming (FVS) 通量分裂方法写为：

$$f = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{bmatrix} 2(\gamma-1)\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 2(\gamma-1)\lambda_1 u + \lambda_2(u+c) + \lambda_3(u-c) \\ (\gamma-1)\lambda_1 u^2 + \frac{(3-\gamma)(\lambda_2+\lambda_3)c^2}{2(\gamma-1)} + \frac{\lambda_2(u+c)^2}{2} + \frac{\lambda_3(u-c)^2}{2} \end{bmatrix}$$

其中我们定义 $\lambda_1 = u + c$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = u - c$ ，并规定：

当 $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_i = \lambda_i$, 否则 $\lambda_i = 0$, 得到 f^+

当 $\lambda_i < 0$, $\lambda_i = \lambda_i$, 否则 $\lambda_i = 0$, 得到 f^-

同时我们定义，

$$\minmod(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \leq 0 \\ \text{sign}(x) \min(|x|, |y|), & xy > 0 \end{cases}$$

空间离散化后我们将式子记为：

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}(H_{j+\frac{1}{2}} - H_{j-\frac{1}{2}}) = f(u)$$

根据 Runge-Kutta 方法，我们由如下推进时间计算公式：

$$\begin{cases} u_1 = u^n + \frac{1}{3}\Delta t f(u^n) \\ u_2 = u^n + \frac{2}{1}\Delta t f(u_1) \\ u^{n+1} = \frac{1}{4}(u^n + 3u_1) + \frac{3}{4}\Delta t f(u_2) \end{cases}$$

基于上述推导，我们可求得 Sod 问题的近似解。

1.4 WENO+FDS+RK3 方法

接下来，我们从 HLLC 格式（FDS 格式）入手给出一种计算一维 Sod 问题近似解的方法，利用 WENO 格式构造 U_L, U_R ，使用 Runge-Kutta 方法推进时间求解。

HLLC 格式是基于 HLL 格式的改进格式，通过引入左行波、右行波和中间波，实现准确捕捉接触间断。首先我们估计左右波速：

$$S_L = \min(u_L, u_R) - \max(a_L, a_R)$$

$$S_R = \max(u_L, u_R) + \max(a_L, a_R)$$

通过求解自守恒的 Rankine-Hugoniot 条件，我们可得接触面速度：

$$S_M = \frac{p_R - p_L + \rho_L u_L (S_L - u_L) - \rho_R u_R (S_R - u_R)}{\rho_L (S_L - u_L) - \rho_R (S_R - u_R)}$$

以及求得中间状态压强：

$$p^* = \frac{1}{2}(p_L + p_R) + \frac{1}{2}[\rho_L (S_L - u_L)(S_M - u_L) + \rho_R (S_R - u_R)(S_M - u_R)]$$

并定义用于加入压力项的方向向量：

$$D = [0, 1, S_M]$$

按照如下公式我们可以计算通量：

$$f_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} f_L, & S_L \geq 0 \\ f_R, & S_R \leq 0 \\ \frac{S_M(S_L * U_L - f_L) + S_L * p^* * D}{S_L - S_M}, & S_L \leq 0, S_M \geq 0 \\ \frac{S_M(S_R * U_R - f_R) + S_R * p^* * D}{S_R - S_M}, & S_R \geq 0, S_M \leq 0 \end{cases}$$

WENO 作为高阶、非震荡格式的激波捕捉格式，通过加权不同基架系构造近似值。以构造 $U_{i+\frac{1}{2}}^+$ 为例，使用以下坐标系

$$S_0 = U_{i-2}, U_{i-1}, U_i$$

$$S_1 = U_{i-1}, U_i, U_{i+1}$$

$$S_2 = U_i, U_{i+1}, U_{i+2}$$

对每组构造三阶近似：

$$U_0 = \frac{1}{3}U_{i-2} - \frac{7}{6}U_{i-1} + \frac{11}{6}U_i$$

$$U_1 = -\frac{1}{6}U_{i-1} + \frac{5}{6}U_i + \frac{1}{3}U_{i+1}$$

$$U_2 = \frac{1}{3}U_i + \frac{5}{6}U_{i+1} - \frac{1}{6}U_{i+2}$$

接下来按公式计算平滑指标：

$$\beta_0 = \frac{13}{12}(f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i)^2 + \frac{1}{4}(f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i)^2$$

$$\beta_1 = \frac{13}{12}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(f_{i-1} - f_{i+1})^2$$

$$\beta_2 = \frac{13}{12}(f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2})^2$$

给定理想权重 $d = [1, 6, 3]$ ，计算非线性权重为：

$$\alpha_k = \frac{d_k}{(\epsilon + \beta_k)^2}, \omega_k = \frac{\alpha_k}{\sum_j \alpha_j}$$

从而最终构造 U ：

$$U = \sum_{k=0}^2 \omega_k U_k$$

Runge-Kutta 方法如之前所述，便不再赘述。由此我们求近似解。

1.5 TVD 方法

接下来我们从 TVD 格式入手，构造限制器 TVD 格式，并使用高低通量计算公式计算边界通量，使用欧拉一阶向前算法推动时间步求解。

考虑如下的离散方案：

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\Delta x}(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n)$$

在计算单元边界通量时，我们采取高低通量与限制器结合的格式。即高通量为空间离散采用中心差分格式得到的等价通量表达式，低通量为方程采用 Lax 格式离散得到的等价通量表达式：

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = F_{i+\frac{1}{2}}^{Low} - \phi(r_i)(F_{i+\frac{1}{2}}^{Low} - F_{i+\frac{1}{2}}^{High})$$

其中，给定计算公式：

$$r_i = \frac{U_i - U_{i-1}}{U_{i+1} - U_i}$$

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{Low} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{\Delta x}{2\Delta t}(U_{i+1} - U_i)$$

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{High} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1})$$

上述数学分析表明，我们在使用 TVD 格式的时候不需要使用 FDS 与 FVS 通量计算方法，且为了计算稳定与简便，我们不使用 RK3 方法进行求解。根据上述公式，我们可以推进计算近似解。

2 代码生成与调试

2.1 Riemann 精确解

我们在 `riemann.m` 文件中完成对 Sod 问题的 Riemann 精确解求解。算法流程分为以下三个步骤：

1. 根据公式 $F(p^*) = f(p^*, p_1, \rho_1) + f(p^*, p_2, \rho_2) - u_1 + u_2$ ，利用牛顿迭代法求解中心区域压力值。
2. 根据公式 $u^* = \frac{1}{2}[u_1 + u_2 + f(p^*, p_2, \rho_2) - f(p^*, p_1, \rho_1)]$ 计算中心区域速度。并按前述公式确定两侧行波类型，计算中心区接触间断两侧的密度以及左右行波传播速度，及膨胀波区域内物理量。
3. 将求解结果保存为三个视频，以可视化结果。

2.2 NND+FVS+RK3 方法

我们在 `NND_FVS_RK3.m` 文件中完成对 Sod 问题的近似求解。算法流程大致分为以下几个步骤：

1. 计算声速和特征值。
2. 根据 Steger_Warming 公式计算守恒量通量项。
3. 根据 NND 格式计算每个位置的通量及守恒量。
4. 利用 Runge-Kutta 方法完成时间步推进。

5. 将每次计算结果重画在画布上，方便展示结果动态变化过程，同时方便我们生成视频。

2.3 WENO+FDS+RK3 方法

我们在 WENO_FDS_RK3.m 文件中完成对 Sod 问题的近似求解。算法流程大致分为以下几个步骤：

1. 根据 WENO 格式计算某位置处 U_L, U_R 。
2. 根据 HLLC 格式完成通量及守恒量计算。
3. 利用 Runge-Kutta 方法完成时间步推进。
4. 将每次计算结果重画在画布上，从而方便展示结果动态变化过程，同时我们生成视频。

2.4 TVD 方法

我们在 TVD.m 文件中完成对 Sod 问题的近似求解。算法流程大致分为以下几个步骤：

1. 根据上述公式计算响应的低通量和高通量，以及计算相应的 r_i 。
2. 施加限制器，根据公式计算 $F_{i+\frac{1}{2}}$ 。
3. 利用 Euler 向前计算方法完成时间步推进。
4. 将每次计算结果重画在画布上，方便展示结果动态变化过程，同时方便我们生成视频。

3 结果讨论

3.1 Riemann 精确解

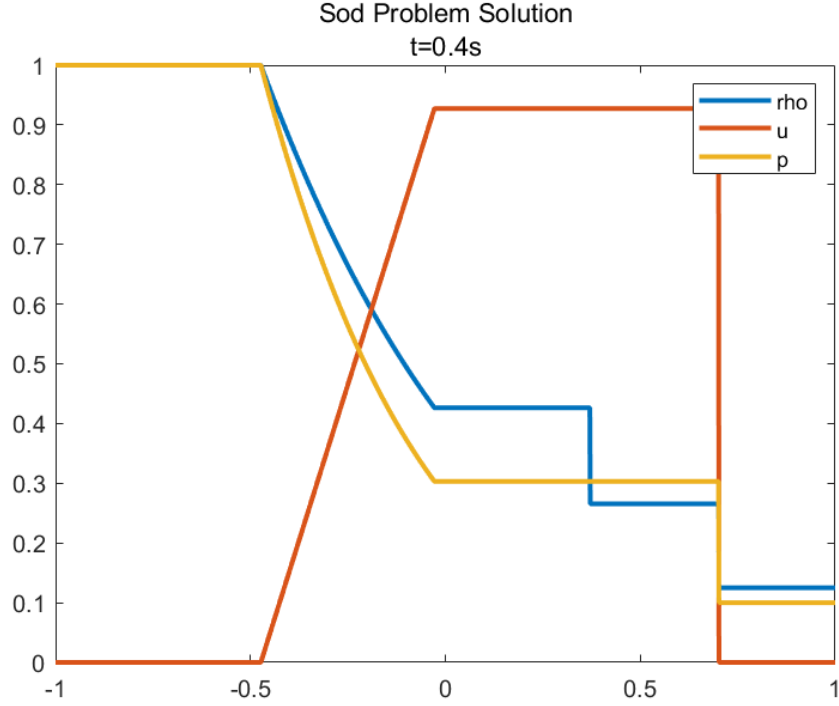


Figure 1: Riemann 精确解

在结果图中我们可以看到，蓝线为密度 ρ ，红线为速度 u ，黄线为压强 p ，时间取最终时刻 $t = 0.4$ 。在生成的视频中我们可以看到，激波被由右区向右传播，接触间断处的密度发生突变而速度、压强平稳，膨胀波在左区向左传播，速度和密度呈平滑衰减过渡，这三个特征波组成了黎曼问题的解析解。

通过构造中间状态 (p^*, u^*) 并结合 Rankine-Hugoniot 跃迁关系与膨胀自相似解，解析得到任意时刻下 t 的密度、速度与压强分布，反映了一维 Euler 系统中典型非线性波动的演化规律。

3.2 计算域网格大小的关系

以近似解中效果最好的 NND+FVS+RK3 求解方法为例，我们在 LawOfDX.m 文件中探究计算域网格大小对近似解求解效果的影响。

我们分别设置 $x \in [-1, 1]$ ，设置空间间隔 $dx = [0.1, 0.05, 0.01, 0.005]$ ，设置 $dt = 0.001, t_{max} = 0.4$ ，依托 NND+FVS+RK3 的求解方法，得到不同空间间隔下关于速度

u 、压强 p 和密度 ρ 的数值解，将其与精确解画在一张图上，如图所示，可清晰观察到以下规律。

1. 整体趋势收敛明确。随着 dx 的减小，数值解逐渐向解析解收敛，误差明显减小，高分辨率（如 $\Delta x = 0.005$ 下，数值解在各个间断与过渡区域都能精确捕捉波结构。
2. 在激波与接触间断区域，误差随网格明显变化。对于 u 和 ρ 曲线，在 $\Delta x = 0.1, 0.05$ 时，激波后方和接触面区域出现数值扩散，表现为过渡层变宽、台阶不平；而在更精确的网格密度时，这些结构更陡峭，跳跃位置也更准确。
3. 膨胀波区表现稳定但解析精度随网格提升而增强。 p 与 ρ 在膨胀波区域的变化较为平滑，表现出 WENO 格式在光滑区域的高阶精度；网格粗时略有数值耗散，网格细化后解变得更贴近解析光滑曲线。
4. 数值解无明显振荡，方法稳定性良好。

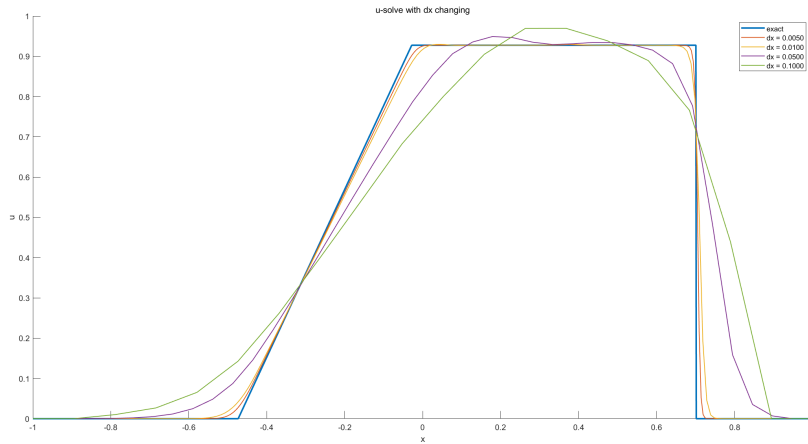
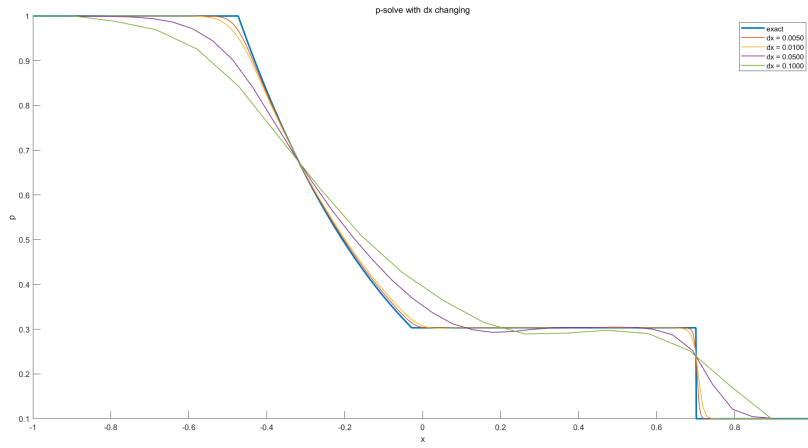
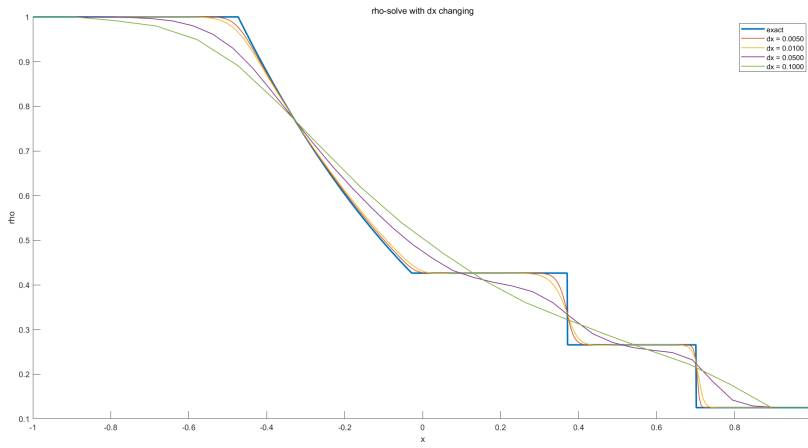


Figure 2: 不同网格精度下速度 u 的解曲线

Figure 3: 不同网格精度下压强 p 的解曲线Figure 4: 不同网格精度下密度 ρ 的解曲线

整体而言，随着网格加密，数值解逐步逼近解析解，尤其在激波与接触面等间断区域表现出更高的分辨率和精度。

3.3 NND+FVS+RK3 方法

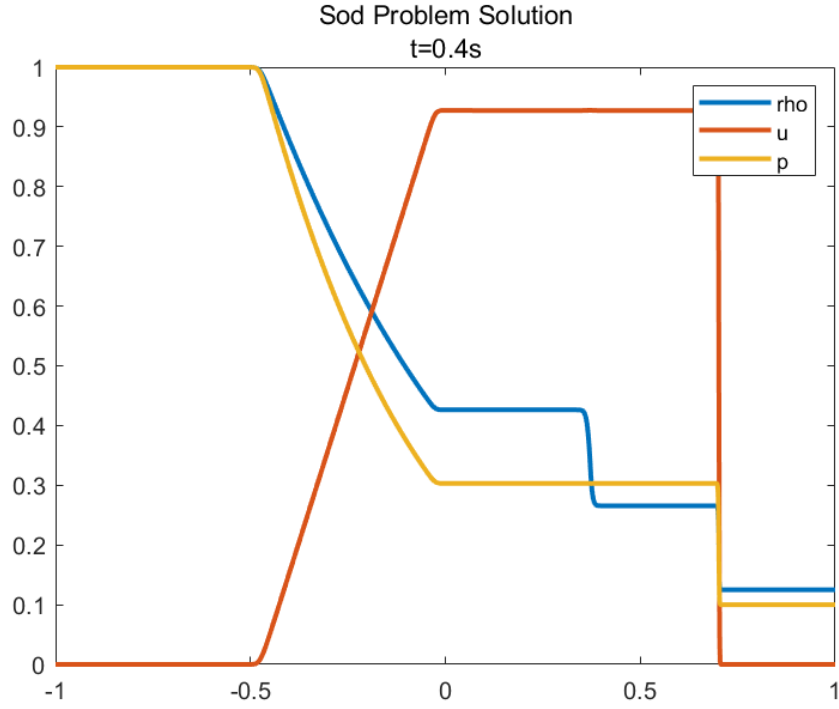


Figure 5: NND+FVS+RK3 方法近似解

NND 格式实现空间高阶重构，FVS 方法处理通量，三阶 RungeKutta 格式进行时间推进。该组合兼具震波捕捉能力与无振荡性。左侧膨胀波区域密度与压强呈连续下降，速度线性上升，曲线形状平滑，较好还原解析解中的稀疏波；中间密度出现轻微但清晰的阶跃，速度与压强保持连续，未出现明显数值振荡，具有良好的非振荡性；右侧激波区域阶跃较为准确，表现出激波捕捉方面的稳健性。

3.4 WENO+FDS+RK3 方法

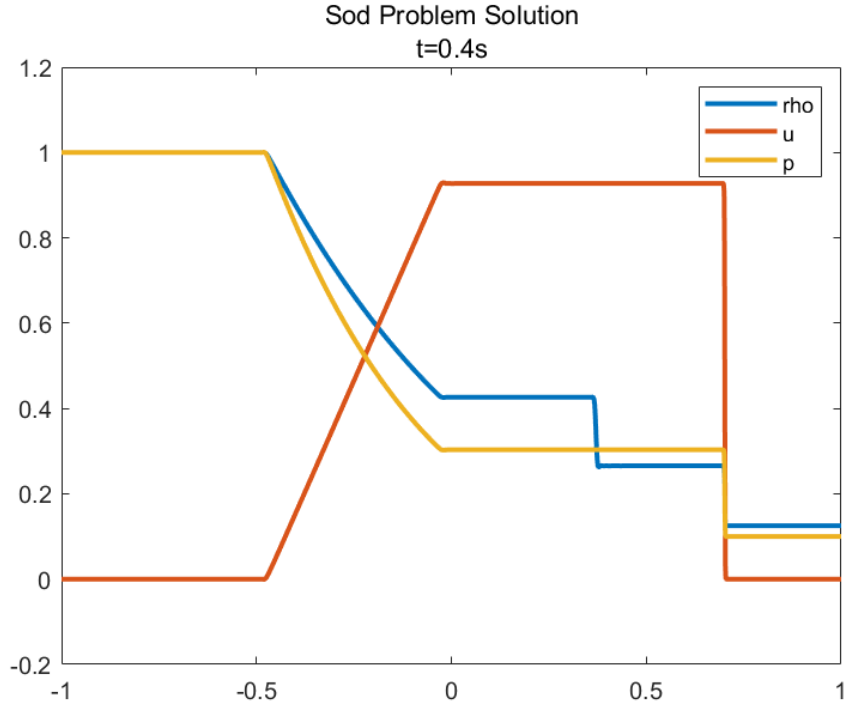


Figure 6: WENO+FDS+RK3 方法近似解

五阶 WENO 重构提升间断捕捉精度，基于波速分裂的 HLLC 的计算通量公式，显式三阶 Runge-Kutta 方法保持整体三阶时间精度构成了求近似解的组合。左侧膨胀波区域密度和压强平滑下降，速度线性上升，由于 WENO 方法在光滑区展现的高阶精度，几乎无数值耗散；中间接触间断处密度存在阶跃，压强和速度保持连续，接触面过渡范围小说明该组合高分辨率，且无明显数值振荡；右侧激波清晰紧凑，表明对激波结构捕捉良好的保形性。

3.5 TVD 方法

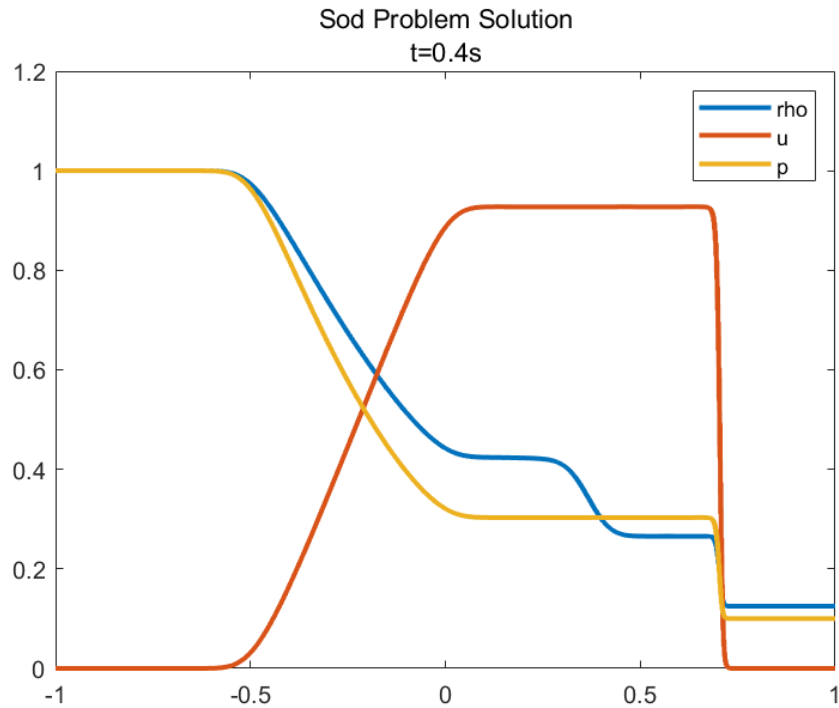
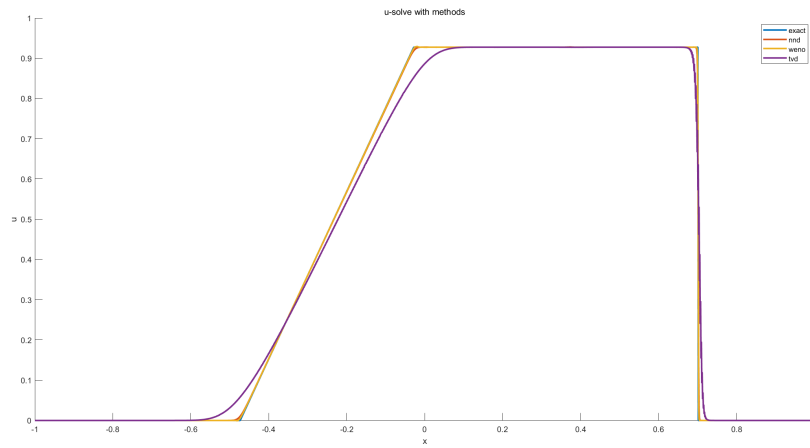
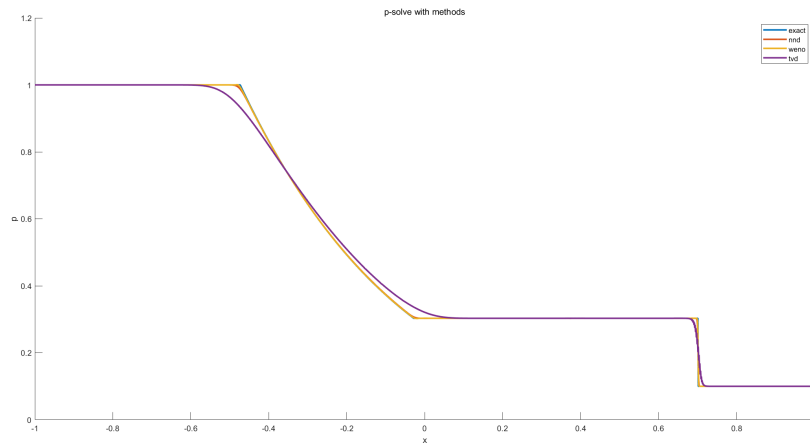
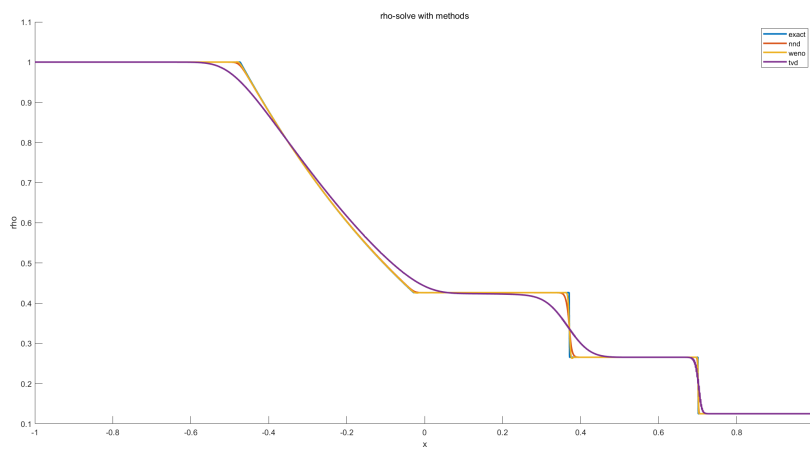


Figure 7: TVD 方法近似解

TVD 实现激波捕捉，确保总变差不增加，具有良好的稳定性和抑制非物理振荡的能力。从图中我们可以观察到，左侧膨胀波区域密度与压强光滑下降，速度连续上升，曲线过渡平稳，未见数值振荡，说明 TVD 格式成功保留了解的光滑性；中接触间断处密度出现明显突变，速度与压强保持连续，阶跃未出现伪影，表明限制器有效限制了局部振荡；右侧激波区域密度、压强和速度出现阶跃，虽有一定程度的扩散，但位置准确，无数值震荡。

3.6 总结

我们将三种方法结果与精确解置于一张图，并总结如下表：

Figure 8: 不同求解方法速度 u 的解曲线Figure 9: 不同求解方法压强 p 的解曲线Figure 10: 不同求解方法密度 ρ 的解曲线

图中将数值解与精确解进行对比，分别在三个物理量上呈现，不难看出各格式都能基本还原解的整体结构：膨胀波、接触间断和激波均可辨认；但在接触间断精度、激波过渡宽度、波前稳定性方面存在显著差异。

TVD 方法表现为最稳定的格式，几乎无数值振荡；但数值耗散最强，导致激波和接触面附近的跳跃区域变宽、变平缓；精度较低，但具有优秀的鲁棒性，适合粗网格/强间断问题。

WENO+FDS 方法在所有方法中表现出最好的高阶精度，膨胀波区平滑；激波位置贴合精确解；接触面跳跃更集中；略有小幅“台阶状”误差，原因可能是未使用特征重构或误差扩展到能量项；在分辨率和精度上达到较好平衡。

NND+FVS 方法表现介于 TVD 和 WENO 之间，相较于 TVD 有更清晰的跳跃结构；相较于 WENO，仍略显扩散，特别是在接触面区域；稳定性优于 WENO，误差略大于其，但收敛速度较好。

Table 1: 三种格式的比较结果

特征维度	TVD	WENO+FDS	NND+FVS
振荡性	轻微振荡，较稳定	无振荡，较稳定	基本无振荡
分辨率	接触面略有数值扩散	高分辨率，锐利分界	平衡稳定性与分辨率
算法复杂度	简单，易于实现	复杂，需进行权重处理	略复杂，依赖重构方式
计算效率	快速稳定	耗时多，重构成本较高	中等
物理一致性	间断处有钝化趋势	精度高重	稳定守恒，非振荡性好

4 附录

1. Github 管理说明：本项目存于 RobertRainbow/CFDFinal/的仓库中，具体分为：README.md 文件用于帮助用户了解仓库代码结构及内容；Request.pdf 文件为大作业要求；Report 文件夹为 latex 语言完成报告相关文件；Code 文件夹为 matlab 代码用于求解本作业问题。管理记录见图：
2. AI 使用说明：本项目在进行 Riemann 精确解分析的时候使用了 AI+ 网络资料搜索的部分代码参考，在完成其余各部分 matlab 代码时均为自己查阅相关书籍与论文时推导并编写的。总 AI 代码量约占 $100/1000=10\%$