

计算流体力学期末作业

曹林博 2200011012

1 数理算法原理

1.1 问题描述

针对 Sod 激波管问题，求解一维欧拉方程：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0.$$

其中：

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad E = \rho(e + \frac{1}{2}u^2) = \rho \left(C_v T + \frac{1}{2}u^2 \right)$$

初始条件（在 $t = 0$ ）为：

$$\begin{cases} x < 0 : & (\rho_L, u_L, p_L) = (1, 0, 1), \\ x \geq 0 : & (\rho_R, u_R, p_R) = (0.125, 0, 0.1). \end{cases}$$

1.2 Riemann 精确解

该问题流程中，在连续部分满足控制方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(E)}{\partial t} + \frac{\partial(Eu + pu)}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

其中， $E = \rho e = \rho(C_v T + \frac{1}{2}u^2)$.

在间断部分满足间断条件 Rankine – Hugoniot 关系式：

$$\begin{cases} \rho_1(u_1 - Z) = \rho_2(u_2 - Z) \\ \rho_1 u_1(u_1 - Z) + p_1 = \rho_2 u_2(u_2 - Z) + p_2 \\ E_1(u_1 - Z) + u_1 p_1 = E_2(u_2 - Z) + u_2 p_2 \end{cases}$$

其中， Z 为激波运动速度。

满足以上两个方程组的流场中可能产生三种波：

1. **激波**：密度、速度、压力突变，满足 Rankine – Hugoniot 关系式。
2. **膨胀波**：等熵波，内部物理量连续光滑，头尾物理量连续但导数不连续。
3. **接触间断**：两侧速度、压力相同，仅密度突变。

因此流场组合共有以下五种：

1. 激波、接触间断、激波
2. 膨胀波、接触间断、激波
3. 激波、接触间断、膨胀波
4. 膨胀波、接触间断、膨胀波
5. 膨胀波、膨胀波

经过对上述情况分析，我们将激波、膨胀波前后速度-压力的依赖关系写成统一的形式：

1. 左波（激波或膨胀波） $u^* = u_1 - f(p^*, p_1, \rho_1)$
2. 右波（激波或膨胀波） $u^* = u_2 + f(p^*, p_2, \rho_2)$

其中， u^*, p^* 表示接触间断速度和压力，且有：

$$f(p^*, p_i, \rho_i) = \begin{cases} \frac{p^* - p_i}{\rho_i c_i [\frac{\gamma+1}{2\gamma} (\frac{p^*}{p_i}) + \frac{\gamma-1}{2\gamma}]^{1/2}}, & p^* > p_i \\ \frac{2c_i}{\gamma-1} [(\frac{p^*}{p_i})^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1], & p^* < p_i \end{cases}$$

基于上述分析，我们可编写代码并求出 Riemann 精确解。

1.3 NND+FVS+RK3 方法

接下来，我们首先从 NND 格式（群速度方法）入手撰写激波捕捉格式，然后使用 FVS 类下 Steger_Warming 通量分裂方法进行通量处理，最后使用 Runge-Kutta 方法推进时间积分。

通过通量的分解，我们可以得到原欧拉方程组的 NND 格式为：

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}(H_{j+\frac{1}{2}} - H_{j-\frac{1}{2}})$$

其中

$$H_{j+\frac{1}{2}} = F_{j+\frac{1}{2}L}^+ + F_{j+\frac{1}{2}R}^- \quad (1)$$

$$F_{j+\frac{1}{2}L}^+ = F_j^+ + \frac{1}{2} \minmod(\Delta F_{j-1/2}^+, \Delta F_{j+1/2}^+) \quad (2)$$

$$F_{j+\frac{1}{2}R}^- = F_{j+1}^- - \frac{1}{2} \minmod(\Delta F_{j+1/2}^-, \Delta F_{j+3/2}^-) \quad (3)$$

而对于通量项，我们可由 Steger_Warming（FVS）通量分裂方法写为：

$$f = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{bmatrix} 2(\gamma-1)\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 2(\gamma-1)\lambda_1 u + \lambda_2(u+c) + \lambda_3(u-c) \\ (\gamma-1)\lambda_1 u^2 + \frac{(3-\gamma)(\lambda_2+\lambda_3)c^2}{2(\gamma-1)} + \frac{\lambda_2(u+c)^2}{2} + \frac{\lambda_3(u-c)^2}{2} \end{bmatrix}$$

其中，

当 $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_i = \lambda_i$, 否则 $\lambda_i = 0$, 得到 f^+

当 $\lambda_i < 0$, $\lambda_i = \lambda_i$, 否则 $\lambda_i = 0$, 得到 f^-

同时我们定义，

$$\minmod(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \leq 0 \\ \text{sign}(x) \min(|x|, |y|), & xy > 0 \end{cases}$$

空间离散化后我们将式子记为：

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_j = -\frac{1}{\Delta x}(H_{j+\frac{1}{2}} - H_{j-\frac{1}{2}}) = f(u)$$

根据 Runge-Kutta 方法，我们由如下推进时间计算公式：

$$\begin{cases} u_1 = u^n + \frac{1}{3}\Delta t f(u^n) \\ u_2 = u^n + \frac{2}{1}\Delta t f(u_1) \\ u^{n+1} = \frac{1}{4}(u^n + 3u_1) + \frac{3}{4}\Delta t f(u_2) \end{cases}$$

基于上述推导，我们可求得 Sod 问题的近似解。

1.4 WENO+FDS+RK3 方法

接下来，我们从 HLLC 格式（FDS）入手给出一种近似计算 Riemann 通量的方法，利用 WENO 格式构造 U_L, U_R ，使用 Runge-Kutta 方法推进时间求解。

HLLC 格式是基于 HLL 格式的改进格式，通过引入左行波、右行波和中间波，实现准确捕捉接触间断。首先我们估计左右波速：

$$S_L = \min(u_L, u_R) - \max(a_L, a_R)$$

$$S_R = \max(u_L, u_R) + \max(a_L, a_R)$$

通过求解自守恒的 Rankine-Hugoniot 条件，我们可得接触面速度：

$$S_M = \frac{p_R - p_L + \rho_L u_L (S_L - u_L) - \rho_R u_R (S_R - u_R)}{\rho_L (S_L - u_L) - \rho_R (S_R - u_R)}$$

以及求得中间状态压强：

$$p^* = \frac{1}{2}(p_L + p_R) + \frac{1}{2}[\rho_L (S_L - u_L)(S_M - u_L) + \rho_R (S_R - u_R)(S_M - u_R)]$$

并定义用于加入压力项的方向向量：

$$D = [0, 1, S_M]$$

按照如下公式我们可以计算通量：

$$f_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} f_L, & S_L \geq 0 \\ f_R, & S_R \leq 0 \\ \frac{S_M(S_L * U_L - f_L) + S_L * p^* * D}{S_L - S_M}, & S_L \leq 0, S_M \geq 0 \\ \frac{S_M(S_R * U_R - f_R) + S_R * p^* * D}{S_R - S_M}, & S_R \geq 0, S_M \leq 0 \end{cases}$$

WENO 作为高阶、非震荡格式的激波捕捉格式，通过加权不同基架系构造近似值。以构造 $U_{i+\frac{1}{2}}^+$ 为例，使用以下坐标系

$$S_0 = U_{i-2}, U_{i-1}, U_i$$

$$S_1 = U_{i-1}, U_i, U_{i+1}$$

$$S_2 = U_i, U_{i+1}, U_{i+2}$$

对每组构造三阶近似：

$$U_0 = \frac{1}{3}U_{i-2} - \frac{7}{6}U_{i-1} + \frac{11}{6}U_i$$

$$U_1 = -\frac{1}{6}U_{i-1} + \frac{5}{6}U_i + \frac{1}{3}U_{i+1}$$

$$U_2 = \frac{1}{3}U_i + \frac{5}{6}U_{i+1} - \frac{1}{6}U_{i+2}$$

接下来按公式计算平滑指标:

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \frac{13}{12}(f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i)^2 + \frac{1}{4}(f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i)^2 \\ \beta_1 &= \frac{13}{12}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(f_{i-1} - f_{i+1})^2 \\ \beta_2 &= \frac{13}{12}(f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2})^2\end{aligned}$$

给定理想权重 $d = [1, 6, 3]$, 计算非线性权重为:

$$\alpha_k = \frac{d_k}{(\epsilon + \beta_k)^2}, \omega_k = \frac{\alpha_k}{\sum_j \alpha_j}$$

从而最终构造 U :

$$U = \sum_{k=0}^2 \omega_k U_k$$

Runge-Kutta 方法如之前所述, 便不再赘述。由此我们求近似解。

1.5 TVD 方法

接下来我们从 TVD 格式入手, 构造限制器 TVD 格式, 并使用高低通量计算公式计算边界通量, 使用欧拉一阶向前算法推动时间步求解。

考虑如下的离散方案:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\Delta x}(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n)$$

在计算单元边通量时, 我们采取高低通量与限制器结合的格式:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = F_{i+\frac{1}{2}}^{Low} - \phi(r_i)(F_{i+\frac{1}{2}}^{Low} - F_{i+\frac{1}{2}}^{High})$$

其中, 给定计算公式:

$$\begin{aligned}r_i &= \frac{U_i - U_{i-1}}{U_{i+1} - U_i} \\ F_{i+\frac{1}{2}}^{Low} &= \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{\Delta x}{2\Delta t}(U_{i+1} - U_i) \\ F_{i+\frac{1}{2}}^{High} &= \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1})\end{aligned}$$

根据上述公式, 我们可以推进计算近似解。

2 代码生成与调试

2.1 Riemann 精确解

我们在 `riemann.m` 文件中完成对 Sod 问题的 Riemann 精确解求解。算法流程分为以下三个步骤：

1. 根据公式 $F(p^*) = f(p^*, p_1, \rho_1) + f(p^*, p_2, \rho_2) - u_1 + u_2$ ，利用牛顿迭代法求解中心区域压力值。
2. 根据公式 $u^* = \frac{1}{2}[u_1 + u_2 + f(p^*, p_2, \rho_2) - f(p^*, p_1, \rho_1)]$ 计算中心区域速度。并按前述公式确定两侧行波类型，计算中心区接触间断两侧的密度以及左右行波传播速度，及膨胀波区域内物理量。
3. 将求解结果保存为三个视频，以可视化结果。

2.2 NND+FVS+RK3 方法

我们在 `NND_FVS_RK3.m` 文件中完成对 Sod 问题的近似求解。算法流程大致分为以下几个步骤：

1. 计算声速和特征值。
2. 根据 Steger_Warming 公式计算守恒量通量项。
3. 根据 NND 格式计算每个位置的通量及守恒量。
4. 利用 Runge-Kutta 方法完成时间步推进。
5. 将每次计算结果重画在画布上，从而方便展示结果动态变化过程，同时我们生成视频。

2.3 WENO+FDS+RK3 方法

我们在 `WENO_FDS_RK3.m` 文件中完成对 Sod 问题的近似求解。算法流程大致分为以下几个步骤：

1. 根据 WENO 格式计算某位置处 U_L, U_R 。
2. 根据 HLLC 格式完成通量及守恒量计算。

3. 利用 Runge-Kutta 方法完成时间步推进。
4. 将每次计算结果重画在画布上，从而方便展示结果动态变化过程，同时我们生成视频。

2.4 TVD 方法

我们在 TVD.m 文件中完成对 Sod 问题的近似求解。算法流程大致分为以下几个步骤：

1. 根据上述公式计算响应的低通量和高通量，以及计算相应的 r_i 。
2. 施加限制器，计算 $F_{i+\frac{1}{2}}$ 。
3. 利用 Euler 向前计算方法完成时间步推进。（尝试过 RK3 方法，但是效果并不如 Euler 方法好）
4. 将每次计算结果重画在画布上，从而方便展示结果动态变化过程，同时我们生成视频。

3 结果讨论

3.1 Riemann 精确解

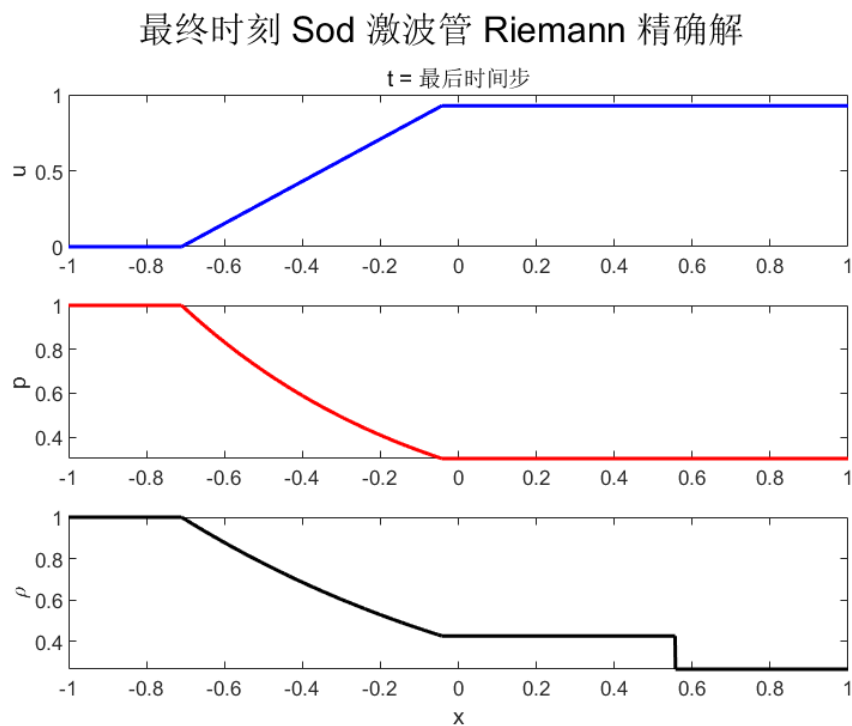


Figure 1: Riemann 精确解

结果表明，该问题解为右行激波、左行膨胀波的情况，并分别展示了速度、压强和密度的演化。在密度结果图中我们也发现了接触间断的位置。

3.2 NND+FVS+RK3 方法

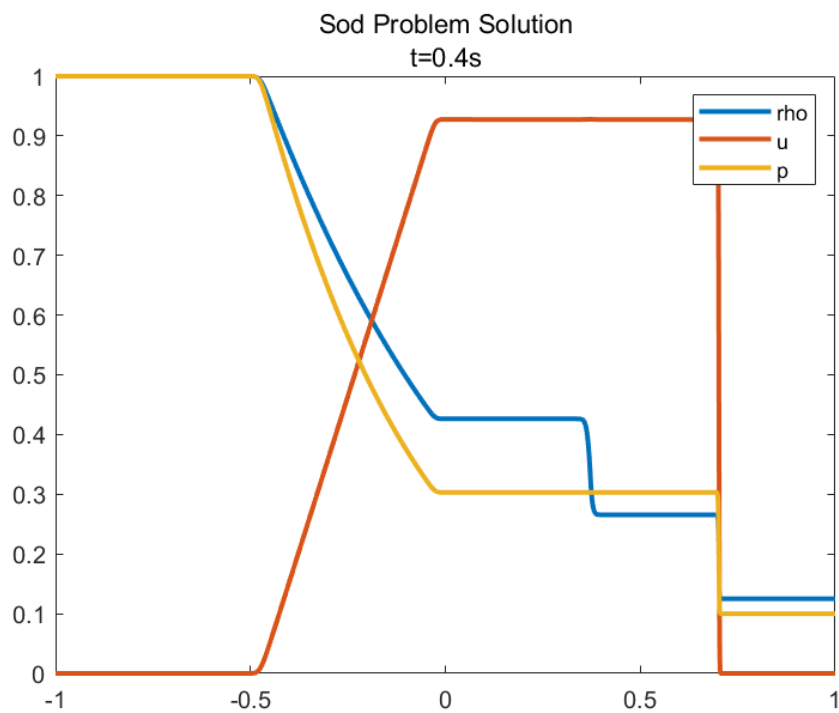


Figure 2: NND+FVS+RK3 方法近似解

结果表明，该问题解与精确解相同。

3.3 WENO+FDS+RK3 方法

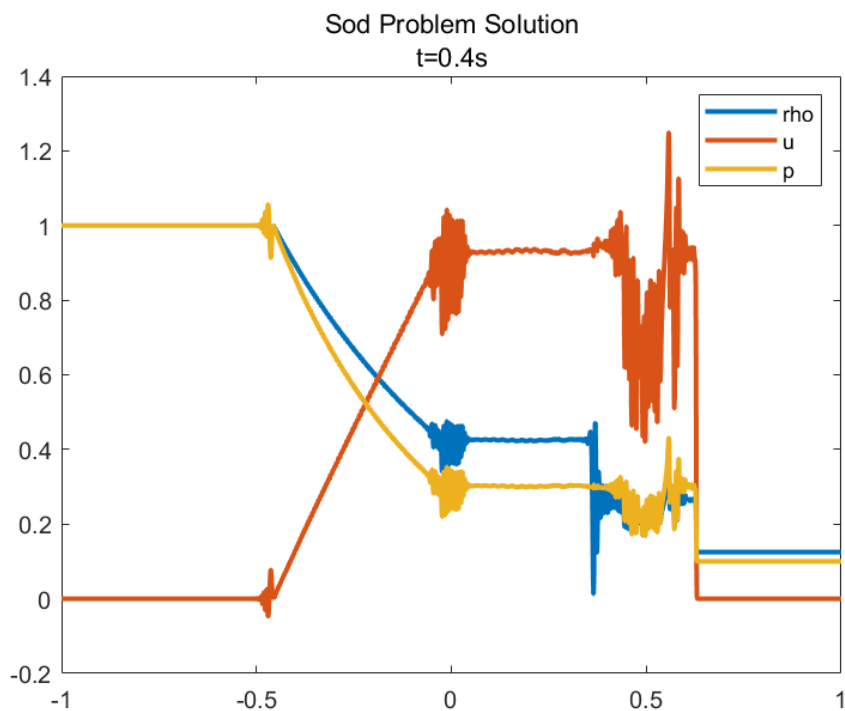


Figure 3: WENO+FDS+RK3 方法近似解

结果表明，该问题解与精确解相同。

3.4 TVD 方法

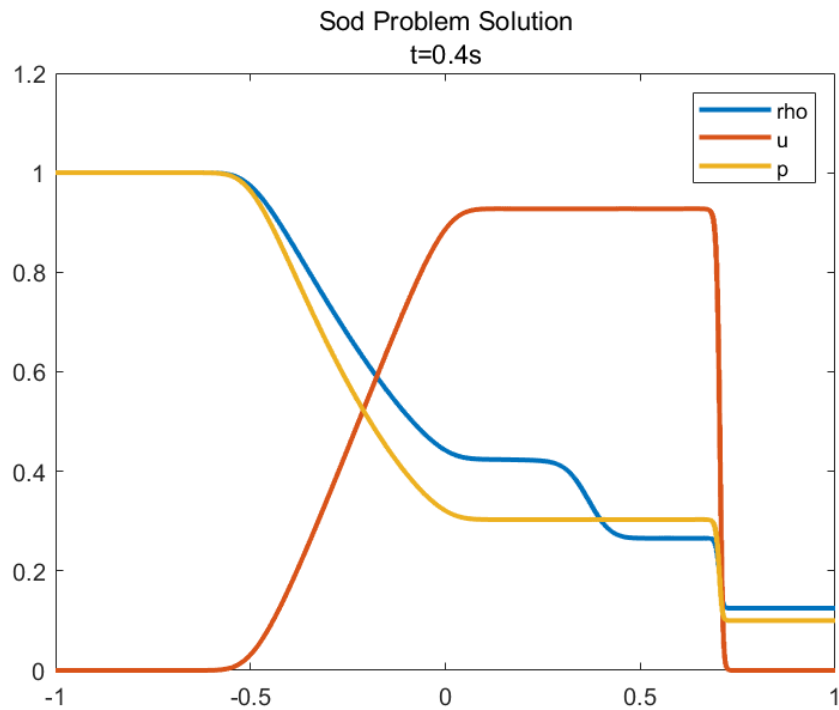


Figure 4: TVD 方法近似解

结果表明，该问题解与精确解相同。

4 附录

1. 本题在作流场二次涡图时使用 chatGPT 帮助撰写绘图 matlab 代码。
2. 本题代码文件设置较为清楚，且较为简单，故不使用 git 管理增加负担，无 git 管理记录。