计算流体力学期末作业

曹林博　2200011012

1　数理算法原理

1.1　问题描述

针对 Sod 激波管问题，求解一维欧拉方程：

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathrm{f(U)}}{\partial x}=0.$$

其中：

$$\mathrm{U}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ E\end{bmatrix},\quad \mathrm{f(U)}=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ u(E+p)\end{bmatrix},\quad E=\rho e=\rho\left(C_vT+\frac{1}{2}u^2\right)$$

初始条件（在 $t=0$）为：

$$\begin{cases}x<0: & (\rho_L,u_L,p_L)=(1,\ 0,\ 1),\\ x\geq 0: & (\rho_R,u_R,p_R)=(0.125,\ 0,\ 0.1).\end{cases}$$

1.2　Riemann 精确解

该问题流程中，在连续部分满足控制方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u^2+p)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial(E)}{\partial t}+\dfrac{\partial(Eu+pu)}{\partial x}=0\end{cases}$$

其中，$E=\rho e=\rho(C_vT+\frac{1}{2}u^2)$.

在间断部分满足间断条件 Rankine – Hugoniot 关系式：

$$\begin{cases}\rho_1(u_1-Z)=\rho_2(u_2-Z)\\ \rho_1u_1(u_1-Z)+p_1=\rho_2u_2(u_2-Z)+p_2\\ E_1(u_1-Z)+u_1p_1=E_2(u_2-Z)+u_2p_2\end{cases}$$

其中，Z 为激波运动速度。

满足以上两个方程组的流场中可能产生三种波：

1. **激波**：密度、速度、压力突变，满足 Rankine – Hugoniot 关系式。
2. **膨胀波**：等熵波，内部物理量连续光滑，头尾物理量连续但导数不连续.
3. **接触间断**：两侧速度、压力相同，仅密度突变。

因此流场组合共有以下五种：

1. 激波、接触间断、激波
2. 膨胀波、接触间断、激波
3. 激波、接触间断、膨胀波
4. 膨胀波、接触间断、膨胀波
5. 膨胀波、膨胀波

经过对上述情况分析，我们将激波、膨胀波前后速度-压力的依赖关系写成统一的形式：

1. 左波（激波或膨胀波）$u^*=u_1-f(p^*,p_1,\rho_1)$
2. 右波（激波或膨胀波）$u^*=u_2+f(p^*,p_2,\rho_2)$

其中，u^*,p^* 表示接触间断速度和压力，且有：

$$f(p^*,p_i,\rho_i)=\begin{cases}\dfrac{p^*-p_i}{\rho_ic_i[\frac{\gamma+1}{2\gamma}(\frac{p^*}{p_i})+\frac{\gamma-1}{2\gamma}]^{1/2}}, & p^*>p_i\\ \dfrac{2c_i}{\gamma-1}[(\dfrac{p^*}{p_i})^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}-1], & p^*<p_i\end{cases}$$

基于上述分析，我们可编写代码并求出 Riemann 精确解。

1.3 NND+FVS+RK3 方法

接下来，我们首先从 NND 格式（群速度方法）入手撰写激波捕捉格式，然后使用 FVS 类下 Steger_Warming 通量分裂方法进行通量处理，最后使用 Runge-Kutta 方法推进时间积分。

通过通量的分解，我们可以得到原欧拉方程组的 NND 格式为：

$$(\frac{dU}{dt})_j = -\frac{1}{\Delta x}(H_{j+\frac{1}{2}} - H_{j-\frac{1}{2}})$$

其中

$$H_{j+\frac{1}{2}} = F^+_{j+\frac{1}{2}L} + F^-_{j+\frac{1}{2}R} \tag{1}$$

$$F^+_{j+\frac{1}{2}L} = F^+_j + \frac{1}{2}minmod(\Delta F^+_{j-1/2}, \Delta F^+_{j+1/2}) \tag{2}$$

$$F^-_{j+\frac{1}{2}R} = F^-_{j+1} - \frac{1}{2}minmod(\Delta F^-_{j+1/2}, \Delta F^-_{j+3/2}) \tag{3}$$

而对于通量项，我们可由 Steger_Warming（FVS）通量分裂方法写为：

$$\mathrm{f} = \frac{\rho}{2\gamma}\begin{bmatrix} 2(\gamma-1)\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 2(\gamma-1)\lambda_1 u + \lambda_2(u+c) + \lambda_3(u-c) \\ (\gamma-1)\lambda_1 u^2 + \frac{(3-\gamma)(\lambda_2+\lambda_3)c^2}{2(\gamma-1)} + \frac{\lambda_2(u+c)^2}{2} + \frac{\lambda_3(u-c)^2}{2} \end{bmatrix}$$

其中，

$$当\lambda_i \geq 0,\quad \lambda_i = \lambda_i,\quad 否则\lambda_i = 0,\quad 得到f^+$$

$$当\lambda_i < 0,\quad \lambda_i = \lambda_i,\quad 否则\lambda_i = 0,\quad 得到f^-$$

同时我们定义，

$$minmod(x,y) = \begin{cases} 0, & xy \leq 0 \\ sign(x)\min(|x|,|y|), & xy > 0 \end{cases}$$

空间离散化后我们将式子记为：

$$(\frac{dU}{dt})_j = -\frac{1}{\Delta x}(H_{j+\frac{1}{2}} - H_{j-\frac{1}{2}}) = f(u)$$

根据 Runge-Kutta 方法，我们由如下推进时间计算公式：

$$\begin{cases} u_1 = u^n + \frac{1}{3}\Delta t f(u^n) \\ u_2 = u^n + \frac{2}{1}\Delta t f(u_1) \\ u^{n+1} = \frac{1}{4}(u^n + 3u_1) + \frac{3}{4}\Delta t f(u_2) \end{cases}$$

基于上述推导，我们可求得 Sod 问题的近似解。

2 代码生成与调试

2.1 Riemann 精确解

我们在 riemann.m 文件中完成对 Sod 问题的 Riemann 精确解求解。算法流程分为以下三个步骤：

1. 根据公式 $F(p^*) = f(p^*, p_1, \rho_1) + f(p^*, p_2, \rho_2) - u_1 + u_2$，利用牛顿迭代法求解中心区域压力值。

2. 根据公式 $u^* = \frac{1}{2}[u_1 + u_2 + f(p^*, p_2, \rho_2) - f(p^*, p_1, \rho_1)]$ 计算中心区域速度。并按前述公式确定两侧行波类型，计算中心区接触间断两侧的密度以及左右行波传播速度，及膨胀波区域内物理量。

3. 将求解结果保存为三个视频，以可视化结果。

2.2 NND+FVS+RK3 方法

我们在 NND_FVS_RK3.m 文件中完成对 Sod 问题的近似求解。算法流程大致分为以下几个步骤：

1. 计算声速和特征值。

2. 根据 Steger_Warming 公式计算守恒量通量项。

3. 根据 NND 格式计算每个位置的通量及守恒量。

4. 利用 Runge-Kutta 方法完成时间步推进。

5. 将每次计算结果重画在画布上，从而方便展示结果动态变化过程，同时我们生成视频。

3 结果讨论

3.1 Riemann 精确解

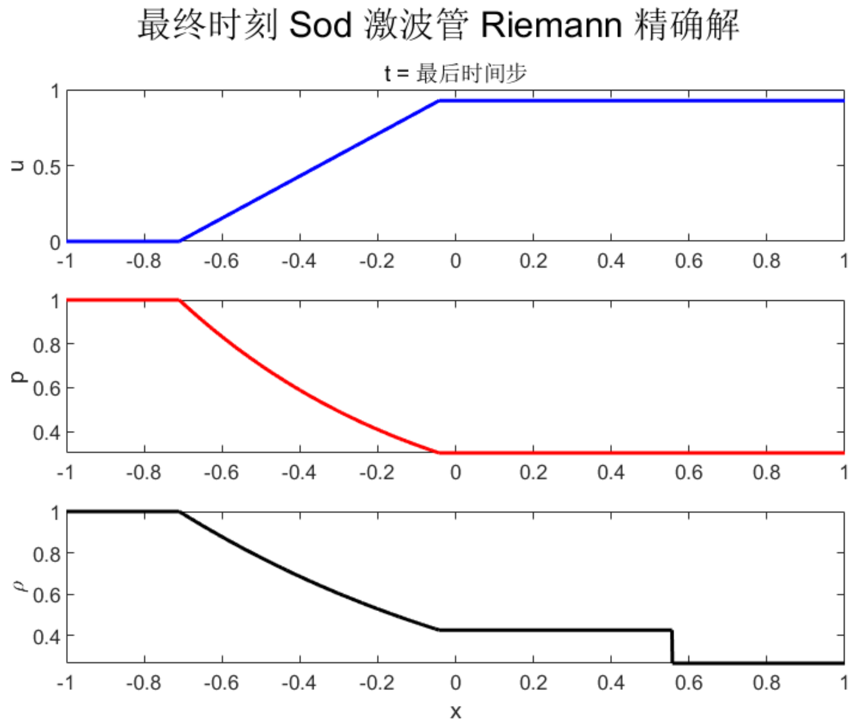

Figure 1: Riemann 精确解

结果表明，该问题解为右行激波、左行膨胀波的情况，并分别展示了速度、压强和密度的演化。在密度结果图中我们也发现了接触间断的位置。

3.2 NND+FVS+RK3 方法

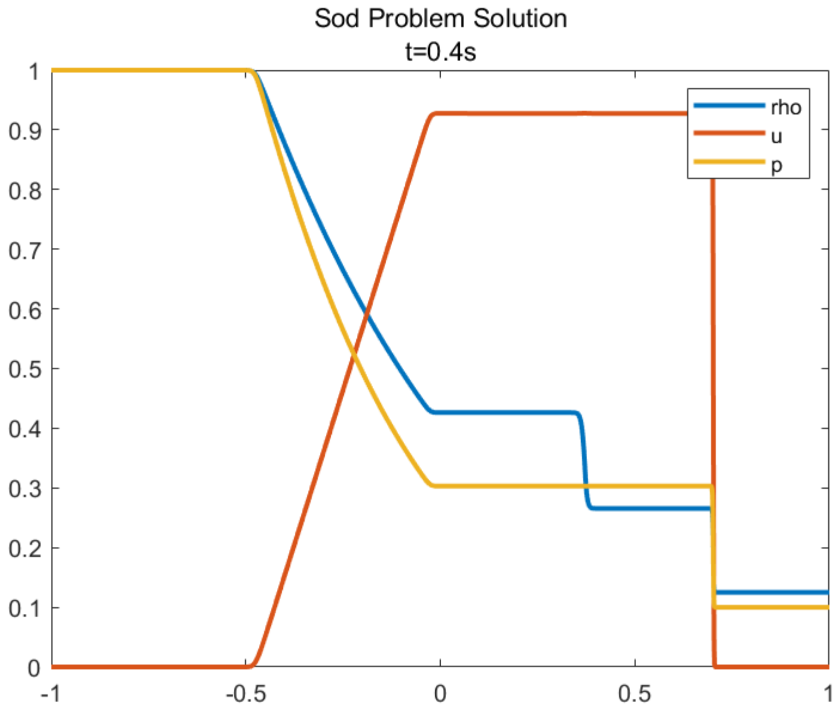

Figure 2: NND+FVS+RK3 方法近似解

结果表明，该问题解与精确解相同。

4 附录

1. 本题在作流场二次涡图时使用 chatGPT 帮助撰写绘图 matlab 代码。
2. 本题代码文件设置较为清楚，且较为简单，故不使用 git 管理增加负担，无 git 管理记录。