

北京航空航天大学

BEIJING UNIVERSITY OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS

71066001 陈伟杰 离散数学

1. 证明罗素悖论

若 $C = \{S \mid S \text{ 是集合且 } S \notin S\}$ 则 C 不是集合

解: $S \in C \Leftrightarrow S \notin S$, 把 C 代入 S 得
 $C \in C \Leftrightarrow C \notin C$ 矛盾!

2. 设 A, B 为任意两集合, 证明

i) $\emptyset \in P(A)$

$P(A)$ 包含空集。

解: $P(A)$ 包含 $\{\emptyset\}$ 所以 $\emptyset \in P(A)$ 用反证法, 假定 $\emptyset \notin P(A)$ 则存在 $a \in \emptyset$ 使 $a \in A$ 使 $\emptyset \in P(A)$ 与 \emptyset 为空集。

ii) $A \in P(A)$ $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$

所以 $P(A)$ 里有 $\{\emptyset, \{1\}\}$

解: 定义 $A = \{1\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$

即 $A \in P(A)$ $2^A = P(A)$

iii) 若 $A \subseteq B$, 则 $P(A) \subseteq P(B)$

(A, B 都是集合)

解: 若 $X \in P(A)$ 则 $X \subseteq A$ 则 $X \subseteq B$, 因为 $A \subseteq B$, 所以 $X \subseteq B$, 因此 $X \in P(B)$ 从而 $P(A) \subseteq P(B)$

iv) 若 $A \subset B$, 则 $P(A) \subset P(B)$ * A 为 B 的真子集

解: 因为 $A \subset B$ 所以 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 从而知道 $B \in P(B)$ 且 $B \notin P(A)$ 即 $P(A) \subset P(B)$



3. 试求

1) $P(B) \subseteq P(C)$ 的充分必要条件

解: B 包含 C 也就是说 C 成立, B 肯定成立, 即 C 推出 B
所以 C 是 B 的充分条件

$$\begin{aligned} & 1. B \in P(B) \quad B \subseteq C \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \\ & 2. C \in P(C), B \subseteq C \end{aligned}$$

2) $P(B) = P(C)$ 的充分必要条件?

解: 两个集合里的所有元素都一样, 完全相等
当且仅当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 两个集合互为子集。

$$A=B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x (x \in B \rightarrow x \in A)$$

$$\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

