4.1 $t_1=\frac{2}{3}\times10^{-8}$ s 粒子位于 $x_1=1.0$ m 处

$t_2=\frac{5}{3}\times10^{-8}$ s $x_2=3.0$ m

另一参考系 S' 相对于 S 系以恒定速度 $u=\frac{4}{5}c$

(1) 在 S' 系中观测到粒子的时空坐标

应用洛伦兹变换

$$x_1'=\frac{x_1-ut_1}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}=\frac{1-\frac{4}{5}\cdot3\times10^{8}\cdot\frac{2}{3}\times10^{-8}}{\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}}\,m=-1\,m$$

$$t_1'=\frac{t_1-\frac{ux_1}{c^2}}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}=\frac{\frac{2}{3}\times10^{-8}-\frac{\frac{4}{5}\times1}{3\times10^{8}}}{\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}}\,s=\frac{2}{3}\times10^{-8}\,s$$

$$x_2'=\frac{x_2-ut_2}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}=\frac{3-\frac{4}{5}\cdot3\times10^{8}\cdot\frac{5}{3}\times10^{-8}}{\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}}\,m=-\frac{5}{3}\,m$$

$$t_2'=\frac{t_2-\frac{ux_2}{c^2}}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}=\frac{\frac{5}{3}\times10^{-8}-\frac{\frac{4}{5}\times3}{3\times10^{8}}}{\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}}\,s=\frac{13}{9}\times10^{-8}\,s$$

(2) 粒子在 S 系中的平均速度

$$\bar{v}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{3-1}{(\frac{5}{3}-\frac{2}{3})\times10^{-8}}\,m/s=2\times10^{8}\,m/s$$

在 S' 系中的平均速度

$$\bar{v}'=\frac{x_2'-x_1'}{t_2'-t_1'}=\frac{-\frac{5}{3}-(-1)}{(\frac{13}{9}-\frac{2}{3})\times10^{-8}}\,m/s=-\frac{6}{7}\times10^{8}\,m/s$$

S' 不满足伽利略变换 $\bar{v}'\neq\bar{v}-u=(2-\frac{4}{5}\cdot3)\times10^{8}\,m/s=-\frac{2}{5}\times10^{8}\,m/s$

4.3 在惯性系 S' 中静止的一个圆形轨道其方程

$$x'^2+y'^2=a^2,\quad z'=0$$

洛伦兹坐标得

$$x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}\quad y'=y\quad z'=z=0$$

代入 S 系的轨道

$$\frac{(x-ut)^2}{a^2[1-(\frac{u}{c})^2]}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

在 S 系中有一个运动着的椭圆图形，半长轴 a，
半短轴为 $a\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}$，椭圆中心 O' 相对 S 系原点 O 的
移动速度为 u，半短轴为 $a\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}$ 正是半径 a 在 x 方向
上的运动长度。

4.4

在 S' 系与 $O'x'$ 成 $30°$ 角 在 S 系与 Ox 轴 $45°$ 角
米尺长 $L=1m$，$\theta'=30°$，$\theta=45°$
在 S' 系中 $\Delta x'=x'-x'=L\cos\theta'$ $\Delta y'=y'-y'=L\sin\theta'$
洛伦兹变换

$$\Delta x'=x_b'-x_a'=\frac{(x_b-x_a)-u(t_b-t_a)}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}},\quad \Delta y'=\Delta y$$

设米尺在 S 系中的长度 l，有 $\Delta x=x_b-x_a=l\cos\theta$

得 $l=\frac{L\sin\theta'}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{2}}{2}m=\underline{0.707m}$ $l^2=\Delta x^2+\Delta y^2$

$$u=c\sqrt{1-\left(\frac{l\cos\theta}{L\cos\theta'}\right)^2}=c\sqrt{\frac{2}{3}}=\underline{0.816c}$$

4.10

$\Delta x=100m$的跑道，用时10s，0.8C速率

(1) 跑道有多长？

长度收缩

$$l'=l\sqrt{1-\beta^2} \quad \beta=\frac{u}{c}=0.8$$

$$l=100\sqrt{1-0.8^2}\ m=60m$$

(2) 洛伦兹变换

空间间隔 $\Delta x'=\dfrac{\Delta x-u\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}=\dfrac{100-0.8c\times10}{\sqrt{1-0.8^2}}\ m=-4.0\times10^9 m$

时间间隔 $\Delta t'=\dfrac{\Delta t-\frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}=\dfrac{10-\frac{0.8}{c}\cdot100}{\sqrt{1-0.8^2}}=16.6s$

(3) 运动员在S系平均速度

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{100}{10}=10m/s$$

在S'系中平均速度

$$\bar{v}'=\frac{\Delta x'}{\Delta t'}=\frac{-4.0\times10^9}{16.6}=-2.4\times10^8 m/s$$