博弈论基础

［现代博弈论开始于1928年冯诺伊曼的工作］

学习要点

- 理解博弈论的基本概念
  - 参与人，策略，收益（收益矩阵）
  - 最佳应对，占优策略
  - 纳什均衡
  - 混合策略，混合策略均衡
  - 帕累托最优，社会最优
- 几种典型博弈的类型
- 体会“情景→博弈→求解”过程中的思想

博弈—从一个例子开始

- “复习考试”还是“准备报告”？
  - 假设在截止日期前一天，你有两件要做的事情：一是复习（为了参加考试），二是准备（给一个报告）。你只能选择做一项。
  - 考试成绩可以预计
    - 如果复习，则考试成绩92分，没复习，则80分
  - 报告需要你和你的拍档合作完成
    - 如果你和拍档都准备报告，则每人都是100分
    - 如果只有一人准备报告，则每人都是92分
    - 如果两人都没准备报告，则每人都是84分
  - 那么你该选择做什么呢？（假设你和拍档各自独立考虑这个问题）

例子："考试–报告"博弈

- 设你们都追求平均成绩的最大化：
  - 你和搭档都准备报告，则平均成绩均为(80+100)/2 = 90分
  - 你和搭档都准备考试，则平均成绩均为:

    (92+84)/2 = 88分

- 考试成绩可以预期：
  - 如果复习，则考试成绩92分
  - 如果没复习，则考试成绩80分
- 报告是你和你的拍档合作完成的：
  - 如果你和拍档都准备报告，则每人100分
  - 如果只有一人准备报告，则每人92分
  - 如果两人都没准备报告，则每人84分

若一方复习考试，另一方准备报告：

- 准备报告一方的得：(80+92)/2 =86分
- 复习的一方得：(92＋92)/2 = 92分

收益矩阵（表达收益的一种直观方式）

		你的拍档	
		准备报告	复习考试
你	准备报告	90, 90	86, 92
	复习考试	92, 86	88, 88

- 其中第一个数字是“你”的收益，第二个是“拍档”的
- 收益（也称“回报”，payoff）

博弈的基本要素

- 一般情况下，博弈具有三个要素：
  - （1） 参与者（至少两个）；
  - （2） **策略集**：每个参与者都有一组关于如何行为的备选项，此处备选项指参与者的可能策略。
  - （3）**收益（回报）**： 每个策略行为的选择，都会使参与人得到一个收益。
    - 这个收益结果还受互动中他人策略选择的影响。
    - 同一组策略，不同参与人的收益可能不同

通常，收益的记号：P1(S,T)， P2(S,T)

博弈行为推理的几点基本假设

- 每个参与人对博弈结构（收益矩阵）有充分了解。
- 参与人都是理性的（rational）
  - 追求自己的收益最大化（尽量大）
  - 也知道其他参与人也是如此
- 决策的独立性
  - 不商量

“考试–报告”博弈中的行为推理

		你的拍档	
		准备报告	复习考试
你	准备报告	90, 90	86, 92
	复习考试	92, 86	88, 88

- **严格占优策略**（strictly dominant strategy）：对一个参与人（A）来说，若存在一个策略，无论另一个参与人（B）选择何种行为策略，该策略都是最佳选择，则这个策略就称为是A的严格占优策略。
- 这个例子中，**“复习考试”对双方都是**严格占优策略。

“囚徒困境”

- 假设有两个疑犯被警察抓住。并且被分开关押在不同的囚室。
- 警察强烈怀疑他们和一场抢劫案有关。但是，没有充足的证据。然而，他们都拒捕的事实也是可判刑的。
- 两个疑犯都被告知以下结果：
  - “如果你坦白，而另外一人抵赖，则你马上释放；另外一人将承担全部罪行，将会被 判刑10年
  - 如果你们都坦白，你们的罪行将被证实。但由于你们有认罪的表现——判刑4年。
  - 如果你们都不坦白，那么没有证据证明你们的抢劫罪，我们将以拒捕罪控告你们——判刑1年。
  - 另外一方也正在接受这样的审讯。你是坦白还是抵赖？”

“囚徒困境”的收益矩阵

		疑犯2	
		抵赖	坦白
疑犯1	抵赖	-1, -1	-10, 0
	坦白	0, -10	-4, -4

- 疑犯1和疑犯2的严格占优策略都是“**坦白**”
- 尽管如果两人都抵赖会都判得少些
  - 刻画了“有关个体私利前，建立合作是十分困难”的模型。

“兴奋剂”博弈

		运动员2	
		没服用	服用
运动员1	没服用	3, 3	1, 4
	服用	4, 1	2, 2

- 这种类型通常称为**军备竞赛**。竞争双方为保持彼此实力相当，都会选择生产更具危险性的武器，尽管对自己内部会有伤害
  - 运动员伤害身体，国家影响民生。

关于“收益”的讨论（收益决定选择）

- “考试-报告”博弈，如果降低考试难度：只要复习了，就会得到100分；否则，也可得到96分。

		你的拍档	
		准备报告	复习考试
你	准备报告	98, 98	94, 96
	复习考试	96, 94	92, 92

囚徒困境类似，如果改变收益矩阵，情况也可不一样

最佳应对与占优策略

- 设S是参与人甲的一个选择策略，T是参与人乙的一个选择策略。在收益矩阵中的某个单元格对应这策略组（S，T）。
  - P_1(S，T)：表示参与人甲从这组决策获得的收益
  - P_2(S，T)：表示参与人乙从这组决策获得的收益
- **最佳应对：**针对参与人乙的策略T，若参与人甲采用策略S产生的收益大于或等于自己的任何其他策略，则称**参与人甲的策略S是参与人乙的策略T的最佳应对**。

$$P_1(S, T) \geq P_1(S', T),$$

其中， S′是参与人甲除S外的任何其他策略。

严格最佳应对

- **严格最佳应对**：若S会产生比任何应对策略T的其他策略都更高的收益，**则称参与人甲的策略S是对于参与人乙的策略T的严格最佳应对**。

  P_1（S，T）> P_1（S’，T）

  其中，S’是参与人甲的所有其他策略。
- 注：最佳应对的概念是针对对方的某一个策略（T），相对于自己的所有策略而言的
  - 对于同一个T，最多只可能有一个严格最佳应对
  - 对于不同的T，最佳应对可能相同，也可能不同

占优策略与严格占优策略

- 定义：（从最佳应对角度给出）
  - 参与人甲的**占优策略**s，是指该策略对于参与人乙的每一策略都是最佳应对。
  - 参与人甲的**严格占优策略**s，是指该占优策略对于参与人乙的每一策略都是严格最佳应对。
- 如果参与人有严格占优策略，则可预期他会采取该策略（与基本假设的一致性）。
- 注：占优策略的概念是相对于对方所有策略而言的。

并不是每人总有严格占优策略

- 例子：“营销战略”博弈
  - 假设有两家公司，分别要规划生产并销售同一种新产品。该产品有两款可能的规格：廉价（低档）或高档。如何决策？
  - 设顾客总体被分成两个市场：一部分消费群体（60%）只购买廉价商品，另一部分消费群体（40%）只购买高档次商品。
  - 每家公司从廉价或高档次商品所得利润是等同的（因此利润仅取决于市场占有率）。
  - 每家公司都追求利润最大化。

"营销战略"博弈

- 假设
  - 若两家公司分别定位生产不同类型的产品，则每家公司都会得到该商品市场的全部份额。
  - 公司1品牌形象更佳。因此，若这两家公司在同一市场（廉价或高档次）中竞争，则公司1可以得到80%的市场销售量，公司2只能得到20％的市场。

		公司2	
		廉价	高档次
公司1	廉价	0.48, 0.12	0.6, 0.4
	高档次	0.4, 0.6	0.32, 0.08

- 可以预测此博弈的发展趋向。即公司1将会采取廉价策略，公司2将会采取高档次策略。

博弈的行为推理

- 如果参与人都有严格占优策略，则可以预计他们均会采取严格占优策略；
- 如果只有一个参与人有严格占优策略，则这个参与人会采取严格占优策略，而另一方会采取此策略的最佳应对。
- 如果两个参与人都没有严格占优策略呢？

无占优策略例子（三客户博弈）

- 假设有两家公司，都希望和A、B、C三个大客户之一洽谈生意。每家公司都有三种可能的策略：是否找客户A、B或C。
- 他们决策的条件如下所示：
  – 若两家公司都找同一个客户，则该客户会给每个公司一半的业务。
  – 公司1规模太小，以至于不能靠自身找到客户源。所以，只要它和公司2分别寻找不同的客户洽谈生意，则公司1获得的收益将会是0（生意做不成）。
  – 假设公司2单独寻找客户B或C洽谈生意，则会得到客户B或C的全部业务。但是A 是一个大客户。寻找客户A洽谈生意时，必须和其它公司合作才能接下业务。
  – 因为A是一个大客户，和它做生意的收益是8（假设两家公司合作，则每家公司会得到收益4）。但是，和B或C做生意的收益价值是2（合作的话，每个公司收益是1）

“三客户”博弈的推理

- 收益矩阵

		公司2		
		A	B	C
公司1	A	4, 4	0, 2	0, 2
	B	0, 0	1, 1	0, 2
	C	0, 0	0, 2	1, 1

- 两家公司都没有严格占优策略

纳什均衡

- 假定参与人甲选择策略S，参与人乙选择策略T。若S是T的最佳应对，且T也是S的最佳应对，则称策略组（S，T）是一个**纳什均衡。**
  - 在均衡状态，任何参与人都没有动机（理性的理由）去换一种策略。
  - 纳什均衡可以被看成是一种信念上的均衡
    - 互为最佳应对，谁也不可能通过单方面改变策略而得到额外好处，尽管如果两人都改变可能都会更好（相比都不改变而言）

“三客户”博弈的纳什均衡

		公司2		
		A	B	C
公司1	A	4, 4	0, 2	0, 2
	B	0，0	1, 1	0, 2
	C	0，0	0, 2	1, 1

- 存在纳什均衡：(A，A)
- 寻找纳什均衡的两种途径：
  - 一是，检查每一个策略组，看它们中的每一项是否是彼此间策略的最佳应对策略。
  - 二是，找出每个参与人对于对方每个策略的最佳应对，然后发现互为最佳应对的策略组。

多重均衡：协调博弈

- 多重均衡——存在多个均衡
- 例子：协调博弈
  - 假设你和你拍档都为一个合作项目准备幻灯片简报（双方不能通过电话等方式联系商量）。
  - 你必须决定是用微软的PPT或是用苹果的Keynote软件来制作你负责的半份幻灯片。
  - 假设你们使用同样的软件来设计，那就比较容易合并你们的幻灯片。

协调博弈的推理

		你的拍档	
		PPT	Keynote
你	PPT	1, 1	0，0
	Keynote	0，0	1， 1

- 存在两个纳什均衡：（PPT，PPT），（Keynote，Keynote）。
- 如何预测协调博弈中参与人的行为？
  - 托马斯·谢林（获得2005年诺贝尔经济学奖）提出一种聚点的想法，利用一些其他外部因素，例如社会习俗。

不对等协调博弈

- 假设你和项目拍档都更喜欢使用苹果软件。

		你的拍档	
		PPT	Keynote
你	PPT	1，1	0，0
	Keynote	0，0	2，2

- 谢林的聚点理论表明，可以预测到参与人会精选策略，倾向于收益情况更好的均衡。

两人的喜好不同呢

- 假设你和你的拍档喜欢的软件不同。

		你的拍档	
		PPT	Keynote
你	PPT	1, 2	0， 0
	Keynote	0， 0	2， 1

- 此时很难预测具体哪种均衡会被采取。
- 可以通过了解他们之间平常发生冲突时解决的惯例来预测。

猎鹿博弈

- 假设两猎人外出猎物。若他们合作，则可以猎到鹿（这可以给猎者带来最高的收益）。
- 猎人若分开单干，都能猎到兔。
- 若一方想单独猎鹿，则收益是0。另一方依然能猎到兔。

		猎人2	
		猎鹿	猎兔
猎人1	猎鹿	4，4	0，3
	猎兔	3，0	3，3

- 选择何种均衡？要在高收益和由于另一方不合作而造成损失之间进行权衡。

多重均衡：鹰鸽博弈

- 假设两只动物要决定一块食物在彼此之间何如分配。
- 每种动物都可以选择争夺行为（鹰派策略）或分享行为（鸽派策略）。
  - 若两种动物都选择分享行为，他们将会均匀的分配食物，各自的收益是3。
  - 若一方行为表现为争夺，另一方行为表现是分享，则争夺方会得到大多数食物，获得收益是5，分享方只能得到收益为1。
  - 当两只动物都表现为争夺行为，由于在争夺中践踏了食物，则它们得到的收益将为0。

鹰鸽博弈推理

		动物2	
		鸽派	鹰派
动物1	鸽派	3, 3	1， 5
	鹰派	5， 1	0， 0

- 很难预测参与者的行为
- 纳什均衡概念能有助于缩小合理的预测范围，但它并不能给出唯一的预测。

几种典型多均衡博弈类型对比

	你的拍档	
	PPT	Keynote
PPT	1，1	0，0
Keynote	0，0	2，2

	你的拍档	
	PPT	Keynote
PPT	1，2	0，0
Keynote	0，0	2，1

	猎人2	
	猎鹿	猎兔
猎鹿	4，4	0，3
猎兔	3，0	3，3

	动物2	
	鸽派	鹰派
鸽派	3，3	1，5
鹰派	5，1	0，0

简单博弈的推理思路

- 如果双方都有严格占优策略，则都会采用之
- 如果只有一方有严格占优策略，则可以预测另一方会采用此策略的最佳应对
- 如果不存在严格占优策略，则寻找纳什均衡
  - 存在一个纳什均衡，该均衡对应合理结果
  - 存在多个纳什均衡（需要额外信息辅助决策）
    - 协调博弈，鹰鸽博弈
  - 均衡有助于缩小考虑范围，但不保证有效预测
- 如果不存在纳什均衡，该怎么办？

混合策略

- 例子：硬币配对一“零和博弈”（zero sum game）
  - 两个参与人各持一枚硬币，同时选择手中硬币的正反面。
  - 若他们硬币的朝向相同，参与人乙将赢得参与人甲的硬币。反之，则参与人甲将赢得参与人乙的硬币。

		参与人乙	
		正面H	反面T
参与人甲	正面H	-1，+1	+1，-1
	反面T	+1，-1	-1，+1

- 此时，不存在一组互为最佳应对（纳什均衡）

混合策略的引入

- 引入随机性，考虑参与人将以一定的概率分布在不同策略间进行选择，一种分布对应一个“混合策略”（此时，选择策略就是选择分布）
  - 对于双策略（H和T）博弈，混合策略则可简略表示为一个概率。纯策略就是概率为（0,1）的混合策略。
- 通常，我们说
  - 参与人1的策略是概率p，是指参与人1以概率p执行H；以概率1-p执行T
  - 参与人2的策略是概率q，是指参与人2以概率q执行H，以概率1-q执行T

混合策略的收益

- 采用收益期望作为策略的回报测度
- 设参与人1采用概率p执行H，1-p执行T，则：
- 若参与人2采用H，则其收益期望是

$$\overline{P_2}(p,H)=p\cdot P_2(H,H)+(1-p)\cdot P_2(T,H)$$

- 若参与人2采用T，则其收益期望是

$$\overline{P_2}(p,T)=p\cdot P_2(H,T)+(1-p)\cdot P_2(T,T)$$

类似地，可讨论参与人2采用概率混合策略的情形

混合策略的均衡

- 混合策略的纳什均衡：它是一对混合策略，彼此都是对方的最佳应对（期望收益）
- 纳什的奠基性贡献：证明了具有有限参与者和有限纯策略集的博弈一定存在纳什均衡（包括混合策略均衡）
- 一般来说，找到混合策略的纳什均衡是很困难的，但在某些特定条件下可能有系统的方法。

双人双策略、没有含纯策略均衡的博弈中的混合策略纳什均衡求解

- 给定H，T：基本纯策略。按照纳什定理，存在一个混合策略的纳什均衡（p,q），即p是q的最佳应对，q也是p的最佳应对。如何求p和q？
  - “没有含纯策略的均衡”的前提意味着p，q都是严格在0和1之间。
- 确定参与人2采用的q的方法（确定p的方法对称）
  - 基于q和收益矩阵中的值，分别写出参与人1采用H和采用T的收益期望（q的函数），即P1(H,q)和P1(T,q)，也就是相当于P1(1,q)和P1(0,q)
  - 下面的关键是要认识到此时必定有：P1(1,q)＝P1(0,q)，从而可以借助这等式求出q

P1(1,q)＝P1(0,q)：在两个端点“无差异”原理

- 推理的思路是
  - 若等式不成立，例如 P1(1,q) > P1(0,q)，则将导致H（即p=1）是参与人1的最佳应对的结论，即（H,q）是一个纳什均衡，这与“不含纯策略纳什均衡”的前提矛盾
- 直观上，若 P1(T,q) < P1(H,q)，参与人1在应对q的时候采用H就是最好，将任何机会（概率）分给T都只会导致较低收益

– 数学上就是

P1(p,q) = pP1(H,q)+(1-p)P1(T,q) < P1(H,q), for p<1

混合策略的收益计算例子

- 用收益期望来表达回报

		参与人2	
		正面H(q)	反面T(1-q)
参与人1	正面H	-1，+1	+1，-1
	反面T	+1，-1	-1，+1

- 例如，当参与人2采用策略q时，若参与人1使用纯策略，则他的回报分别为：
  - 纯策略H的期望收益 = (-1)(q)+(+1)(1-q) = 1-2q
  - 纯策略T的期望收益 = (1)(q)+(-1)(1-q) = 2q-1

如果系统不存在包含纯策略的均衡，则上述两个表达式必须相等。

硬币配对博弈的混合策略均衡

		参与人2	
		正面H(q)	反面T(1-q)
参与人1	正面H	-1，+1	+1，-1
	反面T	+1，-1	-1，+1

- 设（p，q）是纳什均衡。对参与人2的策略q，
  - 参与人1用纯策略H的期望收益=(-1)(q)+(+1)(1-q)=1-2q
  - 参与人1用纯策略T的期望收益=(1)(q)+(-1)(1-q)=2q-1
  - 这是一个不存在含有纯策略均衡的博弈，由“无差异”原理，须有1-2q=2q-1，即q=1/2
- 对称地，可以得到参与人1的最佳应对p=1/2
- 因此，（1/2,1/2）是一个混合策略纳什均衡（合直觉）

混合策略：进一步的例子

- 持球-抛球博弈
  - 美式足球比赛：进攻方可以选择持球或者是抛球。防御方可以选择拦断持球或者选择防守抛球。
  - 假设正确阻止了进攻方的行为，则进攻方的收益为0。
  - 假设进攻方选择持球而防守方却选择防守抛球行为，则进攻方的收益为5（防守方相应损失）。
  - 假设进攻方选择抛球，同时防守方却选择拦断持球，则进攻方的收益是10（防守方相应损失）。

		防守方	
		防守抛球	拦断持球
进攻方	抛球	0，0	10，-10
	持球	5，-5	0，0

持球抛球博弈的混合策略均衡

- 这是一个没有纯策略纳什均衡的博弈
- 设防守方选择防守抛球的概率为q

		防守方	
		防守抛球(q)	拦断持球(1-q)
进攻方	抛球	0，0	10，-10
	持球	5，-5	0，0

- 进攻方选择抛球的期望收益：0*q＋10(1-q)
- 进攻方选择持球的期望收益：5q＋0* (1-q)
- 依无差异原理，令 10-10q=5q，解得 q=2/3

持球抛球混合策略均衡（续）

- 进攻方选择抛球的概率为p

		防守方	
		防守抛球	拦断持球
进攻方	抛球(p)	0，0	10，-10
	持球(1-p)	5，-5	0，0

- 防守方选择防守抛球的期望收益：-5(1-p)
- 防守方选择拦断持球的期望收益：-10p
- 令 -10p=-5(1-p)，解得 p=1/3
- 于是，这个博弈的混合策略均衡为(1/3,2/3)

讨论

		防守方	
		防守抛球(2/3)	拦断持球(1/3)
进攻方	抛球(1/3)	0，0	10，-10
	持球(2/3)	5，-5	0，0

- 为什么抛球有可能收益更大，而均衡中进攻方选择抛球的概率只有1/3？
  - 由于防守方高概率防守抛球，若抛球概率p>1/3，则损失会比较大
- 为什么进攻方在均衡的抛球概率只有p=1/3，但防守方还要更多的防守抛球？
  - 由于抛球对进攻方更有利，需要加大防守力度

例子：罚点球博弈

- 2002年，有人做了一项有关罚点球研究
  - 射手要决定从球门的左侧或是右侧进球。
  - 守门员则是要决定是扑向左侧或是右侧拦断进球。
  - 两人需要同时做选择。

		守门员	
		L	R
射球方	L	0.58，-0.58	0.95，-0.95
	R	0.93，-0.93	0.70，-0.70

统计数据。可以看到，罚球方总是有赢头（符合实际）。

混合策略均衡

		守门员	
		L(q)	R
射球方	L(p)	0.58，-0.58	0.95，-0.95
	R	0.93，-0.93	0.70，-0.70

- 计算得到的均衡：

  0.58q+0.95(1-q)=0.93q+0.70(1-q)， **q=0.42**

  -0.58p-0.93(1-p)=-0.95p-0.70(1-p)， **p=0.39**

- 实战统计得到的数据：q=0.42, p=0.40

兼具纯策略和混合策略均衡的博弈

- 例子：不平衡的协调博弈

		你的拍档	
		PPT(q)	Keynote
你	PPT(p)	1，1	0，0
	Keynote	0，0	2，2

- 除了两个纯策略均衡（PPT,PPT）和（Keynote,Keynote）外，还存在一个混合策略均衡：q=2(1-q), q=2/3；p=2(1-p), p=2/3

关于混合策略均衡的一般性推理

- 若双人双策略博弈存在混合策略均衡（p,q），0< p, q <1
  - 甲所选择的p，应该使乙在他的两个纯策略上无差异；否则乙就会用优势策略（例如1）作为应对，收益期望(p,1)>收益期望(p,q)，即没有q<1是p的最佳应对，从而与存在上述混合策略均衡矛盾
  - 于是可利用这无差异原则，**试求**p；类似地，求q。（注意，并不保证总能求出在（0,1）上的p和q）
- 若分别求得了（0,1）区间中的p和q，则说明
  - 对于甲的策略p，乙采用［0,1］上的任何策略都是一样的，即都是最佳应对，**后来求出的q当然也是**。对于p也有对称的认识，亦即p和q互为最佳应对

考试—报告博弈没有混合策略

		你的拍档	
		准备报告	复习考试
你	准备报告	90, 90	86, 92
	复习考试	92, 86	88, 88

- P1(1,q)=q*90+(1-q)*86; P1(0,q)=q*92+(1-q)*88
- 容易检查，不存在q，使 P1(1,q) = P1(0,q)

混合策略均衡的概率也可能恰好取在端点

		你的拍档	
		PPT	Keynote
你	PPT	1，2	0，2
	Keynote	0，0	2，1

这个例子中，纯策略均衡有两个，（PT, PT）和（ KT, KT）

PT→PT, KT

KT→KT

PT←PT

KT←KT

q*1+0 = 0+(1-q)*2, q=2/3

p*2+0 = p*2+(1-p)*1, p=1

(1, 2/3)为混合均衡。

从收益矩阵也能看出，当你采取PPT，对手有什么都无差异

纯策略均衡不是概率恰好取端点的混合策略均衡！

帕累托最优和社会最优

- “个体最优”与“整体最优”
- 帕累托（Pareto）最优
  - 一个策略组：每个参与者对应其中一个策略选择。
  - 一个策略组被称为**帕累托最优**，若不存在其他策略组满足：所有参与者得到至少和目前一样高的回报，且至少有一个参与者会得到严格较高的回报。

		你的拍档	
		准备报告	复习考试
你	准备报告	90, 90	86, 92
	复习考试	92, 86	88, 88

这个例子中，存在三个Pareto最优，但都不是均衡。

社会最优

- 定义：一组策略选择是社会最优（或社会福利最大化），若它使参与者的回报之和（总收益）最大。

		你的拍档	
		准备报告	复习考试
你	准备报告	90, 90	86, 92
	复习考试	92, 86	88, 88

- （报告，报告）是社会最优。
- 社会最优也一定会是帕累托最优。

社会最优和纳什均衡有可能一致

- 按照下面的收益矩阵，（报告，报告）既是社会最优也是纳什均衡

		你的拍档	
		准备报告	复习考试
你	准备报告	98, 98	94, 96
	复习考试	96, 94	92, 92

用博弈论思想分析问题

情景描述 → 收益矩阵 → 博弈求解

- 理解不同博弈的类型，以及求解的基本方法重要（science）。均衡是一个基本目标。
- 将问题（情景）要求准确抽象成收益矩阵至少同样重要（art）。

课程报告说明

- 这个作业占成绩的100％，12周前提交课程中心或Email
- 基本目的是希望学生根据自己的兴趣和以往知识积累，对与课程内容相关的某一方面问题进行比较深入地探讨
- 具体结果是一篇报告，形式和内容自己决定。下面是几点具体指南意见
  – 长度，4页以上，正常的字号和排版形式，包括相关引用的文章，书籍，网站等。
  – 文章应该体现对某一主题创造性地探讨，可以参考其他文献，但不能只是文献综述。文章应该体现对该主题某种新颖的讨论或分析。

课程报告说明（续）

- 指南意见（续）
  - “新颖的讨论或分析”的含义可以从多方面考虑，例如定量或者定性；结合课程内容对现实社会问题的新理解；也可以是结合本课程内容讨论其他课程中所学的知识；还可以是对我们学的数学模型进行评述和推广，例如结合某些具体的应用进行讨论；如果你有兴趣，还可以是收集一些数据进行分析或者用计算机来进行模拟
  - 引用别人的内容（包括网上）需要标注
- 欢迎课间讨论你的构思