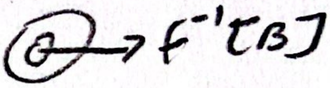
离散作业第7周

定理3.1.1 iv)

iv) 若 $B\subseteq \operatorname{ran} f$，则 $B=f[f^{-1}[B]]$

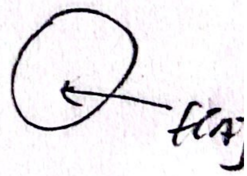
解：若 $y\in B$，则 $y\in \operatorname{ran} f$，因此，有 $x\in X$ 使 $y=f(x)$，从而得 $x\in f^{-1}[B]$，这表明 $y\in f[f^{-1}[B]]$，另一方面若 $y\in f[f^{-1}[B]]$，则有 $x\in f^{-1}[B]$ 使 $f(x)=y$，所以 $y\in B$。



iii) 若 $A\subseteq \operatorname{dom} f$，则 $A\subseteq f^{-1}[f[A]]$ 现在我们要证它的反例

解：若 $x\in A$，且当 $A=A$ 时 那这个时候就是为 函数的像 $\{y \mid 有\ x\in A\ 使\ y=f(x)\}$

扩展（x 属于 A_i 所对应 y 组成的集合）



习题3.1

4. 证明定理3.1.7的i)ii)和iii)并举例说明不能用"="代替ii)中的"⊆"

解：

1 若 dom $f=X$ 则称 f 为从 X 到 Y 的全函数，简称从 X 到 Y 的函数，记为 $X\xrightarrow{f}Y$ 或 $f:X\to Y$

解：dom $f=X$ ran $f\subseteq Y$ 所以 $f:X\to Y$，从 X 到 Y 的全函数

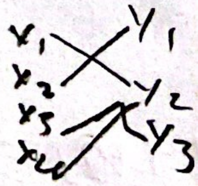
2. 若 dom $f\subseteq X$，则称 f 为从 X 到 Y 的严格部分函数

解 dom $f=\{x|x\in X$ 且有 $y\in Y$ 使 $y=f(x)\}$ $\langle x,y\rangle\in f$

若 $x\in$ dom f 就称 f 在 x 处有定义，记为 $f(x)\downarrow$，否则称 f 在 x 处无定义 $f(x)\uparrow$

3. ran$(f)=Y$ 则称 f 为从 X 到 Y 上的部分函数

解：ran$(f)=Y$；则证明 $f:X\to Y$ 是满射的



如果要"=" 就一定 dom $f=$ dom X 才可以

部分函数只是个单值的表现

5) 设f为从X到Y的部分函数，证明
a) 若$A,B\in P(X)$，则$f[A-B]\supseteq f[A]-f[B]$并举例说明不能用"="代替⊇

解：证明 对于任意 $y\in f[A]-f[B]$ 则 $y\in f[A]$ 且 $y\notin f[B]$
因为 $y\in f[A]$，所以存在 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$。又因为 $y\notin f[B]$，
所以 $x\notin B$（用反证法，假设 $x\in B$，则 $f(x)\in f[B]$，而 $y=f(x)$
所以 $y\in f[B]$ 矛盾）
所以，$x\in A-B$。因此 $y=f(x)\in f[A-B]$，于是 $f[A-B]\supseteq f[A]-f[B]$

"="不能代替"⊇"的反例
令 $X=\{x_1,x_2\}$ $Y=\{y\}$，$f=\{\langle x_1,y\rangle\langle x_2,y\rangle\}$。
$A=\{x_1,x_2\}$，$B=\{x_1\}$。则 $f[A-B]=\{y\}$，而 $f[A]-f[B]=\phi$

7. 设A和B为有限集，$n(A)=m$ 且 $n(B)=n$
a) 有多少个从A到B 1-1函数？
b) 有多少个从A到B上的函数？

解：
a) $m\le n$ $P_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$ 个 $m>n$，0个
b) $m<n$ 0个，$n=0$ 且 $m\neq 0$，0个，$n=0$ 且 $m=0$，1个
$m\ge n\ge 1$，第二类 Stirling 数 $\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^k (n-k)^m$

8. "91"函数 $f: N \to N$ 定义如下

$$f(x)=\begin{cases} x-10 & \text{若 } x>100 \\ f(f(x+11)) & \text{若 } x\le 100 \end{cases}$$

试证明

a) $f(99)=91$

b) $f(x)=91$，其中 $0\le x\le 100$

解：a) 证明 $f(99)=f(f(110))=f(100)=f(f(111))=f(101)=91$

b) 证明

① $f(100)=f(99)=91$

② $\forall i\in\{1,2,\cdots,9\}$，$f(89+i)=f(90+i)$，所以 $f(89)=f(90)=\cdots=f(99)=91$ $\quad f(89+i)=f(f(89+i+11))=f(90+i)$

③ 假设当 $k+1\le x\le 100$ 时，$f(x)$ 均等于91，$(0\le k\le 89)$

则当 $x=k\ (k\ge 0)$ 时，则有 $f(k)=f(f(k+11))$. 而 $0\le k\le 89$，

所以 $k+1\le k+11\le 100$，由归纳假设有 $f(k+11)=91$，即

$f(k)=f(91)=91$

所以 $f(x)=91$ 对于 $0\le k\le 89$ 也成立