$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$



离散作业第二周作业

4. 求下列各式的充分必要条件 $A-B=\varnothing$

- $A-B=\varnothing$ iff $A \subseteq B$ ($A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow$
- $A \cup B = \varnothing$ iff $A = B = \varnothing$
- $A \oplus B = \varnothing$ iff $(A-B) \cup (B-A)$
- $A \oplus B = A \oplus C$ iff $B=C$
- $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ iff $P(A)+P(B)$

5. 设A, B和C为任意三个集合，证明

1) 若 $A \subseteq B$ 则 $\sim B \subseteq \sim A$

$A \subseteq B \Rightarrow (A \cup B) \Rightarrow \sim B \subseteq \sim A$

(A或B) $\neg B$(非B) $\neg A$(非A)

2) 若 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq C$ 则 $A \cup B \subseteq C$

解 $A \subseteq C \Rightarrow A \cup C = C$

$B \subseteq C \Rightarrow B \cup C = C$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup C = C$

$(A \cup B) \cup C = C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$

3) 若 $A \subseteq B$ 且 $A \subseteq C$ 则 $A \subseteq B \cap C$

$A \subseteq B = A \cup B = B$　　　$A \cup B \cup C$

$A \subseteq C = A \cup C = C$

$(B \cup C) \cup A = (A \cup (B \cap C))$　　　$A \cap C = C$

$\Rightarrow A \subseteq B \cap C$

6. 证明对于任意集合 A, B, C, 均有

1. $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$A \oplus B = (A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A)$

$(A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A) \cup (A \cup B) - (A \cap B)$

$(A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A) \cup (A \cup B) \cup (A \cap \sim B)$

$(A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A) \cup (A \cup B)$

2. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

$P(A) \Rightarrow \{x \mid x \subseteq A\}$

$P(B) \Rightarrow \{x \mid x \subseteq B\}$

$(A \subseteq B) \Rightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \Rightarrow P(A \cap B)$

3. $(A\oplus B)\oplus C = A\oplus B(B\oplus C)$

解：$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A)$

$=(A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B)$

$A\oplus(B\oplus C)=(A\cap\sim(B\oplus C))\cup(\sim A\cap(B\oplus C))$

$=(A\cap\sim((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C)))\cup(\sim A\cap((B\cap\sim C)$

$\cup(\sim B\cap C)))$

$=(A\cap(\sim(B\cap\sim C)\cap\sim(\sim B\cap C)))\cup$

$(\sim A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C)))$（德·摩根律）

$=(A\cap(\sim(B\cap\sim C)\cap\sim(\sim B\cap C)))\cup(\sim A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C)))$

$=(A\cap(\sim B\cup C)\cap(B\cup\sim C)))\cup(\sim A\cap((B\cap\sim C)\cup(\sim B\cap C)))$

（德·摩根律）

$=(A\cap B\cap C)\cup(A\cap\sim B\cap\sim C)$

$=(\sim A\cap B\cap\sim C)\cup(\sim A\cap\sim B\cap C)$（分配律）

7. 设A和B是全集U的子集，证明下列命题等价

(1) $A\subseteq B$ (2) $A\cup B=B$ (3) $A\cap B=A$

· 任取 $x\in A\cup B$ 则 $x\in A$ 或 $x\in B$，但因 $A\subseteq B$ 所以总有 $x\in B$
这表明 $A\subseteq A\cap B$ 即得到 $A\cup B=B$.

· 任取 $x\in A$ 则 $x\in A\cup B$，但因 $A\cup B=B$，所以 $x\in B$，因此 $x\in A\cap B$
这表明 $A\subseteq A\cap B$ 即得到 $A=A\cap B$

· 任取 $x\in A$ 则 $x\in A\cap B$ 所以 $x\in B$ 这表明 $A\subseteq B$

8. 设A为任意集合，B为任意集类，证明

i) 若 $B\neq\emptyset$，则 $A\cup(\cap B)=\cap\{A\cup B\mid B\in B\}$

解：$B\neq\emptyset=A\rightarrow B\Rightarrow A\cup B$，这表明了 $A\cup(\cap B)=\cap\{A\cup B\mid B\in B\}$

·$B\in B$ 使 $x\in A\cup B$。

ii) $A\cap(\cup B)=\cup\{A\cap B\mid B\in B\}$ (广义分配律)

解：任取 $x\in A\cap(\cup B)$，则 $x\in A$ 且 $x\in\cup B$ 知有 $B\in B$ 使 $x\in B$，所以
$x\in A\cap B$ 即 $x\in\cup\{A\cap B\mid B\in B\}$ 这表明 $A\cap(\cup B)\subseteq\cup\{A\cap B\mid B\in B\}$
另一方面，任取 $x\in\cup\{A\cap B\mid B\in B\}$ 则有 $B\in B$ 使 $x\in A\cap B$，即 $x\in A$ 且 $x\in B$
因此 $x\in A$ 且 $x\in\cup B$，即 $x\in A\cap(\cup B)$ 这表明 $\cup\{A\cap B\mid B\in B\}\subseteq A\cap(\cup B)$
得到 $A\cap(\cup B)=\cup\{A\cap B\mid B\in B\}$