第6章 储能元件

本章重点

掌握两种储能元件

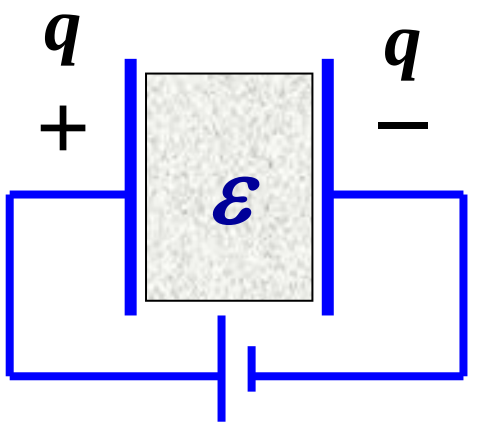
- 电容元件
- 电感元件

内容：

- 元件定义
- 元件电路符号
- 元件VCR约束方程
- 功率和能量
- 元件的串联与并联

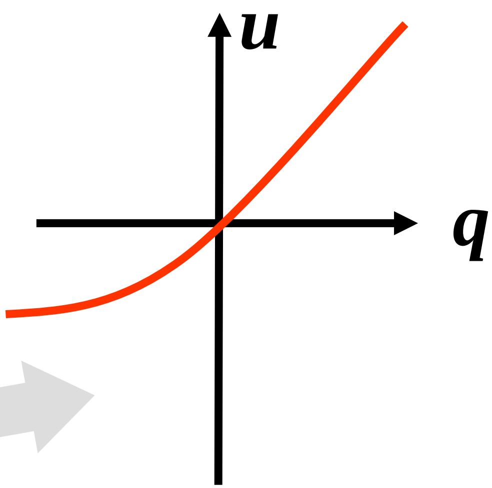
6.1 电容元件

电容器 → 在外电源作用下，两极板上分别带上等量异号电荷，撤去电源，板上电荷仍可长久地集聚下去，是一种储存电能的部件。



1. 定义

电容元件 (capacitor) → 储存电能的元件。其特性可用u-q 平面上的一条曲线来描述



$$q = f(u)$$ ← 库伏特性 →

6.1 电容元件

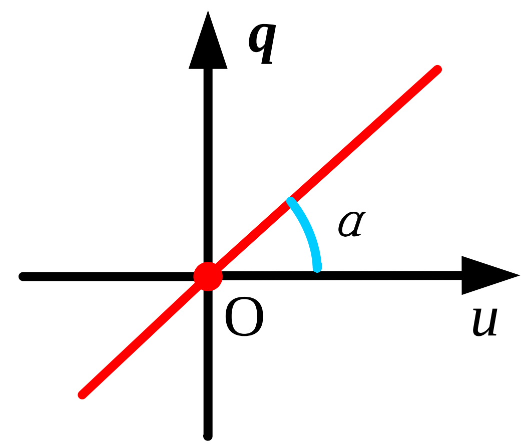
2. 线性定常电容元件

定 义

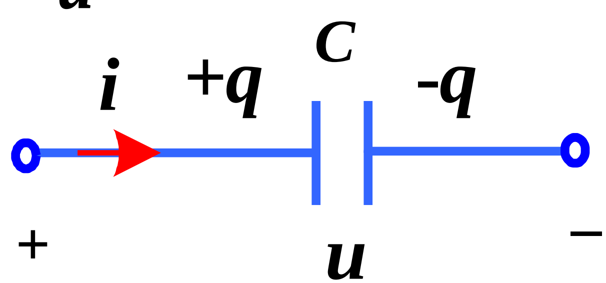
任何时刻，电容元件极板上的电荷q与电压 u 成正比。

q-u 特性是过原点的直线

$$q = Cu \quad or \quad C = \frac{q}{u} \propto \tan\alpha$$



电路符号



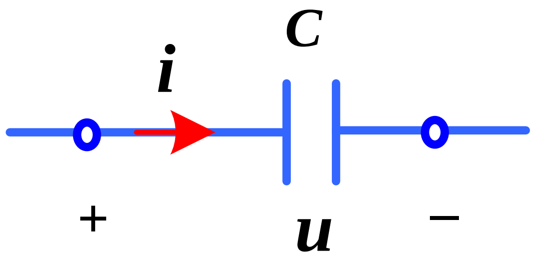
单 位

C 称为电容器的电容, 单位：F (法) (Farad，法拉)，常用μF，pF等表示。

6.1 电容元件

线性电容的电压、电流关系

u、***i*** **取关联参考方向**



$$i(t)=\frac{dq}{dt}=C\,\frac{du(t)}{dt}$$

电容元件VCR的微分关系

表 明

(1) ***i*** **的大小取决于** ***u*** **的变化率，与** ***u*** **大小无关，电容是动态元件；**

(2) 当 ***u*** **为常数(直流)时*i* =0。电容相当于开路，电容有隔断直流作用；**

电容元件VCR的积分关系

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i\mathrm{d}\xi + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,\mathrm{d}\xi \\
&= u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

表明

电容元件有记忆电流的作用，故称电容为记忆元件。

6.1 电容元件

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \qquad u(t)=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\mathrm{d}\xi$$

注意

(1) 上式中$u(t_0)$称为电容电压的初始值，它反映电容初始时刻的储能状况，也称为初始状态。

(2) 实际电路中通过电容的电流 i为有限值，则电容电压u必定是时间的连续函数。

(3) 当u, i为非关联方向时，上述微分和积分表达式前要冠以负号。

$$i(t) = -C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \qquad u(t)=-u(t_0)-\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\mathrm{d}\xi$$

电容的功率和储能

功 率

$$p = ui = u \cdot C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

u、*i* 取关联参考方向

(1) 当电容充电， $u>0$, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t>0$, 则$i>0$, $q\uparrow$, $p>0$, 电容吸收功率。

(2) 当电容放电，$u>0$, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t<0$, 则$i<0$, $q\downarrow$, $p<0$, 电容发出功率。

表 明

电容能在一段时间内吸收外部供给的能量转化为电场能量储存起来，在另一段时间内又把能量释放回电路，因此电容元件是无源元件、是储能元件，它本身不消耗能量。

电容的储能

从-∞到 t 电容储能的变化量：

$$W_C=\int_{-\infty}^{t}u(\xi)i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{t}Cu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{2}Cu^2(t)-\frac{1}{2}Cu^2(-\infty)$$

若$u(-\infty)=0$ ➡ $W_C=\dfrac{1}{2}Cu^2(t)\geq 0$

从t_0到 t 电容储能的变化量：

$$W_C=\frac{1}{2}Cu^2(t)-\frac{1}{2}Cu^2(t_0)$$

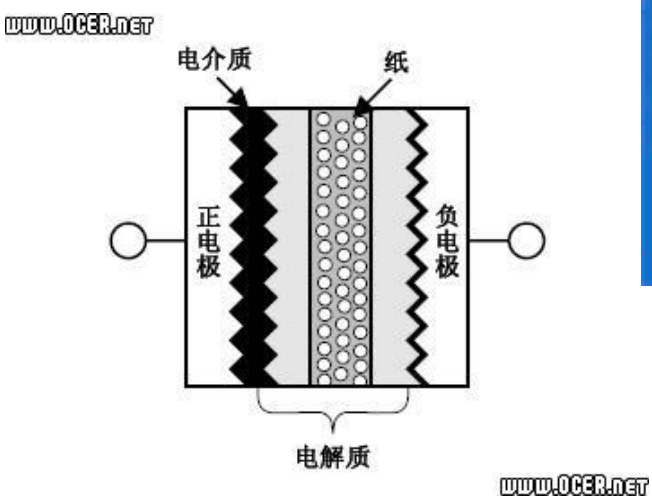
表明

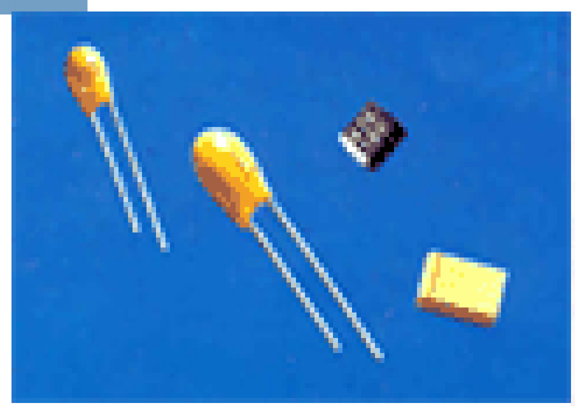
(1) 电容的储能只与当时的电压值有关，电容电压不能跃变，反映了储能不能跃变；

(2) 电容储存的能量一定大于或等于零。

3. 几种常见的电容器

电解电容器

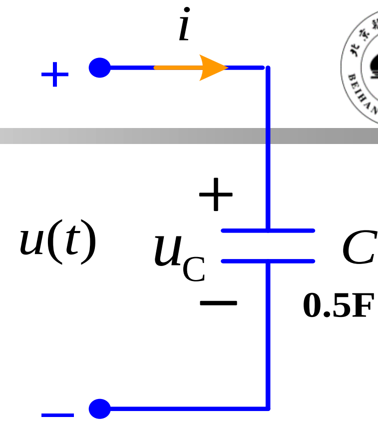




普通电容器

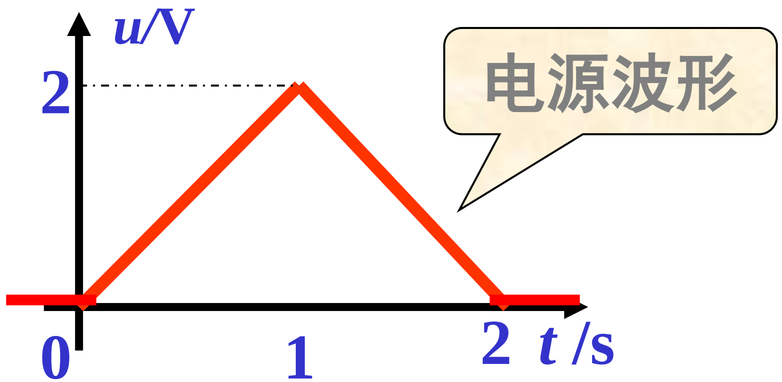
电力电容器

【例】 求电流i、C的功率$P(t)$和储能$W(t)$



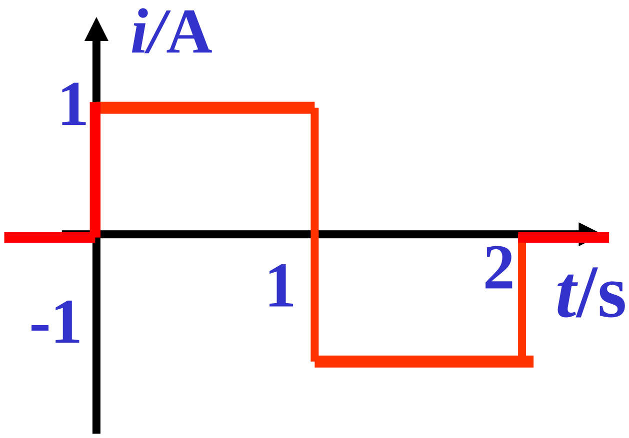
解 $u(t)$的函数表示式为:

$$u(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 2t & 0\le t\le 1\text{s}\\ -2t+4 & 1\le t\le 2\text{s}\\ 0 & t\ge 2\text{s}\end{cases}$$



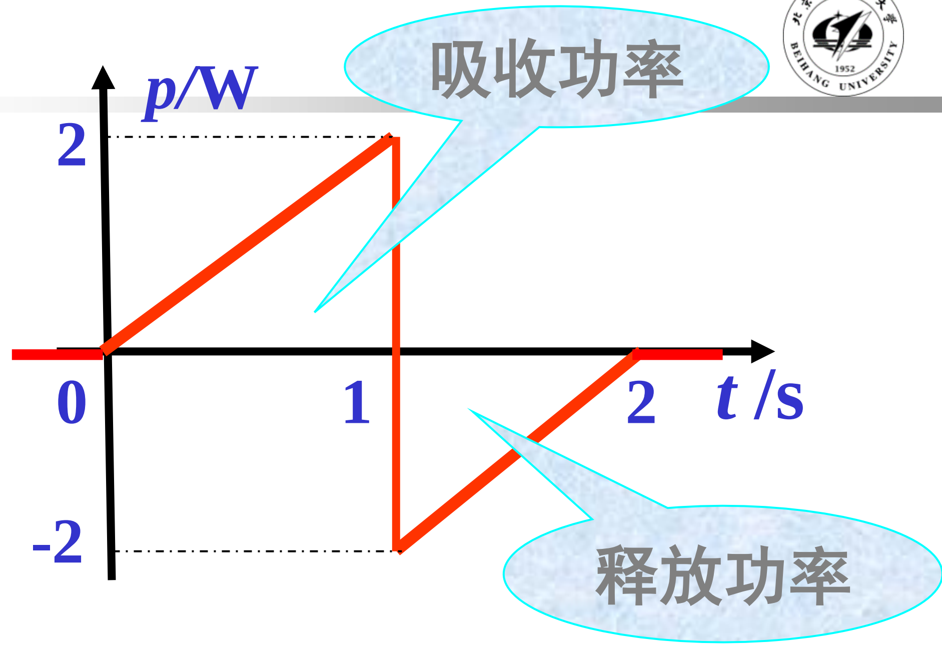
解得电流

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\le t<1\text{s}\\ -1 & 1\le t<2\text{s}\\ 0 & t\ge 2\text{s}\end{cases}$$



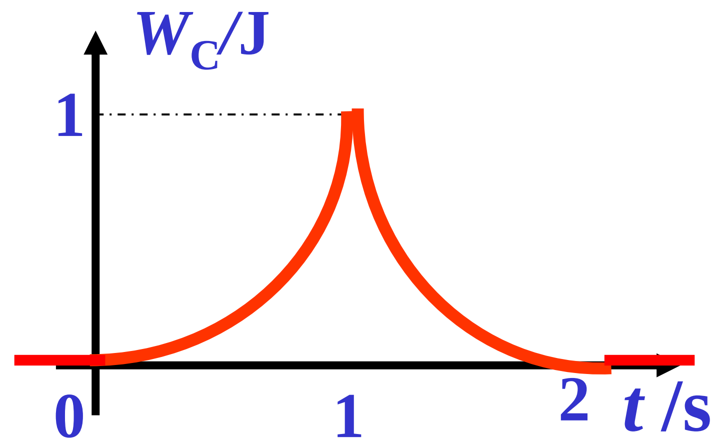
$$p(t)=u(t)i(t)=$$

$$=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 2t & 0\le t\le 1\text{s}\\ 2t-4 & 1\le t\le 2\text{s}\\ 0 & t\ge 2\text{s}\end{cases}$$



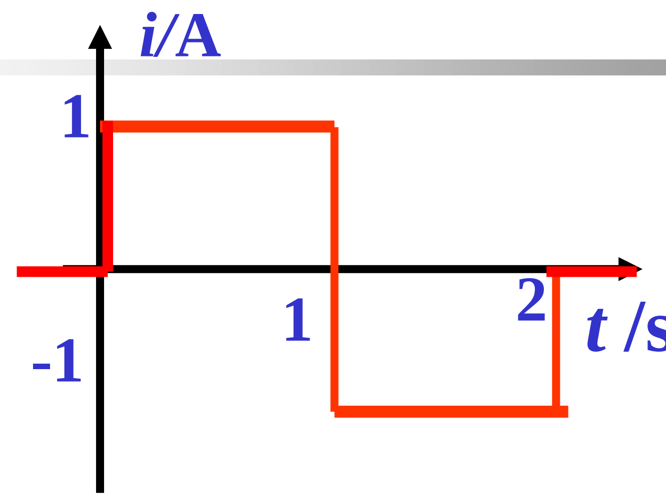
$$W_C(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)$$

$$=\begin{cases}0 & t\le 0\\ t^2 & 0\le t\le 1\text{s}\\ (t-2)^2 & 1\le t\le 2\text{s}\\ 0 & t\ge 2\text{s}\end{cases}$$



若已知电流求电容电压，有

$$i(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\le t<1\text{s}\\ -1 & 1\le t<2\text{s}\\ 0 & t\ge 2\text{s}\end{cases}$$



当 $0\le t\le 1\text{s}$ $\quad u_C(t)=\dfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{0}0\,\mathrm{d}\xi+\dfrac{1}{C}\int_0^t 1\,\mathrm{d}\xi=0+2t=2t$

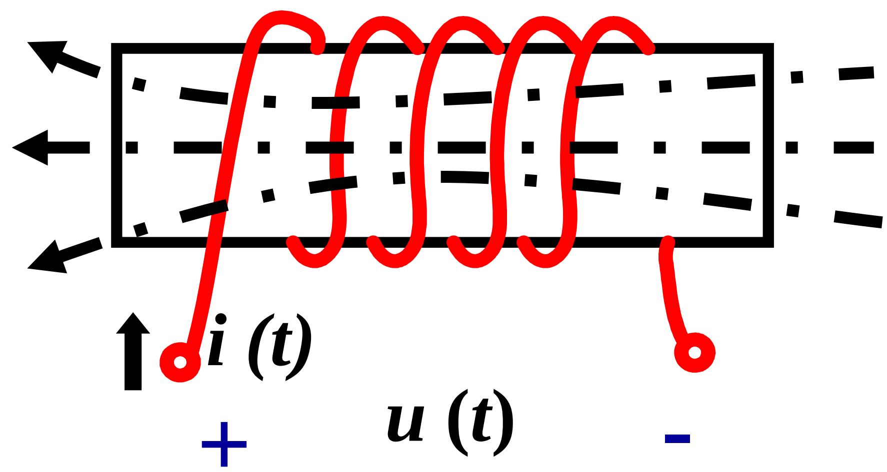
当 $1\le t\le 2\text{ s}$ $\quad u_C(t)=u(1)+\dfrac{1}{0.5}\int_1^t(-1)\,\mathrm{d}\xi=4-2t$

当 $2\le t$ $\quad u_C(t)=u(2)+\dfrac{1}{0.5}\int_2^t 0\,\mathrm{d}\xi=0$

6.2 电感元件

$$\psi(t)=N\,\Phi(t)$$

电感器

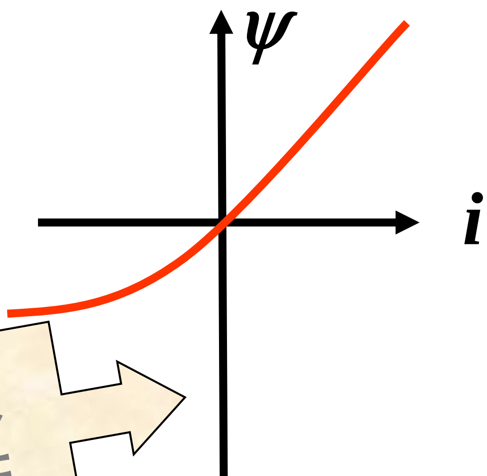


把金属导线绕在一骨架上构成一实际电感器，当电流通过线圈时，将产生磁通，是一种储存磁能的部件

1. 定义

电感元件 (Inductor)

储存磁能的元件。其特性可用 $\psi\sim i$ 平面上的一条曲线来描述



$$\psi = f(i)$$

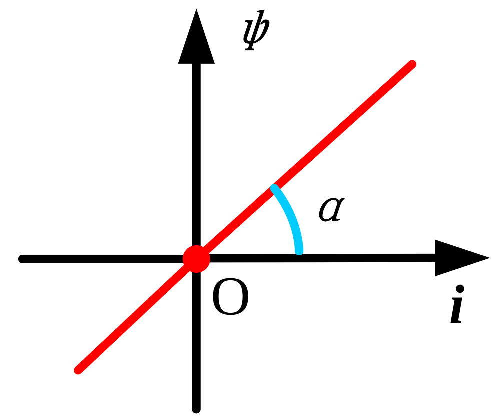
韦安特性

6.2 电感元件

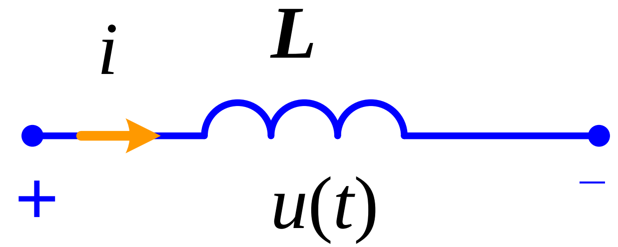
2. 线性定常电感元件

定 义　任何时刻，通过电感元件的电流i与其磁链ψ 成正比。 $\psi \sim i$ 特性是过原点的直线

$$\psi(t) = Li(t) \quad or \quad L = \frac{\psi}{i} \propto \tan\alpha$$



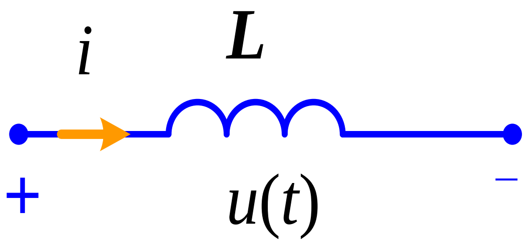
电路符号



单 位　L 称为电感器的自感系数, L的单位：H (亨)(Henry，亨利)，常用μH，m H表示。

线性电感的电压、电流关系

u、i 取关联参考方向



电感元件VCR的微分关系

$$u(t)=\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\,t}=L\frac{\mathrm{d}\,i(t)}{\mathrm{d}\,t}$$

表　明

(1) 电感电压u 的大小取决于i 的变化率，与i 的大小无关，电感是动态元件；

(2) 当i为常数(直流)时，u =0。电感相当于短路；

(3)实际电路中电感的电压 u为有限值，则电感电流i 不能跃变，必定是时间的连续函数。

电感元件VCR的积分关系

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u\mathrm{d}\xi=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0}u\mathrm{d}\xi+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u\mathrm{d}\xi$$

$$=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u\mathrm{d}\xi$$

表　明

电感元件有记忆电压的作用，故称电感为记忆元件

注意

(1) 当u, i为非关联方向时，上述微分和积分表达式前要冠以负号；

(2) 上式中$i(t_0)$称为电感电流的初始值，它反映电感初始时刻的储能状况，也称为初始状态。

电感的功率和储能

u、 i 取关联参考方向

功　率

$$p = ui = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\cdot i$$

(1) 当电流增大，$i>0$，$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t>0$，则$u>0$，$\psi\uparrow$，$p>0$，电感吸收功率。

(2) 当电流减小，$i>0$，$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t<0$，则$u<0$，$\psi\downarrow$，$p<0$，电感发出功率。

表　明

电感能在一段时间内吸收外部供给的能量转化为磁场能量储存起来，在另一段时间内又把能量释放回电路，因此电感元件是无源元件、是储能元件，它本身不消耗能量。

电感的储能

从-∞到 t 电感储能的变化量：

$$W_L(t)=\int_{-\infty}^{t} p\,\mathrm{d}\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{t} Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{2}Li^2(t)-\frac{1}{2}Li^2(-\infty)$$

若$i(-\infty)=0$

$$\Rightarrow\quad W_L(t)=\frac{1}{2}Li^2(t)\geq 0$$

从t_0到 t 电感储能的变化量：

$$W_{\mathrm{L}}(t)=\frac{1}{2}Li^2(t)-\frac{1}{2}Li^2(t_0)$$

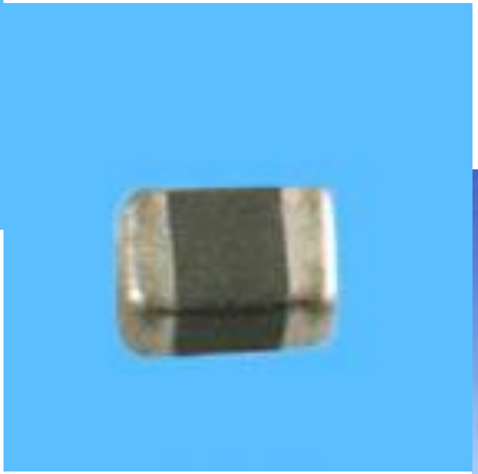
表明

(1) 电感的储能只与当时的电流值有关，电感电流不能跃变，反映了储能不能跃变；

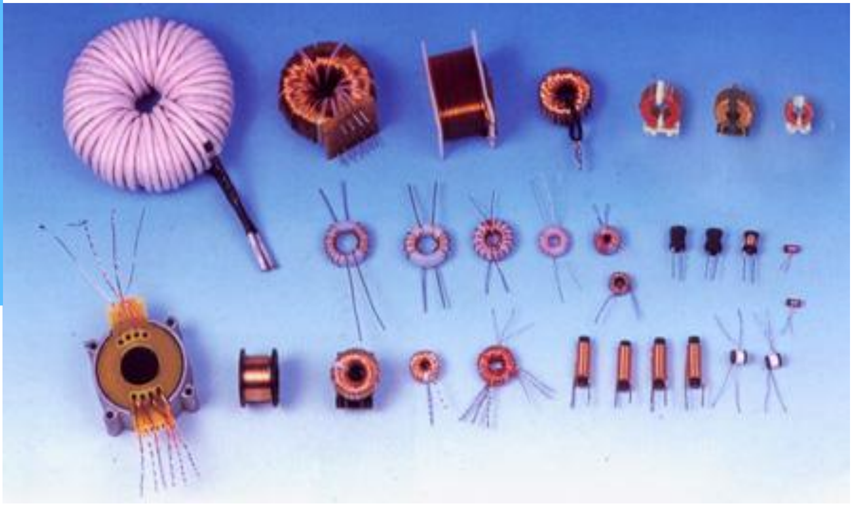
(2) 电感储存的能量一定大于或等于零。

3. 几种常见的电感元件

陶瓷电感

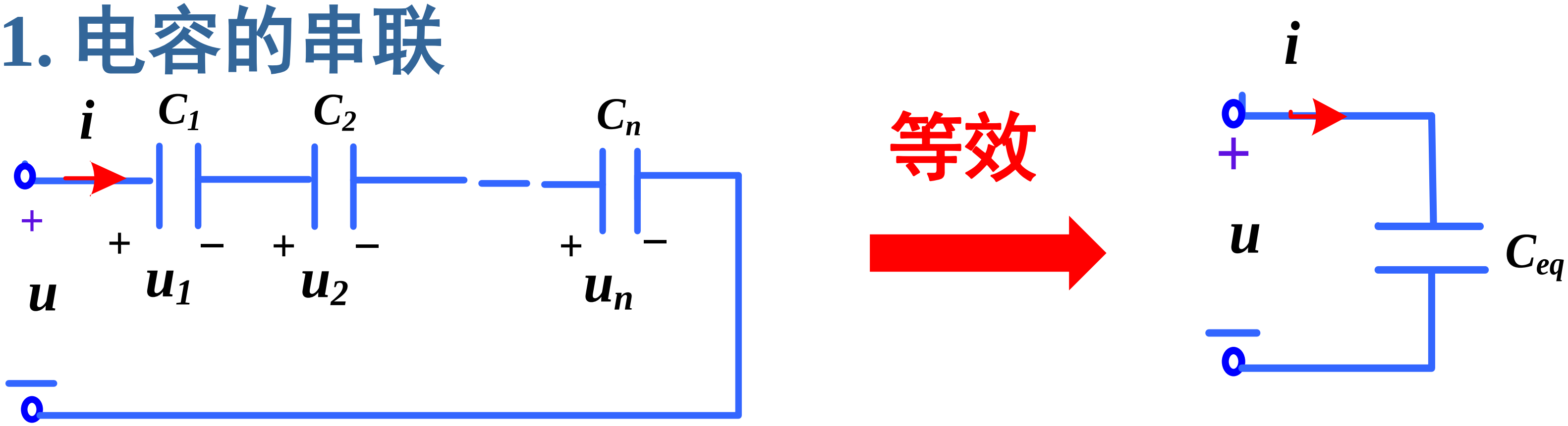


铁氧体电感



带有磁心的电感

1. 电容的串联



$$u(t)=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i d\xi \qquad u(t)=u_1+u_2+\ldots+u_n$$

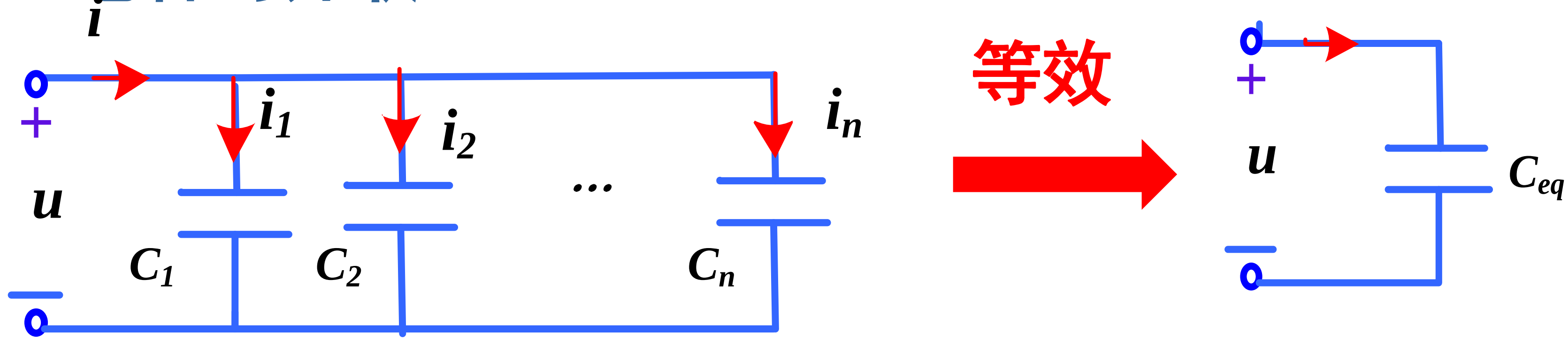
$$u(t)=\underbrace{[u_1(t_0)+u_2(t_0)+\ldots+u_n(t_0)]}_{u(t_0)}+\underbrace{\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\ldots+\frac{1}{C_n}\right)}_{\frac{1}{C_{eq}}}\int_{t_0}^{t} i d\xi$$

$$u(t)=u(t_0)+\frac{1}{C_{eq}}\int_{t_0}^{t} i d\xi$$

$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\ldots+\frac{1}{C_n}$$

6.3 电容、电感元件的串联与并联

2. 电容的并联



$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_n(t)$$

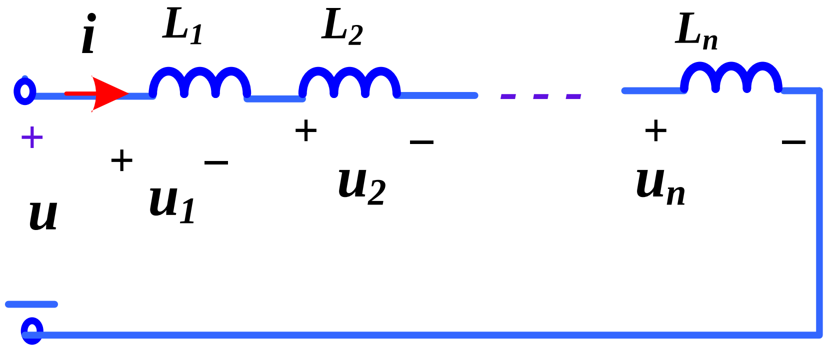
$$i(t) = \underbrace{(C_1 + C_2 + \dots + C_n)}_{C_{eq}}\frac{du}{dt}$$

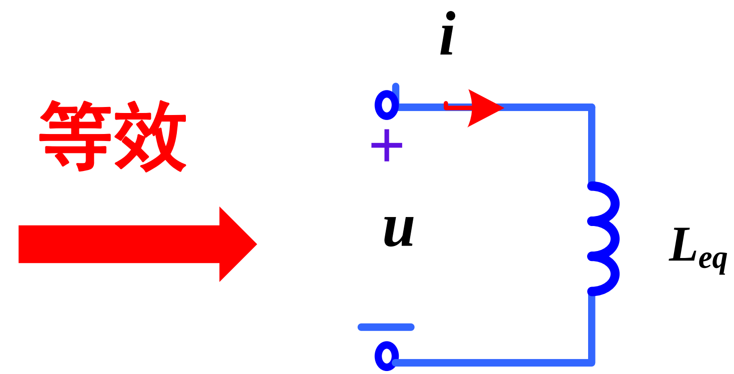
$$i(t) = C_{eq}\frac{du(t)}{dt}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

6.3 电容、电感元件的串联与并联

3. 电感的串联





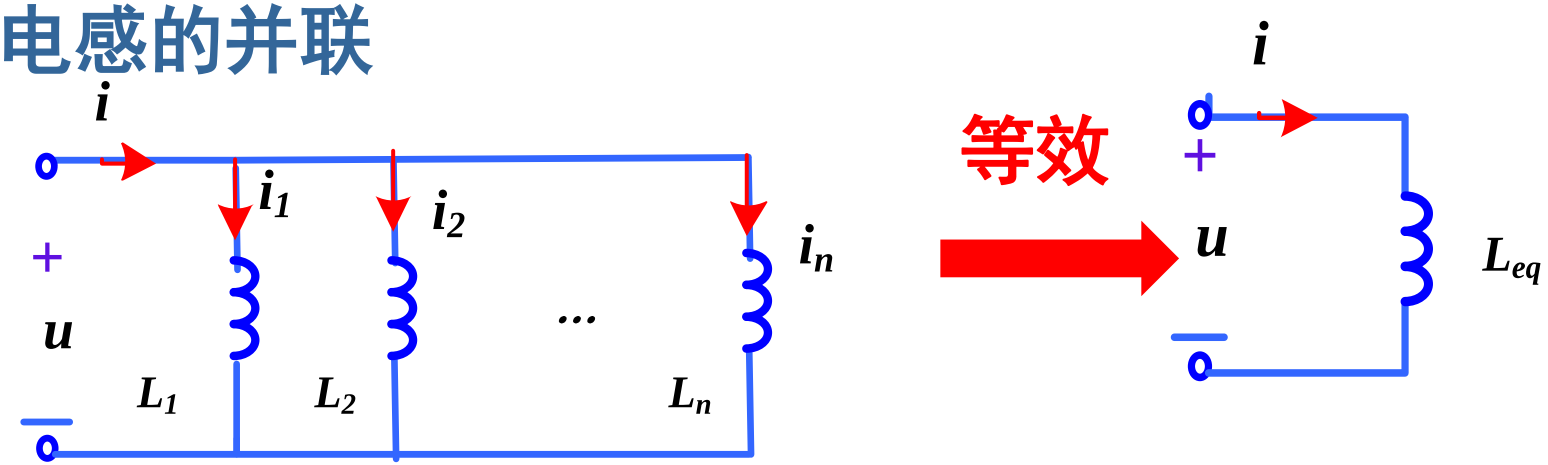
$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \ldots + u_n(t)$$

$$u(t) = \underbrace{(L_1 + L_2 + \ldots + L_n)}_{L_{eq}}\frac{di(t)}{dt}$$

$$u(t) = L_{eq}\frac{di(t)}{dt}$$

$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 + \ldots + L_n}$$

4. 电感的并联



$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + \ldots + i_n(t)$$

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u\, d\xi$$

$$i(t) = \underbrace{[i_1(t_0) + i_2(t_0) + \ldots + i_n(t_0)]}_{i(t_0)} + \underbrace{\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n}\right)}_{\frac{1}{L_{eq}}}\int_{t_0}^{t} u\, d\xi$$

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L_{eq}}\int_{t_0}^{t} u\, d\xi$$

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n}$$

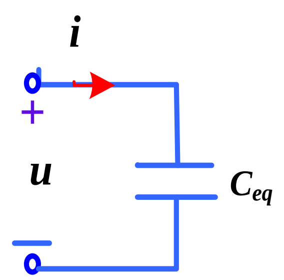
第6章 储能元件小结

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$u(t)=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,\mathrm{d}\xi$$

$$u(t)=L\frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t)=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u\,d\xi$$

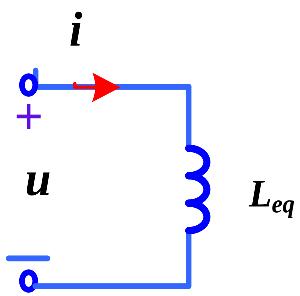


等效 ← 电容的串联

$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\ldots+\frac{1}{C_n}$$

电容的并联

$$C_{eq}=C_1+C_2+\ldots+C_n$$



等效 ← 电感的串联

$$L_{eq}=L_1+L_2+\ldots+L_n$$

电感的并联

$$\frac{1}{L_{eq}}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\ldots+\frac{1}{L_n}$$

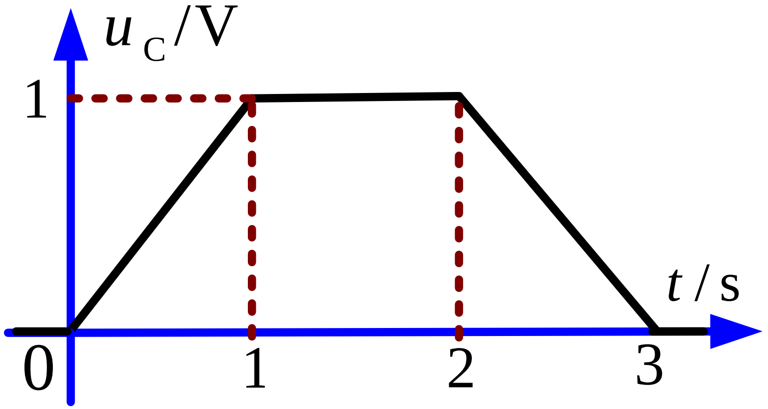
作业

【6-1】2F的电容上所加电压u_C的波形如图所示，求：

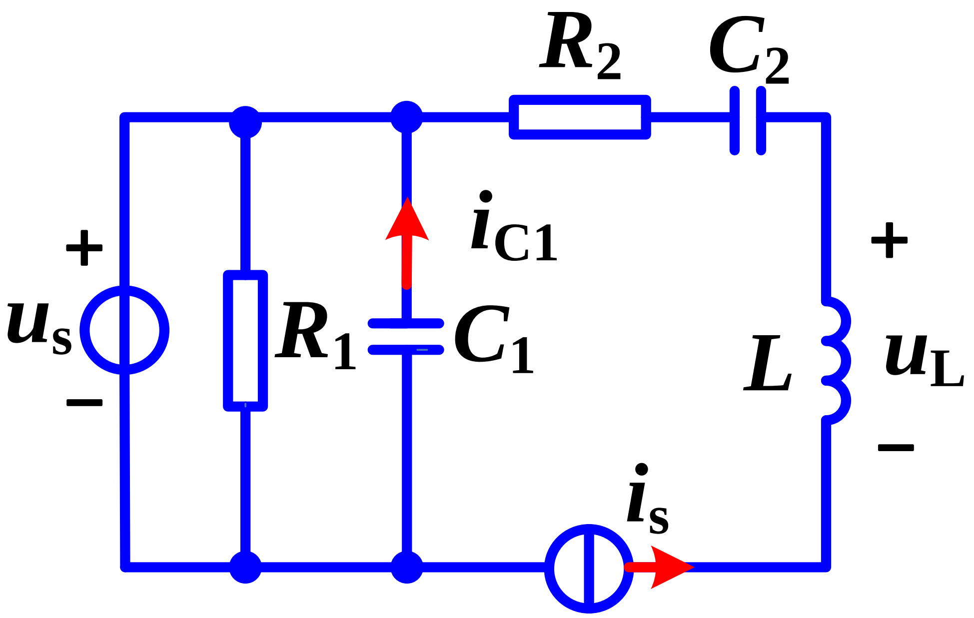
（1）电容电流i；

（2）电容电荷q；

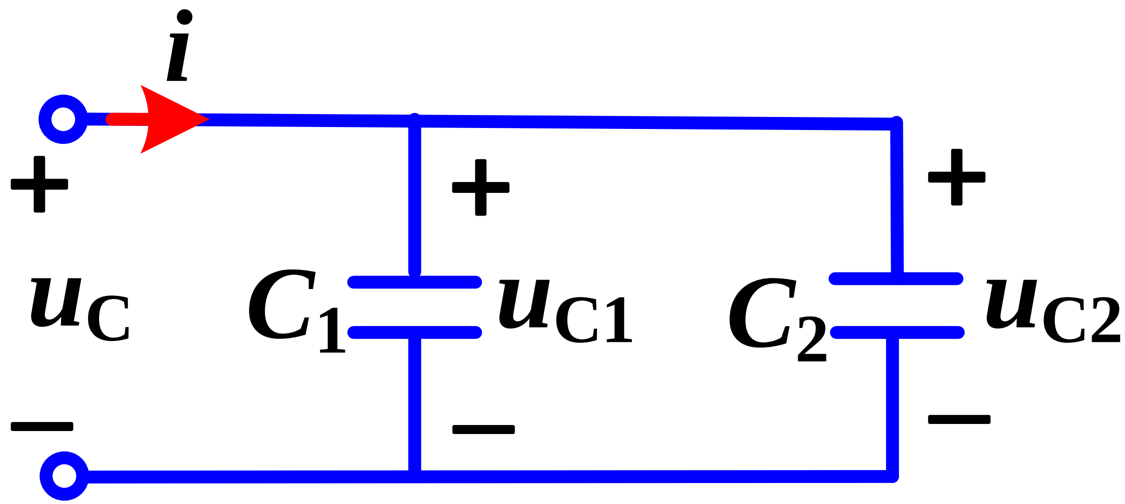
（3）电容吸收的功率p。



【6-2】电路如图所示，其中L=1H，C_1=1F。设$u_{s(t)}=3\sin(50t)$V，$i_s(t)=2e^{-4t}$ A，试求$i_{C_1}(t)$和$u_L(t)$。



【6-3】图中C_1=2μF， C_2=8μF， $u_{C_1}(0) = u_{C_2}(0) = -5V$， $i = 60e^{-5t}$μA，求C_1、C_2并联后的等效电容C及$u_C(t)$表达式。



【6-4】图中L_1=6H，$i_1(0)$=2A，L_2=3H， $i_2(0)$=-2A，$u=3e^{-2t}$V，求L_1、L_2并联后的等效电感L及$i(t)$。