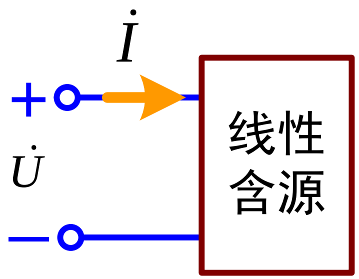
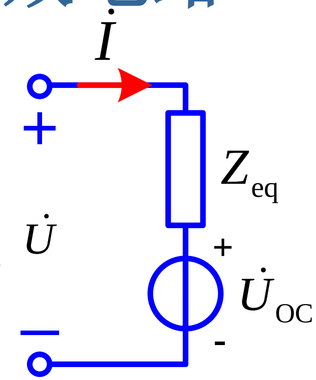
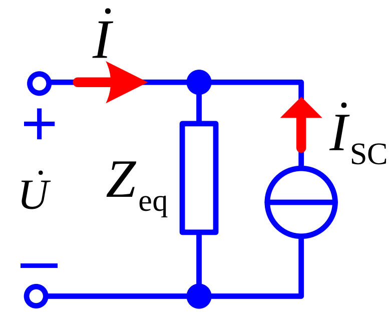
9.6 最大功率传输

1. 含源的一端口网络等效电路



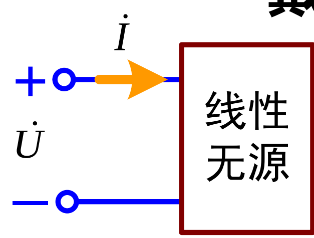
等效电路





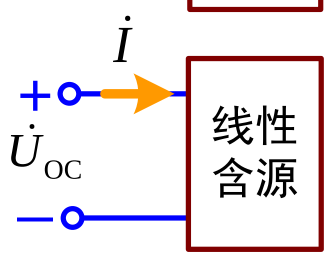
戴维宁等效电路　　**诺顿等效电路**

$$Z_{eq}=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$



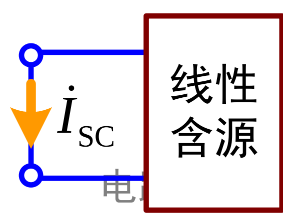
独立源置零

$$\dot{U}_{OC}$$



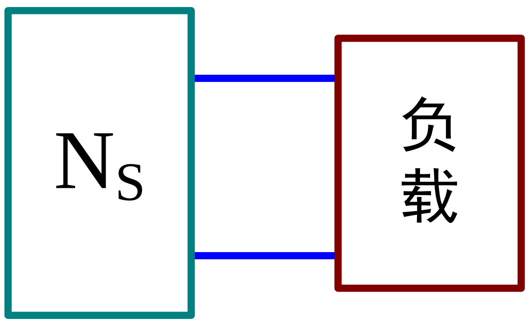
独立源保留，负载开路，求端线电压相量。

$$\dot{I}_{SC}$$

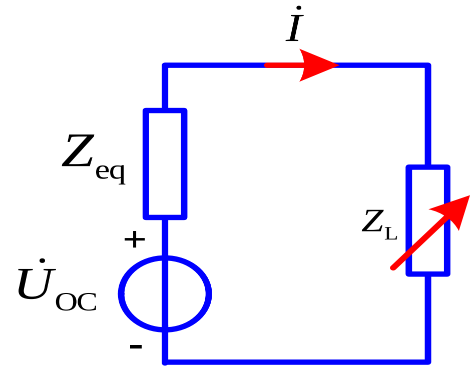


独立源保留，负载短路，求短路电流相量。

2. 最大功率传输问题



等效电路



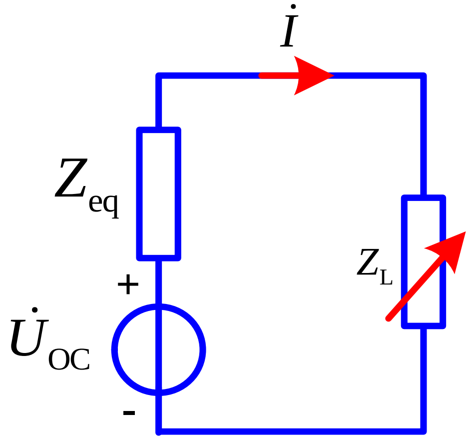
$$Z_{eq}=R_{eq}+\mathrm{j}X_{eq} \qquad Z_L=R_L+\mathrm{j}X_L$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_{OC}}{Z_{eq}+Z_L},\quad I=\frac{U_{OC}}{\sqrt{(R_{eq}+R_L)^2+(X_{eq}+X_L)^2}}$$

$$P=\frac{U_{OC}^2R_L}{(R_{eq}+R_L)^2+(X_{eq}+X_L)^2}$$

9.6 最大功率传输

$$P=\frac{U_{\mathrm{OC}}^{2}R_{\mathrm{L}}}{(R_{\mathrm{eq}}+R_{\mathrm{L}})^{2}+(X_{\mathrm{eq}}+X_{\mathrm{L}})^{2}}$$



$$\frac{\partial P}{\partial X_{L}}=0,\frac{\partial P}{\partial R_{L}}=0$$

得$X_{L}=-X_{eq},R_{L}=R_{eq}$,即$Z_{L}=Z_{eq}^{*}$

$$P_{\max}=\frac{U_{\mathrm{OC}}^{2}}{4\mathrm{R}_{eq}}=\frac{U_{\mathrm{OC}}^{2}}{4\mathrm{Re}(Z_{eq})}$$

9.7 正弦稳态电路的分析

- 方法与工具：相量法 $\begin{cases} \text{解析分析方法} \\ \boxed{\text{相量图分析方法}} \end{cases}$

- **解析形式相量法**
  - KCL与KVL： $\sum \dot{U} = 0, \sum \dot{I} = 0$
  - 元件相量形式方程

$$\dot{U}_R = R\dot{I}_R$$

$$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}_L$$

$$\dot{U}_C = -j\dot{I}_C \frac{1}{\omega C}$$

9.7 正弦稳态电路的分析

电阻电路与正弦电流电路的分析比较：

电阻电路

KCL： $\sum i = 0$

KVL： $\sum u = 0$

VCR： $u = Ri$ 或 $i = Gu$

正弦电路相量分析

KCL： $\sum \dot{I} = 0$

KVL： $\sum \dot{U} = 0$

VCR： $\dot{U} = Z\dot{I}$ 或 $\dot{I} = Y\dot{U}$

电路定理相似。作出正弦电流电路的相量模型，便可将电阻电路的分析方法推广应用于正弦稳态的相量分析中。

9.7 正弦稳态电路的分析

- **解析法分析步骤：**

① 作电路相量模型：激励用相量表示，参数用复阻抗表示；

② 应用KCL与KVL、回路法、结点法、2b法列写关于电流电压相量的电路方程

- 自阻→自阻抗，互阻→互阻抗，回路电流→回路电流相量，电压源电压→电压源电压相量；
- 自导→自导纳，互导→互导纳，结点电压→结点电压相量，电流源电流→电流源电流相量；

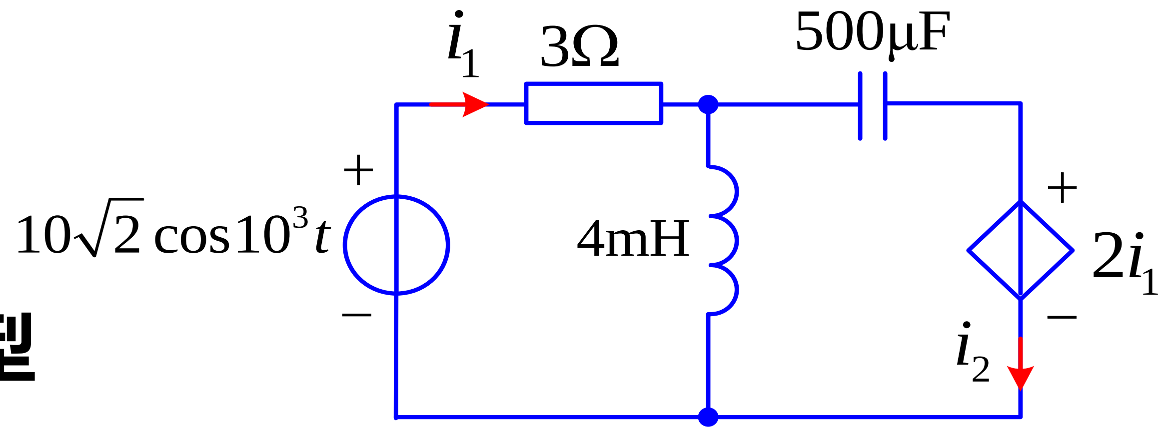
③ 求解方程组，得电压、电流相量；

④ 如需要，则写出电压、电流的正弦量形式

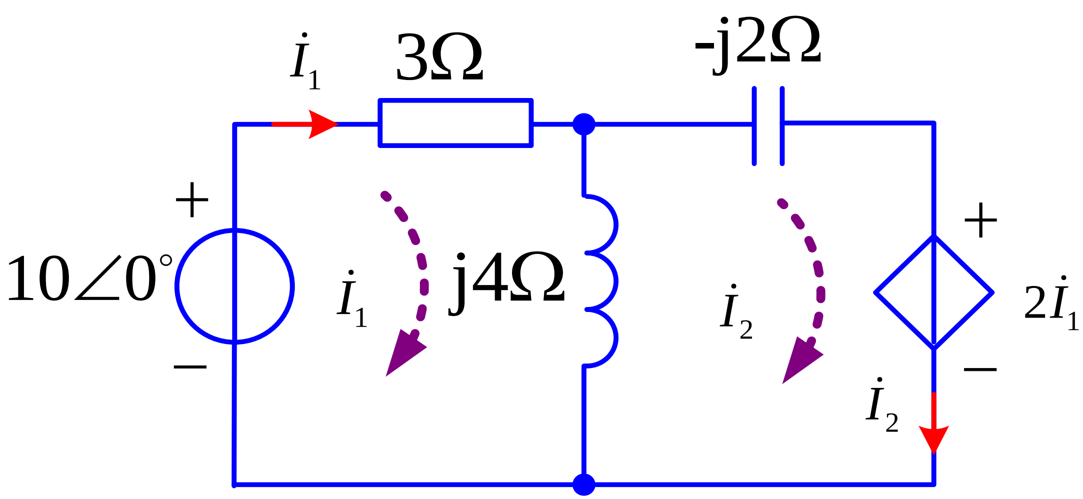
9.7 正弦稳态电路的分析

- **辅助工具**：相量图法
  - 描述电路中电流、电压相量关系的图叫相量图
  - 利用相量图分析求解
- **相量图画法**
  - 任取一相量作为参考相量（相位为零），不需画出复平面的实轴、虚轴；
  - 具有一般性，参考相量的初相可以不为零，其它相量与参考相量之间的相位关系为相对关系；
  - 选择距离电源最远端的一个复杂环节，串联则以电流作为参考相量；并联则以电压作为参考相量；
  - 相量间首尾相连以反映KCL与KVL，不要画成放射状。

【题1】求：i_1和i_2。



解 画出相量模型



相量模型

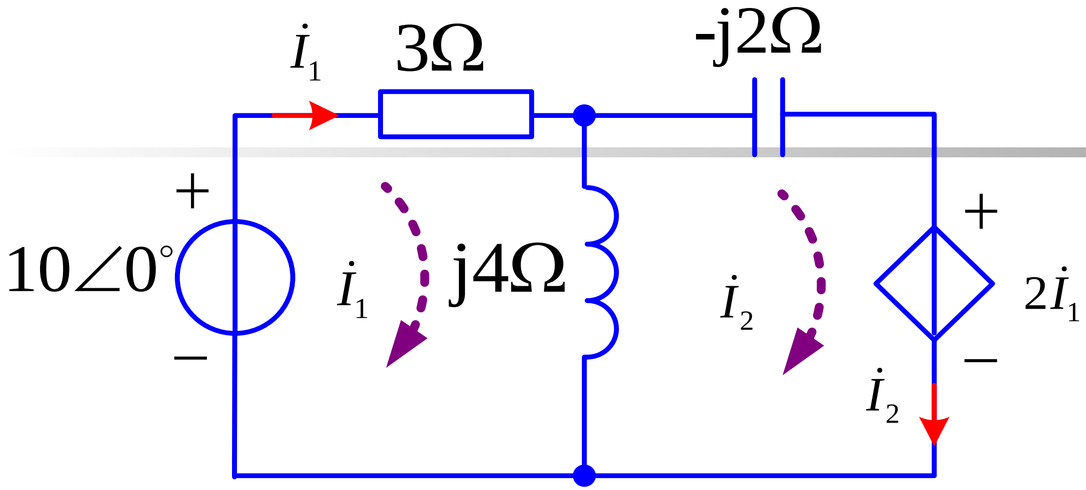
1、RLC用复阻抗表示

2、激励用相量表示

3、响应用相量表示

4、选择分析方法

选择解析方法



自阻　自阻抗

互阻　互阻抗

激励、响应　相量

$$\begin{cases}(3+j4)\dot{I}_1-j4\dot{I}_2=10\angle 0^\circ \\ (j4-j2)\dot{I}_2-j4\dot{I}_1=-2\dot{I}_1\end{cases}$$

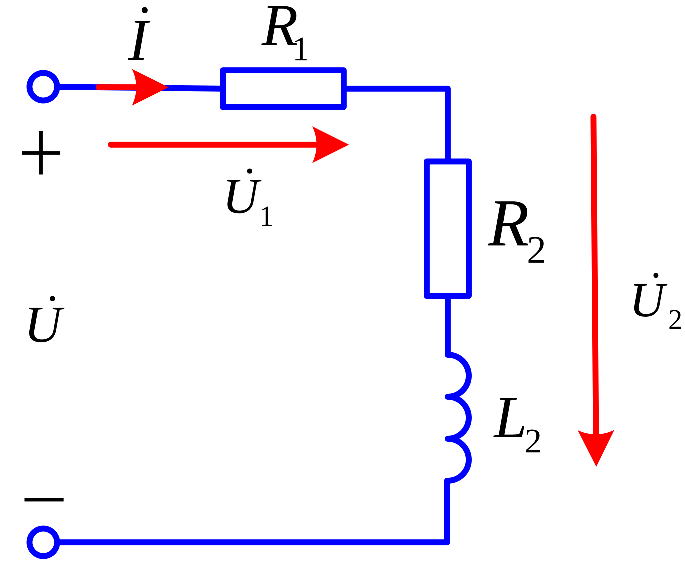
解得

$$\begin{cases}\dot{I}_1=1.24\angle 29.8^\circ \mathrm{A} \\ \dot{I}_2=2.77\angle 56.3^\circ \mathrm{A}\end{cases}$$

写出对应的正弦信号

$$\begin{cases}i_1=1.24\sqrt{2}\cos(10^3 t+29.8^\circ)\mathrm{A} \\ i_2=2.77\sqrt{2}\cos(10^3 t+56.3^\circ)\mathrm{A}\end{cases}$$

【题2】 已知:R_1=32Ω U=115V f=50Hz U_1=55.4V U_2=80V 求: R_2 L_2



解 法1: 设 $\dot{I} = I\angle 0°$

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{55.4}{32} = 1.73\text{A}$$

$$\dot{I} = 1.73\angle 0°$$

$$Z_2 = R_2 + \mathrm{j}\omega L_2 \qquad Z_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}} = \frac{80\angle\varphi_2}{1.73\angle 0°} = 46.24\angle\varphi_2$$

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 \qquad 115\angle\varphi = 55.4\angle 0° + 80\angle\varphi_2$$

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 \qquad 115\angle\varphi = 55.4\angle 0° + 80\angle\varphi_2$$

$$\begin{cases} 115\cos\varphi = 55.4 + 80\cos\varphi_2 \\ 115\sin\varphi = 80\sin\varphi_2 \end{cases}$$

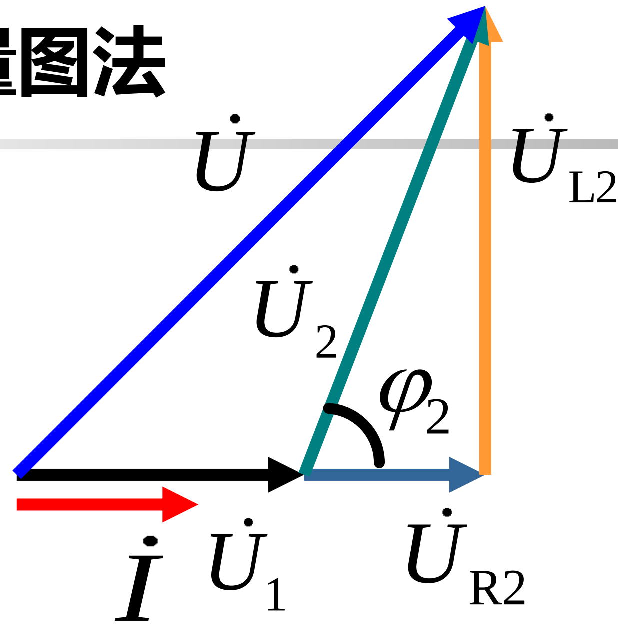
$$\varphi_2 = 64.9°$$

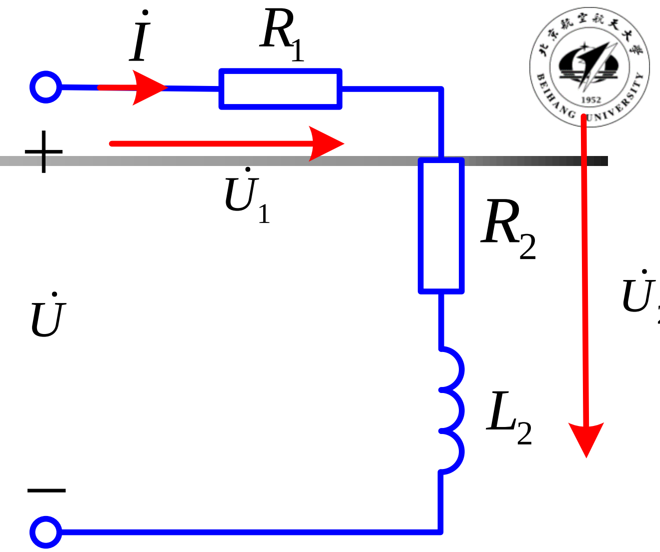
$$Z_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}} = \frac{80\angle 64.9°}{1.73\angle 0°} = 46.24\angle 64.9° = 19.6 + \mathrm{j}41.88\Omega$$

$$R_2 = 19.6\Omega$$

$$L_2 = \frac{41.88}{2\pi \times 50} = 133.4\mathrm{mH}$$

法2：相量图法





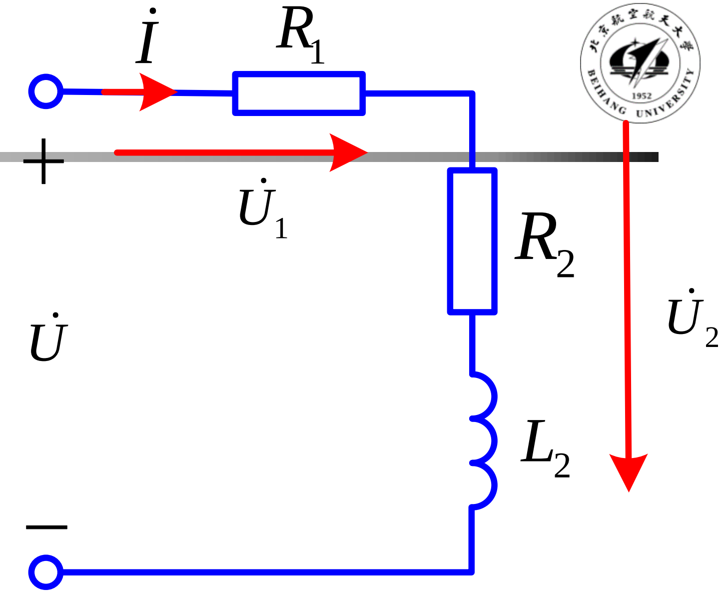
由余弦定理 $U^2 = U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2\cos(\pi - \varphi_2)$

$$\cos\varphi_2 = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1U_2} \Rightarrow \varphi_2$$

$$I = \frac{U_1}{R_1} \qquad \frac{U_2\cos\varphi_2}{I} = R_2 \Rightarrow R_2$$

$$\frac{U_2\sin\varphi_2}{I} = \omega L_2 \Rightarrow L_2$$

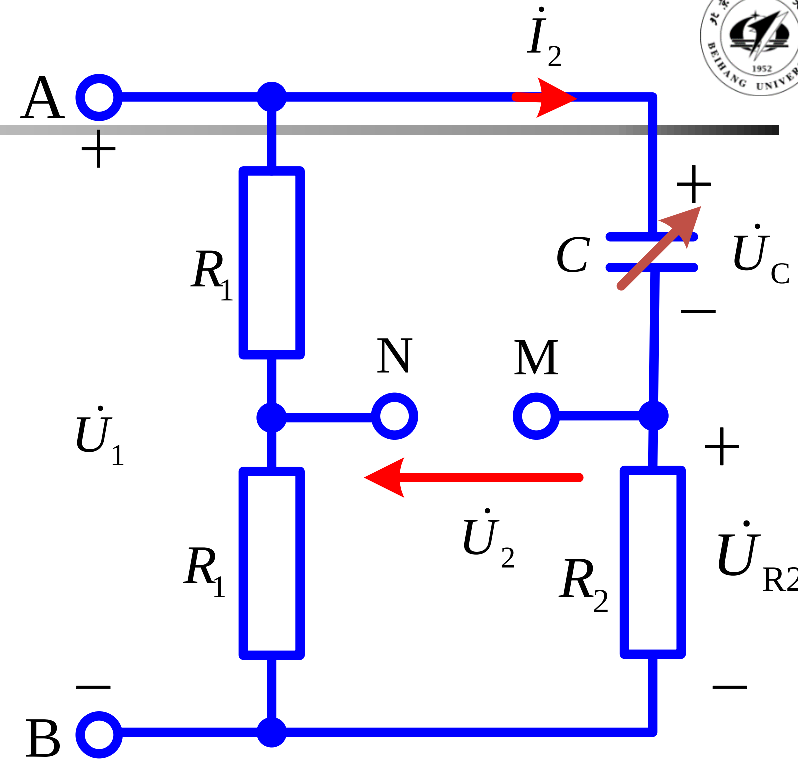
法3：解析法（利用相量的模）



$$
\begin{cases}
\dfrac{U_2}{I} = \sqrt{R_2^{\ 2} + (\omega L_2)^2} \\[2ex]
\dfrac{U}{I} = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L_2)^2} \\[2ex]
I = \dfrac{U_1}{R_1}
\end{cases}
$$

【题3】 已知：R_1 R_2

讨论：C在$0\to\infty$范围内变化时，$\dot{U}_2$ 的变化情况



解 选 $\dot{U}_1$为参考相量

$$\dot{U}_{AN}=\dot{U}_{NB}=\frac{1}{2}\dot{U}_{AB}$$

$\dot{I}_2$ 必超前$\dot{U}_1$

$$C\to 0,\frac{1}{j\omega C}\to\infty$$ 点M与点B ⟶ 重合

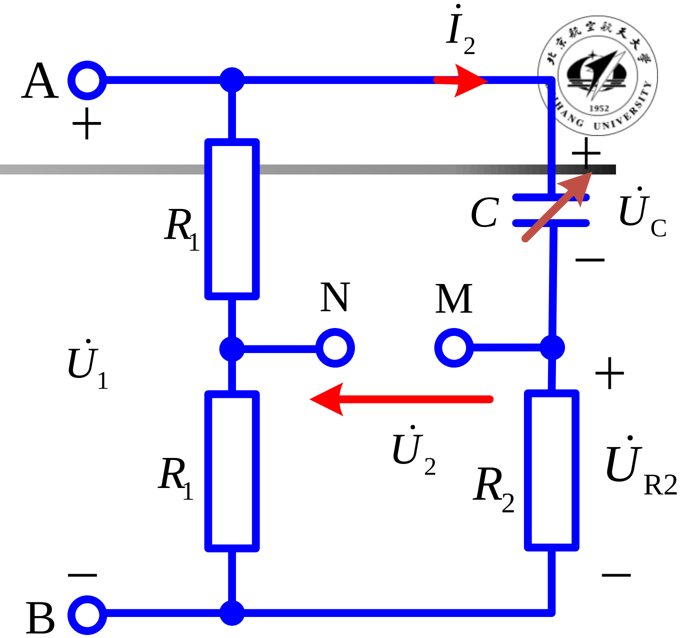
$$\dot{U}_2\to\dot{U}_{BN}$$ $\dot{U}_2$与$\dot{U}_1$相差为π

$$C \to \infty, \frac{1}{j\omega C} \to 0$$

点M与点A $\longrightarrow$ 重合

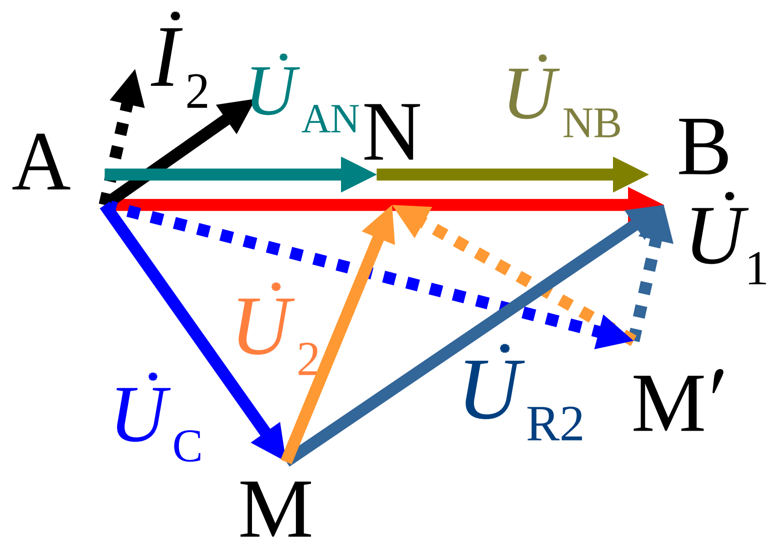
$$\dot{U}_2 \to \dot{U}_{AN}$$

$\dot{U}_2$ **与** $\dot{U}_1$ **相差为0**



$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{2}$$ **当C从** $0 \to \infty$**，相角** $\pi \to 0$ **。**

移相桥电路

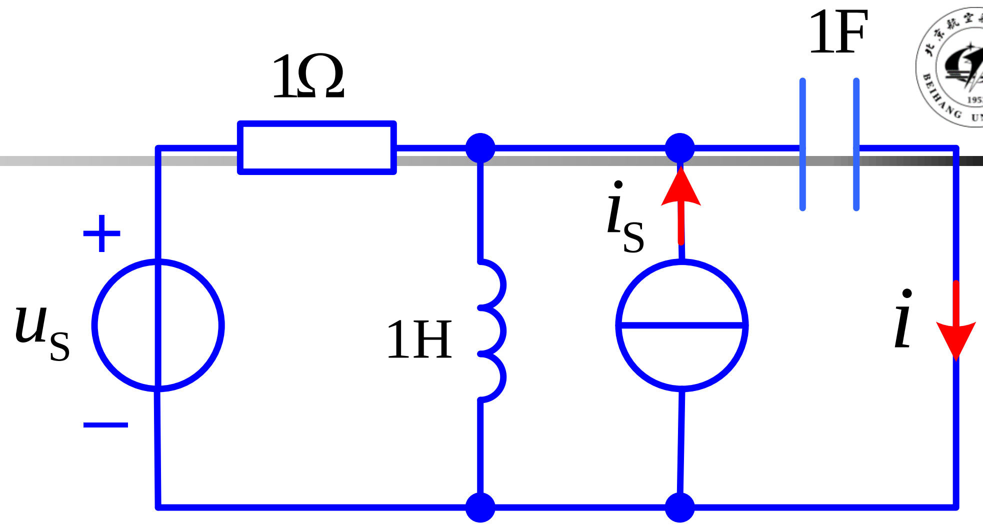


【题4】

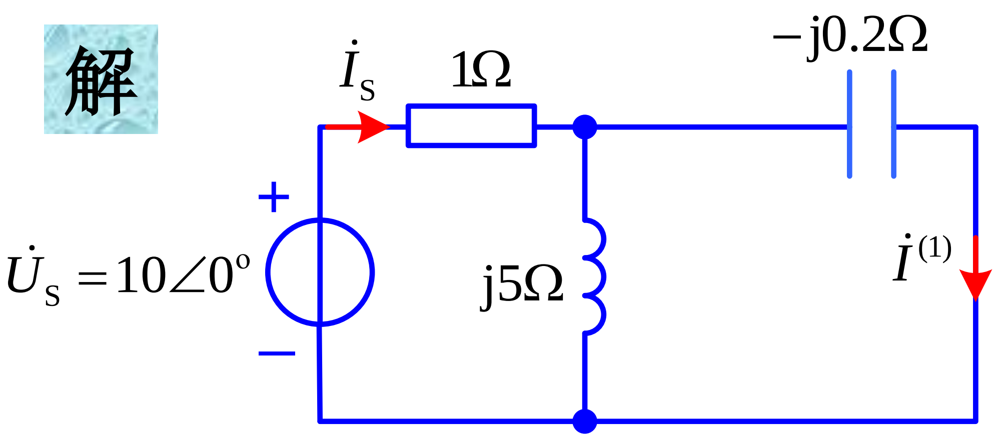
$$u_S(t)=10\sqrt{2}\cos 5t\,\mathrm{V}$$

$$i_S(t)=2\sqrt{2}\cos 4t\,\mathrm{A}$$

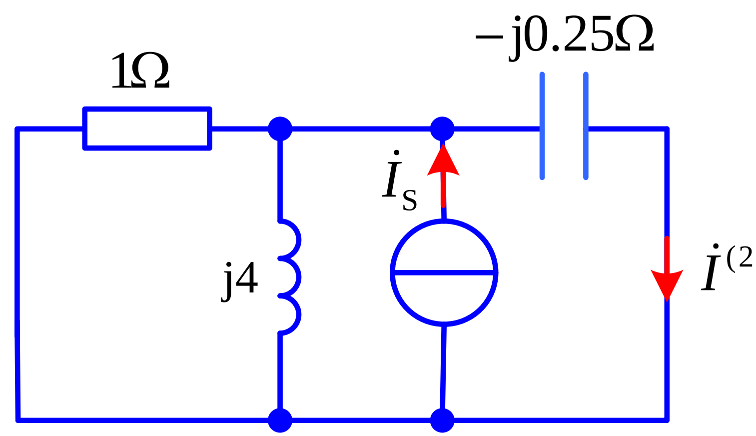
求$i(t)$



解

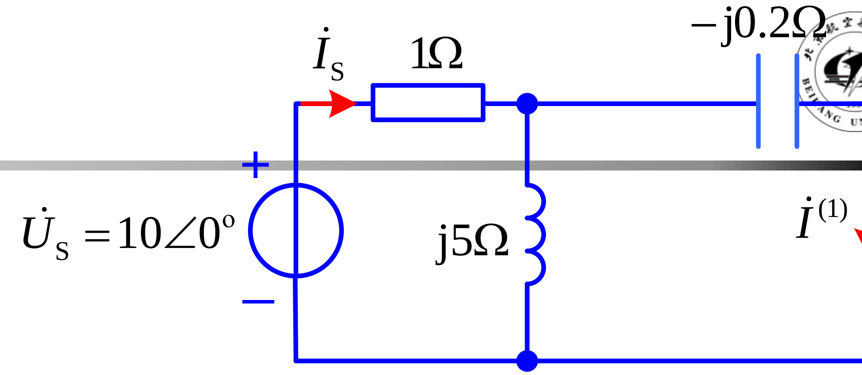


$u_S(t)$ 单独作用



$i_S(t)$ 单独作用

$u_{\mathrm{S}}(t)$ 单独作用

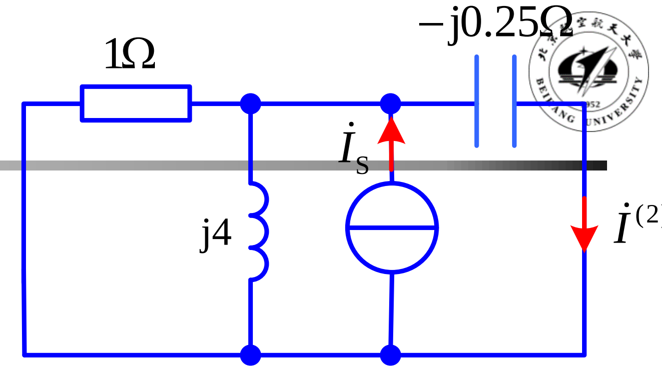


$$\dot{I}_{\mathrm{S}}=\frac{\dot{U}_{\mathrm{S}}}{1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{j}5}+\dfrac{1}{-\mathrm{j}0.2}}}=\frac{\dot{U}_{\mathrm{S}}}{1-\mathrm{j}\dfrac{1}{4.8}}$$

$$=\frac{10\angle 0^{\circ}}{1.02\angle -11.77^{\circ}}=9.81\angle 11.77^{\circ}\mathrm{A}$$

$$\dot{I}^{(1)}=\dot{I}_{\mathrm{S}}\times\frac{\mathrm{j}5}{\mathrm{j}4.8}=10.2\angle 11.77^{\circ}\mathrm{A}$$

$i_S(t)$ 单独作用



$$\dot{I}_S = 2\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}^{(2)} = \frac{\dot{I}_S \times \text{j}4}{\text{j}4 - \text{j}0.25 + 1} = \dot{I}_S \times \frac{\text{j}4}{\text{j}3.75 + 1} = \dot{I}_S \times \frac{4}{3.75 - \text{j}}$$

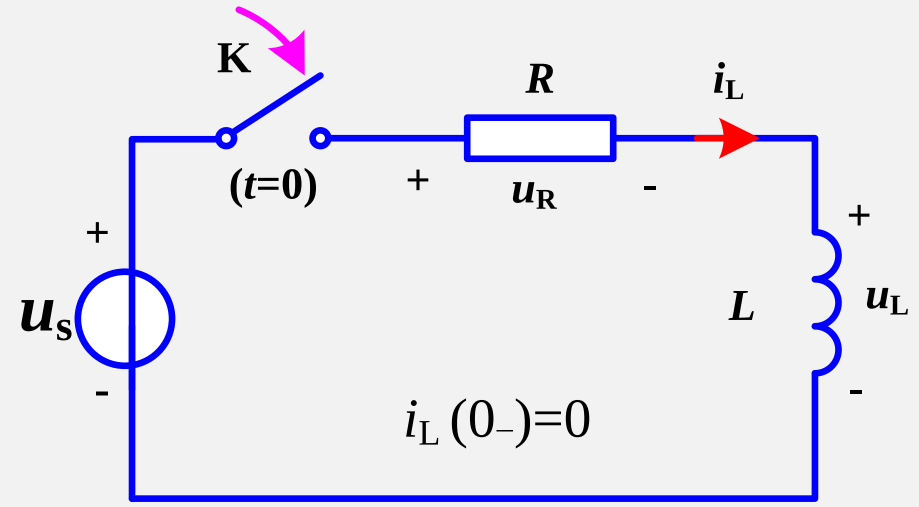
$$= \dot{I}_S \times 1.031\angle 14.93^\circ = 2.062\angle 14.93^\circ \text{A}$$

$$\dot{I} \neq \dot{I}^{(1)} + \dot{I}^{(2)} \qquad i = i_1^{(1)} + i_2^{(2)}$$

$$i = 10.2\sqrt{2}\cos(5t + 11.77^\circ) + 2.062\sqrt{2}\cos(4t + 14.93^\circ)\,(\text{A})$$

【题5】

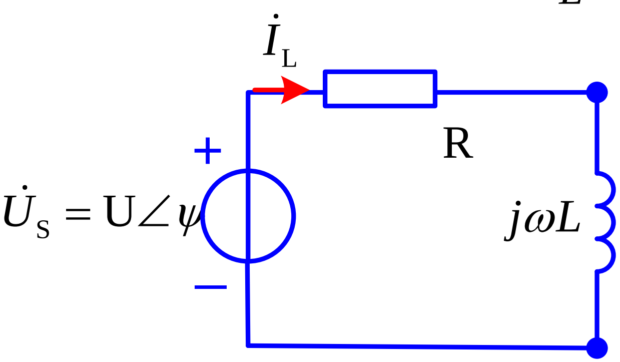
已知$u_s=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\psi_u)\text{V}$，求$t>0$时$i_L(t)$。



解

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$$

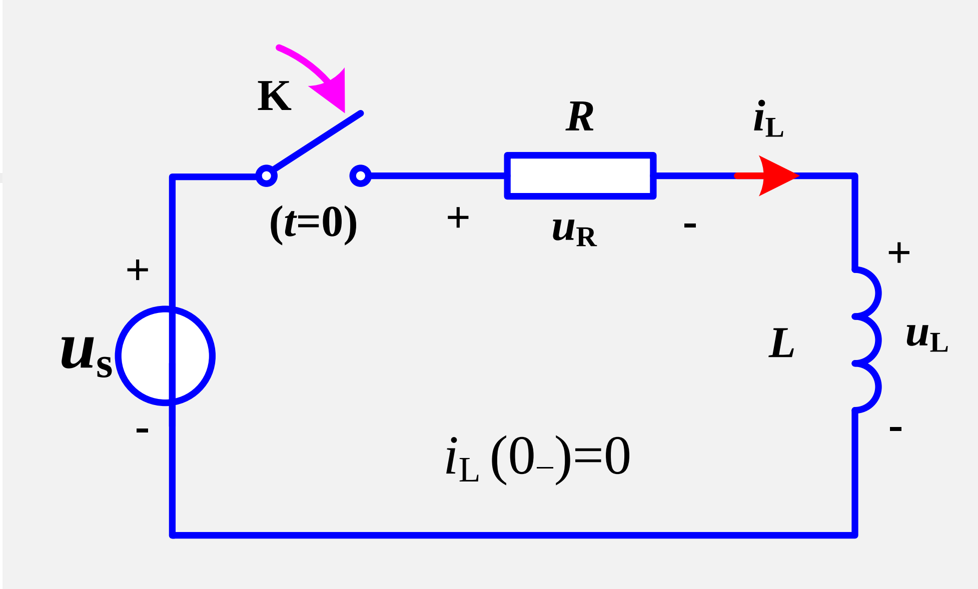
$$\tau=L/R \qquad i''_L=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$



$$\dot I_L=\frac{\dot U_S}{R+j\omega L}=\frac{U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\angle(\Psi_u-arctg\frac{\omega L}{R})$$

$$\therefore i_L'=\frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cos(\omega t+\Psi_u-arctg\frac{\omega L}{R})$$

$$\therefore i_L=\frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cos(\omega t+\Psi_u-arctg\frac{\omega L}{R})-\frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cos(\Psi_u-arctg\frac{\omega L}{R})e^{-\frac{t}{\tau}}$$



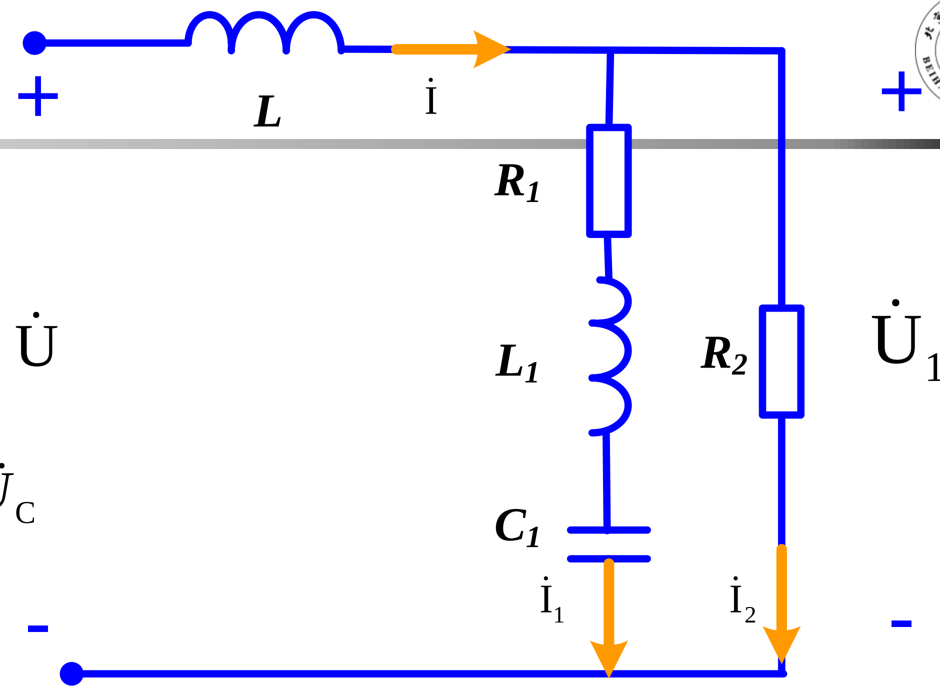
$t>0$时

$$\therefore i_L=\frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cos(\omega t+\Psi_u-arctg\frac{\omega L}{R})-\frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cos(\Psi_u-arctg\frac{\omega L}{R})e^{-\frac{t}{\tau}}(A)$$

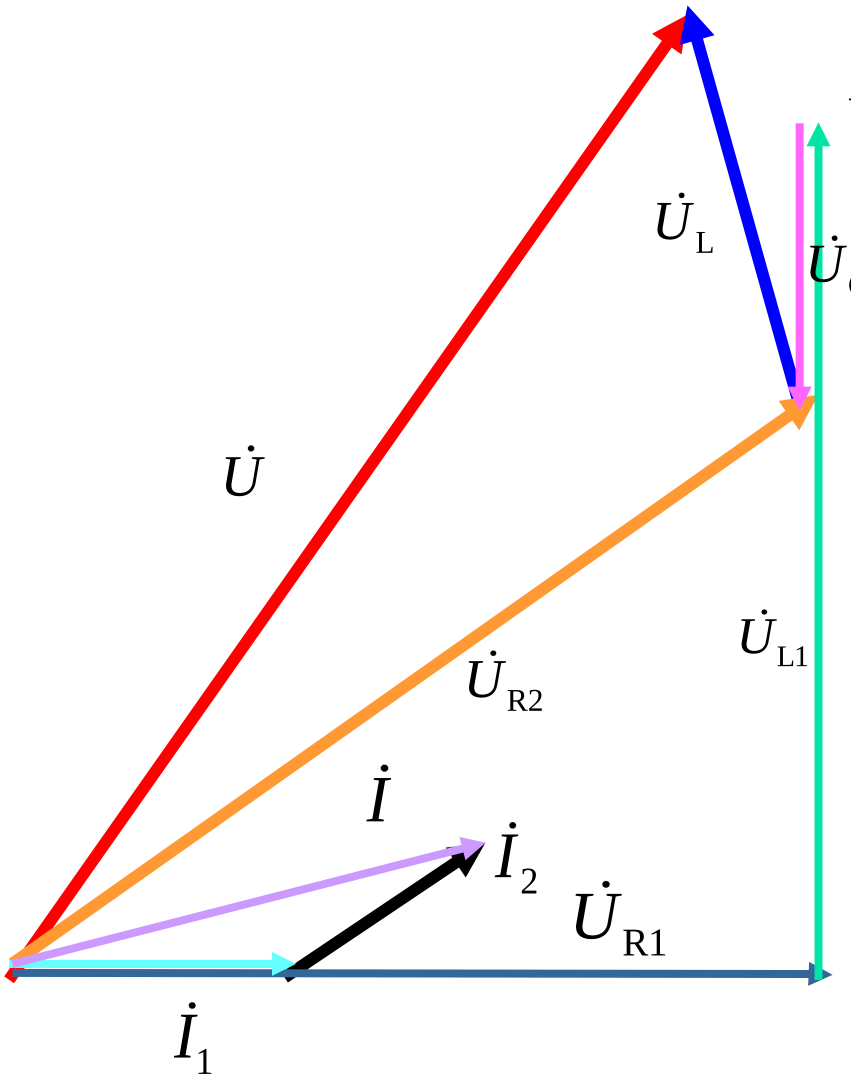
(1）若开关闭合时刻,$\cos(\Psi_u-arctg\frac{\omega L}{R})=0$，则电路无暂态，直接进入稳态;

(2）若τ很大，则暂态响应会超过稳态响应近1倍。

【题6】

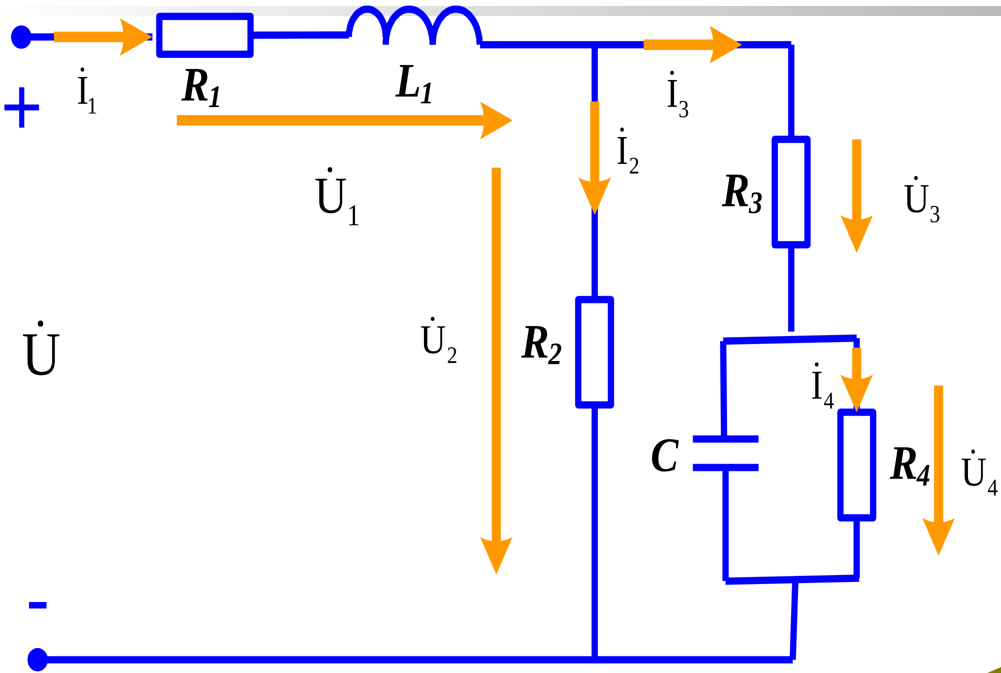


画出电路的相量图。

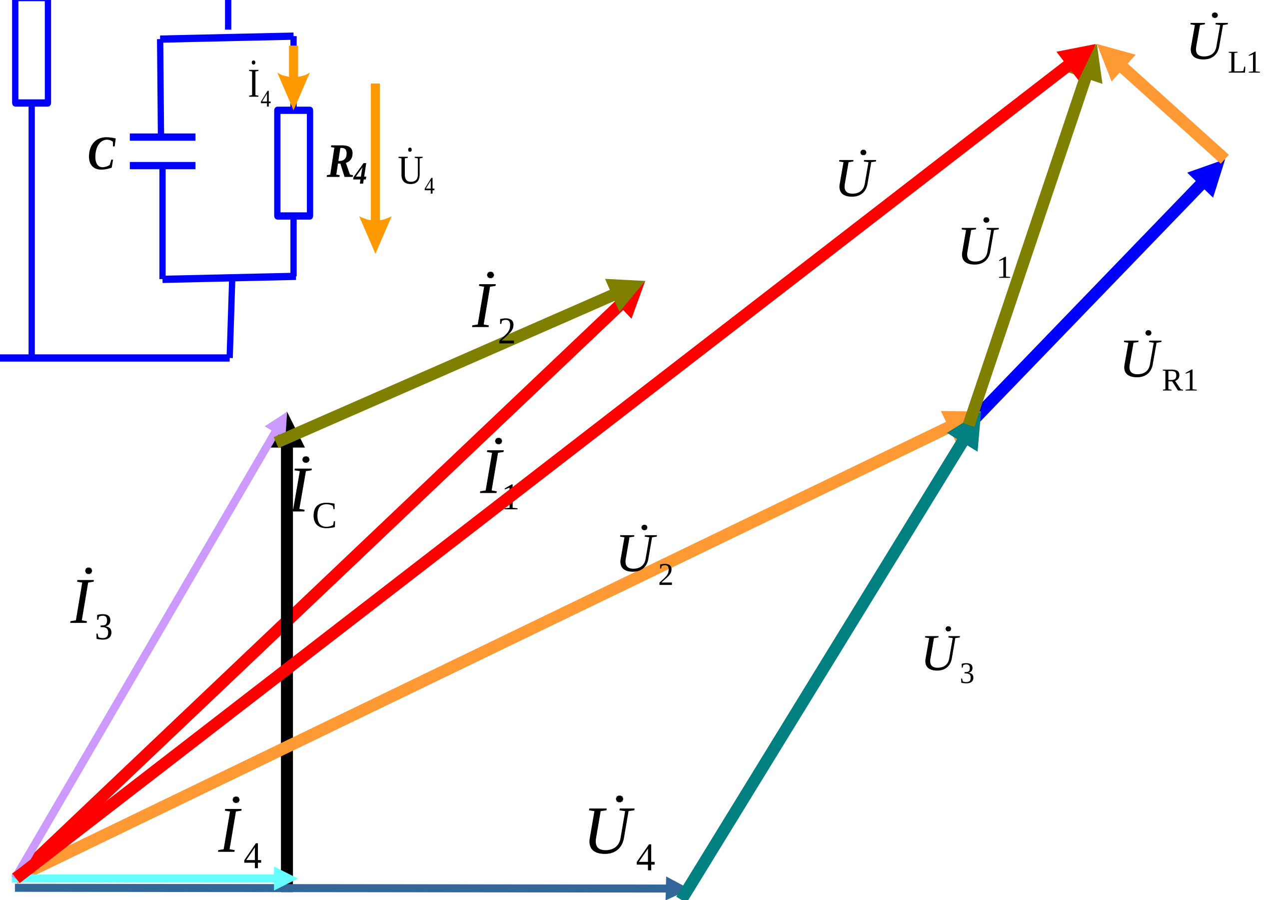


- 选择距离电源最远端的一个复杂环节，串联则以电流作为参考相量；并联则以电压作为参考相量；
- 相量间首尾相连以反映KCL与KVL，不要画成放射状

【题7】



+
-
$\dot{I}_1$
R_1
L_1
$\dot{U}_1$
$\dot{U}$
$\dot{U}_2$
$\dot{I}_2$
R_2
$\dot{I}_3$
R_3
$\dot{U}_3$
C
$\dot{I}_4$
R_4
$\dot{U}_4$



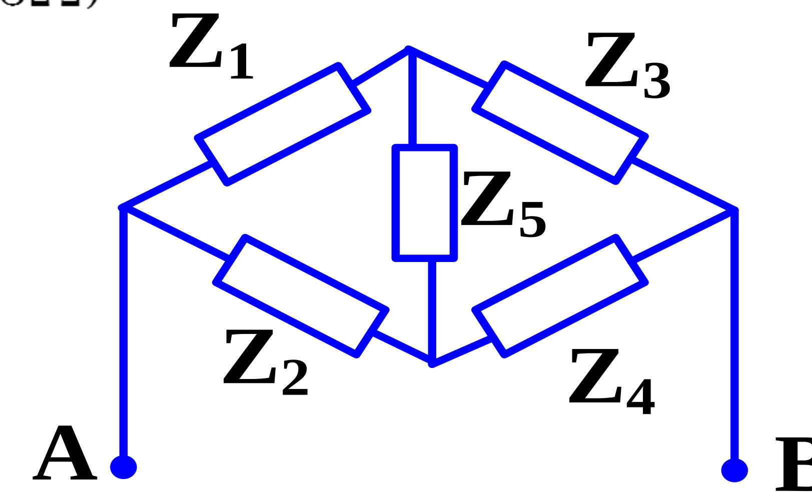
$\dot{U}_{L1}$
$\dot{U}$
$\dot{U}_1$
$\dot{U}_{R1}$
$\dot{I}_2$
$\dot{I}_C$
$\dot{I}_1$
$\dot{U}_2$
$\dot{I}_3$
$\dot{U}_3$
$\dot{I}_4$
$\dot{U}_4$

【题8】已知：$Z_1=5+j5\Omega$，$Z_2=j5\Omega$，

$Z_3=-j10\Omega$，$Z_4=5-j5\Omega$，

$Z_5=10+j5\Omega$，

求：输入阻抗



解

交流电桥平衡条件

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{Z_3}{Z_4} \quad 或 \quad Z_1Z_4=Z_2Z_3$$

或 $|Z_1||Z_4|\angle(\varphi_1+\varphi_4)=|Z_2||Z_3|\angle(\varphi_2+\varphi_3)$

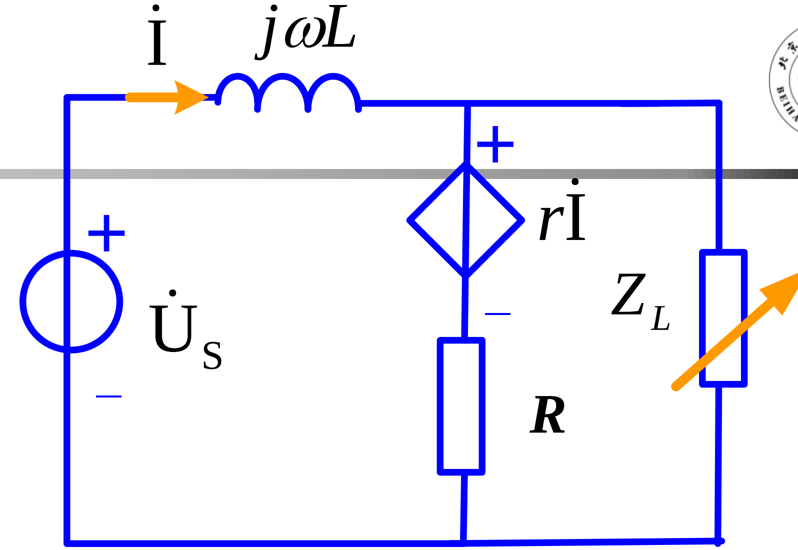
题中 $Z_1Z_4=50$，$Z_2Z_3=50$，故交流电桥平衡

$$\therefore Z_{in}=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}+\frac{Z_3Z_4}{Z_3+Z_4}=\frac{(Z_1+Z_3)(Z_2+Z_4)}{(Z_1+Z_3)+(Z_2+Z_4)}$$

$$=3-j(\Omega)$$

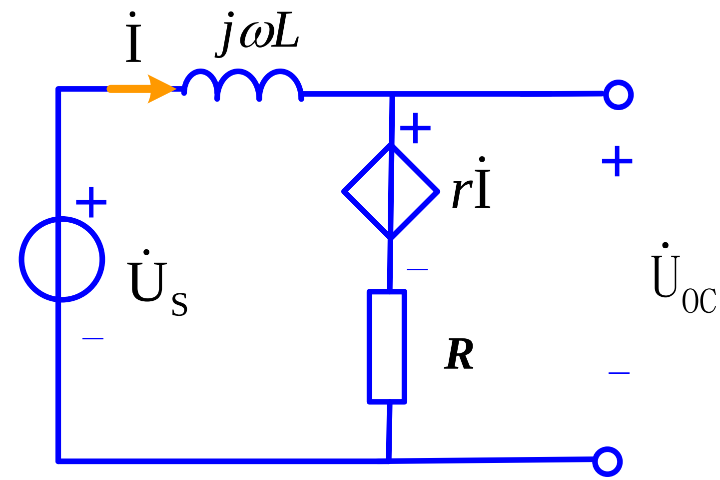
#【题9】

求：可变负载Z_L上获得最大功率的条件，并求此功率。



解

先求负载端看过去的戴维宁等效电路

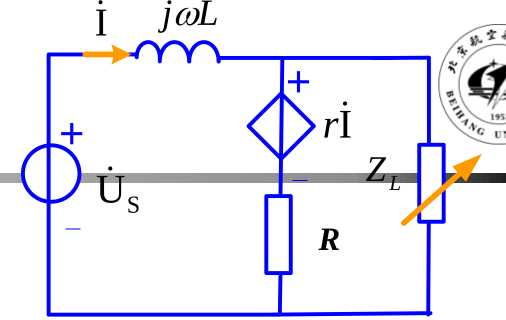


$$\dot{U}_S = j\omega L \times \dot{I} + r\dot{I} + R \times \dot{I}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{j\omega L + r + R}$$

$$\dot{U}_{OC} = r\dot{I} + R\dot{I} = \frac{r+R}{j\omega L + r + R}\dot{U}_S$$

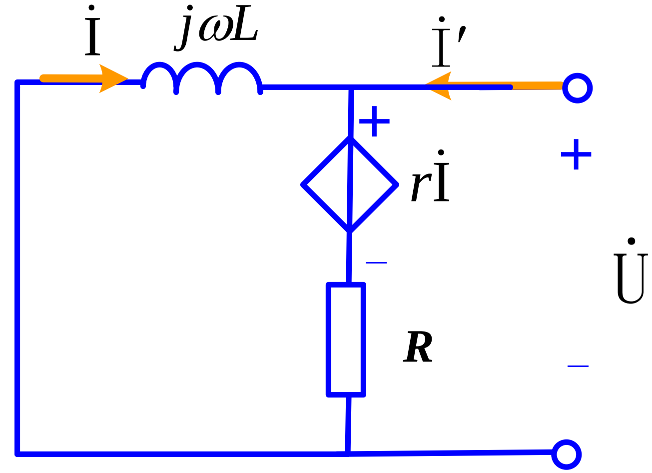
$$\dot{U}_{OC}=r\dot{I}+R\dot{I}=\frac{r+R}{j\omega L+r+R}\dot{U}_S$$



$$j\omega L\times\dot{I}+r\times\dot{I}+R\times(\dot{I}+\dot{I}')=0$$

$$\dot{I}=\frac{-R}{j\omega L+r+R}\dot{I}'$$

$$\dot{U}'=-j\omega L\dot{I}=\frac{j\omega LR}{j\omega L+r+R}\dot{I}'$$



$$Z_{eq}=\frac{\dot{U}'}{\dot{I}'}=\frac{j\omega LR}{j\omega L+r+R}=\frac{R(\omega L)^2+j(r+R)\omega LR}{(r+R)^2+(\omega L)^2}$$

$\therefore$ 当$Z_L=Z_{eq}{}^*=\dfrac{R(\omega L)^2-j(r+R)\omega LR}{(r+R)^2+(\omega L)^2}$时，$Z_L$上取得最大功率

$$P_{\max}=\frac{U_{OC}{}^2}{4\mathrm{Re}(Z_{eq})}=\frac{(r+R)^2}{4R(\omega L)^2}U_S{}^2$$

作业

【9-11】

【9-12】

【9-13】

【9-14】

【9-15】