第03讲

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

平稳随机过程的各态历经性

主讲：张有光教授
电子信息工程学院

如何跟踪、制导？

导弹速度≈飞机速度

预测问题

- 设有零均值实平稳过程$X(t)$，如何利用已知值$X(t)$预测未来值$X(t+\lambda)$，λ为提前量，
- 即 $\hat{X}(t+\lambda)=aX(t)$ 选择 a使得

$$E\left\{\left[X(t+\lambda)-aX(t)\right]^2\right\}$$最小

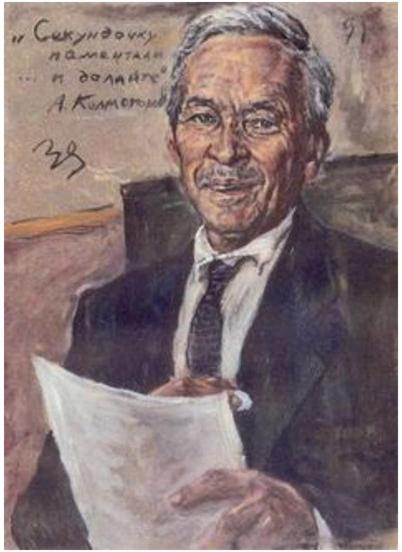
维纳1894-1964

$$E\left\{\left[X(t+\lambda)-aX(t)\right]^2\right\}$$

$$=a^2R_X(0)-2aR_X(\lambda)+R_X(0)$$

当 $a=\dfrac{R_X(\lambda)}{R_X(0)}$ 最小值 $\dfrac{R_X^2(0)-R_X^2(\lambda)}{R_X(0)}$

$$\boxed{\hat{X}(t+\lambda)=\frac{R_X(\lambda)}{R_X(0)}X(t)}$$



辛钦1894-1959

- 怎样获得 $\boxed{R_X(\lambda)}$

在这个例子中，只能获得飞机过去一段时间的飞行轨迹，也即：

能否用一个样本来获得平稳随机过程的均值和自相关函数?

均值估计 $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt\overset{?}{=}m_x$

回顾：大数定律

- 独立同分布随机序列X_i，均值为μ

方差为σ^2，令 $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

则 $\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\bar{X}_n-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$

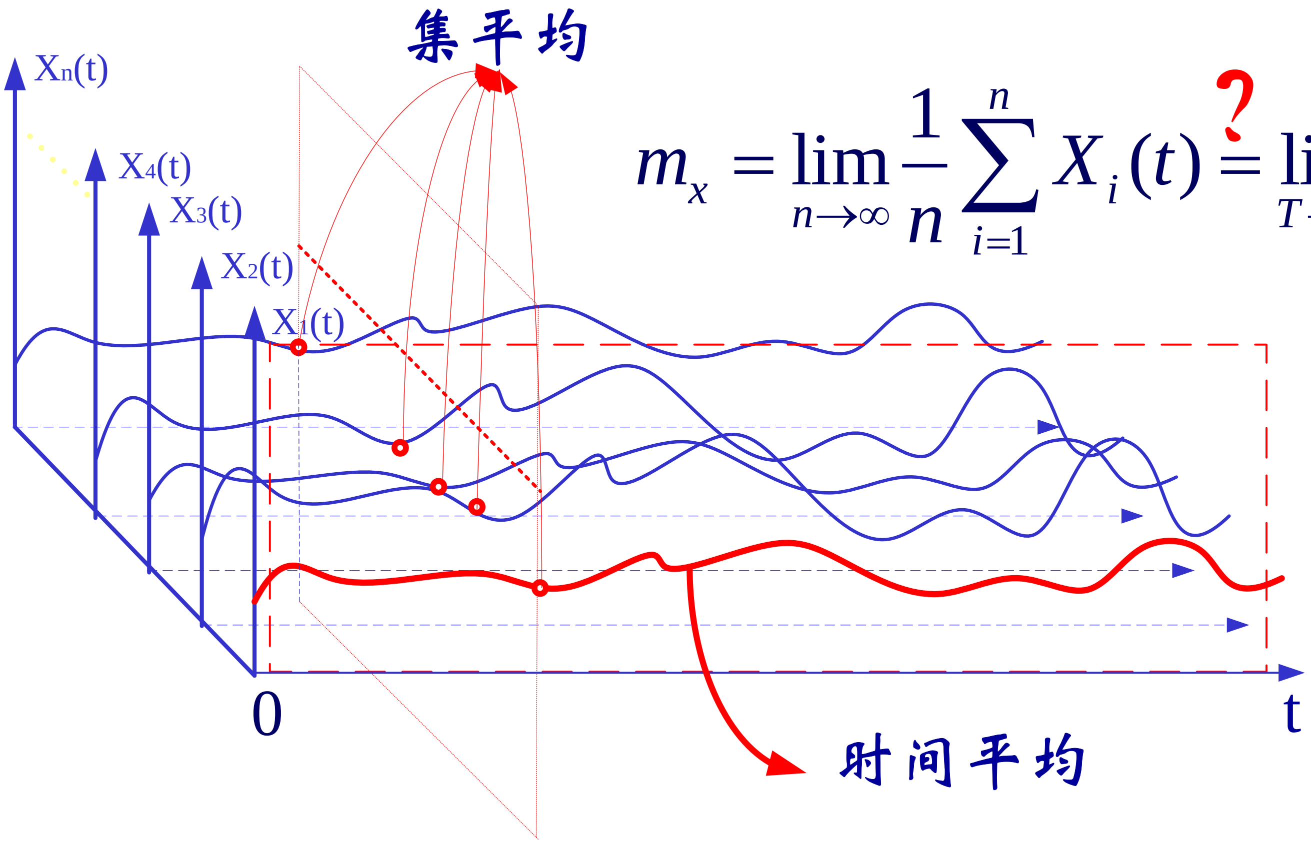
也即 $\bar{X}_n$ 依概率收敛于 μ

历史回顾：统计热力学

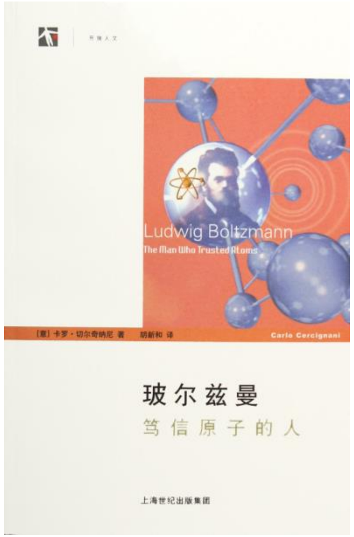
- 玻耳兹曼 1871
  - 一个孤立系统从任一初态出发经过足够长的时间后将**经历**一切可能的微观状态

- 艾伦·菲斯特 1911
  - “**经历**”改为“可以无限接近”，宏观性质是微观量足够长时间的平均值

概念 ~各态历经性



$$m_x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(t) \overset{?}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt$$



举例：特殊随机过程

- 设Y是均值为0、方差为$\sigma^2 \neq 0$的随机变量，定义一个随机过程 $X(t)=Y$ 则 $X(t)$是平稳随机过程。

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt=Y \quad \neq 0$$

各态历经性的定义

设 $X(t)$ 是平稳随机过程，$\overline{X(t)} = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt$

若 $\overline{X(t)} = E[X(t)] = m_x$ 依概率1成立，

即对任意的 ε >0，有

$$\lim_{T\to\infty} P\{|\overline{X(t)} - E[X(t)]| \le \varepsilon\} = 1$$

则称过程 $X(t)$ 的均值具有各态历经性。

均值各态历经性 条件分析

条件 $\overline{X(t)} = E[X(t)] = m_x$ 依概率1成立

等价于

$$E[\overline{X(t)}] = m_x$$

$$D[\overline{X(t)}] = 0$$

均值各态历经性 条件分析

首先 $$E[\overline{X(t)}] = E\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt\right]$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E[X(t)]dt$$

$$= m_x$$

其次 $D[\overline{X(t)}]=E\left\{\left\{\overline{X(t)}-E[\overline{X(t)}]\right\}^2\right\}$

$$=E\{[\overline{X(t)}-m_x]^2\}=E[\overline{X(t)}]^2-m_x^2$$

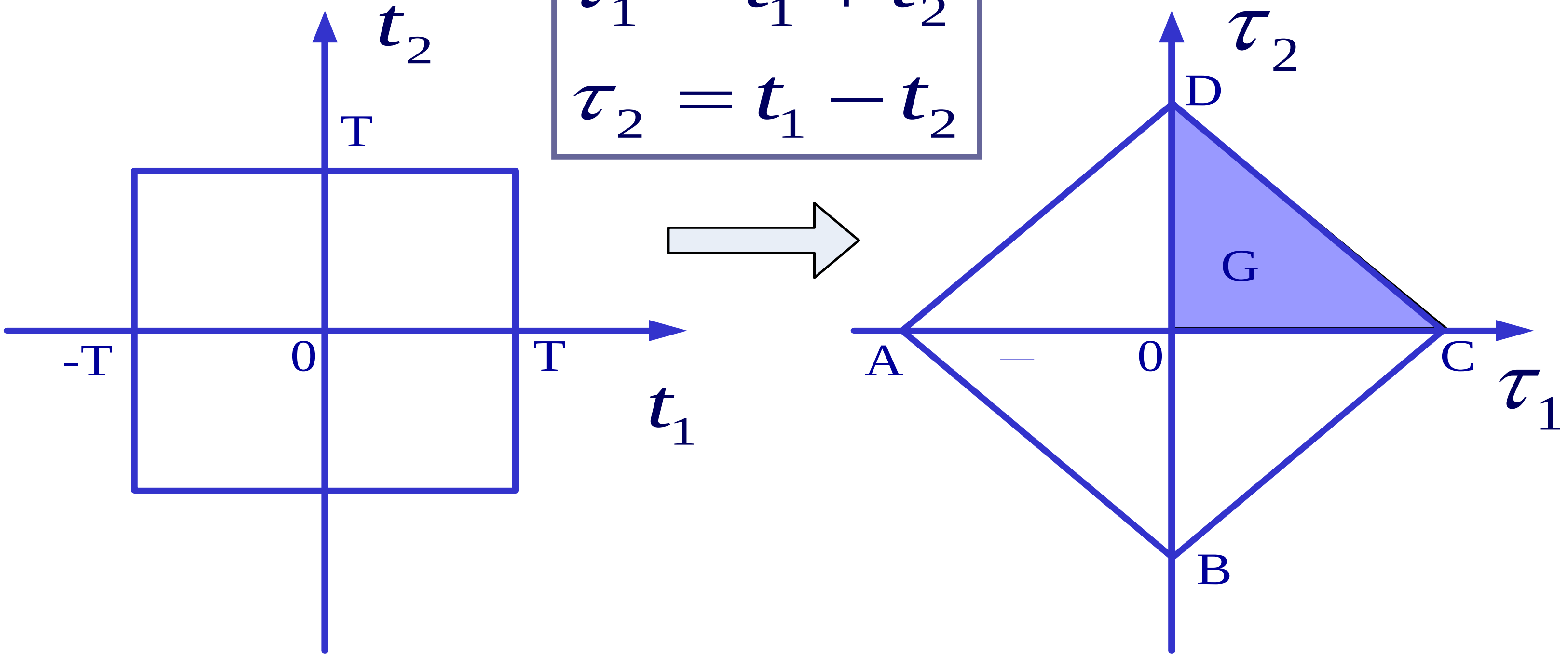
$$=\lim_{T\to\infty}E\left\{\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt\right]^2\right\}-m_x^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E[X(t_1)X(t_2)]dt_1dt_2-m_x^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_x(t_1-t_2)dt_1dt_2-m_x^2$$

积分域进行变换

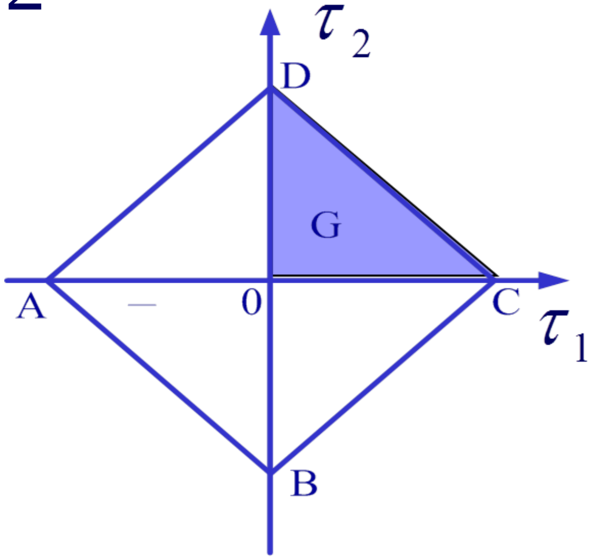
$$\tau_1 = t_1 + t_2$$
$$\tau_2 = t_1 - t_2$$



故 $\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_x(t_1-t_2)dt_1dt_2=\iint_{\Omega}R_x(\tau_2)\frac{1}{2}d\tau_1d\tau_2$

$$=2\iint_{G}R_x(\tau_2)d\tau_1d\tau_2$$

$$=2\int_{0}^{2T}(2T-\tau_2)R_x(\tau_2)d\tau_2$$



由此，可得

$$D[\overline{X(t)}]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})[R_x(\tau)-m_x^2]d\tau$$

因此 $\overline{X(t)} = E[X(t)]$ 依概率1成立

充分必要条件

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})[R_x(\tau)-m_x^2]d\tau = 0$$

均值各态历经性定理

定理条件的内涵

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})[R_x(\tau)-m_x^2]d\tau=0$$

加权平均 $$\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})d\tau=1$$

例如，令 $R_x(\tau)-m_x^2=\dfrac{1}{1+\tau}$ 则：

$$\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})\frac{1}{1+\tau}d\tau=\frac{1}{T}\int_0^{2T}(\frac{1}{1+\tau}-\frac{\tau}{(1+\tau)2T})d\tau$$

$$=\frac{1}{T}\ln(1+2T)-\frac{1}{T}+\frac{1}{2T^2}\ln(1+2T)\xrightarrow{T\to\infty}0$$

结论：相关性不太强，则满足各态历经性

思考题

- 时间序列的均值各态历经性？
- 自相关各态历经的判定条件？
- 有限时间区间的各态历经性？
- 强相关的随机过程如何预测？
- 各态历经 -- 源自统计热力学？

探究性大作业

3、讨论平稳随机过程的各态历经性与大数定律、马尔科夫链的遍历性定理之间的关系，三者其实都在描述各态历经，但是也有一定的差异。

探究性大作业

4、各态历经概念源自统计热力学，信息论中的“熵”，也是香农从统计热力学中借鉴而来，请你讨论统计热力学与随机过程的关系，进而追溯学科发展的历史，对理解科学思维与科学家精神的重要性。

习题

- P83
  - 第10、12、15题
- P86
  - 第17、21、22、
  - 第23-用定理来证明

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

谢　谢！