《概率论与数理统计》

第一章　概率论的基本概念

§2．样本空间、随机事件

1．事件间的关系 $A \subset B$ 　则称事件 B 包含事件 A，指事件 A 发生必然导致事件 B 发生

$A \cup B = \{x | x \in A 或 x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件，指当且仅当 A，B 中至少有一个发生时，事件 $A \cup B$ 发生

$A \cap B = \{x | x \in A 且 x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件，指当 A，B 同时发生时，事件 $A \cap B$ 发生

$A — B = \{x | x \in A 且 x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件，指当且仅当 A 发生、B 不发生时，事件 $A — B$ 发生

$A \cap B = \phi$，则称事件 A 与 B 是互不相容的，或互斥的，指事件 A 与事件 B 不能同时发生，基本事件是两两互不相容的

$A \cup B = S 且 A \cap B = \phi$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件，又称事件 A 与事件 B 互为对立事件

2．运算规则 交换律 $A \cup B = B \cup A$ 　$A \cap B = B \cap A$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 　$(A \cap B)C = A(B \cap C)$

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B)(A \cap C)$

德摩根律 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 　$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

§3．频率与概率

定义　在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**，比值 n_A / n 称为事件 A 发生的**频率**

概率：设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 P(A)，称为事件的概率

1．概率 $P(A)$ 满足下列条件：

（1）**非负性：**对于每一个事件 A　$0 \le P(A) \le 1$

（2）**规范性：**对于必然事件 S　$P(S) = 1$

（3）**可列可加性**：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，有 $P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$（$n$ 可以取 ∞）

2．概率的一些重要性质：

（i）$P(\phi)=0$

（ii）若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则有 $P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$（$n$ 可以取 ∞）

（iii）设 A，B 是两个事件若 $A \subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，$P(\mathrm{B}) \geq P(\mathrm{A})$

（iv）对于任意事件 A，$P(A) \leq 1$

（v）$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ （逆事件的概率）

（vi）对于任意事件 A，B 有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

§4 等可能概型（古典概型）

等可能概型：试验的样本空间只包含有限个元素，试验中每个事件发生的可能性相同

若事件 A 包含 k 个基本事件，即 $A = \{e_{i_1}\} \cup \{e_{i_2}\} \cup \cdots \cup \{e_{i_k}\}$，里

i_1，i_2，$\cdots$，i_k 是 $1,2,\cdots \mathrm{n}$ 中某 k 个不同的数，则有

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P\left(\{e_{i_j}\}\right) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{包含的基本事件数}}{\mathrm{S}\text{中基本事件的总数}}$$

§5．条件概率

（1） 定义：设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**

（2） 条件概率符合概率定义中的三个条件

1° 非负性：对于某一事件 B，有 $P(B|A) \geq 0$

2° 规范性：对于必然事件 S，$P(S|A)=1$

3 可列可加性：设 $B_1, B_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i | A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i | A)$$

（3） 乘法定理 设 $P(A)>0$，则有 $P(AB)=P(B)P(A|B)$ 称为乘法公式

（4）　全概率公式：　$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$

贝叶斯公式：　$P(B_k|A)=\dfrac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$

§6．独立性

定义　设 A，B 是两事件，如果满足等式 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A,B 相互独立

定理一　设 A，B 是两事件，且 $P(A)>0$，若 A，B 相互独立，则 $P(B|A)=P(B)$

定理二　若事件 A 和 B 相互独立，则下列各对事件也相互独立：A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$

第二章　随机变量及其分布

§1 随机变量

定义　设随机试验的样本空间为 $S=\{e\}$．$X=X(e)$ 是定义在样本空间 S 上的实值单值函数，称 $X=X(e)$ 为随机变量

§2 离散性随机变量及其分布律

1．离散随机变量：有些随机变量，它全部可能取到的值是有限个或可列无限多个，这种随机变量称为离散型随机变量

$P(X=x_k)=p_k$ 满足如下两个条件（1）$p_k\geq 0$，（2）$\sum_{k=1}^{\infty}P_k=1$

2．三种重要的离散型随机变量

（1）$(0-1)$分布

设随机变量 X 只能取 0 与 1 两个值，它的分布律是 $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$，$k=0,1\quad(0<p<1)$，则称 X 服从以 p 为参数的$(0-1)$分布或两点分布。

（2）伯努利实验、二项分布

设实验 E 只有两个可能结果：A 与 $\overline{A}$，则称 E 为伯努利实验.设 $P(A)=p\quad(0<p<1)$，此时 $P(\overline{A})=1-p$.将 E 独立重复的进行 n 次，则称这一串重复的独立实验为 n 重伯努利实验。

$P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots n$ 满足条件（1）$p_k\geq 0$，（2）$\sum_{k=1}^{\infty}P_k=1$ 注意

到$\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$是二项式$(p+q)^n$的展开式中出现p^k的那一项，我们称随机变量X服从参数为n，p的二项分布。

（3）泊松分布

设随机变量 X 所有可能取的值为 0,1,2 ⋯，而取各个值的概率为 $P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2\cdots$，其中$\lambda>0$是常数，则称X服从参数为λ的泊松分布记为 $X\sim\pi(\lambda)$

§3 随机变量的分布函数

定义　设X是一个随机变量，x是任意实数，函数$F(x)=P\{X\le x\}$，$-\infty<x<\infty$ 称为X的分布函数

分布函数$F(x)=P(X\le x)$，具有以下性质(1) $F(x)$是一个不减函数　（2）$0\le F(x)\le 1$，且$F(-\infty)=0, F(\infty)=1$　（3）$F(x+0)=F(x)$，即$F(x)$是右连续的

§4 连续性随机变量及其概率密度

连续随机变量：如果对于随机变量X的分布函数F（x），存在非负可积函数$f(x)$，使对于任意函数x有$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$，　则称x为连续性随机变量，其中函数f(x)称为X的概率密度函数，简称概率密度

1 概率密度$f(x)$具有以下性质，满足（1）$f(x)\ge 0$, (2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$；

（3）$P(x_1\le X\le x_2)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$；（4）若$f(x)$在点x处连续，则有$F'(x)=f(x)$

2,三种重要的连续型随机变量

(1)均匀分布

若连续性随机变量X具有概率密度$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其他\end{cases}$，则成X在区间(a,b)上服从均匀分布.记为$X\sim U(a,b)$

(2)指数分布

若连续性随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$ 其中$\theta>0$为常数，则称X服从参数为θ的指数分布。

（3）正态分布

若连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$,-$\infty<x<\infty$,

其中μ，σ（$\sigma>0$)为常数，则称X服从参数为μ，σ的正态分布或高斯分布，记为

X ~ N（μ，σ^2）

特别，当$\mu=0$，$\sigma=1$时称随机变量 X 服从标准正态分布

§5 随机变量的函数的分布

定理　设随机变量 X 具有概率密度 $f_x(x)$, -$\infty<x<\infty$, 又设函数 $g(x)$ 处处可导且恒有

$g'(x)>0$ ，则 Y= $g(X)$ 是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left[h(y)\right]\left|h'(y)\right|, & \alpha<y<\beta \\ 0 & ，其他 \end{cases}$$

第三章　多维随机变量

§1 二维随机变量

定义 设 E 是一个随机试验，它的样本空间是S = {e}. X = X(e)和 Y = Y(e)是定义在 S 上

的随机变量，称X = X(e)为随机变量，由它们构成的一个向量（X，Y）叫做二维随机变量

设（X，Y）是二维随机变量，对于任意实数 x，y，二元函数 F（x，y）= P{(X ≤ x) ∩ (Y ≤ y)}记成P{X ≤ x，Y ≤ y}称为二维随机变量（X，Y）的分布函数

如果二维随机变量（X，Y）全部可能取到的值是有限对或可列无限多对，则称（X，Y）是离散型的随机变量。

我们称$P(X=x_i，\mathrm{Y}=\mathrm{y_j})=p_{ij}$，i，j = 1,2,⋯为二维离散型随机变量（X，Y）的分布律。

对于二维随机变量（X，Y）的分布函数F（x，y），如果存在非负可积函数f（x，y），

使对于任意x，y有F（x，y）$=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}$f（u，v）dudv,则称（X，Y）是连续性的随机变量，函数f（x，y）称为随机变量（X，Y）的概率密度，或称为随机变量X和Y的**联合概率密度。**

§2 边缘分布

二维随机变量（X，Y）作为一个整体，具有分布函数F（x，y）.而X和Y都是随机

变量，各自也有分布函数，将他们分别记为$F_X(x), F_Y(y)$，依次称为二维随机变量（X，Y）

关于 X 和关于 Y 的**边缘分布函数**。

$$p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P\{X=x_i\},\ i=1,2,\cdots \qquad p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=P\{Y=y_i\},\ j=1,2,\cdots$$

分别称 $p_{i\bullet}$ $p_{\bullet j}$ 为（X，Y）关于 X 和关于 Y 的**边缘分布律**。

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy$ $\qquad$ $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx$ 分别称 $f_X(x)$，$f_Y(y)$ 为 X，Y 关于 X 和关于 Y 的**边缘概率密度**。

§3 条件分布

定义　设（X，Y）是二维离散型随机变量，对于固定的 j，若 $P\{Y=y_j\}>0,$

则称 $P\{X=x_i|Y=y_j\}=\dfrac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},i=1,2,\cdots$ 为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律，同样 $P\{Y=y_j|X=X_i\}=\dfrac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},j=1,2,\cdots$ 为在 $X=x_i$ 条件下随机变量 X 的条件分布律。

设二维离散型随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x,y)$，（X，Y）关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$，若对于固定的 y，$f_Y(y)$〉0，则称 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在 Y=y 的条件下 X 的条件概率密度，记为 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

§4 相互独立的随机变量

定义 设 F（x，y）及 $F_X(x)$，$F_Y(y)$ 分别是二维离散型随机变量（X，Y）的分布函数及边缘分布函数.若对于所有 x,y 有 $P\{X=x,Y=y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\}$，即 $F\{x,y\}=F_X(x)F_Y(y)$，则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的。

对于二维正态随机变量（X，Y），X 和 Y 相互独立的充要条件是参数 $\rho=0$

§5 两个随机变量的函数的分布

1，Z=X+Y 的分布

设(X,Y)是二维连续型随机变量，它具有概率密度 $f(x,y)$.则 Z=X+Y 仍为连续性随机变量，其概率密度为 $f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)\,dy$ 或 $f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)\,dx$

又若 X 和 Y 相互独立，设（X，Y）关于 X，Y 的边缘密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$ 则

$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)dy$ 和 $f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$ 这两个公式称为

f_X, f_Y 的**卷积公式**

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布

2，$Z=\dfrac{Y}{X}$的分布、$Z=XY$的分布

设(X,Y)是二维连续型随机变量，它具有概率密度 $f(x,y)$，则 $Z=\dfrac{Y}{X}$，$Z=XY$

仍为连续性随机变量其概率密度分别为 $f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x,xz)dx$

$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dx$ 又若 X 和 Y 相互独立，设（X，Y）关于 X，Y 的边缘密度分别

为 $f_X(x), f_Y(y)$ 则可化为 $f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(xz)dx$

$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x) f_Y(\frac{z}{x})dx$

3 $M=\max\{X，Y\}$及$N=\min\{X,Y\}$的分布

设 X，Y 是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为 $F_X(x), F_Y(y)$ 由于

$M=\max\{X，Y\}$ 不大于 z 等价于 X 和 Y 都不大于 z 故有 $P\{M\le z\}=P\{X\le z, Y\le z\}$ 又

由于 X 和 Y 相互独立，得到 $M=\max\{X，Y\}$ 的分布函数为 $F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z)$

$N=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为 $F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

第四章　　随机变量的数字特征

§1．数学期望

定义　　设**离散型随机变量** X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k$，k=1,2，…若级数 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$ 的和为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$，即$E(X)=\sum_i x_k p_k$

设**连续型随机变量** X 的概率密度为 $f(x)$，若积分 $\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$ 绝对收敛，则称积分

$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 的值为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$，即 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

定理　设 Y 是随机变量 X 的函数 Y= $g(X)$ (g 是连续函数)

（i）如果 X 是**离散型随机变量**，它的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k$，k=1,2，⋯若 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛则有 $E(Y)=E(g(X))=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$

（ii）如果 X 是**连续型随机变量**，它的分概率密度为 $f(x)$，若 $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛则有 $E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$

数学期望的几个重要性质

1 设 C 是常数，则有 $E(C)=C$

2 设 X 是随机变量，C 是常数，则有 $E(CX)=CE(X)$

3 设 X,Y 是两个随机变量，则有 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$；

4 设 X，Y 是相互独立的随机变量，则有 $E(XY)=E(X)E(Y)$

§2 方差

定义　设 X 是一个随机变量，若 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在，则称 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 为 X 的方差，记为 D（x）即 D（x）$=E\{[X-E(X)]^2\}$，在应用上还引入量 $\sqrt{D(x)}$，记为 $\sigma(x)$，称为标准差或均方差。

$D(X)=E(X-E(X))^2=E(X^2)-(EX)^2$

方差的几个重要性质

1 设 C 是常数，则有 $D(C)=0,$

2 设 X 是随机变量，C 是常数，则有 $D(CX)=C^2D(X)$，$D(X+C)=D(X)$

3 设 X,Y 是两个随机变量，则有 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{(X-E(X))(Y-E(Y))\}$ 特别，若 X,Y 相互独立，则有 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

4 $D(X)=0$ 的充要条件是 X 以概率 1 取常数 E(X)，即 $P\{X=E(X)\}=1$

切比雪夫不等式：设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\sigma^2$，则对于任意正数 ε，不等式

$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$成立

§3 协方差及相关系数

定义　量$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$称为随机变量 X 与 Y 的协方差为$Cov(X,Y)$，即

$$Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=E(XY)-E(X)E(Y)$$

而$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$称为随机变量 X 和 Y 的相关系数

对于任意两个随机变量 X 和 Y，$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$

协方差具有下述性质

1 $Cov(X,Y)=Cov(Y,X),\ Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$

2 $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

定理　1　$|\rho_{XY}|\leq 1$

　　　2　$|\rho_{XY}|=1$的充要条件是，存在常数 a,b 使$P\{Y=a+bx\}=1$

当　$\rho_{XY}=0$时，称 X 和 Y 不相关

附：几种常用的概率分布表

分布	参数	分布律或概率密度	数学期望	方差
两点分布	$0<p<1$	$P\{X=k)=p^k(1-p)^{1-k},k=0,1,$	p	$p(1-p)$
二项式分布	$n\geq 1$ $0<p<1$	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots n,$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$\lambda>0$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,2,\cdots$	λ	λ
几何分布	$0<p<1$	$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p,k=1,2,\cdots$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
均匀分布	$a<b$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & ,a<x<b\\ 0 & ，其他\end{cases},$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$

指数分布	$\theta > 0$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta} & ,x>0 \\ 0 & ,其他\end{cases}$	θ	θ^2
正态分布	μ $\sigma > 0$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

第五章 大数定律与中心极限定理

§1. 大数定律

弱大数定理（辛欣大数定理） 设 $X_1, X_2\cdots$是相互独立，服从统一分布的随机变量序列，并具有数学期望 $E(X_k)=\mu(k=1,2,\cdots)$.作前 n 个变量的算术平均 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$，则对于任意 $\varepsilon>0$，有 $\lim_{n\to\infty}P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\}=1$

定义 设 $Y_1,Y_2,\cdots Y_n\cdots$ 是一个随机变量序列，a 是一个常数，若对于任意正数 ε，有 $\lim_{n\to\infty}P\{|Y_n-a|<\varepsilon\}=1$，则称序列 $Y_1,Y_2,\cdots Y_n\cdots$ **依概率收敛于 a**，记为 $Y_n\xrightarrow{p}a$

伯努利大数定理 设 f_A 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p 是事件 A 在每次试验中发生的概率，则对于任意正数 ε 〉0，有 $\lim_{n\to\infty}P\{\left|\frac{f_n}{n}-p\right|<\varepsilon\}=1$ 或 $\lim_{n\to\infty}P\{\left|\frac{f_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\}=0$

§2 中心极限定理

定理一（**独立同分布的中心极限定理**） 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，服从同一分布，且具有数学期望和方差 $E(X_i)=\mu,\ D(X_k)=\sigma^2$（k=1,2，…），则随机变量之和 $\sum_{i=1}^{n}X_k$ 标准化变量，$Y_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-E(\sum_{k=1}^{n}X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n}X_k)}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$，

定理二（**李雅普诺夫定理**） 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n\cdots$相互独立，它们具有数学期望和方差 $E(X_k)=\mu_k,\ D(X_k)=\sigma_k{}^2>0,k=1,2\cdots$ 记 $B_n{}^2=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k{}^2$

定理三（**棣莫弗-拉普拉斯定理**）设随机变量$\eta_n(n=1,2,\cdots)$服从参数为$n, p(0<p<1)$的二项分布，则对任意x，有$\lim\limits_{n\to\infty}P\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt=\Phi(x)$