

电磁场与电磁波总结

第一章

一、矢量代数

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_{AB} AB \sin \theta \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

二、三种正交坐标系

1. 直角坐标系

$$\text{矢量线元 } d\mathbf{l} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz \quad \text{矢量面元 } d\mathbf{S} = \mathbf{e}_x dxdy + \mathbf{e}_y dydz + \mathbf{e}_z dxdy$$

$$\text{体积元 } dV = dx dy dz \quad \text{单位矢量的关系 } \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$$

2. 圆柱形坐标系

$$\text{矢量线元 } d\mathbf{l} = \mathbf{e}_\rho d\rho + \mathbf{e}_\phi \rho d\phi + \mathbf{e}_z dz \quad \text{矢量面元 } d\mathbf{S} = \mathbf{e}_\rho \rho d\phi dz + \mathbf{e}_z \rho d\rho d\phi$$

$$\text{体积元 } dV = \rho d\rho d\phi dz \quad \text{单位矢量的关系 } \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_z \quad \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\rho \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\phi$$

3. 球坐标系

$$\text{矢量线元 } d\mathbf{l} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta + \mathbf{e}_\phi r \sin \theta d\phi \quad \text{矢量面元 } d\mathbf{S} = \mathbf{e}_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\text{体积元 } dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad \text{单位矢量的关系 } \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi \quad \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_r \quad \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta$$

三、矢量场的散度和旋度

1. 通量与散度

$$\Phi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

2. 环流量与旋度

$$\Gamma = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{e}_n \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}$$

3. 计算公式

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \quad \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}$$

4. 矢量场的高斯定理与斯托克斯定理

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

四、标量场的梯度

1. 方向导数与梯度

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{P_0} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{P_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$



$$\nabla u \cdot \mathbf{e}_l = |\nabla u| \cos \theta \quad \text{grad} u = \frac{\partial u}{\partial n} \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

2. 计算公式

$$\nabla u = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad \nabla u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad \nabla u = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

五、无散场与无旋场

1. 无散场 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$

2. 无旋场 $\nabla \times (\nabla u) = 0 \quad \mathbf{F} = -\nabla u$

六、拉普拉斯运算算子

1. 直角坐标系

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{e}_x \nabla^2 A_x + \mathbf{e}_y \nabla^2 A_y + \mathbf{e}_z \nabla^2 A_z$$

$$\nabla^2 A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}, \quad \nabla^2 A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}, \quad \nabla^2 A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$$

2. 圆柱坐标系

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{e}_\rho \left(\nabla^2 A_\rho - \frac{1}{\rho^2} A_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\nabla^2 A_\varphi - \frac{1}{\rho^2} A_\varphi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) + \mathbf{e}_z \nabla^2 A_z$$

3. 球坐标系

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{e}_r \left(\nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2 \cot \theta}{r^2} A_\theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \mathbf{e}_\theta \left(\nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\theta - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\nabla^2 A_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\varphi + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right)$$

七、亥姆霍兹定理

如果矢量场 \mathbf{F} 在无限区域中处处是单值的，且其导数连续有界，则当矢量场的 散度、旋度 和 边界条件（即矢量场在有限区域 V'

边界上的分布）给定后，该矢量场 \mathbf{F} 唯一确定为 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$

其中 $\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$, $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$

第二章

一、麦克斯韦方程组

1. 静电场

真空中： $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$ （高斯定理） $\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\nabla \times \mathbf{E} = 0$

场与位： $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV'$ $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ $\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$



$$\text{介质中: } \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \quad \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\text{极化: } \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \mathbf{D} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad \rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n \quad \rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

2. 恒定电场

$$\text{电荷守恒定律: } \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv \quad \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\text{传导电流与运流电流: } \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

$$\text{恒定电场方程: } \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \oint_L \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{J} = 0$$

3. 恒定磁场

$$\text{真空中: } \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (\text{安培环路定理}) \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\text{场与位: } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV,$$

$$\text{介质中: } \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\text{磁化: } \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \mathbf{B} = (1 + \chi_m) \mu_0 \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad \mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad \mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n$$

4. 电磁感应定律

$$\oint_L \mathbf{E}_{in} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{法拉第电磁感应定律}) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

5. 全电流定律和位移电流

$$\text{全电流定律: } \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\text{位移电流: } \mathbf{J}_d = \frac{d\mathbf{D}}{dt}$$

6. Maxwell Equations

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial (\epsilon \mathbf{E})}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial (\mu \mathbf{H})}{\partial t} \\ \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho \\ \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0 \end{array} \right.$$

二、电与 磁的对偶性

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E}_e = -\frac{\partial \mathbf{B}_e}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H}_e = \mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}_e}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D}_e = \rho_e \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_e = 0 \end{array} \right. \quad \& \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{H}_m = \frac{\partial \mathbf{D}_m}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E}_m = -\mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_m = \rho_m \\ \nabla \cdot \mathbf{D}_m = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \end{array} \right.$$

三、边界 条件



1. 一般形式

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= 0 & \mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= \mathbf{J}_s \quad (\sigma \rightarrow \infty) \\ \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= \rho_s & \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= 0 \end{aligned}$$

2. 理想导体界面和理想介质界面

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_1 = 0 \\ \mathbf{e}_n \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_s \\ \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D}_1 = \rho_s \\ \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \end{array} \right. & \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \\ \mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \\ \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0 \\ \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

第三章

一、静电 场分析

1. 位函数方程与边界条件

位函数方程： $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ $\nabla^2 \phi = 0$

电位的边界条件： $\left\{ \begin{array}{l} \phi_1 = \phi_2 \\ \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = -\rho_s \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} \phi = \text{const} \\ \epsilon_1 \frac{\partial \phi}{\partial n} = -\rho_s \end{array} \right.$ (媒质 2 为导体)

2. 电容

定义： $C = \frac{q}{\phi}$

两导体间的电容： $C = q / U$

任意双导体系统电容求解方法：

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$$

3. 静电场的能量

N 个导体： $W_e = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \phi_i q_i$ 连续分布： $W_e = \int_V \frac{1}{2} \rho \phi dV$ 电场能量密度： $w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$

二、恒定 电场分析

1. 位函数微分方程与边界条件

位函数微分方程： $\nabla^2 \phi = 0$ 边界条件： $\left\{ \begin{array}{l} \phi_1 = \phi_2 \\ \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \end{array} \right.$ $\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) = 0$ $\mathbf{e}_n \times \left[\frac{\mathbf{J}_1}{\sigma_1} - \frac{\mathbf{J}_2}{\sigma_2} \right] = 0$

2. 欧姆定律与焦耳定律

欧姆定律的微分形式： $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

焦耳定律的微分形式： $P = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV$

3. 任意电阻的计算

$$R = \frac{1}{G} = \frac{U}{I} = \frac{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}} = \frac{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\sigma \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}} \quad (R = \frac{L}{S})$$

4. 静电比拟法： $C \sim G$, $\epsilon \sim \sigma$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad G = \frac{I}{U} = \frac{\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{\sigma \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$$

三、恒定 磁场分析



1. 位函数微分方程与边界条件

$$\text{矢量位: } \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \quad \mathbf{e}_n \times \left(\frac{1}{\mu_1} \nabla \times \mathbf{A}_1 - \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \mathbf{A}_2 \right) = \mathbf{J}_s$$

$$\text{标量位: } \nabla^2 \phi_m = 0 \quad \phi_{m1} = \phi_{m2} \quad \mu_2 \frac{\partial \phi_{m2}}{\partial n} = \mu_1 \frac{\partial \phi_{m1}}{\partial n}$$

2. 电感

$$\text{定义: } L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}{I} = \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{I} \quad L = L_i + L_o$$

3. 恒定磁场的能量

$$N \text{ 个线圈: } W_m = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} I_j \Psi_j \quad \text{连续分布: } W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV \quad \text{磁场能量密度: } w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$

第四章

一、边值问题的类型

(1) 狄利克利问题：给定整个场域边界上的位函数值 $\phi = f(s)$

(2) 纽曼问题：给定待求位函数在边界上的法向导数值 $\frac{\partial \phi}{\partial n} = f(s)$

(3) 混合问题：给定边界上的位函数及其向导数的线性组合： $\phi = f_1(s) \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = f_2(s)$

(4) 自然边界： $\lim_{r \rightarrow \infty} r \phi = \text{有限值}$

二、唯一性定理

静电场的唯一性定理：在给定边界条件（边界上的电位或边界上的法向导数或导体表面电荷分布）下，空间静电场被唯一确定。静电场的唯一性定理是镜像法和分离变量法的理论依据。

三、镜像法

根据唯一性定理，在不改变边界条件的前提下，引入等效电荷；空间的电场可由原来的电荷和所有等效电荷产生的电场叠加得到。这些等效电荷称为镜像电荷，这种求解方法称为镜像法。

选择镜像电荷应注意的问题：镜像电荷必须位于待求区域边界之外；镜像电荷（或电流）与实际电荷（或电流）共同作用保持原边界条件不变。

1. 点电荷对无限大接地导体平面的镜像

$$q' = -q \quad \text{二者对称分布}$$

2. 点电荷对半无限大接地导体角域的镜像

由两个半无限大接地导体平面形成角形边界，当其夹角 $\alpha = \frac{\pi}{n}$, n 为整数时，该角域中的点电荷将有 $(2n - 1)$ 个镜像电荷。

3. 点电荷对接地导体球面的镜像

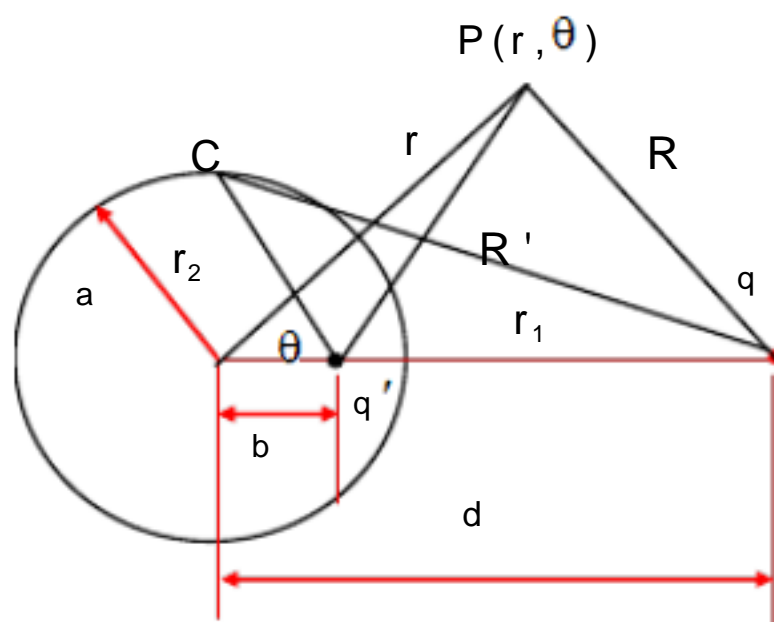
$$q' = -\frac{a}{d} q, \quad b = \frac{a^2}{d}$$

4. 点电荷对不接地导体球面的镜像

$$q' = -\frac{a}{d} q, \quad b = \frac{a^2}{d}$$

$$q'' = -q' = \frac{a}{d} q, \quad \text{位于球心}$$

5. 电荷对电介质分界平面



$$q' = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q, \quad q'' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

四、分离变量法

1. 分离变量法的主要步骤

根据给定的边界形状选择适当的坐标系，正确写出该坐标系下拉普拉斯方程的表达式及给定的边界条件。

通过变量分离将偏微分方程化简为常微分方程，并给出含有待定常数的常微分方程的通解。

利用给定的边界条件确定待定常数，获得满足边界条件的特解。

2. 应用条件

分离变量法只适合求解拉普拉斯方程。

3. 重点掌握

(1) 直角坐标系下一维情况的解

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \quad \text{通解为: } \phi = Ax + B$$

(2) 圆柱坐标系下一维情况的解

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = 0 \quad \text{通解为: } \phi = A \ln r + B$$

(3) 球坐标系下轴对称系统的解

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$\text{通解为: } \phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \right) P_n(\cos \theta)$$

$$\text{其中 } P_0(\cos \theta) = 1, P_1(\cos \theta) = \cos \theta, P_2(\cos \theta) = (3 \cos^2 \theta - 1) / 2$$

第五章

一、时谐场的 Maxwell Equations

1. 时谐场的复数描述

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}_m(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] = \text{Re}[\mathbf{e}_x E_{xm}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} + \mathbf{e}_y E_{ym}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} + \mathbf{e}_z E_{zm}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}]$$

2. Maxwell Equations

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega \varepsilon) \mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases}$$

二、媒质的分类

$$\text{分类标准: } \tan \delta = \frac{|\sigma \mathbf{E}|}{|j\omega \varepsilon' \mathbf{E}|} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon'}$$

当 $\tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon'} \gg 1$ ，即传导电流远大于位移电流的媒质，称为良导体。

当 $\tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon'} \approx 1$ ，即传导电流与位移电流接近的媒质，称为半导体或半电介质。

当 $\tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon'} \ll 1$ ，即传导电流远小于位移电流的媒质，称为电介质或绝缘介质。

三、坡印廷定理



1. 时谐电磁场能量密度为

$$\begin{aligned} \omega_e &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 & \omega_m &= \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu H^2 & p &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 \\ w_{eav} &= \frac{1}{4} \operatorname{Re}[\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*] & w_{mav} &= \frac{1}{4} \operatorname{Re}[\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*] & p_{av} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^*] \\ \omega &= \frac{1}{2} \epsilon E^2(t) + \frac{1}{2} \mu H^2(t) \end{aligned}$$

2. 能流密度矢量

$$\text{瞬时坡印廷矢量: } \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \text{平均坡印廷矢量: } \mathbf{S}_{av} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]$$

3. 坡印廷定理

$$-\oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int_V \omega dV + \int_V p dV$$

四、波动方程及其解

1. 有源区域的波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho \quad \nabla^2 \mathbf{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbf{J}$$

特解:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

在无源区间，两个波动方程式可简化为齐次波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

复数形式 -亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0$$

五、达朗贝尔方程及其解

时谐场的位函数

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

达朗贝尔方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad \nabla^2 \phi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{库仑规范 } \nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t})$$

复数形式

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad \nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

特解:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

六、准静态场（似稳场）

1. 准静态场方程

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

特点：位移电流远小于传导电流 ($\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \ll \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$)；准静态场中不可能存在自由体电荷分布。

2. 缓变电磁场（低频电路理论）

随时间变化很慢，或者频率很低的电磁场。低频电路理论就是典型的缓变电磁场的实例。根据准静态方程第一方程，两边取散度产

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^N i_j = 0 \quad (\text{基尔霍夫电流定律})$$



位函数满足 $\nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}$ $\nabla^2 \phi = 0$
符合静态场的规律。这就是“似稳”的含义。

$$-\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} + \oint \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} + \oint \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} \quad \sum_{j=1}^N U_j = 0 \quad (\text{基尔霍夫电压定律})$$

3. 场源近区的准静态电磁场

如果观察点与源的距离相当近 $kr = 2\pi \frac{r}{\lambda} \ll 1 \Rightarrow e^{-jkr} \approx 1$ ，则

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (\text{近区场条件: } r = \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi} \approx \frac{1}{6} \lambda)$$

第六章

一、基本 极子的辐射

1. 电偶极子的远区场：
$$E_\theta = j \frac{\eta_0 I l \sin \theta}{2\lambda r} e^{-jkr} \quad H_\phi = j \frac{I l \sin \theta}{2\lambda r} e^{-jkr}$$

2. 磁偶极子的辐射：
$$E_\phi = \frac{\pi I S \eta}{\lambda^2 r} \sin \theta e^{-jkr} \quad H_\theta = -\frac{\pi I S}{\lambda^2 r} \sin \theta e^{-jkr}$$

二、天线 参数

1. 辐射功率：
$$P_r = \oint_S \mathbf{S}_{av} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_S \operatorname{Re} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \cdot d\mathbf{S}$$

电偶极子的辐射功率：
$$P_r = 80 \pi^2 I^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2$$

2. 辐射电阻：
$$R_L = \frac{2 P_r}{I^2}$$

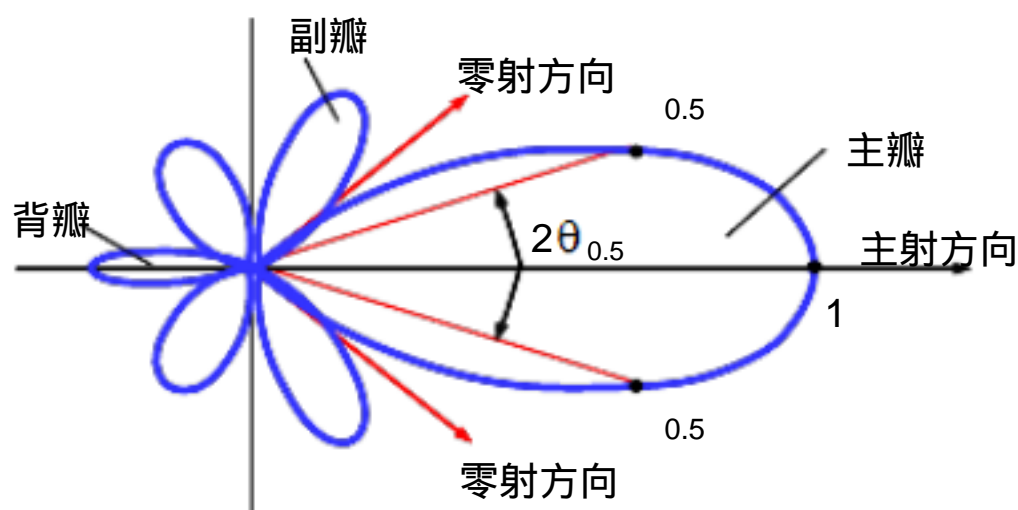
电偶极子的辐射电阻：
$$R_r = 80 \pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2$$

3. 效率：
$$\eta_A = \frac{P_r}{P_{in}} = \frac{P_r}{P_r + P_L} = \frac{R_r}{R_r + R_L}$$

4. 方向性函数：
$$F(\theta, \phi) = \frac{|E(r, \theta, \phi)|}{E_{max}(r)} = \frac{f(\theta, \phi)}{f_{max}}$$

电偶极子的方向性函数为： $F(\theta, \phi) = \sin \theta$

功率方向性函数： $F_p(\theta, \phi) = F^2(\theta, \phi)$ 如下图



主瓣宽度 $2\theta_{0.5}$ 、 $2\phi_{0.5}$ ：两个半功率点的矢径间的夹角。元天线： $2\theta_{0.5} = 90^\circ$

副瓣电平： $SLL = 10 \lg \frac{S_1}{S_0} \text{ dB}$ S_0 为主瓣功率密度， S_1 为最大副瓣的功率密度。

前后比： $FB = 10 \lg \frac{S_0}{S_b} \text{ dB}$ S_0 为主瓣功率密度， S_b 为最大副瓣的功率密度。



5. 方向性系数：

$$D = \frac{4}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi F^2(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta}$$

电偶极子方向性系数的分贝表示 $D = 10 \lg 1.5 \text{ dB} = 1.64 \text{ dB}$

6. 增益： $G = \eta_A D$ $G_{\text{dB}} = 10 \lg G$

三、对称 天线

1. 对称天线的方向图函数：

$$F(\theta) = \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos kl}{\sin \theta}$$

2. 半波对称天线：

$$E_\theta = j \frac{60 I_m}{r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} e^{-jkr} \quad H_\varphi = j \frac{I_m}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} e^{-jkr}$$

方向性函数为：

$$F(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta}$$

辐射电阻为： $R_r = 73.1$ 方向性系数： $D = 10 \lg 1.64 \text{ dB} = 2.15 \text{ dB}$

四. 天线阵

1. 天线阵的概念

为了改善和控制天线的辐射特性，使用多个天线按照一定规律构成的天线系统，称为天线阵或阵列天线。天线阵的辐射特性取决于：阵元的类型、数目、排列方式、间距、电流振幅及相位和阵元的取向。

2. 均匀直线阵

均匀直线式天线阵：若天线阵中各个单元天线的类型和取向均相同，且以相等的间隔 d 排列在一条直线上。各单元天线的电流振幅均为 I ，但相位依次逐一滞后或超前同一数值 ξ ，这种天线阵称为均匀直线式天线阵。

(1) 均匀直线阵阵因子

$$AF(\theta, \phi) = \frac{\sin\left[\frac{n}{2}(kd \cos \theta + \xi)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(kd \cos \theta + \xi)\right]}$$

(2) 方向图乘法原理

$$F(\theta, \varphi) = AF(\theta, \varphi) f_1(\theta, \varphi)$$

第七章

一、沿任意方向传播的均匀 平面波

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{E}_0 e^{-jkn \cdot \mathbf{r}} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 e^{-jkn \cdot \mathbf{r}}$$

其中 $\mathbf{k} = nk = \mathbf{e}_x k_x + \mathbf{e}_y k_y + \mathbf{e}_z k_z$ ， $\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z$ ， \mathbf{n} 为传播矢量 \mathbf{k} 的单位方向，即电磁波的传播方向。

二、均匀 平面波在自由空间 中的传播

对于无界空间中沿 $+z$ 方向传播的均匀平面波，即

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{e}_x E_x = \mathbf{e}_x E_{xm} e^{-jkz} e^{j\varphi_x}$$

1. 瞬时表达式为：

$$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re} \left[(\mathbf{e}_x E_{xm} e^{-jkz} e^{j\varphi_x}) e^{j\omega t} \right] = \mathbf{e}_x E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$$



2. 相速与波长：
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \quad (\text{非色散})$$

3. 场量关系：
$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E} \quad \mathbf{E} = \eta \mathbf{H} \times \mathbf{e}_z \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120 \pi \Omega$$

4. 电磁波的特点

TEM 波；电场、磁场同相；振幅不变；非色散；磁场能量等于电场能量。

三、均匀平面波在导电媒质中的传播

对于导电媒质中沿 +z 方向传播的均匀平面波，即

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x = \mathbf{e}_x E_{xm} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (\gamma = \alpha + j\beta), \text{ 其中 } e^{-\alpha z} \text{ 为衰减因子}$$

1. 波阻抗：

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^{-1/2} = |\eta_c| e^{j\varphi}$$

2. 衰减常数：

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right]}$$

3. 相位常数：

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} + 1 \right]}$$

4. 相速：

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

5. 电磁波的特点：

TEM 波；电场、磁场有相位差；振幅衰减；色散；磁场能量大于电场能量。

四、良导体中的均匀平面波特性

1. 对于良导体，传播常数可近似为：
$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

2. 相速与波长：
$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f} = 2\sqrt{\frac{\pi}{f\mu\sigma}} \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} \approx \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad (\text{色散})$$

3. 趋肤深度：
$$d = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{2\pi}$$
 导体的高频电阻大于其直流电阻或低频电阻。

4. 良导体的本征阻抗为：
$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} \approx \sqrt{j\frac{\omega\mu}{\sigma}} = (1 + j)\sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi f \mu}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

良导体中均匀平面电磁波的磁场落后于电场的相角 45° 。

五、电磁波的极化

1. 极化：电场强度矢量的取向。设有两个同频率的分别为 x、y 方向极化的电磁波：
$$\begin{cases} E_x = E_{xm} \cos(\omega t - k z + \varphi_1) \\ E_y = E_{ym} \cos(\omega t - k z + \varphi_2) \end{cases}$$

2. 线极化： E_x, E_y 分量相位相同，或相差 180° 则合成波电场表示直线极化波。



3. 圆极化： E_x, E_y 分量振幅相等，相位差为 90° ，合成波电场表示圆极化波。

旋向的判断： $\varphi_y - \varphi_x = \frac{\pi}{2}$ ，左旋； $\varphi_y - \varphi_x = -\frac{\pi}{2}$ ，右旋

4. 椭圆极化： E_x, E_y 分量振幅不相等，相位不相同，合成波电场表示椭圆极化波。

六、均匀 平面波对分界面的 垂直入射

1. 反射系数与透射系数： $\Gamma = \frac{E_{rm}}{E_{im}} = \frac{\eta_{2c} - \eta_{1c}}{\eta_{2c} + \eta_{1c}}$ $\tau = \frac{E_{tm}}{E_{im}} = \frac{2\eta_{2c}}{\eta_{2c} + \eta_{1c}}$

2. 对理想导体界面的垂直入射

$\Gamma = 0$ ， $\tau = -1$ ，合成波为纯驻波

3. 对理想介质界面的垂直入射

合成波为行驻波，透射波为行波。驻波系数： $S = \frac{|E|_{\max}}{|E|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$

4. 对多层介质界面的垂直入射

(1) 3 层等效波阻抗

$$\eta_{ef} = \eta_2 \frac{\eta_3 + j\eta_2 \tan(\beta_2 d)}{\eta_2 + j\eta_3 \tan(\beta_2 d)}$$

(2) 四分之一波长匹配层

$$\begin{cases} d = \frac{\lambda_2}{4} \\ \eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3} \end{cases} \Rightarrow R_1 = 0 \quad \text{无反射}$$

照相机镜头上的涂敷层消除反射的原理。

(3) 半波长介质窗

$$\begin{cases} d = \frac{\lambda_2}{2} \\ \eta_1 = \eta_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = 0 \\ T_1 T_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow E_{3tm} = -E_{1im}$$

雷达天线罩消除电磁波反射的原理。

七、均匀 平面波在界面上的 斜入射

1. 反射定律与折射定律 $\theta_i = \theta_r$ $\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{k_i}{k_2} = \frac{n_1}{n_2}$ ($n_1 = \frac{c}{v_1} = \frac{c}{\omega}$ $n_2 = \frac{c}{v_2} = \frac{c}{\omega}$)

2. 垂直极化波和平行极化波的反射系数与透射系数

$$R_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad R_{\parallel} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_2 \epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_2 \epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}$$

$$T_{\perp} = \frac{2 \eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad T_{\parallel} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_2 \epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}$$



$$R_{//} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$$
$$T_{//} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$$

$$R_{//} = \frac{(\epsilon_2 / \epsilon_1) \cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}{(\epsilon_2 / \epsilon_1) \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}$$
$$T_{//} = \frac{2\sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1} \cos \theta_i}{(\epsilon_2 / \epsilon_1) \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}$$

3. 全反射

全反射条件： $\theta_i \geq \theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$

$R_{//} = R_{\perp} = 1$

4. 全透射

入射角 θ_i 称为布儒斯特角，记为： $\theta_B = \arctan \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}}$

$R_{//} = 0$ ，只适用于平行极化波。

5. 对理想导体的斜入射

(1) 垂直极化波： $R_{\perp} = -1$ $T_{\perp} = 0$

振幅呈驻波分布；非均匀平面波； TE 波。

(2) 平行极化波： $R_{//} = 1$ $T_{//} = 0$

振幅呈驻波分布；非均匀平面波； TM 波。

第八章

一、导行 波系统分类

类 型	工 作 波 型	名 称	应 用 波 段	特点
TEM 波传输线	TEM 波	平行双线 同轴线、带状线、微带	米波、分米波低频端 分米波、厘米波	双导体系统
金属波导	TE 波、TM 波	矩形波导、圆波导、 椭圆波导、脊波导	厘米波、毫米波低频端	单导体系统
表面波传输线	混合型波	介质波导、介质镜象线、 单根表面波传输线	毫米波	

1. 均匀导波系统

波导的横截面在 z 向是均匀的，场量只与 x、y 有关，与 z 无关；

波导壁是理想导体，填充介质是理想介质；

波导内的电磁场为无源区的时谐场。

2. 单导体系统不能传输 TEM 波，为什么？

单导体波导内无纵向的传导电流和位移电流。因为是单导体，所以无传导电流；因为 TEM 波的纵向场 Ez = 0，所以无纵向位移电流。

二、导行波方程

波导内的电磁场满足亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0$$

1. TEM 波 2. TE 波和 TM 波

三、传输 线

1. 集总参数电路与分布参数电路 2. 电报方程 3. 特性参数：特性阻抗、传播常数、相速、波长
4. 工作参数：输入阻抗、反射系数、驻波系数和行波系数



四、矩形 波导

1.波方程及其解 2. 传播特性 3. 矩形波导的主模 TE_{10} 模

主模参数

单模传输条件

