随机过程试卷

一、简答

1.随机过程的正交、互不相关和互相独立及其相互关系。

答：教材 P49

①如果对任意的$t_1,t_2,\cdots t_n$和$t_1',t_2',\cdots t_m'$有

$$f_{XY}(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots t_n;y_1,y_2,\cdots y_m;t_1',t_2',\cdots t_m')$$

$$=f_X(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots t_n)f_Y(y_1,y_2,\cdots y_m;t_1',t_2',\cdots t_m')$$

则称$X(t)$和$Y(t)$之间是相互独立的。

②两个随机过程$X(t)$和$Y(t)$，如果对任意的t_1和t_2都有互协方差函数为 0，即

$$C_{XY}(t_1,t_2)=0$$

则称$X(t)$和$Y(t)$之间互不相关。**两个互相独立的随机过程必不相关，反之不一定。**

（高斯随机过程的互不相关与互相独立等价）

③两个随机过程$X(t)$和$Y(t)$，如果对任意的$t_1,t_2\in T$，其互相关函数等于零，即

$$R_{XY}(t_1,t_2)=0$$

则称$X(t)$和$Y(t)$之间正交。而且**正交不一定互不相关。**

（均值为零的两随机过程正交与互不相关等价）

2.随机过程的各态历经性及实际意义。

答：教材 P65~69

平稳过程的各态历经性，用数学语言来说，即关于（充分长）时间的平均值，近似地等于观察总体的集合平均值。如对均方连续的实平稳过程$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\},m_X=E[X(t)]$是$X(t)$的均值，是平稳过程中所有可能出现的曲线（样本函数）的集合平均值。而对$X(t)$中任一现实曲线$x(t)$，$m_T=\dfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\mathrm{d}t$是$x(t)$在$[-T,T]$对时间$t$的平均值，称为时间平均值。显然$X(t)$的每一曲线都在$m_X$的上下波动，则可以想象，当$T$充分长时该现实曲线$x(t)$可以很好地代表实平稳过程$\{X(t),t\in(-\infty,\infty)\}$的整个性质，如$m_T\approx m_X$。对于这样的平稳过程，称具有各态历经性，但只在一定条件下的平稳过程，才具有各态历经性。

要讨论平稳过程的数字特征，就应该知道一族样本函数。而样板函数往往需要经过大量的观察实验，然后用数理统计的点估计理论进行估计才能取得，其要求是很高的。讨论平稳过程的历经性，就是讨论能否在较宽松的条件下，用一个样本函数去近似计算平稳过程的均值、协方差函数等数字特征。

3.高斯随机过程的互不相关与互相独立等价。

答：教材 P159~160

必要性 若$X_1, X_2, \cdots X_n$是相互独立的正态随机变量，则必有

$$f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n),$$

$$\varphi_X(v_1, v_2, \cdots, v_n) = \varphi_{X_1}(v_1) \varphi_{X_2}(v_2) \cdots \varphi_{X_n}(v_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{ j\mu_i v_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2 v_i^2 \right\}$$

$$= \exp\left\{ j\sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 v_i^2 \right\}$$

其中，$\mu_i = E[X_i], \sigma_i^2 = D[X_i], i = 1, 2, \cdots, n.$

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

是协方差矩阵，显然，$i \neq k$ 时，$C_{ik} = 0$，故X_i与X_k是不相关的。

充分性 若$X_1, X_2, \cdots, X_n$是两两互不相关的正态随机变量，则

$$C_{ki} = E[(X_k - \mu_k)(X_i - \mu_i)] = 0, k \neq i$$

$$\varphi_X(v_1, v_2, \cdots, v_n) = \exp\left\{ jv^T\mu - \frac{1}{2}v^T C v \right\}$$

其中$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T, \mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)^T$，$C$为协方差矩阵，因而有

$$\varphi_X(v_1, v_2, \cdots, v_n) = \exp\left\{ j\sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} C_{ii} v_i^2 \right\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{ j\mu_i v_i - \frac{1}{2} C_{ii} v_i^2 \right\} = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(v_i)$$

其中$\varphi_{X_i}(v_i)$是正态随机变量X_i的特征函数。依特征函数性质知$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立。

4.泊松过程是非平稳随机过程。

答：教材 P56，P184

设$\{X(t), t \in T\}$是一个随机过程，$E[X^2(t)] < \infty$，且

$E[X(t)] = m_X = const$ 和 $R(t_1,t_2) = E[X(t)X(t-\tau)] = R(\tau), \tau = t_1 - t_2$

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为广义随机平稳。

泊松计数过程

均值 $E[N(t_0+t, t_0)] = \lambda t$，均方值 $E[N^2(t_0+t, t_0)] = (\lambda t)^2 + \lambda t$，

相关函数 $R_N(t_1,t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min(t_1,t_2)$，

不符合上述定义，因此泊松过程是非平稳随机过程

5.白噪声过程是零阶马尔可夫过程。什么叫无记忆过程？白噪声过程是无记忆过程吗？

答：教材 P53~54

随机过程按记忆特性分类：

（1）纯粹随机过程（无记忆），指在一给定的 t_1，用 $X(t)$ 定义的随机变量，与所有其他的 t_2，用 $X(t)$ 定义的随机变量是相互独立的。白噪声是其一个重要的例子。

（2）马尔可夫过程：一阶、二阶、高阶马尔可夫过程；纯粹随机过程又称零阶马尔可夫过程。

（3）独立增量过程，独立增量过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个马尔可夫过程。

二、设随机过程 $X(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t$，$Y(t) = U\sin\omega t + V\cos\omega t$，$Z(t) = -U\sin\omega t + V\cos\omega t$。其中 $\omega > 0$，U 和 V 是两个相互独立的随机变量，且 $E[U] = E[V] = 0$，$E[U^2] = E[V^2] = \sigma^2$。

（1）证明：$X(t)$、$Y(t)$ 和 $Z(t)$ 各自是广义平稳的随机过程。

（2）证明：$X(t)$ 和 $Y(t)$ 不是广义联合平稳的。

（3）证明：$X(t)$ 与 $Z(t)$ 是两个平稳相关的随机过程。

（4）$X(t)$ 的均值，自相关函数是各态历经的么？

（1）**证明**：$X(t)$ 的均值 $E[X(t)] = E[U]\cos\omega t + E[V]\sin\omega t = 0$

均方值 $E[X^2(t)] = E[U^2]\cos^2\omega t + E[V^2]\sin^2\omega t + 2E[UV]\sin\omega t\cos\omega t = \sigma^2 < \infty$

自相关函数 $R_X(t_1,t_2) = R_X(\tau) = \sigma^2\cos\omega\tau, \tau = t_1 - t_2$

所以 $X(t)$ 是广义平稳的随机过程，同理 $Y(t)$ 和 $Z(t)$ 是广义平稳的随机过程。

（2）证明：$R_{XY}(t_1,t_2)=E\left[(U\cos\omega t_1+V\sin\omega t_1)(U\sin\omega t_2+V\cos\omega t_2)\right]$

$=E[U^2]\cos\omega t_1\sin\omega t_2+E[V^2]\sin\omega t_1\cos\omega t_2+E[UV]\cos\omega(t_1-t_2)$

$=\sigma^2\sin\omega(t_1+t_2)$

$=\sigma^2\sin\omega(\tau+2t_2),\tau=t_1-t_2$

因此$R_{XY}(t_1,t_2)$不仅与τ有关，得出$X(t)$和$Y(t)$不是广义联合平稳的。

（3）证明：$R_{XZ}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Z(t_2)]$

$=E[(U\cos\omega t_1+V\sin\omega t_1)(-U\sin\omega t_2+V\cos\omega t_2)]$

$=-\sigma^2\sin\omega\tau,\tau=t_1-t_2$

类似的，有 $R_{ZX}(t_1,t_2)=\sigma^2\sin\omega\tau$

所以$X(t)$与$Z(t)$是两个平稳相关的随机过程。

（4）解：由于$R_X(\tau)=\sigma^2\cos\omega\tau$及$m_X=0$，故有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)\sigma^2\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\sigma^2}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau=0$$ 因此$X(t)$的均值是各态历经的。（用定理证）

$$R_{XT}(\tau)=\overline{X(t+\tau)X(t)}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[U\cos\omega(t+\tau)+V\sin\omega(t+\tau)\right]\left[U\cos\omega t+V\sin\omega t\right]\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}U^2\cos\omega(t+\tau)\cos\omega t+V^2\sin\omega(t+\tau)\sin\omega t+UV\sin\omega(2t+\tau)\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{U^2}{2}\left[\cos\omega(2t+\tau)+\cos\omega\tau\right]-\frac{V^2}{2}\left[\cos\omega(2t+\tau)-\cos\omega\tau\right]+UV\sin\omega(2t+\tau)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{U^2+V^2}{2}\cos\omega\tau+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left\{\frac{U^2-V^2}{4}\left[\frac{\sin\omega(2T+\tau)}{\omega}+\frac{\sin\omega(2T-\tau)}{\omega}\right]-\frac{UV}{2}\left[\frac{\cos\omega(2T+\tau)}{\omega}+\frac{\cos\omega(2T-\tau)}{\omega}\right]\right\}$$

$$=\frac{U^2+V^2}{2}\cos\omega\tau=\sigma^2\cos\omega\tau=R_X(\tau)$$

因此$X(t)$的自相关函数是各态历经的。

三、设平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)=e^{-|\tau|}$。令 $Y(t)=X(t)\cos(\omega_0 t+\Theta)$，其中 $\omega>0$，Θ 为 $[0,2\pi]$ 均匀分布的随机变量，且 $X(t)$ 与 Θ 相互独立。

求 $Y(t)$ 的自相关函数和功率谱密度。

解：$R_Z(\tau)=E[\cos(\omega_0 t_1+\Theta)\cos(\omega_0 t_2+\Theta)]$

$$=E[\frac{1}{2}\cos(\omega_0 t_1-\omega_0 t_2)+\frac{1}{2}\cos(\omega_0 t_1+\omega_0 t_2+2\Theta)]$$
$$=\frac{1}{2}\cos\omega_0(t_1-t_2)+\frac{1}{2}\{\cos\omega_0(t_1+t_2)E[\cos 2\Theta]-\sin\omega_0(t_1+t_2)E[\sin 2\Theta]\}$$
$$=\frac{1}{2}\cos\omega_0(t_1-t_2)=\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau,\tau=t_1-t_2$$

$R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)Y(t_2)]$

$$=E[X(t_1)\cos(\omega_0 t_1+\Theta)X(t_2)\cos(\omega_0 t_2+\Theta)]$$

$$=E[X(t_1)X(t_2)]E[\cos(\omega_0 t_1+\Theta)\cos(\omega_0 t_2+\Theta)]$$

$$=R_X(\tau)R_Z(\tau),\tau=t_1-t_2$$

$$=\frac{1}{2}e^{-|\tau|}\cos\omega_0\tau$$

$S_X(\omega)=\dfrac{2}{1+\omega^2}$，$S_Z(\omega)=\dfrac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$

由 Fourier 变换的性质得

$$S_Y(\omega)=\frac{1}{2\pi}S_X(\omega)*S_Z(\omega)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(\omega-\omega_0)^2}+\frac{1}{1+(\omega+\omega_0)^2}\right)$$

四、已知 $R_X(\tau)=e^{-\tau^2}$，如果 $Y(t)=X(t)+\dfrac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}$，求 $R_Y(\tau)$。（教材 P124 题 3.4）

解：$R_Y(\tau)=E[Y(t)Y(t-\tau)]$

$$=E\{[X(t)+\dot{X}(t)][X(t-\tau)+\dot{X}(t-\tau)]\}$$

$$=E[X(t)X(t-\tau)+\dot{X}(t)\dot{X}(t-\tau)+\dot{X}(t)X(t-\tau)+X(t)\dot{X}(t-\tau)]$$

$$=R_X(\tau)-R_X''(\tau)+R_X'(\tau)-R_X'(\tau)$$

$$=R_X(\tau)-R_X''(\tau)$$

$$=(3-4\tau^2)e^{-\tau^2}$$

五、 $X(t)$是一个平稳的高斯随机过程，其功率谱密度为$S_X(\omega)=\begin{cases}1,|\omega|\le B\\0,其他\end{cases}$，

其中B为常数。（参考教材 P179 题 5.5）

1.求$X(t)$的一维概率密度。

2.求$X(t)$的二维联合概率密度，并问当t_1,t_2是什么关系时$X(t_1),X(t_2)$相互独立。

解：1. $R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B}e^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^B\cos\omega\tau\mathrm{d}\omega=\frac{1}{\pi\tau}\sin B\tau,\tau=t_1-t_2$

$\mu_X^2(t)=\lim\limits_{\tau\to\infty}R(\tau)=\lim\limits_{\tau\to\infty}\frac{1}{\pi\tau}\sin B\tau=0$ 所以$\mu_x=0$

$\sigma_X^2(t)=E[X^2(t)]=R(0)=\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{1}{\pi\tau}\sin B\tau=\frac{B}{\pi}$

所以$X(t)$的一维概率密度为$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right\}$其中$\sigma_X^2=\frac{B}{\pi}$

2. $\mu=\left[\mu_1(t),\mu_2(t)\right]^T=0$

$E\left[X(t_1)X(t_2)\right]=R_X(t_1,t_2)=R_X(\tau),\tau=t_1-t_2$

$$C=\begin{bmatrix}E\left[X^2(t_1)\right] & E\left[X(t_1)X(t_2)\right]\\E\left[X(t_2)X(t_1)\right] & E\left[X^2(t_2)\right]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B & \frac{\sin B\tau}{\tau}\\-\frac{\sin B\tau}{\tau} & B\end{bmatrix}\frac{1}{\pi},\tau=t_1-t_2$$

所以$X(t)$的二维概率密度为

$$f_X(x_1,x_2;\tau)=\frac{1}{2\pi|C|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x_1,x_2\right]C^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right\}$$

$X(t_1),X(t_2)$相互独立等价于$X(t_1),X(t_2)$互不相关。因此$C_{12}=C_{21}=0$，即$\frac{\sin B\tau}{\tau}=0$。

所以$B\tau=k\pi,(k=\pm1,\pm2,\text{L})$，即$t_1,t_2$应满足$t_1-t_2=\frac{k\pi}{B},(k=\pm1,\pm2,\text{L})$的条件时

$X(t_1),X(t_2)$相互独立。（相似题：教材 P179 题 5.9）

六、如图，设$X(t)$为高斯白噪声随机过程，其自相关函数为$R_X(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$，$T$为延迟。（教材 P126 题 3. 19 图）

1.求$X(t),Z(t)$的互相关函数$R_{XZ}(\tau)$。

2. 求$Z(t),X(t)$的互相关函数$R_{ZX}(\tau)$。

解：1.系统冲激响应为$h(t)=\left[\delta(t)-\delta(t-T)\right]*u(t)=u(t)-u(t-T)$

$R_{XZ}(\tau)=R_X(\tau)*h(-\tau)=\dfrac{N_0}{2}\delta(\tau)*\left[u(-\tau)-u(-\tau-T)\right]=\dfrac{N_0}{2}\left[u(-\tau)-u(-\tau-T)\right]$

2. $R_{ZX}(\tau)=R_X(\tau)*h(\tau)=\dfrac{N_0}{2}\delta(\tau)*\left[u(\tau)-u(\tau-T)\right]=\dfrac{N_0}{2}\left[u(\tau)-u(\tau-T)\right]$

七、如图所示系统中，自相关函数为$\dfrac{N_0}{2}\delta(\tau)$的白噪声分成两路经过频率响应特性分别为$H_1(j\omega)$和$H_2(j\omega)$的对称窄带系统。（教材 P152 题 4.22）

1.求输出$Y_1(t)$和$Y_2(t)$的互谱密度$S_{Y_1Y_2}(\omega)$。

2.当$H_1(j\omega),H_2(j\omega)$在什么条件下，互相关函数$R_{Y_1Y_2}(\tau)$为偶函数？

3.当$H_1(j\omega),H_2(j\omega)$在什么条件下，$Y_1(t),Y_2(t)$统计独立？

解：1.对图所示系统，有

$$Y_1(t)Y_2(t-\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}Y_1(t)X(t-\tau-u)h_2(u)\mathrm{d}u$$

$$Y_1(t)X(t-\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}X(t-a)X(t-\tau)h_2(a)\mathrm{d}a$$

对上式取期望，可得

$$R_{Y_1Y_2}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{Y_1X}(\tau+u)h_2(u)\mathrm{d}u$$

$$R_{Y_1X}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau-a)h_1(a)\mathrm{d}a$$

所以

$$R_{Y_1Y_2}(\tau)=R_X(\tau)*h_1(\tau)*h_2(-\tau)$$

$$S_{Y_1Y_2}(\omega)=S_X(\omega)H_1(j\omega)H_2^*(j\omega)=\frac{N_0}{2}H_1(j\omega)H_2^*(j\omega)$$

2. 由维纳-辛钦定理知，$R_{Y_1Y_2}(\tau)$为偶函数等价于$S_{Y_1Y_2}(\omega)$为偶函数，又因

$$S_{Y_1Y_2}(\omega)=\frac{N_0}{2}H_1(j\omega)H_2^*(j\omega)$$

所以当$H_1(j\omega)H_2^*(j\omega)$为实对称函数时，互相关函数$R_{Y_1Y_2}(\tau)$为偶函数。

3. $Y_1(t),Y_2(t)$统计独立等价于$Y_1(t),Y_2(t)$不相关，因此有$R_{Y_1Y_2}(\tau)=0$

因此$h_1(t)$和$h_2(t)$应满足$h_1(t)*h_2(-t)=0$

在频域里$H_1(j\omega)H_2^*(j\omega)=0$

即在频域里要求两个系统的通带不混叠。

References

[1] 周荫清 **随机过程理论（第 2 版）** 电子工业出版社 2006
[2] 周荫清，李春升，陈杰 **随机过程习题集** 清华大学出版社 2004
[3] 孙清华，孙昊 **随机过程内容、方法与技巧** 华中科技大学出版社 2004
[4] 陆传赉 **随机过程习题解析** 北京邮电大学出版社 2004

几点说明：

此试卷源自 27、28 班随机老师课堂所讲试卷手抄板。在此感谢此随机过程任课老师以及试卷手抄板原作者。由于原手抄板试卷题目不是很详细，尤其是缺少附图，此份试卷可能有些许错误，试卷答案均由我一人参考一些书籍做出，更可能存在纰漏，请使用者思考之后掌握题目所用方法即可。因为本试卷已经讲过所以出原题可能性较小。

本次考试有简答题、判断题、计算题三种类型。从本试卷分析可看出，试卷难度还是很大的。希望大家认真复习，考出好成绩！

Best Wishes!

2009-11-20