2007-2008 学年 第一学期期末试卷

随机过程理论 A 卷

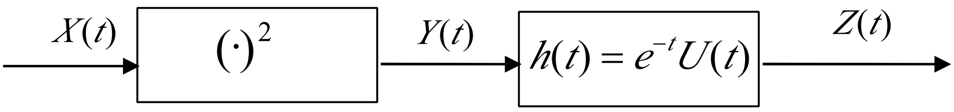
一、设随机过程 $X(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$，式中 ω_0 为常数，随机变量 A、B 相互独立且同分布，均服从 $N(0,\sigma^2)$。试问：$X(t)$ 是广义平稳随机过程么？$X(t)$ 是严格平稳随机过程么？$X(t)$ 是各态历经的么？为什么？（10 分）

二、设联合平稳随机过程 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$，它们的频域表示为 $X_1(\omega)$ 和 $X_2(\omega)$，将它们通过双输入、双输出线性系统，则有

$$Y_1(\omega)=X_1(\omega)H_{11}(\omega)+X_2(\omega)H_{21}(\omega),Y_2(\omega)=X_1(\omega)H_{12}(\omega)+X_2(\omega)H_{22}(\omega)$$

试求 $Y_1(t)$ 的功率谱密度 $S_{Y_1}(\omega)$ 以及互谱密度 $S_{Y_1Y_2}(\omega)$。（17 分）

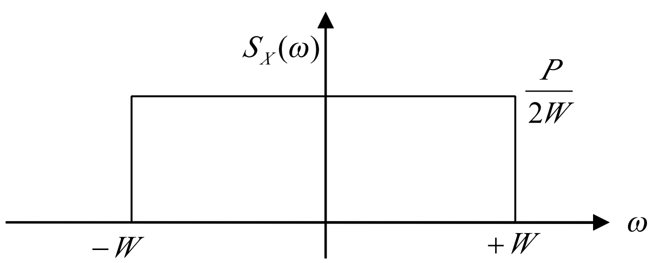
三、设题图 1 所示的系统的输入 $X(t)$ 是平稳高斯随机过程。



若随机过程 $Z(t)$ 的功率谱密度为 $S_Z(\omega)=\dfrac{\pi\delta(\omega)}{1+\omega^2}+\dfrac{2\beta}{(\beta^2+\omega^2)(1+\omega^2)}$　　　（$\beta>0$）

试求 $X(t)$、$Y(t)$ 各自的相关函数 $R_X(\tau)$、$R_Y(\tau)$。（18 分）

四、设 $X(t)$ 为一个零均值高斯过程，其功率谱密度 $S_X(\omega)$ 如题图 2 所示，若每 T 秒对 $X(t)$ 取样一次，得到随机变量 $X(0)$、$X(T)$,…，$X(NT)$。



求 $X(0)$、$X(T)$,…，$X(NT)$ 的联合概率密度，并说明当 T 取何值时，它们相互独立？（17 分）

五、设信号加噪声过程为 $X(t)=a\cos[2\pi(f_0+f_d)t]+N(t)$，其中 a 为常数，$N(t)=N_a(t)\cos\omega_0 t-N_s(t)\sin\omega_0 t$，$\omega_0=2\pi f_0$，$N(t)$ 是理想窄带高斯过程，其双边谱密度为：$S_N(f)=\begin{cases}\dfrac{N_0}{2} & |f\pm f_0|\le\dfrac{B}{2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，并且 $f_d<\dfrac{B}{2}$（B 是正常数），于是可写

$X(t)=a\cos[2\pi(f_0+f_d)t]+p(t)\cos[2\pi(f_0+f_d)t]-q(t)\sin[2\pi(f_0+f_d)t]$，试用 $N_c(t)$ 和 $N_s(t)$ 表示 $p(t)$ 和 $q(t)$；并求 $p(t)$ 的自相关函数 $R_p(t)$ 及功率谱密度 $S_p(\omega)$。（18 分）

六、设 $X(t)$，$Y(t)$ 是两个独立的泊松随机过程，且参数分别是 λ_X 和 λ_Y。

证明 $Z(t)=X(t)+Y(t)$ 是参数为 $\lambda_X+\lambda_Y$ 的泊松随机过程，并求条件概率 $P(Y(t)=k\mid X(t)+Y(t)=n)\quad(n\ge k)$。（10 分）

七、设 $\{X_n,n\ge 0\}$ 是一齐次马尔可夫链，其状态空间 $S=\{a,b,c\}$，一步转移概率矩阵为：

$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}\\ \frac{3}{5}&\frac{2}{5}&0\end{bmatrix}$，初始分布为 $P(X_0=a)=P(X_0=b)=P(X_0=c)=\dfrac{1}{3}$，试求：

$P(X_3=c\mid X_1=a),P(X_1=a,X_2=b,X_3=c)$，以及平稳分布。（10 分）