

<<概率论与数理统计>>自测题四

一、 填空题（本题共计 20 分，每小题 2 分）

1. 已知随机事件 A 和 B 满足 $P(AB) = P(\overline{A}\overline{B})$ ，且 $P(A) = 0.3$ ，则 $P(B) =$ _____。
2. 从数字 1, 2, 3, 4, 5 中任意抽取 2 个，组成没有重复数字的二位数，则这个二位数是偶数的概率为_____。
3. 设随机变量 X 、 Y 和 Z 相互独立，其中 X 服从区间 $[0, 6]$ 上的均匀分布， Y 服从二项分布 $B(10, 0.5)$ ， Z 服从 $\lambda = 3$ 的指数分布，令 $U = X - 2Y + 3Z$ ，则 $E(U) =$ _____。
4. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $P(X = 2) = P(X = 4)$ ，则 $\lambda =$ _____。
5. 若 $D(X) = 1$ ， $D(Y) = 4$ ， $R(X, Y) = 0.6$ ，则 $D(2X - 3Y) =$ _____。
6. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X) = \mu$ ，方差 $D(X) = \sigma^2$ ，则由切比雪夫不等式可得：
 $P(|X - \mu| \geq 3\sigma) \leq$ _____。
7. 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$ ， $Y \sim N(1, 1)$ ，且 X 与 Y 相互独立，则 $P(X + Y \leq 1) =$ _____。
8. 已知总体 $X \sim N(0, 1)$ ， X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的样本，则 $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim$ _____。
9. 设随机变量 X 服从自由度为 n 的 t 分布，若 $P(|X| > \lambda) = \alpha$ ，则
 $P(X < \lambda) =$ _____。
10. 已知总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本，若统计量
 $C \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计，则 $C =$ _____。

二、选择题（本题共计 10 分，每小题 2 分）

1. 设 A 和 B 是两个随机事件，若事件 B 发生时事件 A 必发生，则一定有（_____）
(A) $P(AB) = P(A)$ (B) $P(A \cup B) = P(A)$
(C) $P(B|A) = 1$ (D) $P(B|A) = P(A)$

2. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 $P(X = -1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$ ；

$P(X = 1) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$ ，则下列各式成立的是：(_____)

(A) $P(X = Y) = \frac{1}{2}$

(B) $P(X = Y) = 1$

(C) $P(X + Y = 0) = \frac{1}{4}$

(D) $P(XY = 1) = \frac{1}{4}$

3. 设随机变量 X 与 Y 的方差 $D(X)$ 和 $D(Y)$ 都存在，且 $D(X) \neq 0$ ， $D(Y) \neq 0$ ，

$E(XY) = E(X)E(Y)$ ，则 (_____).

(A) X 与 Y 相互独立

(B) X 与 Y 不相关

(C) $D(XY) = D(X)D(Y)$

(D) $D(X - Y) = D(X) - D(Y)$

4. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，则样本均值 \bar{X} 的分布为：(_____)

(A) $N(0, 1)$

(B) $N(\mu, \sigma^2)$

(C) $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

(D) $N(n\mu, n\sigma^2)$

5. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， σ^2 已知，现从总体中抽取容量为 n 的样本， \bar{X} 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，则 μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为：(_____)

(A) $(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$

(B) $(\bar{X} - U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}})$

(C) $(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

(D) $(\bar{X} - U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

三、计算题（本题共计 63 分，每小题 7 分）

1. 一袋子中装有 10 个球，其中 3 个白球、7 个红球，现采用不放回方式从中摸球两次，每次一个，求第 2 次才摸到白球的概率。

2. 有三箱同型号的灯泡，已知甲箱的次品率为 1.0%，乙箱的次品率为 1.5%，丙箱的次品率为 2.0%，现从三箱中任取一只灯泡，设取得甲箱的概率为 $\frac{1}{2}$ ，取得乙、丙两箱的机会相等，求取得次品的概率。

3. 设连续随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = A + B \arctan x$ ， $-\infty < x < +\infty$ ，求

- (1) 常数 A 和 B ;
- (2) 随机变量 X 的概率密度;
- (3) $P(-1 < X < 1)$ 。

4. 已知离散随机变量 X 的概率分布:

X	-1	1	2
$p(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

求 (1) 随机变量 X 的分布函数; (2) $P(X < \frac{1}{2})$; (3) $P(1 < X \leq \frac{3}{2})$ 。

5. 已知随机变量 X 的概率密度为: $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$, 求随机变量函数

$Y = X^2 + 1$ 的概率密度和分布函数。

6. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & x > 0, y > x; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$, 求:

- (1) 随机变量 X 与 Y 的边缘概率密度;
- (2) 判断随机变量 X 与 Y 的独立性。

7. 设随机变量 X 的概率密度函数为: $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < +\infty$, 求随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 。

8. 设总体 X 的概率密度为:

$$f(x) = \begin{cases} (\theta + 1)x^\theta, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

其中 $\theta > -1$ 是未知参数, 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是总体的一样本观测值, 求参数 θ 的最大似然估计值。

9. 某学校有 1000 名住校生, 每人以 80% 的概率去图书馆自习, 问图书馆至少要有多少个座位才能以 99% 的概率保证去上自习的同学都有座位。(附: $\Phi(2.33) = 0.99$,

$$\Phi(2.58) = 0.995, \sqrt{10} = 3.16)$$

四、证明题 (本题共计 7 分)

1. 证明: 若事件 A 、 B 和 C 相互独立, 则事件 A 与事件 $B \cup C$ 相互独立。