

自动控制原理期末复习
第二章 控制系统的数学模型

三. 传递函数

设线性定常系统由 n 阶线性定常微分方程描述

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n}{dt^n} c(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} c(t) + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} c(t) + a_n c(t) \\ &= b_0 \frac{d^m}{dt^m} r(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} r(t) + \cdots + b_{m-1} \frac{d}{dt} r(t) + b_m r(t) \end{aligned}$$

在零初始条件下, 系统的输出量 $C(t)$ 的拉氏变换与输入量 $r(t)$ 的拉氏变换之比。即

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

可表征控制系统的动态性能, 并用以求出在给定输入量时系统的零初始条件响应。

1. 传递函数的性质:

- 1) 因果系统的传递函数是 s 的有理真分式函数, 具有复变函数的性质
- 2) 传递函数取决于系统或元件的结构和参数, 与输入信号的形式无关

3) 传递函数与微分方程可相互转换 $\frac{d}{dt} = p, p \Leftrightarrow s$ 。

4) 传递函数的 Laplace 反变换是系统的脉冲响应。

2. 传递函数的两种形式

五. 信号流图

1. 基本概念

信号流图是利用图示法来描述一个或一组线性代数方程式, 由节点和支路组成的一种信号传递网络。

节点: 表示方程式中的变量。

支路: 连接两个节点的定向线段, 用支路增益表示方程式中两个变量的因果关系。支路相当于乘法器。

信号在支路上, 只能沿箭头单向传递。对于给定的系统, 节点变量的设置是任意的。因此, 信号流图不唯一。

- 源节点: 输入节点。
- 阱节点: 输出节点。
- 混合节点: 若从混合节点引出一条具有单位增益的支路可将混合节点变为阱节点, 成为系统的输出变量。
- 前向通路: 信号从输入节点到输出节点传递时, 每个节点只通过一次的通路。前向通路上各支路增益之乘积, 称为前向通道总增益, 用 K 表示。
- 回路: 起点和终点同在一个节点上, 而且信号通过每个节点不多于一次的闭合通路。
- 不接触回路: 回路之间没有公共节点时, 该回路称为不接触回路。

2. 信号流图的绘制

- 1) 由微分方程绘制信号流图: 首先要对系统的每个变量指定一个节点, 并按照系统中变量

的因果关系，从左向右顺序排列。再用标明支路增益的支路，根据数学方程式将各节点变量正确连接。

2) 由系统结构图绘制信号流图：在结构图的信号线上用节点标志所传递的信号，用支路代替结构图中的方框。

六. MASON 增益公式

梅森公式可以直接从系统的结构图或信号流图得到系统输出量与输入量之间的传递函数。

设系统的传递函数为 P ，则梅森公式为

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n p_k \Delta_k$$

其中 n 为从源点到阱点的前向通路总数， p_k 为从源点到阱点的第 k 条前向通路增益。

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \cdots$$

称为流图特征式。

这里： $\sum L_a$ 是所有单独回路之和； $\sum L_b L_c$ 表示两、两不接触回路增益的乘积之和；

$\sum L_d L_e L_f$ 表示三、三不接触回路增益的乘积之和。 Δ_k 称为流图余因子。

第三章 线性系统的时域分析法

2. 动态过程与稳态过程

在典型输入信号作用下，任何一个控制系统的时间响应可以分成动态过程和稳态过程两部分。

- 1) 动态过程：又称过渡过程或瞬态过程，指系统在典型输入信号作用下，系统输出量从初始状态到最终状态的响应过程。表现为衰减、发散或等幅振荡形式。用动态性能描述动态过程的时域性能指标。
- 2) 稳态过程：又称为稳态响应。系统在典型输入信号作用下，当时间 t 趋于无穷时，系统输出量的表现方式。反映系统输出量最终复现输入量的程度。用稳态性能描述稳态过程的时域性能指标。

3. 动态性能与稳态性能

- 1) 动态性能 通常以阶跃响应来定义动态过程的时域性能指标。如图 3-1 所示

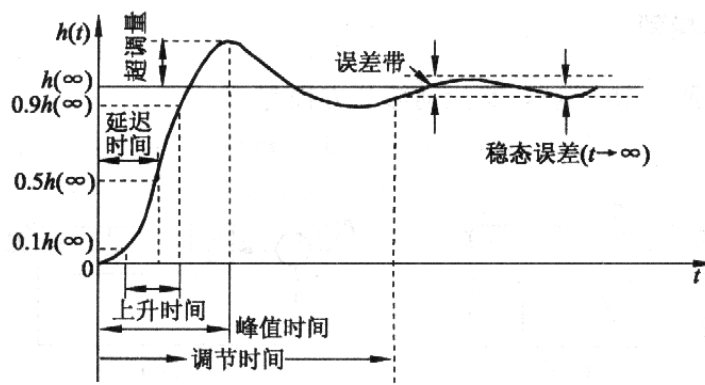


图 3-1 阶跃响应

其动态性能指标包括以下几个方面：

延迟时间 t_d (delay time)：响应曲线第一次达到其终值 $h(\infty)$ 的一半所需的时间。

上升时间 t_r (rise time)：响应从终值的 10% 上升到终值的 90% 所需的时间；对于有振荡的系统，亦可定义为响应从零第一次上升到终值所需的时间。

峰值时间 t_p (peak time)：响应超过其终值到达第一个峰值所需的时间。

调节时间 t_s (settle time)：响应到达并保持在终值的 5% 之内所需的最短时间。

超调量 $\sigma\%$ ：

$$\sigma\% = \frac{h(t_p) - h(\infty)}{h(\infty)} \times 100\%$$

2) 稳态性能：通常用在阶跃函数、斜坡函数或加速度函数作用下系统的稳态误差来描述。衡量了系统的控制精度和抗干扰能力。

4. 一阶系统的时域分析

1) 一阶系统的数学模型

运动微分方程为

$$T\dot{c}(t) + c(t) = r(t)$$

传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

结构图如下图 3-2：

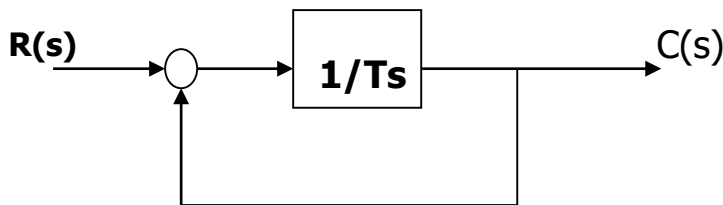


图 3-2 一阶系统结构图

一阶系统的单位脉冲响应

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

一阶系统的单位阶跃响应

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, (t \geq 0)$$

一阶系统的单位斜坡响应

$$c(t) = (t - T) + Te^{-t/T}, (t \geq 0)$$

时间常数 T 反映系统的惯性，惯性越小，响应过程越快。

5. 二阶系统的时域分析

1) 二阶系统的数学模型

传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

结构图如下图 3-3:

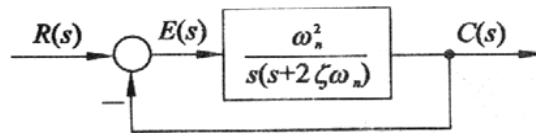


图 3-3 二阶系统结构图

其中, ω_n 称为自然频率 (或无阻尼振荡频率), ζ 称为阻尼比 (或相对阻尼系数)。

闭环特征方程为: $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

其两个根为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

所以, $\zeta < 0$ 时, 特征根的实部为正时, 系统的动态过程为发散的正弦振荡或单调发散的形式, 二阶系统是不稳定的; $0 < \zeta < 1$ 时, 动态过程表现为衰减振荡形式, 称为欠阻尼二阶系统; $\zeta = 1$ 时, 动态过程表现为无振荡形式, 称为临界阻尼系统; $\zeta > 1$ 时, 动态过程表现为无振荡形式, 称为过阻尼系统。动态过程曲线如图 3-4 所示。

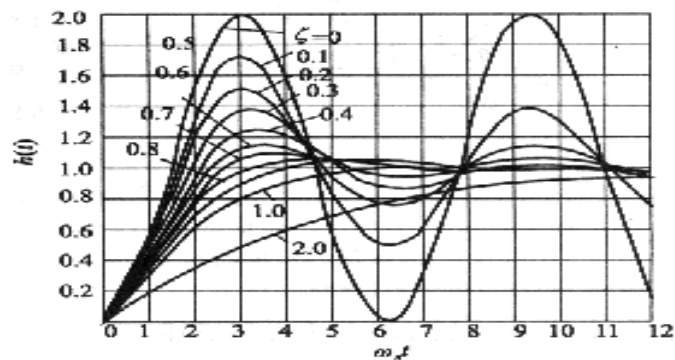


图 3-4 二阶系统动态响应曲线

2) 欠阻尼 ($0 < \zeta < 1$) 二阶系统的单位阶跃响应

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \beta), (t \geq 0)$$

这里, $\beta = \arccos \zeta$ 称为阻尼角, 表示闭环极点到原点的连线与负实轴的夹角;
 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ 称为有阻尼振荡频率, 大小等于闭环极点到实轴之间的距离; $\sigma = \zeta \omega_n$
 称为衰减系数, 大小等于闭环极点到虚轴之间的距离。

延迟时间 t_d

$$t_d = \frac{1 + 0.7\zeta}{\omega_n}$$

上升时间 t_r

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

峰值时间 t_p

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

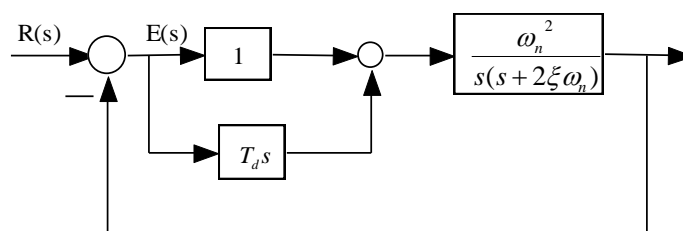
超调量 $\sigma\%$

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% \quad (3-23)$$

调节时间 t_s

$$t_s = \frac{3}{\delta}$$

3) 比例—微分控制系统：系统结构图如图 3-5



3-5 比例—微分控制系统

PD控制系统与原系统比较如下

	开环传递函数	开环增益	闭环传递函数
原系统	$\frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$	$\frac{\omega_n}{2\xi}$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$
PD控制	$\frac{(1 + T_d s)\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$	$\frac{\omega_n}{2\xi}$	$\frac{\omega_n^2(T_d s + 1)}{s^2 + 2\xi_d\omega_n s + \omega_n^2}$

其中 $\xi_d = \xi + \frac{\omega_n T_d}{2}$ ，表明比例—微分控制不改变系统的自然频率，但可增大阻尼比。PD控制相当于给系统增加了一个闭环零点， $-z = -1/T_d$ ，称为有零点的二阶系统。 $T_d = 0$ ，称为无零点的二阶系统。

4) 测速反馈控制系统：

系统结构图如图3-6

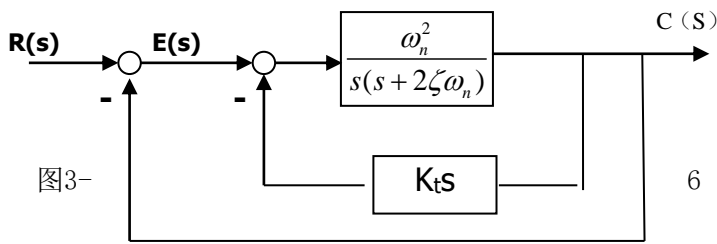


图3-

6 测速反馈控制系统结构图

测速反馈控制系统与原系统比较

	开环传递函数	开环增益	闭环传递函数
原系统	$\frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$	$\frac{\omega_n}{2\xi}$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$
测速反馈	$\frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi_1\omega_n)}$	$\frac{\omega_n}{2\xi + K_t\omega_n^2}$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi_1\omega_n s + \omega_n^2}$

其中 $\xi_1 = \xi + \frac{\omega_n K_t}{2}$ ，表明测速反馈控制不改变系统的自然频率，但可增大阻尼比。测速反馈控制增大开环增益，加大系统在斜坡输入时的稳态误差。

7. 稳定性分析

1) 稳定性的基本概念

- 稳定性：是指系统在扰动消失后，由初始偏差状态恢复到原平衡状态的性能。
- 线性控制系统的稳定性：在初始扰动的影响下，其动态过程随时间的推移逐渐衰减并趋于零（原平衡点），则称系统渐近稳定。

2) 线性系统稳定的充要条件：脉冲响应 $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$

- 闭环系统特征方程的所有根均有负实部。
- 或闭环传递函数的极点均严格位于左半 s 平面。

5) 劳斯判据

劳斯稳定判据：当且仅当劳斯表第一列所有各元素均为正时，特征方程是稳定的；否则特征

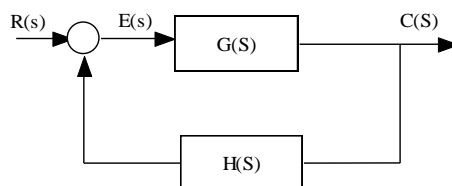
方程 s^n 稳定， 第一列各元素符号改变的次数等于特征方程的正实部特征根的个数。	a_0	a_2	a_4	a_6	...
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	...
s^{n-2}	$c_{13} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$c_{23} = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$c_{33} = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$	c_{43}	...
s^{n-3}	$c_{14} = \frac{c_{13} a_3 - a_1 c_{23}}{c_{13}}$	$c_{24} = \frac{c_{13} a_5 - a_1 c_{33}}{c_{13}}$	$c_{34} = \frac{c_{13} a_7 - a_1 c_{43}}{c_{13}}$	c_{44}	...
s^{n-4}	$c_{15} = \frac{c_{14} c_{23} - c_{13} c_{24}}{c_{14}}$	$c_{25} = \frac{c_{14} c_{33} - c_{13} c_{34}}{c_{14}}$	$c_{35} = \frac{c_{14} c_{43} - c_{13} c_{44}}{c_{14}}$	c_{45}	...
.
s^2	$c_{1,n-1}$	$c_{2,n-1}$			
s^1	$c_{1,n}$				
s^0	$c_{1,n+1} = a_n$				

- 劳思表中某行的第一列项为零，而其余各项不为零，或不全为零。用因子 $(s+a)$ 乘以特征方程，其中 a 可以为任意正数，再对新的特征方程应用劳思判据。
- 劳思表中出现全零行以全零行上面一行的系数构造一个辅助方程： $F(s)=0$ ，并对之求导，用所得导数方程的系数取代全零行的元，继续运算。

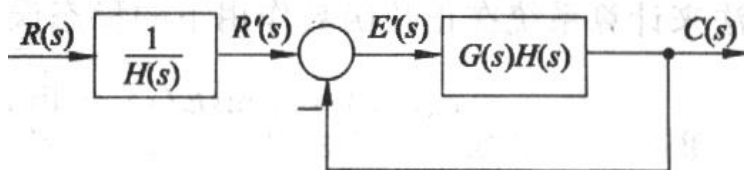
8. 线性系统的稳态误差计算

1) 误差的基本定义

在系统输入端定义的误差： $E(s) = R(s) - H(s)C(s)$



在系统输出端定义的误差： $E'(s) = E(s) / H(s)$



误差本身是时间的函数

$$e(t)=L^{-1}[E(s)]=L^{-1}[\phi_e(s) \cdot R(s)]=e_{ts}(t)+e_{ss}(t)$$

$e_{ts}(t)$ 为瞬态分量, $e_{ss}(t)$ 为稳态分量。

稳态误差: $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e_{ss}(t)$

2) 系统型别:

开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^{n-v} (T_j s + 1)}$$

K 为开环增益; τ_i 和 T_j 为时间常数; v 为开环系统在 s 平面坐标原点上的极点重数。

v=0, 称为 0 型系统; v=1, 称为 I 型系统; v=2, 称为 II 型系统……。

3) 终值定理法

根据终值定理

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

9. 减小或消除稳态误差的措施:

1) 增大系统开环增益或扰动作用点之前系统的前向通道增益。

2) 在系统的前向通道或主反馈通道设置串联积分环节。

- 扰动作用点之前的前向通道积分环节数与主反馈通道积分环节数之和决定系统响应扰动作用的型别, 该型别与扰动作用点之后前向通道的积分环节数无关。
- 如果在扰动作用点之前的前向通道积分环节或主反馈通道中设置 v 个积分环节, 必可消除系统在扰动信号作用下的稳态误差。

第四章 线性系统的根轨迹法

1. 根轨迹法的基本概念

1) 根轨迹: 开环系统的某一参数从零到无穷变化时, 特征方程的根在 s 平面上变化的轨迹。

2) 根轨迹与系统性能的关系

- 稳定性: 根轨迹不会穿越虚轴进入右半 s 平面, 则系统稳定。
- 临界开环增益: 根轨迹与虚轴交点处的 k 值。
- 稳态性能:
 - a) 由坐标原点处的极点数确定系统类型;
 - b) 根据稳态性能可以确定闭环极点位置的容许范围。

3) 动态性能:

- 过阻尼: 所有闭环极点位于实轴上;

- 临界阻尼： 闭环两个实数极点重合；
- 欠阻尼： 闭环为复数极点。

2. 根轨迹方程：

设反馈控制系统闭环传递函数可写为：

$$\phi(s) = G(s)H(s) = \frac{K_G * \prod_{i=1}^f (s - z_i) \prod_{j=1}^k (s - p_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K * \prod_{j=1}^m (s - z_j)}$$

$K_G *$ 为开环前向通道根轨迹增益， $k*$ 为开环根轨迹增益。

- 闭环根轨迹增益等于开环前向通道根轨迹增益；
- 闭环零点由开环前向通道传递函数的零点和反馈通道传递函数的极点组成；
- 闭环极点与开环零极点及根轨迹增益 $k*$ 有关。

根轨迹方程

$$K * \frac{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = -1$$

对应模值方程

$$K * = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}$$

对应相角方程

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k + 1)\pi$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3. 根轨迹绘制的基本法则：

- 1) 法则一： 根轨迹起于开环极点，终于开环零点；
- 2) 法则二： 根轨迹的分支数等于开环有限极点数 n 和有限零点个数 m 种的较大者，它们是连续的且对称于实轴；
- 3) 法则三： 当 $n > m$ 时，有 $n - m$ 条根轨迹分支沿着与实轴交角为 $\varphi_a = \frac{(2k + 1)\pi}{n - m}, k = 0, 1, 2, \dots, n - m - 1$ ，交点为 $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$

的一组渐近线趋向无穷远处；

- 4) 法则四： 若实轴上某一区域的右边开环零极点之和为奇数，则该区域必是根轨迹；

- 5) 法则五： l 条根轨迹的分离点坐标是方程 $\sum_{i=1}^m \frac{1}{d - z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i}$ 的解 d ，分离角为 $(2k + 1)\pi / l$

- 6) 法则六： 根轨迹的起始角 $\theta_{pi} = (2k + 1)\pi + (\sum_{j=1}^m \varphi_{z_j p_i} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \theta_{p_j p_i}); k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

终止角 $\varphi_{z_i} = (2k+1)\pi + (\sum_{j=1, j \neq i}^m \varphi_{z_j z_i} - \sum_{j=1}^n \theta_{p_j z_i}); k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

7) 法则七: 若根轨迹与虚轴相交, 可用劳思判据确定交点上的 K^* 和 ω 值, 也可令闭环特征方程中的 $s = j\omega$, 然后分别令其实部虚部为零而得;

8) 法则八: 当 $n-m \geq 2$ 时,

$$\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n p_i$$

可据此判断根轨迹的走向。

5. 系统性能的分析:

- 主导极点对整个时间响应过程起主要作用;
- 相距很近的闭环零极点称为偶极子, 偶极子越接近坐标原点, 对系统动态性能影响越大;
- 闭主导极点距虚轴远 2~3 倍的闭环零极点可略去影响;
- 稳定性: 取决于闭环极点是否都位于 s 左半平面;
- 运动形式: 如无闭环零点, 则由闭环极点为实数或复数来决定;
- 超调量: 由闭环复数主导极点来决定;
- 调节时间: 由闭环主导极点来决定;
- 零点减小系统阻尼和峰值时间, 超调增大; 极点增大系统阻尼和峰值时间, 超调减小;
- 接近原点的偶极子, 必须考虑其影响。

第五章、线性系统的频域分析法

控制系统中的信号可以表示为不同频率正弦信号的组成。控制系统的频率特性反映了正弦信号作用下系统响应的性能。研究系统在正弦输入信号作用下系统响应的性能称为频域分析法。

5-1 频率特性

1、 频率特性的基本概念

当正弦信号作用于稳定的线性系统时, 系统输出的稳态分量依然为同频率的正弦信号, 这种过程称为系统的频率响应。

设有稳定的线性定常系统, 当正弦信号的作用下, 系统输出的稳态分量为同频率的正弦函数, 其振幅与输入正弦信号的振幅之比 $A(\omega)$ 称为幅频特性; 其相位与输入正弦信号的相位之差 $\varphi(\omega)$ 称为相频特性。系统频率响应与输入正弦信号的复数比称为系统的频率特性, 可式 (5.1) 来表示:

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (5.1)$$

上述的频率特性定义还可以推广到不稳定的线性定常系统中: 当正弦信号的作用下, 线

性定常系统的输出中和输入正弦信号同频率的正弦分量与输入正弦信号的复数比,称为系统的频率特性。

设系统的传递函数为 $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$, 系统频率特性和传递函数有如下关系式成立

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} \quad (5.2)$$

2、频率特性的几何表示法

常用的频率特性曲线有以下三种:

- (1) 幅相频率特性曲线, 也称极坐标图或奈奎斯特曲线。它以横轴为实轴, 纵轴为虚轴构成复数平面。它以 ω 为参变量, 用复平面上的向量来表示频率特性值 $G(j\omega)$ 。由于幅频特性为 ω 的偶函数, 相频特性为 ω 的奇函数, 故 ω 从零变化到 $+\infty$ 和 ω 从零变化到 $-\infty$ 的幅相曲线关于实轴对称, 因此一般只绘制 ω 从零变化到 $+\infty$ 的幅相曲线。在系统幅相曲线中, 频率 ω 为参变量, 一般用小箭头表示 ω 增大时幅相曲线的变化方向。

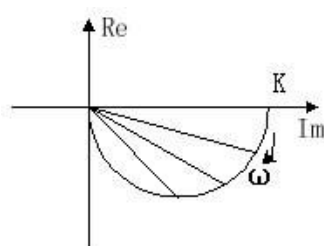


图 5.1 惯性环节的开环幅相曲线

如图 5.1 所示是一个惯性环节的频率特性, 在复平面, 把频率特性的模和角同时表示出来的图就是极坐标图。

- (2) 对数频率特性曲线。也称波特图, 它由对数幅频曲线和对数相频曲线组成。对数频率特性曲线横坐标为 ω 轴, 以对数刻度表示之, 十倍频程, 纵坐标表示为

$$L(\omega) = 20\lg|G(j\omega)| = 20\lg A(\omega), \text{ 单位为 dB。对数相频曲线的纵坐标表示为 } \varphi(\omega),$$

单位为度($^{\circ}$)。

对数频率特性优点:

- 1) 展宽频率范围
- 2) $\left. \begin{array}{l} \text{增益变, 幅频特性曲线只是上下移动} \\ \text{时间常数变, 相频特性曲线只是左右移动} \end{array} \right\} \text{形状不变}$
- 3) 几个频率特性相乘, 对数幅、相曲线相加。
- 4) 两个频率特性互为倒数, 幅、相特性反号, 关于 ω 轴对称

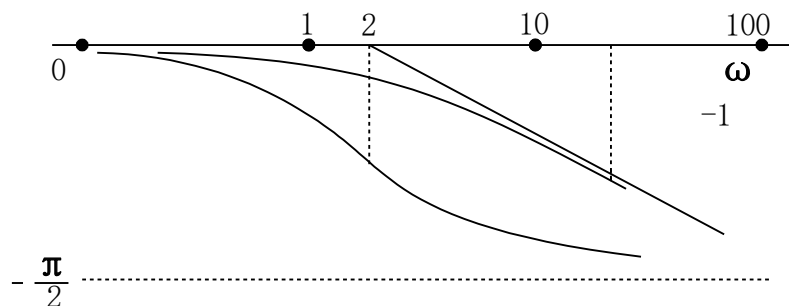


图 5.2 惯性环节的对数频率特性

如图 5.2 所示是一个惯性环节的对数频率特性

(3) 对数幅相曲线, 也称尼柯尔斯图。它的纵坐标是 $L(\omega)$, 单位为 dB; 横坐标为 $\varphi(\omega)$, 单位为度($^{\circ}$), 均为线性分度, 频率 ω 为参变量。

5-3 开环频率特性曲线的绘制

1、开环幅相曲线的绘制

概略开环幅相曲线应反映开环频率特性的三个重要因素:

(1) 开环幅查曲线的起点 ($\omega = 0^+$) 和终点 ($\omega = \infty$);

(2) 开环幅相曲线与实轴的交点

设 $\omega = \omega_x$ 时, 如果 $G(j\omega_x)H(j\omega_x)$ 满足 $\text{Im}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)] = 0$

或 $\varphi(\omega_x) = \angle[G(j\omega_x)H(j\omega_x)] = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

则称 ω_x 为穿越频率, 而此时开环幅查曲线与实轴的交点的坐标值为

$$\text{Re}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)] = G(j\omega_x)H(j\omega_x)$$

(3) 开环幅相曲线的变化范围 (象限、单调性)

绘制概略开环幅查曲线的规律总结如下:

(1) 开环幅相曲线的起点, 取决于比例环节 K 和系统积分或微分环节的个数 ν 。

$\nu < 0$, 起点为原点; $\nu = 0$, 起点为实轴上的点 K 处 (K 为系统开环增益, 有正负之分); $\nu > 0$, 设 $\nu = 4k + i (k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2, 3, 4)$, 则 $K > 0$ 时起点为 $i \times (-90^{\circ})$ 的无穷远处, $K < 0$ 时起点为 $i \times (-90^{\circ}) - 180^{\circ}$ 的无穷远处。

(2) 开环幅相曲线的终点, 取决于开环传递函数分子、分母多项式中最小相位环节和非最小相位环节的阶次和。

设系统开环传递函数的分子、分母多项式的阶次分别为 m 和 n 次, 记 n_1 和 m_1 分别为开环传递函数具有正实部的极点和零点的个数, K^* 为系统开环根轨迹增益。

此时开环幅相曲线的终点为

$$|G(j\infty)H(j\infty)| = \begin{cases} 0, n > m \\ |K^*|, n = m \end{cases}$$

$$\angle[G(j\infty)H(j\infty)] = \begin{cases} -90^\circ \times (n - n_1 + m_1 - m), K > 0 \\ -90^\circ \times (n - n_1 + m_1 - m) - 180^\circ, K < 0 \end{cases}$$

(3) 若开环系统存在等幅振荡环节, 重数 l 为正整数, 即开环传递函数具有以下形式

$$G(s)H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 1\right)^l} G_1(s)H_1(s)$$

$G_1(s)H_1(s)$ 不含 $\pm j\omega_n$ 的极点, 则当 ω 趋于 ω_n 时, $A(\omega)$ 趋于无穷, 而

$$\varphi(\omega_{n-}) \approx \varphi_1(\omega_n) = \angle[G_1(j\omega_n)H_1(j\omega_n)], \quad \varphi(\omega_{n+}) \approx \varphi_1(\omega_n) - l \times 180^\circ$$

即 $\varphi(\omega)$ 在 $\omega = \omega_n$ 附近, 相角突变 $-l \times 180^\circ$ 。

2、开环对数频率特性曲线的绘制

绘制开环对数频率特性曲线的一般步骤如下:

- (1) 开环传递函数典型环节分解;
- (2) 确定一阶环节, 二阶环节的交接频率, 将各交接频率按从小到大的顺序

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$ 标注在半对数坐标图的 ω 轴上;

- (3) 绘制 ω_1 左边的低频段渐近线。在 $\omega < \omega_1$ 频段内, 开环系统幅频渐近特性的斜率

取决于 $\frac{K}{\omega^v}$, 因而直线斜率为 $-20\text{dB}/\text{dec}$ 。为了获得低频渐近线, 还需要确定该直线上的一点, 可以采用以下三种方法:

- 1) 任选一点 ω_0 , 如果 $\omega_0 < \omega_1$, 则渐近线过点 $\left(\omega_0, 20\lg \frac{|K|}{\omega_0^v}\right)$; 如果 $\omega_0 > \omega_1$,

则渐近线的延长线过点 $\left(\omega_0, 20\lg \frac{|K|}{\omega_0^v}\right)$;

- 2) 取特定频率 $\omega_0 = 1$, 则 $L_a(1) = 20\lg K$;

- 3) 渐近线或其延长线怀零分贝线的交点为 $\omega_0 = |K|^{\frac{1}{v}}$ 。

- (4) 从 $\omega = \omega_1$ 点起, 渐近线斜率发生变化, 斜率变化的数值取决于 ω_1 对应的典型环节的种类, 在每个频率交接点处, 斜率都发生变化, 两个相邻交接频率之间为直线。

5-4 频率域稳定判据

1、数学基础

(1) 映射定理

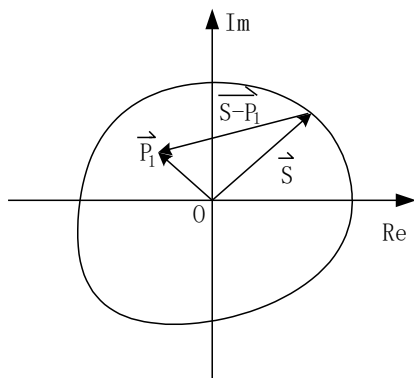


图 5.9 映射定理示意图

如图 5.9 所示，设 $W(s) = \frac{\prod_{j=1}^z (s - z_j)}{\prod_{i=1}^p (s - p_i)}$ 在复平面一个封闭曲线内具有 P 个极点和 Z 个零

点，

当 s 向量沿封闭曲线顺时针旋转一周，所有向量 $\overrightarrow{s - z_j}, \overrightarrow{s - p_j}$ 也都顺时针旋转一周，所以 $W(s)$ 顺时针向旋转的圈数 $N = Z - P$ 。

$$\text{设系统的开环传递函数: } Q(s) = \frac{N(s)}{P(s)} = k \cdot \frac{\prod_{j=1}^z (s - z_j)}{\prod_{i=1}^p (s - p_i)}$$

$$\text{构造一个函数 } W(s) = 1 + Q(s) = \frac{P(s) + N(s)}{P(s)} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{闭环分母} \\ \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{开环分母} \end{array}$$

如图 5.10 所示，做一封闭曲线 D 包围整个右半平面，且已知有 p 个极点在其中，现在我们关心是这其中是否有闭环极点？

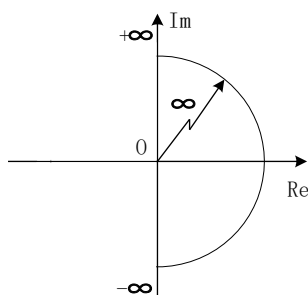


图 5.10 封闭曲线示意图

按映射定理，当 s 沿 D 形围线顺钟向旋转一圈

$$[1+Q(s)]_{\text{顺钟方向旋转圈数}} = \text{闭环在右半平面的极点数} Z - \text{开环在右半平面的极点数} P$$

(2) 什么是 $1+Q(s)$ 旋转的圈数？

当 s 沿 D 形围线顺旋一圈

$$s \rightarrow \infty, (Q(s) \rightarrow 0) \because Q(s) \text{ 的分母次数大于分子次数}$$

即当 s 沿无穷大半圆旋转时， $Q(s)$ 在 origin 处蠕动。

\therefore 我们只看 ω 从 $-\infty \rightarrow +\infty$ ($s = j\omega$), $1+Q(j\omega)$ 旋转的周数

按映射定理，若闭环系统稳定

$$[P(s) + N(s)] \quad \text{在右半平面有 } 0 \text{ 个极点}$$

$$[P(s)] \quad \text{在右半平面有 } P \text{ 个极点}$$

\therefore 稳定的充要条件是： $1+Q(j\omega)$ 应顺钟向转 $-P$ 圈，即逆钟向转 P 圈

什么是 $1+Q(j\omega)$ ？如图 5.11 所示，从 -1 点指向 $Q(j\omega)$ 的向量， $G_o(j\omega)$ 稳定与否看其极坐标图包不包 -1 点。

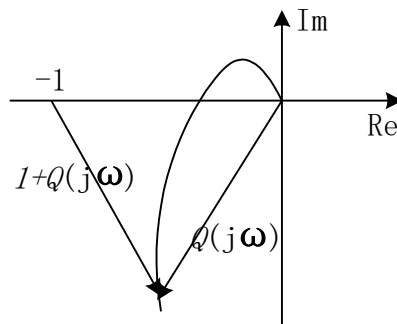


图 5.11 奈氏判据示意图

2、奈奎斯特稳定判据

反馈控制系统在 s 右半平面上的闭环极点的个数为 $Z=P-2N$ ，其中， P 为 s 右半平面上系统的开环极点数， N 为开环幅相曲线逆时针包围 $(-1, j0)$ 点的圈数。

3、对数频率稳定判据

设 P 为开环控制系统正实部的极点数，反馈控制系统稳定的充分必要条件是

$$\varphi(\omega_c) \neq (2k+1)\pi; k=0,1,2,\dots \text{ 和 } L(\omega) > 0 \text{ 时}; \Gamma_\varphi \text{ 曲线穿越 } (2k+1)\pi \text{ 线的次数}$$

$$N = N_+ - N_- \text{ 满足 } Z = P - 2N = 0$$

5-5、稳定裕度

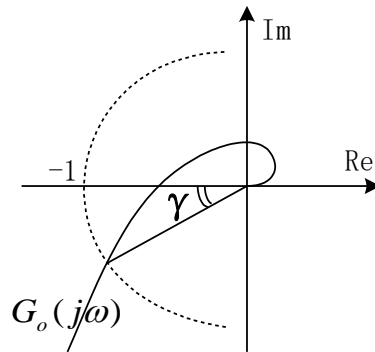


图 5.12 相角裕度示意图

1、相角裕度

若 ω_c 为系统的截止频率，即 ω_c 满足

$$A(\omega_c) = |G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 1 \text{ 则定义相角裕度为 } \gamma = 180^\circ + \angle[G(j\omega_c)H(j\omega_c)]$$

相角裕度 γ 的含义是，对于闭环稳定系统，如果系统开环相频特性再滞后 γ 度，则系统将处于临界稳定状态。相角裕度的定义如图所示。

2、幅值裕度

当 ω_0 为系统的穿越频率，即 ω_0 满足

$$\varphi(\omega_0) = \angle[G(j\omega_0)H(j\omega_0)] = (2k+1)\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{则定义幅值裕度为 } K_g = \frac{1}{|G(j\omega_0)H(j\omega_0)|}$$

幅值裕度 K_g 的含义是，对于闭环稳定系统，如果系统开环幅频特性再增大 K_g 倍，则系统将处于临界稳定状态。幅值裕度定义如图所示。

如图所示，当相角为 -180° 时，开环模 < 1 ，取其倒数，再用分贝表示就是增益裕量 K_g

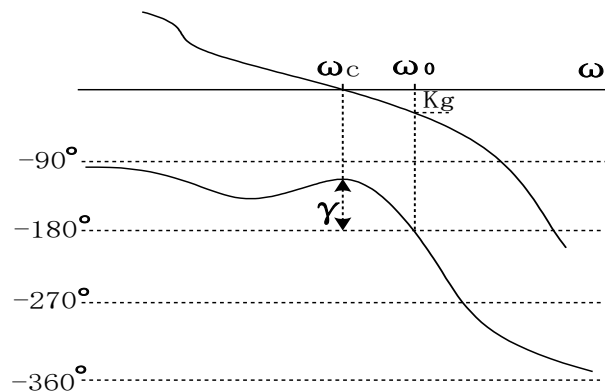


图 5.13 幅值裕度示意图

注意上述定义是针对最小相位系统 (γ, K_g 都是正的), 这两个一正一负, 正是非最小相位系统的特征。工程上根据经验一般要求 $\gamma \geq 30^\circ$, $30^\circ - 60^\circ$ 之间, 主要使用 γ 这一指标。

第六章 系统的校正与综合

6-1 系统的设计与校正问题

控制系统的校正是指在系统中加入一些其参数可以根据需要而改变的机构或装置, 使系统整个特性发生变化, 从而满足给定的各项性能指标。本章主要研究定常控制系统的校正方法, 且主要介绍工程中常用的串联校正、反馈校正和复合校正等方法。

串联校正装置一般接在系统误差测量点之后和放大器之前, 串接于系统前向通道之中; 反馈校正装置接在系统局部反馈通道之中。串联校正装置特点是设计和计算直观、简单, 常用的串联校正装置有超前校正、滞后校正和滞后-超前校正。反馈校正的分析和设计比串联校正复杂, 但有时采用简单的反馈校正就能获得特殊的控制效果。

6-2 控制系统的校正设计方法

在控制系统中, 校正的设计方法一般依据性能指标的形式而定。若性能指标以单位阶跃响应的峰值时间、调节时间、超调量、阻尼比、稳态误差等时域特征量给出时, 一般采用根轨迹法校正。若性能指标以系统的相角裕度、幅值裕度、谐振峰值、闭环带宽、静态误差系数等频域特征量给出时, 一般采用频率法校正。

1、 串联超前校正

串联超前校正适用于系统响应慢、相对稳定性差, 但增益不太低的系统, 可以提供超前角以增加相位裕度, 或消去对象最接近原点的实极点以提高响应速度。

超前校正装置的传递函数为 $G_c(s) = a \frac{1 + aTs}{1 + Ts}, (a > 1)$

超前网络的相角为 $\varphi_c(\omega) = \arctan aT\omega - \arctan T\omega = \arctan \frac{(a-1)T\omega}{1 + aT^2\omega^2}$

当 $\omega = \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$ 时, 最大超前角为 $\varphi_m = \arctan \frac{a-1}{2\sqrt{a}} = \arctan \frac{a-1}{a+1}$

超前补偿网络的幅值为 $20\lg|G_c(j\omega)| = 10\lg a$ 。

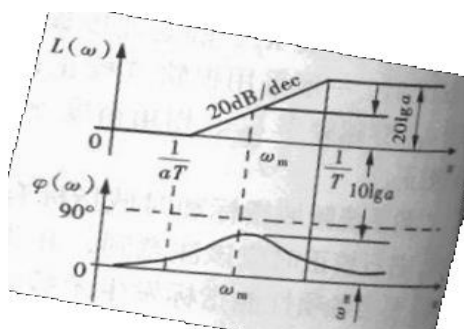


图 6-1 串联超前校正装置伯德图

如图 6-1 所示为串联超前校正装置伯德图。 ω_m 是 $\frac{1}{aT}$ 和 $\frac{1}{T}$ 的几何中点。

超前校正设计步骤如下：

- (1) 根据稳态误差要求，确定开环增益 K；
- (2) 利用已确定的开环增益，计算待校正系统的相角裕度；
- (3) 根据截止频率 ω_c'' 的要求，计算超前网络参数 a 和 T。选择最大超前角频率等于要求的系统截止频率，由 $-L'(\omega_c'') = 10\lg a$ 确定 a，然后由 $T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}}$ 确定 T 值；

的系统截止频率，由 $-L'(\omega_c'') = 10\lg a$ 确定 a，然后由 $T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}}$ 确定 T 值；

- (4) 验算已校正系统的相角裕度 γ'' 。 $\gamma''(\omega_c'') = \varphi_m + \gamma(\omega'')$ ，当验算结果 γ'' 不满足指标

要求时，需重选 ω_m 值，一般使 $\omega_m (= \omega_c'')$ 值增大，然后重复以上计算步骤。

2、串联滞后校正

适用于稳态误差大，但响应不太慢的系统。串联滞后校正使已校正系统截止频率下降，从而使系统获得足够的相角裕度。因此，滞后网络的最大滞后角应力求避免发生在系统截止频率附件附近。在系统响应速度要求不高而抑制噪声电平性能要求较高的或待校正系统已具备满意的动态性能，仅稳态性能不满足指标要求情况下，可考虑采用串联滞后校正，串联滞后校正的传递函数为 $G_c(s) = \frac{1+bTs}{1+Ts}$, ($b < 1$)。

正，串联滞后校正的传递函数为 $G_c(s) = \frac{1+bTs}{1+Ts}$, ($b < 1$)。

滞后网络的相角为 $\varphi_c(\omega) = \arctan T\omega - \arctan bT\omega = \arctan \frac{(1-b)T\omega}{1+bT^2\omega^2}$ 。当

$\omega = \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{b}}$ 时，最大滞后角为 $\varphi_m = \arctan \frac{1-b}{1+b}$ 。

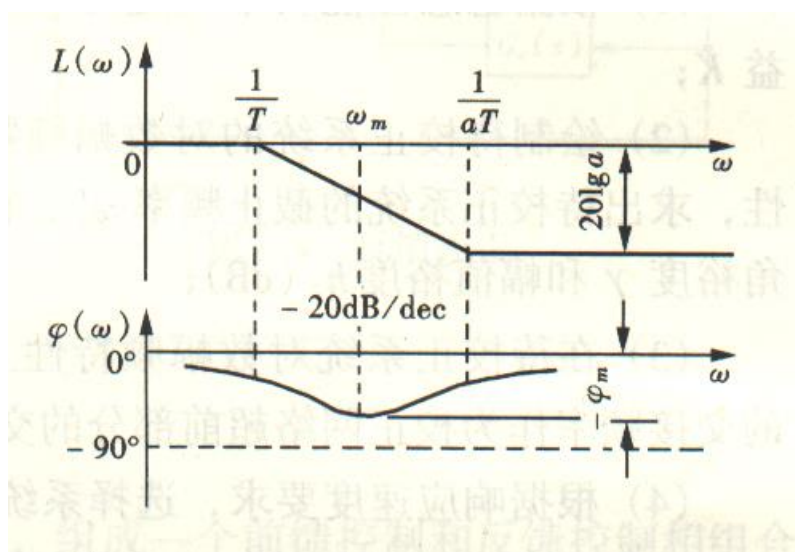


图 6-2 串联滞后校正伯德图。

如图 6-2 所示为串联滞后校正伯德图。

4、反馈校正

反馈校正的基本原理是：用反馈校正装置包围待校正系统中对动态性能改善有重大妨碍作用的某些环节，形成一个局部反馈回路（内回路），在局部反馈回路的开环幅值远大于1的条件下，局部反馈回路的特性主要取决于反馈校正装置，而与包围部分无关，适当选择反馈校正装置的形式和参数，可以使已校正系统的性能满足给定指标的要求。

反馈校正系统如图 6-4 所示。

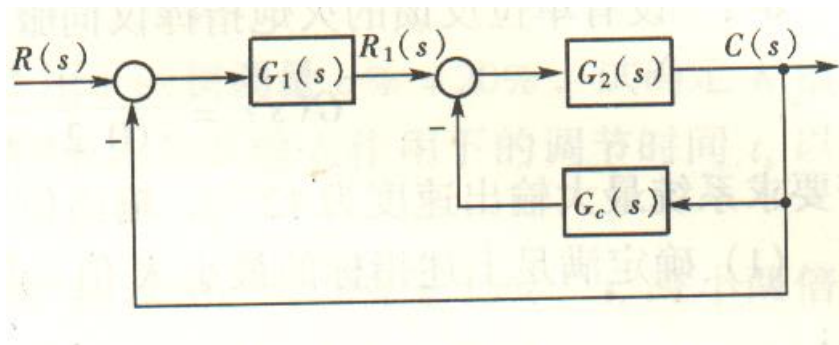


图 6-4 反馈校正

反馈校正具有如下明显特点：

- (1) 削弱非线性特性的影响；
- (2) 减小系统的时间常数；
- (3) 降低系统对参数变化的敏感度。

第七章 线性离散系统的分析与校正

7-1、基本概念

连续系统指控制系统中所有信号都是时间变量的连续函数。离散系统指控制系统中有一处或几处的信号不是时间变量的连续函数（是脉冲或数码）。离散系统分类：脉冲系统和数字系统

采样控制系统（脉冲控制系统）指控制系统中的信号是脉冲序列形式的离散系统。数字控制系统（计算机控制系统）指控制系统中的信号是数字序列形式的离散系统。

1、采样控制系统

(1) 采样系统

采样系统是一种断续控制方式，对来自传感器的连续信号在某些规定的时间瞬时取值。

采样系统的应用：对于具有传输延迟，大惯性的控制系统可以引入采样控制。

(2) 采样

连续信号经实现采样的专门开关装置称为采样器。采样器后变换成离散信号的过程称为采样过程。采样形式有多种，为周期采样和非周期采样（随机采样）。最简单又最普遍的是采样间隔相等的采样周期。采样间隔随机变化的采样形式称随机采样。

(3) 保持器

在采样控制系统中，把脉冲序列转变为连续信号的过程称为保持过程。实现保持的装置称为保持器。保持器的输出为脉冲信号，含高频噪声，故在保持器后面串联一个信号复现滤波器（低通滤波器）加到系统的连续部分。最简单的复现滤波器可把脉冲信号复现为阶梯信号。当取样频率足够大时，近似为连续信号。

2、数字控制系统

数字控制系统是以计算机为控制器来控制具有连续工作状态的被控对象的闭环控制系统。如图 7-1 是计算机控制系统典型原理图。

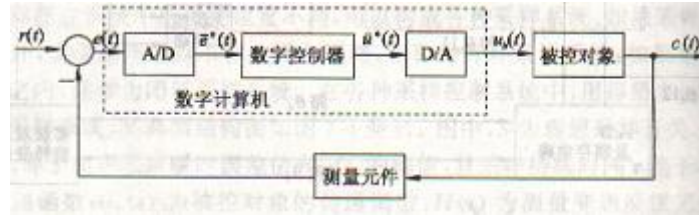


图 7-1 计算机控制系统典型原理图

7-2、信号的采样与保持

1、采样过程

采样过程可以看作一个幅值调制过程。如图 7-3 是理想采样过程，脉冲序列从零开始。

$\tau = 0$ ，理想单位脉冲序列 $\delta_T = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$ ，理想采样器的输出

$$e^*(t) = e(t)\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t - nT)$$

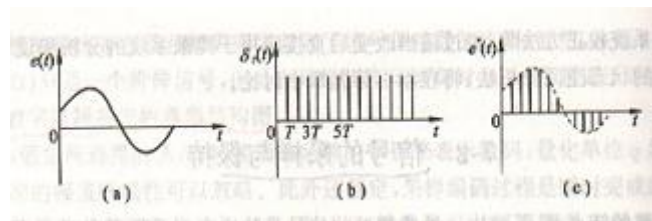


图 7-3、理想采样过程

2、采样过程的数学描述

(1) 采样信号的拉氏变换

对采样信号 $e^*(t)$ 进行拉氏变换，得：

$$E^*(s) = \mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t - nT) \right]$$

由位移定理，有 $\mathcal{L}[\delta(t - nT)] = e^{-nTs} \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-nTs}$

∴ 采样信号的拉氏变换为：

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nTs} \quad (7-1)$$

式 (7-1) 表明：采样信号的拉氏变换与采样函数 $e(nT)$ 的关系。 $E^*(s)$ 只能描述采样瞬间的离散的数值，而不能描述 $e(t)$ 在采样间隔之间的信息。

若 $e(t)$ 为有理函数形式，则无穷级数 $E(s)$ 也是 e^{Ts} 的有理函数形式。式 (7-1) 与连续信号 $e(t)$ 的拉氏变换类似。 $E^*(s)$ 的初始值通常规定采用 $e(0^+)$ 。

(2) 采样信号的频谱

研究频谱的目的：找出采样信号和连续信号之间的相互联系。如图 7-4 所示是采样信号频谱。

图 7-4 表明：1) 采样信号 $e^*(t)$ 的频谱 $|E(j\omega)|$ 是以 ω_s 为周期的无穷多个频谱之和。2) $n=0$ 的频谱称为采样频率主分量（基带），其余频谱成为采样频谱的补分量，是由于采样引起的高频频谱。

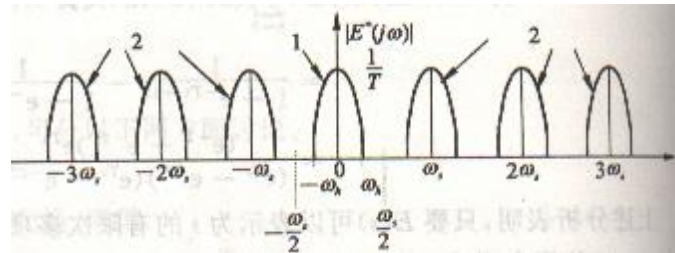


图 7-4 采样信号频谱

图 7-4 说明：频谱不发生混叠的条件是 $\omega_s \geq 2\omega_h$

香农采样定理

若被采样的连续信号 $x(t)$ 的频谱有限宽，且最大宽度为 ω_h ，果采样角频率

$\omega_s > 2\omega_h$ ，并且采样后再加理想滤波器，则连续信号 $x(t)$ 可以不失真的恢复出来。

4、信号保持

什么是保持器？在采样控制系统中，把脉冲序列转变为连续信号的过程称为保持过程。实现保持的装置称为保持器。保持器的数学作用：即解决各离散采样点之间的插值问题。

零阶保持器的传递函数为 $G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$ 。如图 7-5 所示是零阶保持器的输出特性

性。零阶保持器是一种按常值外推的保持器它把前一采样时刻 nT 的采样值一直保持到下一个采样时刻 $(n+1)T$ 到来之前。零阶保持器的采样信号是阶梯信号。取阶梯信号的中点连接起来，则可以得到与连续信号形状相同但时间滞后 $T/2$ 的响应 $e(t-T/2)$

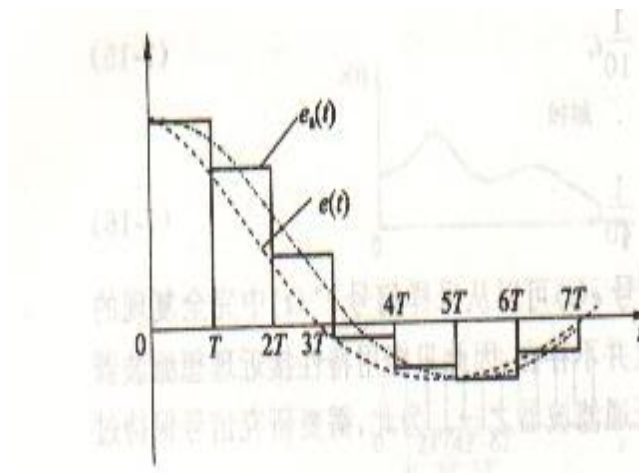


图 7-5 零阶保持器的输出特性

7-3 离散系统的数学模型

离散系统的数学定义

$$c(n) = F[r(n)]$$

其中, $r(n)$ 为系统在 $t=nT$ 时的输入序列, $c(n)$ 为系统在 $t=nT$ 时的输出序列差分方程。 T 为采样周期。

若上式变换关系为线性, 则称为线性离散系统; 反之, 称为非线性离散系统。

数学模型的三种表达形式: 差分方程, 脉冲传递函数, 离散状态空间法。

线性离散系统满足叠加性和齐次性; 线性定常离散系统输入输出不随时间而改变的线性离散系统

1、脉冲传递函数

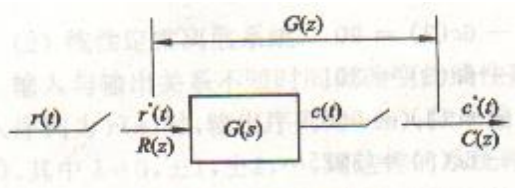


图 7-6 开环离散系统

- (1) 定义: 设开环离散系统如图 7-6 所示, 如果系统的初始条件为零, 输入信号为 $r(t)$, 采样后 $r^*(t)$ 的 Z 变换函数为 $R(z)$, 系统连续部分的输出为 $c(t)$, 采样后 $c^*(t)$ 的 Z 变换函数为 $C(z)$, 则线性定常离散系统的脉冲传递函数为系统输出采样信号的 Z 变换与输入采样信号的 Z 变换之比, 记

$$\text{作: } G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

- (2) 脉冲传递函数的求法。先求 $G(s)$ 的拉氏反变换, 得到脉冲过渡函数 $K(t)$, 然后再对 $K(t)$ 作 Z 变换, 即可得脉冲传递函数 $G(z)$ 。也可直接由 $G(s)$ 查表得到 $G(z)$, 记作 $G(z) = Z[G(s)]$ 。

4、开环系统脉冲传递函数

开环离散系统的脉冲传递函数求解与串联环节之间的采样开关有关。

串联环节之间有采样开关的情况: 有理想采样器隔开的 n 个线性连续环节串联的脉冲传递函数等于 n 个环节 z 变换的乘积。

串联环节之间没有采样开关的情况: 没有理想采样器隔开的 n 个线性连续环节串联的脉冲传递函数等于 n 个环节乘积后的 z 变换。

有零阶保持器的开环系统脉冲传递函数: 此时, 开环系统脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{G_p(s)}{s} \right]$$

5、闭环系统脉冲传递函数

求闭环系统脉冲传递函数, 一般先设第一个采样开关两侧的信号为 $E(z)$, 然后根据信号在前向通路及回路中的流动形式, 列写出一系列方程, 根据这些方程即可解得闭环系统的脉冲传递函数。

7-4 离散系统的稳定性与稳态误差

1、 离散系统稳定的条件

(1) 时域中离散系统稳定的充要条件

当且仅当描述离散系统的差分方程所有的特征根的模 $|a_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n$ ，则相应的线性定常离散系统是稳定的。

(2) z 域中离散系统稳定的充要条件

当且仅当描述离散特征方程的全部特征根均分布在 z 平面上的单位圆内，或者所有特征根的模均小于 1，即 $|z_i| < 1, (i = 1, 2, \dots, n)$ ，则相应的线性定常离散系统是稳定的。

2、 离散系统的稳定性判据

ω 变换与劳斯判据。如果令 $z = \frac{\omega+1}{\omega-1}$ 代入离散系统的闭环系统方程，并整理得到关于 ω 的方程。于是可以利用劳斯判据离散系统的稳定性。

3、 离散系统的稳态误差

(1) 终值定理法

首先判断系统是否稳定，只有稳定才能计算稳态误差。然后求误差脉冲传递函数

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1+G(z)}$$

用终值定理计算稳态误差

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)R(z)}{z[1+G(z)]}$$

(2) 静态误差系数法

可直接利用开环系统的脉冲传递函数来计算稳态误差。

首先判断系统是否稳定，只有稳定才能计算稳态误差。然后确定系统的型别，求系统的静态误差系数：

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1+G(z)], K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z), K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)$$

如表 7-1 求系统的稳态误差。

系统型别	位置误差 $r(t) = 1(t)$	速度误差 $r(t) = t$	加速度误差 $r(t) = \frac{1}{2}t^2$
0 型	$\frac{1}{K_p}$	∞	∞
I 型	0	$\frac{T}{K_v}$	∞
II 型	0	0	$\frac{T^2}{K_a}$
III 型	0	0	0

表 7-1 单位反馈离散系统的稳态误差