第七章 一阶电路和二阶电路的时域分析

章节重点

过渡过程产生的原因

时间常数的物理意义

换路　一阶电路 二阶电路 零输入响应 零状态响应 全响应 强制分量 自由分量 稳态分量 暂态分量 阶跃响应　冲激响应

基本分析方法

时域：经典法、三要素法

叠加积分法（卷积积分公式）

状态方程

7.1 动态电路的方程及其初始条件

1. 概述

动态电路

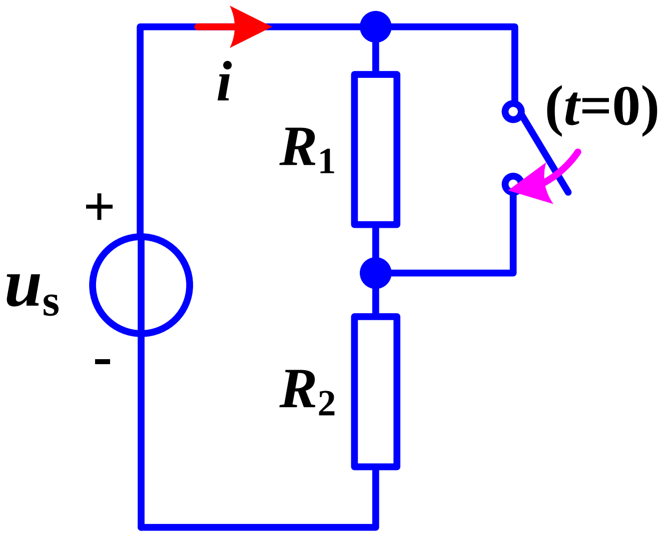
含有动态元件（电容和电感）的电路称动态电路。

特点

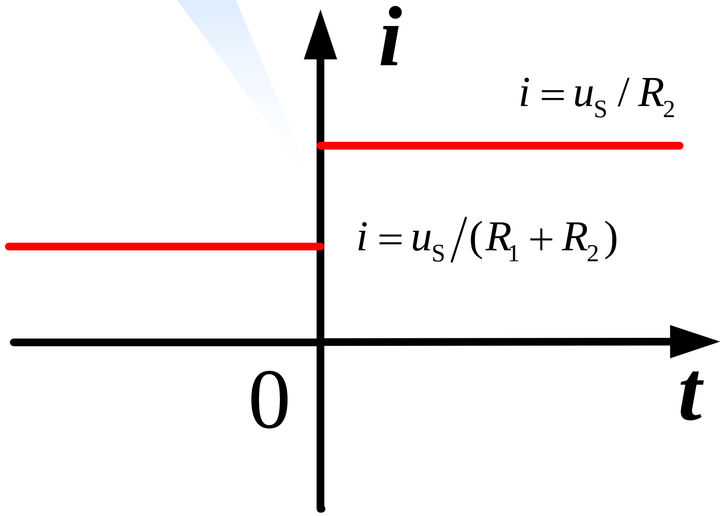
当动态电路的结构或元件的参数发生改变时（换路），需要经历一个变化过程才能达到新的稳定状态。这个变化过程称为电路的过渡过程。

动态电路的稳态和暂态

电阻电路



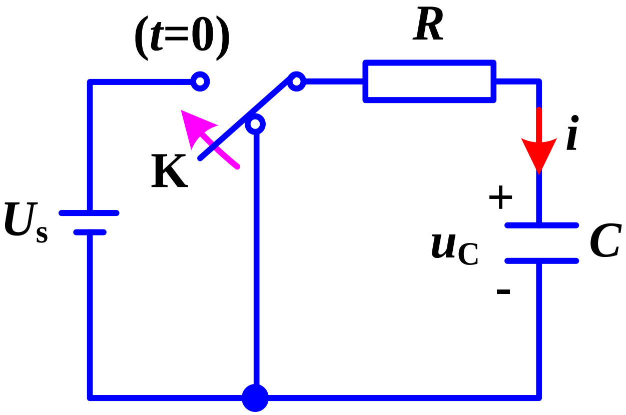
过渡期为零



电容电路

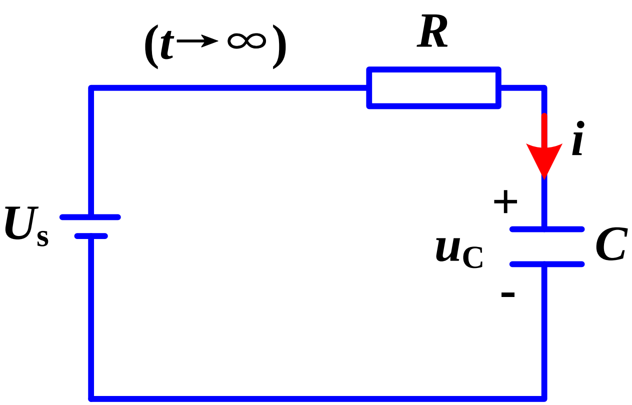
K未动作前，电路处于稳定状态

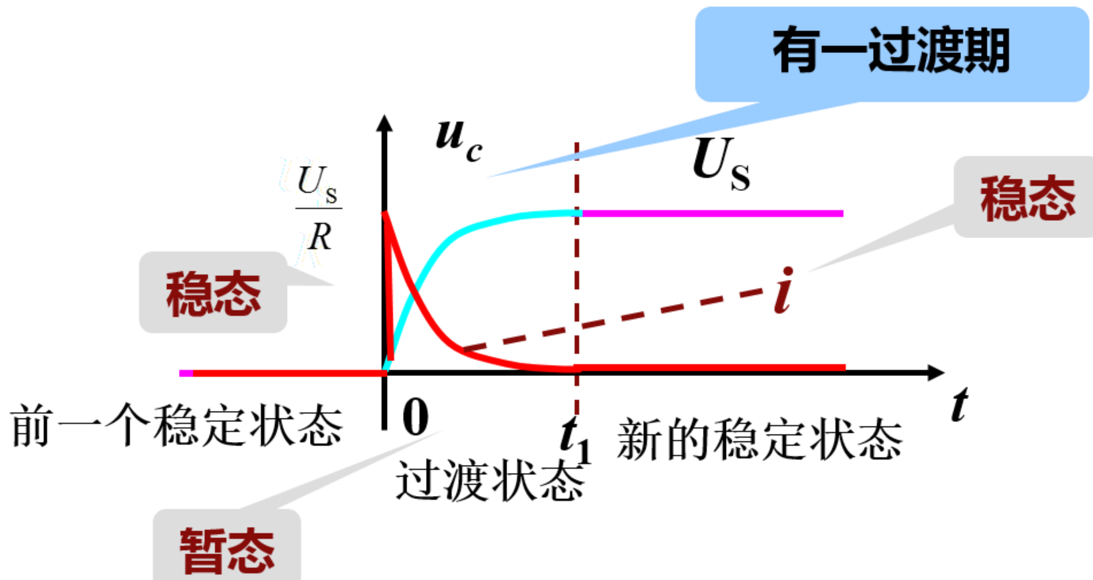
$$i = 0 \ , \quad u_C = 0$$



K接通电源后很长时间，电容充电完毕，电路达到新的稳定状态

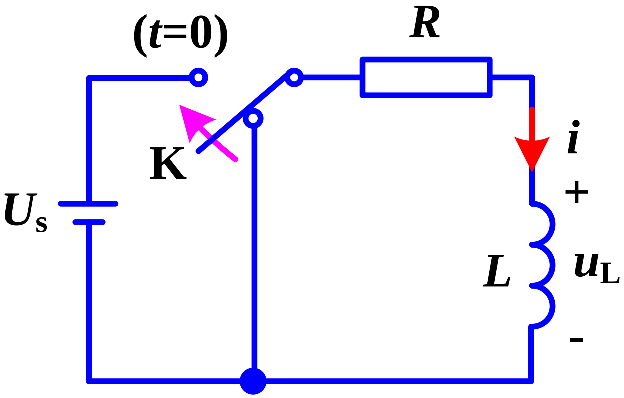
$$i = 0 \ , \quad u_C = U_s$$





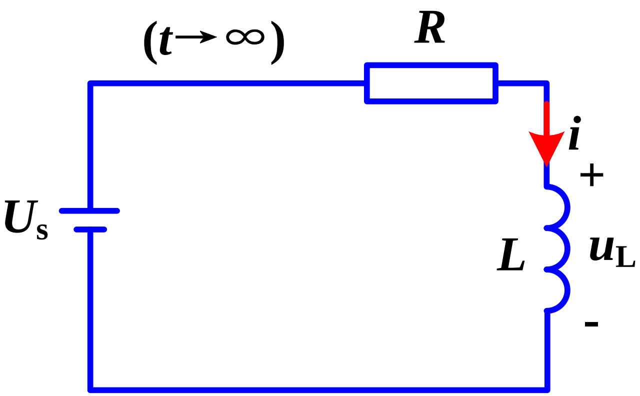
电感电路

K未动作前，电路处于稳定状态

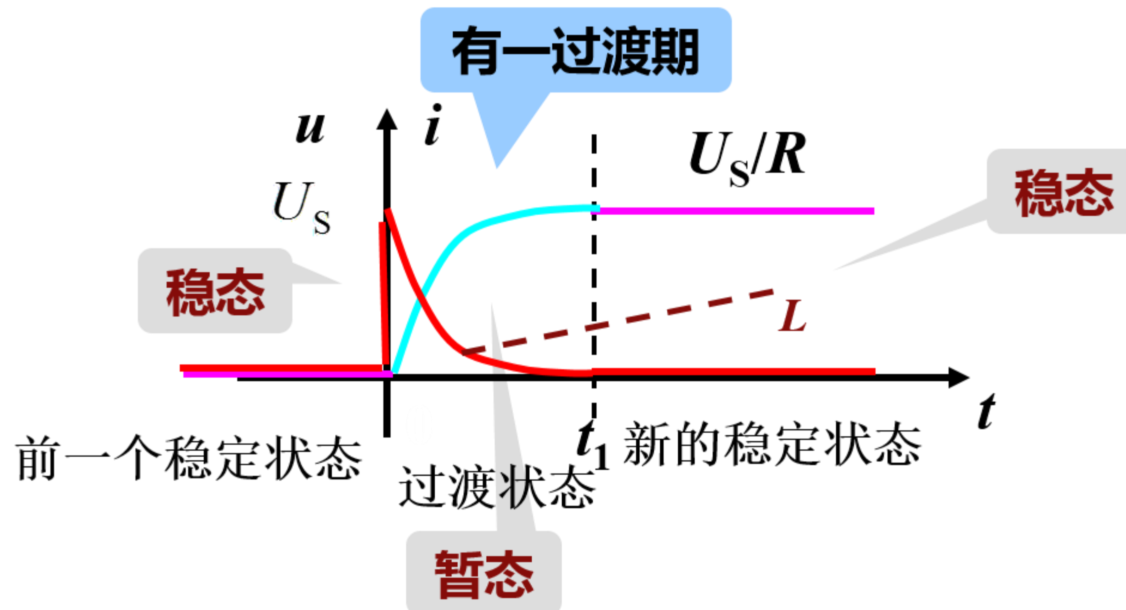


$$i = 0\ ,\quad u_L = 0$$

K接通电源后很长时间，电路达到新的稳定状态，电感视为短路



$$u_L = 0,\quad i = U_S / R$$



过渡过程产生的原因

电路内部含有储能元件L、C，电路在换路时**能量分配发生改变**，而能量的储存和释放都需要一定的时间来完成，也就是说能量的变化是渐变的过程，不能突变。因而产生过渡过程。

$$p=\frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \Delta t \to 0 \qquad p \to \infty$$

电容的电场能量 $$W_C=\frac{1}{2}Cu_C^2=\frac{1}{2}qu_C$$

电感的磁场能量 $$W_L=\frac{1}{2}Li_L^2=\frac{1}{2}\psi_L i_L$$

因为能量不能够突变，所以u_C，i_L不能够跃变。

外因：换路

内因：储能元件的存在

7.1 动态电路的方程及其初始条件

研究过渡过程所用定理、方法

基尔霍夫定律

元件方程

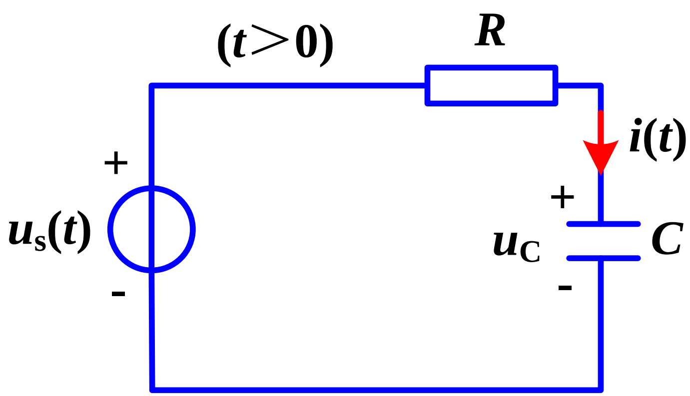
叠加定理 齐次定理 戴维宁定理

线性常系数常微分方程

线性电路暂态的时域分析法——经典法

列方程，求解微分方程

2. 动态电路的方程



应用KVL和电容的VCR得：

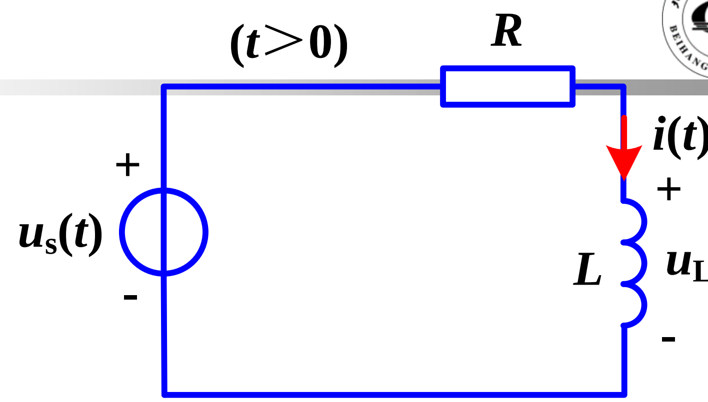
$$Ri + u_C = u_S(t) \qquad i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = u_S(t)$$

若以电流为变量： $$Ri + \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t = u_S(t)$$

$$\Rightarrow \quad R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} = \frac{\mathrm{d}u_S(t)}{\mathrm{d}t} \qquad RC\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i = C\frac{\mathrm{d}u_S(t)}{\mathrm{d}t}$$

应用KVL和电感的VCR得：



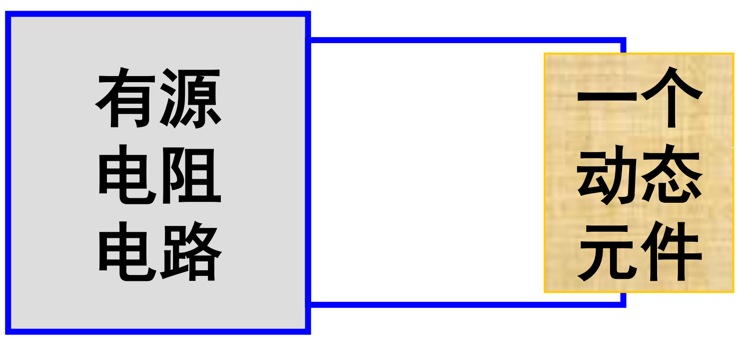
$$Ri+u_L=u_S(t) \qquad u_L=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$Ri+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=u_S(t)$$

若以电感电压为变量：

$$\frac{R}{L}\int u_L\,\mathrm{d}t+u_L=u_S(t)$$

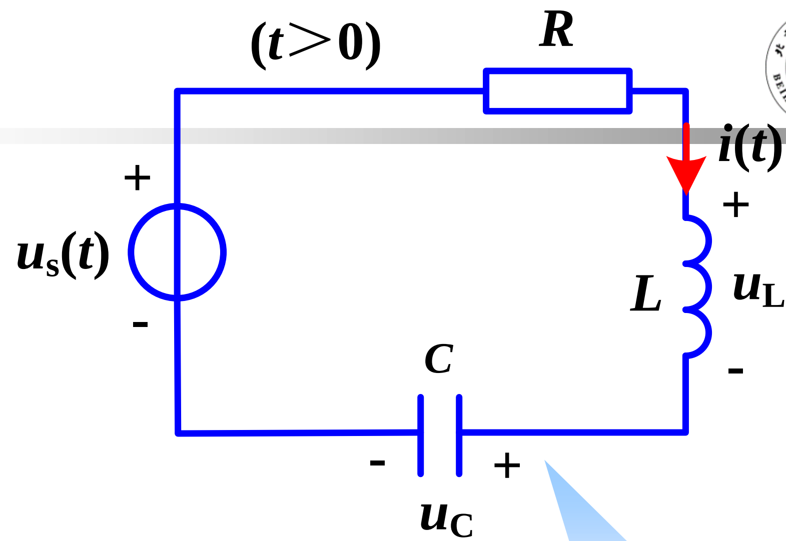
$$\frac{R}{L}u_L+\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u_S(t)}{\mathrm{d}t} \qquad Ru_L+L\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}u_S(t)}{\mathrm{d}t}$$



一阶电路

$$Ri + u_L + u_C = u_S(t)$$

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \qquad u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



$$\Rightarrow \quad LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = u_S(t)$$

二阶电路

若以电流为变量： $Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t = u_S(t)$

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C}i = \frac{\mathrm{d}u_S(t)}{\mathrm{d}t} \qquad LC\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i = C\frac{\mathrm{d}u_S(t)}{\mathrm{d}t}$$

结论：（1）描述动态电路的时域电路方程不为代数方程；而是微分方程；

（2）动态电路方程的阶数小于、等于电路中动态元件的个数；

一阶电路 → 描述电路的方程是一阶线性微分方程，一般情况下一阶电路中只有一个动态元件，

$$a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=e(t)\quad t\geq 0$$

二阶电路 → 描述电路的方程是二阶线性微分方程，一般情况下二阶电路中有二个动态元件，

$$a_2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=e(t)\quad t\geq 0$$

高阶电路 → **电路中有多个动态元件，描述电路的方程是高阶微分方程。**

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = e(t) \quad t \geq 0$$

动态电路的分析方法

（1）根据KVL、KCL和VCR建立微分方程

（2）求电路的初始状态

要点1：求初值

（3）求解微分方程

$$a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=e(t)\quad t\geq 0$$

时域分析法

经典法　三要素法　卷积积分法

变换域分析法

工程中高阶微分方程应用计算机辅助分析求解。

3. 换路

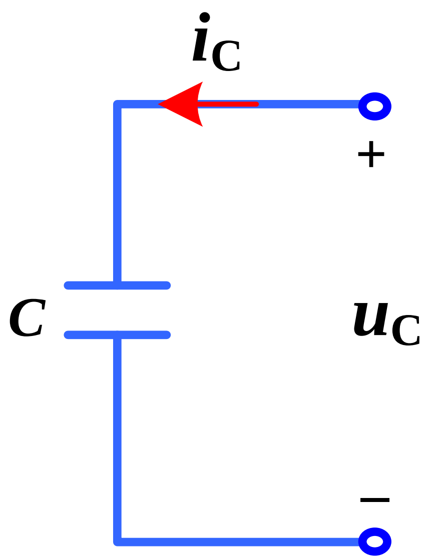
改变一个电路工作状态的动作。
电路结构或元件的参数发生变化。

$\begin{cases}\text{支路接入或断开} \\ \text{电路参数变化}\end{cases}$

包括以下三种情况:
①电源的突变 (电源接入或断开)
②电路的突然改接
③电路参数的突变

发生换路时　$t=0$
换路前一瞬间　$t=0_-$
换路后一瞬间　$t=0_+$

4. 电容C上的换路定理



对于线性定常电容，在任意时刻t有

$$u_C(t)=u_C(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

令t_0=0– t=0+

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_C(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

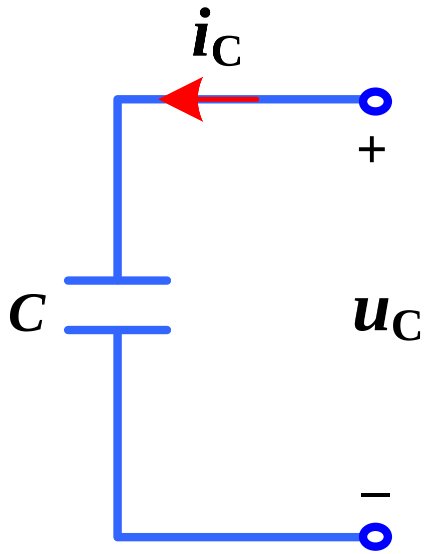
$$若 i_C(0)\neq\infty, 则 \int_{0_-}^{0_+} i_C(\xi)\,\mathrm{d}\xi=0$$

$$则 u_C(0_+)=u_C(0_-)$$

$$\because q=Cu$$

$$\therefore q(0_+)=q(0_-)$$

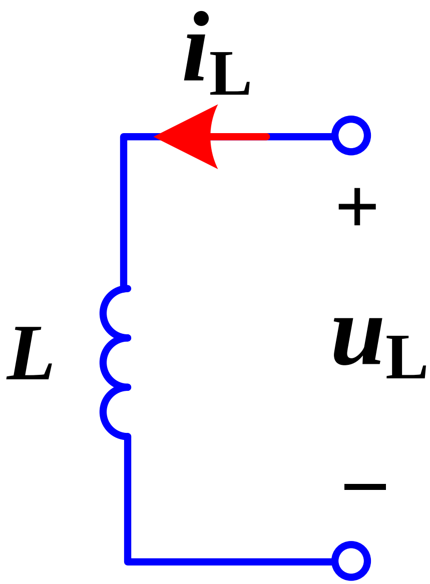
7.1 动态电路的方程及其初始条件



$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

$$q(0_+) = q(0_-)$$

5. 电感L上的换路定理



对于线性定常电感，在任意时刻t，有

$$i_L(t)=i_L(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u_L(\xi)\,d\xi$$

令$t_0=0_-$　$t=0_+$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)+\frac{1}{L}\int_{0-}^{0+}u_L(\xi)\,d\xi$$

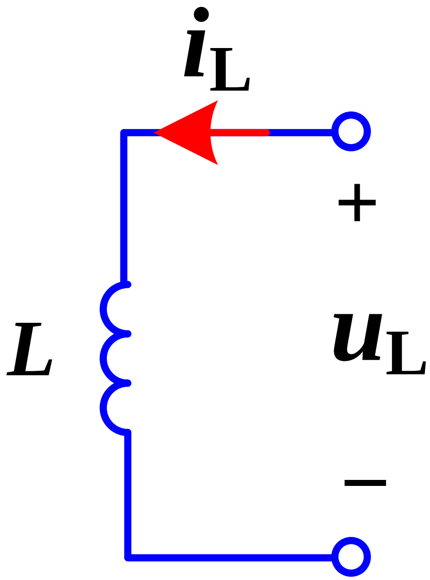
若$u_L(0)\neq\infty$，则$\int_{0-}^{0+}u_L(\xi)\,d\xi=0$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)$$

$$\because \psi_L=Li$$

$$\therefore \psi_L(0_+)=\psi_L(0_-)$$

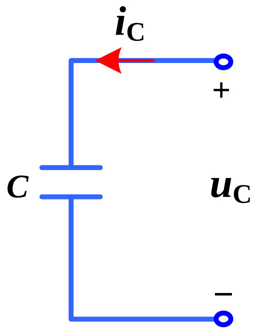
7.1 动态电路的方程及其初始条件



$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

$$\psi_L(0_+) = \psi_L(0_-)$$

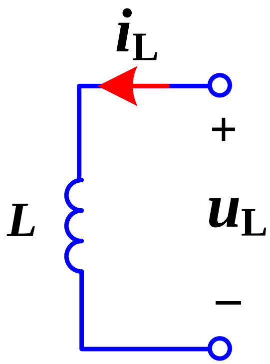
换路定理



$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

$$q(0_+) = q(0_-)$$

换路瞬间，若电容电流保持为有限值，则电容电压（电荷）换路前后保持不变。



$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

$$\psi_L(0_+) = \psi_L(0_-)$$

换路瞬间，若电感电压保持为有限值，则电感电流（磁链）换路前后保持不变。

6. 动态电路的初始参数的求解方法

动态电路独立初始条件为电容电压 $u_C(0\text{-})$ 和电感电流 $i_L(0\text{-})$，确定其它变量初始值的方法、步骤:

① 由换路前状态，求出 $u_C(0_-), i_L(0_-)$，根据换路定理求其0_+时刻参数 $u_C(0_+), i_L(0_+)$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$
$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

② 作0_+ 时刻等效电路

在0_+ 时刻，电容用电压源替代其值为$u_c(0_+)$;

电感用电流源替代其值为$i_L(0+)$;

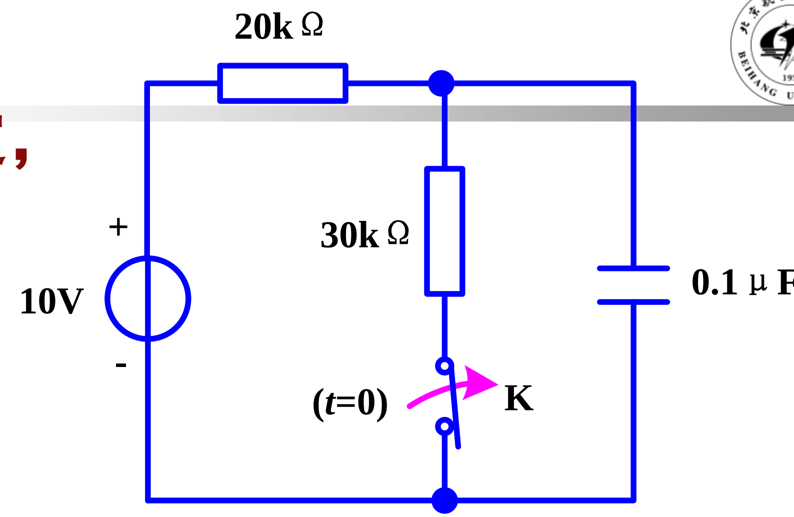
独立电源取其$t=0_+$时的值

开关位于换路后状态

③ 根据0_+等效电路，求出各电压、电流的初值。

【例】开关K打开前电路已达稳定，t=0时开关打开。

求：$t=0_+$时刻，各电压、电流值。

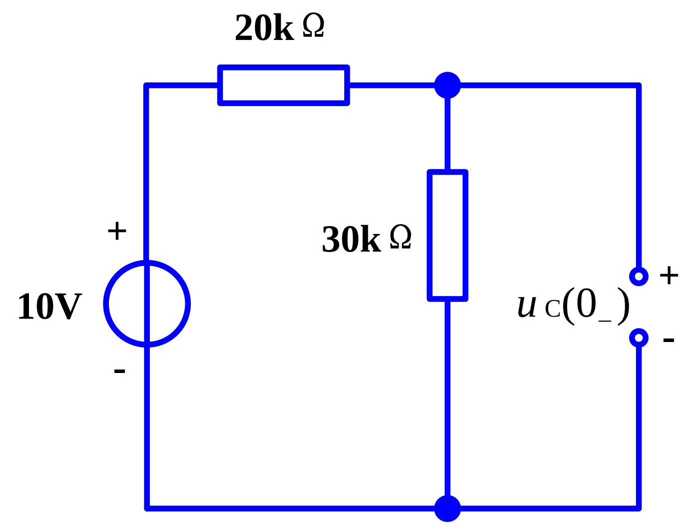


解

(1) 画0_电路，求$u_C(0_-)$

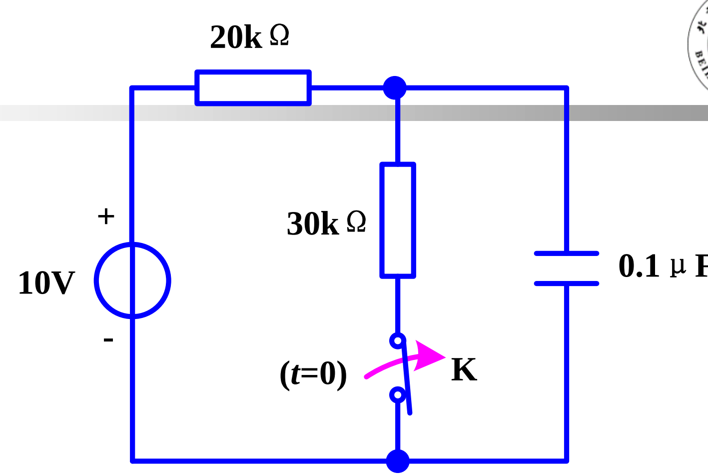
$$u_C(0_-)=\frac{10}{20+30}\times 30=6\,\text{V}$$

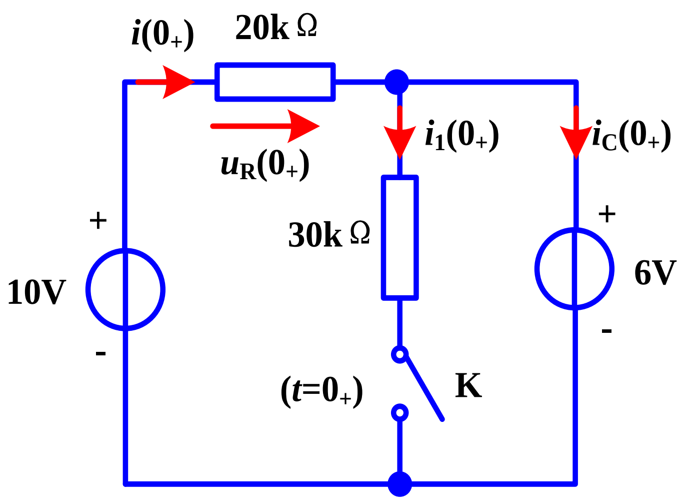
$$\therefore u_C(0_+)=u_C(0_-)=6\text{V}$$



0_电路

(2) 作0_+等效电路





0_+等效电路

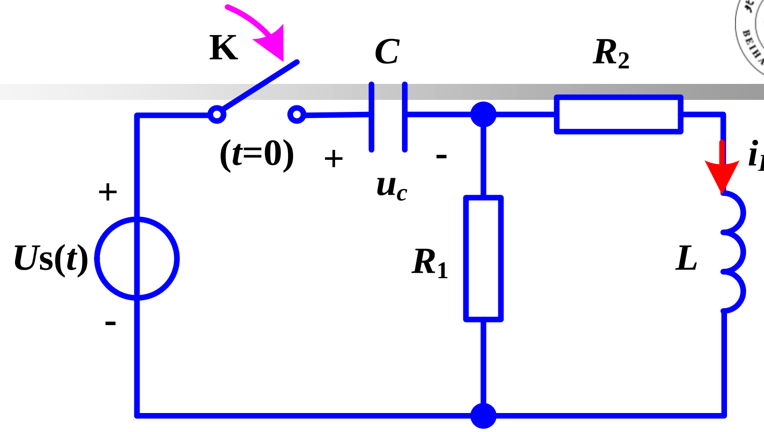
（3）求初值

$$i(0_+) = i_C(0_+) = \frac{10-6}{20} = 0.2\,\text{mA}$$

$$i_1(0_+) = 0$$

$$u_R(0_+) = 20 \times 0.2 = 4\,\text{V}$$

【例】已知：开关K闭合前电容和电感无贮能，t=0时K闭合。求：$t=0_+$时，各元件上电压、电流。



解 (1) 画0_电路，求$u_C(0_-)$和$i_L(0_-)$

$$u_C(0_-) = 0\,\text{V}$$

$\therefore$由换路定理

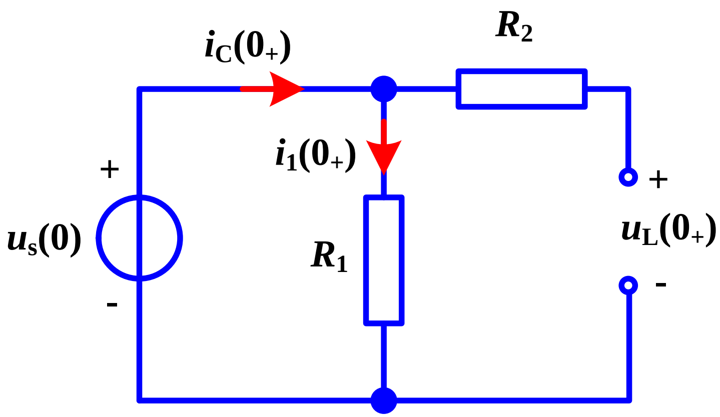
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0\,\text{V}$$

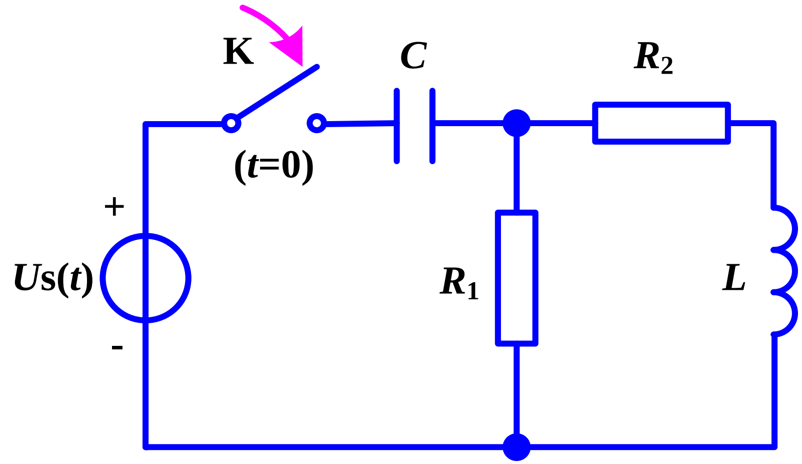
$$i_L(0_-) = 0\,\text{A}$$

$\therefore$由换路定理

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0\,\text{A}$$

(2) 作0_+等效电路





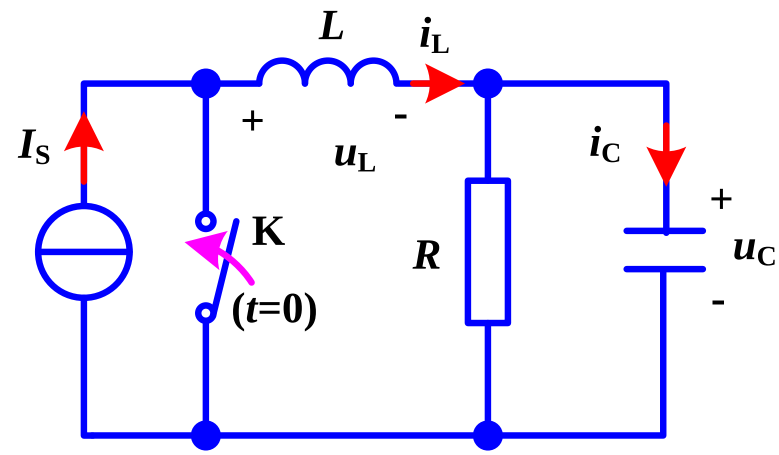
(3) 求初值

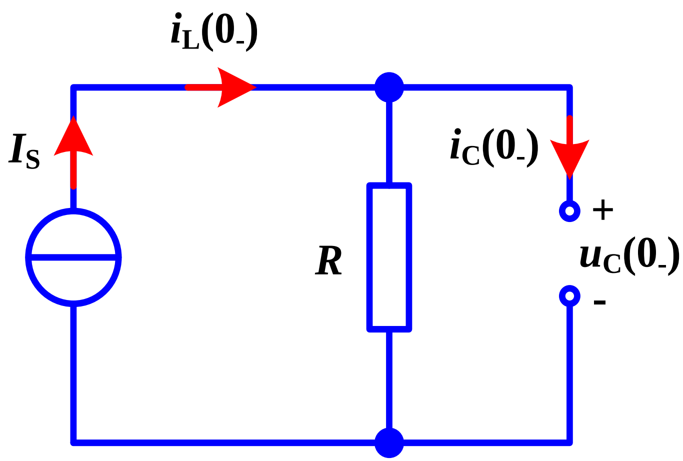
$$i_C(0_+) = i_1(0_+) = \frac{u_S(0)}{R_1}$$

$$u_L(0_+) = u_S(0)$$

【例】求 $u_C(0_+), i_L(0_+)$，$i_C(0_+), u_L(0_+)$，$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{0+}, \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0+}$

解 (1) 画0_电路，求i_L和u_C



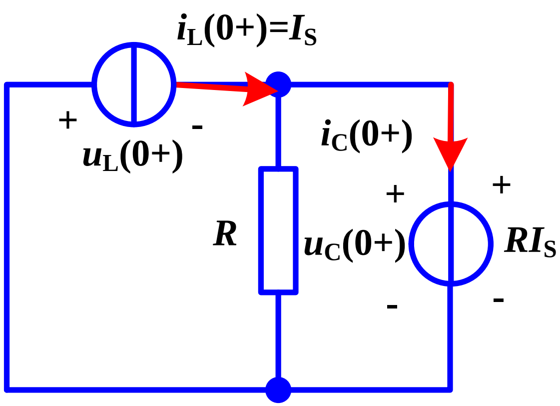


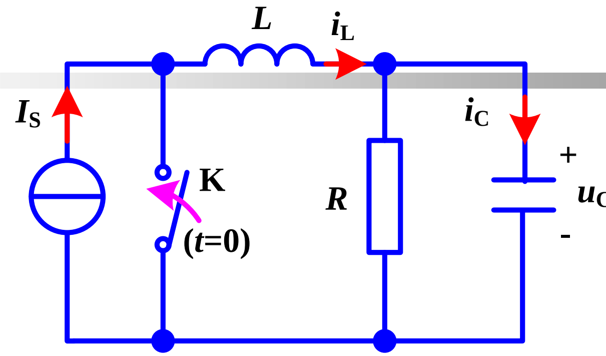
由0_电路得：

$i_L(0_-) = I_S$　　　　$i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_S$

$u_C(0_-) = RI_S$　　　　$u_C(0_+) = u_C(0_-) = RI_S$

(2) 画0_+电路





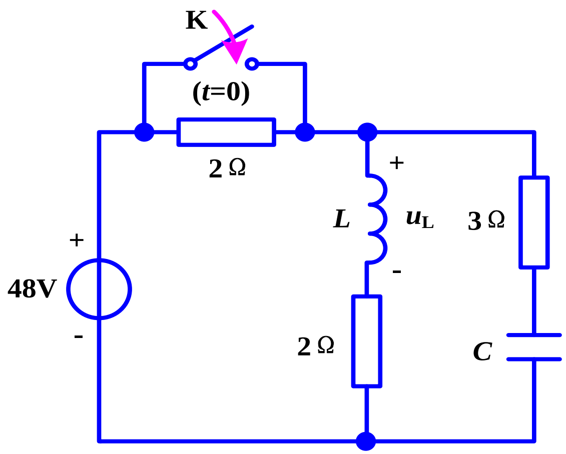
(3) 求0_+参数

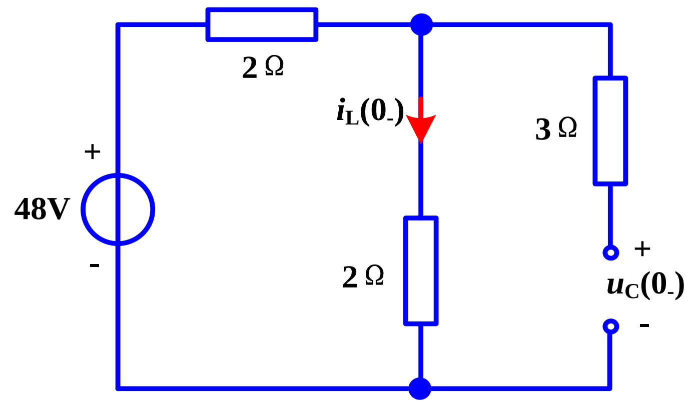
由0_+电路得：

$$i_C(0_+) = I_S - \frac{RI_S}{R} = 0 \qquad u_L(0_+) = -RI_S$$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{0+} = \frac{1}{C} i_C(0+) = 0 \qquad \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0+} = \frac{1}{L} u_L(0+) = -\frac{RI_S}{L}$$

【例】求K闭合瞬间各支路电流和电感电压。





解　**(1) 画0_电路，求i_L或u_C**

由0_电路得：

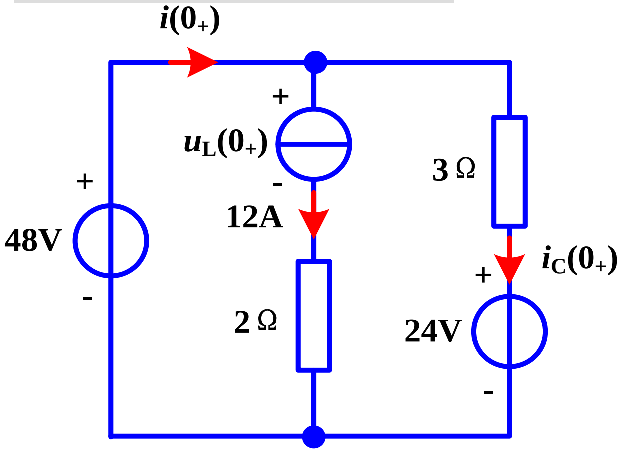
$$i_L(0_-) = 48/4 = 12\,\text{A}$$

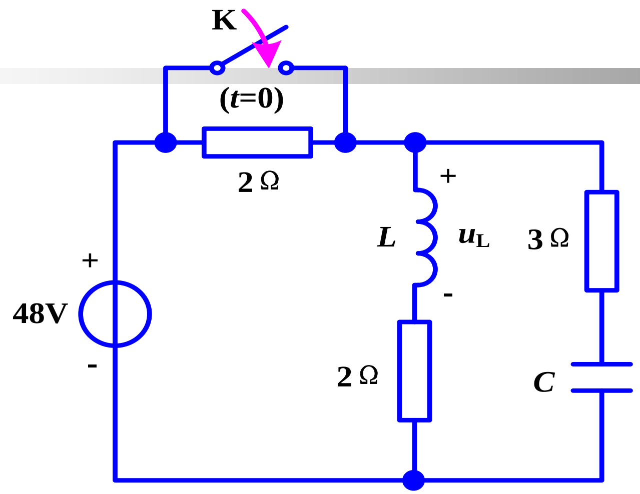
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 12\,\text{A}$$

$$u_C(0_-) = 2 \times 12 = 24\,\text{V}$$

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = 24\,\text{V}$$

(2) 画0_+电路





(3) 求0_+参数

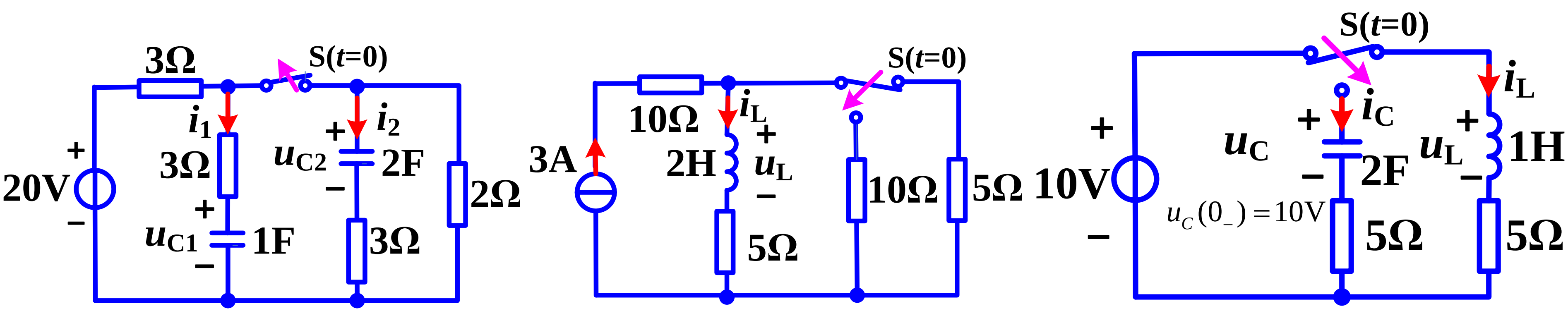
由0_+电路得：

$$i_C(0_+) = (48 - 24)/3 = 8\,\text{A}$$

$$i(0_+) = 12 + 8 = 20\,\text{A}$$

$$u_L(0_+) = 48 - 2 \times 12 = 24\,\text{V}$$

【7-1】题图所示各电路中开关S在t=0时动作，试求各电路在$t=0_+$时刻储能元件上的电压、电流。



(a) (b) (c)

作业

【7-2】如图所示，开关动作前电路已处于稳定状态，t=0时开关S合上，求$u_C(0_+)$，$i_L(0_+)$，$\left.\dfrac{du_C}{dt}\right|_{0_+}$ 和 $\left.\dfrac{di_L}{dt}\right|_{0_+}$。