同济大学课程考核试卷（A 卷）
2007—2008 学年第一学期

命题教师签名：　　　　　　　　　　审核教师签名：

课号：122009　　　课名：线性代数（2 学分）　　　考试考查：考查

此卷选为：期中考试( )、期终考试(✓)、重考( )试卷

年级____ 专业__________ 学号________ 姓名________ 任课教师________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

（注意：本试卷共八大题，3 大张，满分 100 分．考试时间为 120 分钟．要求写出解题过程，否则不予计分）

一、(18 分) 填空题：

1、 4 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，矩阵 $B=(\alpha_1,3\alpha_2-\alpha_4,2\alpha_3+5\alpha_4,\alpha_4)$，已知 $|A|=2$，则 $|B|=$__________________.

2、 设 8 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 解空间的维数是 5，则 $R(A)=$__________.

3、 3 阶方阵 A 的特征值为 −1，1，3，则行列式 $|2A^{-1}+3E+A^2|=$________________.

4、 设向量 $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\3\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}2\\-1\\x\\3\end{pmatrix}$ 正交，则 $x=$______________.

5、 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1x_2+x_1x_3-3x_2x_3+2x_3^2$ 的矩阵为________________________.

6、 如果矩阵 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\2 & k & 4\\k & 2 & -4\end{pmatrix}$ 的秩为 1， 那么 $k=$______________________.

二、(10 分) 计算行列式

$$\begin{vmatrix}a & -1 & 0 & 0\\0 & a & -1 & 0\\0 & 0 & a & -1\\4 & -3 & -2 & 1\end{vmatrix}$$

三、（10分）已知矩阵$\boldsymbol{X}$满足$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{X}$，求$\boldsymbol{X}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 5 & -3\end{pmatrix}.$$

四、(14 分) 讨论 λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 4 \\ -x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ （1）有唯一解？（2）有无穷多解？（3）无解？并在有无穷多解时，用对应的齐次线性方程组的基础解系表示其通解.

五、(10 分) 已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -18 \\ 15 \\ 22 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$,

求出它的一个最大无关组并用该最大无关组表示其余向量.

六、(16分)　　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵，并写出对角阵

七、（12 分）设矩阵 $A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$. a_1,a_3 是 A 的列向量组的最大无关组，并且 $a_2=2a_1-3a_3$，$a_4=-a_1+a_3$；又：向量 $b=a_1+2a_3-a_4$. 求方程 $Ax=b$ 的通解.

八、(10分)(1) 证明:若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆阵,则伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是可逆阵,并求它的逆 $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}$;

(2) 设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关,问常数 s,t 满足什么条件时,向量组:

$$\boldsymbol{b}_1=s\,\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2,\quad \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3,\quad \boldsymbol{b}_3=t\,\boldsymbol{a}_3+3\boldsymbol{a}_1$$ 也线性无关.