2005年试题

一．选择题（每题3分，共33分）

1．一个向量顺时针旋转$\frac{\pi}{3}$，向右平移3个单位，再向下平移1个单位后对应的复数为$1-\sqrt{3}i$，则原向量对应的复数是（ A ）

（A）2　　（B）$1+\sqrt{3}i$　　（C）$\sqrt{3}-i$　　（D）$\sqrt{3}+i$

2．设$f(z)=u+iv$在区域D内解析，则下列函数中在D内解析的是（ C ）

（A）$f(\bar{z})$　　（B）$\overline{f(z)}$　　（C）$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$　　（D）$\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial x}$

3．幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(\cos(in))\cdot z^n$的收敛半径是（ D ）

$\cosh = \frac{e^n+e^{-n}}{2}$

（A）0　　（B）1　　（C）e　　（D）e^{-1}

4．积分$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2z+4}=$（ D ）

（A）$2\pi i$　　（B）$-2\pi i$　　（C）1　　（D）0

5．设c是$z=(1+i)t$，$1\le t\le 2$的线段，则$\int_c \arg z dz=$（ C ）

（A）$\frac{\pi}{4}$　　（B）$\frac{\pi}{4}i$　　（C）$\frac{\pi}{4}(1+i)$　　（D）$1+i$

6．$\lim\limits_{z\to z_0}\frac{\mathrm{Im}(z)-\mathrm{Im}(z_0)}{z-z_0}$（ D ）

（A）等于i　　（B）等于$-i$　　（C）等于0　　（D）不存在

7．设c为任意常数，那么由调和函数$u=x^2-y^2$确定的解析函数$f(z)=u+iv$是（ C ）

（A）iz^2+c　　（B）$i\bar{z}^2+c$　　（C）z^2+c　　（D）$\bar{z}^2+c$

8．下列级数中，绝对收敛的是（ D ）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{i}{n})$　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n}]$　　（C）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}$　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{2^n}$

9．$z=1$ 是函数 $(z-1)\square\sin\dfrac{1}{z-1}$ 的（ D ）

（A）可去奇点　　（B）一级极点　　（C）一级零点　　（D）本性奇点

10．设 $\mathrm{F}[f(t)]=F(\omega)$，则 $\mathrm{F}[(t-2)f(t)]=$（ C ）

(A) $F'(\omega)-2F(\omega)$　　(B) $-F'(\omega)-2F(\omega)$

(C) $iF'(\omega)-2F(\omega)$　　(D) $-iF'(\omega)-2F(\omega)$

11．设 $f(t)=e^{-t}u(t-1)$，则 $L[f(t)]=$（ B ）

先位移

（A）$\dfrac{e^{-(s-1)}}{s-1}$　　（B）$\dfrac{e^{-(s+1)}}{s+1}$ ✓　　（C）$\dfrac{e^{-s}}{s-1}$　　（D）$\dfrac{e^{-s}}{s+1}$

二．填空题（每空 3 分，共 33 分）

1．设 $F(z)=\dfrac{1}{4}z^4-(1-i)z$，则 $F'(z)=0$ 的所有根为 $\sqrt[6]{2}e^{-\frac{\pi}{4}i+2k\pi i}$，$\sqrt[6]{2}e^{\frac{5}{12}\pi i+2k\pi i}$，$\sqrt[6]{2}e^{\frac{13}{12}\pi i+2k\pi i}$

2．设 $z=\dfrac{1+i}{1-i}$，$z^{100}+z^{75}+z^{50}$ 的值等于 $-i$.

3．$\ln(1-i)$ 的主值为 $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}i$.

4．设 $f(z)=x^2+iy^2$，则 $f'(1+i)=$ 2 .

5．设 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内是解析的，如果 $u+v$ 是实常数，那么 $f(z)$ 在 D 内是 常数函数 .

6．设 $f(z)=\oint\limits_{|\xi|=2}\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}\xi)}{\xi-z}d\xi$，其中 $|z|\neq 2$，则 $f'(3)=$ 0 .

7．函数 $\dfrac{1}{1+\cos z}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式中，z^3 项的系数为 0 .

8．已知 tgz 在 $z=0$ 处的泰勒展开式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$，则此幂级数的收敛半径为 $\pi/2$.

9．设 $f(z)=\dfrac{2z}{1+z^2}$，则 $f(z)$ 在扩充复平面上的孤立奇点为 $i,\ -i,\ \infty$，在其孤立奇点处的留数为 $Res[f(z),i]=1$. $Res[f(z),i]=1$ $Res[f(z),\infty]=-2$.

10．已知 $F(s)=\dfrac{2e^{-s}-e^{-2s}}{s}$，则 $L^{-1}[F(s)]=$ $2u(t-1)-u(t-2)$.

三．（8分）求积分 $\oint_{|z|=3}\dfrac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz$。

解：$f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}$. 函数 $f(z)$ 在 $|z|=3$ 内有奇点 $z=1,\ z=-2$.

则有：$\oint_{|z|=3}f(z)dz=2\pi i\cdot Res[f(z),1]+2\pi i Res[f(z),-2]$

$=2\pi i\lim\limits_{z\to1}\left(\dfrac{e^z}{z+2}\right)'+2\pi i\lim\limits_{z\to-2}\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$

$=\dfrac{4}{9}\pi ie+\dfrac{2}{9}\pi ie^{-2}$.

四．（9分）．将 $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z-2)}$ 在 $z=0$ 的适当圆环域内展开成洛朗级数

解：$f(z)$ 在复平面内有两个奇点 $z=-i$，$z=2$.

$f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z-2)}=\dfrac{-2+i}{5}\left(\dfrac{1}{z+i}-\dfrac{1}{z-2}\right)$

① $0<|z|<1$ 时．$\dfrac{1}{z+i}=(-i)\cdot\dfrac{1}{1-(iz)}=(-i)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(iz)^n$.

$\dfrac{1}{z-2}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-(\frac{z}{2})}=-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n$

$\therefore f(z)=\dfrac{-2+i}{5}\left((-i)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(iz)^n-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n\right)$

② $1<z<2$ 时．$\dfrac{1}{z+i}=\cancel{(-i)\dfrac{1}{1-(iz)}}=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1+(\frac{i}{z})}=\dfrac{1}{z}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{i}{z}\right)^n$

$\dfrac{1}{z-2}=-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n$.

$\therefore f(z)=\dfrac{-2+i}{5}\left[\dfrac{1}{z}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{i}{z}\right)^n-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n\right]$

③ $2<z<\infty$. $\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{i}{z})^n$ $\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z})^n$

$\therefore f(z) = -\frac{1+i}{5}\left(\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{i}{z})^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z})^n\right)$

五．（8 分）求函数 $f(t)=e^{-\beta|t|}(\beta>0)$ 的 Fourier 变换，并推证

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}dw=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}。$$

解: $F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta|t|}\cdot e^{-i\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(\beta+i\omega)t}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{(\beta-i\omega)t}dt$

$= -\frac{1}{\beta+i\omega}e^{-(\beta+i\omega)t}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\beta-i\omega}e^{(\beta-i\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0}$

$= \frac{1}{\beta+i\omega} + \frac{1}{\beta-i\omega} = \frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$

而 $f(t) = F^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}\cdot e^{i\omega t}dt = \frac{2\beta}{\pi}\cdot\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega$

$= e^{-\beta|t|}$

$\therefore \int_0^{\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega = \frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}$

六. （8 分）用 Laplace 变换及其逆变换求微分方程

$$ty''+(1-2t)y'-2y=0$$

满足条件 $y(0)=1$，$y'(0)=2$ 的解。

解：两边同时取拉氏变换有：

$$-\frac{d(L[y''])}{ds}+L[y']+2\frac{dL[y]}{ds}-2Y(s)=0.$$

$$\Rightarrow \quad L[y'']=s^2Y(s)-s-2$$

$$L[y']=sY(s)-1$$

$\therefore$ 方程为 $(-s^2Y(s)+s+2)'+[sY(s)-1]+2\cdot[sY(s)-1]'-2Y(s)=0$

$$-2sY(s)-s^2Y'(s)+1+sY(s)-1+2Y(s)+2sY'(s)-2-2Y(s)=0.$$

$$-s^2Y'(s)-sY(s)-2=0.$$

2007年复变试题　　姓 名____________学 号

一．选择题（30 分）

1. 设$z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$，则$z^{66}+2z^{33}-2$的值为（　　）。

A. $-i$；　　B. 1；　　C. i；　　D. -1

2. 方程$\mathrm{Re}(z^2)=1$所代表的曲线是（　　）。

A. 圆周；　　B. 椭圆；　　C. 双曲线；　　D. 抛物线

3．函数$\omega=Lnz$在$z=e^i$处的值为(k为整数)（　　）

A. $(2k\pi+1)i$；　　B. $(2k+1)\pi i$；　　C. $2k\pi i$；　　D. $(2k+\frac{1}{2})\pi i$

4. 设函数$f(z)=u+iv$在区域 D 内解析，则u,v的雅可比（Jacob）矩阵行列式

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=（　　）。$$

A. $|f'(z)|$；　　B. $-|f'(z)|$；　　C. $|f'(z)|^2$；　　D. $-|f'(z)|^2$

5. 设$C:|z|=1$，则$\oint_C \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^3}dz=$（　　）。

A. $-\pi i$；　　B. πi；　　C. 0；　　D. $-2\pi i$

6. 若$c_n=\begin{cases}3^n+(-1)^n, & n=0,1,2,\cdots\\ 4^n, & n=-1,-2,\cdots\end{cases}$，则双边幂级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$的收敛域为（ A ）。

A. $\frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{3}$；　　B. $4<|z|<3$；　　C. $\frac{1}{4}<|z|<+\infty$；　　D. $\frac{1}{3}<|z|<+\infty$

7. 设函数$\frac{ctg\pi z}{2z-3}$在$|z-i|=2$内的奇点个数为（　　）。

A. 1；　　B. 2；　　C. 3；　　D. 4

$F[g(t)] = \frac{F(w)}{iw}$

8. 设$F[f(t)]=F(\omega)$，如果当$t\to+\infty$时，$g(t)=\int_{\infty} f(u)du\to 0$，则

$F[\int_{\infty}^{2t+7}f(u)du]=$（　　）。

$F[g(t)] = \frac{F(w)}{iw}$

$F[g(2t+7)] = \frac{1}{2}F$　　$z(t) = g(2t)$　　$F[z(t+\frac{7}{2})] = e^{\frac{7}{2}iw}\cdot F[z(t)]$

A. $\dfrac{1}{2i\omega}e^{i7\omega}F(\dfrac{\omega}{2})$;　　　　B. $\dfrac{1}{i\omega}e^{i\frac{7}{2}\omega}F(\dfrac{\omega}{2})$;

C. $\dfrac{1}{2i\omega}e^{i\frac{7}{2}\omega}F(\omega)$;　　　　D. $\dfrac{1}{i\omega}e^{i7\omega}F(\omega)$

9. 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}2(t^3+4)\delta(1-t)dt$ 的值为（　　）。

A. $2(t^3+4)$;　　B. 8;　　C. -10;　　D. 10

10. 利用 Laplace 变换的性质，实积分 $\int_0^{+\infty}te^{-at}\sin bt\mathrm{d}t(a>0)=$（　　）。

A. $\dfrac{b^2-a^2}{(a^2+b^2)^2}$;　B. $\dfrac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}$;　C. $\dfrac{2ab}{(a^2+b^2)^2}$;　D. $\dfrac{-2ab}{(a^2+b^2)^2}$

$-\left(\frac{b}{b^2+a^2}\right)'$

二．填空题（21 分）

$z\cdot e^{i\frac{2}{3}\pi}=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

1. 一复数对应的向量按逆时针方向旋转 $\dfrac{2\pi}{3}$ 后对应的复数为 $1+i$，则原复数是__________。

2. 已知 $z=\dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$，则 z 的辐角主值为__________。

3. 函数 $f(z)=x^2+iy^2$，则 $f'(1+i)=$__________。

4. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}[\mathrm{Re}(c_n)]z^n$ 的收敛半径为 R_1 和 R_2，那么 R_1 和 R_2 之间的关系是__________。

5. $F(\omega)=2\cos3\omega$ 的傅氏逆变换 $f(t)$ 为__________。

6. 已知 $F[f(t)]=F(\omega)$，设 $g_1(t)=f(t)*f'(t), g_2(t)=f(t)*f(t+t_0)$，则 $G_1(\omega)=F[g_1(t)]=$__________，$G_2(\omega)=F[g_2(t)]=$__________。

三．判断下列命题的正误，正确的在后面的括号里划√，错误的划×（14 分）。

1. 复变数的指数函数 e^z 是以 $2k\pi$（k 为正整数）为周期的周期函数。（　　）

2. 设 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内是解析函数，如果 u 是实常数，那么 $f(z)$ 在区域 D 内是是常数；如果 v 是实常数，那么 $f(z)$ 在区域 D 内是常数;。（　　）

3. 若 z_0 是函数 $f(z)$ 的奇点，则 $f(z)$ 在 z_0 点不可导。（　　）

不解析

$n \geq 2$

$f(z)=\frac{1}{z^n}$ $n>1$ $\int_{|z|=r} \frac{1}{z^n}\, dz = 0$

4. 被积函数 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析，且沿任何圆周 $C:|z|=r\ (0<r<1)$ 的积分等于零，则 $f(z)$ 在 $z=0$ 处解析。 (X)

$n=2,4,6$

5. 在 $z=0$ 处解析且在 $z_n=\frac{1}{n}$ 处取下列值

$z=\frac{1}{n}$ $f(z)=\frac{1}{n}$

$\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\cdots$ $f(z)=\frac{1}{n}$

的函数 $f(z)$ 是不存在的。 (✓)

6. 设 $f(z)=(z-z_0)^{-m}\varphi(z), \varphi(z)$ 在 z_0 点解析，m 为自然数，则 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点。 ( )

z^2 z^n $+z^4+z^6$

7. 若 $z=0$ 为偶函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点，则 $\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=0$。 (✓)

(偶)

$C_{-1}=0$

$\frac{1}{z}=0$

四．计算题（27 分）

1．求积分 $I=\oint\limits_{|z|=2}\frac{(z^2-9z+8)e^z}{z(z-1)^2}dz$

e^{∞} 不存在

2．函数 $\frac{e^z-1}{z(z-1)^2}$ 在有限复平面有些什么类型的奇点，如果是极点，指出其级数，并求出这些奇点处的留数。

3. 求函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$ 在 $0<|z|<1$ 及 $1<|z-1|<+\infty$ 内的洛朗展式。

4. 利用 Laplace 变换求初值问题 $y''+2y'-3y=e^{-t}, y(0)=0, y'(0)=1$ 的解。

五．证明题（8 分）

已知 $f(t)=\begin{cases}\alpha e^{-\beta t}, t>0\\ 0, t<0\end{cases}(\beta>0)$，证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\begin{cases}\pi e^{-\beta t}, t>0\\ \frac{\pi}{2}, t=0\\ 0, t<0\end{cases}$$ 。

2007—2008年“复变函数及积分变换”考试题（A）答案及评分标准

一．选择题（共30分，每题3分）

1B,2C,3A,4C,5C,6A,7D,8B,9D,10C

二．填空题（共21分，每空3分）

1. $\sqrt{2}e^{-\frac{5}{12}\pi i}$，

2. $\frac{2}{3}\pi$，

3. 2，

4. $R_1 \le R_2$

5. $\delta(t-3)+\delta(t+3)$，

6. $i\omega F^2(\omega)$， $e^{i\omega x_0}F^2(\omega)$．

三．判断题（共14分，每题2分）

1. ×
2. √
3. ×
4. ×
5. √
6. ×
7. √

四．计算题（共27分）

1.（7分）

解：被积函数$\frac{(z^2-9z+8)e^z}{z(z-1)^2}$在$|z|=2$内有两个奇点，$z=0$为一级极点，$z=1$为二级极点。分别以$z=0, z=1$为圆心作两个小圆$C_1:|z|=r_1$，$C_2:|z-1|=r_2$，使它们互不包含互不相交。则

$$I=\oint_{C_1}\frac{\frac{(z^2-9z+8)e^z}{(z-1)^2}}{z}dz+\oint_{C_2}\frac{\frac{(z^2-9z+8)e^z}{z}}{(z-1)^2}dz \qquad \text{------------2 分}$$

$$=2\pi i\cdot 8+2\pi i\left(\frac{(z^2-9z+8)e^z}{z}\right)'\Bigg|_{z=1}$$

$=16\pi i-14\pi ie$ ------------5分（第1个积分2分，第二个积分3分）

2.（7分）

解：令$f(z)=\frac{e^z-1}{z(z-1)^2}$，

因为 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z(z-1)^2}=1$，$z=0$ 为可去奇点，　　　　----------------2 分

$\mathrm{Res}[f(z),0]=0$；　　　　-----------1 分

因为 $z=1$ 是函数 $z(z-1)^2$ 的二级零点，不是函数 e^z-1 的零点，所以 $z=1$ 为函数 $f(z)$ 二级极点。　　　　-------------2 分

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\left(\frac{e^z-1}{z(z-1)^2}(z-1)^2\right)'=1$$　　　　-------------2 分

3.（5 分）

（1）$0<|z|<1$，

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2}(-\frac{1}{1-z})=(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2})(-\sum_{n=0}^{\infty}z^n)=-\sum_{n=0}^{\infty}z^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}z^{n-2}$$　　　　-----------2 分

（2）$1<|z-1|<+\infty$

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\frac{z+1}{z^2}=\frac{1}{z-1}(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2})=\frac{1}{z-1}(\frac{1}{z-1+1}+\frac{1}{z^2})$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-1}}+\frac{1}{z-1}\frac{1}{z^2}$$　　　　-----------1 分

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+2}}+\frac{1}{z-1}(-\frac{1}{z})'$$

$$(-\frac{1}{z})'=(-\frac{1}{z-1+1})'=(-\frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-1}})'=(-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+1}})'$$　　　　--------------2 分

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{1}{(z-1)^{n+2}}$$

原式

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+2}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{1}{(z-1)^{n+3}}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(n-1)\frac{1}{(z-1)^{n+2}}$$

4. 设 $L[y(t)]=Y(s)$，对方程的两边取 Laplace 变换，则得

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2sY(s)-2y(0)-3Y(s)=\frac{1}{s+1}$$　　　　-------------3 分

将初始条件代入整理得 $(s^2+2s-3)Y(s)=\dfrac{s+2}{s+1}$

即 $Y(s)=\dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)(s-1)}=\dfrac{-\frac{1}{4}}{s+1}+\dfrac{-\frac{1}{8}}{s+3}+\dfrac{\frac{3}{8}}{s-1}$ -------------2 分

取其 Laplace 逆变换得

$$y(t)=-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{8}e^{-3t}+\frac{3}{8}e^{t},\quad t>0$$ ---------------3 分

五．证明题（8 分）

证明：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\beta t}e^{-i\omega t}dt=-\dfrac{\alpha e^{-(\beta+i\omega)}}{\beta+i\omega}\Bigg|_0^{+\infty}=\dfrac{\alpha}{\beta+i\omega}$ --------3 分

再取其傅氏逆变换得

在 $f(t)$ 的连续点处

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha}{\beta+i\omega}e^{i\omega t}d\omega=\frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta-i\omega}{\beta^2+\omega^2}(\cos\omega t+i\sin\omega t)d\omega$$

$$=\frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\beta^2+\omega^2}[(\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t)+i(\beta\sin\omega t-\omega\cos\omega t)]d\omega$$ -----------2 分

$$=\frac{\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\beta^2+\omega^2}(\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t)d\omega$$

在 $t=0$ 处

$$\frac{\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\beta^2+\omega^2}(\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t)d\omega=\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}=\frac{\alpha}{2}$$ ------------1 分

因此

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\beta^2+\omega^2}(\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t)d\omega=\begin{cases}\pi e^{-\beta t}, & t>0\\ \frac{\pi}{2}, & t=0\\ 0, & t<0\end{cases}$$ ------------2 分

2008年复变试题共五页

一．选择题（每题3分，共27分）

1．下列函数中，在有限复平面上解析的函数是（ D ）

（A）$x^2-y^2+(2xy-y^2)i$　（B）x^2+y^2i

（C）$2xy+i(y^2-x^2+2x)$　（D）$x^3-3xy^2+3x^2yi-y^3i$

2 设C是从i到$\frac{i}{2}$的直线段，则积分$\int_C e^{\pi z}dz=$（ D ）

（A）$\frac{1}{\pi}$　（B）$-\frac{1}{\pi}$　（C）$-\frac{1}{\pi}(1+i)$　（D）$\frac{1}{\pi}(1+i)$

3．设C为曲线C_1：从－1到1的下半单位圆周和曲线C_2：从1到－1的直线构成的封闭曲线，则$\int_C(\bar{z}-1)dz=$（ A ）

（A）$i\pi$（B）$-i\pi$（C）0（D）π

4．设函数$zctgz$的泰勒展开式为$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\frac{\pi}{2})^n$，那么幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\frac{\pi}{2})^n$的收敛半径

R＝（ C ）

cot

$z\cdot\frac{\cos z}{\sin z}$　$z=k\pi$

$z=k\pi$

（A）$+\infty$（B）1（C）$\frac{\pi}{2}$（D）π

5．设$f(z)=x^2-y^2-x+i(2xy-y^2)$，则$f'(1+\frac{i}{2})=$（ B ）

（A）$1-i$（B）$1+i$（C）$1-\frac{1}{2}i$（D）$1+\frac{1}{2}i$

6．下列命题中，正确的是（ C ）

（A）设v_1,v_2在区域D内均为u的共轭调和函数，则必有$v_1=v_2$

（B）解析函数的实部是虚部的共轭调和函数

（C）设$f(z)=u+iv$在区域D内解析，则$\frac{\partial u}{\partial x}$为$D$内的调和函数　$f'(z)=u_x+iv_x$

（D）以调和函数为实部与虚部的函数是解析函数

$F[g(t)]=\frac{F(s)}{s}$

$g(3t)=\frac{1}{3}F(\frac{s}{3})$

7．设$z=0$为函数$\frac{1-e^z}{z-\sin z}$的m级极点，那么$m=$（ D ）

（A）5（B）4（C）3（D）2

$g(t)=\int_0^t f(t)dt$

8．设函数$f(t)$的拉普拉斯变换$L[f\{t\}]=F(s)$，则$L[\int_0^{3t}f(t)dt]=$（ B ）　$g(3t)=\int_0^{3t}f(t)dt$

（A）$\frac{1}{3s}F(\frac{s}{3})$（B）$\frac{1}{s}F(\frac{s}{3})$（C）$\frac{1}{3s}F(s)$（D）$\frac{1}{s}F(s)$

9．设函数$f(t)$的傅立叶变换为$F[f(t)]=F(\omega)$，则函数$(t-2)f(-2t)$的傅立叶变换为

(B)

（A）$-\frac{i}{4}F'(-\frac{\omega}{2})-F(-\frac{\omega}{2})$ （B）$\frac{i}{4}F'(-\frac{\omega}{2})-F(-\frac{\omega}{2})$

（C）$-\frac{i}{2}F'(-\frac{\omega}{2})-F(-\frac{\omega}{2})$ （D）$\frac{i}{2}F'(-\frac{\omega}{2})-F(-\frac{\omega}{2})$

二．填空题（每题4分，共4 0分）

1.已知 $z=(\frac{2i}{-1+i})(\frac{1-i}{1+i})^5$，则 $z^6=$ $-8i$

2.复数 i^{1+i} 的主值为 $e^{\frac{\pi}{2}(i-1)}$

3．解析函数 $f(z)=u+iv$ 的实部 $u=x^3-3xy^2$，则 $f(z)=$ z^3+ci

4.积分 $\int_{|z|=1}\frac{1}{z+2}dz=$ 0，由此计算 $\int_0^{2\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=$ 0

5.设 $f(z)=\int_{|\zeta|=1}\frac{\cos\zeta}{(\zeta-z)^3}d\zeta$，其中 $|z|\neq 1$，则 $f'(\frac{\pi}{6})=$ $\frac{\pi}{2}i$

$f'''(2)=$ 0

6．$\int_{|z|=3}\frac{1}{z^2(z+1)}dz=$ 0

7.函数 $\frac{e^z}{1-z}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式（至少写到含 z^3 的项）为 $1+2z+z^2+z^3+\cdots$

8.在扩充复平面上函数 $f(z)=\frac{\sin z}{z^4}$ 的孤立奇点为（写出类型） $z=0$（三级极点） $z=\infty$：（本性奇点）

在孤立奇点处留数为 $-\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6}$

9.已知 $F(s)=\frac{e^{-\frac{\pi}{3}s}}{s^2+1}$，则 $F(s)$ 的拉普拉斯逆变换为 $\sin(t-\frac{\pi}{3})\,u(t-\frac{\pi}{3})$

10 设 $F(\omega)=\frac{2}{\omega^2+1}$，则 $F(\omega)$ 的傅立叶逆变换为 $e^{-|t|}$

三．（10分）将函数 $f(z)=\frac{1}{(z-i)z^2}$ 在适当的圆环域内展开成含 $z-i$ 的幂的洛朗级数。

$\frac{1}{z^2}=(-\frac{1}{z})'$

$0<|z-i|<1$

$|z-i|>1$.

四.（9分）计算函数 $f(t)=\begin{cases}0, & -\infty < t < -1\\ -1, & -1 < t < 0\\ 1, & 0 < t < 1\\ 0, & 1 < t < +\infty\end{cases}$ 的傅立叶变换，并计算广义积分

$\int_0^{+\infty}\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega}\sin\omega t\, d\omega$ 的值。

$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$

五.（8分）用拉普拉斯变换及其逆变换求解微分方程组 $\begin{cases}x'(t)+y''(t)=\delta(t-1)\\ 2x(t)+y'''(t)=2u(t-1)\end{cases}$ 满足初始

条件 $\begin{cases}x(0)=y(0)=0\\ y'(0)=y''(0)=0\end{cases}$ 的解。

设 $L[x(t)]=X(s)$.
$L[y(t)]=Y(s)$.

六.（6分）如果 $|z|<1$ 内 $f(z)$ 解析且 $|f(z)|\le\frac{1}{1-|z|}$，证明

$|f^{(n)}(0)|\le 2^{n+1}n!\quad (n=1,2,\cdots)$

答案

一．选择题

1.D 2.D 3.A 4.C 5.B 6.C 7,D 8.B 9.A

二．填空

1. $-8i$ 2. $e^{\frac{\pi}{2}i-\frac{\pi}{2}}$ 3. $z^3+ci,\quad c\in R$

4. 0, 0 5. $\frac{\pi}{2}i$, 0

6. 0 7. $1+z+z^2+z^3+\cdots$

8. $z=0$（三级极点），$z=\infty$ 本性奇点；$\mathrm{Res}[f(z),0]=-\frac{1}{6}, \mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{6}$

9. $\sin(t-\frac{\pi}{3})u(t-\frac{\pi}{3})$

10. $e^{-|t|}$

三．解：$f(z)=\dfrac{1}{(z-i)z^2}$ 奇点为 $z=i, z=0$。

（1）$0<|z-i|<1$

$$f(z)=\frac{1}{(z-i)}\bullet\frac{1}{z^2},$$

$$\frac{1}{z^2}=(-\frac{1}{z})'=-(\frac{1}{z-i+i})'=-(\frac{1}{i(1+\frac{z-i}{i})})'=i(\frac{1}{1-(z-i)i})'$$

$$=i(\sum_{n=0}^{\infty}(z-i)^n i^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}i^{n+1}n(z-i)^{n-1}$$

所以 $f(z)=\dfrac{1}{z-i}\sum_{n=1}^{\infty}i^{n+1}n(z-i)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}i^{n+1}n(z-i)^{n-2}$

（2）$|z-i|>1$，$f(z)=\dfrac{1}{(z-i)}\bullet\dfrac{1}{z^2}$

$$\frac{1}{z^2}=(-\frac{1}{z})'=-(\frac{1}{z-i+i})'=-(\frac{1}{(z-i)}\frac{1}{1+\frac{i}{z-i}})'=-(\frac{1}{(z-i)}\bullet\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{i^n}{(z-i)^n})'$$

$$=-(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{(z-i)^{n+1}})'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n(n+1)(z-i)^n}{(z-i)^{2n+2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-i)^n}{(z-i)^{n+2}}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-i)^n}{(z-i)^{n+3}}$$

四. 解: $F[f(t)]=\int_{-1}^{0}-e^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{1}e^{-i\omega t}dt=\frac{2}{i\omega}-\frac{2\cos\omega}{i\omega}$

$$\therefore f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{2}{i\omega}-\frac{2\cos\omega}{i\omega})e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{i\omega}(1-\cos\omega)(\cos\omega t+i\sin\omega t)d\omega$$

$$=\frac{-i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1-\cos\omega)\cos\omega t+i(1-\cos\omega)\sin\omega t}{\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega t-i(1-\cos\omega)\cos\omega t}{\omega}d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega t}{\omega}d\omega$$

所以 $\int_{0}^{+\infty}\frac{2(1-\cos\omega)\sin\omega t}{\omega}d\omega=\pi f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-1, t=0, 1<t<\infty\\ -\frac{\pi}{2}, & t=-1\\ -\pi, & -1<t<0\\ \pi, & 0<t<1\\ \frac{\pi}{2}, & t=1\end{cases}$

五. 解: 设 $L[x(t)]=X(s), L[y(t)]=Y(s)$, 取 laplace 变换得　　Laplace

$$\begin{cases}sX(s)-x(0)+s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=e^{-s}\\ 2X(s)+s^3Y(s)-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)=\frac{2}{s}e^{-s}\end{cases}$$

将 初 始 条 件 代 入 得

$$\begin{cases}sX(s)+s^2Y(s)=e^{-s}\\ 2X(s)+s^3Y(s)=\frac{2}{s}e^{-s}\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 2X(s)+2sY(s)=\dfrac{2e^{-s}}{s} \\ 2X(s)+s^3Y(s)=\dfrac{2}{s}e^{-s} \end{cases},$$

$(s^3-2s)Y(s)=0, \therefore Y(s)=0;$

$sX(s)=e^{-s} \ \therefore X(s)=\dfrac{e^{-s}}{s};$

$$\therefore \begin{cases} x(t)=u(t-1) \\ y(t)=0 \end{cases}$$

六．证明：

$C: |z|=r$

$$|f^n(0)|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| \le \frac{n!}{2\pi}\oint_C \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}ds \le \frac{n!}{2\pi}\oint_C \frac{1}{1-|z|}\frac{1}{|z|^{n+1}}ds$$

$$=\frac{n!}{2\pi}\frac{1}{(1-r)r^{n+1}}\oint_C ds=\frac{n!}{2\pi}\frac{1}{(1-r)r^{n+1}}2\pi r=\frac{n!}{(1-r)r^n}=\frac{1}{1-r}\left(\frac{1}{r}\right)^n n!$$

令 $r=\dfrac{1}{2}$，即得 $|f^n(0)|\le 2^{n+1}n!$