线性代数复习提纲

第一章 行列式

本章重点是行列式的计算，对于n阶行列式的定义只需了解其大概的意思。要注重学会利用行列式的各条性质及按行（列）展开等基本方法来简化行列式的计算，对于计算行列式的技巧毋需作过多的探索。

1、行列式的性质

（1）行列式与它的转置行列式相等，即$D = D^T$。

（2）互换行列式的两行（列），行列式变号。

（3）行列式中如有两行（列）相同或成比例，则此行列式为零。

（4）行列式的某一行（列）中所有元素都乘以同一数k，等于用数k乘此行列式；换句话说，若行列式的某一行（列）的各元素有公因子k，则k可提到行列式记号之外。

（5）把行列式某一行（列）的各元素乘以同一数k，然后加到另一行（列）上，行列式的值不变。

（6）若行列式的某一行（列）的各元素均为两项之和，则此行列式等于两个行列式之和。

2、行列式的按行（按列）展开

（1）代数余子式：把n阶行列式中(i,j)元a_{ij}所在的第i行和第j列划掉后所剩的$n-1$阶行列式称为(i,j)元a_{ij}的余子式，记作M_{ij}；记$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，则称A_{ij}为(i,j)元a_{ij}的代数余子式。

（2）按行（列）展开定理：

n阶行列式等于它的任意一行（列）的各元素与对应于它们的代数余子式的乘积之和，即可按第i行展开：$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}$，$(i=1,2,\dots,n)$

也可按第j列展开：

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{nj}A_{nj},\ (j=1,2,\dots,n)$$

（3）行列式中任意一行（列）的各元素与另一行的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\dots+a_{in}A_{jn}=0,\ (i\neq j)$；

或$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\dots+a_{ni}A_{nj},\ (i\neq j)$。

3、克拉默法则：$x_i=\dfrac{D_i}{D},\ (i=1,2,\dots,n)$，其中$D_i$是把$D$中第$i$列元素用方程右端项替代后所得到的行列式。

4、常用的行列式

上（下）三角形行列式等于其主对角线上的元素

的乘积；特别，（主）对角行列式等于其对角线上各元素的乘积。学会利用行列式各性质将行列式化为三角形，以方便计算。

第二章 矩阵及其运算

了解矩阵的加法、数乘、矩阵与矩阵相乘、矩阵的转置和方阵的行列式等概念。本章重点是要熟练掌握矩阵的线性运算（加法与数乘）、矩阵与矩阵的乘法、矩阵的转置、方阵的行列式及其运算规律；掌握可逆矩阵的概念以及矩阵可逆的充要条件；理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求矩阵的逆阵。

1、矩阵的运算

（1）矩阵加法满足$\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in\boldsymbol{M}_{mn}\right)$

（a）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

（b）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

（2）数乘矩阵满足$\left(\lambda,\mu\in\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_{mn}\right)$

（a）$\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$

（b）$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$

（c）$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$

（3）矩阵与矩阵相乘满足（前面矩阵的列数=后面矩阵的行数）

（a）$(AB)C=A(BC)$

（b）$A(B+C)=AB+AC$

（c）$(\lambda A)B=A(\lambda B)=\lambda(AB)$

注意：

（a）一般情况下，$AB\neq BA$；若 $AB=BA$，则称 A,B 是可交换的。

（b）即便 $AB=0$， A,B 可以都不是零矩阵。

（4）**矩阵的转置**满足

（a）$\left(A^T\right)^T=A$

（b）$(A+B)^T=A^T+B^T$

（c）$(\lambda A)^T=\lambda A^T$

（d）$(AB)^T=B^TA^T$

（e）$A^TA=0\Leftrightarrow AA^T=0\Leftrightarrow A=0$

（5）**方阵的幂** A^k（k 为正整数， $A\in M_n$）

（a）$A^kA^l=A^{k+l}$；$\left(A^k\right)^l=A^{kl}$（$k,l$ 均为正整数）。

（b）若方阵 A,B 是不可交换的，则 $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$；$(AB)^k\neq A^kB^k$。

（6）**方阵的行列式**（A,B 均为方阵）满足

（a）$\left|A^T\right|=|A|$。

（b）$\left|\lambda A\right|=\lambda^{n}\left|A\right|$

（c）$\left|AB\right|=\left|A\right|\left|B\right|$

2、逆矩阵

（1）定义：设 $A\in M_n$，若有 $B\in M_n$，使得 $AB=BA=E$（单位阵），则称矩阵 A 是可逆的，B 是 A 的逆阵，记作 $B=A^{-1}$。

（2）方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow\left|A\right|\neq 0\Leftrightarrow$ 有 B，使 $AB=E\Leftrightarrow$ 有 B，使 $BA=E$。

（3）逆阵的性质

（a）若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，且 $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

（b）若 A 可逆，则 A^{T} 也可逆，且 $\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$

（c）若 A 可逆，$k\neq 0$，则 kA 也可逆，且 $\left(kA\right)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$

（d）若 A,B 均可逆，则 A,B 也可逆，且 $\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

（4）伴随矩阵：设 $A\in M_n$，A 的伴随阵 A^{*} 定义为 $A^{*}=\left(A_{ij}\right)^{T}$，（其中 A_{ij} 是 $\left|A\right|$ 中 $\left(i,j\right)$ 元的代数余子式。

伴随阵的性质：

（a）$AA^{*}=A^{*}A=\left|A\right|E$

（b）若$|A|\neq 0$，则$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，$A^*=|A|A^{-1}$

（c）若$|A|\neq 0$，则$\left(A^{-1}\right)^*=\left(A^*\right)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$

（d）$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$

（e）$\left(A^T\right)^*=\left(A^*\right)^T$

3、克拉默法则的矩阵表示

若 $|A|\neq 0$，则方程组 $Ax=b$ 有唯一解 $x=A^{-1}b=\frac{1}{|A|}A^*b$。

第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

本章重点是要熟练掌握用初等行变换把矩阵化成行阶梯形和行最简形的方法，并熟练掌握用矩阵初等行变换求解线性方程组的方法。理解矩阵的秩的概念，并掌握用矩阵初等变换求矩阵的秩的方法。

理解非齐次线性方程组无解、有唯一解或无穷多解的充要条件和齐次线性方程组有非零解的充要条件。

1、定义

初等行变换：$\left(r_i\leftrightarrow r_j; r_i\times k; r_i+kr_j\right)$；

初等列变换：$\left(c_i \leftrightarrow c_j; c_i \times k; c_i + kc_j\right)$；

初等变换：$A \sim B$，即A与B等价，秩相等。

2、矩阵的秩

（1）矩阵A的最高阶非零子式的阶数r，称为矩阵A的秩，记作$R(A)=r$。

（2）$R(A)=r \Leftrightarrow A$的最简形含r个非零行$\Leftrightarrow A$的标准形$F=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$。

（3）矩阵的秩的性质：

（a）$0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m,n\}$。

（b）$R(A^T)=R(A)$。

（c）$A \sim B \Leftrightarrow R(A)=R(B)$。

（d）若P,Q可逆，则$R(PAQ)=R(A)$。

3、线性方程组理论

（1）n元非齐次线性方程组$Ax=b$有解的充要条件是$R(A)=R(A,b)$，当$R(A)=R(A,b)=n$时有唯一解；当$R(A)=R(A,b)<n$时有无穷多解；无解的充要条件是$R(A)<R(A,b)$。

（2）n元齐次线性方程组$Ax=0$有非零解的充要条件是$R(A)<n$；只有零解的充要条件是$R(A)=n$。

（3）矩阵方程 $AX=B$ 有解的充要条件是 $R(A)=R(A,B)$。

第四章　向量组的线性相关性

在本章学习中,，要特别注意方程语言、矩阵语言、几何语言三者之间的转换,，突出的典型问题是对 $(b_1,b_2,\ldots,b_l)=(a_1,a_2,\ldots,a_m)K_{m\times l}$，$(B=AK)$所作的解释：

矩阵语言：B是A与K的乘积矩阵；

方程语言：K是矩阵方程$AX=B$的一个解；

几何语言：向量组B能由向量组A线性表示，K是这一表示的系数矩阵。

理解向量组线性组合以及一个向量（或向量组）能由一个向量组线性表示的概念，特别地，要熟悉这些概念和线性方程组的联系。理解向量组线性相关和线性无关的概念，并熟悉它们与齐次线性方程组的联系。理解向量组的最大无关组和向量组的秩的概念，会用矩阵的初等变换求向量组的最大无关组和秩。

本章的另一个重点是理解齐次线性方程组的基础解系的概念，并能熟练地求出基础解系，理解齐次与非齐次线性方程组通解的构造。

1、n维向量、向量组

n个有次序的数$a_1,a_2,\cdots,a_n$构成的有序数组称为n维向量，记作

$$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\quad a^T=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$$

a与a^T分别称为列向量和行向量，也就是列矩阵和行矩阵。

若干个同维数的列（行）向量所组成的集合叫做向量组。含有有限个向量的向量组可以构成一个矩阵。

2、线性组合与线性表示

（1）向量b能由向量组$A:a_1,a_2,\ldots,a_m$线性表示

$\Leftrightarrow$方程组$x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_ma_m=b\ (Ax=b)$有解

$\Leftrightarrow R(a_1,a_2,\ldots,a_m)=R(a_1,a_2,\ldots,a_m,b)$ （定理 1）

（2）向量组$B:b_1,b_2,\ldots,b_l$能由向量组$A:a_1,a_2,\ldots,a_m$线性表示$\Leftrightarrow$矩阵方程

$(a_1,a_2,\ldots,a_m)X=(b_1,b_2,\ldots,b_l)\ (AX=B)$有解

$\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$ （定理 2）

（3）向量组A与向量组B等价（能相互线性表示）

$\Leftrightarrow R(A)=R(B)=R(A,B)$

（4）若向量组 B 能由向量组 A 线性表示，则 $R(B)\le R(A)$。（定理 3）

3、线性相关与线性无关

向量组 $A:a_1,a_2,\dots,a_m$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组

$x_1a_1+x_2a_2+\dots+x_ma_m=0 \quad (Ax=0)$ 有非零解

$\Leftrightarrow R(a_1,a_2,\dots,a_m)<m$ （定理 4）

向量组 $a_1,a_2,\dots,a_m\ (m\ge 2)$ 线性相关的充要条件是存在某个向量 $a_j\ (1\le j\le m)$，它能由其它 $m-1$ 个向量线性表示。

4、向量组线性相关性的重要结论

（1）向量组 $a_1,a_2,\dots,a_s$ 线性相关，则向量组 $a_1,a_2,\dots,a_s,a_{s+1},\dots,a_m$ 也线性相关。（定理 5-1）

（2）m 个 n 维向量组成的向量组，当 $m>n$，即个数大于维数时一定线性相关。（定理 5-2）

（3）设向量组 $A:a_1,a_2,\dots,a_m$ 线性无关，而向量组 $a_1,a_2,\dots,a_m,b$ 线性相关,，则向量 b 必能由向量组 A 线性表示，且表示式是唯一的。（定理 5-3）

5、向量组的最大无关组与向量组的秩

（1）定义：如果在向量组中能选出 r 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_r$，满足

（a）向量组 $A_0 : a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性无关；

（b）向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关，那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大无关组；最大无关组所含向量个数 r 称为向量组 A 的秩，记作 R_A。只含零向量的向量组没有最大无关组，规定它的秩为 0。

（c）上述条件（b）可改为：向量组 A 中任一向量都能由向量组 A_0 线性表示。

（2）只含有限个向量的向量组 $A : a_1, a_2, \dots, a_m$ 构成矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$，矩阵 A 的秩等于向量组 A 的秩，即 $R(A) = R(a_1, a_2, \dots, a_m) = R_A$。（定理 6）

6、齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系与通解

设 n 元齐次线性方程组 $A_{m\times n} x = 0$ 的解集为 S，则 $R_S = n - r$；解集 S 的一个最大无关组称为齐次线性方程组的基础解系，其中含 $R_S = n - r$ 个解向量。设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 为齐次线性方程组的基础解系，则其通解为 $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots c_{n-r}\xi_{n-r} \quad (c_1, c_2, \dots c_{n-r} \in R)$

7、非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的通解

设非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的一个解为 η^*，对

应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系为 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$，则非齐次方程组的通解为 $x=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\ldots c_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*$。

8、向量空间

（1）设 V 是 n 维向量的集合，如果 V 非空，且对向量的线性运算封闭，那么 V 就称为向量空间。

向量空间 V 的最大无关组称为 V 的基，向量空间 V 的秩 R_V 称为 V 的维，若 $R_V=r$，则称 V 为 r 维向量空间。

设 r 维向量空间的一个基为 $j_1,j_2,\ldots,j_r$，则任一向量 $v\in V$，总有唯一的一组有序数 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$，使 $v=\lambda_1 j_1+\lambda_2 j_2+\ldots+\lambda_r j_r$，有序数组 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ 就称为向量 v 在基 $j_1,j_2,\ldots,j_r$ 下的坐标。

（2）给定 n 维向量组 $A:a_1,a_2,\ldots,a_m$，集合

$$L(a_1,a_2,\ldots,a_m)=\{x=k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_ma_m \mid k_1,k_2,\ldots,k_m\in R\}$$

是一个向量空间，称为由向量组 A 所生成的向量空间。

向量组 A 与向量组 B 等价，则由它们所生成的向量空间相等。

第五章　相似矩阵及二次型

本章的重点特征值与特征向量的计算与矩阵的对角化，特别是对称矩阵的对角化。而求得正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$，既是相似，又是合同。学好本章的关键是掌握对称矩阵正交相似对角化的原理和步骤，其它概念如向量的内积、正交、施密特正交化方法、正交矩阵、特征值和特征向量等都围绕正交相似对角化这一中心议题。要熟练地掌握特征值和特征向量的求法以及它们和正交矩阵的关系。

1、　向量的内积、长度及正交性

（1）设有 n 维向量 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

则 $[x, y] = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = x^T y$ 被称为向量 x 与 y 的<u>内积</u>。

（2）非负实数 $\|x\| = \sqrt{[x, x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ 被称为向量 x 的<u>长度</u>(或范数)。当 $\|x\| = 1$ 时，称 x 为单位向量。$x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$。

（3）当 $[x, y] = x^T y = 0$ 时，称向量 x 与 y 正交。零向量与任何向量都正交。

2、正交向量组：

一组两两正交的非零向量称为正交向量组。正交

向量组一定线性无关。

给定一个线性无关的向量组A，寻求一个与A等价的正交向量组，称为把向量组A正交化。

施密特正交化过程：设向量组A：$a_1,a_2,\ldots,a_r$线性无关，令

$b_1=a_1$；

$b_2=a_2-\dfrac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1$；

……

$$b_r=a_r-\frac{[b_1,a_r]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_r]}{[b_2,b_2]}b_2-\cdots-\frac{[b_{r-1},a_r]}{[b_{r-1},b_{r-1}]}b_{r-1}$$

则向量组$b_1,b_2,\ldots,b_r$两两正交，且与A组等价。

设 n 维向量$e_1,e_2,\ldots,e_r$是向量空间V（$V\subset R^n$）的一个基，如果$e_1,e_2,\ldots,e_r$两两正交，且都是单位向量，则称$e_1,e_2,\ldots,e_r$为V的一个规范正交基。

3、正交矩阵

如果 n 阶矩阵A满足 $A^TA=E$，则称A为正交矩阵，简称正交阵。

（1） $A^TA=E\Leftrightarrow AA^T=E$；

（2） A可逆，且$A^{-1}=A^T$；

（3）A的行（列）向量组两两正交，且都是单位向量。

4、特征值与特征向量

（1）设A是n阶矩阵，若有数λ和 n 维非零向量x使关系式$Ax=\lambda x$，则称λ为方阵A的特征值，非零向量x称为A的对应于特征值λ的特征向量。

（2）λ的n次多项式 $f(\lambda)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$

称为n阶矩阵A的特征多项式，$|A-\lambda E|=0$称为矩阵A的特征方程，特征方程的根就是A的特征值。在复数范围内恒有解，n阶矩阵A有n个特征值（重根按重数计算）。

设方阵A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$，则有

1）$\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$；

2）$\lambda_1\lambda_2...\lambda_n=|A|$

3）若λ是方阵A的特征值，则λ^k是A^k的特征值；$\varphi(\lambda)$是矩阵多项式$\varphi(A)$的特征值（其中$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+...+a_m\lambda^m$；$\varphi(A)=a_0+a_1A+...+a_mA^m$）。

（3）设λ是方阵A的一个特征值，则齐次方程$|A-\lambda E|=0$的全部非零解就是方阵A对应于特征值λ的全部特征向量，而该齐次方程的基础解系就是对应于特征值λ的全体特征向量的最大无关组。

（4）设$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_r$是方阵$A$的$r$个特征值，对应的特征向量依次为$p_1,p_2,...,p_r$，如果$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_r$各不相等，则$p_1,p_2,...,p_r$线

性无关。

5、相似矩阵

（1） 对于n阶矩阵A和B， 若有可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$，则称A与B相似，把A化成B的运算，称为对A进行相似变换，可逆矩阵P称为把A变成B的相似变换矩阵。

若矩阵A与B相似，则A与B的特征多项式相同，从而有相同的特征值。

（2） 若矩阵A与对角阵相似（此时，称矩阵A能相似对角化），即若有可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$，则

1） $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$是$A$的$n$个特征值；

2） P的第i个列向量p_i是A的对应于λ_i的特征向量；

3）矩阵A能相似对角化的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量。

6、对称矩阵的对角化

（1）对称矩阵的性质

1) 对称矩阵的特征值都是实数；

2) 对应不同特征值的特征向量正交；

3) 给定对称阵A，存在正交阵P，使

$P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$。

（2）对称阵A对角化的步骤

1) 求出A的全部互不相等的特征值$\lambda_1, ..., \lambda_s$，它们的重数依次为$k_1, ..., k_s (k_1 + ... + k_s = n)$。

2) 对每个k_i重特征值λ_i，求方程$(A - \lambda_i E)x = 0$的基础解系，得k_i个线性无关的特征向量。再把它们规范正交化，得k_i个两两正交的单位特征向量。因$k_1 + ... + k_s = n$，故总共得到n个两两正交的单位特征向量。

3) 把这n个两两正交的单位特征向量构成正交阵P，便有$P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda$。

7、二次型化标准形

（1）二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型。

令$a_{ji} = a_{ij}$，$A = (a_{ij})$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$，把二次型记作$f = x^{\mathrm{T}}Ax$，对称矩阵A称为二次型f的矩阵，并规定二次型f的秩为矩阵A的秩。

（2）二次型研究的主要问题是：寻求可逆变换$x = Cy$，

使 $$f(Cy)=y^TC^TACy=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$$

这种只含平方项的二次型，称为二次型的标准形（法式）。

当 $k_i\in\{1,-1,0\}$，$i=1,2,...,n$ 时，则称上式为二次型的规范形。

（3）对于 n 阶矩阵 A 和 B，若有可逆矩阵 C 使得 $C^{\mathrm{T}}AC=B$，则称矩阵 A 与 B 合同。把 A 化为 B 的变换称为合同变换。

对二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$ 作可逆变换 $x=Cy$，相当于对对称矩阵 A 作合同变换，把二次型化成标准形相当于把对称矩阵 A 用合同变换化为对角阵（称为把对称矩阵 A 合同对角化），即寻求可逆矩阵 C，使 $C^{\mathrm{T}}AC=diag(k_1,k_2,...,k_n)$。

（4）给定二次型 $f=x^TAx$，存在正交变换 $x=Py$，使

$$f(Py)=y^TP^TAPy=y^T\Lambda y=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+...+\lambda_ny_2^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_n$ 为对称矩阵 A 的 n 个特征值。

（5）配方法是化二次型为标准形（规范形）的一种较为方便的方法。

8、惯性定理、正定二次型

（1）惯性定理：设二次型的标准形为 $f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ry_r^2,\ (k_i\neq0)$

则系数 k_i 中正数的个数是确定的，而且上式里项数（等于 f 的秩）也是确定的。

在二次型 f 的标准形中，正项个数称为 f 的正惯性

指数；负项个数称为 f 的负惯性指数。若二次型 f 的秩为 r，正惯性指数为 p，则 f 的规范形为

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2$$

（2）如果 $\forall x \neq 0, f(x) > 0(\text{or } < 0)$，则称二次型 f 为正（负）定的，并称 f 的矩阵 A 是正（负）定的，记作 $A > 0(\text{or} < 0)$。

$f = x^{\mathrm{T}} A x$ 正定 $\Leftrightarrow$ f 的正惯性指数 $p = n$

$\Leftrightarrow$ A 的 n 个特征值全为正

$\Leftrightarrow$ A 的各阶主子式全为正

$\Leftrightarrow$ f 的规范形为 $f = y^T y = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$

$\Leftrightarrow$ A 合同于单位阵 E

$\Leftrightarrow$ $A = U^T U$，U 可逆。