一、(24 分) 填空与选择题，其中选择题均为单选题.

1、 设 $A=\begin{pmatrix}6 & y & 5\\ 1 & 0 & 4\\ x & 2 & 3\end{pmatrix}$，则 A 中元素 y 的代数余子式的值为________.

2、 设 3 阶方阵 A 与对角阵 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 相似，则 A 的伴随矩阵 A^* 的秩 $R(A^*)=$__________.

3、 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=kx_1{}^2+x_2{}^2+kx_3{}^2+2x_1x_3$ 为正定二次型，则 k 的取值范围是_____________.

4、 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & k\\ k & 6 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ 有两重特征值-1，则行列式 $|A-5E|=$___________.

5、 设 A 为 3×4 阵，非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解，其解向量组的秩为 2，则 $R(A)=$_____________.

6、 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ k & 3 & 3\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$ 可对角化，则 $k=$_____________.

7、 设向量组 α_1，α_2，α_3 线性相关，向量 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，则下面说法正确的是_____________.

(A) 向量组 β，α_2，α_3 线性无关.

(B) 向量组 $\beta+\alpha_1$，α_2，α_3 线性无关.

(C) β 由 α_1，α_2，α_3 线性表示的表达式唯一.

(D) 向量组 $\beta-\alpha_1$，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_3$ 线性相关.

8、设 A 为 n 阶方阵，已知 $R(A)=n$，则下面说法不正确的是_____________.

(A) A 的列向量组一定是线性无关的.

(B) A 的特征值一定都不等于零.

(C) A 一定有 n 个线性无关的特征向量.

(D) 非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 一定只有唯一解.

二、(12 分) 设有非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 1\\ (1-\lambda)x_1 + (1-\lambda)x_2 + x_3 = 1\\ (5-3\lambda)x_1 + (1-\lambda)x_2 + x_3 = \lambda\end{cases}$，

问 λ 取何值时，该方程组有唯一解、无解或有无穷多解？当解不唯一时，求出所有的解.

三、(10 分) 设 $X\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}=C$，其中 $A=-3$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵 X.

四、(14 分) 设 $\alpha_1=(1,1,1,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,2,1)^T$，$\alpha_3=(-1,2,3,4)^T$，$\alpha_4=(3,2,1,0)^T$，$\alpha_5=(1,0,4,-1)^T$ 生成的向量空间为 V，求向量空间 V 的维数和它的一组基，并分别求出 α_1，α_2，α_3，α_4，α_5 在这组基下的坐标.

五、(15 分) 设有二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$，

(1) 写出二次型 f 的矩阵；

(2) 求一正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$，把二次型 f 化为标准形；

(3) 写出二次型 f 的标准形和规范形.

六、(15 分) 设 $P[x]_3=\{f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \mid a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\}$ 是次数不超过 3 的实系数多项式所成的线性空间. 已知多项式的微分运算:

$$\forall f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\in P[x]_3, \mathfrak{D}(f(x))=a_1+2a_2x+3a_3x^2$$

是 $P[x]_3$ 上的线性变换.

(1) 证明 $\{1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3\}$ 构成线性空间 $P[x]_3$ 的基;

(2) 求由基 $\{1,x,x^2,x^3\}$ 到 $\{1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3\}$ 的过渡矩阵 P;

(3) 求多项式 $f(x)=1+2x+3x^2+4x^3$ 分别在基 $\{1,x,x^2,x^3\}$ 与基

$\{1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3\}$ 下的坐标.

(4) 求线性变换 $\mathfrak{D}$ 分别在基 $\{1,x,x^2,x^3\}$ 与基 $\{1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3\}$ 下的矩阵.

七、(10 分) 证明题:

设 A 是正交矩阵, $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$ 是 A 的特征值, α,β 分别是属于特征值 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$ 的特征向量,

(1) 问 α 与 β 是否线性相关, 写出你的理由.

(2) 向量 α 与向量 β 是否正交, 写出你的理由.