

第一章 信号分析的理论基础

1. 周期信号的判断: $x(t) = x(t+T)$ 信号正交判断:
$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} g_i(t)g_j(t)dt = 0, i \neq j \\ \int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t)dt = K_i \end{cases}$$

※2. (1) $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$ (2) $\int_{t_1}^{t_2} \delta(t+t_0)f(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{if } t_0 > t_2 \text{ 或 } t_0 < t_1 \\ f(t_0), & \text{if } t_0 < t_1 < t_2 \end{cases}$

(3) $u(n) - u(n-1) = \delta(n)$

3. ※信号的时域分析与变换

信号的翻转: $f(t) \rightarrow f(-t)$ 平移: $f(t) \rightarrow f(t \pm t_0)$ 展缩: $f(t) \rightarrow f(at)$

4. ※卷积

$$g(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

$$g(n) = f_1(n) * f_2(n) = \sum_{m=-\infty}^n f_1(m)f_2(n-m)$$

5. $f(t)$ 与奇异函数的卷积

$$\begin{aligned} & f(t) * \delta(t) = f(t) \\ \text{※} & f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0) \end{aligned}$$

6. 几何级数的求值公式表

$$\sum_{n=0}^{n_2} a^n = \begin{cases} \frac{1-a^{n_2+1}}{1-a}, a \neq 1 \\ n_2+1, a = 1 \end{cases} \quad \sum_{n=n_1}^{n_2} a^n = \begin{cases} \frac{a^{n_1}-a^{n_2+1}}{1-a}, a \neq 1 \\ n_2-n_1+1, a = 1 \end{cases} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, |a| < 1$$

第二章 傅立叶变换

1 正变换: $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ 逆变换: $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$

2 傅立叶变换的性质

性质	时域	频域
※时移	$f(t \pm t_0)$	$F(\omega)e^{\pm j\omega t_0}$
※时频展缩	$f(at) \ a \neq 0$ $f(at \pm b) \ a \neq 0$	$\frac{1}{ a } F(\frac{\omega}{a})$ $\frac{1}{ a } e^{\pm j\frac{b}{a}\omega} F(\frac{\omega}{a})$
※※频移	$f(t)e^{\pm j\omega_0 t}$	$F(\omega \mp \omega_0)$

※※对称性	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
时域微分	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
频域微分	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$
※卷积定理	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$

※3 抽样定理:

(1)已知信号有限频带为 f_m ，采样信号频率 f 满足 $f_s \geq 2f_m$ 时，抽样信号通过理想低通滤波器后能完全恢复。其中， $2f_m$ 称为奈奎斯特抽样率。

(2)抽样间隔 T_s 满足条件 $T_s \leq \frac{1}{2f_m}$ 时，抽样信号能够完全恢复。其中 $T_s = \frac{1}{2f_m}$ 成为奈奎斯特抽样间隔。

4 典型信号的傅里叶变换及频谱图

信号名称	$f(t)$	波形图	$F(\omega) = F(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$	频谱图
※※矩形脉冲	$E[u(t-\tau)-u(t+\tau)]$		$E\tau \text{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$	
冲激脉冲	$E\delta(t)$		E	
※※直流函数	E		$2\pi E\delta(\omega)$	
※冲激序列	$\delta_{T_1}(t)$		$\omega_1 \delta_{\omega_1}(\omega)$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$	

第三章 拉普拉斯变换

1 定义

双边拉普拉斯变换 $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

拉普拉斯反变换 $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$

单边拉普拉斯变换 $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

单边变换收敛条件: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$ $\sigma > \sigma_0$ 称为收敛域。

2 常见函数的拉普拉斯变换

公式序号	原函数 $f(t)$, $t \geq 0$	像函数 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
※1	$\delta(t)$	1
※2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
※※3	t	$\frac{1}{s^2}$
※※4	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
※ 5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
※ 6	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

3 拉普拉斯的基本性质

性质	时域 $f(t)$ $t \geq 0$	复频域 $F(s)$, $\sigma > \sigma_0$
※※1 时间平移	$f(t-t_0)u(t-t_0)$	$F(s)e^{-st_0}$
※2 频率频移	$f(t)e^{s_0 t}$	$F(s-s_0)$
※3 时域微分	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
4 复频域微分	$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
5 复频域积分	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s)ds$
※6 时域卷积	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$

※4. 拉普拉斯反变换

(1)部分分式展开法

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n (s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \frac{k_1}{(s-p_1)} + \frac{k_2}{(s-p_2)} + \cdots + \frac{k_n}{(s-p_n)}$$

$$k_i = (s-p_i)F(s)|_{s=p_i} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

$$\text{拉氏变换的基本形式: } e^{-\alpha} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+\alpha}$$

$$z\text{变换的基本形式 } \frac{z}{z-a} \leftrightarrow \begin{cases} a^n u(n) & |z| > |a| \\ -a^n u(-n-1) & |z| < |a| \end{cases}$$

(2)留数法

留数法是将拉普拉斯反变换的积分运算转换为求被积函数各极点上留数的运算，即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds = \sum_{i=1}^n \text{Res } p_i$$

其中 $\text{Res } p_i = [(s - p_i)F(s)e^{st}]_{s=p_i}$ (p_i 为一阶极点)

或 $\text{Res } p_i = \frac{1}{(r-1)!} [\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} (s - p_i)^r F(s)e^{st}]_{s=p_i}$ (p_i 为 r 阶极点)

第四章 Z 变换

1. Z 变换定义

正变换： 双边： $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

单边： $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$

2. Z 变换收敛域 ROC： 满足 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$ 的所有 z 值

★ ROC 内不包含任何极点（以极点为边界）；

★ 右边序列的 ROC 为 $|z| > R_1$ 的圆外；

★ 左边序列的 ROC 为 $|z| < R_1$ 的圆内；

★ 双边序列的 ROC 为 $R_1 < |z| < R_2$ 的圆环。

★ 有限长序列的 ROC 为整个 z 平面（可能除去 $z = 0$ 和 $z = \infty$ ）；

3. 典型信号的 Z 变换

(1) $x(n) = \delta(n)$, $X(z) = 1$, $|z| \geq 0$

(2) $x(n) = u(n)$, $X(z) = \frac{z}{z-1}$, $|z| > 1$

(3) $x(n) = a^n u(n)$, $X(z) = \frac{z}{z-a}$, $|z| > a$

4. 单边 Z 变换性质

特性名称	时间序列	Z 变换
※ 位移性	$f(n+m)u(n)$	$z^m \left[F(z) - \sum_{i=0}^{m-1} x(i)z^{-i} \right]$
	$f(n-m)u(n-m)$	$z^{-m} F(z)$
※ 时间反转	$f(-n)$	$F(z^{-1})$
尺度变换	$a^n f(n)$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
※ 卷积定理	$f_1(n) * f_2(n)$	$F_1(z)F_2(z)$

5 Z 反变换

(1) 幂级数展开法 (长除法)

※(2) 部分分式展开法
$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_M z^M + b_{M-1} z^{M-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

单极点时, 将 $\frac{F(z)}{z}$ 展开为部分分式
$$\frac{F(z)}{z} = \sum_{i=0}^N \frac{A_i}{z - p_i}$$

根据收敛域给出反变换

A: if $|z| > R$, 则 $f(n)$ 为因果序列 (右边序列), 即
$$f(n) = \sum_{i=1}^N A_i p_i^n u(n)$$

B: if $|z| < R$, 则 $f(n)$ 为非因果序列 (左边序列), 即
$$f(n) = -\sum_{i=1}^N A_i p_i^n u(-n-1)$$

※(3) 围线积分法 (留数法)

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz = \sum_i \text{Res}[F(z) z^{n-1}, p_i]_{z=p_i}, \quad p_i \text{ 为 } F(z) z^{n-1} \text{ 的极点.}$$

式中围线 C 位于 $F(z)$ 的收敛域内且包围坐标原点。

对 $F(z)$ 的收敛域为圆内部分或环形区域时, 序列 $f(n)$ 中将出现左边序列, 可以使用留数辅助定理 (当

p_i 为单极点)

A: C 内极点: $f(n) = \text{Res}[F(z) z^{n-1}, C \text{ 内极点 } p_i]_{z=p_i} = [(z - p_i) \cdot F(z) z^{n-1}]_{z=p_i}$

B: C 外极点: $f(n) = -\text{Res}[F(z) z^{n-1}, C \text{ 外极点 } p_i]_{z=p_i} = [(z - p_i) \cdot F(z) z^{n-1}]_{z=p_i}$

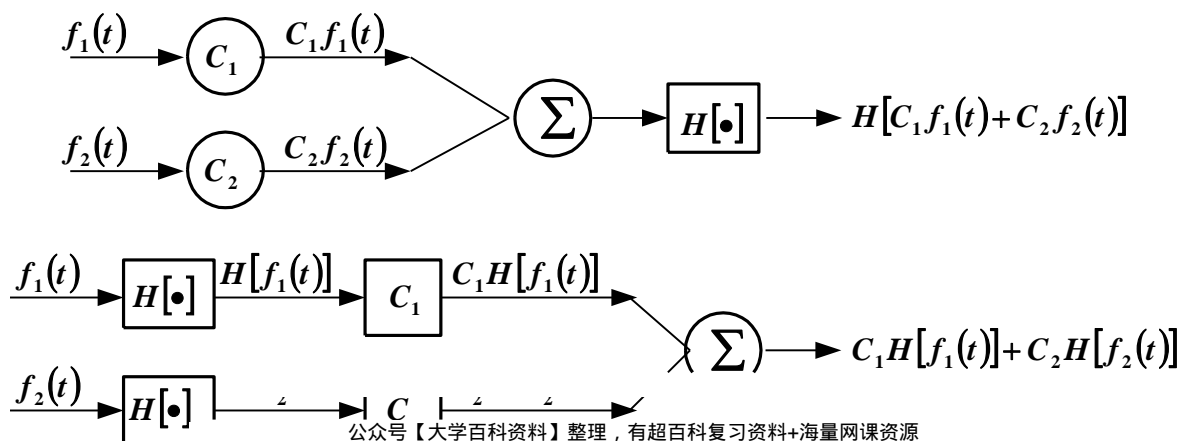
注意: 计算 $f(n)$ 时, 要分别计算 $n \geq 0$ 和 $n < 0$ 两种情况下的极点。

第六章 第七章 第八章 连续系统时域、频域和复频域分析

1 线性和非线性、时变和非时变系统判别

(1) 线性和非线性

先线性运算, 再经系统=先经系统, 再线性运算

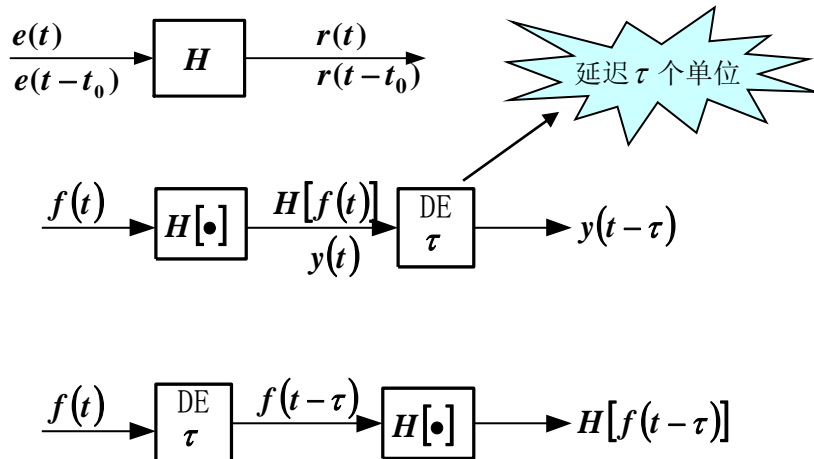


若 $H[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] = C_1 H[f_1(t)] + C_2 H[f_2(t)]$, 则系统 $H[\bullet]$ 是线性系统, 否则是非线性系统。

(2) 时变系统与时不变系统

在零初始条件下, 其输出响应与输入信号施加于系统的时间起点无关, 称为非时变系统, 否则称为时变系统。时不变性:

先时移, 再经系统 = 先经系统, 再时移



若 $H[f(t-\tau)] = y(t-\tau)$, 则系统是非时变系统, 否则是时变系统。

2 对线性时不变系统, 响应 $r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t)$, 其中 $r_{zi}(t)$ 为零输入响应, $r_{zs}(t)$ 为零状态响应。

(1) 响应可分解为: 零输入响应 + 零状态响应, $r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t)$ 。

零输入响应 $r_{zi}(t)$:

Step1 特征方程, 特征根;

Step2 解形式 $r_{zi}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{a_i t}$ 或 $r_{zi}(t) = \sum_{i=1}^K C_i t^{i-1} e^{a_i t} + \sum_{i=K+1}^n C_i e^{a_i t}$;

Step3 初始条件代入确定系统 C_i ;

零状态响应 $r_{zs}(t)$:

方法 1: 时域分析法 $r_{zs}(t) = e(t) * h(t)$

方法 2: 变换域分析法

Step1: 根据电路图, 求 $H(s)$

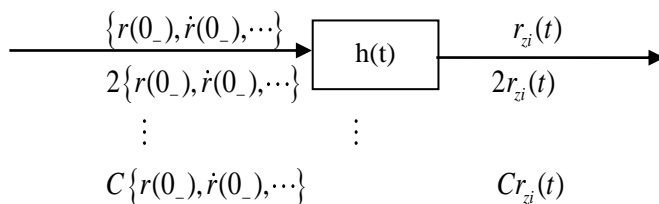
Step2: $R_{zs}(s) = H(s)E(s)$

Step3: $r_{zs}(t) = L^{-1}[R_{zs}(s)]$

(2)零状态线性：当起始状态为零时，系统的零状态响应对于各激励信号呈线性。



(3)零输入线性：当激励为零时，系统的零输入响应对于各起始状态呈线性。



3 冲激响应 $h(t)$ 的计算

(1) 已知电路图，求 $h(t)$

Step1:明确系统输入（激励），系统输出（响应）

$$L \rightarrow j\omega L \text{ 或 } Ls$$

Step2:电气元件 L 和 C ，变成变换域 $C \rightarrow \frac{1}{j\omega C} \text{ 或 } \frac{1}{Cs}$

Step3: 系统函数 $H(\omega) = \frac{R(\omega)}{E(\omega)}$ 或 $H(s) = \frac{R(s)}{E(s)}$

Step4: $h(t) = L^{-1}[H(s)]$ 或 $h(t) = F^{-1}[H(\omega)]$

(2) 已知 $e(t)$ 和零状态响应 $r_{zs}(t)$ ，求 $h(t)$

(3) 已知微分方程，求 $h(t)$

(4) 已知各分支子系统 $h_i(t)$, 根据系统连接方式确定总系统 $h(t)$

4 无失真传输条件判断

定义：任意波形信号通过线性系统不产生波形失真。

时域条件： $r(t) = Ke(t - t_0)$

频域条件： $H(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}$ 等价于 $\begin{cases} |H(\omega)| = K (\text{常数}) \\ \varphi(\omega) = -\omega_0 t \end{cases}$

即系统的幅频特性为一常数，相频特性是一通过原点的直线。

5 零输入响应 $r_{zi}(t)$ ：

Step1: 特征方程, 特征根;

Step2: 解形式 $r_{zi}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{a_i t}$ 或 $r_{zi}(t) = \sum_{i=1}^K C_i t^{i-1} e^{a_i t} + \sum_{i=K+1}^n C_i e^{a_i t}$

Step3: 初始条件代入确定系统 C_i

第九章 第十章 离散系统时域、Z 域分析

1 差分方程的一般形式

$$\text{前向差分: } \sum_{i=0}^N a_i y(n+i) = \sum_{j=0}^M b_j x(n+j) \quad a_N = 1$$

$$\text{后向差分: } \sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j) \quad a_0 = 1$$

2 卷积法 $y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$

(1) 零输入响应 $y_{zi}(n)$: 激励 $x(n) = 0$ 时初始状态引起的响应

Step1 特征方程, 特征根;

Step2 解形式 $y_{zi}(n) = \sum_{i=1}^N C_i a_i^n$ 或 $y_{zi}(n) = \sum_{i=1}^K C_i n^{i-1} a_i^n + \sum_{i=K+1}^N C_i a_i^n$;

Step3 初始条件 $y_{zi}(0), y_{zi}(1), \dots, y_{zi}(N-1)$ 代入 $y_{zi}(n)$, 确定系统 C_i ;

(12) 零状态响应 $y_{zs}(n)$: 初始状态为零时外加激励引起的响应

方法 1: 时域分析法 $y_{zs}(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$

方法 2: 变换域分析法 $y_{zs}(n)$

Step1: 差分方程两边 Z 变换 (注意初始状态为零);

左移位性质

$$\text{已知 } Z[x(n)u(n)] = X(z), \text{ 则 } Z[x(n+m)u(n)] = z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k} \right]$$

$$\text{例: } Z[x(n+1)] = zX(z) - zx(0)$$

$$Z[x(n+2)] = z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)$$

右移位性质

已知 $Z[x(n)u(n)] = X(z)$ ，则 $Z[x(n-m)u(n)] = z^{-m} \left[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k} \right]$

例： $Z[x(n-1)] = z^{-1}X(z) + x(-1)$

$Z[x(n-2)] = z^{-2}X(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)$

Step2: 求系统转移函数 $H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}$

Step3: 求 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$

Step4: $Y_{zs}(z) = X(z)H(z)$

Step5: $Y_{zs}(n) = Z^{-1}[Y_{zs}(z)]$