（试题共 5 页）

一、判断对错（每题 2 分，共 10 分）

1. 如果 z 不是实数，则 $\arg \bar{z} = -\arg z$。（　　）

2. 微积分中的求导公式、洛必达法则、积分中值定理等均可推广到复变函数。（　　）

3. 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 均为整函数，则 $5f(z)+ig(z)$ 也是整函数。（　　）

4. 存在在原点解析，在 $\frac{1}{n}$ 处取值为 $1,0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},\cdots$ 的函数。（　　）

5. 若 ∞ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点，则 $f(z)$ 在 ∞ 处的留数为 0。（　　）

二、选择题(每题 3 分，共 24 分)

1. 假设点 z_0 是函数 $f(z)$ 的奇点，则函数 $f(z)$ 在点 z_0 处（　　）

（A）不可导　（B）不解析
（C）不连续　（D）以上答案都不对

2. 下列方程所表示的平面点集中，为有界区域的是（　　）

（A）$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| > 2$　（B）$|z+3|-|z-3|>4$

（C）$1<\operatorname{Re} z<2,\ \operatorname{Im} z=0$　（D）$z\bar{z}+a\bar{z}+\bar{a}z+a\bar{a}-c>0\ (c>0)$

3. 设 c 为正向圆周 $|z|=1$，则 $\int_c \left|\frac{dz}{z}\right| =$（　　）

（A）$2\pi i$　（B）2π　（C）$-2\pi i$　（D）-2π

4. 设 C 为椭圆 $x^2+4y^2=1$，则积分 $\int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z =$（　　）

（A）$2\pi i$　（B）π　（C）0　（D）$-2\pi i$

5. $\operatorname{Res}[\frac{1}{z\sin z}, z=0] =$（ C ）

$$\left(z^2\cdot\frac{1}{z\sin z}\right)' = \left(\frac{z}{\sin z}\right)' = \frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z}$$

（A）$2\pi i$　（B）2π　（C）0　（D）$-2\pi i$

$$\left(\frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z}\right)'$$

6. 如果 z_0 为 $f(z)$ 的 n 级极点，则 z_0 为 $f'(z)$ 的（ D ）级极点

$$= \frac{\cos z - \cos z + z\sin z}{2\sin z\cos z}$$

（A）n　（B）$-n$　（C）$n-1$　（D）$n+1$

$$= \frac{z}{2\cos z} \to 0$$

7. 设 $f(t)$ 的傅立叶变换为 $F(\omega)$，则 $f(at+b)(a,b$ 为实数且 $a>0)$ 的傅立叶变换为（ B ）

$$\mathcal{F}[f(at+b)] = \mathcal{F}[f(a(t+\tfrac{b}{a}))] = e^{\frac{b}{a}\omega i}\mathcal{F}[f(at)]$$
$$= \frac{1}{a}e^{\frac{b}{a}\omega i}F(\frac{\omega}{a})$$

 B

(A) $\frac{1}{a}e^{i\frac{b}{a^2}\omega}F(\frac{\omega}{a})$ (B) $\frac{1}{a}e^{i\frac{b}{a}\omega}F(\frac{\omega}{a})$

(C) $\frac{1}{a}e^{-i\frac{b}{a^2}\omega}F(\frac{\omega}{a})$ (D) $\frac{1}{a}e^{-i\frac{b}{a}\omega}F(\frac{\omega}{a})$

8. 函数 $\frac{s^2}{(s+1)^2+1}$ 的拉普拉斯逆变换为（ A ）

（A）$\delta(t)-2e^{-t}\cos t$ （B）$\delta(t)-2\cos t-2\sin t$

（C）$\delta(t)-2e^{-t}\sin t$ (D) $\frac{i-1}{2}e^{it}$

三、 填空题（每题 3 分，共 24 分）

$=e^{\frac{5}{6}\pi i}/e^{\frac{\pi}{3}i}=e^{\frac{\pi}{2}i}=i$

$=i^{-2009}+i^{2357}+i^{-256}+i^{74}=(-i)^{2009}+i+(-i)^{0}+i^{2}$ $=-i+i-1$

1. 当 $z=\dfrac{\cos(\frac{5}{6}\pi)+i\sin(\frac{5}{6}\pi)}{\cos(\frac{1}{3}\pi)+i\sin(\frac{1}{3}\pi)}$ 时，$z^{-2009}+z^{2357}+z^{-256}+z^{74}$ 的值等于 -1 .

2.复数 $i^{\frac{1}{2}}=$ $e^{\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\, i}=e^{\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i}=e^{(\frac{\pi}{4}+k\pi)i}$, $k\in Z$.

3. 设 $f(z)=e^{x^2-y^2}[\cos(2xy)+i\sin(2xy)]$，则 $f'(1)=$ $2e$.

$=e^{x^2-y^2+2xyi}=e^{(x+yi)^2}=e^{z^2}$ $f'(z)=e^{z^2}\cdot 2z$

4. 设 $u(x,y)$ 的共轭调和函数为 $v(x,y)$，那么 $v(x,y)$ 的共轭调和函数为 $-u$.

5. 设 C 为过点 $2+3i$ 的正向简单闭曲线，则当 z 从曲线 C 内部趋向 $2+3i$ 时，

$\lim\limits_{z\to 2+3i}\oint_c \frac{e^{\zeta}}{\zeta-z}d\zeta=$ $2\pi i e^{z}=2\pi i e^{2}(\cos 3+i\sin 3)$ $=2\pi e^{2}(-\sin 3+i\cos 3)$ 当 z 从曲线 C 外部趋向 $2+3i$ 时，

$\lim\limits_{z\to 2+3i}\oint_c \frac{e^{\zeta}}{\zeta-z}d\zeta=$ 0 .

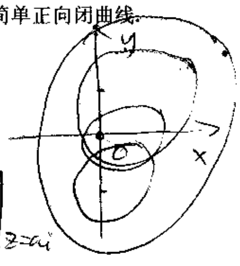
6. 级数 $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots$ 的收敛域是 $0<|z|<1$.

7. 函数 $F(\omega)=\frac{1}{9+\omega^2}$ 的傅立叶逆变换为________ .

8. 函数 $F(s)=\frac{1}{s^2+1}e^{-2s}$ 的拉普拉斯逆变换为 $u(t-2)\sin(t-2)$.

$L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}]\to \sin t$

四、（8分）计算积分 $\oint_C \frac{1}{(z^2+a^2)^2}dz$，其中 C 为不经过 $z=\pm ai$ 的简单正向闭曲线。



1. C只包含 $z=ai$ 时

① $\oint_C \frac{1}{(z^2+a^2)^2}dz = \oint_C \frac{\frac{1}{(z+ai)^2}}{(z-ai)^2}dz$

$$= 2\pi i\cdot\left(\frac{1}{(z+ai)^2}\right)'\Big|_{z=ai} = 2\pi i\left(-\frac{2(z+ai)}{(z+ai)^4}\right)\Big|_{z=ai}$$

$$= 2\pi i\cdot\frac{-2}{(z+ai)^3}\Big|_{z=ai} = \frac{4\pi i}{8a^3 i} = \frac{\pi}{2a^3}$$

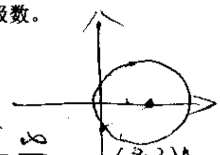
② C只包含 $z=-ai$ 时 $\oint_C \frac{\frac{1}{(z+ai)^2}}{(z+ai)^2}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{(z-ai)^2}\right)'\Big|_{z=-ai} = 2\pi i\,\frac{-2}{(z-ai)^3}\Big|_{z=}$

$$= \frac{-4\pi i}{-8a^3 i^3} = -\frac{\pi}{2a^3}$$

2. C包含 $z=ai$，$z=-ai$ 时 $\oint_C \frac{1}{(z^2+a^2)^2}dz = 0$

3. C不包含奇点时，$\oint_C \frac{1}{(z^2+a^2)^2}dz = 0$

五、（8分）将 $f(z)=\frac{1}{(z+i)(z-2)}$ 在适当的圆环域内展成以2为心的幂级数。



(1) $0<|z-2|<\sqrt{5}$. $f(z)=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{z+i}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{z-2+2+i}$

$$= \frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{2+i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{2+i}} = \frac{1}{z-2}\cdot\frac{2-i}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2+i}\right)^n$$

$$= \frac{2-i}{5}\sum(-1)^n\left(\frac{2-i}{5}\right)^n\cdot(z-2)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2-i}{5}\right)^{n+1}\cdot(z-2)^{n-1}$$

(2) $|z-2|>\sqrt{5}$

$$f(z)=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{z-2+2+i}=\frac{1}{(z-2)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2+i}{z-2}}$$

$$= \frac{1}{(z-2)^2}\sum(-1)^n\left(\frac{2+i}{z-2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2+i)^n\cdot\frac{1}{(z-2)^{n+2}}$$

六、(10 分)计算函数 $f(t)=\begin{cases} t, & |t|\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$ 的傅立叶变换，并求积分 $\int_0^{+\infty}(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega})\sin\omega t\,d\omega$ 的值，

解：$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-1}^{1} te^{-i\omega t}dt=\int_{-1}^{1} t(\cos\omega t-i\sin\omega t)$

$=-i\int_{-1}^{1} t\sin\omega t\,dt=-2i\int_0^1 t\sin\omega t\,dt=\frac{+2i}{\omega}\int_0^1 t\,d\cos\omega t$

$=\frac{2}{\omega}i\left[t\cos\omega t\Big|_0^1-\int_0^1\cos\omega t\,dt\right]=\frac{2}{\omega}i\left[\cos\omega-\frac{\sin\omega t}{\omega}\Big|_0^1\right]$

$=\frac{2}{\omega}i\left[\cos\omega-\frac{\sin\omega}{\omega}\right]=\left(\frac{2\cos\omega}{\omega}-\frac{2\sin\omega}{\omega^2}\right)i=2\left(\frac{\cos\omega}{\omega}-\frac{\sin\omega}{\omega^2}\right)i$

$f(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[2\left(\frac{\cos\omega}{\omega}-\frac{\sin\omega}{\omega^2}\right)i\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\cos\omega}{\omega}-\frac{\sin\omega}{\omega^2}\right)2ie^{i\omega t}d\omega$

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\cos\omega}{\omega}-\frac{\sin\omega}{\omega^2}\right)(\cos\omega t+i\sin\omega t)\,d\omega$

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}i\left(\frac{\cos\omega}{\omega}-\frac{\sin\omega}{\omega^2}\right)\sin\omega t\,d\omega=\frac{2i}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\cos\omega}{\omega}-\frac{\sin\omega}{\omega^2}\right)\sin\omega t$

$\therefore\int_0^{+\infty}\left(\frac{\cos\omega}{\omega}-\frac{\sin\omega}{\omega^2}\right)\sin\omega t\,d\omega=\frac{\pi f(t)}{2i}=-\frac{\pi i}{2}f(t)$

$\therefore\int_0^{+\infty}\left(\frac{\cos\omega}{\omega}-\frac{\sin\omega}{\omega^2}\right)\sin\omega t\,d\omega=\begin{cases} -\frac{\pi i}{2}t & |t|<1 \\ -\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{4}i & t=1 \\ -\frac{\pi i}{2}(-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}i & t=-1 \\ 0 & |t|>1 \end{cases}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+1)t} dt = -\frac{e^{-(s+1)t}}{s+1}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s+1}$$

七、(10 分)利用拉普拉斯变换求解微积分方程组

$$\begin{cases} x'' + 2x' + \int_0^t y(\tau)d\tau = 0 \\ 4x'' - x' + y = e^{-t} \end{cases}, \quad x(0) = 0, x'(0) = -1。$$

解: $s^2X(s) - sX(0) - x'(0) + 2(sX(s) - x(0)) + \frac{Y(s)}{s} = 0$

即 $s^2X(s) + 1 + 2sX(s) + \frac{Y(s)}{s} = 0$

$(s^2+2s)X(s) + \frac{Y(s)}{s} + 1 = 0$

$-[s(s^2+2s)X(s) + s] = Y(s)$

$4(s^2X(s) - sx(0) - x'(0)) - (sX(s) - x(0)) + Y(s) = \frac{1}{s+1}$

即 $4(s^2X(s)+1) - sX(s) + Y(s) = \frac{1}{s+1}$

$Y(s) = \frac{1}{s+1} - 4(s^2X(s)+1) + sX(s)$

$= \frac{3+3s-s^2}{s(s-1)^2(s+1)}$ ∴ $-s(s^2+2s)X(s) - s = \frac{1}{s+1} - 4s^2X(s) - 4 + sX(s)$

$X(s) = \frac{1}{s(s-1)^2}\left[4 - s - \frac{1}{s+1}\right]$ $X(s)\left[s^3 + 2s^2 - 4s^2 + s\right] = 4 - s - \frac{1}{s+1}$

$X(s)\left[s^3 - 2s^2 + s\right] = 4 - s - \frac{1}{s+1}$ ~~$X(s) = \frac{1}{s(s+3)(s-1)}\left[4 - s - \frac{1}{s+1}\right]$~~

八(6 分)证明:若 $f(z)$ 在 z 平面上解析,且 $|f(z)|$ 恒大于正常数 M, 试证 $f(z)$ 为常值函数.

∵ $|f(z)| > M > 0$ ∴ $\left|\frac{1}{f(z)}\right| < \frac{1}{M}$

∴ $\frac{1}{f(z)}$ 为有界整函数 $\Rightarrow \frac{1}{f(z)} = C$

$\frac{3(s+1)-s^2}{s(s-1)^2(s+1)}$

$= \frac{3}{s(s-1)^2} - \frac{s}{(s-1)^2(s+1)}$

$= -3\left(\frac{1}{s(s-1)} - \frac{1}{(s-1)^2}\right) - \frac{s+1-1}{(s-1)^2(s+1)} = -3\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{(s-1)^2}\right) - \left(\frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^2(s+1)}\right)$

$= -3\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{(s-1)^2}\right) - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^2(s+1)}$

$= -3\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) + 2\cdot\frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s-1)(s+1)} - \frac{1}{(s-1)^2}\right)$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)$

↓

$-3(e^t - 1) + 2t - \frac{1}{2}(e^t - e^{-t} - t)$

$= -\frac{7}{2}e^t + 2t - \frac{1}{2}e^{-t} + 3 = -\frac{7}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{5}{2}t + 2$