满分同学 概率统计A知识点总结

§1.1 事件的定义及性质

1. 基本概念

① 随机试验：具有如下特征的试验 (1) 相同条件下重复进行
(E_1 E_2 …) (2) 每次试验出现的结果事先不可预言，但可明确所有结果可能出现的范围

② 随机事件：在试验中可能发生，(A、B、C…) 可能不发生的结果

③ 基本事件：试验中的每个可能的结果 是一个最简单的随机事件
{ (e_1 e_2 …)
随机事件由若干基本事件组成
随机事件发生 ⇔ 组成这一随机事件的基本事件有一个发生

④ 必然事件 S/Ω 不可能事件 ϕ

⑤ 样本空间：试验中的全部基本事件组成的集合，记S/Ω
基本事件：样本空间的元素
随机事件：样本空间子集
S/Ω = 样本空间 不可能事件 = 空集

⑥ 完备事件组
$S=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$
且 $A_1 \cdots A_n$ 互不相容
则 $A_1 \cdots A_n$ 为S的一个划分

2. 随机事件的关系及运算

① 交与并：并：A+B 或 $A\cup B$ 至少有一个事件发生 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i$
交：AB 或 $A\cap B$ A、B同时发生 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \prod_{i=1}^{n} A_i$

② 包含、相等、对立、互斥：包含 $A\subset B$ 相等 $A=B$
互斥(互不相容)：$AB=\phi$ → $P(AB)=0$
A_i 互不相容 $i=1\cdots n$ 则：任意 $i,j\in[1,n]$ 有 $A_iA_j=\phi$
互逆(互相对立)：$AB=\phi$ $A+B=S$ $B=\bar{A}$

③ 差：$A-B$：A发生，B不发生 $A-B=A\bar{B}=A-AB$

3. 随机事件的运算

① $A+S=S$ $AS=A$ $A+\phi=A$ $A\phi=\phi$
$A+\phi=A$
$AS=A$
$A+(AB)=A$
$A(A+B)=A$ 吸收律
$A+\bar{A}B=A+B$

② $A(B+C)=AB+AC$ $A+BC=(A+B)(A+C)$
$A(B-C)$
$=AB-AC$

③ 差 $A-B=A\bar{B}=A-AB$ 差化积

④ $\overline{\sum A_i}=\prod \bar{A_i}$ $\overline{\prod A_i}=\sum \bar{A_i}$ 反演律、德莫根

练习：$(A+B)-B=(A+B)\bar{B}=A\bar{B}+B\bar{B}=A-B\neq A$
$A[(A+B)-B]=A(A+B)\bar{B}=A\bar{B}$
~~(A+B)-A~~ $(A+B)-A=(A+B)\bar{A}=B\bar{A}$
代数律不能乱用
$A+(B-A)=A+B\bar{A}=A+B$
$A-B=(A+B)-B=A\bar{B}=A(\bar{A}+\bar{B})=A\bar{A}\bar{B}=A-AB$
$A+B=A+(B-A)=A+B\bar{A}$ 离散 $A+B=(A-B)+(B-A)$
$A-(B+C)=(A-B)(A-C)$
$A-BC=(A-B)+(A-C)$

1.2 概率定义及性质

1. 基本概念：

① 在同次试验中，事件发生的可能性不同

2. 古典概型：

① 定义：样本空间包含有限个基本事件，每个基本事件发生的可能性相等

古典概率：设古典概型E中的事件A包含k个基本事件，则称 $P(A)=k/n$ 为事件A的概率。

② 记号：$P_n=A_n^n$　$P_n^k=A_n^k$　$C_n^k=\frac{A_n^k}{A_k^k}=\frac{A_n^n}{A_k^k A_{n-k}^{n-k}}$

③ 排列方法：分步乘法　分类加法　不同元素重复排列（放回）　环排列

相同的排法 ↓ 有m个开头排法

环排列：从n个中选m个不同元素排成一个圆周有 $\frac{A_n^m}{m}$ 种（选有 A_n^m 中 成环除以m）

例：m黑n白 无放回 i黑的概率：无放回一排列，视排列前i位数为取的次数，有 P_{m+n} 种排法

第i个排黑有 $m\cdot P_{m+n-1}$ 种，故 $P(i黑)=\frac{m}{m+n}$

④ 性质：$0\le P(A_i)\le 1$　$P(S)=1$　A_k $k\in(1,m)$ 不相容　$P(\sum A_i)=\sum P(A_i)$　有限可加性

3. 几何概型：

① 定义 基本事件无穷多且具备某种等可能性的随机试验　$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}$　L表度量

② 性质：$0\le P(A_i)\le 1$　$P(S)=1$　$P(\sum_{i=1}^{m}A_i)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i)$　$P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$　（A_i 互不相容）

4. 统计概率的定义：（经验概率）

随试验次数n增大，A发生的频率 $f_n(A)$ 在某常数P间摆动且稳定于该常数，则称P为事件A的概率，即 $P(A)=P$

5. 概率的公理化定义：

定义：设 $P(A)$ 是定义在试验E的全部事件组成的集合F上的一个实值函数，若 $P(A)$ 满足：

- 非负性：$0\le P(A)\le 1$
- 规范性：$P(S)=1$
- 可列可加性 与有限可加性（A_i 互不相容）

性质：$P(\bar{A})=1-P(A)$ ☆，$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$

☆ $\boxed{当B\subseteq A\quad P(A-B)=P(A)-P(B)}$ → 常用 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

例题：$r\le n$　r个不同球随意放入n个不同盒子（先找基本事件总数 n^r）

1. 至少有一个盒子多于1个球　$P(e_1)=1-P(e_2)=1-\frac{A_n^r}{n^r}$

2. 只有一个盒子多于1个球，$P(e_1)=\sum_{i=1}^{n}P(e_i)=n\cdot\frac{C_r^2A_{n-1}^{r-2}+C_r^3A_{n-1}^{r-3}+\cdots C_r^rA_{n-1}^{r-r}}{n^r}=\frac{\sum_{j=2}^{r}C_r^jA_{n-1}^{r-j}}{n^{r-1}}$

N个车牌 1~N 随机抽n张（有放回），求最大号码为K的概率

$P(A)=\frac{K^n-(K-1)^n}{N^n}$

1. 条件概率公式
2. 乘法公式　　20373638 侯博
3. 全概率公式、贝叶斯公式

4. 独立事件：
- 性质
- 两两独立
- 多事件独立

1.3 条件概率及乘法公式

1. 基本常识：
① 互相独立（非互不相容）若B不影响A的发生 则 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$
② 条件概率：$P(A|B)=P(AB)/P(B)$

2. 条件概率：定义

定义：事件B发生下，事件A发生的概率

性质：① 任意A，$0\le P(A|B)\le 1$　② $P(S|B)=1$　③ 若 $A_1 \sim A_n$ 互不相容 则 $P(\sum_{i=1}^{n} A_i|B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i|B)$

④ 对任意A $P(\bar{A}|B)=1-P(A|B)$

3. 乘法公式：$P(AB)=P(A|B)\cdot P(B)=P(B|A)\cdot P(A)$

$P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_2A_1)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$

4. 全概率公式与贝叶斯公式：

当事件A的概率 $P(A)$ 比较不易计算时，找到可能导致A发生的全部原因，事件组 $B_1 \cdots B_n$

定理：设事件组 $B_1\cdots B_n$ 满足：
- $\sum_{i=1}^{n} B_i=S$
- $B_1\cdots B_n$ 互不相容
- $P(B_i)>0$

$$
\begin{cases}
P(A)=P(\sum_{i}AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i) & \text{全概率公式} \\
P(B_i|A)=\dfrac{P(AB_i)}{P(A)}=P(A|B_i)\cdot P(B_i)\Big/\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)
\end{cases}
$$

5. 独立性补充说明：

① 若 $P(B)>0$ $P(\bar{B})>0$ 则 A·B 独立 $\Leftrightarrow P(A|B)=P(A|\bar{B})$

② 概率为0||1 $\Leftrightarrow$ 与任意事件独立　概率为0非不可能事件

若A与B独立
- → A与 $\bar{B}$ 独立
- → $\bar{A}$ 与B独立
- → $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 独立

③ 多事件独立性：

定义：(1) 若 $A_1\cdots A_n$ 满足：$\forall i,j$：$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$ 则称n个事件两两独立

(2) 若 $A_1\cdots A_n$ 满足：对任意整数k 恒有 $P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k})$　$1\le i_1 < i_2 < \cdots i_k \le n$

则n个事件 $A_1\cdots A_n$ 相互独立　　相互独立 ⇒ 两两独立

④ 互不相容 ⇔ 两两互不相容

典例 a. 三人独立破译，概率：0.5 0.6 0.8 求至少两人译出密码的概率

A：至少两人译出密码 → $A=A_1A_2\bar{A_3}+A_1\bar{A_2}A_3+\bar{A_1}A_2A_3+A_1A_2A_3$
$=A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3$

为表示方式 上式四者 $\boxed{\text{互不相容}}$ ~~相互独立~~
下式并非 ~~相互独立~~ $\boxed{\text{互不相容}}$，故上式方便计算

b. $P(C-(A-B))=P(C-A\bar{B})=P(C-CA\bar{B})=P(C)-P(C)P(A)P(\bar{B})$

c. $P(A+B+C+D)=1-P(\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot\bar{D})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})P(\bar{D})$

概率统计 第2章 二

一、随机变量

定义：样本空间 $E=\{e\}$ 每个 e 有实数值 $X(e)$ 对应 叫单值实值函数 X 为随机变量

（随机事件 ⇔ 随机变量的取值
～概率 ⇔ 随机变量取值概率）

二、随机变量分布函数

定义：$F(x)=P\{X\le x\}=P\{e\in S \mid -\infty<X(e)\le x\}$

基本性质：(1) $F(x)\in[0,1]$ $F(-\infty)=0$ $F(+\infty)=1$

(2) 单调不减

(3) 右连续 $F(x_0^+)=F(x_0)$

三、离散型随机变量及概率分布

定义：X有限个/可数个实数值

随机变量X的概率分布/分布律/分布列：X取各个可能值的概率 $p_k=P\{X=x_k\}$ $k=1,2\cdots$

定理：设离散型随机变量X分布律 $p_k=P\{X=x_k\}$

(1) X分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}=\sum\limits_{x_k\le x}p_k$

(2) 区间I $P\{X\in I\}=\sum\limits_{x_k\in I}P\{X=x_k\}=\sum\limits_{x_k\in I}p_k$

(3) $p_k=F(x_k)-F(x_k^-)$

四、常用离散型随机变量及分布

A. 两点分布（0-1分布）

定义：若X的分布律为 $P\{X=1\}=p$ $P\{X=0\}=q$ $\boxed{0<p<1 \quad p+q=1}$

则X为服从参数为p的两点分布

B. 二项分布

基本概念：

$p+q=1$ $P(\bar{A})=q$ $P(A)=p$

n重伯努利试验：n次相互独立的实验 两种可能结果

二项分布：若X的分布律为 $P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$ $k=0,1,2\cdots$（不是 $P_k\{X=x_k\}$）

则X为服从参数为n p的 $0<p<1$ $q=1-p$

二项分布记 $X\sim B(n,p)$

C. 泊松分布（单位时间/空间随机事件发生次数）

定义：若X的分布律为 $P\{X=k\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $k=0,1,\cdots$ $\lambda>0$

则称X为服从参数λ的泊松分布 $X\sim \pi(\lambda)$

泊松定理：若 $X\sim B(n,p)$ 则当n较大 p较小 而 $np=\lambda$ 适中

则 $C_n^k p^k q^{n-k}\approx\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $k=0,1,2\cdots$ $(p+q=1)$

$(n\ge10$ $p\le0.1$ $\lambda=np)$

（往往用 $\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ 与 $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$）

常见：$P\{X\ge6\}=\sum\limits_{k=6}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}-\sum\limits_{k=7}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

注意 p与1-p

超几何：从N中取n次 X次 $P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$

N个n件

五、连续型随机变量及概率密度

定义：对 $F(x)$ 若存在定义于 $(-\infty,+\infty)$ 上非负可积 $f(x)$，使对任意x

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$ 则X为连续型随机变量 $f(x)$ 为X的概率密度函数/概率密度

$f(x)$ 性质：(1) $f(x)\ge0$ (2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=F(+\infty)=1$

→ 任具(1)(2)性质的可积函数 $f(x)$ 可成为某X的概率密度

分布性质 (1) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$ 连续

(2) 若 $f(x)$ 在 x_0 连续 则 $F(x)$ 在 x_0 可导且 $F'(x_0)=f(x_0)$

若 $f(x)$ 分段连续 不连续点有限 则 $F'(x)=f(x)$

(3) $P\{X=x\}=0$

(4) $P\{X\in I\}=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$ I：不用管开闭 a-b

为相应 $f(x)$ 所围下的面积（上下限值相减即可）

六、常用连续型随机变量及分布

A. 均匀分布：若X概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & 其它\end{cases}$ 则X服从 $[a,b]$ 均匀分布 $X\sim U[a,b]$

$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & \\ 1 & x>b\end{cases}$

B. 指数分布：概率密度 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge0\\ 0 & x<0\end{cases}$ $X\sim e(\lambda)$

$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & x\ge0\end{cases}$

$\int_0^{+\infty}t^x e^{-t}\,dt=(x-1)!$

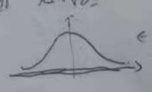
$E(X-\mu)^{2k}=\sigma^{2k}(2k-1)!!$

$E|X-\mu|^{2k+1}=\sigma^{2k+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,2k!!$

C. 正态分布：$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1$ $EX=0$

定义：若 $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$ $-\infty<\mu<+\infty$ $\sigma>0$ 则 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

性质：$x=\mu$ 时对称 X轴渐近 $x=\mu$ 拐点



← 求对称用 $\Phi(x)$ ☆

D. 标准正态分布

定义：$\mu=0$ $\sigma=1$ 的 $N(\mu,\sigma)$

概率→ $\varphi(x)$ 分→ $\Phi(x)$

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ 性质

1. $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$ 2. $\Phi(0)=\frac{1}{2}$ 3. $\Phi(x)$ 单调

3. 一般与标准的关系：$F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$？

，经常 $P\{a\le X\le b\}=F(b)-F(a)=\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

4. 下α分位点

定义：$X\sim N(0,1)$ $P\{X\le z_\alpha\}=\Phi(z_\alpha)=\alpha$ z_α 为 $N(0,1)$ 下α分位点

→ $z_{1-\alpha}=-z_\alpha$ → $P\{|X|>z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha$

→ $P\{X>z_{1-\alpha}\}=\alpha$

概论 第3章 二维随机变量 三

一、

定义1：样本空间 $\{e\}$ $X=X(e)$ $Y=Y(e)$ 为定义在S上的两随机变量，由两个随机变量组成的向量 (X,Y) 为二维随机变量/向量

定义：设 (X,Y) 为二维随机变量，对任 x,y $F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$ 称二维随机变量分布函数 / X与Y的联合分布函数

性质：1) $0\le F(x,y)\le 1$ $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0$ (对于 $\infty\to 1$)

满足1~3 则为分布函数：
2) 对 x / y 单调不减，右连续
3) $0\le P\{x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2\} = F(x_2,y_2)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)$

拓展：记 $X_i=X_i(e)$ $(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 构成n维随机变量(有序)

经常：$P\{X>x_1, Y<y_2\}=P\{x_1<X<+\infty, -\infty<Y<y_2\}$

二、二维离散型随机变量

定义：若 (X,Y) 的取值为有限对/可列对，分布律：记 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=P_{ij}$ 为二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布/分布律/分布列 公式法/列表法

性质：$P_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_j\}\ge 0$ $\sum P_{ij}=1$

$F(x,y)=\sum_{x_i\le x, y_j\le y} P_{ij}$

$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$
→ 函数的分布 $=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}$
$F_Z(z)=P\{(x,y)\in D\}$
$=\iint f(x,y)dxdy$ 但求是基于上

$P\{\ \}=P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy$

求概率分布

F_{max} F_{min} $F(x,y)\rightleftarrows f(x,y)$ → $f_Z(z)$ $z=x+y$

$F_X(x)$ $F_Y(y)$ $\rightleftarrows$ $f_X(x)$ $f_Y(y)$

三、二维连续型随机变量 → 独立?

定义：设 (X,Y) 分布函数 $F(x,y)$ 若对非负可积 $f(x,y)$ 对任 x,y 有 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$ 则 (X,Y) 为二维连续型随机变量，称 $f(x,y)$ 为 (X,Y) 的概率密度，或X和Y的联合概率密度

性质：(1) $f(x,y)\ge 0$ (2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$ 满足(1)(2)为概率密度

→ 若 $f(x,y)$ 在 (x,y) 连续，则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

→ $P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy$ $F(x,y)=\iint_{u\le x, v\le y} f(u,v)dudv$

$P\{a<X\le b, c<Y\le d\}=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy$

如：$Z=$ [illegible] 求 $f_Z(z)$

常用的二维连续型随机变量

1. 均匀分布：若 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A} & (x,y)\in D\\ 0 & 其它\end{cases}$ 若A为D面积，则 (X,Y) 在D服从均匀分布记 $(X,Y)\sim U(D)$

2. 二维正态分布

若 $f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$ (略) $\sigma_1>0$ $\sigma_2>0$ $|\rho|<1$ $-\infty<\mu_1,\mu_2<+\infty$

则 (X,Y) 服从 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$

四、边缘分布函数

定义：$F(x,y)$ 为 (X,Y) 联合分布函数 ~~分量X的分布函数 $F\{X\le x\}$~~

分量X分布函数 $F(x)=F(x,+\infty)$ 记为 $F_X(x)$ 边缘分布函数

分量Y分布函数 $F(y)=F(+\infty,y)$ 记为 $F_Y(y)$。(F图上无穷远处的极上的点)

2. 边缘分布律(离散) ③

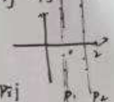
定义：(X,Y) X,Y均离散 X分布律称 (X,Y) 关于X的边缘分布律，Y分布律称 (X,Y) 关于Y的边缘分布律

定理：设 (X,Y) 分布律 $P_{ij}=\{X=x_i, Y=y_j\}$

则 $P\{X=x_i\}=P\{X=x_i, -\infty<Y<+\infty\}=\sum_j P_{ij}=P_{i\cdot}$

$P\{Y=y_j\}=P\{-\infty<X<+\infty, Y=y_j\}=\sum_i P_{ij}=P_{\cdot j}$

以X为例。



3. 条件分布律，离散

定义：一分量取某定值 另一分量分布律 (X,Y) - P_{ij}

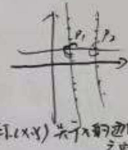
(1) 若 $P\{X=x\}>0$ $P\{Y=y_j|X=x\}=\frac{P\{X=x, Y=y_j\}}{P\{X=x\}}$

称在 $X=x$ 条件下，Y的分布律

(2) 若 $P\{Y=y\}>0$ $P\{X=x_i|Y=y\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y\}}{P\{Y=y\}}$

称在 $Y=y$ 条件下 X的分布律

以X为例



4. 边缘概率密度

定义：(X,Y) $f(x,y)$ X概率密度记为 $f_X(x)$ 称 (X,Y) 关于X的边缘概率密度

Y概率密度记为 $f_Y(y)$ 称…关于Y的边缘概率密度

→ $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$ (由 $F(x,y)=\iint f(u,v)dudv$

→ $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$ $F_X(x)=F_X(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv$

$=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$

→ X为连续随变

→ $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

注：若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$

则 $f_X(x)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\}$ $f_Y(y)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\}$

→ $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ — 联想求条件概率

5. 条件分布函数(与3区别)(3是从条件分布律入手)

定义：对 (X,Y) 若 $\lim_{\varepsilon\to 0^+} P\{X\le x | y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}$ 存在，则称其为在 $Y=y$ 下X的条件分布函数，即 $F_{X|Y}(x|y)=P\{X\le x|Y=y\}$

$=\lim_{\varepsilon\to 0} P\{X\le x | y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}$

用 $F_{X|Y}(x|y)=\lim=\frac{P\{X\le x, <Y\le\}}{P\{<Y\le\}}=\frac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y-\varepsilon)}{F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y-\varepsilon)}$

$=\frac{\partial F(x,y)/\partial y}{dF_Y(y)/dy}=\frac{\int_{-\infty}^{x} f(x,y)du}{f_Y(y)}$

→ $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ $(f_Y(y)\ne 0)$ 为 $Y=y$ 下X的条件概率密度

$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ $(f_X(x)\ne 0)$ 为 $X=x$ 下Y的条件概率密度 一元

5. 相互独立随机变量

定义：若X,Y 对任x,y有 $P\{X\le x, Y\le y\}=P\{X\le x\}\cdot P\{Y\le y\}$ 则称X,Y相互独立

即 随机变量X,Y相互独立 ⟺ $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$。

● 离散：二维离散型随机变量 (X,Y) P_{ij} X与Y独立 ⟺ $P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}$ 即 $P_{ij}=P_{i\cdot}P_{\cdot j}$

③ 连续：设二维连续随机变量 (X,Y)

定义：$f(x,y)$　$f_X(x)$、$f_Y(y)$ 为边缘概率密度

X、Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

注：若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$ 则 X、Y 相互独立 $\Leftrightarrow \rho=0$

推广：$X_1\cdots X_n$ n 随　任 n 实 $x_1\cdots x_n$

$P\{X_1\le x_1,\cdots X_n\le x_n\}$

$=\prod_{i=1}^{n} P\{X_i\le x_i\}$

则 $X_1\cdots X_n$ 相互独立　$F(x_1\cdots x_n)=F_{X_1}(x_1)\cdots F_{X_n}(x_n)$

$f(x_1\cdots x_n)=f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_n}(x_n)$

第4章：随机变量函数的分布：　四

一、离散型随机变量函数分布：（一维：分布律，二维：联合分布律）

1. 一维：

定理：离随 X $P\{X=x_i\}=p_i$

(1) 若不同 x_i 对 $y_i=Y=g(X)$ 的取值 $g(x_i)=y_i$ 不同 则：

$P\{Y=y_i\}=p_i$

(2) 若可列无穷/有限个 x_{ik} $g(x_{ik})=y^*$ 则

$P\{Y=y^*\}=P\{g(X)=y^*\}=\sum_k P\{X=x_{ik}\}$

2. 二维：设二离 (X,Y) 的分布律 p_{ij}（联合）

(1) 不同值：对于 (X,Y) 不同取值 (x_i,y_j) 随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的取值 $g(x_i,y_j)$ 也不同 则 $Z=g(X,Y)$ 分布律

$P\{Z=z_{ij}\}=P\{g(X,Y)=g(x_i,y_j)\}=P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$

(2) 有限可列无穷等值 $P\{Z=z^*\}=\sum_k P\{X=x_{ik},Y=y_{jk}\}$

注：若 $X\sim\pi(\lambda_1)$ $Y\sim\pi(\lambda_2)$ X、Y 相互独立 则 $Z=X+Y\sim\pi(\lambda_1+\lambda_2)$

$P\{Z=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i\}P\{Y=k-i\}=\sum_{i=0}^{k}\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!}\cdot\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}$

$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}$

$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$　得证

二、一维连续型随机变量函数的分布：（~~先求分布函数~~）具体分析

一般方法：设 $Y=g(X)$，连随 X 概率密度 $f(x)$

$F_Y(y)=P\{g(X)\le y\}=P\{X\in I_y\}=\int_{I_y}f(x)dx$

(1) $Y=g(X)$ 严格单增且可导，有连续导数，$F_Y(y)=F_X(h(y))$　积分时判断状况

$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(h(y))h'(y)$

(2) $Y=g(X)$ 严格单减 $F_Y(y)=1-F_X(h(y))$　$f_Y(y)=-f_X(h(y))h'(y)$

定理：设 $X\to f(x)$ 严格单调且可导 则 $Y=g(X)$ 为连续型随机变量

$f_Y(y)=\begin{cases}f(h(y))|h'(y)| & y\in(c,d)\\ 0 & 其它\end{cases}$　$\to(c,d)$ 为 $y=g(x)$ $x\in(a,b)$ 的值域

例：$X\sim N(\mu,\sigma)$　$F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

$\Rightarrow$ 若 $y=g(x)$ 非严格单调 但在不重叠区间 $I_1\cdots$ 上严格单调 其反 $h_1(y)\cdots$ 且其均有连续导数 则 $Y=g(X)$ 为连续型随机变量。

其概率密度：$f_Y(y)=\begin{cases}f[h_1(y)]|h_1'(y)|+\cdots f[h_n(y)]|h_n'(y)|+\cdots & y\in I^*\\ 0\end{cases}$

其 I^* 是使 $h_1'(y)\cdots h_n'(y)$ 连续的集合

三、二维连续随机变量函数的分布：

A. $Z=X+Y$ 的分布：从概率入手

$F_Z(z)=P\{(X,Y)\in D_z\}=\iint_{D_z}f(x,y)dxdy$

$=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,u-x)dx\,du$　$(y=u-x)$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{AB}f(x,z)dx$　积分时注意 Z 的范围

同理 $F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u-y,y)dy\,du$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy=\int_{BA}f(x,y)dx$

$\to$ 若 X、Y 独立 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\cdot f_Y(z-x)dx$

此时 $f_Z(z)$ 也为 $f_X(x)$ 与 $f_Y(x)$ 的卷积 记为 $f_X(z)*f_Y(z)$

△推广：$Z=aX+bY+c$　a、b 不全为 0

若 $b\ne0$ 则 $f_Z(z)=\frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

若 $a\ne0$ 则 $f_Z(z)=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$

注：① 若 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ 且 X_i 相互独立

则 $Z=\sum_{i=1}^{n}k_iX_i\sim N(\sum_{i=1}^{n}k_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}k_i^2\sigma_i^2)$　这是正态分布卷积，分布有再推性质

$Z=(\sum_{i=1}^{n}k_iX_i)+b\sim N((\sum_{i=1}^{n}k_i\mu_i)+b,\sum_{i=1}^{n}k_i^2\sigma_i^2)$

② 若 n 元随变 $(X_1\cdots X_n)$ 服从 n 元正态分布 $\Leftrightarrow X_1\cdots X_n$ 任代线性组合 $l_0+l_1X_1+\cdots l_nX_n$ 服从一元正态分布 其中 $l_1\cdots l_n$ 不全为 0

B. $Z=\max(X,Y)$ 的分布　从分布入手

$\begin{cases}F_Z(z)=P\{X\le z,Y\le z\}=F(z,z)=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{z}f(x,y)dxdy\\ f_Z(z)=F_Z'(z)\end{cases}$

若 X、Y 独立 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)\to F_Z(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)$

$\to X_i$ 相独 $Z=\max\{X_i\}$ $F_Z(z)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(z)=F_X(z)^n$（独同）

$F(x,y)\xleftarrow{①}f(x,y)$　F_X、F_Y $\xleftarrow{②}$ f_X、f_Y

C. $Z=\min(X,Y)$ 的分布

$F_Z(z)=1-P\{X>z,Y>z\}=1-[F(\infty,\infty)-\cdots+F(z,z)]$

$=F_X(z)+F_Y(z)-F(z,z)$　若四阶直接考虑 z 范围就行

注意 $P(A+B)$

$=P\{X\le z\cup Y\le z\}=P\{X\le z\}+P\{Y\le z\}-P\{X\le z,Y\le z\}$

$=F_X(z)+F_Y(z)-F(z,z)$

$\begin{cases}=F_X(z)+F_Y(z)-F(z,z) & ①\\ =1-\int_{z}^{+\infty}\int_{z}^{+\infty}f(x,y)dxdy & ②\end{cases}$ ★

若 X、Y 独立：$F_{\min}(z)=1-P\{X>z,Y>z\}=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

$\to n$ 个独立 $=1-\prod_{i=1}^{n}[1-F_{X_i}(z)]=1-[1-F_X(z)]^n$（独同）

第五章 随机变量数字特征　　五

一、数学期望

1. 离散随机变量数学期望

定义：设 X 分布律 $P(X=x_i)=p_i$，若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛

（即 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k$ 收敛）则 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为 X 的数学期望

$E(X)=EX=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$

→ X 是符号

2. 离散随机函数的期望：

$Y=g(X)$，$g(x)$ 连续，若 $\sum$ 绝对收敛

$EY=E(g(X))=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k$

3. 连续型随机变量数期，X·f(x)

定义：若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ 绝对收敛，则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ 为 X 数期

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

4. 连续随机函数数期

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot f(x)\,dx$　　随机变量与函数分布作比较

故 $=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)\,dx\,dy$，$\int f(x,y)\,dy = f_X(x)$

5. 随机向量函数的数学期望

设 (X,Y)，g(x,y) 为连续函数，那么 $Z=g(X,Y)$ 为随机变量

(1) (X,Y) 离散：

$E(Z)=EZ=E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j p_{ij}\, g(x_i,y_j)$（绝对收敛）

(2) (X,Y) 连续：

$EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)\,dx\,dy$

6. 数学期望性质：

1. $E(C)=C$　2. $E(CX)=CEX$　3. $E(X+Y)=EX+EY$　　设 $X=\sum X_i$，$E X=\sum E X_i$

4. X、Y 相互独立 $E(XY)=EX\cdot EY$（X_i 相互独立 $E(\prod X_i)=\prod EX_i$）

（防止概率部分别求 E）

二、方差

1. 定义：若 $E[X-E(X)]^2$ 存在，则其为 X 方差，记 DX 或 Var(X)

$\sqrt{DX}$ 为均方差/标准差

计算：

- 离：$DX=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-EX)^2 p_i \geq 0$
- 连：$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2 f(x)\,dx \geq 0$
- 常用：$DX=EX^2-(EX)^2$　　$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$　注意奇偶性

2. 性质：

(1) $D(C)=0$　(2) $D(kX)=k^2DX$　(3) 若 X、Y 独立 $D(X+Y)=DX+DY$，$D(X-Y)=DX+DY$　　X_i 相互独立 $D(\sum k_iX_i)=\sum k_i^2 DX_i$

(4) $DX=0 \Leftrightarrow P\{X=EX\}=1$

三、常用随机变量的期望、方差

1. $X\sim B(1,p)$　$EX=p$　$DX=p-p^2=p(1-p)$
2. $X\sim B(n,p)$　$X=\sum X_i$　$X_i\sim B(1,p)$　$EX=np$　$DX=np(1-p)$
3. $X\sim \pi(\lambda)$　$P\{X=k\}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$　$EX=\lambda$　$DX=\lambda$
4. X 在 [a,b] 上均匀分布　$EX=\frac{a+b}{2}$　$DX=\frac{(b-a)^2}{12}$
5. $X\sim E(\lambda)$　$EX=\frac{1}{\lambda}$　$DX=\frac{1}{\lambda^2}$　　$1e^{-1}$　$2e^{-2}$　$3e^{-3}$…
6. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$　$EX=\mu$　$DX=\sigma^2$

证明下 3：$DX=\int(x-\mu)^2 f(x)\,dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$（换元 + 分部）

$EX=\int x f(x)=\int(x+\mu-\mu)f(x)\,dx = \mu\int f(x)\,dx=\mu$　注意奇偶

X：正态分布性质小结：

定理：设 $(X_1\cdots X_n)\sim N$ 元正态分布 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\sim N(\mu,\sigma^2)$

1. 且任线 $l_0+l_1X_1+\cdots+l_nX_n$（$l_1\cdots l_n$ 不全0）服从一元正态分布

X_1、X_2 相互独立 $\Leftrightarrow (X_1,X_2)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$ 且 ρ 为 0

定理：设 $X_1\cdots X_n, X_{n+1}\cdots X_{n+m}$ 相互独立，$g(x_1\cdots x_n)$，$h(y_1\cdots y_m)$ 为连续函数，设 $Y_1=g(X_1\cdots X_n)$，$Y_2=h(X_{n+1}\cdots X_{n+m})$

则 Y_1、Y_2 独立　　X、Y 独立，则 X^2、Y^2 也独立

四、协方差与相关系数

一、定义：$E[(X-EX)(Y-EY)]$ 为随机变量 X、Y 协方差，记 cov(X,Y)

正：同向　负：反向变化　0：无相关性

$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY$　（$\mathrm{cov}(X,X)=DX$）

性质：1. $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,X)$　2. $\mathrm{cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$

3. $\mathrm{cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{cov}(X_1,Y)+\mathrm{cov}(X_2,Y)$　　$\rho_{XY}=0$ 也不一定 0 相关性

4. 若 X、Y 相互独立 $\mathrm{cov}(X,Y)=0$　但 $\mathrm{cov}(X,Y)=0$ 未必独立

$E(XY)=\mathrm{cov}(X,Y)+EX\cdot EY$

5. $D(X+Y)=DX+DY+2\mathrm{cov}(X,Y)$

$D(X-Y)=DX+DY-2\mathrm{cov}(X,Y)$　　$D(XY)=E(XY)^2-[E(XY)]^2$

X、Y 独立 → $D(X+Y)=DX+DY$ ← 不一定，仅说明 $\mathrm{cov}(X,Y)=0$　　$DX+DY=D(X+Y)$

二、相关系数：证不相关 → $DX\neq0$ $DY\neq0$ $\mathrm{cov}(X,Y)=0$

定义：称 $\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$，$DX\cdot DY\neq0$ 为 X、Y 相关系数/标准协方差

记作 ρ_{XY} 简写 ρ → $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\mathrm{cov}(X^*,Y^*)$

1. 若 X 与 Y 相关系数为 0，则称 X、Y 不相关

$\Leftrightarrow \rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=0 \Leftrightarrow$ 当 $DX\neq0$ $DY\neq0$ 且 $\mathrm{cov}(X,Y)=0$ 时，X、Y 不相关

（若允许 $DX=0$ 则 $\mathrm{cov}(X,Y)=0$ 但 $X=0\cdot Y+EX$ 是相关的）

2. X、Y 独立 ⇒ $\rho_{XY}=0$ ⇒ 不相关　不相关 ↛ 独立

性质：对 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

① $|\rho|\leq1$　② $|\rho|=1 \Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}$ 即 a、b 为常数

柯西—施瓦茨：(1) $[E(XY)]^2\leq E(X^2)E(Y^2)$

(2) 等式成立 $\Leftrightarrow \exists t_0$　$P\{Y=t_0X\}=1$

1 ⇒ $|\mathrm{cov}(X,Y)|=|E[\ \ ]|\leq\sqrt{DX}\sqrt{DY}$　当 $\rho=1$ 时 $Y=t_0X$

定理：设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho)$ ⇒ $\mathrm{cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$，$\rho_{XY}=\rho$

由前面 $\rho=0$ → 独立　在此特殊情况 $\rho_{XY}=0 \Leftrightarrow$ 独立　此情况下不相关⇔独立

五、矩、协方差矩阵：设 X、Y 为随

联系六章　与样本矩区分

定义：若 $E(X^k)$ 存在，则其为 X k 阶原点矩

若 $E(X-EX)^k$ 存在，则其为 X k 阶中心矩

$E(X^kY^l)$：k+l 阶原点混合矩，$E(X-EX)^k(Y-EY)^l$ k+l 阶中心混合矩

$E|X|^k$ k 阶原点绝对矩　$E|X-EX|^k$ k 阶中心绝对矩）

定义：对n维随机向量 $(X_1, \dots, X_n)$ 若 $c_{ij}=\mathrm{cov}(X_i, X_j)$ 存在 则矩阵

$C=(c_{ij})_{n\times n}$ 为n维随机向量的协方差矩阵（对称矩阵）

1.二维正态：$C=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$ $C^{-1}=\frac{1}{\det C}\begin{pmatrix}\sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2\\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2\end{pmatrix}$ $\det C=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$

$\rightarrow f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi(\det C)^{\frac{1}{2}}}\exp\{-\frac{1}{2}(X-U)'C^{-1}(X-U)\}$ $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\end{pmatrix}$ $U=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\ \vdots\end{pmatrix}$

$\rightarrow f(x_1 \dots x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det C)^{\frac{1}{2}}}\exp\{-\frac{1}{2}(X-U)'C^{-1}(X-U)\}$

六

第六章、大数定律与中心极限定理

一、马尔可夫不等式：

设X存 $E|X|^k$ $k>0$ 任 $\varepsilon>0$ 有 $P\{|X|\geq\varepsilon\}\leq\frac{E(|X|)^k}{\varepsilon^k}$ $k>0$ 是 $E(|X|^k)$

$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{E|X-EX|^k}{\varepsilon^k}$ $k>0$

契比雪夫不等式：$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$ ε可以用数值 $\varepsilon=m\sigma$

$P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$

$(P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}=\sum_{|x_i-EX|\geq\varepsilon}P\{X=x_i\}\leq\sum\frac{(x_i-EX)^2}{\varepsilon^2}P\{X=x_i\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2})$

二、大数定律

定义：依次列出的随机变量 $X_i\rightarrow\{X_n\}\rightarrow$ 随机变量序列

定义：若对 $\{X_n\}$ 与 X 有 任意ε $\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1$ 或 $\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}=0$

则 $\{X_n\}$ 依概率收敛于 X $X_n\xrightarrow{P}X$（X可以为常数a）

1. 契比雪夫大数定律：→ DXi 同时有上界

设 $X_1 \dots X_n$ 为相互独立的随机变量 EX_i 且有 DX_i 方差有公共上界

则对任意 $\varepsilon>0$ $\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i|<\varepsilon\}=1$

Y_n EY_n

→若 $\{X_n\}$ 独立 且 EX_i DX_i 相同 则 $\forall\varepsilon>0$ $\lim_{n\to\infty}P\{|\bar{X}-\mu|<\varepsilon\}=1$ $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum X_i$

2. 辛钦大数定律：样本均值→总体均值

若 $\{X_n\}$ 独立同分布 存在同期望 $EX_i=\mu$ 则 $\forall\varepsilon>0$ $\lim_{n\to\infty}P\{|\bar{X}-\mu|<\varepsilon\}=1$

3. 伯努利大数定律：

n_A 为 n 次独立重复试验中 A 发生次数 P为每次A发生的概率

任 $\varepsilon>0$ $\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{n_A}{n}-p|<\varepsilon\}=1$. $(X_i \sim \{^1_0$ 发生 不发生 用以下的概率替代频率

$\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}=p$ × 依概率收敛 这个可能性可以 证明） 严格理解

三、中心极限定理：

定理

独立同分布的中心极限定理：

设 $\{X_n\}$ 独立同分布 且存在有限数学期望与方差 $DX_i\neq 0$

$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ $Y_n^*=\frac{Y_n-EY_n}{\sqrt{DY_n}}=\frac{\sum X_i-nEX_i}{\sqrt{nDX_i}}$ 独立 与上式结合

则 $\lim_{n\to\infty}F_{Y_n^*}(x)=\lim_{n\to\infty}P\{Y_n^*\leq x\}=\lim_{n\to\infty}P\{\frac{\sum X_i-EX_i}{\sqrt{nDX_i}}\leq x\}=\Phi(x)$

n充分大，Y_n^* 近似服从 $N(0,1)$ $Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 近似服从 $N(n\mu, n\sigma^2)$

德莫弗-拉普拉斯定理：

μ_n 为 n 次独立试验 P为A概率 在区间 $[a,b]$ $(\mu_n=\sum_{i=1}^{n}X_i)$ 二项分布时用 中心极限定理 时间

$\lim_{n\to\infty}P\{a<\frac{\mu_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq b\}=\int_a^b\Phi(b)-\Phi(a)$ 其它同样方法

第七章 数理统计（7~9章）统计量及其分布

一、总体与样本

总体 个体

总体：随机变量X取值的全体 总体的分布、X的分布 所以总体 随机变量

样本值：从一个总体X中有放回重复抽样 n个 $x_1 \sim x_n$ 为样本观察值 → 样本值

$x_1' \dots x_n'$ 不与 $x_1 \dots x_n$ 可能变化

用 $X_1 \dots X_n$ 作为来自总体X样本容量为n $x_1 \dots x_n$ 为 $X_1 \dots X_n$ 的一组观察值

样本可视为 n 个相互独立同分布的随机变量 $X_1 \dots X_n$

样本分布：设总体X分布 $F(x)$ $X_1 \dots X_n$ 为来自X的样本

$F_{X_i}(x_i)=F(x_i)$ $F(x_1 \dots x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i)$ 为样本分布

二、样本与统计量

定义：统计量 $g(X_1 \dots X_n)$ 且不含总体未知参数的函数表达式 → 统计量

1. 样本矩：设 $X_1 \dots X_n$ 为来自总体X的一个样本

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum X_i$ 样本均值 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 样本方差

$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 样本k阶矩 $B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k$ 样本k阶中心矩

上述样本矩均为随机变量

$E(\bar{X})=E(X)$ $D(\bar{X})=\frac{DX}{n}$ $ES^2=DX$ $(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-EX_i)^2-n(\bar{X}-EX)^2$

2. 顺序统计量与经验分布函数：

一组观测值 $x_1 \dots x_n$ 从小到大排列为 $x_1^* \dots x_n^*$ 对应 $X_1^* \dots X_n^*$ 为一组顺序统计量

函数， $F_n(x)=\begin{cases}0 & x<x_1^*\\ \frac{1}{n} & x_1^*\leq x<x_2^*\\ \frac{k}{n} & x_k^*\leq x<x_{k+1}^* \quad k=2 \dots n-1\\ 1 & x>x_n^*\end{cases}$ 单调不减右连续 → 总体X经验分布函数

格里汶科： $F_n(x)$ 以概率1一致收敛于 $F(x)$ $P\{\lim_{n\to\infty}\sup_{-\infty<x<+\infty}|F_n(x)-F(x)|=0\}=1$

三、统计量的分布：

1. 正态分布总体样本线性函数的分布：

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $X_1 \dots X_n$ 为样本 样本线性函数 $Y=a_1X_1+\dots a_nX_n+b$

$EY=\mu\sum a_i+b$ $DY=\sigma^2\sum a_i^2$ 注 $X\sim N(0,1)$ $X^2\sim\chi^2(1)$

$Y\sim(EY, DY)$

$\rightarrow\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ 与 $\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

2. $\chi^2(n)$ 分布：→不要求独立时 $E\sum()=\sum E()$

定义：X_i 相互独立 均 $X_i\sim N(0,1)$ 则 $\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 为服从n 个自由度 卡方分布 $\chi^2\sim\chi^2(n)$

下α分位点：$P\{\chi^2\leq\chi^2_\alpha(n)\}=\alpha$ 则 $\chi^2_\alpha(n)$ 为 χ^2 下α分位点

当n过大时 $\chi^2_\alpha(n)\approx\frac{1}{2}(Z_\alpha+\sqrt{2n-1})^2$

$P(\chi^2)$-若→看是否可转化为 $\sum X_i^2$ $X_i\sim(0,1)$

性质：$EX=n$ $DX=2n$

定理：$X_1^2\sim\chi^2(n_1)$ $X_2^2\sim\chi^2(n_2)$ 且 X_1 X_2 相互独立 则 $X_1+X_2\sim\chi^2(n_1+n_2)$

推论：设 $X_1 \dots X_n$ 相互独立 均服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 则 $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立

且 $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$ $\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ $[(n-1)S^2=\sum_{i=2}^{n}Y_i^2]$

3. t分布：

定义：设 $U\sim N(0,1)$ $V\sim\chi^2(n)$ 且U V独立 则 $T=\frac{U}{\sqrt{V/n}}$ 服从自由度为n的t分布 $T\sim t(n)$

下α分位点：$P\{T\leq t_\alpha(n)\}=\alpha$ （n大时 $t_\alpha(n)\approx Z_\alpha$

双侧分位点：$P\{|T|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\}=\alpha$.

定理 $X_1 \dots X_n$ 独立同 $N(\mu,\sigma^2)$ 则 $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{S}\sim t(n-1)$

定理5：设 $X_1 \cdots X_m$，$Y_1 \cdots Y_n$ 分别为 $N(\mu_1, \sigma^2)$，$N(\mu_2, \sigma^2)$ 的独立样本，

则 $T = \dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}} \sqrt{\dfrac{mn(m+n-2)}{m+n}} \sim t(m+n-2)$

④ F分布：

定义：设 $X \sim \chi^2(n_1)$，$Y \sim \chi^2(n_2)$，X与Y独立，则 $F = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$

服从自由度为 (n_1, n_2) 的F分布 $F \sim F(n_1, n_2)$

α分位点：$P\{F \le F_\alpha(n_1, n_2)\} = \alpha$

$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$

$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = (x-1)!$

第八章 参数估计：点估计，区间估计。

样本X的取值依概率收敛于总体X的取值。

一、点估计：估计总体分布中的某个参数。

令样本矩→总体矩

1. 矩估计法：令 $(X_1 \cdots X_n)$ 为矩估计量，$\hat{\theta}(x_1 \cdots x_n)$ 为矩估计值

令 $EX = \frac{1}{n}\sum X_i$

令 $EX^2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2$

步骤：已知 $EX = \int x f(x) dx$ 或 $EX^2 = \int x^2 f(x) dx$ 之后

一次具体抽取：$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$，$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = s^2$

2. 极大似然估计法：样本 $\xrightarrow{\text{最有可能性}}$ 未知参数估计值

定义：1. 离散 $L(\theta) = L(x_1 \cdots x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p\{x_i; \theta\}$ 为似然函数

$(X_1 \cdots X_n$ 取到 $x_1 \cdots x_n$ 概率为 $P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2 \cdots\} = \pi P\{X_i = x_i\} = \pi p(x_i; \theta)$

2. 连续：$L(\theta) = L(x_1 \cdots x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f\{x_i; \theta\}$

中间可以用分布律

若 $L(\theta)$ 在 $\theta = \hat{\theta}$ 时达最大，则 $\hat{\theta}$ 为 θ 的极大似然估计值

0-1分布：$P\{X = x\} = p^x(1-p)^{1-x}$，$x = 0, 1$

$\hat{\theta}(X_1, X_2 \cdots X_n)$ 为极大似然估计量

（常转为 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = 0$ 求解）

两参数情形极大似然估计。

若X的概率密度为 $f(x; \theta_1, \theta_2)$，则其中 θ_1, θ_2 为未知参数，$x_1 \cdots x_n$ 为样本观察值 $L(x_1 \cdots x_n; \theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1, \theta_2)$

解方程组 $\dfrac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_i} = 0$ 即可求得极大似然估计 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$

二、点估计的优良性

(1) 无偏估计：设 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量，若 $E(\hat{\theta}) = \theta$（真值），则 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏（无偏性）估计。样本均值 $\bar{X} = \sum X_i / n$ → 总体 EX

样本方差 $S^2 = \sum (X_i-\bar{X})^2 / (n-1)$ → 总体 DX

(2) 最小方差无偏估计（有效性）：$\hat{\theta}$ 为 θ 无偏，任 $\hat{\theta}'$ 为 θ 无偏，$D(\hat{\theta}) \le D(\hat{\theta}')$

(3) 一致估计（相合性）：设 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量，若 $\hat{\theta}$ 依概率收敛于θ，对任 ε>0，$\lim P\{|\hat{\theta}-\theta| < \varepsilon\} = 1$，则 $\hat{\theta}$ 为θ一致性估计

（与契比雪夫不等式，先确定 $P\{|X-EX| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$，DX越趋于0 → 再取极限）

三、区间估计（θ与$\hat{\theta}$差多少，点估计精确程度？）

置信区间：设X一参数θ，$X_1 \cdots X_n$ 为样本，对给定 α∈(0,1)，估计量 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 满足

$P\{\hat{\theta}_1(X_1 \cdots X_n) \le \theta \le \hat{\theta}_2(X_1 \cdots X_n)\} = 1-\alpha$，则称 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 为θ的对应于置信度为 1-α 的置信区间。

注 $\hat{\theta}(X_1, X_2 \cdots X_n)$ 为随机变量，$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 为随机区间，置信区间长度表明误差越小越好。

单侧置信限 $P\{\theta \ge \hat{\theta}(X_1 \cdots X_n)\} = 1-\alpha$，称 $[\hat{\theta}_1, +\infty)$ 为θ相应于置信度为1-α的单侧置信区间

四、正态分布均值与方差的区间估计

一、均值 $EX = \mu$ 的区间估计

1. $DX = \sigma_0^2$ 已知，对 $EX = \mu$ 进行区间估计 $P\{\bar{X}-\delta \le \mu \le \bar{X}+\delta\} = 1-\alpha$

⇒ ∵ $U = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

∴ $P\{|\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}| \le Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha$

∴ $[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{1-\frac{\alpha}{2}}]$ 为μ的置信度为 (1-α) 的置信区间

求单侧置信限时 $P\{\mu > \mu_1\} > 1-\alpha$ → $P\{U < Z_{1-\alpha}\} = 1-\alpha$ 求上限 $P\{U \ge Z_\alpha\} = 1-\alpha$

因为是 $\bar{X}-\mu$ 变号

对于具体样本值 将 $\bar{X}$ → $\bar{x}$ 即可

2. DX未知，对 $EX = \mu$ 进行区间估计 使 $P\{\mu \in [a, b]\} = 1-\alpha$

∵ $T = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

上述过程同样适用

知 $P\{|T| \le t_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha$

∴ $[\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}]$

二、方差DX的区间估计（总体均值未知）

对 $DX = \sigma^2$ 进行区间估计 考虑 $Y = \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$

考虑 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 与 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ $P\{\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = \frac{\alpha}{2}$

$P\{\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = 1-\frac{\alpha}{2}$ 不唯一 $\frac{\alpha}{3}$ 与 $1-\frac{2\alpha}{3}$ 等均可

∴ $P\{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \_ < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = 1-\alpha$

故置信区间为 $[\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}]$ σ的置信区间开根号

第九章 假设检验：假设 - 抽样 - 根据结果判断是否成立。

（对分布或参数）总体参数或假设

一、参数假设检验：

理论依据：实际推断原理，小概率一次不可能发生

二、正态分布均值与方差的假设检验：

1. σ^2 已知，μ的双边检验，$\sigma = \sigma_0$

提出假设：$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \ne \mu_0$

H_0 为真时：构建 $U = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ $U = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

给定检验水平α $P\{|U| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$ $\{|U| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$ 为小概率事件

∴ 拒绝域为 $|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

计算 $u = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$ 查表得 $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

若 $|u| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 拒绝 H_0 接受 H_1，否则接受 H_0

弃真 拒绝 H_0 即 $|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$（概率 ≤ α）

存伪 接受 H_0 $| < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$（概率为β）

α 增大 β 减小

抽值 假设 H_0 所有分布是在已成立的前提下分析的，若真实 H_0 即为 μ 的样本均值又属于小概率事件不应发生，再代入看是否发生从判断假设是否成立

2. σ² 已知，右边检验，此时提示 $\bar{X} > \mu_0$（需先计算 $\bar{x}$ 与 μ_0 再假设）

$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$

$U = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ $P\{U > Z_{1-\alpha}\} = \alpha$ 拒绝 判断即可

左边：同理 $U < Z_{1-\alpha}$ | $U < Z_\alpha$ （以上均为U检验法）

3. σ² 未知，均值μ假设检验 t检验法

$T = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$

4. 单个正态分布方差的假设检验，χ^2 检验法 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 \ne \sigma_0^2$

取 $\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma_0^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$ 拒绝域 $\{\chi^2 > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} \cup \{\chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$

第十章 随机过程基本概念　　十

第一节 随机过程的定义及分类

定义1：给定参数集 $T \subset (-\infty, +\infty)$，对于固定 t 有随机变量 $X(t)$ 对应，对所有 $t \in T$，称随机变量族是一族随机变量 $\{X(t) = X(e, t), t \in T\}$，称 $\{X(t) = X(e, t), t \in T\}$ 为随机过程

状态变量（状态）：给定 $t \in T$，$X(t) = X(e, t)$

定义2：$S = \{e\}$，$T \subset (-\infty, +\infty)$ 为非空集合，若对固定 $e_0 \in S$，$X(e_0, t) = X(t)$，称随机过程的样本函数｜随机过程的一个实现｜一条轨道

对所有 $e \in S$ 一族 t 函数 $\{X(e, t), t \in T, e \in S\}$ 称随机过程

简记 $\{X(t), t \in T\}$ 或 $X(t)$，T 为参数集、参数

定义3：$\{X\}$ 上二元函数 $X(e, t)$

对固定 t，$X(e, t)$ 为随机变量，其所有可能取值构成实数空间，称随机过程的状态空间〔二元 $X(e, t)$ 的值域〕

2. 分类：

A 按参数集 T 和状态空间 S 分类：

常用于统计计算，t=0 时要单考虑，用积分直接 t=0；注意 $E_0(t_1, t_2)$，都要注意 t 是否为任意

T 离散，S 离散：伯努利，$X(e, t) = \begin{cases} 1 & t 次正面 \\ 0 & t 次反面 \end{cases}$　随机变量序列

T 离散，S 连续：噪声量　} 参数离散的随机过程为随机变量序列，简称随机序列

T 连续，S 离散：电话

T 连续，S 连续：随机相位余弦波 $X(t) = a\cos(\omega t + \theta)$

B 按概率结构

第二节 随机过程概率分布　任意 n 个 t 对应 n 个状态

一、定义：n 个状态的联合分布：$F(x_1 \cdots x_n; t_1 \cdots t_n) = P\{X(t_1) \le x_1, \cdots X(t_n) \le x_n\}$，称随机过程 n 维分布函数

若 $\exists$ 非负 $f(x_1 \cdots x_n; t_1 \cdots t_n)$，$F(x_1 \cdots x_n; t_1 \cdots t_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1 \cdots x_n; t_1 \cdots t_n) dx_1 \cdots dx_n$ 成立

t 为参数 t 固定下来便成了随机变量

则 f 为随机过程 $X(t)$ 的 n 维概率密度

独立：若对任意 n，n 个状态相互独立，称此过程称为独立过程

此时 $F(x_1 \cdots x_n; t_1 \cdots t_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i; t_i)$　（n 维 → 固定所有 t → n 维分布函数）

二、两个随机过程：$\{X(t), t \in T_1\}$　$\{Y(t), t \in T_2\}$

$X(t)$ 任 m 状态，$Y(t)$ 任 n 状态，组成 m+n 维随机向量，其分布函数为

$F_{XY}(x_1 \cdots x_m, y_1 \cdots y_n; t_1 \cdots t_m, t_1' \cdots t_n')$ → 联合分布

若任 m, n 任 m, n 状态，上式 $= F_X(\ ) F_Y(\ )$，则两随机过程独立

第三节 随机过程数字特征

一、基本概念

1. $\mu_X(t) = E(X(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x; t) dx$　对所有 $t \in T$，$\mu_X(t)$ 为 t 的函数，称 $X(t)$ 均值函数 → 均值

2. $\psi_X^2(t) = E(X^2(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x; t) dx$ → 均方值函数，均方值

3. $\sigma_X^2(t) = E[X(t) - E X(t)]^2 = D(X(t))$ → 方差，$\sigma_X(t)$ 均方差（标准差）

任 $t_1, t_2 \in T$，$f(x_1, x_2; t_1, t_2)$ → 任两个时刻的随机变量乘积的期望　不同时刻下状态之间的联系

4. $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1) X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$ → 自相关

5. $C_X(t_1, t_2) = \mathrm{Cov}(X(t_1) X(t_2)) = R_X(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \mu_X(t_2)$ → 自协方差　自相关　函数

$\psi_X^2(t) = R_X(t, t)$　$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \mu_X(t_2)$

$\sigma_X^2(t) = C_X(t, t) = \psi_X^2(t) - [\mu_X(t)]^2$

$= R_X(t, t) - \mu_X^2(t)$

二、两随机过程的数字特征：

两随机过程 X, Y $\{X(t), t \in T_1\}$ $\{Y(t), t \in T_2\}$ 任 $t_1, t_2 \in T_1, T_2$

1. $X(t_1), Y(t_2)$ 二阶原点混合矩，$R_{XY}(t_1, t_2) = E(X(t_1) Y(t_2))$　X, Y 互相关函数

2. 互协方差函数：$C_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \mu_Y(t_2)$

3. 若任 $t_1 \in T_1, t_2 \in T_2$，$C_{XY}(t_1, t_2) = 0$，$E[X(t_1) Y(t_2)] = E[X(t_1)] E[Y(t_2)]$

则 $X(t), Y(t)$ 不相关（独立随机过程 → 不相关）

第十一章 平稳过程　　十一

一、严平稳过程：对于任 ε，若 $\{X(t), t \in T\}$ 的任 n 维分布函数满足：

$F(x_1 \cdots x_n; t_1 \cdots t_n) = F(x_1 \cdots x_n; t_1 + \varepsilon, \cdots t_n + \varepsilon)$　严平稳条件

在一组 t 确定的前提下（不随时间改变）

则 $X(t)$ 为严、狭、狭义平稳过程

2. 性质：离散：证严平稳过程（不同组 t 联合分布不适用）$P\{X(t_1) = x_1, \cdots X(t_n) = x_n\} = P\{X(t_1 + \varepsilon) = x_1, \cdots X(t_n + \varepsilon) = x_n\}$

连续：$f(x_1 \cdots x_n; t_1 \cdots t_n) = f(x_1 \cdots x_n; t_1 + \varepsilon \cdots t_n + \varepsilon)$

3. 解析：取 $\varepsilon = -t_1$，$t_2 - t_1 = \tau$　可用于判断不是严平稳

→ $F(x_1; t_1) = F(x_1; t_1 + \varepsilon) = F(x_1; 0) = F(x_1)$ 不依赖 t

→ $F(x_1, x_2; t_1, t_2) = F(x_1, x_2; 0, \tau) = F(x_1, x_2; \tau)$ ~~不依赖τ~~ 仅依赖于 $t_2 - t_1$

（$f(x_1; t) = f(x_1; 0) = f(x_1)$　$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; \tau)$）

4. 数字特征：

$\mu_X(t) = \int x f(x) dx = \mu_X$　$\psi_X^2(t) = E[X(t) \cdot X(t)] = \int x^2 f(x) dx = EX^2 = \psi_X^2$

$\sigma_X^2(t) = D[X(t)] = \psi_X^2(t) - \mu_X^2(t) = \sigma_X^2$

$R_X(t, t + \tau) = \iint x_1 x_2 f(x_1, x_2; 0, \tau) dx_1 dx_2 = R_X(\tau)$，仅依赖 τ 不依赖 t

$C_X(t, t + \tau) = R_X(\tau) - \mu_X^2 = C_X(\tau)$　仅 τ 不 t

二、宽平稳过程

1. 定义：$X(t)$，任 $t \in T$；

① $E[X^2(t)] < +\infty$　② $E[X(t)] = \mu_X$　③ $E[X(t) X(t + \tau)] = R_X(\tau)$ 仅与 τ（依赖）而与 t 无关

则 $X(t)$ 为宽平稳过程，简称平稳过程

（平稳序列 → T 可列）

存在二阶矩的严平稳过程一定是宽平稳过程（不存在则不是）

$X(t) = a\cos(\omega t + \theta)$，$\theta \sim U[0, 2\pi]$ 为平稳过程

$E(X(t)) = \int a\cos(\omega t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$

$E(X^2(t)) = \int a^2 \cos^2(\omega t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta < +\infty$ → $\frac{1}{2} a^2$

$R_X(t, t + \tau) = E a^2 \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \omega \tau + \theta) = \frac{1}{2} a^2 \cos \omega \tau$ 仅依赖 τ

时间均值：0

时间相关函数：$\frac{a^2}{2} \cos \omega \tau$

三、2. 两个平稳过程的关系、平稳相关

(1) $\{X(t), t \in T_1\}$ $\{X(t), t \in T_2\}$ 为两平稳过程，若 $R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t) Y(t + \tau)] = R_{XY}(\tau)$

则 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 平稳相关｜联合平稳

此时 $C_{XY}(t, t + \tau) = R_{XY}(\tau) - \mu_X \mu_Y$

定义：$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}(\tau)}{\sqrt{C_X(0) C_Y(0)}}$ 为标准互协方差函数

第三节 正态平稳过程

一 正态过程：任n 任 $t_1 \cdots t_n \in T$

定义：若 $\{X(t), t\in T\}$ 任 ~~t∈T X(t)~~ $(X(t_1), X(t_2) \cdots X(t_n))$ 服从正态分布 则 $X(t)$ 为正态过程（高斯过程）若 $X(t)$ 同时为独立过程 → 独立正态过程

$\begin{cases} X(t) \sim N(\mu_X(t), \sigma_X^2(t)) \\ \rho \text{ 对 } X(t_1)\ X(t_2) \quad \rho = \dfrac{C(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma_X^2(t_1)}\sqrt{\sigma_X^2(t_2)}} \end{cases}$

若T为可列集 则 $\{X_t, t = t_1 \cdots t_n\}$ 为正态序列，正态过程为二阶矩过程

二 正态平稳过程

若 $X(t)$ 正态过程 则 $X(t)$ 严平稳 $\Leftrightarrow$ $X(t)$ 宽平

第四节：遍历过程 历经过程

一、时间均值与时间相关函数

固定e：$\overline{X(t)} = \lim\limits_{l \to +\infty} \int_{-l}^{l} x(t)\,dt \,/\, 2l$ 为 $x(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的平均值

e变化 $\overline{X(t)} = \overline{X(e,t)} = \frac{1}{2l} \lim\limits_{l \to +\infty} \int_{-l}^{l} X(e,t)\,dt$ 为随机过程 $X(t)$ 对 t的平均值 称为随时间均值（为随机变量）

对 τ：$\overline{X(t)X(t+\tau)} = \overline{X(e,t)X(e,t+\tau)} = \lim\limits_{l \to \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} X(e,t)X(e,t+\tau)\,dt$

为 $X(t)$ 的时间相关函数（为随机过程）

注：若 t 为 $[0, +\infty)$ 积分限 取 $\int_0^l$ 且除 l 即可

二 各态遍历性：

1.定义：设 $X(t)$ 平稳过程

若 $P\{\overline{X(t)} = E[X(t)] = \mu_X\} = 1$ → $X(t)$ 均值具有各态遍历性

若 $P\{\overline{X(t)X(t+\tau)} = E(X(t)X(t+\tau)) = R_X(\tau)\} = 1$ → 自相关函数各态遍历

均值 自相关函数均具有各态遍历性的平稳过程 → 遍历过程

2.判定定理：

引理：$X(t)$ 平稳 则 $\overline{X(t)}$ 的期望与方差

$E(\overline{X(t)}) = \mu_X = E(X(t))$

$D(\overline{X(t)}) = \lim\limits_{l \to +\infty} \frac{1}{l} \int_0^{2l} (1 - \frac{\tau}{2l})[R_X(\tau) - \mu_X^2]\,d\tau$

判定：平稳过程 $X(t)$ 时间均值 $\overline{X(t)}$ 各态遍历

$\Leftrightarrow D(\overline{X(t)}) = \lim\limits_{l \to \infty} \int_0^{2l} (1 - \frac{\tau}{2l})[R_X(\tau) - \mu_X^2]\,d\tau = 0$

（证 $DX = 0$ 时 $X = EX$ → $\overline{X(t)} = E[X(t)] = \mu_X$）

$DY = 0 \quad P\{Y = EY\} = 1$ $P\{Y = EY\} = 1$

且 $\overline{X(t)}$ 等 μ_X 也可以 不各态遍历.

第七章 马尔可夫链：状态离散马尔可夫过程 十二

第一节 马尔可夫链定义：（主介绍了离散情况）

1.定义：设 $\{X(t)\ t\in T\}$ 的状态空间 S 为有限集/可列集 对任n

对T内任 n+1 参，S内任 n+1 参 若 $P\{X(t_{n+1}) = j_{n+1} | X(t_1) = j_1, \cdots\}$

→ 此过程为马尔可夫链 $= P\{X(t_{n+1}) = j_{n+1} | X(t_n) = j_n\}$ 恒成立

2.离散参数马尔可夫链

A 转移概率：设离散 $\{X(t), t = t_0 \cdots t_n \cdots\}$

条件概率 $P\{X(t_{m+1}) = j | X(t_m) = i\} = P_{ij}(t_m)$ 称 $X(t)$ 在 t_m 时刻i 到j 的一步转移概率

$P\{X(t_{m+n}) = j | X(t_m) = i\} = P_{ij}^{(n)}(t_m)$ 为 $X(t)$ 在 t_m 时由i n步转移至j 的概率 n步转移概率

B n步转移性质：

$P_{ij}^{(n)}(t_m) \geq 0$，$\sum_j P_{ij}^{(n)}(t_m) = 1$

3.离散参数齐次马尔可夫链

定义：$P_{ij}(t_m)$ 不依赖 t_m $P_{ij}(t) = P_{ij} = C$ 注：是一步转移概率

→ 具齐次性，时齐性

（只满足为马尔可夫链 能证 $P(a|bcde) = P(a) = P\{a|b\}$）

（$P_{ij}(n) = P\{X(t_{n+1}) = j | X(t) = i\} = P(X_{n+1} = j) = \begin{cases} p & j=1 \\ 1-p & j=0 \end{cases}$ 不依赖n → 齐次性）

第二节 参数离散齐次马尔可夫链：

1.转移概率矩阵：由 $P_{ij} = P\{X(t_{m+1}) = j | X(t_m) = i\}$ 排成矩阵

→ 一步转移概率矩阵

性质：$P_{ij} \geq 0$ $\sum_{j \in S} P_{ij} = 1$（具有以上2点也为随机矩阵）

2.切普曼-柯尔莫哥洛夫方程：齐次马尔可夫链

$P_{ij}^{(n+l)}(t_m) = \sum_{k \in S} P_{ik}^{(n)}(t_m) \cdot P_{kj}^{(l)}(t_{m+n})$

齐次 → $P_{ij}^{(n+l)} = \sum_{k \in S} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(l)}$ 当 $n = l = 1$ 时 $P_{ij}^{(2)} = \sum_{k \in S} P_{ik} P_{kj}$

矩阵 $P^{(2)} = P^2$ $P^{(2)}$ → 二步转移矩阵

3.有限维概率分布：马氏链 $\{X(t), t = t_0 t_1 \cdots\}$

A 初始分布：初始 t_0 的一维分布 $P_j(t_0) = P\{X(t_0) = j\}$

B 绝对分布：在任 t_n 一维分布 $P_j(t_n) = P\{X(t_n) = j\}$

$P_j(t_n) = \sum_{i=0}^{+\infty} P_i(t_0) P_{ij}^{(n)}(t_0)$ 齐次 $P_j(t_n) = \sum_{i=0}^{+\infty} P_i(t_0) P_{ij}^{(n)}$

$(P_0(t_n)\ P_1(t_n) \cdots P_j(t_n) \cdots) = (P_0(t_0) \cdots P_j(t_0) \cdots) \cdot P^n$

C 有限维概率分布 T、S 非负整数集

T内任n个 $k_1 < k_2 \cdots < k_n$ S内任n个状态 $j_1 \cdots j_n$

$P\{X(k_1) = j_1 \cdots X(k_n) = j_n\} = \sum_{i=0} P_i(0) P_{ij_1}^{(k_1)} P_{j_1 j_2}^{(k_2 - k_1)} \cdots P_{j_{n-1} j_n}^{(k_n - k_{n-1})}$

4.平稳分布

定义：对 $\{X(t), t = t_0 t_1 \cdots\}$ 若存在一组 P_j 概率分布 $P_j \geq 0$ $\sum_j P_j = 1$ → $\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_j \pi_j = 1 \end{cases}$

满足 $P_j = \sum_{i=0}^{+\infty} P_i P_{ij}$ 或 $(P_0 \cdots P_j \cdots) = (\quad) \cdot P$

则称 P_j 为平稳分布 此时具平稳性 为平稳齐次马尔可夫链.

→ $(P_0 \cdots P_j \cdots) = (P_0 \cdots P_j \cdots) P^n$

定理，若齐次 $\{X(t), t = t_0 \cdots\}$ 初始分布 $P_j(t_0) = P\{X(t_0) = j\}$ 为平稳分布 则对任n $P_j(t_n) = P_j(t_0)$ 为严平稳时间序列