随机过程应用的工程实例。

CFAR

。恒虚警检测中一个很简单的非起伏目标单脉冲线性检测

◆其基本思路为：设计信号处理系统、提取检测门限，使得在确知恒定高斯噪声环境中对幅度和初始相位均未知的反射信号进行检测，判断目标是否存在。

◆首先介绍~~基本~~几个基本概念：

→ P_d 检测概率，P(判决目标存在 | 目标真实存在)

→ P_{fa} 虚警概率，P(判决目标存在 | 目标实际不存在)

→ $v(t)$ 为观测回波，$s(t)$ 为发射信号，$n(t)$ 为噪声，

目标存在时：$v(t) = s(t) + n(t)$

目标不存在时：$v(t) = n(t)$

→ 似然比

$$\tau(v) = \frac{f(v|H_1)}{f(v|H_0)}$$

$f(v|H_1)$ → 目标存在时 v 的概率密度函数

$f(v|H_0)$ → 目标不存在时 v 的概率密度函数。

→ 根据贝叶斯判决准则，~~[illegible]~~取 τ 为固定门限

$$\begin{cases} \tau(v) \geq \tau & \text{目标存在} \\ \tau(v) \leq \tau & \text{目标不存在} \end{cases}$$

◆下面开始介绍非起伏目标单脉冲线性检测

发射信号为：$S_e(t) = A' \cdot a(t) \cdot \cos[\omega_0 t + \theta(t) + \beta']$

忽略接收时延，接收信号为：$S_r(t) = \underbrace{A}_{\text{未知但确定}} \cdot a(t) \cdot \cos[\omega_0 t + \theta(t) + \underbrace{\beta}_{\text{未知，随机}}]$ → 是很常见的随机过程表达式。

→ 不加证明给出，形如 $S_r(t)$ 的信号，其似然比为

$$\tau(v) = \exp\left[-\lambda + \frac{2}{N_0}\int_0^{\tau} v(t) \cdot s(t)\, dt\right]$$

→ 对 $S_r(t)$ 进行~~[illegible]~~正交分解：

同相分量：$u_I(t) = a(t) \cdot \cos[\omega_0 t + \theta(t)] \quad 0 \leq t \leq \tau$

正交分量：$u_Q(t) = a(t) \cdot \sin[\omega_0 t + \theta(t)] \quad 0 \leq t \leq \tau$

~~本书第四章会引出窄带随机过程的同相、正交分量~~

$$\therefore s(t) = A u_I(t) \cdot \cos\beta - A u_Q(t) \cdot \sin\beta$$

代入似然比中得到，

$$\tau(v|\beta)=e^{-\lambda}\exp\left[\frac{2\lambda\cos\beta}{N_0}\int_0^\tau v(t)\cdot u_I(t)\,dt-\frac{2\lambda\sin\beta}{N_0}\int_0^\tau v(t)\cdot u_Q(t)\,dt\right]$$

暂时不考虑β的随机性、

令 $I(v)=k\int_0^\tau v(t)\,u_I(t)\,dt$ $\quad Q(v)=k\int_0^\tau v(t)\cdot u_Q(t)\,dt$. → 本书第四章会引出窄带高斯随机过程的同相正交分量

看形式，I(v)与Q(v)分别是 v(t)通过 $u_I(t)$ 与 $u_Q(t)$ 对应匹配滤波器的输出结果。

即 $I(v)=v(t)*u_I(-t)$ $\quad Q(v)=v(t)*u_Q(-t)$

$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\cdot u_I(t+\tau)\,dt$ 令 t=0 即为上式。

令 $D(v)=\sqrt{I^2(v)+Q^2(v)}$ $\quad \phi(v)=\arctan\left[\frac{Q(v)}{I(v)}\right]$

则 $\tau(v|\beta)=e^{-\lambda}\exp\left\{\frac{2\lambda}{kN_0}D(v)\cdot\cos[\phi(v)+\beta]\right\}$

$\xrightarrow{\text{对}\beta\text{取平均}}$

$\tau(v)=e^{-\lambda}I_0\left[\frac{2\lambda}{kN_0}D(v)\right]$

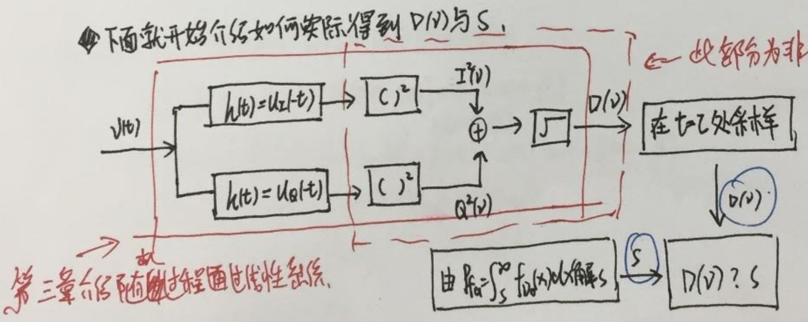
↓第一类零阶修正贝塞尔函数。

∵ $D(v)\propto\tau(v)$ 则利用D(v)代替τ(v)

$$\begin{cases}D(v)\geq S & \text{判决目标存在}\\ D(v)<S & \text{判决目标不存在}\end{cases}$$

到这里就由v(t)得到了D(v). D(v)类似于模式识别中的特征，可用来代表v(t)包含的全部信息。

下面就开始介绍如何实际得到 D(v)与S。



首先由Pfa求S.

∵ $P_{fa}=\int_S^\infty f_{D_0}(x)\,dx$ ⇒ 关键是求出 $f_{D_0}(x)$，其为 $D_0(v)$ 的概率密度。

∵ $D(v)=\sqrt{I^2(v)+Q^2(v)}$

∵ $I(v)=k\int_0^\tau n(t)\cdot u_I(t)\,dt$

$Q(v)=k\int_0^\tau n(t)\cdot u_Q(t)\,dt$] ∵n(t)为高斯 ⇒ I(v), Q(v)为高斯

⇓

D(v)为瑞利分布

E[D(v)]与D[D(v)]易知，

∴ $f_{D_0}(x)$ 可以求出。

代入

求出S.

实际工程应用中，P_d 越高越好，所以还要求出 P_d 看是否满足要求。

$$P_d=\int_s^{\infty} f_D(x)\,dx \quad \Big|\ f_D(x) \text{ 为 } D_1(v) \text{ 的概率密度}.$$

关键是求出 $D(v)$ 的概率分布。

$\because I(v|\beta)$ 与 $Q(v|\beta)$ 为相互独立的高斯随机变量。

对于高斯随机过程不相关与相互独立等价。

第二章有道习题可以说明

易得

$$f_{I,Q}(x,y|\beta)=\frac{1}{\pi N_0 k^2 E}\exp\left\{-\frac{1}{N_0 k^2 E}\left[(x-k(\theta)\cdot E\cos\beta)^2+(y+k(\theta)E\cdot\sin\beta)^2\right]\right\}$$

$\Downarrow$

目的求 f_{D_1}（包络的概率分布）。

这部分利用 Q、I 求包络概率分布是第五章的一部分内容。

~~[illegible]~~求二维随机变量函数的分布 → 利用雅可比行列式方法。

令 $D=\sqrt{Q^2+I^2}$，$\phi=\arctan\frac{Q}{I}$

则：$x=D\cdot\cos\phi$ $\qquad dxdy=|J|\,dD\,d\phi$ ← 这里就是大家见过很多次的公式。

$y=D\cdot\sin\phi$

$\therefore f_{D,\phi}(r,\phi|\beta)=f_{I,Q}(r\cdot\cos\phi,\ r\cdot\sin\phi|\beta)\cdot|J|$

$\therefore f_{D_1}=\int_0^{2\pi} f_{D,\phi}(r,\phi|\beta)\cdot d\phi$ ← 求边缘分布。

$\therefore P_d=\int_s^{\infty} f_D(x)\,dx$

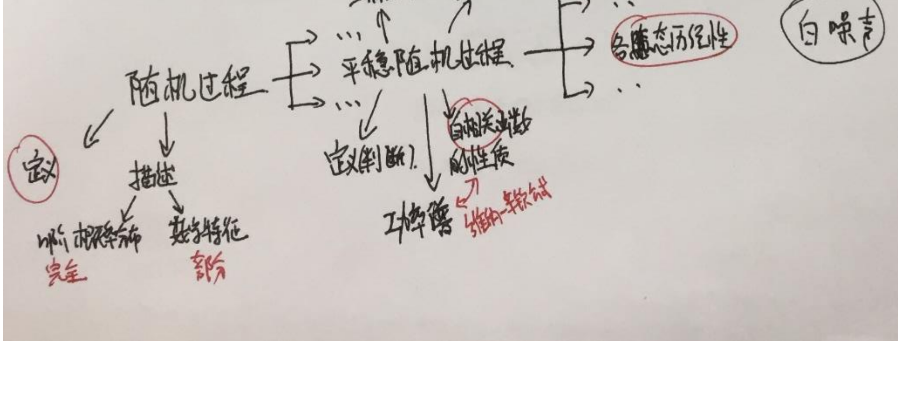
1min

到这里、这个简单的 CFAR 例子就介绍完了、回头看 →

从这个例子可以看出、随机过程是十分贴近工程的一门学科，学好十分有用……

言归正传。

⟹ 下面开始为大家梳理一下第二章学习的内容。



关于定义，举两个例题作为例子。

→ 2.2 重复抛掷硬币定义一个随机过程

$$X(t)=\begin{cases}\cos\pi t & \text{正面}\\ 2t & \text{反面}\end{cases}$$

几秒钟时间，大家想一个这两个随机过程一样么？

→ 2.12. 随机过程由 $X(t,e_1)=1$，$X(t,e_2)=\sin t$，$X(t,e_3)=\cos t$ 三个样本函数组成。

2.2 解：

$$E[X(t)]=\frac{1}{2}\cos\pi t+t$$

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)\cdot X(t_2)]$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\cos\pi t_1\cdot\cos\pi t_2+\frac{1}{4}\cdot\cos\pi t_1\cdot 2t+\frac{1}{4}\cdot 2t\cdot\cos\pi t_2+\frac{1}{4}\cdot 2t\cdot 2t$$

大家可以自己体会一下两种定义有什么区别。

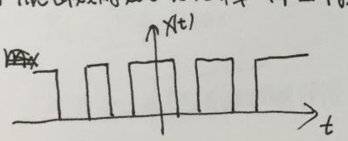
2.12 解：

$$E[X(t)]=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sin t+\frac{1}{3}\cos t$$

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\sin t_1\sin t_2+\frac{1}{3}\cos t_1\cdot\cos t_2.=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cos\tau.$$

关于平稳函数的数字特征，举一个书上 P_{62} 页例 2.2-6 作为例子。



大概介绍题意，一个随机过程在任意时刻出现 1, 0 的概率皆为 $\frac{1}{2}$。

任意给定 τ 内，交换的次数 k 的概率服从泊松分布

$$P(k,\tau)=\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau}$$

$$m_X=\sum_{i=1}^{2}x_iP(x_i)=1\times P[X(t)=1]+0\times P[X(t)=0]=\frac{1}{2}$$

↑直接代公式.

$$R_X(\tau)=E[X(t)\cdot X(t-\tau)]$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}x_ix_jP[x_i,x_j;t_i,t_j]$$ ← 直接代入公式.

$$=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}x_ix_jP[x_i,x_j;\tau]$$ → 两个时刻的关系主要取决于变化次数 k，k 只与 τ 有关

$$=P\{X(t)=1,X(t-\tau)=1\}$$

$$=P\{X(t)=1,\text{在}\tau\text{内波形做偶次变换}\}$$

$$=P\{X(t)=1\}\cdot P\{k\text{为偶数}\}$$ ← 互不相关.

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0\,(k\text{为偶数})}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}+\frac{(-\lambda\tau)^k}{k!}\right)e^{-\lambda\tau}\right]$$

↑这一步是一个小技巧.

$$=\frac{1}{4}(e^{\lambda\tau}+e^{-\lambda\tau})e^{-\lambda\tau}$$

$$=\frac{1}{4}(1+e^{-\lambda\tau}),\quad\tau\geq 0$$

几秒钟，大家可以通过这个例子体会一下，当时刻的随机特性与时刻间的相关性。

同时结合这个问题，想一个高斯白噪声与非高斯白噪声的主要区别在哪里？

关于各态历经性.

举一个例子帮助大家理解各态历经性.

大家想一下,如果我想要统计当前时刻全世界闭眼人数所占的百分比,

我可以用一个人从生到死闭眼时间所占比来代替吗? ⇒ 这个问题每个人都有自己的看法

需要经过严格证明才可下定论。

下面讲一下书中P67、定理1的推导过程.

证明: 平稳随机过程 $X(t)$ 的均值具有各态历经性的充要条件是:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\cdot\left[R_x(\tau)-m_x^2\right]d\tau=0$$

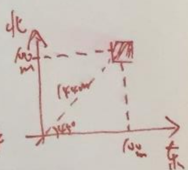
随机过程 $X(t)$ 的均值具有各态历经性.

$$P\{\overline{X(t)}=m_x\}=1 \quad \text{依概率}\ \overline{X(t)}=m_x$$

即 $E[\overline{X(t)}]=m_x \quad D[\overline{X(t)}]=0.$

$$\because E[\overline{X(t)}]=E\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{T}E[X(t)]dt=m_x$$

$$D[\overline{X(t)}]=E\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{T}X(t)dt\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{T}X(t)dt\right]-m_x^2$$



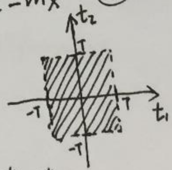
方便理解

$$=E\cdot\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\cdot\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}X(t_1)\cdot X(t_2)\cdot dt_1dt_2\right]-m_x^2$$

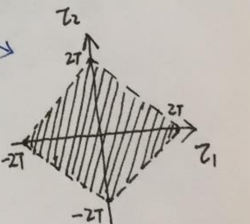
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\cdot\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E[X(t_1)\cdot X(t_2)]\cdot dt_1dt_2-m_x^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R(t_1-t_2)\cdot dt_1dt_2-m_x^2 \quad ※$$

二维函数的变量代换



⇒



令 $\begin{cases}\tau_1=t_1-t_2\\ \tau_2=t_1+t_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t_1=\dfrac{\tau_1+\tau_2}{2}\\ t_2=\dfrac{\tau_2-\tau_1}{2}\end{cases}$

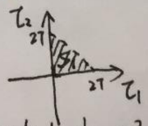
$$dt_1dt_2=|J|d\tau_1d\tau_2 \quad \text{且}\ |J|=\frac{\partial(t_1,t_2)}{\partial(\tau_1,\tau_2)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial t_1}{\partial\tau_1} & \frac{\partial t_1}{\partial\tau_2}\\ \frac{\partial t_2}{\partial\tau_1} & \frac{\partial t_2}{\partial\tau_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

代入后,※式可变为

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\iint \underline{R(\tau_1)}\cdot d\tau_1d\tau_2\cdot|J|-m_x^2$$

∵ $R(\tau_1)$ 仅与 τ_1 有关,所以积分区域上下对称,又因为 $R(\tau_1)$ 为偶函数, ∴ 积分区域左右对称,故仅取其中一块即可.

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\iint_{S_1}R(\tau_1)\,d\tau_1d\tau_2\cdot|J|\times4-m_x^2$$



$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\iint_{S_1}R(\tau_1)d\tau_1d\tau_2|J|-m_x^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_0^{2T}\int_0^{2T-\tau_1}R(\tau_1)\,d\tau_2d\tau_1\cdot\frac{1}{2}-m_x^2=\boxed{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_0^{2T}R(\tau_1)\cdot(2T-\tau_1)d\tau_1\frac{1}{2}-m_x^2}$$

◆ 强调一下、P_{77}页、常见傅里叶变换对，考前一定记牢。

课后题：

2、20.

反射回波 $aX(t-\tau_1)$，$n(t)$为噪声，$Y(t)=aX(t-\tau_1)+n(t)$

(1) 在联合平稳下，求 $R_{XY}(\tau)$.

(2) $n(t)$零均值且与$X(t)$统计独立，求 $R_{XY}(\tau)$

(1)

$$R_{XY}(\tau)=E[X(t)\cdot Y(t+\tau)]=E[X(t)\cdot\{aX(t+\tau-\tau_1)+n(t+\tau)\}]$$

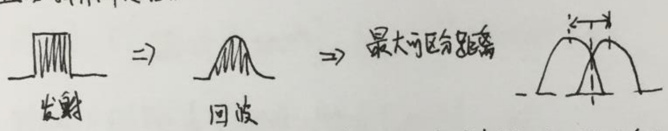
$$=a R_X(\tau-\tau_1)+E[X(t)\cdot n(t+\tau)]$$

(2) $R_{XY}(\tau)=a\cdot R_X(\tau-\tau_1)$

这题本身十分简单，但是其思路在雷达信号处理中应用很广泛。

也这里简单说明一下：

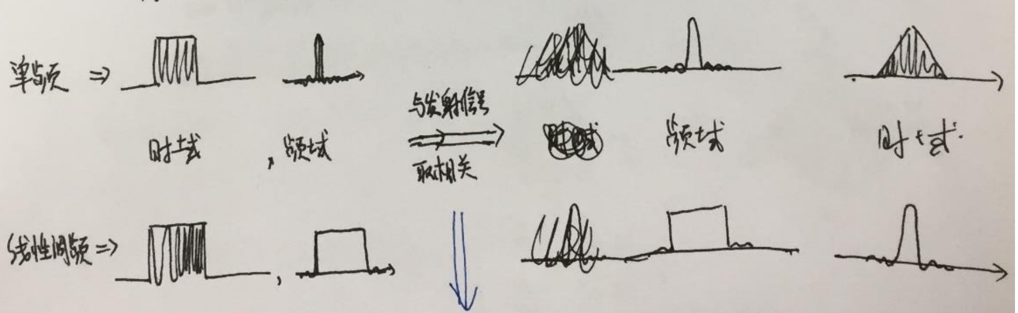
• 若直接对单脉冲处理。



• 为了保证探测距离，增大分辨率。（对于单脉冲，增大分辨率需减小脉冲宽度，从而降低了信号能量，减小了距离）

采用线性调频信号。

$$\exp\{jK_r t^2\}\exp\{j2\pi f_0 t\}$$



确定信号取相关 <=> 随机信号相关函数。

$$x(t)\otimes y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot y(t+\tau)\cdot d\tau$$

$$=x(t)*y(-t)$$

实际处理中，我们将$x(t)$与$y(-t)$进行卷积，

等效为$x(t)$与$y(t)$相关。

2.22解:

~~$E\{g(x)\}$~~ 这里主要说明一个公式.

$$E\{g(x,y)\} = E\{E[g(x,y)|x]\}$$

<= 可以理解为对一个多元随机变量的函数取均值时,可将其随机性一点一点消除

$$\because E[g(x,y)] = \iint g(x,y)\cdot f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \iint g(x,y)\cdot f(x|y)\cdot f(y)\,dx\,dy$$

=> 本题中、第2问.证明均值各态历经.

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A\sin(2\pi\theta_1 t+\theta_2)\,dt$$

$$=0 = m_X(t)$$

注意这里 $X(t)$ 表示随机过程、不同于 $x(t)$ 样本函数。

定义中均值各态历经<=>所有样本函数的时间平均值 = m_X

如~~题~~2.12中形式的随机过程就不可~~取~~仅取一个~~[illegible]~~的时间平均。

2.37解:

此题中用到了傅里叶级数的概念,这里简单说明下、

傅里叶级数: $\begin{cases} F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cdot e^{-jn\omega_1 t}\,dt \\ f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t} \end{cases}$

信号为周期,周期为T. $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

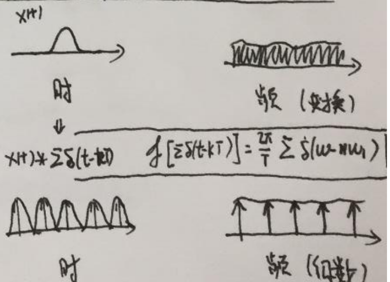
傅里叶变换: $\begin{cases} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt \\ f(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega \end{cases}$

信号为非周期、周期为 $T\to\infty$

$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = d\omega$

可以认为傅里叶变换是傅里叶级数的推广 =>

取个信号

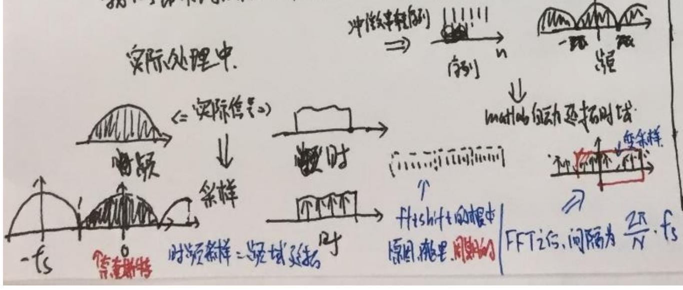


所以说、一个理论体系的地位在于自成闭环,正过来想与反过来想,结果必然一致!!

⇓

我们常用的matlab中的FFT.得到的结果也可认为是级数、

实际处理中.



⇒下面梳理一下第三章的学习内容。

变换（系统）
（确定系统）
（线性时不变）

$h(t) \Leftrightarrow H(j\omega)$

→ 均方极限、均方连续、均方微分、均方积分 → 利用 $h(t)$、$H(j\omega)$ 求随机过程 $R_Y(\tau)$、$S_Y(\omega)$、$S_{XY}(\omega)$ → 白噪声的各种优秀性质。

定义性质
记牢。

$Y(t) = L[X(t)]$

$m_Y(t) = L[m_X(t)]$

$R_Y(t_1,t_2) = L_{(t_1)}L_{(t_2)}[R_X(t_1,t_2)]$

两种思路。

以课后课3.5作为例子说明 $h(t)$。（习题集中没有利用 $h(t)$ 求解，所以上面的两种思路都可以）。

原题干：
$$\begin{cases} \dot{Y}(t) + 2Y(t) = X(t) \\ Y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{Y}(t) + 2Y(t) = X(t) \\ Y(0_+) = 1 \end{cases}$$

首先介绍下如何求解常系数微分方程。

$$C_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + C_n \frac{d^0 y(t)}{dt^0} = E_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \cdots + E_m \frac{d^0 x(t)}{dt^0}$$

→ 首先求齐次解，利用“特征根法”

待定系数

$$y_{齐}(t) = k(A_1, A_2, A_3, t)$$

→ 再由 $X(t)$ 形式求出特解

$$y_{特}(t)$$

→ $y_{完全}(t) = y_{齐}(t) + y_{特}(t) = k(A_1, A_2, \cdots, t) + y_{特}(t)$

代入初始条件得到具体值。

概念：
- 零状态响应（系统本身无能量，输出只由输入产生）
- 零输入响应（系统本身有能量，无输入，系统自行产生输出）

$h(t)$ 为 $\delta(t)$ 作用系统时的零状态响应

又∵ $\delta(t)$ 只在 $0_- \to 0_+$ 有值，在 $t>0$ 时并无输入。所以可以认为 $\delta(t)$ 在 $t=0$ 时刻对系统进行充能，改变了系统初始状态，之后为零输入响应。

∴ 利用冲激平衡法，求初始状态的改变。

∵ $\dot{Y}(t) + 2Y(t) = X(t)$，当 $X(t) = \delta(t)$ 时，

$Y(t)$ 不可能含 $\delta(t)$，否则等式左边出现 $\dot{\delta}(t)$ 项。

故 $\dot{Y}(t) = A\delta(t) + Bu(t)$

$Y(t) = Au(t)$

∴ $A\delta(t) + Bu(t) + 2Au(t) = \delta(t)$

∴ $A=1$，$B=-2$。

∵ $\dot{Y}(0_+) = \dot{Y}(0_-) - 2$

$Y(0_+) = Y(0_-) + 1$

又∵是$\delta(t)$的零状态响应.

∴ $\dot{Y}(0_-)=0$　　故 $\dot{Y}(0_+)=-2$

$Y(0_-)=0$　　　　$Y(0_+)=1$

求齐次解：　$\dot{Y}(t)+2Y(t)=X(t)$

特征方程为

$\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=-2$

~~∴ y特(t)~~ ∴ $y_{齐}(t)=Ae^{-2t}u(t)$.

$X(t)=0$　(等效为~~输~~零输入响应)

∴ $y_{特}(t)=0$

$y_{完全}(t)=Ae^{-2t}u(t) \Leftarrow y(0)=1$

∴ $h(t)=e^{-2t}u(t)$

3.4解.

依然是前面讲到的两个思路求解.

$Y(t)=L[X(t)]$ → 运算

$h(t)$ & $H(j\omega)$. → 系统

→ 当作运算：

$R_Y(\tau)=E[Y(t)\cdot Y(t+\tau)]=\cdots$

→ 当作系统：

$h(t)=\delta(t)+\dot{\delta}(t)$

∴ $H(j\omega)=1+j\omega$　　∴ $G_Y(\omega)=G_X(\omega)\,|H(j\omega)|^2$

$=G_X(\omega)+G_X(\omega)\cdot\omega^2$

∴ $R_Y(\tau)=R_X(\tau)-\dfrac{\partial^2 R_X(\tau)}{\partial\tau^2}$

3.7解：

(1) 易证.

$|H(f)|^2=2(1-\cos 2\pi fT)$

(2) 说明一下,如何得到 $S_Y(f)=4\pi^2f^2T^2S_X(f)$ 的.

∵ $|H(f)|^2=2(1-\cos 2\pi fT)$

$\cancel{=2[2-2(1-\cos^2\pi fT)]}$

$=2(1-2\cos^2\pi fT+1)$

$=2(2-2\cos^2\pi fT)$

$\cdots$

$=2[2-2(1-\pi^2f^2T^2)]$

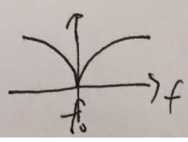
$=4\pi^2f^2T^2$

∵ $f \ll \frac{1}{T}$

∴ $\pi fT \to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x = 1-x^2$

物理意义,应该类似于陷波



3.25 解:

习题集中有详细过程，这里我们再复现一下。

$\because Y_1(t)\cdot Y_2(t-\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} Y_1(t)\cdot X(t-\tau-u)h_2(u)du$

$Y_1(t)\cdot X(t-\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} X(t-a)X(t-\tau)h_1(a)da$

$\therefore R_{Y_1Y_2}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{Y_1X}(\tau+u)h_2(u)du$

$R_{Y_1X}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau-a)h_1(a)da.$

$\therefore \underline{R_{Y_1Y_2}(\tau)=R_X(\tau)*h_1(\tau)*h_2(-\tau)}$

$S_{Y_1Y_2}(w)=S_X(w)\cdot H_1(jw)\cdot H_2^*(jw)$

若要 $Y_1(t)$ 与 $Y_2(t)$ 为不相关则

$R_{Y_1Y_2}(\tau)=0$

则 $h_1(t)*h_2(-t)=0.$

$\Rightarrow$ 对正交与同相分量，并不是互不相关，而是

在同一时刻才不相关，即 $R_{Y_1Y_2}(\tau)=0\big|_{\tau=0}$

$\therefore$ 应 $h_1(t)*h_2(-t)=0\big|_{t=0}$

$\cos wt * \sin w(-t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos w\tau\cdot\sin w(t-\tau)\cdot d\tau$

当 $t=0$ 时 上式为 0.

其余题目，基本可归结为

求 $h(t)$ 与 $H(jw)$，这里不再赘(zhui)述(su)