



北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

2015 — 2016 学年第一学期

考试统一用答题册

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成绩								
阅卷人								

考试课程 复变函数与积分变换 A

班 级 学 号

姓 名 成 绩

2016 年 1 月 13 日

(试题共 5 页)

一、选择题(每题 3 分, 共 30 分)

1. 当 $z = \frac{1+i}{1-i}$ 时, $|z|^{100}$ 等于 ()
- (A) 2^{100} (B) 0 (C) 1 (D) 2^{50}
2. 满足不等式 $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| < 2$ 的所有点 z 构成的集合是 ()
- (A) 有界单连通区域 (B) 有界多连通区域
(C) 无界单连通区域 (D) 无界多连通区域
3. 设 $f(z) = \cos z$, 则下列命题中, 不正确的是 ()
- (A) $f(z)$ 在复平面上处处解析 (B) $f(z)$ 以 2π 为周期
(C) $f(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ (D) $|f(z)|$ 是有界的
4. 设 C 为椭圆 $x^2 + 3y^2 = 1$ 正向, 则积分 $\int_C \frac{1}{z} dz =$ ()
- (A) $2\pi i$ (B) π (C) 0 (D) $-2\pi i$
5. 设 $c_1: |z|=1$ 为负向, $c_2: |z|=3$ 正向, 则 $\int_{c=c_1+c_2} \frac{\sin z}{z^2} dz =$ ()
- (A) $-2\pi i$ (B) 0 (C) $2\pi i$ (D) $4\pi i$
6. 下列级数中, 条件收敛的级数为 ()
- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+3i}{2}\right)^n$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{n!}$
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i}{\sqrt{n+1}}$
7. 下列命题中, 正确的是 ()
- (A) 设 v_1, v_2 在区域 D 内均为 u 的共轭调和函数, 则必有 $v_1 = v_2$
(B) 解析函数的实部是虚部的共轭调和函数
(C) 若 $f(z) = u + iv$ 在区域 D 内解析, 则 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 为 D 内的调和函数

(D) 以调和函数为实部与虚部的函数是解析函数

8. 级数 $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛域是 ()

- (A) $|z| < 1$ (B) $0 < |z| < 1$ (C) $1 < |z| < +\infty$ (D) 不存在的

9. 设 $f(t) = \sin 2t$, 则 $f(t)$ 的傅立叶变换为 ()

- (A) $i\pi[\delta(\omega+2) + \delta(\omega-2)]$ (B) $i\pi[\delta(\omega+2) - \delta(\omega-2)]$

- (C) $i\pi[\delta(\omega-2) - \delta(\omega+2)]$ (D) $\pi[\delta(\omega+2) - \delta(\omega-2)]$

10. 函数 $f(t) = \int_0^t e^{-3t} \sin t \, dt$ 的拉普拉斯变换为 ()

(A) $\frac{1}{s} \frac{1}{(s-3)^2 + 1}$

(B) $\frac{1}{s} \frac{1}{(s+3)^2 + 1}$

(C) $-\frac{1}{s} \frac{1}{(s+3)^2 + 1}$

(D) $-\frac{1}{s} \frac{1}{(s-3)^2 + 1}$

二、填空题 (每题 3 分, 共 27 分)

1. 对于映射 $\omega = \frac{2}{z}$, 圆周 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 的像曲线为 _____ (写出方程).

2. 复数 $(1+i)^i =$ _____.

3. 函数 $f(z) = 2i \sin z + iz^2$ 在 $z=i$ 处的导数为 _____.

4. 若解析函数 $f(z) = u + iv$ 的实部 $u = -2xy$, 那么 $f(z) =$ _____.

5. 设 c 为正向圆周 $|z| = 3$, 则 $\int_c \frac{z + \bar{z}}{|z|} dz =$ _____.

6. 积分 $\int_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz =$ _____.

7. 函数 $\frac{\cos z}{z^2 + z + 1}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式的收敛域是 _____.

8. 函数 $F(\omega) = \frac{1}{4 + \omega^2}$ 的傅立叶逆变换为 _____.

9. 函数 $F(s) = \frac{1}{s^2+1} e^{-2s}$ 的拉普拉斯逆变换为_____.

三、(10 分) 计算积分 $\int_c \frac{\sin z}{z(i-z)^2} dz$, 其中 c 为不经过 $0, i$ 的简单闭曲线.

四、(8 分) 将 $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-i)}$ 在适当的圆环域内展成以 i 为心的幂级数。

五、(9 分) 求函数 $f(t) = \begin{cases} e^{\beta t}, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases} (\beta > 0)$ 的傅立叶变换和傅立叶积分, 并计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{\beta \cos \omega t - \omega \sin \omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega.$$

六、(10 分) 利用 Laplace 变换求微分方程组

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

满足初始条件 $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 的解.

七、(6分) 证明刘维尔定理： 在有限复平面上有界且解析的函数是常值函数。

你学习生活部