

随机过程理论

主讲教师：张有光 陈鹏辉

课程教辅：马占华

研究方向 -- 自旋电子

- 基于自旋的器件与电路系统
- 基于自旋的传感器
- 基于自旋的存储体系MRAM
- 全自旋逻辑与类脑计算
- 人工智能与智能处理器

推荐几本 科普书

- 《数学的力量》—李文林 研究员
- 《西方文化中的数学》—M.克莱因
- 《简明微积分发展史》—龚昇 院士
- 《量子物理史话—上帝掷骰子吗》曹天元
- 《像外行一样思考，像专业一样实践》
- 《圣彼得堡数学学派研究》徐传胜
- 《信息简史》 《香农传》

随机过程理论

- 以移动通信为例
 - 语音信号、基带信号、射频信号
 - 随机信号中如何寻找规律？
- 概率统计观点
 - 研究时间序列及其时间信号
 - 研究随机信号通过线性系统
 - 研究系统的状态--马尔科夫

随机过程-先修课程

概率与统计
信号与系统



随机过程理论



抽象性
不确定性

线性代数
数学分析

第一讲：概率论基础 回顾

- 一、概率论基本概念
- 二、随机变量及分布函数
- 三、随机变量的数字特征
- 四、特征函数
- 五、极限定理（大数、中心）

一、概率论基本概念

- 1、三种经典概率
- 2、概率公理化
- 3、条件概率
- 4、乘法公式
- 5、统计独立性
- 6、全概率公式
- 7、贝叶斯公式

1、三种经典概率

- 古典概率

- 对称性、与组合数学相关

- 几何概率

- 均匀性，借助面积、体积

- 频率概率

- 次数统计，贝努里试验、布丰试验



概率公理化

2、概率公理化

- 非负性

$$P(A) \geq 0 \quad (\Omega, F, P)$$

柯尔莫哥洛夫：1903~87年，公理化完成于1933年，他是20世纪最伟大100个数学家之首；

我国的陈省身为第50名，华罗庚为第87名。

3、条件概率

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

4、乘法公式

$$P(A \cap B) = P(B | A)P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A | B)P(B)$$

5、统计独立性

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

【注意】 与不相容之间的关系

6、全概率公式

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i) P(B_i)$$

其中 $\{B_i\}$ 是 Ω 的剖分

7、贝叶斯公式

$$P(B_i | A) = \frac{P(A | B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i)}$$

条件概率、乘法公式、全概率公式

小 结

三种经典概率 \longrightarrow 概率公理化

条件概率、乘法公式、统计独立性

条件概率
乘法公式 \longrightarrow 贝叶斯公式
全概率公式

二、随机变量及其分布函数

- 随机变量 与 分布函数
- 随机变量函数的分布
- 多元随机变量联合分布
- 多元随机变量边缘分布
- 多元随机变量条件分布

1、随机变量

- 问题背景

- 样本空间{正面、反面}, {高、低}

- 样本空间{0, 1}

- 随机变量—约1850由切比雪夫引入

- 概率空间转化为实数空间

$$\Omega \Rightarrow \mathbb{R}$$

彼得堡数学学派创始人
(1821~1894), 也是
俄罗斯数学的奠基人

2、分布函数

- 分布函数

- 离散 $\Omega \Rightarrow R \xrightarrow{F(x)} [0, 1]$
 - 连续

- 重要意义

- 可以用微积分等工具来研究概率

常用 随机变量

- 均匀分布
- 正态分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

- 瑞利分布

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] \quad x \geq 0$$

3、随机变量函数的分布

已知 X 的概率密度 $f(x)$, 求
 $Y = g(X)$ 的概率密度

$$\varphi(y) = f(h(y)) |h'(y)|$$

4、多元随机变量联合分布

- $X+Y$
- $X-Y$
- XY
- X/Y
- 多元随机变量函数

5、边沿分布、条件分布

$$F_2(x, y) \Rightarrow F(x) \text{ when } y = +\infty$$

$$F(x | y) = \frac{\int_{-\infty}^x f(u, y) du}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y) du} = \frac{\int_{-\infty}^x f(u, y) du}{f_2(y)}$$

三、随机变量的数字特征

- 数学期望与方差
- 矩量（中心矩、原点矩）
- 随机矢量的数字特征
- 随机矢量函数的数字特征
- 条件数学期望

切比雪夫不等式

$$P\{|X - E[X]| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2}$$

彼得堡数学学派

切比雪夫：1821~1894

马尔可夫：1856~1922

李雅普诺夫：1857~1918

相关系数

$$r_{12} = \frac{E\{(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])\}}{\sqrt{D[X_1]}\sqrt{D[X_2]}}$$

四、特征函数-李雅普诺夫

$$\phi(v) = E[e^{jvX}] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{jvx_k} p_k$$

$$\phi(v) = E[e^{jvX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} dF(x)$$

$$\phi(v) = E[e^{jvX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} f(x) dx$$

特征函数、概率母函数，1901年

五、极限定理-大数定律

- 十七世纪末、十八世纪初

- 贝努里、泊松大数定律

- 频率与概率之间的关系

贝努里家族有11位数学家，雅各布、约翰以及丹尼尔等

- 十九世纪

- 切比雪夫大数定律

- 辛钦、马尔科夫大数定律等

- 均值的意义，是各态历经性的雏形

第五：中心极限定律

- 十八世纪提出
 - 狄莫弗（二项式）、拉普拉斯等
- 什么条件下，将会服从正态分布？
- 严格证明，十九世纪研究中心
 - 切比雪夫、马尔科夫 1887年
 - 李雅普诺夫 1901年
 - 林德贝格、勒维 1935年

第六、随机过程引入

- 1905年 爱因斯坦
 - 布朗运动进入物理学
- 1906年 马尔科夫
 - 大数定理关于相依变量的扩展，也即“独立同分布随机序列”扩展到“相关的同分布序列”
- 1923年 维纳
 - 建立了布朗运动的数学理论，维纳过程

第六、随机过程引入

- 1931年 柯尔莫哥洛夫
《概率论的解析方法》
- 1934年 辛钦 《平稳过程的相关理论》
 - 马尔可夫过程与平稳过程
 - 应用于大炮自动控制和工农业生产中，在卫国战争中立了功。1941年他得到了平稳随机过程的预测和内插公式。

第六、随机过程引入

- 二战期间，维纳也做了类似的工作

维纳-辛钦 定理

- 1953年 杜布出版了名著《随机过程论》，系统且严格地叙述了随机过程基本理论。
- 1960年 王梓坤院士引入中国

探究性大作业

1、彼得堡学派对发展大数定律、中心极限定理具有重要的贡献，进一步推动了概率论严密化和随机过程的诞生，请你探究一些彼得堡学派的形成与发展。

作业

- P37—第09题
- P38—第17题
- P39—第31题
- P40—第36题

每周一递交
上周作业