线性代数超强总结

$$|A| = o \Leftrightarrow \begin{cases} A\text{不可逆} \\ r(A) < n \\ Ax = o\text{有非零解} \\ 0\text{是}A\text{的特征值} \\ A\text{的列（行）向量线性相关} \end{cases}$$

$$|A| \neq o \Leftrightarrow \begin{cases} A\text{可逆} \\ r(A) = n \\ Ax = 0\text{只有零解} \\ A\text{的特征值全不为零} \\ A\text{的列（行）向量线性无关} \\ A^T A\text{是正定矩阵} \\ A\text{与同阶单位阵等价} \\ A = p_1 p_2 \cdots p_s, p_i\text{是初等阵} \\ \forall \beta \in \mathbf{R}^n, Ax = \beta\text{总有唯一解} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \text{向量组等价} \\ \text{相似矩阵} \\ \text{矩阵合同} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{具有}} \text{反身性、对称性、传递性}$$

√ 关于 $e_1, e_2, \cdots, e_n$：

①称为$\square^n$的标准基，$\square^n$中的自然基，单位坐标向量；

② $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性无关；

③ $|e_1, e_2, \cdots, e_n| = 1$；

④ $\mathrm{tr}(E)=n$；

⑤任意一个 n 维向量都可以用 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性表示.

√ 行列式的计算：

① 若 A与B 都是方阵（不必同阶），则 $\begin{vmatrix} A & * \\ o & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & o \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & o \\ o & B \end{vmatrix} = |A||B|$

$$\begin{vmatrix} * & A \\ B & o \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

②上三角、下三角行列式等于主对角线上元素的乘积.

③关于副对角线：$\begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} o & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & o \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n}\dots a_{n1}$

√ 逆矩阵的求法：

① $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$

② $(A\vdots E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E\vdots A^{-1})$

③ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$

④ $\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & \frac{1}{a_n} \\ & & \iddots & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ \frac{1}{a_1} & & & \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^{-1} \end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_n & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_n^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$

√ 方阵的幂的性质：$A^m A^n = A^{m+n}$　　$(A^m)^n = (A)^{mn}$

√ 设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，对 n 阶矩阵 A 规定：$f(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$ 为 A 的一个多项式.

√ 设 $A_{m\times n}, B_{n\times s}$，$A$ 的列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，$B$ 的列向量为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$，$AB$ 的列向量为 $r_1, r_2, \cdots, r_s$，

则：$r_i = A\beta_i, i = 1, 2, \cdots, s$，即 $A(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_s)$

若 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$，则 $A\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots b_n\alpha_n$

即：AB的第i个列向量r_i是A的列向量的线性组合,组合系数就是β_i的各分量;

AB的第i个行向量r_i是B的行向量的线性组合,组合系数就是α_i的各分量.

用A,B中简单的一个提高运算速度

√ 用对角矩阵 Λ 左乘一个矩阵, 相当于用 Λ 的对角线上的各元素依次乘此矩阵的行向量;

用对角矩阵 Λ 右乘一个矩阵, 相当于用 Λ 的对角线上的各元素依次乘此矩阵的列向量.

√ 两个同阶对角矩阵相乘只用把对角线上的对应元素相乘,

与分块对角阵相乘类似, 即：$A = \begin{bmatrix} A_{11} & & & o \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ o & & & A_{kk} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & & & o \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ o & & & B_{kk} \end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & & & o \\ & A_{22}B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ o & & & A_{kk}B_{kk} \end{bmatrix}$$

√ 矩阵方程的解法：设法化成(I) $AX=B$ 或 (II) $XA=B$

当 $|A|\neq 0$ 时，

(I)的解法：构造 $(A\vdots B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\vdots X)$ （当 B 为一列时，即为克莱姆法则）

(II)的解法：将等式两边转置化为 $A^TX^T=B^T$，用(I)的方法求出 X^T，再转置得 X

√ $Ax=o$ 和 $Bx=o$ 同解（A,B 列向量个数相同），则：

① 它们的极大无关组相对应, 从而秩相等；

② 它们对应的部分组有一样的线性相关性；

③ 它们有相同的内在线性关系.

√ 判断 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是 $Ax=0$ 的基础解系的条件：

① $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 线性无关；

② $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是 $Ax=0$ 的解；

③ $s=n-r(A)=$ 每个解向量中自由变量的个数.

① 零向量是任何向量的线性组合, 零向量与任何同维实向量正交.

② 单个零向量线性相关；单个非零向量线性无关.

③ 部分相关, 整体必相关；整体无关, 部分必无关.

④ 原向量组无关, 接长向量组无关；接长向量组相关, 原向量组相关.

⑤ 两个向量线性相关 $\Leftrightarrow$ 对应元素成比例；两两正交的非零向量组线性无关.

⑥ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中任一向量 α_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 都是此向量组的线性组合.

⑦ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 向量组中至少有一个向量可由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 向量组中每一个向量 α_i 都不能由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

⑧ m 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(A)<n$；

m 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(A)=n$.

⑨ $r(A)=0 \Leftrightarrow A=o$.

⑩ 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示, 且表示法惟一.

⑪ 矩阵的行向量组的秩等于列向量组的秩.

阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的个数.

⑫ 矩阵的行初等变换不改变矩阵的秩, 且不改变列向量间的线性关系.

矩阵的列初等变换不改变矩阵的秩, 且不改变行向量间的线性关系.

$\boxed{\text{向量组等价}}$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可以相互线性表示. 记作：$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\cong\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$

$\boxed{\text{矩阵等价}}$ A 经过有限次初等变换化为 B. 记作：$A\cong B$

⑬ 矩阵 A 与 B 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)\not\Rightarrow A,B$ 作为向量组等价, 即：秩相等的向量组不一定等价.

矩阵 A 与 B 作为向量组等价 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\Rightarrow$

矩阵 A 与 B 等价.

⑭ 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\Rightarrow r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\leqslant r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

⑮ 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示, 且 $s>n$， 则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关.

向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关, 且可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示, 则 $s\leqslant n$.

⑯ 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示, 且 $r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 则两向量组等价；

⑰ 任一向量组和它的极大无关组等价.

⑱ 向量组的任意两个极大无关组等价, 且这两个组所含向量的个数相等.

⑲ 若两个线性无关的向量组等价, 则它们包含的向量个数相等.

⑳ 若 A 是 $m\times n$ 矩阵, 则 $r(A)\le\min\{m,n\}$, 若 $r(A)=m$， A 的行向量线性无关；

若 $r(A)=n$， A 的列向量线性无关, 即：

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

$\boxed{\text{线性方程组的矩阵式}}$ $Ax=\beta$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \beta=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{向量式}}$ $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$

$$\alpha_j=\begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{bmatrix}, j=1,2,\cdots,n$$

$$\beta\text{可由}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性表示}\Leftrightarrow Ax=\beta\text{有解}\Leftrightarrow r(A)=r(A\vdots\beta)\begin{cases} <n\left\langle\begin{array}{l}\Leftrightarrow Ax=\beta\text{有无穷多解}\left\langle\begin{array}{c}\Rightarrow\\ \not\Leftarrow\end{array}\right\rangle Ax=o\text{有非零解}\xrightarrow{\text{当}A\text{为方阵时}}\lvert A\rvert=0\\ \Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性相关}\end{array}\right. \\ =n\left\langle\begin{array}{l}\Leftrightarrow Ax=\beta\text{有唯一组解}\left\langle\begin{array}{c}\Rightarrow\\ \not\Leftarrow\end{array}\right\rangle Ax=o\text{只有零解}\xrightarrow{\text{当}A\text{为方阵时}}\lvert A\rvert\neq 0\\ \Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性无关}\\ \xrightarrow{\text{当}A\text{为方阵时}}\text{克莱姆法则}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\beta\text{不可由}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性表示}\Leftrightarrow Ax=\beta\text{无解}\begin{cases}\Leftrightarrow r(A)\neq r(A\vdots\beta)\\ \Leftrightarrow r(A)<r(A\vdots\beta)\\ \Leftrightarrow r(A)+1=r(A\vdots\beta)\end{cases}$$

矩阵转置的性质：	$(A^T)^T=A$	$(AB)^T=B^TA^T$	$(kA)^T=kA^T$	$\lvert A^T\rvert=\lvert A\rvert$	$(A+B)^T=A^T+B^T$		
矩阵可逆的性质：	$(A^{-1})^{-1}=A$	$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$	$(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$	$\lvert A^{-1}\rvert=\lvert A\rvert^{-1}$	$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$	$(A^{-1})^k=(A^k)^{-1}=A^{-k}$	
伴随矩阵的性质：	$(A^*)^*=\lvert A\rvert^{n-2}A$	$(AB)^*=B^*A^*$	$(kA)^*=k^{n-1}A^*$	$\lvert A^*\rvert=\lvert A\rvert^{n-1}$	$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=\frac{A}{\lvert A\rvert}$ $(A^T)^*=(A^*)^T$	$(A^*)^k=(A^k)^*$	$AA^*=A^*A=\lvert A\rvert E$
$r(A^*)=\begin{cases}n & \text{若}r(A)=n\\ 1 & \text{若}r(A)=n-1\\ 0 & \text{若}r(A)<n-1\end{cases}$		$\lvert AB\rvert=\lvert A\rvert\lvert B\rvert$	$\lvert kA\rvert=k^n\lvert A\rvert$	$\lvert A^k\rvert=\lvert A\rvert^k$			

$$\text{线性方程组解的性质：}\begin{cases}\left.\begin{array}{l}(1)\ \ \eta_1,\eta_2\text{是}Ax=0\text{的解},\eta_1+\eta_2\text{也是它的解}\\(2)\ \ \eta\text{是}Ax=0\text{的解},\text{对任意}k,k\eta\text{也是它的解}\\(3)\ \ \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k\text{是}Ax=0\text{的解},\text{对任意}k\text{个常数}\\\qquad\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k,\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\lambda_k\eta_k\text{也是它的解}\end{array}\right\}\text{齐次方程组}\\(4)\ \ \gamma\text{是}Ax=\beta\text{的解},\eta\text{是其导出组}Ax=0\text{的解},\gamma+\eta\text{是}Ax=\beta\text{的解}\\(5)\ \ \eta_1,\eta_2\text{是}Ax=\beta\text{的两个解},\eta_1-\eta_2\text{是其导出组}Ax=0\text{的解}\\(6)\ \ \eta_2\text{是}Ax=\beta\text{的解},\text{则}\eta_1\text{也是它的解}\Leftrightarrow\eta_1-\eta_2\text{是其导出组}Ax=0\text{的解}\\(7)\ \ \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k\text{是}Ax=\beta\text{的解},\text{则}\\\qquad\qquad\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\lambda_k\eta_k\text{也是}Ax=\beta\text{的解}\Leftrightarrow\lambda_1+\lambda_2+\lambda_k=1\\\qquad\qquad\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\lambda_k\eta_k\text{是}Ax=0\text{的解}\Leftrightarrow\lambda_1+\lambda_2+\lambda_k=0\end{cases}$$

√ 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, 若 $r(A)=m$, 则 $r(A)=r(A\vdots\beta)$, 从而 $Ax=\beta$ 一定有解.

当 $m<n$ 时, 一定不是唯一解. $\Rightarrow \dfrac{\text{方程个数}}{\text{向量维数}}<\dfrac{\text{未知数的个数}}{\text{向量个数}}$, 则该向量组线性相关.

m 是 $r(A)$和$r(A\vdots\beta)$ 的上限.

√ 矩阵的秩的性质：

① $r(A)=r(A^T)=r(A^TA)$

② $r(A\pm B)\leqslant r(A)+r(B)$

③ $r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}$

④ $r(kA)=\begin{cases}r(A) & \text{若}k\neq0\\0 & \text{若}k=0\end{cases}$

⑤ $r\begin{bmatrix}A & o\\o & B\end{bmatrix}=r(A)+r(B)$

⑥若$A\neq0$,则$r(A)\geqslant1$

⑦ 若$A_{m\times n},B_{n\times s}$,且$r(AB)=0$,则$r(A)+r(B)\leqslant n$

⑧ 若P,Q可逆, 则$r(PA)=r(AQ)=r(A)$

⑨ 若A可逆,则$r(AB)=r(B)$

若B可逆,则$r(AB)=r(A)$

⑩ 若$r(A)=n$,则$r(AB)=r(B)$, 且 A 在矩阵乘法中有左消去律:

$$\left\langle \begin{array}{l} AB=0 \Rightarrow B=o \\ AB=AC \Rightarrow B=C \end{array} \right.$$

标准正交基　n 个 n 维线性无关的向量, 两两正交, 每个向量长度为 1.

α与β正交　$(\alpha,\beta)=0$.

α 是单位向量　$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=1$.

√ 内积的性质：　① 正定性：$(\alpha,\alpha)\ge 0$, 且$(\alpha,\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=o$

② 对称性：$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

③ 双线性：$(\alpha,\beta_1+\beta_2)=(\alpha,\beta_1)+(\alpha,\beta_2)$

$(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=(\alpha_1,\beta)+(\alpha_2,\beta)$

$(c\alpha,\beta)=(c\alpha,\beta)=(\alpha,c\beta)$

施密特　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,

$$\text{正交化}\begin{cases} \beta_1=\alpha_1 \\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1\beta_1)}\beta_1 \\ \beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2\beta_2)}\beta_2 \end{cases}$$

单位化：$\eta_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$　　$\eta_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|}$　　$\eta_3=\dfrac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$

正交矩阵　$AA^T=E$.

√ A是正交矩阵的充要条件：A的n个行（列）向量构成□^{n}的一组标准正交基.

√ 正交矩阵的性质：① $A^T=A^{-1}$；

② $AA^T=A^TA=E$；

③ A是正交阵, 则A^T（或A^{-1}）也是正交阵；

④ 两个正交阵之积仍是正交阵；

⑤ 正交阵的行列式等于 1 或-1.

A的特征矩阵　$\lambda E-A$.

$\boxed{A\text{的特征多项式}}$ $|\lambda E-A|=f(\lambda)$.

$\boxed{A\text{的特征方程}}$ $|\lambda E-A|=0$. $Ax=\lambda x \quad \to \quad Ax\text{与}x\text{线性相关}$

√ 上三角阵、下三角阵、对角阵的特征值就是主对角线上的 n 各元素.

√ 若 $|A|=0$, 则 $\lambda=0$ 为 A 的特征值, 且 $Ax=0$ 的基础解系即为属于 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量.

√ $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ $\qquad \sum_1^n \lambda_i=\mathrm{tr}A$

√ 若 $r(A)=1$, 则 A 一定可分解为 $A=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1, & b_2, & \cdots, & b_n\end{bmatrix}$、$A^2=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)A$, 从而 A 的特征值为: $\lambda_1=\mathrm{tr}A=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$, $\qquad \lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$.

√ 若 A 的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, $f(x)$ 是多项式, 则:

① $f(A)$ 的全部特征值为 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$;

② 当 A 可逆时, A^{-1} 的全部特征值为 $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$,

A^* 的全部特征值为 $\frac{|A|}{\lambda_1},\frac{|A|}{\lambda_2},\cdots,\frac{|A|}{\lambda_n}$.

√ $\lambda\text{是}A\text{的特征值,则:}\left\{\begin{matrix}kA\\aA+bE\\A^{-1}\\A^2\\A^m\\A^*\end{matrix}\right.\quad\text{分别有特征值}\quad\begin{matrix}k\lambda\\a\lambda+b\\\frac{1}{\lambda}\\\lambda^2\\\lambda^m\\\frac{|A|}{\lambda}\end{matrix}.$

√ $x\text{是}A\text{关于}\lambda\text{的特征向量,则}x\text{也是}\left\{\begin{matrix}kA\\aA+bE\\A^{-1}\\A^2\\A^m\\A^*\end{matrix}\right.\quad\text{关于}\quad\begin{matrix}k\lambda\\a\lambda+b\\\frac{1}{\lambda}\\\lambda^2\\\lambda^m\\\frac{|A|}{\lambda}\end{matrix}\quad\text{的特征向量.}$

$\boxed{A\text{与}B\text{相似}}$ $B=P^{-1}AP$ （P 为可逆阵） 记为: $A\sim B$

√ A 相似于对角阵的充要条件: A 恰有 n 个线性无关的特征向量. 这时, P 为 A 的特征向量拼成

的矩阵，$P^{-1}AP$ 为对角阵, 主对角线上的元素为 A 的特征值.

√ A 可对角化的充要条件：$n-r(\lambda_i E-A)=k_i$　　k_i 为 λ_i 的重数.

√ 若 n 阶矩阵 A 有 n 个互异的特征值, 则 A 与对角阵相似.

A 与 B 正交相似　$B=P^{-1}AP$　（P 为正交矩阵）

√ 相似矩阵的性质：① $A^{-1}\sim B^{-1}$　若 A,B 均可逆

② $A^T\sim B^T$

③ $A^k\sim B^k$　（k 为整数）

④ $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$, 从而 A,B 有相同的特征值, 但特征向量不一定相同.

即: x 是 A 关于 λ_0 的特征向量, $P^{-1}x$ 是 B 关于 λ_0 的特征向量.

⑤ $|A|=|B|$　从而 A,B 同时可逆或不可逆

⑥ $r(A)=r(B)$

⑦ $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$

√ 数量矩阵只与自己相似.

√ 对称矩阵的性质：

① 特征值全是实数, 特征向量是实向量；

② 与对角矩阵合同；

③ 不同特征值的特征向量必定正交；

④ k 重特征值必定有 k 个线性无关的特征向量；

⑤ 必可用正交矩阵相似对角化（一定有 n 个线性无关的特征向量, A 可能有重的特征值, 重数=$n-r(\lambda E-A)$）.

A 可以相似对角化　A 与对角阵 Λ 相似.　记为：$A\sim\Lambda$　（称 Λ 是 A 的相似标准型）

√ 若 A 为可对角化矩阵, 则其非零特征值的个数（重数重复计算）$=r(A)$.

√ 设 α_i 为对应于 λ_i 的线性无关的特征向量, 则有：

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n)=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots,\lambda_n\alpha_n)=\underbrace{[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]}_{P}\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}}_{\Lambda}.$$

√ 若 $A\sim B$， $C\sim D$, 则： $\begin{bmatrix}A & o\\ o & C\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}B & o\\ o & D\end{bmatrix}$.

√ 若 $A\sim B$, 则 $f(A)\sim f(B)$, $|f(A)|=|f(B)|$.

$\boxed{\text{二次型}}$ $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$　　A 为对称矩阵　　$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

$\boxed{A\text{与}B\text{合同}}$ $B=C^TAC$.　　记作： $A\simeq B$　（A,B为对称阵,C为可逆阵）

√ 两个矩阵合同的充分必要条件是：它们有相同的正负惯性指数.

√ 两个矩阵合同的充分条件是： $A\sim B$

√ 两个矩阵合同的必要条件是： $r(A)=r(B)$

√ $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 经过$\begin{cases}\text{正交变换}\\ \text{合同变换}\\ \text{可逆线性变换}\end{cases}$ $X=CY$ 化为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{1}^{n}d_iy_i^2$ 标准型.

√ 二次型的标准型不是惟一的, 与所作的正交变换有关, 但系数不为零的个数是由 $\underbrace{r(A)}_{\text{正惯性指数+负惯性指数}}$ 惟一确定的.

√ 当标准型中的系数 d_i 为 1，−1 或 0 时, 则为$\boxed{\text{规范形}}$.

√ 实对称矩阵的正（负）惯性指数等于它的正（负）特征值的个数.

√ 任一实对称矩阵 A 与惟一对角阵$\begin{bmatrix}1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0\end{bmatrix}$合同.

√ 用正交变换法化二次型为标准形:

① 求出 A 的特征值、特征向量;

② 对 n 个特征向量单位化、正交化;

③ 构造 C（正交矩阵）, $C^{-1}AC=\Lambda$;

④ 作变换 $X=CY$, 新的二次型为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_1^n d_i {y_i}^2$, Λ 的主对角上的元素 d_i 即为 A 的特征值.

$\boxed{\text{正定二次型}}$ $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零, $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$.

$\boxed{\text{正定矩阵}}$ 正定二次型对应的矩阵.

√ 合同变换不改变二次型的正定性.

√ 成为正定矩阵的充要条件（之一成立）:

① 正惯性指数为 n;

② A 的特征值全大于 0;

③ A 的所有顺序主子式全大于 0;

④ A 合同于 E，即存在可逆矩阵 Q 使 $Q^TAQ=E$;

⑤ 存在可逆矩阵 P，使 $A=P^TP$ （从而 $|A|>0$）;

⑥ 存在正交矩阵，使 $C^TAC=C^{-1}AC=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$ （λ_i 大于 0）.

√ 成为正定矩阵的必要条件: $a_{ii}>0$; $|A|>0$.