一、 (每题 3 分，共 30 分)

A 卷： 1. C；2. D； 3. D；4. A； 5. B； 6.C ;7. C; 8. B； 9.B； 10. B

B 卷：1. C；2. D； 3. D；4. B；5 A； 6.C ;7. C； 8. B； 9.B； 10. B

二、 填空题（每题 3 分，共 27 分）

A 卷：1. $v=-1$； 2. $e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+\frac{i}{2}\ln 2}$ 3. $i(e^{-1}+e)-2$；4. iz^2+c；5. $6\pi i$；

6. $\frac{1}{12}\pi i$；7. $|z|<1$； 8. $\frac{1}{4}e^{-2|t|}$； 9. $\sin(t-2)u(t-2)$

B 卷：1. $v=1$；2. $i(e^{-1}+e)-2$ 3. $e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+\frac{i}{2}\ln 2}$；4. iz^2+c；5. $6\pi i$；6. $|z|<1$；

7. $\frac{1}{4!}$； 8. $\frac{1}{4}e^{-2|t|}$； 9. $\sin(t-2)u(t-2)$

三、（10 分）计算积分 $\int_c \frac{\sin z}{z(i-z)^2}dz$，其中 c 为不经过 $0,i$ 的简单闭曲线.

解 分四种情况讨论

1. $0,i$ 均不在曲线 c 内，由单连通区域柯西积分定理_

$$\oint_C \frac{\sin z}{(i-z)^2 z}dz = 0.$$ ________________ 2 分

2. 曲线 c 包含 0，不包含 i，则

$$\oint_C \frac{\sin z}{(i-z)^2 z}dz = \oint_C \frac{\frac{\sin z}{(z-i)^2}}{z}dz = 2\pi i \frac{\sin z}{(z-i)^2}\Big|_{z=0} = 0$$ ________________ 3 分

2. 曲线 c 不包含 0，只包含 i，则

$$\oint_C \frac{\sin z}{(i-z)^2 z}dz = \oint_C \frac{\frac{\sin z}{z}}{(z-i)^2}dz = 2\pi i\left(\frac{\sin z}{z}\right)'\Big|_{z=i} = 2\pi\cos i + 2\pi i\sin i = 2\pi e^{-1}$$

________________________ 3 分

4. 曲线 C 包含 0，也包含 i

分别以 0，i 为心做互不包含、互不相交小曲线 C_1, C_2，C_1 只包含 0，C_2 只包含 i，则

$$\oint_C \frac{\sin z}{(i-z)^2 z}dz = \oint_{C_1} \frac{\sin z}{(i-z)^2 z}dz + \oint_{C_2} \frac{\sin z}{(i-z)^2 z}dz = 2\pi e^{-1}$$

____________________ 2 分

四、（8 分）将 $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-i)}$ 在适当的圆环域内展成以 i 为心的幂级数。

解 适当地圆环域包括 $0<|z-i|<\sqrt{2};\ \sqrt{2}<|z-i|<\infty$

（1） $0<|z-i|<\sqrt{2}$

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-i)}=\frac{1}{z-i}\frac{1}{z-i+1+i}=\frac{1}{z-i}\frac{1}{1+i}\frac{1}{1+\frac{z-i}{1+i}}$$

$$=\frac{1}{z-i}\frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{1+i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^{n-1}}{(1+i)^{n+1}}$$ ____________4 分

（2） $\sqrt{2}<|z-i|<\infty$

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-i)}=\frac{1}{z-i}\frac{1}{z-i+1+i}=\frac{1}{z-i}\frac{1}{z-i}\frac{1}{1+\frac{1+i}{z-i}}=\frac{1}{(z-i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1+i}{z-i}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+i)^n}{(z-i)^{n+2}}$$ ____________4 分

五、（9 分）求函数 $f(t)=\begin{cases}e^{\beta t}, t<0\\ 0,\quad t\ge 0\end{cases}, \beta>0$ 的傅立叶变换和逆变换， 并计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t-\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega$。

解 傅立叶变换为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}e^{\beta t}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\beta-i\omega}e^{(\beta-i\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{\beta-i\omega}$$

____________ 5 分

在连续点处,

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\beta-i\omega}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta+i\omega}{\beta^2+\omega^2}(\cos\omega t+i\sin\omega t)\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t-\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t-\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega$$

____________3 分

因此 $\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t-\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\pi f(t), t\ne 0\\ \frac{\pi}{2},\quad t=0\end{cases}$。 ____________1 分

六、（10 分）利用 Laplace 变换求微分方程组

$$\begin{cases} x'(t)=2x(t)+y(t) \\ y'(t)=-x(t)+4y(t) \end{cases}$$

满足初始条件$\begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$的解.

解 假设 $x(t)$ 的拉普拉斯变换为 $X(s)$，$y(t)$ 的拉普拉斯变换为 $Y(s)$，方程组两边同时进行拉普拉斯变换得

$$\begin{cases} sX(s)=2X(s)+Y(s) \\ sY(s)-1=-X(s)+4Y(s) \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} X(s)=\dfrac{1}{(s-3)^2} \\ Y(s)=\dfrac{s-2}{(s-3)^2} \end{cases}$$

_________________6 分

求拉普拉斯逆变换得

留数方法 $x(t)=\mathrm{Res}[\dfrac{1}{(s-3)^2}e^{st},s=3]=\lim\limits_{s\to 3}(e^{st})'\Big|=te^{3t}$

或卷积方法 $x(t)=e^{3t}*e^{3t}=te^{3t}$

$y(t)=\mathrm{Res}[\dfrac{s-2}{(s-3)^2}e^{st},s=3]=\lim\limits_{s\to 3}((s-2)e^{st})'\Big|=e^{3t}+te^{3t}$

或 $Y(s)=\dfrac{s-2}{(s-3)^2}=\dfrac{1}{s-3}+\dfrac{1}{(s-3)^2}$，从而 $y(t)=e^{3t}+te^{3t}$

_________________4 分

七、（6 分）证明刘维尔定理： 在有限复平面上有界且解析的函数是常值函数。

证明 设在复平面上存在 $M>0$,使对所有 z,$|f(z)|\le M$. 设 z_0 是复平面上任意一点，R 为任意正整数，$|f(z)|$在 $C:|z-z_0|\le R$ 上解析，由高阶导数公式及估值不等式

$$|f'(z_0)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z\right|\le\frac{1}{2\pi}\frac{M}{R^2}2\pi R=\frac{M}{R}$$ __________4 分

令 $R\to+\infty$ 得 $|f'(z_0)|=0$. 由 z_0 的任意性， $f(z)$ 在复平面上恒为常数.______2 分