同济大学课程考核试卷（B 卷）
2006—2007 学年第一学期

命题教师签名：　　　　　　　　　　　　审核教师签名：

课号：12201010　　　　课名：线性代数 B　　　考试考查：考试

此卷选为：期中考试( )、期终考试( )、重考(√)试卷

年级____专业________________学号________姓名__________任课教师__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

（注意：本试卷共八大题，三大张，满分 100 分．考试时间为 120 分钟．要求写出解题过程，否则不予计分）

一、填空题（24 分）

1、 如果 $A^k=0(k\ge 1)$，则 $(E-A)^{-1}=$____________________.

2、 设3阶矩阵 A 的特征值为 $1,-1,2$，则 $|A^*+E+A+A^2|=$____________________ .

3、 设向量 $\alpha^T=(b,\ 2,\ 3,\ 4)$ 和 $\beta^T=(1,\ 3,\ -2,\ 1)$ 正交，则 b 的值为__________.

4、 如果矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&a&4\\3&4&10\end{pmatrix}$ 正定，则 a 的取值范围为 ______________.

5、 如果矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&\lambda&1\\\lambda&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似，则 $\lambda=$________.

6、 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是____________________ .

7、 设矩阵 A 的秩小于 r，下列说法正确的是______________ .

（A）矩阵 A 中存在 r 阶非零子式；

（B）矩阵 A 中所有阶数小于 r 的子式都非零；

（C）矩阵 A 中所有阶数小于 r 的子式都是零；

（D）矩阵 A 中存在阶数小于 r 的非零子式.

8、 设 λ 为矩阵 AB 的非零特征值，ξ 为相应的特征向量，下列说法正确的是______________ .

（A） λ 为矩阵 BA 的特征值，ξ 为相应的特征向量；

（B） ξ 为线性方程组 $BX=0$ 的非零解；

（C） $B\xi$ 为 BA 的一个特征向量；

（D） $B\xi$ 为 AB 的一个特征向量.

二、(12 分) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 6 \\ -17 & 23 & 45 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} -15 & 21 & 40 \\ -53 & 71 & 146 \end{pmatrix}$，试求矩阵 X，使得 $XA=B$.

三、(16 分) 设 $\alpha_1^T=(1,0,2,1)$, $\alpha_2^T=(1,2,0,1)$, $\alpha_3^T=(2,1,3,0)$, $\alpha_4^T=(2,5,-1,4)$，试求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 所张成的向量空间 L 的维数及一组基；如果设 $\alpha_5^T=(1,-1,3,-1)$，问 α_5 是否在向量空间 L 中？如果在，请用该组基线性表示向量 α_5.

四、（10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 有两个不相同的特征值，求 a 的值，并讨论 A 是否可对角化.

五、（10 分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

六、（10 分）将向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$化为规范正交向量组.

七、（10 分）在全体正实数构成的集合$\mathbb{R}^+$上定义加法$\oplus$如下：对$a,b\in\mathbb{R}^+$，$a\oplus b=ab$；对任意$\lambda\in\mathbb{R}$和$a\in\mathbb{R}^+$，定义数乘如下：$\lambda\otimes a=a^{\lambda}$；则$\mathbb{R}^+$构成$\mathbb{R}$上的向量空间. 试写出（1）$\mathbb{R}^+$的零元素；（2）$\mathbb{R}^+$中任意非零元素$b$的负元素；（3）向量空间$\mathbb{R}^+$的基和维数；（4）$\mathbb{R}^+$中任意元素$c$在所取基下的坐标.

八、(8分)(1)设A为非零实矩阵，并且$A^* = A^T$，证明矩阵A可逆；

(2)求出一切满足条件$A^* = A^T$的二阶方阵.