1-1，1-2

（1） 解：

a) 是命题，真值为 T。

b) 不是命题。

c) 是命题，真值要根据具体情况确定。

d) 不是命题。

e) 是命题，真值为 T。

f) 是命题，真值为 T。

g) 是命题，真值为 F。

h) 不是命题。

i) 不是命题。

（2） 解：

原子命题：我爱北京天安门。

复合命题：如果不是练健美操，我就出外旅游拉。

（3） 解：

a) $(\neg P \wedge R)\rightarrow Q$

b) $Q\rightarrow R$

c) $\neg P$

d) $P\rightarrow\neg Q$

（4） 解：

a) 设 Q:我将去参加舞会。R:我有时间。P:天下雨。

$Q\leftrightarrow (R\wedge\neg P)$:我将去参加舞会当且仅当我有时间和天不下雨。

b) 设 R:我在看电视。Q:我在吃苹果。

$R\wedge Q$:我在看电视边吃苹果。

c) 设 Q:一个数是奇数。R:一个数不能被 2 除。

$(Q\rightarrow R)\wedge(R\rightarrow Q)$:一个数是奇数，则它不能被 2 整除并且一个数不能被 2 整除，则它是奇数。

(5) 解：

a) 设 P：王强身体很好。Q：王强成绩很好。$P\wedge Q$

b) 设 P：小李看书。Q：小李听音乐。$P\wedge Q$

c) 设 P：气候很好。Q：气候很热。$P\vee Q$

d) 设 P： a 和 b 是偶数。Q：a+b 是偶数。$P\rightarrow Q$

e) 设 P：四边形 ABCD 是平行四边形。Q ：四边形 ABCD 的对边平行。$P\leftrightarrow Q$

f) 设 P：语法错误。Q：程序错误。R：停机。$(P\vee Q)\rightarrow R$

(6) 解：

a) P:天气炎热。Q:正在下雨。 $P\wedge Q$

b) P:天气炎热。R:湿度较低。 $P\wedge R$

c) R:天正在下雨。S:湿度很高。 $R\vee S$

d) A:刘英上山。B:李进上山。 $A\wedge B$

e) M:老王是革新者。N:小李是革新者。 $M\vee N$

f) L:你看电影。M:我看电影。 $\neg L\rightarrow\neg M$

g) P:我不看电视。Q:我不外出。 R:我在睡觉。 $P\wedge Q\wedge R$

h) P:控制台打字机作输入设备。Q:控制台打字机作输出设备。$P\wedge Q$

1-3

（1）解：

a) 不是合式公式，没有规定运算符次序（若规定运算符次序后亦可作为合式公式）

b) 是合式公式

c) 不是合式公式（括弧不配对）

d) 不是合式公式（R 和 S 之间缺少联结词）

e) 是合式公式。

（2）解：

a） A是合式公式，$(A\vee B)$是合式公式，$(A\rightarrow(A\vee B))$ 是合式公式。这个过程可以简记为：

A；$(A\vee B)$；$(A\rightarrow(A\vee B))$

同理可记

b） A；$\neg A$ ；$(\neg A\wedge B)$ ；$((\neg A\wedge B)\wedge A)$

c） A；$\neg A$ ；B；$(\neg A\rightarrow B)$ ；$(B\rightarrow A)$ ；$((\neg A\rightarrow B)\rightarrow(B\rightarrow A))$

d） A；B；$(A\rightarrow B)$ ；$(B\rightarrow A)$ ；$((A\rightarrow B)\vee(B\rightarrow A))$

（3）解：

a） $((((A\rightarrow C)\rightarrow((B\wedge C)\rightarrow A))\rightarrow((B\wedge C)\rightarrow A))\rightarrow(A\rightarrow C))$

b） $((B\rightarrow A)\vee(A\rightarrow B))$。

（4）解：

a）是由c）式进行代换得到，在c）中用Q代换P，$(P\rightarrow P)$代换Q.

d）是由 a）式进行代换得到，在 a）中用$P\rightarrow(Q\rightarrow P)$代换Q.

e）是由b）式进行代换得到，用R代换P，S代换Q，Q代换R，P代换S.

（5）解：

a) P：你没有给我写信。 R：▽ 信在途中丢失了。 P Q

b) P：张三不去。Q：李四不去。R：他就去。$(P\wedge Q)\rightarrow R$

c） P：我们能划船。 Q：我们能跑步。$\neg(P\wedge Q)$

d） P：你来了。Q：他唱歌。R：你伴奏。$P\rightarrow(Q\leftrightarrow R)$

（6）解：

P:它占据空间。Q:它有质量。R:它不断变化。

S:它是物质。

这个人起初主张：$(P\wedge Q\wedge R) \leftrightarrow S$

后来主张：$(P\wedge Q\leftrightarrow S)\wedge(S\rightarrow R)$

这个人开头主张与后来主张的不同点在于：后来认为有 $P\wedge Q$ 必同时有 R，开头时没有这样的主张。

（7）解：

a) P: 上午下雨。 Q:我去看电影。 R:我在家里读书。 S:我在家里看报。

$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow(R\vee S))$

b）P: 我今天进城。Q:天下雨。$\neg Q\rightarrow P$

c）P: 你走了。 Q:我留下。$Q\rightarrow P$

1-4

（4）解：a)

P Q R	Q∧R	P∧(Q∧R)	P∧Q	(P∧Q)∧R
T T				
T				
T T				
F	T	T	T	T
T F	F	F	T	F
T	F	F	F	F
T F	F	F	F	F
F	T	F	F	F
F T	F	F	F	F
T	F	F	F	F
F T	F	F	F	F
F				
F F				
T				

F F F				

所以，P∧(Q∧R) ⇔ (P∧Q)∧R

b)

P Q R	Q∨R	P∨(Q∨R)	P∨Q	(P∨Q)∨R
T T T T T F T	T T T F T T T	T T T T T T T	T T T	T T T

F T T F F F T T F T F F F T F F	F	F	T T T F F	T T T T F

F				

所以，$P\vee(Q\vee R) \Leftrightarrow (P\vee Q)\vee R$

c）

P Q R	Q∨R	P∧（Q∨R）	P∧Q	P∧R	（P∧Q）∨（P∧R）
T					
T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	F	T
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F
T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F
T					

F					
F					
F					
T					
T					
F					
T					
F					
F					
F					
T					
F					
F					
F					

所以，$P\wedge(Q\vee R) \Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$

d）

P Q	¬P	¬Q	¬P∨¬Q	¬(P∧Q)	¬P∧¬Q	¬(P∨Q)
T T	F	F	F	F	F	F
T F	F	T	T	T	F	F
F T	T	F	T	T	F	F
F F	T	T	T	T	T	T

所以，¬(P∧Q) ⇔¬P∨¬Q，¬(P∨Q) ⇔¬P∧¬Q

（5）解：如表，对问好所填的地方，可得公式 F_1～F_6，可表达为

P	Q	R	F1	F2	F3	F4	F5	F6
T	T	T	T	F	T	T	F	F
T	T	F	F	F	T	F	F	F
T	F	T	T	F	F	T	T	F

T	F	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F
F	T	F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	F	F	T	F	T	T	T

F1: $(Q \to P) \to R$

F2: $(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

F3: $(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \vee R)$

F4: $(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$

F5: $(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$

F6: $\neg (P \vee Q \vee R)$

(6)

P	Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T

解：由上表可得有关公式为

1. F　　2. $\neg(P\vee Q)$

3. $\neg(Q\rightarrow P)$　　4. $\neg P$

5. $\neg(P\rightarrow Q)$　　6. $\neg Q$

7. $\neg(P\leftrightarrow Q)$　　8. $\neg(P\wedge Q)$

9. $P\wedge Q$　　10. $P\leftrightarrow Q$

11. Q　　12. $P\rightarrow Q$

13. P　　14. $Q\rightarrow P$

15. $P\vee Q$　　16. T

(7) 证明：

a) $A\rightarrow(B\rightarrow A)\Leftrightarrow \neg A\vee(\neg B\vee A)$

$\Leftrightarrow A\vee(\neg A\vee\neg B)$

$\Leftrightarrow A\vee(A\rightarrow\neg B)$

$\Leftrightarrow\neg A\rightarrow(A\rightarrow\neg B)$

b) $\neg(A\leftrightarrow B)\Leftrightarrow\neg((A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B))$

$\Leftrightarrow\neg((A\wedge B)\vee\neg(A\vee B))$

$\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge\neg(A\wedge B)$

或 $\neg(A\leftrightarrow B)\Leftrightarrow\neg((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$

$\Leftrightarrow\neg((\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A))$

$\Leftrightarrow\neg((\neg A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge A)\vee(B\wedge\neg B)\vee(B\wedge A))$

$\Leftrightarrow\neg((\neg A\wedge\neg B)\vee(B\wedge A))$

$\Leftrightarrow\neg(\neg(A\vee B))\vee(A\wedge B)$

$\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge\neg(A\wedge B)$

c) $\neg(A\rightarrow B)\Leftrightarrow\neg(\neg A\vee B)\quad\Leftrightarrow A\wedge\neg B$

d) $\neg(A\leftrightarrow B)\Leftrightarrow\neg((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$

$\Leftrightarrow\neg((\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A))$

$\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)$

e) $(((A\wedge B\wedge C)\rightarrow D)\wedge(C\rightarrow(A\vee B\vee D)))$

$\Leftrightarrow(\neg(A\wedge B\wedge C)\vee D)\wedge(\neg C\vee(A\vee B\vee D))$

$\Leftrightarrow(\neg(A\wedge B\wedge C)\vee D)\wedge(\neg(\neg A\wedge\neg B\wedge C)\vee D)$

$\Leftrightarrow (\neg(A\wedge B\wedge C)\wedge\neg(\neg A\wedge\neg B\wedge C))\vee D$

$\Leftrightarrow((A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge C))\rightarrow D$

$\Leftrightarrow(((A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B))\wedge C)\rightarrow D$

$\Leftrightarrow((C\wedge(A\leftrightarrow B))\rightarrow D)$

f) $A\rightarrow(B\vee C)\quad\Leftrightarrow\neg A\vee(B\vee C)$

$\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\vee C$

$\Leftrightarrow\neg(A\wedge\neg B)\vee C$

$\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\rightarrow C$

g) $(A\rightarrow D)\wedge(B\rightarrow D)\Leftrightarrow(\neg A\vee D)\wedge(\neg B\vee D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B)\vee D$

$\Leftrightarrow\neg(A\vee B)\vee D$

$\Leftrightarrow(A\vee B)\rightarrow D$

h) $((A\wedge B)\rightarrow C)\wedge(B\rightarrow(D\vee C))$

$\Leftrightarrow(\neg(A\wedge B)\vee C)\wedge(\neg B\vee(D\vee C))$

$\Leftrightarrow(\neg(A\wedge B)\wedge(\neg B\vee D))\vee C$

$\Leftrightarrow(\neg(A\wedge B)\wedge\neg(\neg D\wedge B))\vee C$

$\Leftrightarrow\neg((A\wedge B)\vee(\neg D\wedge B))\vee C$

$\Leftrightarrow((A\vee\neg D)\wedge B)\rightarrow C$

$\Leftrightarrow(B\wedge(D\rightarrow A))\rightarrow C$

（8）解：

a) $((A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg B\rightarrow\neg A))\wedge C$

$\Leftrightarrow((\neg A\vee B)\leftrightarrow(B\vee\neg A))\wedge C$

$\Leftrightarrow((\neg A\vee B)\leftrightarrow(\neg A\vee B))\wedge C$

$\Leftrightarrow T\wedge C\quad\Leftrightarrow C$

b) $A\vee(\neg A\vee(B\wedge\neg B))\Leftrightarrow(A\vee\neg A)\vee(B\wedge\neg B)\Leftrightarrow T\vee F\Leftrightarrow T$

c) $(A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge B\wedge C)$

$\Leftrightarrow(A\vee\neg A)\wedge(B\wedge C)$

$\Leftrightarrow T\wedge(B\wedge C)$

$\Leftrightarrow B\wedge C$

（9）解：1）设 C 为 T，A 为 T，B 为 F，则满足 $A\vee C\Leftrightarrow B\vee C$，但 $A\Leftrightarrow B$ 不成立。

2）设 C 为 F，A 为 T，B 为 F，则满足 $A\wedge C\Leftrightarrow B\wedge C$，但 $A\Leftrightarrow B$ 不成立。

3）由题意知$\neg A$和$\neg B$的真值相同，所以 A 和 B 的真值也相同。

习题 1-5

（1） 证明：

a) $(P\wedge(P\to Q))\to Q$

$\Leftrightarrow (P\wedge(\neg P\vee Q))\to Q$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg P)\vee(P\wedge Q)\to Q$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\to Q$

$\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)\vee Q$

$\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q\vee Q$

$\Leftrightarrow\neg P\vee T$

$\Leftrightarrow T$

b) $\neg P\to(P\to Q)$

$\Leftrightarrow P\vee(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow (P\vee\neg P)\vee Q$

$\Leftrightarrow T\vee Q$

$\Leftrightarrow T$

c) $((P\to Q)\wedge(Q\to R))\to(P\to R)$

因为$(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow(P\to R)$

所以 $(P\to Q)\wedge(Q\to R)$为重言式。

d) $((a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a))\leftrightarrow(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$

因为$((a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a))$

$\Leftrightarrow((a\vee c)\wedge b)\vee(c\wedge a)$

$\Leftrightarrow((a\vee c)\vee(c\wedge a))\wedge(b\vee(c\wedge a))$

$\Leftrightarrow(a\vee c)\wedge(b\vee c)\wedge(b\vee a)$

所以 $((a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a))\leftrightarrow(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$ 为重言式。

（2） 证明：

a) $(P\to Q)\Rightarrow P\to(P\wedge Q)$

解法1：

设 $P\to Q$ 为T

（1）若P为T，则Q为T，所以 $P\wedge Q$ 为T，故 $P\to(P\wedge Q)$ 为T

（2）若P为F，则Q为F，所以 $P\wedge Q$ 为F，$P\to(P\wedge Q)$ 为T

命题得证

解法2：

设 $P\to(P\wedge Q)$ 为F ，则P为T，$(P\wedge Q)$ 为F ，故必有P为T，Q为F ，所以 $P\to Q$ 为F。

解法3：

$(P\to Q)\to(P\to(P\wedge Q))$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee(P\wedge Q))$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee((\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee Q))$

$\Leftrightarrow T$

所以 $(P\to Q)\Rightarrow P\to(P\wedge Q)$

b) $(P\to Q)\to Q\Rightarrow P\vee Q$

设 $P\vee Q$ 为F，则P为F，且Q为F，

故 $P\to Q$ 为T，$(P\to Q)\to Q$ 为F，

所以 $(P\to Q)\to Q\Rightarrow P\vee Q$。

c) $(Q\to(P\wedge\neg P))\to(R\to(R\to(P\wedge\neg P)))\Rightarrow R\to Q$

设 $R\to Q$ 为F，则R为T，且Q为F，又 $P\wedge\neg P$ 为F

所以 $Q\to(P\wedge\neg P)$ 为T，$R\to(P\wedge\neg P)$ 为F

所以 $R\to(R\to(P\wedge\neg P))$ 为F，所以 $(Q\to(P\wedge\neg P))\to(R\to(R\to(P\wedge\neg P)))$ 为F

即 $(Q\to(P\wedge\neg P))\to(R\to(R\to(P\wedge\neg P)))\Rightarrow R\to Q$ 成立。

（3） 解：

a） P→Q 表示命题“如果 8 是偶数，那么糖果是甜的”。

b) a)的逆换式 Q→P 表示命题“如果糖果是甜的，那么 8 是偶数”。

c) a)的反换式┐P→┐Q 表示命题“如果 8 不是偶数，那么糖果不是甜的”。

d) a)的逆反式┐Q→┐P 表示命题“如果糖果不是甜的，那么 8 不是偶数”。

（**4**） 解：

a) 如果天下雨，我不去。

设 P：天下雨。Q：我不去。P→Q

逆换式 Q→P 表示命题:如果我不去，则天下雨。

逆反式┐Q→┐P 表示命题:如果我去，则天不下雨

b) 仅当你走我将留下。

设 S：你走了。R：我将留下。R→S

逆换式 S→R 表示命题：如果你走了则我将留下。

逆反式┐S→┐R 表示命题：如果你不走，则我不留下。

c) 如果我不能获得更多帮助，我不能完成个任务。

设 E：我不能获得更多帮助。H：我不能完成这个任务。E→H

逆换式 H→E 表示命题:我不能完成这个任务，则我不能获得更多帮助。

逆反式┐H→┐E 表示命题:我完成这个任务，则我能获得更多帮助

（**5**） 试证明 **P↔Q**，**Q** 逻辑蕴含 **P**。

证明：解法 **1**：

本题要求证明**(P↔Q)** ∧**Q⇒P,**

设$(P\leftrightarrow Q)\wedge Q$为T，则$(P\leftrightarrow Q)$为T，Q为T，故由↔的定义，必有P为T。

所以$(P\leftrightarrow Q)\wedge Q\Rightarrow P$

解法2：

由体题可知，即证$((P\leftrightarrow Q)\wedge Q)\rightarrow P$是永真式。

$$((P\leftrightarrow Q)\wedge Q)\rightarrow P$$
$$\Leftrightarrow (((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))\wedge Q)\rightarrow P$$
$$\Leftrightarrow (\neg((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))\vee\neg Q)\vee P$$
$$\Leftrightarrow (((\neg P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q))\vee\neg Q)\vee P$$
$$\Leftrightarrow ((\neg Q\vee\neg P\vee\neg Q)\wedge(\neg Q\vee P\vee Q))\vee P$$
$$\Leftrightarrow ((\neg Q\vee\neg P)\wedge T)\vee P$$
$$\Leftrightarrow\neg Q\vee\neg P\vee P$$
$$\Leftrightarrow\neg Q\vee T$$
$$\Leftrightarrow T$$

（6） 解：

P：我学习　　Q：我数学不及格　　R：我热衷于玩扑克。

如果我学习，那么我数学不会不及格：　$P\rightarrow\neg Q$

如果我不热衷于玩扑克，那么我将学习：　$\neg R\rightarrow P$

但我数学不及格：　Q

因此我热衷于玩扑克。　R

即本题符号化为：$(P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\rightarrow P)\wedge Q\Rightarrow R$

证：

证法1：$((P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\rightarrow P)\wedge Q)\rightarrow R$

$\Leftrightarrow\neg((\neg P\vee\neg Q)\wedge(R\vee P)\wedge Q)\vee R$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(\neg R\wedge\neg P)\vee\neg Q\vee R$

$\Leftrightarrow$

$((\neg Q\vee P)\wedge(\neg Q\vee Q))\vee((R\vee\neg R)\wedge(R\vee\neg P))$

$\Leftrightarrow \neg Q\vee P\vee R\vee\neg P$

$\Leftrightarrow T$

所以，论证有效。

证法 2：设$(P\to\neg Q)\wedge(\neg R\to P)\wedge Q$为 T，

则因 Q 为 T，$(P\to\neg Q)$ 为 T，可得 P 为 F，

由$(\neg R\to P)$为 T，得到 R 为 T。

故本题论证有效。

（7） 解：

P：6 是偶数　　Q：7 被 2 除尽　　R：5 是素数

如果 6 是偶数，则 7 被 2 除不尽　　$P\to\neg Q$

或 5 不是素数，或 7 被 2 除尽　　$\neg R\vee Q$

5 是素数　　R

所以 6 是奇数　　$\neg P$

即本题符号化为：$(P\to\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R\Rightarrow\neg P$

证：

证法 1：$((P\to\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R)\to\neg P$

$\Leftrightarrow \neg((\neg P\vee\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R)\vee\neg P$

$\Leftrightarrow ((P\wedge Q)\vee(R\wedge\neg Q)\vee\neg R)\vee\neg P$

$\Leftrightarrow ((\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee Q))\vee((\neg R\vee R)\wedge(\neg R\vee\neg Q))$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q)\vee(\neg R\vee\neg Q)$

$\Leftrightarrow T$

所以，论证有效，但实际上他不符合实际意义。

证法 2：$(P\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg R\vee Q)\wedge R$ 为 T，

则有 R 为 T，且$\neg R\vee Q$ 为 T，故 Q 为 T，

再由 $P\rightarrow\neg Q$ 为 T，得到$\neg P$ 为 T。

（8） 证明：

a) $P\Rightarrow(\neg P\rightarrow Q)$

设 P 为 T，则$\neg P$ 为 F，故$\neg P\rightarrow Q$ 为 T

b) $\neg A\wedge B\wedge C\Rightarrow C$

假定$\neg A\wedge B\wedge C$ 为 T，则 C 为 T。

c) $C\Rightarrow A\vee B\vee\neg B$

因为 $A\vee B\vee\neg B$ 为永真，所以 $C\Rightarrow A\vee B\vee\neg B$ 成立。

d) $\neg(A\wedge B)\Rightarrow\neg A\vee\neg B$

设$\neg(A\wedge B)$为 T，则 $A\wedge B$ 为 F。

若 A 为 T，B 为 F，则$\neg A$ 为 F，$\neg B$ 为 T，故$\neg A\vee\neg B$ 为 T。

若 A 为 F，B 为 T，则$\neg A$ 为 T，$\neg B$ 为 F，故$\neg A\vee\neg B$ 为 T。

若 A 为 F，B 为 F，则$\neg A$ 为 T，$\neg B$ 为 T，故$\neg A\vee\neg B$ 为 T。

命题得证。

e) $\neg A\rightarrow(B\vee C)$，$D\vee E$，$(D\vee E)\rightarrow\neg A\Rightarrow B\vee C$

设$\neg A\rightarrow(B\vee C)$，$D\vee E$，$(D\vee E)\rightarrow\neg A$ 为 T，

则 $D\vee E$ 为 T，$(D\vee E)\rightarrow\neg A$ 为 T，所以$\neg A$ 为 T

又$\neg A\rightarrow(B\vee C)$为 T，所以 $B\vee C$ 为 T。命题得证。

f) $(A\wedge B)\rightarrow C$，$\neg D$，$\neg C\vee D\Rightarrow\neg A\vee\neg B$

设$(A\wedge B)\rightarrow C$，$\neg D$，$\neg C\vee D$ 为 T，则$\neg D$ 为 T，$\neg C\vee D$ 为 T，所以 C 为 F

又$(A\wedge B)\rightarrow C$ 为 T，所以 $A\wedge B$ 为 F，所以$\neg A\vee\neg B$ 为 T。命题得证。

（9）解：

a) 如果他有勇气，他将得胜。

P：他有勇气　Q：他将得胜

原命题：$P \rightarrow Q$　逆反式：$\neg Q \rightarrow \neg P$ 表示：如果他失败了，说明他没勇气。

b) 仅当他不累他将得胜。

P：他不累　Q：他得胜

原命题：$Q \rightarrow P$　逆反式：$\neg P \rightarrow \neg Q$ 表示：如果他累，他将失败。

习题　1-6

(1)解：

a) $(P \wedge Q) \wedge \neg P \Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \wedge Q \Leftrightarrow \neg (T \vee Q)$

b) $(P \rightarrow (Q \vee \neg R)) \wedge \neg P \wedge Q$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \vee \neg R)) \wedge \neg P \wedge Q$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge \neg P \wedge Q) \vee (\neg R \wedge \neg P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg R \wedge Q)$

$\Leftrightarrow \neg P \wedge Q$

$\Leftrightarrow \neg (P \vee \neg Q)$

c) $\neg P \wedge \neg Q \wedge (\neg R \rightarrow P)$

$\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge (R \vee P)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge P)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee F$

$\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge R$

$\Leftrightarrow \neg (P \vee Q \vee \neg R)$

(2) 解：

a) $\neg P \Leftrightarrow P \downarrow P$

b) $P \vee Q \Leftrightarrow \neg (P \downarrow Q) \Leftrightarrow (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$

c) $P \wedge Q \Leftrightarrow \neg P \downarrow \neg Q \Leftrightarrow (P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)$

(3)解：

$P \to (\neg P \to Q)$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow T$

$\Leftrightarrow \neg P \vee P$

$\Leftrightarrow (\neg P \uparrow \neg P) \uparrow (P \uparrow P)$

$\Leftrightarrow P \uparrow (P \uparrow P)$

$P \to (\neg P \to Q)$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow T$

$\Leftrightarrow \neg P \vee P$

$\Leftrightarrow \neg (\neg P \downarrow P)$

$\Leftrightarrow \neg ((P \downarrow P) \downarrow P)$

$\Leftrightarrow ((P \downarrow P) \downarrow P) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow P)$

(4)解：

$P \uparrow Q$

$\Leftrightarrow \neg (\neg P \downarrow \neg Q)$

$\Leftrightarrow \neg ((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q))$

$\Leftrightarrow ((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q))$

(5)证明：

$\neg (B \uparrow C)$

$\Leftrightarrow \neg (\neg B \vee \neg C)$

$\Leftrightarrow \neg B \downarrow \neg C$

$\neg (B \downarrow C)$

$\Leftrightarrow \neg (\neg B \wedge \neg C)$

$\Leftrightarrow \neg B \uparrow \neg C$

(6)解：联结词“↑”和“↓”不满足结合律。

举例如下：

a)给出一组指派：P 为 T，Q 为 F，R 为 F，则 $(P \uparrow Q) \uparrow R$ 为 T，$P \uparrow (Q \uparrow R)$ 为 F

故 $(P \uparrow Q) \uparrow R \quad P \uparrow (Q \uparrow R)$.

b)给出一组指派：P为T，Q为F，R为F，则$(P\downarrow Q)\downarrow R$为T，$P\downarrow(Q\downarrow R)$为F

故$(P\downarrow Q)\downarrow R \not\Leftrightarrow P\downarrow(Q\downarrow R)$.

(7)证明：

设变元P，Q，用连结词$\leftrightarrow$,$\neg$作用于P，Q得到：

P，Q，$\neg P$，$\neg Q$，$P\leftrightarrow Q$，$P\leftrightarrow P$，$Q\leftrightarrow Q$，$Q\leftrightarrow P$。

但$P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow Q\leftrightarrow P$，$P\leftrightarrow P\Leftrightarrow Q\leftrightarrow Q$，故实际有：

P，Q，$\neg P$，$\neg Q$，$P\leftrightarrow Q$，$P\leftrightarrow P$（T）（A）

用$\neg$作用于（A）类，得到扩大的公式类（包括原公式类）：

P，Q，$\neg P$，$\neg Q$，$\neg(P\leftrightarrow Q)$，T，F，$P\leftrightarrow Q$（B）

用$\leftrightarrow$作用于（A）类，得到：

$P\leftrightarrow Q$，$P\leftrightarrow\neg P\Leftrightarrow F$，$P\leftrightarrow\neg Q\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$，$P\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow Q$，$P\leftrightarrow(P\leftrightarrow P)\Leftrightarrow P$，

$Q\leftrightarrow\neg P\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$，$Q\leftrightarrow\neg Q\Leftrightarrow F$，$Q\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P$，$Q\leftrightarrow T\Leftrightarrow Q$,

$\neg P\leftrightarrow\neg Q\Leftrightarrow P\leftrightarrow Q$,$\neg P\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow\neg Q$,$\neg P\leftrightarrow T\Leftrightarrow\neg P$,

$\neg Q\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow\neg P$，$\neg Q\leftrightarrow T\Leftrightarrow\neg Q$,

$(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P\leftrightarrow Q$.

因此，（A）类使用运算后，仍在（B）类中。

对（B）类使用$\neg$运算得：

$\neg P$，$\neg Q$，P，Q，$P\leftrightarrow Q$，F，T，

$\neg(P\leftrightarrow Q)$,

仍在（B）类中。

对（B）类使用$\leftrightarrow$运算得：

$P\leftrightarrow Q$，$P\leftrightarrow\neg P\Leftrightarrow F$，$P\leftrightarrow\neg Q\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$，$P\leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow\neg Q$,$P\leftrightarrow T\Leftrightarrow P$,$P\leftrightarrow F\Leftrightarrow\neg P$,$P\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow Q$,

$Q\leftrightarrow\neg P\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$，$Q\leftrightarrow\neg Q\Leftrightarrow F$，$Q\leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$

⇔¬P，Q↔T⇔Q，Q↔F⇔¬Q，Q↔（P↔Q）⇔P，

¬P↔¬Q⇔P↔Q，¬P↔¬（P↔Q）⇔Q，¬P↔T⇔¬P，¬P↔F⇔P，¬P↔（P↔Q）⇔¬Q，

¬Q↔¬（P↔Q）⇔P，¬Q↔T⇔¬Q，¬Q↔T⇔¬Q，¬Q↔（P↔Q）⇔¬P，

¬（P↔Q）↔T⇔¬（P↔Q），¬（P↔Q）↔F⇔P↔Q，

¬（P↔Q）↔（P↔Q）⇔F

T↔F⇔F，T↔（P↔Q）⇔ P↔Q

F↔（P↔Q）⇔¬（P↔Q）

（P↔Q）↔（P↔Q）⇔P↔Q.

故由（B）类使用↔运算后，结果仍在（B）中。

由上证明：用↔,¬两个连结词，反复作用在两个变元的公式中，结果只能产生（B）类中的公式，总共仅八个不同的公式，故{↔,¬}不是功能完备的，更不能是最小联结词组。

已证{↔,¬}不是最小联结词组，又因为 P$\bar{\vee}$Q⇔¬（P↔Q），故任何命题公式中的联结词，如仅用{ ，¬}表达，则必可用{↔,¬}表达，其逆亦真。故{ ，¬}也必不是最小联结词组。

(8)证明{∨}，{∧}和{→}不是最小联结词组。

证明：若{∨}，{∧}和{→}是最小联结词，则

¬P⇔（P∨P∨……）

¬P⇔（P∧P∧……）

¬P⇔P→(P→(P→……)

对所有命题变元指派 T，则等价式左边为 F，右边为 T，与等价表达式矛盾。

所以{∨}，{∧}和{→}不是最小联结词。

(9)证明{¬,→}和{¬, }是最小联结词组。

证明：因为{¬,∨}为最小联结词组，且 P∨Q⇔¬P→Q

所以{¬，→}是功能完备的联结词组，又{¬}，{→}都不是功能完备的联结词组。

所以{¬，→}是最小联结词组。

又因为 $P\rightarrow Q \Leftrightarrow \neg(P\quad Q)$，所以{¬，　}是功能完备的联结词组，又{¬}，{　}不是功能完备的联结词组，

所以{¬，　}是最小联结词组。

习题　1-7

(1)　解：

$P\wedge(P\rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow P\wedge(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg P)\vee(P\wedge Q)$

$P\wedge(P\rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow (P\vee(\neg Q\wedge Q))\wedge(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow (P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)$

(2) 解：

a) $(\neg P\wedge Q)\rightarrow R$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\wedge Q)\vee R$

$\Leftrightarrow P\vee\neg Q\vee R$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg Q\wedge R)\vee(\neg Q\wedge\neg R)\vee(R\wedge P)\vee(R\wedge\neg P)$

b) $P\rightarrow((Q\wedge R)\rightarrow S)$

$\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg(Q\wedge R)\vee S)$

$\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q\vee\neg R\vee S$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg Q\wedge R)\vee(\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg R\wedge S)\vee(\neg R\wedge\neg S)\vee(S\wedge P)\vee(S\wedge\neg P)$

c) $\neg(P\vee\neg Q)\wedge(S\rightarrow T)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge Q)\wedge(\neg S\vee T)$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge Q\wedge\neg S)\vee(\neg P\wedge Q\wedge T)$

d) $(P\rightarrow Q)\rightarrow R$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee R$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee R$

$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$

e) $\neg(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge P) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P) \vee (\neg Q \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P)$

（3） 解：

a) $P \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

b) $\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P \vee Q)$

c) $\neg(P \rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q)$

$\Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P)$

d) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee R$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee R$

$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$

e) $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee P)$

（4） 解：

a) $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \neg Q)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \leftrightarrow \neg Q)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow \sum_{1,2,3}$

$\Leftrightarrow P \vee Q = \prod_0$

b) $Q \wedge (P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (Q \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow P \wedge Q = \sum_3$

$\Leftrightarrow \prod_{0,1,2}$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$

c) $P \vee (\neg P \to (Q \vee (\neg Q \to R)))$

$\Leftrightarrow P \vee (P \vee (Q \vee (Q \vee R)))$

$\Leftrightarrow P \vee Q \vee R = \prod_0$

$\Leftrightarrow \sum_{1,2,3,4,5,6,7}$

$= (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$

$\vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

$\vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$

$\vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

d) $(P \to (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \to (\neg Q \wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge (P \vee (\neg Q \wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge (Q \wedge R)) \vee$

$((\neg Q \wedge \neg R) \wedge \neg P) \vee ((\neg Q \wedge \neg R)$

$\wedge (Q \wedge R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) = \sum_{0,7}$

$\Leftrightarrow \prod_{1,2,3,4,5,6}$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$

$\wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$

$\wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

e) $P \to (P \wedge (Q \to P))$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (P \wedge (\neg Q \vee P))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee P)$

$\Leftrightarrow T \vee (T \wedge \neg Q) \Leftrightarrow T$

$\Leftrightarrow \sum_{0,1,2,3} = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

$\vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

f) $(Q \to P) \wedge (\neg P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg Q \vee P) \wedge \neg P \wedge Q$

$\Leftrightarrow (\neg Q \vee P) \wedge \neg (P \vee \neg Q) \Leftrightarrow F$

$\Leftrightarrow \Pi_{0,1,2,3} = (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$

$\wedge (\neg P \vee \neg Q)$

(5) 证明：

a)

$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$

$A \rightarrow (B \wedge C)$

$\Leftrightarrow \neg A \vee (B \wedge C)$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$

b)

$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge B)$

$\Leftrightarrow \neg (\neg A \vee B) \vee (A \wedge B)$

$\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$

$\Leftrightarrow A \wedge (B \vee \neg B)$

$\Leftrightarrow A \wedge T$

$\Leftrightarrow A$

$(\neg A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

$\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

$\Leftrightarrow A \vee (B \wedge \neg B)$

$\Leftrightarrow A \vee F$

$\Leftrightarrow A$

c)

$A \wedge B \wedge (\neg A \vee \neg B)$

$\Leftrightarrow ((A \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg B)) \wedge B$

$\Leftrightarrow A \wedge B \wedge \neg B$

$\Leftrightarrow F$

$\neg A \wedge \neg B \wedge (A \vee B)$

$\Leftrightarrow ((\neg A \wedge A) \vee (\neg A \wedge B)) \wedge \neg B$

$\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \wedge B$

$\Leftrightarrow F$

d)

$A\lor(A\to(A\land B))$

$\Leftrightarrow A\lor\neg A\lor(A\land B)$

$\Leftrightarrow T$

$\neg A\lor\neg B\lor(A\land B)$

$\Leftrightarrow\neg(A\land B)\lor(A\land B)$

$\Leftrightarrow T$

(6)解：$A\Leftrightarrow R\uparrow(Q\land\neg(R\downarrow P))$，则 $A^*\Leftrightarrow R\downarrow(Q\lor\neg(R\uparrow P))$

$A\Leftrightarrow R\uparrow(Q\land\neg(R\downarrow P))$

$\Leftrightarrow\neg(R\land(Q\land(R\lor P)))$

$\Leftrightarrow\neg R\lor\neg Q\lor\neg(R\lor P)$

$\Leftrightarrow\neg(R\land Q)\lor\neg(R\lor P)$

$A^*\Leftrightarrow R\downarrow(Q\lor\neg(R\uparrow P))$

$\Leftrightarrow\neg(R\lor(Q\lor(R\land P)))$

$\Leftrightarrow\neg R\land\neg Q\land\neg(R\land P)$

$\Leftrightarrow\neg(R\lor Q)\land\neg(R\land P)$

(7)解：设A：A去出差。B：B去出差。C：C去出差。D：D去出差。

若A去则C和D中要去一个。 $A\to(C\bar{\lor}D)$

B和C不能都去。 $\neg(B\land C)$

C去则D要留下。 $C\to\neg D$

按题意应有：$A\to(C\bar{\lor}D)$，$\neg(B\land C)$，$C\to\neg D$必须同时成立。

因为 $C\bar{\lor}D\Leftrightarrow(C\land\neg D)\lor(D\land\neg C)$

故 $(A\to(C\bar{\lor}D))\land\neg(B\land C)\land(C\to\neg D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\lor(C\land\neg D)\lor(D\land\neg C))\land\neg(B\land C)\land(\neg C\lor\neg D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\lor(C\land\neg D)\lor(D\land\neg C))\land(\neg B\lor\neg C)\land(\neg C\lor\neg D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\lor(C\land\neg D)\lor(D\land\neg C))\land((\neg B\land\neg C)$

$\vee(\neg B\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge\neg D)\vee\neg C)$

$\Leftrightarrow\underline{(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)}\vee\underline{(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg D)}$

$\vee\underline{(\neg A\wedge\neg C\wedge\neg D)}\vee(\neg A\wedge\neg C)$

$\vee(\neg B\wedge\neg C\wedge D)\vee\underline{(\neg C\wedge D\wedge\neg B\wedge\neg D)}$

$\vee\underline{(\neg C\wedge D\wedge\neg C\wedge\neg D)}$

$\vee(\neg C\wedge D\wedge\neg C)\vee\underline{(\neg D\wedge C\wedge\neg B\wedge\neg C)}$

$\vee(\neg D\wedge C\wedge\neg B\wedge\neg D)$

$\vee\underline{(\neg D\wedge C\wedge\neg C\wedge\neg D)}\vee\underline{(\neg D\wedge C\wedge\neg C)}$

在上述的析取范式中，有些（画线的）不符合题意，舍弃，得

$(\neg A\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge\neg C\wedge D)\vee(\neg C\wedge D)$

$\vee(\neg D\wedge C\wedge\neg B)$

故分派的方法为：B∧D ，或 D∧A，或 C∧A。

(8) 解：设 P：A 是第一。Q：B 是第二。R：C 是第二。S：D 是第四。E：A 是第二。

由题意得 $(P\bar{\vee}Q)\wedge(R\bar{\vee}S)\wedge(E\bar{\vee}S)$

$\Leftrightarrow((P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q))\wedge((R\wedge\neg S)$

$\vee(\neg R\wedge S))\wedge((E\wedge\neg S)\vee(\neg E\wedge S))$

$\Leftrightarrow((P\wedge\neg Q\wedge R\wedge\neg S)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R\wedge S)$

$\vee(\neg P\wedge Q\wedge R\wedge\neg S)$

$\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R\wedge S))\wedge((E\wedge\neg S)\vee(\neg E\wedge S))$

因为 $(P\wedge\neg Q\wedge\neg R\wedge S)$ 与 $(\neg P\wedge Q\wedge R\wedge\neg S)$ 不合题意，所以原式可化为

$((P\wedge\neg Q\wedge R\wedge\neg S)$

$\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R\wedge S))\wedge((E\wedge\neg S)$

$\vee(\neg E\wedge S))$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q\wedge R\wedge\neg S\wedge E\wedge\neg S)$

$\vee(P\wedge\neg Q\wedge R\wedge\neg S\wedge\neg E\wedge S)$

$\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R\wedge S\wedge E\wedge\neg S)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R\wedge S\wedge\neg E\wedge S)$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q\wedge R\wedge\neg S\wedge E)$

$\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R\wedge S\wedge\neg E)$

因R与E矛盾，故$\neg P\wedge Q\wedge\neg R\wedge S\wedge\neg E$为真，即A不是第一，B是第二，C不是第二，D为第四，A不是第二。

于是得： **A** 是第三　**B** 是第二　**C** 是第一　**D** 是第四。

习题 1-8

(1)证明：

a) $\neg(P\wedge\neg Q)$，$\neg Q\vee R$，$\neg R\Rightarrow\neg P$

(1) $\neg R$　P

(2) $\neg Q\vee R$　P

(3) $\neg Q$　(1)(2)T,I

(4) $\neg(P\wedge\neg Q)$　P

(5) $\neg P\vee Q$　(4)T,E

(6) $\neg P$　(3)(5)T,I

b) $J\rightarrow(M\vee N)$，$(H\vee G)\rightarrow J$，$H\vee G\Rightarrow M\vee N$

(1) $(H\vee G)\rightarrow J$　P

(2) $(H\vee G)$　P

(3) J　(1)(2)T,I

(4) $J\rightarrow(M\vee N)$　P

(5) $M\vee N$　(3)(4)T,I

c) $B\wedge C$，$(B\leftrightarrow C)\rightarrow(H\vee G)\Rightarrow G\vee H$

(1) $B\wedge C$　P

(2) B　(1)T,I

(3) C　(1)T,I

(4) $B\vee\neg C$　(2)T,I

(5) $C\vee\neg B$　(3)T,I

(6) $C\rightarrow B$　(4)T,E

(7) $B\rightarrow C$　(5)T,E

(8) $B\leftrightarrow C$　(6)(7)T,E

(9) $(B\leftrightarrow C)\rightarrow(H\vee G)$ P

(10) $H\vee G$ (8)(9)T, I

d) $P\rightarrow Q$，$(\neg Q\vee R)\wedge\neg R$，$\neg(\neg P\wedge S)\Rightarrow\neg S$

(1) $(\neg Q\vee R)\wedge\neg R$

(2) $\neg Q\vee R$ (1)T, I

(3) $\neg R$ (1)T, I

(4) $\neg Q$ (2)(3)T, I

(5) $P\rightarrow Q$ P

(6) $\neg P$ (4)(5)T, I

(7) $\neg(\neg P\wedge\neg S)$ P

(8) $P\vee\neg S$ (7)T, E

(9) $\neg S$ (6)(8)T, I

(2) 证明：

a) $\neg A\vee B$，$C\rightarrow\neg B\Rightarrow A\rightarrow\neg C$

(1) $\neg(A\rightarrow\neg C)$ P

(2) A (1)T, I

(3) C

(1)T,I

(4) $\neg A \vee B$ P

(5) B (2)(4)T,I

(6) $C \to \neg B$ P

(7) $\neg B$ (3)(6)T,I

(8) $B \wedge \neg B$ 矛盾。(5),(7)

b) $A \to (B \to C), (C \wedge D) \to E, \neg F \to (D \wedge \neg E) \Rightarrow A \to (B \to F)$

(1) $\neg(A \to (B \to F))$ P

(2) A (1)T,I

(3) $\neg(B \to F)$ (1)T,I

(4) B (3)T,I

(5) $\neg F$ (3)T,

(6) $A \to (B \to C)$ P

(7) B → C (2)(6)T,I

(8) C (4)(7)T,I

(9) ┐F → (D ∧ ┐E) P

(10) D ∧ ┐E (5)(9)T,I

(11) D (10)T,I

(12) C ∧ D (8)(11)T,I

(13) (C ∧ D) → E P

(14) E (12)(13)T,I

(15) ┐E (10)T,I

(16) E ∧ ┐E 矛盾。(14),(15)

c) A∨B→C∧D，D∨E→F⇒A→F

(1) ┐(A → F) P

(2)

A (1)T,I

(3) ¬F (1)T,I

(4) A∨B (2)T,I

(5) (A∨B)→C∧D P

(6) C∧D (4)(5)T,I

(7) C (6)T,I

(8) D (6)T,I

(9) D∨E (8)T,I

(10) D∨E→F P

(11) F (9)(10)T,I

(12) F∧¬F 矛盾。(3),(11)

d) A→(B∧C)，¬B∨D，(E→¬F)→¬D，B→(A∧¬E) ⇒B→E

(1) $\neg(B \rightarrow E)$ P

(2) B (1)T, I

(3) $\neg E$ (1)T, I

(4) $\neg B \vee D$ P

(5) D (2)(4)T, I

(6) $(E \rightarrow \neg F) \rightarrow \neg D$ P

(7) $\neg(E \rightarrow \neg F)$ (5)(6)T, I

(8) E (7)T, I

(9) $E \wedge \neg E$ 矛盾

e) $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)$，$(B \rightarrow E) \wedge (D \rightarrow F)$，$\neg(E \wedge F)$，$A \rightarrow C \Rightarrow \neg A$

(1) $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)$ P

(2) $A \rightarrow B$ (1)T, I

(3) $(B \rightarrow E) \wedge (D \rightarrow$

F) P

(4) B →

E

(3) T, I

(5) A →

E

(2) (4) T, I

(6) ┐ (E ∧

F) P

(7) ┐ E ∨ ┐

F (6) T,

E

(8) E → ┐

F (

7) T, E

(9) A → ┐

F (

5) (8) T, I

(10) C →

D

(1) T, I

(11) D →

F

(3) T, I

(12) C →

F

(10) (10) T, I

(13) A →

C

P

(14) A →

F

(13) (12)T,I

(15) $\neg F \rightarrow \neg A$ (14)T,E

(16) $A \rightarrow \neg A$ (9)(15)T,I

(17) $\neg A \vee \neg A$ (16)T,E

(18) $\neg A$ (17) T,E

(3) 证明：

a) $\neg A \vee B$，$C \rightarrow \neg B \Rightarrow A \rightarrow \neg C$

(1) A P

(2) $\neg A \vee B$ P

(3) B (1)(2)T,I

(4) $C \rightarrow \neg B$ P

(5) $\neg C$ (3)(4)T,I

(6) $A \rightarrow \neg C$ CP

b) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$，$(C \wedge D) \rightarrow E$，$\neg F \rightarrow (D \wedge \neg E) \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow F)$

(1) A P

(2) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ P

(3) $B \rightarrow C$ (1)(2)T, I

(4) B P

(5) C (3)(4)T, I

(6) $(C \wedge D) \rightarrow E$ P

(7) $C \rightarrow (D \rightarrow E)$ (6)T, E

(8) $D \rightarrow E$ (5)(7)T, I

(9) $\neg D \vee E$ (8)T, E

(10) $\neg (D \wedge \neg E)$ (9)T, E

(11) $\neg F \rightarrow (D \wedge \neg E)$ P

(12) F (10)(11)T, I

(13) $B \rightarrow F$ CP

(14) $A \rightarrow (B \rightarrow F)$ CP

c) $A \vee B \rightarrow C \wedge D$，$D \vee E \rightarrow F \Rightarrow A \rightarrow F$

(1) A P

(2) $A \vee B$ (1)T, I

(3) $A \vee B \rightarrow C \vee D$ P

(4) $C \wedge D$ (2)(3)T, I

(5) D (4)T, I

(6) $D \vee E$ (5)T, I

(7) $D\vee E\to F$ P

(8) F (6)(7)T,I

(9) $A\to F$ CP

d) $A\to(B\wedge C)$，$\neg B\vee D$，$(E\to\neg F)\to\neg D$，$B\to(A\wedge\neg E)\Rightarrow B\to E$

(1) B P(附加前提)

(2) $\neg B\vee D$ P

(3) D (1)(2)T,I

(4) $(E\to\neg F)\to\neg D$ P

(5) $\neg(E\to\neg F)$ (3)(4)T,I

(6) E (5)T,I

(7) $B\to E$ CP

(4)证明：

a) $R\to\neg Q$，$R\vee S$，$S\to\neg Q$，$P\to Q\Rightarrow\neg P$

(1) $R\to\neg Q$ P

(2) $R\vee S$ P

(3) $S\to\neg Q$ P

(4) $\neg Q$ (1)

(2)(3)T,I

(5) P→Q P

(6) ¬P (4)(5)T,I

b) S→¬Q，S∨R，¬R，¬P↔Q⇒P

证法一：

(1) S∨R P

(2) ¬R P

(3) S (1)(2)T,I

(4) S→¬Q P

(5) ¬Q (3)(4)T,I

(6) ¬P↔Q P

(7) (¬P→Q)∧(Q→¬P) (6)T,E

(8) ¬P→Q (7)T,I

(9) P (5)(8)T,I

证法二：（反证法）

(1) ¬P P（附加前提）

(2) ¬

P↔Q P

(3) (¬P→Q) ∧ (Q→¬P) (2)T, E

(4) ¬ P →

Q (3)T,I

(5)

Q

(1)(4)T,I

(6) S → ¬

Q P

(7) ¬

S (5)

(6)T,I

(8) S ∨

R P

(9)

R (

7)(8)T,I

(10) ¬

R P

(11) ¬ R ∧

R 矛盾(9)

(10) T, I

c)¬(P→Q)→¬(R∨S), ((Q→P)∨¬R),

R⇒P↔Q

(1)

R

P

(2) (Q → P) ∨ ¬

R P

(3) Q →

P (1)

(2)T,I

(4) $\neg(P\to Q)\to\neg(R\vee S)$ P

(5) $(R\vee S)\to(P\to Q)$ (4)T,E

(6) $R\vee S$ (1)T,I

(7) $P\to Q$ (5)(6)

(8) $(P\to Q)\wedge(Q\to P)$ (3)(7)T,I

(9) $P\leftrightarrow Q$ (8)T,E

(5) 解:

a) 设 P：我跑步。Q：我很疲劳。

前提为：$P\to Q$，$\neg Q$

(1) $P\to Q$ P

(2) $\neg Q$ P

(3) $\neg P$ (1)(2)T,I

结论为：$\neg P$，我没有跑步。

b) 设 S：他犯了错误。 R：他神色慌张。

前提为：$S\to R$，R

因为 $(S\to R)\wedge R\Leftrightarrow(\neg S\vee R)\wedge R\Leftrightarrow R$。故本题没有确定的结论。

实际上，若 $S\to R$ 为真，R 为真，则 S 可为真，S 也可为假，故无有效结论。

c) 设 P：我的程序通过。 Q：我很快乐。

R：阳光很好。 S：天很暖和。（把晚上十一点理解为阳光不好）

前提为：P→Q，Q→R，¬R∧S

(1) P→Q　　P

(2) Q→R　　P

(3) P→R　　(1)(2)T,I

(4) ¬R∨S　　P

(5) ¬R　　(4)T,I

(6) ¬P　　(3)(5)T,I

结论为：¬P，我的程序没有通过

习题 2-1,2-2

（1） 解：

a) 设 W（x）：x 是工人。c：小张。

则有 ¬W（c）

b) 设 S（x）：x 是田径运动员。B（x）：x 是球类运动员。h：他

则有 S（h）∨B（h）

c) 设 C（x）：x 是聪明的。B（x）：x 是美丽的。l：小莉。

则有 C（l）∧ B（l）

d) 设 O（x）：x 是奇数。

则有 O（m）→¬ O（2m）。

e) 设 R（x）：x 是实数。Q（x）：x 是有理数。

则有 $(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))$

f) 设 R（x）：x 是实数。Q（x）：x 是有理数。

则有 $(\exists x)(R(x)\wedge Q(x))$

g) 设 R（x）：x 是实数。Q（x）：x 是有理数。

则有 $\neg(\forall x)(R(x)\rightarrow Q(x))$

h) 设 P（x，y）：直线 x 平行于直线 y

G（x，y）：直线 x 相交于直线 y。

则有 $P(A,B)\leftrightarrows\neg G(A,B)$

（2） 解：

a) 设 J(x)：x 是教练员。L(x)：x 是运动员。

则有 $(\forall x)(J(x)\rightarrow L(x))$

b) 设 S(x)：x 是大学生。L(x)：x 是运动员。

则有 $(\exists x)(L(x)\wedge S(x))$

c) 设 J(x)：x 是教练员。O(x)：x 是年老的。

V（x）：x 是健壮的。

则有 $(\exists x)(J(x)\wedge O(x)\wedge V(x))$

d) 设 O(x)：x 是年老的。V（x）：x 是健壮的。

j：金教练

则有 $\neg O(j)\wedge\neg V(j)$

e) 设 L(x)：x 是运动员。J(x)：x 是教练员。

则 $\neg(\forall x)(L(x)\rightarrow J(x))$

本题亦可理解为：某些运动员不是教练。

故 $(\exists x)(L(x)\wedge\neg J(x))$

f) 设 S（x）：x 是大学生。L（x）：x 是运动员。

C（x）：x 是国家选手。

则有 $(\exists x)(S(x)\wedge L(x)\wedge C(x))$

g) 设 C（x）：x 是国家选手。V（x）：x 是健壮的。

则有 $(\forall x)(C(x)\rightarrow V(x))$ 或 $\neg(\exists x)(C(x)\wedge\neg V(x))$

h) 设 C（x）：x 是国家选手。O（x）：x 是老的。

L（x）：x 是运动员。

则有 $(\forall x)(O(x) \wedge C(x) \rightarrow L(x))$

i）设 W（x）：x 是女同志。H（x）：x 是家庭妇女。C（x）：x 是国家选手。

则有 $\neg(\exists x)(W(x) \wedge C(x) \wedge H(x))$

j） W（x）：x 是女同志。J（x）：x 是教练。

C（x）：x 是国家选手。

则有 $(\exists x)(W(x) \wedge J(x) \wedge C(x))$

k） L（x）：x 是运动员。J（y）：y 是教练。

A(x,y)：x 钦佩 y。

则有 $(\forall x)(L(x) \rightarrow (\exists y)(J(y) \wedge A(x, y)))$

l） 设 S（x）：x 是大学生。L（x）：x 是运动员。A(x,y)：x 钦佩 y。

则 $(\exists x)(S(x) \wedge (\forall y)(L(y) \rightarrow \neg A(x,y)))$

习题 2-3

（1）解：

a）5 是质数。

b）2 是偶数且 2 是质数。

c）对所有的 x，若 x 能被 2 除尽，则 x 是偶数。

d）存在 x，x 是偶数，且 x 能除尽 6。（即某些偶数能除尽 6）

e）对所有的 x，若 x 不是偶数，则 x 不能被 2 除尽。

f）对所有的 x，若 x 是偶数，则对所有的 y，若 x 能除尽 y，则 y 也是偶数。

g）对所有的 x，若 x 是质数，则存在 y，y 是偶数且 x 能除尽 y（即所有质数能除尽某些偶数）。

h）对所有的 x，若 x 是奇数，则对所有 y，y 是质数，则 x 不能除尽 y（即任何奇数不能除尽任何质数）。

（2）解：$(\forall x)(\forall y)((P(x)\wedge P(y)\wedge\neg E(x,y)\rightarrow(\exists!z)(L(z)\wedge R(x,y,z)))$

或 $(\forall x)(\forall y)((P(x)\wedge P(y)\wedge\neg E(x,y)\rightarrow(\exists z)(L(z)\wedge R(x,y,z)\wedge\neg(\exists u)(\neg E(z,u)\wedge L(u)\wedge R(x,y,u))))$

（3）解：

a) 设 N(x):x 是有限个数的乘积。 z(y):y 为 0。

P(x):x 的乘积为零。 F(y):y 是乘积中的一个因子。

则有 $(\forall x)((N(x)\wedge P(x)\rightarrow(\exists y)(F(y)\wedge z(y)))$

b) 设 R(x):x 是实数。Q(x,y):y 大于 x。故 $(\forall x)(R(x)\rightarrow(\exists y)(Q(x,y)\wedge R(y)))$

c) R(x):x 是实数。G(x,y):x 大于 y。 则 $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(R(x)\wedge R(y)\wedge R(z)\wedge G(x+y,x\cdot z)$

（4）解：设 G(x,y):x 大于 y。则有 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(G(y,x)\wedge G(0,z)\rightarrow G(x\cdot z,y\cdot z))$

（5）解：设 N(x):x 是一个数。 S(x,y):y 是 x 的后继数。E(x,y)：x=y.则

a) $(\forall x)(N(x)\rightarrow(\exists!y)(N(y)\wedge S(x,y)))$

或$(\forall x)(N(x)\rightarrow(\exists y)(N(y)\wedge S(x,y)\wedge\neg(\exists z)(\neg E(y,z)\wedge N(z)\wedge S(x,z))))$

b) $\neg(\exists x)(N(x)\wedge S(x,1))$

c) $(\forall x)(N(x)\wedge\neg S(x,2)\rightarrow(\exists!y)(N(y)\wedge S(y,x)))$

或$(\forall x)(N(x)\wedge\neg S(x,2)\rightarrow(\exists y)(N(y)\wedge S(y,x)\wedge\neg(\exists z)(\neg E(y,z)\wedge N(z)\wedge S(z,x))))$

（6）解：设 S(x):x 是大学生。 E(x):x 是戴眼睛

的。

F(x):x 是用功的。　R(x,y):x 在看 y。

G(y):y 是大的。　K(y):y 是厚的。　J(y):y 是巨著。　a:这本。　b:那位。

则有 $E(b)\wedge F(b)\wedge S(b)\wedge R(b,a)\wedge G(a)\wedge K(a)\wedge J(a)$

（7）解：设 P(x,y):x 在 y 连续。　Q(x,y):x>y。则

$P(f,a)\leftrightarrows((\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\forall x)(Q(\varepsilon,0)\rightarrow(Q(\delta,0)\wedge Q(\delta,|x-a|)\rightarrow Q(\varepsilon,|f(x)-f(a)|))))$

习题 2-4

(1) 解：a) x 是约束变元，y 是自由变元。

b) x 是约束变元，$P(x)\wedge Q(x)$中的 x 受全称量词∀的约束，S(x)中的 x 受存在量词∃的约束。

c) x，y 都是约束变元,P(x)中的 x 受∃的约束，R(x)中的 x 受∀的约束。

d) x，y 是约束变元，z 是自由变元。

(2) 解：a) $P(a)\wedge P(b)\wedge P(c)$

b) $R(a)\wedge R(b)\wedge R(c)\wedge S(a)\wedge S(b)\wedge S(c)$

c) $(P(a)\rightarrow Q(a))\wedge(P(b)\rightarrow Q(b))\wedge(P(c)\rightarrow Q(c)$

d) $(\neg P(a)\wedge\neg P(b)\wedge\neg P(c))\vee(P(z)\wedge P(b)\wedge P(c))$

e) $(R(a)\wedge R(b)\wedge R(c))\wedge(S(a)\vee S(b)\vee S(c))$

(3) 解：

a) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow(P(1)\vee Q(1))\wedge(P(2)\vee Q(2))$，但 P(1)为 T，Q(1)为 F，P(2)为 F，Q(2)为 T,所以

$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow(T\vee F)\wedge(F\vee T)\quad\Leftrightarrow T$。

b) $(\forall x)(P\rightarrow Q(x))\vee R(a)\Leftrightarrow((P\rightarrow Q(-2))\wedge(P\rightarrow Q(3))\wedge(P\rightarrow Q(6)))\vee R(a)$

因为 P 为 T，Q(–2)为 T，Q(3)为 T，Q(6)为 F，R(5)为 F，所以

$(\forall x)(P\rightarrow Q(x))\vee R(a)\Leftrightarrow$

$((T\rightarrow T)\wedge(T\rightarrow T)\wedge(T\rightarrow F))\vee F\Leftrightarrow F$

(4) 解：a) $(\forall u)(\exists v)(P(u，z)\rightarrow Q(v))\leftrightarrows S(x，y)$

b) $(\forall u)(P(u)\rightarrow(R(u)\vee Q(u))\wedge(\exists v)R(v))\rightarrow(\exists z)S(x,z)$

(5) 解：a) $((\exists y)A(u，y)\rightarrow(\forall x)B(x，v))\wedge(\exists x)(\forall z)C(x，t，z)$

b) $((\forall y)P(u，y)\wedge(\exists z)Q(u，z))\vee(\forall x)R(x，t)$

习题 2-5

（1）解：

a) $P(a,f(a))\wedge P(b,f(b))\Leftrightarrow P(1,f(1))\wedge P(2,f(2))\Leftrightarrow P(1,2)\wedge P(2,1)\Leftrightarrow T\wedge F\Leftrightarrow F$

b) $(\forall x)(\exists y)P(y,x)\Leftrightarrow(\forall x)(P(1,x)\vee P(2,x))\Leftrightarrow(P(1,1)\vee P(2,1))\wedge(P(1,2)\vee P(2,2))$

$\Leftrightarrow(T\vee F)\wedge(T\vee F)\Leftrightarrow T$

c) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\rightarrow P(f(x),f(y)))$

$\Leftrightarrow(\forall x)((P(x,1)\rightarrow P(f(x),f(1)))\wedge(P(x,2)\rightarrow P(f(x)f(2))))$

$\Leftrightarrow(P(1,1)\rightarrow P(f(1),f(1)))\wedge(P(1,2)\rightarrow P(f(1),f(2)))\wedge(P(2,1)\rightarrow P(f(2),f(1)))\wedge(P(2,2)\rightarrow P(f(2),f(2)))$

$\Leftrightarrow(P(1,1)\rightarrow P(2,2))\wedge(P(1,2)\rightarrow P(2,1))\wedge(P(2,1)\rightarrow P(1,2))\wedge(P(2,2)\rightarrow P(1,1))$

$\Leftrightarrow(T\rightarrow F\wedge(T\rightarrow F)\wedge(F\rightarrow T)\wedge(F\rightarrow T)\Leftrightarrow F\wedge F\wedge T\wedge T\Leftrightarrow F$

（2）解：a) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(f(x),a))$

$\Leftrightarrow(P(1)\to Q(f(1),1))\wedge(P(2)\to Q(f(2),1))$

$\Leftrightarrow(F\to Q(2,1))\wedge(T\to Q(1,1))$

$\Leftrightarrow(F\to F)\wedge(T\to T)\quad\Leftrightarrow T$

b) $(\exists x)(P(f(x))\wedge Q(x,f(a))$

$\Leftrightarrow\quad(P(f(1))\wedge Q(1,f(1)))\quad\vee$

$(P(f(2))\wedge Q(2,f(1))\ \Leftrightarrow(T\wedge T)\vee(F\wedge F)\quad\Leftrightarrow T$

c) $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x,a))$

$\Leftrightarrow(P(1)\wedge Q(1,a))\vee(P(2)\wedge Q(2,a))$

$\Leftrightarrow(P(1)\wedge Q(1,1))\vee(P(2)\wedge Q(2,1))$

$\Leftrightarrow(F\wedge T)\vee(T\wedge F)\quad\Leftrightarrow F$

d) $(\forall x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(x,y))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(P(x)\wedge(\exists y)Q(x,y))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(P(x)\wedge(Q(x,1)\vee Q(x,2)))$

$\Leftrightarrow\quad(P(1)\wedge(Q(1,1)\quad\vee$

$Q(1,2)))\wedge(P(2)\wedge(Q(2,1)\vee Q(2,2)))$

$\Leftrightarrow(F\wedge(T\vee T))\wedge(T\wedge(F\vee F))\quad\Leftrightarrow F$

(3) 举例说明下列各蕴含式。

a) $\neg((\exists x)(P(x)\wedge Q(a))\Rightarrow(\exists x)P(x)\to\neg Q(a)$

b) $(\forall x)(\neg P(x)\to Q(x)),(\forall x)\neg Q(x)\Rightarrow P(a)$

c) $(\forall x)(P(x)\to Q(x)),(\forall x)(Q(x)\to R(x))\Rightarrow(\forall x)(P(x)\to R(x))$

d) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x)),(\forall x)\neg P(x)\Rightarrow(\exists x)Q(x)$

e) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x)),(\forall x)\neg P(x)\Rightarrow(\forall x)Q(x)$

解：a）因为$\neg((\exists x)(P(x)\wedge Q(a))\Leftrightarrow\neg(\exists x)P(x)\vee\neg Q(a)$

故原式为$\neg(\exists x)P(x)\vee\neg Q(a)\Rightarrow(\exists x)P(x)\to\neg Q(a)$

设 P（x）：x 是大学生。Q（x）：x 是运动员

前提　或者不存在 x，x 是大学生，或者 a 是运动员

结论　如果存在 x 是大学生，则必有 a 是运动员。

b)设 P（x）：x 是研究生。Q（x）：x 是大学生。

a：论域中的某人。

前提：对论域中所有 x，如果 x 不是研究生则 x 是大学生。

对论域中所有 x， x 不是大学生。

结论：对论域中所有 x 都是研究生。

故，对论域中某个 a，必有结论 a 是研究生，即 P（a）成立。

c）设 P（x）：x 是研究生。Q（x）：x 曾读过大学。R（x）：x 曾读过中学。

前提 对所有 x，如果 x 是研究生，则 x 曾读过大学。

对所有 x，如果 x 曾读过大学，则 x 曾读过中学。

结论：对所有 x，如果 x 是研究生，则 x 曾读过中学。

d）设 P（x）：x 是研究生。Q（x）：x 是运动员。

前提 对所有 x，或者 x 是研究生，或者 x 是运动员。

对所有 x，x 不是研究生

结论 必存在 x，x 是运动员。

e）设 P（x）：x 是研究生。Q（x）：x 是运动员。

前提 对所有 x，或者 x 是研究生，或者 x 是运动员。

对所有 x，x 不是研究生

结论 对所有 x，x 是运动员。

（4）证明：$(\exists x)(A(x)\rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x) \vee (\exists x) B(x)$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x)A(x) \vee (\exists x) B(x) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x) B(x)$

（5）设论域 D={a，b，c}，求证$(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$

证明：因为论域 D={a，b，c}，所以

$(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Leftrightarrow (A(a) \wedge A(b) \wedge A(c)) \vee$

$(B(a) \wedge B(b) \wedge B(c))$

$\Leftrightarrow (A(a) \vee B(a)) \wedge (A(a) \vee B(b)) \wedge (A(a) \vee B(c)) \wedge (A(b) \vee B(a)) \wedge (A(b) \vee B(b)) \wedge (A(b) \vee B(c)) \wedge (A(c) \vee B(a)) \wedge (A(c) \vee B(b)) \wedge (A(c) \vee B(c))$

$\Rightarrow (A(a) \vee B(a)) \wedge (A(b) \vee B(b)) \wedge (A(c) \vee B(c))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$

所以$(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$

（6）解：推证不正确，因为

$\neg (\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x)) \Leftrightarrow \neg ((\exists x)A(x) \wedge (\exists x)\neg B(x))$

（7）求证$(\forall x)(\forall y)(P(x) \rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \rightarrow (\forall y)Q(y)$

证明：$(\forall x)(\forall y)(P(x) \rightarrow Q(y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\neg P(x) \vee Q(y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x) \vee (\forall y)Q(y)$

$\Leftrightarrow \neg (\exists x)P(x) \vee (\forall y)Q(y)$

$\Leftrightarrow (\exists x)P(x) \rightarrow (\forall y)Q(y)$

习题 2-6

（1）解：a) $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)Q(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x) \vee (\exists y)Q(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \vee Q(x,y))$

b) $(\exists x)(\neg ((\exists y)P(x,y)) \rightarrow ((\exists z)Q(z) \rightarrow R(x)))$

$\Leftrightarrow (\exists x)((\exists y)P(x,y) \vee ((\exists z)Q(z) \rightarrow R(x)))$

$\Leftrightarrow (\exists x)((\exists y)P(x,y) \vee (\neg (\exists z)Q(z) \vee R(x)))$

$\Leftrightarrow (\exists x)((\exists y)P(x,y) \vee ((\forall z)\neg Q(z) \vee R(x)))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(\forall z)(P(x,y) \vee \neg Q(z) \vee R(x))$

c) $(\forall x)(\forall y)(((\exists z P(x,y,z) \wedge (\exists u)Q(x,u)) \rightarrow (\exists v)Q(y,v))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\neg ((\exists z)P(x,y,z) \wedge (\exists u)Q(x,u)) \vee$

$(\exists v)Q(y,v))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)((\forall z)\neg P(x,y,z)\vee(\forall u)\neg Q(x,u)\vee(\exists v)Q(y,v))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)((\forall z)\neg P(x,y,z)\vee(\forall u)\neg Q(x,u)\vee(\exists v)Q(y,v))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\exists v)(\neg P(x,y,z)\vee\neg Q(x,u)\vee Q(y,v))$

（2）解：a) $((\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x))\rightarrow(\exists x)(P(x)\vee Q(x))$

$\Leftrightarrow\neg((\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x))\vee(\exists x)(P(x)\vee Q(x))$

$\Leftrightarrow\neg(\exists x)(P(x)\vee Q(x))\vee(\exists x)(P(x)\vee Q(x))$

$\Leftrightarrow T$

b) $(\forall x)(P(x)\rightarrow(\forall y)((\forall z)Q(x,y)\rightarrow\neg(\forall z)R(y,x)))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\neg P(x)\vee(\forall y)(Q(x,y)\rightarrow\neg R(y,x)))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(\neg P(x)\vee\neg Q(x,y)\vee\neg R(y,x))$

前束合取范式

$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)((P(x)\wedge Q(x,y)\wedge R(y,x))$

$\vee(P(x)\wedge Q(x,y)\wedge\neg R(y,x))$

$\vee(P(x)\wedge\neg Q(x,y)\wedge R(y,x))$

$\vee(\neg P(x)\wedge Q(x,y)\wedge R(y,x))$

$\vee(\neg P(x)\wedge\neg Q(x,y)\wedge R(y,x))$

$\vee((P(x)\wedge\neg Q(x,y)\wedge\neg R(y,x))$

$\vee(\neg P(x)\wedge Q(x,y)\wedge\neg R(y,x)))$

前束析取范式

c) $(\forall x)P(x)\rightarrow(\exists x)((\forall z)Q(x,z)\vee(\forall z)R(x,y,z))$

$\Leftrightarrow\neg(\forall x)P(x)\vee(\exists x)((\forall z)Q(x,z)\vee(\forall z)R(x,y,z))$

$\Leftrightarrow(\exists x)\neg P(x)\vee(\exists x)((\forall z)Q(x,z)\vee(\forall u)R(x,y,u))$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\neg P(x)\vee(\forall z)Q(x,z)\vee(\forall u)R(x,y,u))$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\forall z)(\forall u)(\neg P(x)\vee Q(x,z)\vee R(x,y,u))$

前束合取范式

$\Leftrightarrow(\exists x)(\forall z)(\forall u)((P(x)\wedge Q(x,z)\wedge R(x,y,u))$

$\vee(P(x)\wedge Q(x,z)\wedge\neg R(x,y,u))$

$\vee(P(x)\wedge\neg Q(x,z)\wedge R(x,y,u))$

$\vee(P(x)\wedge\neg Q(x,z)\wedge\neg R(x,y,u))$

$\vee(\neg P(x)\wedge Q(x,z)\wedge\neg R(x,y,u))$

$\vee(\neg P(x)\wedge\neg Q(x,z)\wedge R(x,y,u))$

$\vee(\neg P(x)\wedge\neg Q(x,z)\wedge\neg R(x,y,u)))$

前束析取范式

d) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x,y))\rightarrow((\exists y)P(y)\wedge(\exists z)Q(y,z))$

$\Leftrightarrow\neg(\forall x)(\neg P(x)\vee Q(x,y))\vee((\exists y)P(y)\wedge(\exists z)Q(y,z))$

$\Leftrightarrow(\exists x)(P(x)\wedge\neg Q(x,y))\vee((\exists u)P(u)\wedge(\exists z)Q(y,z))$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\exists u)(\exists z)((P(x)\wedge\neg Q(x,y))\vee(P(u)\wedge Q(y,z)))$

前束析取范式

$\Leftrightarrow(\exists x)(\exists u)(\exists z)((P(x)\vee P(u))\wedge(P(x)\vee Q(y,z))\wedge(\neg Q(x,y)\vee P(u))\wedge(\neg Q(x,y)\vee Q(y,z)))$

前束合取范式

习题 2-7

(1)证明：

(2)a) ① $(\forall x)(\neg A(x)\rightarrow B(x))$ P

② $\neg A(u)\rightarrow B(u)$ US①

③ $(\forall x)\neg B(x)$ P

④ $\neg B(u)$ US③

⑤ $A(u)\vee B(u)$

T②E

⑥ $A(u)$

T④⑤I

⑦ $(\exists x)A(x)$

EG⑥

b) ① $\neg(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))$

P（附加前提）

② $(\exists x)\neg(A(x)\rightarrow B(x))$

T①E

③ $\neg(A(c)\rightarrow B(c))$

ES②

④ $A(c)$

T③I

⑤ $\neg B(c)$

T③I

⑥ $(\exists x)A(x)$

EG④

⑦ $(\exists x)A(x)\rightarrow(\forall x)B(x)$

P

⑧ $(\forall x)B(x)$

T⑥⑦I

⑨ $B(c)$

US⑧

⑩ $B(c)\wedge\neg B(c)$

T⑤⑨矛盾

c）① $(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))$

P

② $A(u)\rightarrow B(u)$

US①

③ $(\forall x)(C(x)\rightarrow\neg B(x))$

P

④ $C(u)\rightarrow\neg B(u)$

US③

⑤ ¬B(u) → ¬A(u)

T②E

⑥ C(u) → ¬A(u)

T④⑤I

⑦ (∀x)(C(x) → ¬A(x))

UG⑥

d) (∀x)(A(x) ∨ B(x)),(∀x)(B(x) → ¬C(x)),(∀x)C(x)⇒ (∀x)A(x)

① (∀x)(B(x) → ¬C(x))

P

② B(u) → ¬C(u)

US①

③ (∀x)C(x)

P

④ C(u)

US③

⑤ ¬B(u)

T②④I

⑥ (∀x)(A(x) ∨ B(x))

P

⑦ A(u) ∨ B(u)

US

⑧ A(u)

T⑤⑦I

⑨ (∀x)A(x)

UG⑧

(2) 证明：

a) ① (∀x)P(x)

P（附加前提）

② **P(u)**

US①

③ $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$ P

④ $P(u) \to Q(u)$ US③

⑤ $Q(u)$ T②④I

⑥ $(\forall x)Q(x)$ UG⑤

⑦ $(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$ CP

b) 因为 $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow \neg (\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$

故本题就是推证 $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \neg (\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$

① $\neg (\forall x)P(x)$ P（附加前提）

② $(\exists x) \neg P(x)$ T①E

③ $\neg P(c)$ ES②

④ $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ P

⑤ $P(c) \vee Q(c)$ ES④

⑥ $Q(c)$ T③⑤I

⑦ $(\exists x) Q(x)$ EG⑥

⑧ $\neg (\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$ CP

(3)

解：a)设 R（x）：x 是实数。Q（x）：x 是有理数。I（x）：x 是整数。

本题符号化为：

$(\forall x)(Q(x)\to R(x))\land(\exists x)(Q(x)\land I(x))\Rightarrow(\exists x)(R(x)\land I(x))$

① $(\exists x)(Q(x)\land I(x))$ P

② $Q(c)\land I(c)$ ES①

③ $(\forall x)(Q(x)\to R(x))$ P

④ $Q(c)\to R(c)$ US③

⑤ $Q(c)$ T②I

⑥ $R(c)$ T④⑤I

⑦ $I(c)$ T②I

⑧ $R(c)\land I(c)$ T⑥⑦I

⑨ $(\exists x)(R(x)\land I(x))$ EG⑧

b)设 P（x）：x 喜欢步行。Q（x）：x 喜欢乘汽车。R（x）：x 喜欢骑自行车

本题符号化为：

$(\forall x)(P(x)\to\neg Q(x)),(\forall x)(Q(x)\lor R(x)),(\exists x)\neg R(x)\Rightarrow(\exists x)\neg P(x)$

① $(\exists x)\neg R(x)$ P

② $\neg R(c)$ ES①

③ $(\forall x)(Q(x) \vee R(x))$ P

④ $Q(c) \vee R(c)$ US③

⑤ $Q(c)$ T②④I

⑥ $(\forall x)(P(x) \to \neg Q(x))$ P

⑦ $P(c) \to \neg Q(c)$ US⑥

⑧ $\neg P(c)$ T⑤⑦I

⑨ $(\exists x)\neg P(x)$ EG⑧

c) 每个大学生不是文科学生就是理工科学生，有的大学生是优等生，小张不是理工科学生，但他是优等生，因而如果小张是大学生，他就是文科学生。

设 G（x）：x 是大学生。L（x）：x 是文科学生。P（x）：x 是理工科学生。S（x）：x 是优秀生。c：小张。

本题符号化为：

$(\forall x)(G(x) \to L(x)\vee P(x)), (\exists x)(G(x) \wedge S(x)), \neg P(c), S(c) \Rightarrow G(c) \to L(c)$

① $G(c)$ P（附加前提）

② $(\forall x)(G(x) \to L(x) \vee P(x))$ P

③ $G(c) \to L(c) \vee P(c)$ US②

④ $L(c) \vee P(c)$ T①③I

⑤ ┐P(c) P

⑥ L(c)

T④⑤I

⑦G(c) →L(c)

CP

注意：本题推证过程中未用到前提(∃x)(G(x) ∧S(x))以及 S(c)。主要是 S（x）：x 是优秀生，这个条件与其他前提的联系对证明结论没有影响，因 S（x）与其他前提不矛盾，故本题的推证仍是有效的。

3-5.1 列出所有从 X={a,b,c} 到 Y={s} 的关系。

解：Z_1={<a,s>}
Z_2={<b,s>}
Z_3={<c,s>}
Z_4={<a,s>,<b,s>}
Z_5={<a,s>,<c,s>}
Z_6={<b,s>,<c,s>}
Z_7={<a,s>,<b,s>,<c,s>}

3-5.2 在一个有 n 个元素的集合上，可以有多少种不同的关系。

解 因为在 X 中的任何二元关系都是 X×X 的子集，而 X×X=X^2 中共有 n^2 个元素，取 0 个到 n^2 个元素，共可组成 2^{n^2} 个子集，即 $|\wp(X\times X)|=2^{n^2}$。

3-5.3 设 A＝{6：00，6：30,7：30，…，9：30,10：30}表示在晚上每隔半小时的九个时刻的集合，设 B={3,12,15,17}表示本地四个电视频道的集合,设 R_1 和 R_2 是从 A 到 B 的两个二元关系，对于二无关系 R_1，R_2，$R_1\cup R_2$，$R_1\cap R_2$，$R_1\oplus R_2$ 和 R_1-R_2 可分别得出怎样的解释。

解：A×B 表示在晚上九个时刻和四个电视频道所组成的电视节目表。

R_1 和 R_2 分别是 A×B 的两个子集，例如 R_1 表示音乐节目播出的时间表，R_2 是戏曲节日的播出时间表，则 $R_1\cup R_2$ 表示音乐或戏曲节目的播出时间表，$R_1\cap R_2$ 表示音乐和戏曲一起播出的时间表，$R_1\oplus R_2$ 表示音乐节目表以及戏曲节目表，但不是音乐和戏曲一起的节目表，R_1-R_2 表示不是戏曲时间的音乐节目时间麦。

3-5.4 设 L 表示关系“小于或等于”，D 表示‘整除”关系,L 和 D 刀均定义于{1,2,3,6}，分别写出 L 和 D 的所有元素并求出 L∩D.

解：L={<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,3>,<2,6>,<3,6>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<6,6>}
D={<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,6>,<3,6>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<6,6>}
L∩D=
{<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,6>,<3,6>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<6,6>}

3-5.5 对下列每一式，给出 A 上的二元关系，试给出关系图：

a){<x,y>|0≤x∧y≤3}，这里 A={1,2,3,4}；

b){<x,y>|2≤x,y≤7 且 x 除尽 y,这里 A＝{n|n∈N∧n≤10}

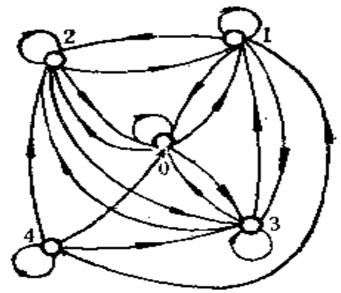
c) {<x,y>|0≤x-y<3}，这里 A={0,1,2,3,4}；

d){<x,y>|x,y 是互质的}，这里 A={2,3,4,5,6}

解：

a) R={<0,0>,<0,1>,<0,2>,<0,3>,
<1,0>,<1,1>,<1,2>,<1,3>,
<2,0>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,
<3,0>,<3,1>,<3,2>,<3,3>,}

其关系图



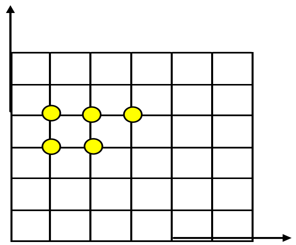
(a)

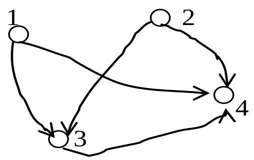
b) R={<2,0>,<2,2>,<2,4>,<2,6>,
<3,0>,<3,3>,<3,6>,
<4,0>,<4,4>,
<5,0>,<5,5>,
<6,0>,<6,6>,
<7,0>,<7,7>}

3-6.1 分析集合 A={1，2，3}上的下述五个关系：
（1）R={＜1，1＞，＜1，2＞，＜1，3＞，＜3，3＞}；
（2）S={＜1，1＞，＜1，2＞，＜2，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞}；
（3）T={＜1，1＞，＜1，2＞，＜2，2＞，＜2，3＞}；
（4）Ø=空关系；
（5）A×A=全域关系。
判断A中的上述关系是否为a)自反的，b）对称的，c）可传递的，d）反对称的。

解（1）R是可传递和反对称的。
（2）S是自反，对称和可传递的。
（3）T是反对称的。
（4）空关系是对称，可传递和反对称的。
（5）全域关系是自反，对称和可传递的。

3-6.2 给定 A={1，2，3,4}，考虑 a 上的关系 R,若 R={＜1，3＞，＜1，4＞，＜2，3＞，＜2，4＞，＜3，4＞}
a) 在 A×A 的坐标图上标出 R，并绘出它的关系图；
b) R 是 i）自反的 ii）对称的iii)可传递的，iv) 反对称的吗？
解
a）





R是可传递的的和反对称的；但不是自反的和对称的。

3-6.3 举出 A={1，2，3}上关系 R 的例子，使其具有下述性质：
a）既是对称的，又是反对称的；
b）R既不是对称的，又不是反对称的；
c）R是可传递的。

解
a）R={＜1，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞}
b）R={＜1，2＞，＜2，1＞，＜2，3＞}
c）R={＜1，2＞，＜2，1＞，＜1，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞}

3-6.4 如果关系 R 和 S 是自反的，对称的和可传递的,证明R∩S也是自反，对称和可传递的。

证明 设R和S是X上的自反的，对称的和可传递的关系。
1）对任意 x∈X，有＜x，x＞∈R 和＜x，x＞∈S，所以＜x，x＞∈R∩S，即 R∩S 在 X 上是自反的。
2）对任意的＜x，y＞∈R∩S，有＜x，y＞∈R∧＜x，y＞∈S，因为 R 和 S 是对称的，故必有＜y，x＞∈R∧＜y，x＞∈S。即＜y，x＞∈R∩S，所以 R∩S 在 X 上是对称的。
3）对任意的＜x，y＞∈R∩S∧＜y，z＞∈R∩S，则有
＜x，y＞∈R∧＜x，y＞∈S∧＜y，z＞∈R∧＜y，z＞∈S
因为 R 和 S 是传递的，故得＜x，z＞∈R∧＜x，z＞∈S，即＜x，z＞∈R∩S，所以 R∩S 在 X 上是传递的。

3-6.5 给定 S={1，2，3，4}和 S 上关系：R={＜1，2＞，＜4，3＞，＜2，2＞，＜2，1＞，＜3，1＞}
说明 R 是不可传递的，找出关系 $R_1 \supseteq R$，使得 R_1 是可传递的，还能找出另一个

3-7.1 设 R_1 和 R_2 是 A 上的任意关系，说明以下命题的真假并予以证明。
a）若 R_1 和 R_2 是自反的，则 $R_1\circ R_2$ 也是自反的；
b）若 R_1 和 R_2 是反自反的，则 $R_1\circ R_2$ 也是反自反的；
c）若 R_1 和 R_2 是对称的，则 $R_1\circ R_2$ 也是对称的；
d）若 R_1 和 R_2 是传递的，则 $R_1\circ R_2$ 也是传递的。

证明 a）对任意 a∈A，设 R_1 和 R_2 是自反的，则＜a，a＞∈R_1，＜a，a＞∈R_2
所以，＜a，a＞∈$R_1\circ R_2$，即 $R_1\circ R_2$ 也是自反的。

b）假。例如：设 A={a，b}，有 R_1={＜a，b＞}与 R_2={＜b，a＞}
R_1 和 R_2 是反自反的。但 $R_1\circ R_2$={＜a，a＞}，所以 $R_1\circ R_2$ 在 A 上不是反自反的。

c)假。例如：设 A={a，b，c}，有
R_1={＜a，b＞，＜b，a＞，＜c，c＞}，
R_2={＜b，c＞，＜c，b＞}
R_1 和 R_2 是对称的，但 $R_1\circ R_2$={＜a，c＞，＜c，b＞}
所以，$R_1\circ R_2$ 不是对称的。

d）假。例如：设 A={a，b，c}，有
R_1={＜a，b＞，＜b，c＞，＜a，c＞}，
R_2={＜b，c＞，＜c，a＞，＜b，a＞}
则 R_1，R_2 都是传递的。但 $R_1\circ R_2$={＜a，c＞，＜a，a＞，＜b，a＞}
所以，$R_1\circ R_2$ 不是传递的。

3-7.2 证明 若 S 为集合 X 上的二元关系：
a）S 是传递的，当且仅当（S∘S）⊆S；
b）S 是自反的，当且仅当 I_X⊆S；
c）证明定理 3-7.3（b）（即 S 是反对称的，当且仅当 S∩S^c⊆I_X）。

证明 a）设 S 为传递的，若＜x，z＞∈S∘S，则存在某个 y∈X，使得＜x，y＞∈S，且＜y，z＞∈S。
若 S 是传递的,＜x,z＞∈S,所以(S∘S)⊆S。

反之，设（S∘S）⊆S，假定＜x，y＞∈S 且＜y,z＞∈S,则＜x，z＞∈S∘S。因为（S∘S）⊆S，故＜x，z＞∈S，得到 S 是传递的。

b）设 S 是自反的，令＜x，y＞∈I_X，则 x=y。但＜x，x＞∈S，因此＜x，y＞=＜x，x＞∈S，得 I_X⊆S。

反之，令 I_X⊆S，设任意 x∈X，＜x，x＞∈I_X，故＜x，x＞∈S，因此 S 是自反的。

c）设 S 是反对称的。假定＜x，y＞∈S∩S^c，则
＜x，y＞∈S∧＜x，y＞∈S^c⇒＜x，y＞∈S∧＜y，x＞∈S
因为 S 是反对称的，故 x＝y，
所以＜x，y＞＝＜x，x＞∈I_X，即 S∩S^c⊆I_X。

反之，若 S∩S^c⊆I_X，设＜x，y＞∈S 且＜y，x＞∈S，则
＜x，y＞∈S∧＜x，y＞∈S^c
⇔＜x，y＞∈S∩S^c
⇒＜x，y＞∈I_X
故 x＝y，即 S 是反对称的。

3-7.3 设 S 为 X 上的关系，证明若 S 是自反和传递的，则 S∘S=S，其逆为真吗 ？

证明 若 S 是 X 上传递关系，由习题 3-7.2a）可知（S∘S）⊆S，
令＜x，y＞∈S，根据自反性，必有＜x，x＞∈S，因此有＜x，y＞∈S∘S，即 S⊆S∘S。得到 S=S∘S.

这个定理的逆不真。例如 X={1，2，3}，S={＜1，2＞，＜2，2＞，＜1，1＞}，

3-8.1 根据图 3-8.1 中的有向图，写出邻接矩阵和关系 R，并求出 R 的自反闭包和对称闭包。

解

$$M_R=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}$$

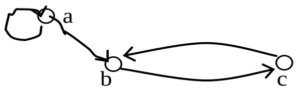


图 3-8.1

R={＜a，a＞，＜a，b＞，＜b，c＞，＜c，b＞=

r（R）= R∪I_X ={＜a，a＞，＜b，b＞，＜c，c＞，＜a，b＞，＜b，c＞，＜c，b＞=

s（R）= R∪R^C={＜a，a＞，＜a，b＞，＜b，a＞，＜b，c＞，＜c，b＞}

3-8.2 设集合 A={a，b，c，d}A 上的关系

R={＜a，b＞，＜b，a＞，＜b，c＞，＜c，d＞}

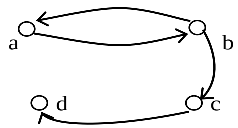
a） 用矩阵运算和作图方法求出 R 的自反、对称、传递闭包；

b） 用 Warshall 算法，求出 R 的传递闭包。

解 a）

$$M_R=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{vmatrix}$$

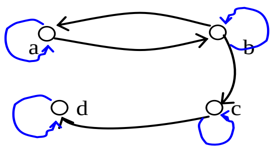
R 的关系图如图所示。



$$M_R+M_{I_A}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}$$

r（R）= R∪I_A

={＜a，a＞，＜a，b＞，＜b，a＞，＜b，b＞，＜b，c＞，＜c，c＞，＜c，d＞，＜d，d＞}（图（a））



图（a）

$$M_R+M_{R^c}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}$$

3-9.1 4 个元素的集合共有多少不同的划分。

解 整数 4 可划分为：4，1+3，1+1+2，2+2，1+1+1+1。

$1+C_4^1+C_4^2+\frac{1}{2}\ C_4^2+1=15$（种）

3-9.2 设{A_1，A_2，…，A_k}是集合 A 的一个划分，我们定义 A 上的一个二元关系 R，使＜a,b＞∈R 当且仅当 a 和 b 在这个划分的同一块中。证明 R 是自反的，对称的，和传递的。

证明 设对任意 a∈A，则必存在 A_i，使 a∈A_i，因 a 与 a 必可看作在同一块中，故有＜a,a＞∈R。即 R 是自反的。

设 a,b∈A，若有＜a,b＞∈R，则 a 与 b 必在同一块，故 b 与 a 亦在同一块，＜b, a＞∈R，即 R 是对称的。

对任意 a,b,c∈A，

＜a,b＞∈R∧＜b,c＞∈R

$\Rightarrow$（∃i）（a∈A_i∧b∈A_i）∧（∃j）（b∈A_j∧c∈A_j）

$\Rightarrow$（∃i）（∃j）（a∈A_i∧c∈A_j∧b∈$A_i\cap A_j$）

$\Rightarrow$（∃i）（∃j）（a∈A_i∧c∈A_j∧$A_i\cap A_j\neq\varnothing$）

$\Rightarrow$（∃i）（∃j）（a∈A_i∧c∈A_j∧i=j）（∵ $i\neq j\Rightarrow A_i\cap A_j=\varnothing$）

$\Rightarrow$a,c 在同一块

$\Rightarrow$＜a,c＞∈R

∴R 传递

3-10.1 设 R 和 R′ 是集合 A 上的等价关系，用例子说明：R∪R′ 不一定是等价关系。

证明 设 A={1，2，3}，S=R∪R′

R={＜1，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞，＜3，1＞，＜1，3＞}

R′={＜1，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞，＜3，2＞，＜2，3＞}

则 R∪R′={＜1，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞，＜3，1＞，＜1，3＞，＜3，2＞，＜2，3＞}

因为如＜2，3＞∈S∧＜3，1＞∈S，但＜2，1＞∉S，故 R∪R′ 不是传递的，即 R∪R′ 不是 A 上的等价关系。

3-10.2 试问由 4 个元素组成的有限集上所有等价关系的个数为多少？

解 因为集合 X 上的等价关系与 X 的划分是一一对应的，所以 4 个元素的有限集上等价关系的数目，与 4 个元素集合进行划分的数目是相同的，由习题 3-9.1 可知共有 15 个不同的等价关系。

3-10.3 给定集合 S={1，2，3，4，5}，找出 S 上的等价关系 R，此关系 R 能产生划分{{1，2}，{3}，{4，5}}，并画出关系图。

解 我们可用如下方法产生一个等价关系：

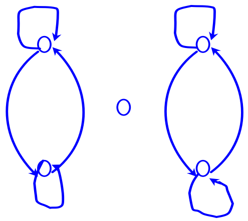
R_1={1，2}×{1，2}={＜1，1＞，＜1，2＞，＜2，1＞，＜2，2＞}

R_2={3}×{3}={＜3，3＞}

R_3={4，5}×{4，5}={＜4，4＞，＜4，5＞，＜5，4＞，＜5，5＞}

R= $R_1\cup R_2\cup R_3$={＜1，1＞，＜1，2＞，＜2，1＞，＜2，2＞，＜3，3＞，＜4，4＞，＜4，5＞，＜5，4＞，＜5，5＞}

关系图如图。



3-10.4 设 R 是一个二元关系，S={＜a，b＞| 对于某一 c，有＜a，c＞∈R∧＜c，b＞∈R}，证明若 R 是一个等价关系，则 S 也是一个等价关系。

证明 设 R 是 A 上的等价关系：

（1） 对任一 x∈A，因为 R 在 A 上自反，所以＜x，x＞∈R。由 S 定义，＜x，x＞∈S，所以 S 是自反的。

（2） 对任意 x，y∈A，若＜x，y＞∈S，则存在某个 c，使得＜x，c＞∈R∧＜c，y＞∈R，因为 R 是对称，故有：＜y，c＞∈R∧＜c，x＞∈R，由 S 的定义，可知＜y，x＞∈S，所以 S 是对称的。

（3） 对任意 x，y，z∈A，若＜x，y＞∈S，及＜y，z＞∈S，则必存在某个 c_1，使＜x，c_1＞∈R，＜c_1，y＞∈R。由 R 的传递性，可知＜x，y＞∈R，同理存在 c_2，使＜y，c_2＞∈R∧＜c_2，z＞∈R，由 R 传递，可知＜y，z＞∈R。再由 S 定义，得＜x，z＞∈S。故 S 是传递的。

3-10.5 设正整数的序偶集合 A，在 A 上定义二元关系 R 如下：＜＜x，y＞，＜u，v＞＞∈R，当且仅当 xv=yu，证明 R 是一个等价关系。

证明 设 A 上定义的二元关系 R 为：

$$\langle\langle x,y\rangle,\ \langle u,v\rangle\rangle\in R\Leftrightarrow\frac{x}{y}=\frac{u}{v}$$

① 对任意 $\langle x,y\rangle\in A$，因为 $\frac{x}{y}=\frac{x}{y}$，所以

$$\langle\langle x,y\rangle,\ \langle x,y\rangle\rangle\in R$$

即 R 是自反的。

② 设 $\langle x,y\rangle\in A$，$\langle u,v\rangle\in A$，若

$$\langle\langle x,y\rangle,\ \langle u,v\rangle\rangle\in R\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{u}{v}\Rightarrow\frac{u}{v}=\frac{x}{y}\Rightarrow\langle\langle u,v\rangle,\langle x,y\rangle\rangle\in R$$

即 R 是对称的。

③ 设任意 $\langle x,y\rangle\in A$，$\langle u,v\rangle\in A$，$\langle w,s\rangle\in A$，对

$$\langle\langle x,y\rangle,\ \langle u,v\rangle\rangle\in R\wedge\langle\langle u,v\rangle,$$

$<w,s>>\in R$

$\Rightarrow(\frac{x}{y}=\frac{u}{v})\wedge(\frac{u}{v}=\frac{w}{s})\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{w}{s}$

$\Rightarrow<<x,y>,<w,s>>\in R$

故R是传递的,于是R是A上的等价关系。

3-10.6 设 R 是集合 A 上的对称和传递关系，证明如果对于 A 中的每一个元素 a,在 A 中同时也存在 b，使$<a,b>$在 R 之中，则 R 是一个等价关系。

证明 对任意 $a\in A$，必存在一个 $b\in A$，使得$<a,b>\in R$.

因为R是传递的和对称的，故有：

$<a,b>\in R\wedge<b,c>\in R\Rightarrow<a,c>\in R\Rightarrow<c,a>\in R$

由$<a,c>\in R\wedge<c,a>\in R\Rightarrow<a,a>\in R$

所以R在A上是自反的,即R是A上的等价关系。

3-10.7 设R_1和R_2是非空集合A上的等价关系，试确定下述各式，哪些是A上的等价关系，对不是的式子，提供反例证明。

a) $(A\times A)-R_1$;

b) R_1-R_2;

c) R_1^2;

d) $r(R_1-R_2)$（即R_1-R_2的自反闭包）。

解 a) $(A\times A)-R_1$不是A上等价关系。例如:

$A=\{a,b\}$，$R_1=\{<a,a>,<b,b>\}$

$A\times A=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>\}$

$(A\times A)-R_1=\{<a,b>,<b,a>\}$

所以$(A\times A)-R_1$不是A上等价关系。

b) 设 $A=\{a,b,c\}$

$R_1=\{<a,b>, <b,a>, <b,c>, <c,b>, <a,c>, <c,a>, <a,a>, <b,b>, <c,c>\}$

$R_2=\{<a,a>, <b,b>, <c,c>, <b,c>, <c,b>\}$

$R_1-R_2=\{<a,b>, <b,a>, <a,c>, <c,a>\}$

所以 R_1 和 R_2 是 A 上等价关系，但 R_1-R_2 不是 A 上等价关系。

c）若 R_1 是 A 上等价关系，则

$<a,a>\in R_1 \Rightarrow <a,a>\in R_1\bigcirc R_1$

所以 R_1^2 是 A 上自反的。

若 $<a,b>\in R_1^2$ 则存在 c，使得 $<a, c>\in R_1 \wedge <c,b>\in R_1$。因 R_1 对称，故有

$<b, c>\in R_1 \wedge <c,a>\in R_1 \Rightarrow <b, a>\in R_1^2$

即 R_1^2 是对称的。

若 $<a,b>\in R_1^2 \wedge <b, c>\in R_1^2$，则有

$<a,b>\in R_1\bigcirc R_1 \wedge <b, c>\in R_1\bigcirc R_1$

$\Rightarrow (\exists e_1)(<a, e_1>\in R_1 \wedge <e_1, b>\in R_1) \wedge (\exists e_2)(<b, e_2>\in R_1 \wedge <e_2, c>\in R_1)$

$\Rightarrow <a,b>\in R_1 \wedge <b, c>\in R_1$（$\because R_1$ 传递）

$\Rightarrow <a,c>\in R_1^2$

即 R_1^2 是传递的。

故 R_1^2 是 A 上的等价关系。

d）如 b）所设，R_1 和 R_2 是 A 上的等价关系，但

$r(R_1-R_2)=(R_1-R_2)\cup I_A$

$=\{<a,b>, <b,a>, <a,c>, <c,a>, <a,a>, <b,b>, <c,c>\}$

不是 A 上的等价关系。

3-10.8 设 C^*是实数部分非零的全体复数组成的集合，C^*上的关系 R 定义为：$(a+bi)R(c+di) \Leftrightarrow ac>0$，证明 R 是等价关系，并给出关系 R 的等价类的几何说明。

证明：(1) 对任意非零实数 a，有 $a^2>0 \Leftrightarrow (a+bi)R(a+bi)$

故 R 在 C^*上是自反的。

(2) 对任意$(a+bi)R(c+di) \Leftrightarrow ac>0$，

因 $ca=ac>0 \Leftrightarrow (c+di)R(a+bi)$，

所以 R 在 C^*上是对称的。

(3) 设$(a+bi)R(c+di)$，$(c+di)R(u+vi)$，则有 $ac>0 \wedge cu>0$

若 $c>0$，则 $a>0 \wedge u>0 \Rightarrow au>0$

若 $c<0$，则 $a<0 \wedge u<0 \Rightarrow au>0$

所以$(a+bi)R(u+vi)$，即 R 在 C^*上是传递的。

关系 R 的等价类，就是复数平面上第一、四象限上的点，或第二、三象限上的点，因为在这两种情况下，任意两个点(a,b)，(c,d)，其横坐标乘积 $ac>0$。

3-10.9 设Π和Π′是非空集合 A 上的划分，并设 R 和 R′分别为由Π和Π′诱导的等价关系，那么Π′细分Π的充要条件是 $R' \subseteq R$。

证明：若Π′细分Π。由假设 $aR'b$，则在Π′中有某个块 S′，使得 $a,b \in S'$，因Π′细分Π，故在Π中，必有某个块 S，使 $S' \subseteq S$，即 $a,b \in S$，于是有 aRb，即 $R' \subseteq R$。

反之，若 $R' \subseteq R$，令 S′为 H′的一个分块，且 $a \in S'$，则 $S'=[a]_{R'}=\{x \mid xR'a\}$

但对每一个 x，若 $xR'a$，因 $R' \subseteq R$，故 xRa，因此$\{x \mid xR'a\} \subseteq \{x \mid xRa\}$即$[a]_{R'} \subseteq [a]_R$

设 $S=[a]_R$，则 $S'\subseteq S$

这就**证**明了Π'细分Π。

3-10.10 设 R_j是表示 I 上的模 j 等价关系，R_k是表示 I 上的模 k 等价关系，证明 I/R_k细分 I/R_j当且仅当 k 是 j 的整数倍。

证明：由题设 $R_j=\{\langle x,y\rangle \mid x\equiv y(\mathrm{mod}\, j)\}$

$$R_k=\{\langle x,y\rangle \mid x\equiv y(\mathrm{mod}\, k)\}$$

故$\langle x,y\rangle\in R_j \Leftrightarrow x-y=c\cdot j$ （对某个 $c\in I$）

$\langle x,y\rangle\in R_k \Leftrightarrow x-y=d\cdot k$ （对某个 $d\in I$）

a)假设 I/R_k细分 I/R_j，则 $R_k\subseteq R_j$

因此$\langle k,0\rangle\in R_k \Rightarrow \langle k,0\rangle\in R_j$

故 $k-0=1\cdot k=c\cdot j$ （对某个 $c\in I$）

于是 k 是 j 的整数倍。

b)若对于某个 $r\in I$，有 $k=rj$ 则：

$\langle x,y\rangle\in R_k \Leftrightarrow x-y=ck$ （对某个 $c\in I$）

$\Rightarrow x-y=crj$ （对某个 $c,r\in I$）

$\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R_j$

因此，$R_k\subseteq R_j$，于是 I/R_k细分 I/R_j

5-1 代数系统的引入

5.1.1 设集合 A={1，2，3，…，10}，问下面定义的二元运算*关于集合 A 是否封闭？

a） x*y=max(x,y)；

b） x*y=min(x,y)；

c） x*y=GCD(x,y)；（最大公约数）

d） x*y=LCM(x,y)；（最小公倍数）

e） x*y=质数 p 的个数，其中 x≤p≤y。

解：a）封闭。b）封闭。c）封闭。d）不封闭。e）不封闭。

5.1.2 在下表所列出的集合和运算中，请根据运算是否在相应集合上封闭，在相应位置上填写“是”或“否”，其中 I 表示整数集，N 表示自然数集合。

是否封闭 \ 集合	运算					
	+	−	|x−y|	max	min	|x|
I						
N						
{x|0≤x≤10}						
{x|−10≤x≤10}						
{2x|x∈I}						

解：

是否封闭 \ 集合	运算					
	+	−	|x−y|	max	min	|x|
I	是	是	是	是	是	是
N	是	否	是	是	是	是
{x|0≤x≤10}	否	否	是	是	是	是
{x|−10≤x≤10}	否	否	否	是	是	是
{2x|x∈I}	是	是	是	是	是	是

5-2 运算及其性质

5.2.1 对于实数集合 R，下表所列的二元运算是否具有左边一列中那些性质，请在相应位置上填写“是”或“否”。

	+	−	×	max	min	|x−y|
结合律						
交换律						
有单位元						
有零元						

解：

	+	−	×	max	min	|x−y|
结合律	是	否	是	是	是	否
交换律	是	否	是	是	是	是
有单位元	是	否	是	否	否	否
有零元	否	否	是	否	否	否