

随机过程理论 — 探究性大作业

一、探究性大作业-要求

根据《随机过程理论》内容，拟定了 12 个（类）探究性问题，同学们以小组为单位，选择 1 个问题；每个小组由 3 名同学构成，全班约 42 人，分为 14 个小组。选题不限于上述给出的探究性问题，也可以由同学们自己提出选题，由主讲教师审核，确保难度相当。

探究性大作业，其问题在课堂讲授或者讨论中已经有所涉及，课后同学们自己通过查阅资料、讨论，逐步将问题引向深入，挖掘概念背后的发展历史、人物故事与教育意义，也可以通过经典问题的讨论，引向学科前沿、产业前沿，让同学们认识到经典与前沿的内在联系，经典理论中前提条件的改变，有可能获得新的突破，由此有助于培养提出问题的能力。

同学们以自己的学习与生活经验（建构主义教育理论：教育是打开学生的经验世界），深入分析问题背后思想，反思大学学什么、怎么学，体验知识发现的乐趣，感受课程之间的内在联系，初步学会提出问题、关注科学思维方法、科学精神，感悟科学家在困惑中不断探索的勇气与耐心。

基于小组研究后完成初稿递交，教师反馈修改意见，然后再递交，直到满意为止。每个小组可以预约 2-3 次与教师探讨，由于不同小组可能选择相同题目，教师主要倾听学生思路（道家教育理念：教育是一项留白的艺术），依据学生特点、探索基础，适当给予方向性的建议，不仅限于随机过程理论，还可以探讨学习方法与大学怎么读。

采取小组合作探究的模式，培养合作学习、协作能力，文献查阅与综述能力，用自己生活与学习经验来诠释以及版本的修改历史使得报告的个性化、限制抄袭，迫使同学们独立思考，即使几个小组同时选择一个题目，其研究报告差别非常大。探究活动要求同学们反思所学课程以及相关教师的教学思想，达到**系统深层学习**，也能学习论文书写规范等，值得一提的是**教师的真情投入**是教学效果重要保证。

报告内容构成：

1、**正文**-对问题探究，类似于文献综述，如“狄拉克函数的单位元思想及狄拉克工程教育”，用曾经学习过的线性代数中单位元、信号与系统中的狄拉克函数、随机过程中的白噪声等单位元特性，理解单位元思想。狄拉克三位一体（工程、数学、物理）教育对其学术成就的影响，反思自己的学习方法、存在问题以及如何改进。探究报告的核心要点是用自己的语言、学习经验来诠释概念的发展历史、科学家精神。

探究性大作业，期望同学们促进思考一门课程中多个概念之间的内在联系，多门课程中相似概念之间的内在联系，逐渐领悟华罗庚“从薄到厚”然后“厚到薄”学习方法的妙处。概念的演变历史有助于理解什么是创新，科学家的人文精神等等。

2、**版本递进**-师生互动，体现不愤不启、不悱不发，先有同学们的探索与思考，自认为满意后递交，供老师点评甚至面对面探讨，形成版本升级的修改原因。版本递进记录了教师的指导过程，同时也展示了同学们的探索历程，相当于小组成长手册。

3、**对其他小组评论**-在探究成果展示中，为了鼓励同学们热情参与，相互学习，实现深度（本小组）与广度（其他小组）相结合，课堂内主动提问，课后对其他组的评论总结出来。

4、**心路历程**-通过本次探究活动，每个同学反思此前自己大学教育经历，将探究中遇到的挫折、新的认识、获得感悟等恰当的表达出来，有助于养成探究性学习的良好习惯，同时作为个人成长手册，也能养成反思（三省吾身）的习惯，实现持续改进。

5、**参考文献**-探究过程中参考的文献清单。

二、探究性大作业-思考题

1、讨论《随机过程理论》与《概率论与数理统计》的关系，也即在《概率论》中的极限定理，如大数定律、中心极限定理关注的是独立随机序列；在《数理统计》，尤其是简单抽样，随机变量之间也是独立同分布。然而，不是所有的随机序列都是独立同分布的，如观察性的试验（通信中发送的信号、经过信道传播后

接收到的信号)存在相关性,如何研究?

【注释】问题源自第一、二章 概率论与随机变量,随机过程描述。可以从随机过程诞生与发展历史的视角进行探索。

2、科普的描述随机过程在信息论、信号处理、图像处理、通信工程、系统性能评估等方面的应用。也即:感觉到有用、能欣赏其优美性是学习的动力,但是工程应用要求许多背景知识,也不容易理解,如何描述需要一些探索,尤其将其放置在现代工程应用中。

【注释】第一、二章 概率论与随机变量,随机过程描述。这是一个非常开放的问题,可以选择具体问题,如图像处理中的去雾处理,导航、自动控制等领域的维纳滤波、卡尔曼滤波等。

3、讨论平稳随机过程的各态历经性定理与大数定律、马尔可夫链的遍历性定理之间的关系,三者其实都在描述各态历经,虽然表面上有些差异,但是其内在存在紧密的联系。

【注释】问题选自“第二章 平稳随机过程”和“第七章 马尔可夫链”。探究的目的,是如何诠释其内在的联系?用可视化方式来表达,加深对概念的理解,逐步领悟华罗庚的“厚与薄”学习方法。

4、“各态历经”概念源自统计热力学;同样信息论中的“熵”,香农也是从统计热力学中借鉴而来,探讨统计热力学与随机过程的关系,进而追溯科学发展历史,对理解科学思维与科学家精神的重要性。

【注释】问题选自“第二章 平稳随机过程”。加强对“信息熵”的研究,同时也可作为《信息论基础》的探究问题!可以参考《玻尔兹曼传》《信息简史》《香农传》等。

5、“维纳-辛钦公式”的意义,为什么需要研究随机过程功率谱?进一步分析,《数学分析》中傅里叶级数、《电路分析》中的相量法、《复变函数与积分变换》与《信号与系统》中的傅里叶变换、《概率论与数理统计》中的特征函数,

它们与维纳辛钦公式之间关系,进一步理解科学家、哲学家对傅里叶贡献的评价。

【注释】问题选自“第二章 平稳随机过程”。正如第一部分中介绍的,这是跨越 5 个学期多门课程中相似概念之间的内在联系,逐渐领悟华罗庚“从薄到厚”然后“厚到薄”学习方法的妙处。也可以追问傅里叶为何能够突破拉格朗日等权威们的局限? 如何理解颠覆性创新等。

6、讨论《随机过程理论》与《信号与系统》之间的关系,也即对比两门课程,会发现许多相似性,思考其内在的关系。

【注释】问题源自“第三章 随机过程的线性变换”,有些学校也称《随机过程理论》为《随机信号分析》,主要从信号分析观点来研究,当然《随机过程理论》不只是随机信号分析。这个问题,不能直接从 2 本教材简单对比分析,而是思考什么条件下,必须用随机过程观点来处理信号,或者历史上为什么需要引入随机过程?

7、布朗运动的研究历史,也即布朗运动现象的发现、早期的研究成果,爱因斯坦关于布朗运动物理研究、维纳随机过程理论,伊藤清随机微分方程,以及彭实戈的倒向随机微分方程,从其发展历程中你有何启示。

【注释】问题源自“第三章 随机过程的线性变换”中的白噪声,“第五章 高斯随机过程”中的维纳过程。研究重点可以选择“维纳随机过程理论”、“伊藤清随机微分方程”,“彭实戈的倒向随机微分方程”中的一个问题。

8、比较分析白噪声随机过程、信号与系统中的单位脉冲函数(狄拉克函数)、高等代数中单位元三者之间的关系,进一步理解单位元概念及其意义? 为何狄拉克(三位一体教育:本科为工程类、硕士为数学,博士为物理)能够创造出独特的科学成就。

【注释】问题选自“第三章 随机过程的线性变换”中的白噪声。“单位元”既是熟悉的,也是抽象的概念,充分了解卷积运算中单位元的意义。狄拉克三位一体教育,可以参考狄拉克的传记,可以很好理解数学、物理与工程之间的关系。

9、窄带随机过程的希尔伯特变换、低通等效、压缩感知之间的关系。也即：窄带信号可以通过简单的变换，变成低通信号，由抽样定理可知，抽样率可以大大减小。如果信号在频域上看，有几个窄带（带宽累计还是窄带），那么是否也可以找到变换，变成低通信号？更一般地，就是 2000 年以后发展迅速的压缩感知理论。

【注释】问题源自“第四章 窄带随机过程”

10、“泊松过程”对于离散事件状态的刻画非常重要，请探索科学家泊松是如何发现泊松定理的？泊松定理与泊松过程的关系，泊松过程与负指数分布之间的关系，泊松定理的应用价值，泊松定理与中心极限定理之间的关系。

【注释】问题源自“第 6 章 泊松随机过程”。通过探究加深对“泊松分布”与“泊松过程”理解，体会“发现定理”与“证明定理”之间的区别，“泊松定理”与“中心极限定理”如何应用等等。

11、马尔可夫对随机过程的诞生有何贡献？马尔可夫性在哲学的上意义？也即：马尔可夫最先讨论带相关的离散、有限状态的随机序列，马尔可夫性，有限记忆，既考虑了相关性，同时模型也相对简单。

【注释】问题源自“第 7 章 马尔可夫链”，“第 8 章 马尔可夫过程”。

12、讨论“随机过程”与“人的学习”、“人工智能”关系，比如“人的学习”，在挫折中学习，这个挫折、顿悟，都是随机发生的，从这个意义上说人生就是一个随机过程中。同样，“机器学习”，其输入数据，也具有随机性，也可以理解为对随机过程的一种变换。

【注释】这个问题比较宏观，是针对整门课程的。对 2020 年特殊情况，新冠疫情、中美贸易摩擦，大家体会最深的是“不确定性”。