

一、填空题（每空 3 分，共 24 分）

1、已知 4 阶方阵为  $A = (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3, \beta_1)$ ,  $B = (\alpha_1, 2\alpha_2, \alpha_3, \beta_2)$ , 且  $|A| = -4$ ,  $|B| = -2$ ,

则行列式  $|A+B| =$ \_\_\_\_\_.

2、设行列式  $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ ,  $A_{ij}$  是  $D$  中元素  $a_{ij}$  的代数余子式, 则  $A_{41} + A_{42} =$ \_\_\_\_\_.

3、已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$ , 伴随矩阵  $A^* \neq 0$ , 且  $A^*x = 0$  有非零解, 则\_\_\_\_\_.

(A)  $a = 2$ ;

(B)  $a = 2$  或  $a = -4$ ;

(C)  $a = -4$ ;

(D)  $a \neq 2$  且  $a \neq -4$ .

4、向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  ( $s \geq 2$ ) 线性无关, 且可由向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表示,

则以下结论中不能成立的是\_\_\_\_\_.

(A) 向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性无关;

(B) 对任一个  $\alpha_j$  ( $1 \leq j \leq s$ ), 向量组  $\alpha_j, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性相关;

(C) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  与向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  等价.

5、已知 3 阶矩阵  $A$  与  $B$  相似且  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , 则  $B^{2012} - 2A^2 =$ \_\_\_\_\_.

6、设  $\eta_0$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的特解,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  是齐次方程组  $Ax = 0$  的基础解系, 则以下命题中错误的是\_\_\_\_\_.

(A)  $\eta_0, \eta_0 - \xi_1, \eta_0 - \xi_2, \dots, \eta_0 - \xi_s$  是  $Ax = b$  的一组线性无关解向量;

(B)  $2\eta_0 + \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_s$  是  $Ax = b$  的解;

(C)  $Ax = b$  的每个解均可表为  $\eta_0, \eta_0 + \xi_1, \eta_0 + \xi_2, \dots, \eta_0 + \xi_s$  的线性组合.

7、设 4 阶矩阵  $A$  有一个特征值为  $-2$  且满足  $AA^T = 5E$ ,  $|A| > 0$ , 则其伴随矩阵  $A^*$  的一个特征值为\_\_\_\_\_.

8、已知实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$  正定, 则常数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

二、(10 分) 设矩阵  $A$  的伴随矩阵  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 且  $|A| > 0$ ,  $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ ,

求矩阵  $B$ .

三、(10 分) 已知  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  与  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  为所有 3 维实向量构成的线性空间  $R^3$  的两组基,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  到  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的过渡矩阵为  $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  且  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

试求: (1) 基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ; (2) 在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  与  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下有相同坐标的全体向量.

四、(10 分) 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  为 4 阶方阵, 其中  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  是 4 维列向量, 且

$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关,  $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ . 已知向量  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ , 试求线性

方程组  $Ax = \beta$  的通解.

五、(20 分) 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ ,

(1). 设矩阵  $A$  为二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  所对应的对称阵, 试证  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  为  $A$  与  $A^4$  共同的特征向量.

(2). 用正交变换将此二次型化为标准型.

六、(12 分)

设  $a_1, a_2, a_3$  为 3 维线性空间  $V$  的一组基,  $V$  上的线性变换  $T$  在  $a_1, a_2, a_3$  下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1). 求线性变换  $T$  在  $V$  的基  $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_3$  下的矩阵;
- (2). 试证  $V$  中不存在一组基使  $T$  在该基下的矩阵为对角阵.

七、(14 分) 证明题:

- (1). 设  $A$  为 2 阶实方阵, 且  $|A| = -1$ , 试证  $A$  可对角化.
- (2). 设向量组  $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  线性无关,  $b_1 = a_1 + k_1 a_4, b_2 = a_2 + k_2 a_4, b_3 = a_3 + k_3 a_4, b_4 = a_4$

证明向量组  $b_1, b_2, b_3, b_4$  线性无关.