BEIHANG UNIVERSITY

2012 —2013 学年第一学期

试题答案

本答案由 1517 周俊孚同学领仪光学习部编写，不一定是标准答案，

仅供参考，如有问题请立刻询问老师，谢谢

考试课程　　复变函数与积分变换 A

班　　级＿＿＿＿＿＿＿　学 号＿＿＿＿＿＿＿＿＿

姓　　名＿＿＿＿＿＿＿　成 绩＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2017 年 1 月

一、选择题(每题 3 分，共 24 分)

1．下列方程所表示的平面点集中，为有界区域的是（D）

（A）$-\pi<\arg z<\pi$　　（B）$|z+3|-|z-3|>4$

（C）$1<\operatorname{Re} z<2,\quad \operatorname{Im} z=0$　　（D）$\operatorname{Re}(\frac{1}{z})>\frac{1}{2}$

解：区域的定义见课本第八页，C 选项不是开集，不是区域

2．假设点 z_0 是函数 $f(z)$ 的奇点，则函数 $f(z)$ 在点 z_0 处（B）

（A）不可导　　（B）不解析

（C）不连续　　（D）以上答案都不对

解：奇点的定义见课本第 17 页

3．设 C 为椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=2$ 正向，则积分 $\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z=$ （A）

（A）$2\pi i$　　（B）π　　（C）0　　（D）$-2\pi i$

4．设 c 为正向圆周 $|z|=2$，则 $\int_C\left|\frac{dz}{z}\right|=$（B）

（A）2 πi　　（B）2 π　　（C）-2 πi　　（D）-2 π

5．如果 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点，为 $g(z)$ 的 n 级零点，$n>m$，则 z_0 为 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的（C）级极点

(A) n　　（B）m　　（C）$n-m$　　（D）$m-n$

6．$\operatorname{Re} s[z\cos\frac{1}{z},z=0]=$（D）

（A）1　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）0　　（D）$-\frac{1}{2}$

解：麦克劳林展开，负一次幂项系数

7．设 $f(t)$ 的傅立叶变换为 $F(\omega)$，则 $f(2t+4)$ 的傅立叶变换为（B）

(A) $\frac{1}{2}e^{i\omega}F(\frac{\omega}{2})$　　（B）$\frac{1}{2}e^{2i\omega}F(\frac{\omega}{2})$

(C) $\frac{1}{2}e^{-i\omega}F(\frac{\omega}{2})$　　（D）$\frac{1}{2}e^{-2i\omega}F(\frac{\omega}{2})$

解：利用相似性质和位移性质

8. 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-3t}\sin 2t\mathrm{d}t$ 的值为（B）

（A）$\frac{3}{13}$　　（B）$\frac{2}{13}$　　（C）$\frac{3}{11}$　　(D) $\frac{2}{11}$

解：拉氏变换定义，取 s=3

二、填空题（每题 3 分，共 27 分）

1．当 $z=\dfrac{\cos(\frac{1}{3}\pi)+i\sin(\frac{1}{3}\pi)}{\cos(\frac{5}{6}\pi)+i\sin(\frac{5}{6}\pi)}$ 时，$z^{-2012}+z^{2357}+z^{255}+z^{74}$ 的值等于 0.

2. 设 $f(z)=\cos z+i\sin z$，则 $f'(i)=ie^{-1}$

3. 复数 $(1-i)^i=e^{(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i\ln\sqrt{2}}$　　$k=0,\pm1,\pm2\cdots$

4. 设函数 $f(z)=\int_{|\zeta|=2}\dfrac{\cos\zeta}{\xi-z}\mathrm{d}\zeta$，则 $f(i)=\pi i(e^{-1}+e)$，　$f''(3)=$ 0

5. 设 $u(x,y)=x^2+2xy-y^2$，那么 $u(x,y)$ 的共轭调和函数 $v(x,y)$ 为

$y^2+2xy-x^2+c$　(c为一常数)

6．级数 $\cdots+\frac{1}{3^n z^n}\cdots+\frac{1}{3^2z^2}+\frac{1}{3z}+1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots$ 的收敛域是 $\frac{1}{3}<|z|<2$

7. 函数 $F(\omega)=\sin t_0\omega$ 的傅立叶逆变换为 $\dfrac{\delta(t+t_0)-\delta(t-t_0)}{2i}$

8．函数 $f(t)=\sin(t-\frac{\pi}{3})u(t-\frac{\pi}{3})$ 的 Laplace 变换为 $\dfrac{1}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{3}s}$

9. 函数 $F(s)=\dfrac{s}{s+3}$ 的拉普拉斯逆变换为 $\delta(t)-3e^{-3t}u(t)$

三、（12 分）计算积分 $\int_C \frac{\sin(z+i)}{z(z+i)^2}\mathrm{d}z$，其中 C 为不经过 $0,-i$ 的简单正向闭曲线.

三. 设 $f(z)=\frac{\sin(z+i)}{z(z+i)^2}$ 如下.

解：① C中包含 0, -i 两点，

$z=0$, $z=-i$ 均是 $f(z)$ 一级极点，

由留数定理.

$\int_C f(z)dz = 2\pi i[Res(f(z),0)+Res(f(z),-i)]$

$=2\pi i\left[\frac{\sin(z+i)}{(z+i)^2}\Big|_{z=0}+\frac{\sin(z+i)}{z(z+i)}\Big|_{z\to(-i)}\right]$

$=2\pi i\left[\frac{e-e^{-1}}{2i}+i\right]$

$=\pi[e-e^{-1}-2]$

② C中包含 0 不包含 -i

$\int_C f(z)dz = 2\pi i Res(f(z),0)$

$=\pi(e-e^{-1})$

③ C中包含 -i 不包含 0

$\int_C f(z)dz = 2\pi i Res(f(z),-i)$

$=-2\pi$

④ C中不包含 0, -i 两点.

由柯西-古萨基本定理

$\int_C f(z)dz=0$.

用柯西积分公式也可

四、（10 分）将 $f(z)=\frac{1}{(z-i)(z-2i)}$ 在适当的圆环域内展成以 i 为心的幂级数。

四.

解：$f(z)=\frac{1}{z-i}\times\frac{1}{(z-i)-i}$

① $0<|z-i|<1$

$f(z)=\frac{1}{z-i}\times\frac{1}{-i}\times\frac{1}{1-\left(\frac{z-i}{i}\right)}$

$=\frac{1}{z-i}\times\frac{1}{-i}\times\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{i}\right)^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^{n-1}(z-i)^{n-1}$

② $1<|z-i|<\infty$

$f(z)=\frac{1}{(z-i)^2}\times\frac{1}{1-\frac{i}{(z-i)}}$

$=\frac{1}{(z-i)^2}\times\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z-i}\right)^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}i^n\frac{1}{(z-i)^{n+2}}$

五、（10 分）计算函数 $f(t)=\begin{cases} e^{-at}, & t\geq 0 \\ e^{at}, & t<0 \end{cases}$ $(a>0)$ 的傅立叶变换及傅立叶积分，并求积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2+\omega^2}\cos\omega t\mathrm{d}\omega$ 的值。

解：设 $f(t)$ 傅氏变换为 $F(w)$.

$F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iwt}dt$

$=\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-iwt}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-at}e^{-iwt}dt$

$=\frac{1}{a-iw}e^{(a-iw)t}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{a+iw}e^{-(a+iw)t}\Big|_{0}^{+\infty}$

$\because a>0$

$\therefore a-iw$ 实部大于0；$-(a+iw)$ 实部小于0

$\therefore \lim\limits_{t\to-\infty}e^{(a-iw)t}=0$；$\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-(a+iw)}=0$

$\therefore F(w)=\frac{1}{a-iw}+\frac{1}{a+iw}$

$=\frac{2a}{a^2+w^2}$

$\because f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)e^{iwt}dw$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2a}{a^2+w^2}\times(\cos wt+i\sin wt)dw$

$=\frac{2a}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{a^2+w^2}\cos wt\,dw$

$\therefore$ 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2+w^2}\cos wt\,dw$

$=\frac{\pi}{2a}f(t)$

$=\begin{cases}\frac{\pi e^{-at}}{2a} & t\geq 0\\ \frac{\pi e^{at}}{2a} & t<0\end{cases}$ $(a>0)$.

六、（10 分）利用拉普拉斯变换求微分方程 $y''-2y'+y=0$ 满足边界条件 $y(0)=0$, $y(l)=4$ 的解，其中 l 为已知常数.

解：设 $L[y(t)]=Y(s)$

$y''-2y'+y=0$

两边作拉氏变换.

$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-2[sY(s)-y(0)]+Y(s)=0$

代入 $y(0)=0$

$Y(s)=\frac{y'(0)}{(s-1)^2}$

$y(t)=L^{-1}[Y(s)]$

$=\mathrm{Res}\left(\frac{y'(0)e^{st}}{(s-1)^2},1\right)$

$=y'(0)te^t$

又 $y(l)=y'(0)le^l=4$

$y'(0)=\frac{4}{le^l}$

$\therefore y(t)=\frac{4te^t}{le^l}$

七（7 分）证明：若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且 $|f(z)|$ 在区域 D 内为常值，试证 $f(z)$ 在区域 D 内为常值函数.

七.

解：设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$|f(z)|$ 在区域 D 内为常值

$\therefore\ u^2+v^2=C$ （C 为常值）

对上式求偏导.

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ 2u\dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}$$

又 $f(z)$ 在区域 D 内解析

满足 C-R 条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

联立可解得

$(u^2+v^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$

$(u^2+v^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

$(u^2+v^2)\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$

$(u^2+v^2)\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$

若 $u^2+v^2=0$ 即 $f(z)\equiv 0$ 满足条件

若 $u^2+v^2\neq 0$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$

$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 均为常数

$\therefore\ f(z)$ 在区域 D 内为常值函数

证毕.