第一章　行列式

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$；　（2）$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$；　（4）$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

解　（1）$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 2\times(-4)\times 3 + 0\times(-1)\times(-1) + 1\times 1\times 8$

$- 0\times 1\times 3 - 2\times(-1)\times 8 - 1\times(-4)\times(-1)$

$= -24 + 8 + 16 - 4$

$= -4$

（2）$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = acb + bac + cba - bbb - aaa - ccc$

$= 3abc - a^3 - b^3 - c^3$

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc^2 + ca^2 + ab^2 - ac^2 - ba^2 - cb^2$

$= (a-b)(b-c)(c-a)$

（4）$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

$= x(x+y)y + yx(x+y) + (x+y)yx - y^3 - (x+y)^3 - x^3$

$= 3xy(x+y) - y^3 - 3x^2y - 3y^2x - x^3 - y^3 - x^3$

$= -2(x^3 + y^3)$

2. 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数：

（1）1　2　3　4；　（2）4　1　3　2；

（3）3　4　2　1；　（4）2　4　1　3；

（5）1　3　…　$(2n-1)$　2　4　…　$(2n)$；

（6）1　3　…　$(2n-1)$　$(2n)$　$(2n-2)$　…　2.

解（1）逆序数为 0

（2）逆序数为 4：4　1，4　3，4　2，3　2

（3）逆序数为 5：3　2，3　1，4　2，4　1, 2 1

（4）逆序数为 3：2　1，4　1，4　3

（5）逆序数为 $\dfrac{n(n-1)}{2}$：

3　2　　1 个

5　2，5　4　　2 个

7　2，7　4，7　6　　3 个

………………　　…

$(2n-1)$　2，$(2n-1)$　4，$(2n-1)$　6，…，$(2n-1)$　$(2n-2)$　　$(n-1)$ 个

（6）逆序数为 $n(n-1)$

3　2　　1 个

5　2，5　4　　2 个

………………　　…

$(2n-1)$　2，$(2n-1)$　4，$(2n-1)$　6，…，$(2n-1)$　$(2n-2)$　　$(n-1)$ 个

4　2　　1 个

6　2，6　4　　2 个

………………　　…

$(2n)$　2，$(2n)$　4，$(2n)$　6，…，$(2n)$　$(2n-2)$　　$(n-1)$ 个

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解　由定义知，四阶行列式的一般项为 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$，其中 t 为 $p_1p_2p_3p_4$ 的逆序数．由于 $p_1 = 1, p_2 = 3$ 已固定，$p_1p_2p_3p_4$ 只能形如 13□□，即 1324 或 1342. 对应的 t 分别为

$$0+0+1+0=1 \text{或} 0+0+0+2=2$$

$\therefore -a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 为所求.

4. 计算下列各行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$；　　（4）$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

解

$$(1)\ \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \underset{c_4-7c_3}{\overset{c_2-c_3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 4 & -1 & -10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & -14 \end{vmatrix} \times (-1)^{4+3}$$

$$=\begin{vmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 10 & 3 & 14 \end{vmatrix} \underset{c_1+\frac{1}{2}c_3}{\overset{c_2+c_3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 9 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \\ 17 & 17 & 14 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \overset{c_4-c_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-r_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_4-r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(3)\ \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix}$$

$$= adfbce \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4abcdef$$

$$(4)\ \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \overset{r_1+ar_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} \overset{c_3+dc_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1+ab & a & ad \\ -1 & c & 1+cd \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1+ab & ad \\ -1 & 1+cd \end{vmatrix} = abcd+ab+cd+ad+1$$

5. 证明:

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$;

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$

$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)\cdot(c-d)(a+b+c+d)$;

(5) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$.

证明

(1) 左边 $\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & b-a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ b-a & 2b-2a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(b-a) \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-b)^3 = \text{右边}$$

(2) 左边 $\xlongequal[\text{分开}]{\text{按第一列}} a \begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{分别再分}} a^2 \begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + 0 + 0 + b \begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{分别再分}} a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} (-1)^2 = \text{右边}$$

(3) 左边 $= \begin{vmatrix} a^2 & a^2+(2a+1) & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & b^2+(2b+1) & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & c^2+(2c+1) & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & d^2+(2d+1) & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-c_1}]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{分成二项}]{\text{按第二列}} 2 \begin{vmatrix} a^2 & a & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & b & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & c & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & d & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第二项}\ \substack{c_3-4c_2 \\ c_4-9c_2}]{\text{第一项}\ \substack{c_3-4c_2 \\ c_4-6c_2}} \begin{vmatrix} a^2 & a & 4 & 9 \\ b^2 & b & 4 & 9 \\ c^2 & c & 4 & 9 \\ d^2 & d & 4 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 4a & 6a \\ b^2 & 1 & 4b & 6b \\ c^2 & 1 & 4c & 6c \\ d^2 & 1 & 4d & 6d \end{vmatrix} = 0$$

(4) 左边 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ b^2(b+a) & c^2(c+a)-b^2(b+a) & d^2(d+a)-b^2(b+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (c^2+bc+b^2)+a(c+b) & (d^2+bd+b^2)+a(d+b) \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$$

(5) 用数学归纳法证明

当$n=2$时, $D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2$, 命题成立.

假设对于$(n-1)$阶行列式命题成立，即

$$D_{n-1}=x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1},$$

则D_n按第1列展开：

$$D_n=xD_{n-1}+a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}=xD_{n-1}+a_n=\text{右边}$$

所以，对于n阶行列式命题成立.

6. 设n阶行列式$D=\det(a_{ij})$, 把D上下翻转、或逆时针旋转90°、或依副对角线翻转，依次得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix},$$

证明$D_1=D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D, D_3=D$.

证明　$\because D=\det(a_{ij})$

$$\therefore D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \cdots & a_{3n} \end{vmatrix}=\cdots$$

$$=(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\cdots(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)}D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$$

同理可证$D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D^T=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$

$$D_3=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D=(-1)^{n(n-1)}D=D$$

7. 计算下列各行列式（D_k为k阶行列式）：

(1) $D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$, 其中对角线上元素都是$a$，未写出的元素都是 0；

(2) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$;

(3) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$;

提示：利用范德蒙德行列式的结果.

(4) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & 0 & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ 0 & & & & & 0 \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & 0 & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$;

(5) $D_n=\det(a_{ij})$, 其中$a_{ij}=|i-j|$;

(6) $D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$，其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

解

(1) $$D_n=\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{按最后一行展开}}}$$

$$(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}+(-1)^{2n}\cdot a\begin{vmatrix}a & & \\ & \ddots & \\ & & a\end{vmatrix}_{(n-1)(n-1)}$$

（再按第一行展开）

$$=(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n}\begin{vmatrix}a & & \\ & \ddots & \\ & & a\end{vmatrix}_{(n-2)(n-2)}+a^n=a^n-a^{n-2}=a^{n-2}(a^2-1)$$

(2) 将第一行乘 (-1) 分别加到其余各行，得

$$D_n=\begin{vmatrix}x & a & a & \cdots & a\\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0\\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a-x & 0 & 0 & 0 & x-a\end{vmatrix}$$

再将各列都加到第一列上，得

$$D_n=\begin{vmatrix}x+(n-1)a & a & a & \cdots & a\\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-a\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

(3) 从第 $n+1$ 行开始，第 $n+1$ 行经过 n 次相邻对换，换到第 1 行，第 n 行经 $(n-1)$ 次对换换到第 2 行…，经 $n+(n-1)+\cdots+1=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 次行交换，得

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a & a-1 & \cdots & a-n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1}\\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n\end{vmatrix}$$

此行列式为范德蒙德行列式

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\geq i>j\geq 1}[(a-i+1)-(a-j+1)]$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\geq i>j\geq 1}[-(i-j)]=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\bullet(-1)^{\frac{n+(n-1)+\cdots+1}{2}}\bullet\prod_{n+1\geq i>j\geq 1}[(i-j)]$$

$$=\prod_{n+1\geq i>j\geq 1}(i-j)$$

(4) $$D_{2n}=\begin{vmatrix}a_n & & & & & b_n\\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ 0 & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & 0 & & & d_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第一行}} a_n\begin{vmatrix} a_{n-1} & & & 0 & & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & & & \iddots & & \\ 0 & & a_1 & & b_1 & & 0 & \vdots \\ & & c_1 & & d_1 & & & \\ & \iddots & & & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & & 0 & & & d_{n-1} & 0 \\ 0 & & & \cdots & & & 0 & d_n \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2n+1}b_n\begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & & 0 & & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & & & \iddots & \\ 0 & & & a_1 & & b_1 & & 0 \\ & & & c_1 & & d_1 & & \\ & & \iddots & & & & \ddots & \\ & c_{n-1} & & & & & & d_{n-1} \\ c_n & & & & 0 & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{都按最后一行展开}} a_n d_n D_{2n-2} - b_n c_n D_{2n-2}$$

由此得递推公式：

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2n-2}$$

即 $$D_{2n} = \prod_{i=2}^{n} (a_i d_i - b_i c_i) D_2$$

而 $$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - b_1 c_1$$

得 $$D_{2n} = \prod_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i)$$

(5) $a_{ij} = |i-j|$

$$D_n = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-r_3,\cdots]{r_1-r_2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4+c_1,\cdots]{c_2+c_1,c_3+c_1}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 2n-3 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$

(6) $$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_4,\cdots]{c_1-c_2,c_2-c_3}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a_4 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开（由下往上）}]{\text{按最后一列}}$$

$$(1+a_n)(a_1a_2\cdots a_{n-1}) - \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$\begin{vmatrix} -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \end{vmatrix}$$

$$=(1+a_n)(a_1a_2\cdots a_{n-1})+a_1a_2\cdots a_{n-3}a_{n-2}a_n+\cdots+a_2a_3\cdots a_n$$

$$=(a_1a_2\cdots a_n)(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$$

8. 用克莱姆法则解下列方程组：

$$(1)\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2, \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2, \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0; \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} 5x_1+6x_2=1, \\ x_1+5x_2+6x_3=0, \\ x_2+5x_3+6x_4=0, \\ x_3+5x_4+6x_5=0, \\ x_4+5x_5=1. \end{cases}$$

解 （1）$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -13 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 14 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & 142 \end{vmatrix}=-142$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 9 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & -13 & -3 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & -13 & -3 & -23 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -10 & -46 \\ 0 & 0 & 23 & 120 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 142 \end{vmatrix}=-142$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -2 & 3 \\ 0 & -12 & -3 & -7 \\ 0 & -15 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 23 & 11 \\ 0 & 0 & 39 & 31 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & -284 \end{vmatrix}=-284$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix}=-426$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&5\\1&2&-1&-2\\2&-3&-1&-2\\3&1&2&0\end{vmatrix}=142$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=3,\quad x_4=\frac{D_4}{D}=-1$$

(2) $$D=\begin{vmatrix}5&6&0&0&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按最后一行}}5D'-\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&1&6\end{vmatrix}=5D'-6D''$$

$$=5(5D''-6D''')-6D''=19D''-30D'''$$

$$=65D'''-114D''''=65\times19-114\times5=665$$

（D'为行列式D中a_{11}的余子式, D''为D'中a'_{11}的余子式, D''', D''''类推）

$$D_1=\begin{vmatrix}1&6&0&0&0\\0&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\1&0&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第一列}}D'+\begin{vmatrix}6&0&0&0\\5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\end{vmatrix}$$

$$=D'+6^4=19D'''-30''''+6^4=1507$$

$$D_2=\begin{vmatrix}5&1&0&0&0\\1&0&6&0&0\\0&0&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&1&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第二列}}-\begin{vmatrix}1&6&0&0\\0&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5&0&0&0\\1&6&0&0\\0&5&6&0\\0&1&5&6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}5&6&0\\1&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}-5\times6^3=-65-1080=-1145$$

$$D_3=\begin{vmatrix}5&6&1&0&0\\1&5&0&0&0\\0&1&0&6&0\\0&0&0&5&6\\0&0&1&1&5\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第三列}}\begin{vmatrix}1&5&0&0\\0&1&6&0\\0&0&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&0&0\\0&1&6&0\\0&0&5&6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&6&0\\0&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}5&6&0\\1&5&0\\0&1&6\end{vmatrix}=19+6\times114=703$$

$$D_4=\begin{vmatrix}5&6&0&1&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&0&0\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第四列}}-\begin{vmatrix}1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&1&6\\0&0&0&5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&1&6\end{vmatrix}$$

$$=-5-6\begin{vmatrix}5&6&0\\1&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}=-395$$

$$D_5=\begin{vmatrix}5&6&0&0&1\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&0\\0&0&0&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按最后一列}}\begin{vmatrix}1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\\0&0&0&1\end{vmatrix}+D'=1+211=212$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{1507}{665};\quad x_2=-\frac{1145}{665};\quad x_3=\frac{703}{665};\quad x_4=\frac{-395}{665};\quad x_4=\frac{212}{665}.$$

9. 问λ,μ取何值时,齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\mu x_2+x_3=0\\x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$有非零解?

解 $$D_3=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\mu&1\\1&2\mu&1\end{vmatrix}=\mu-\mu\lambda,$$

齐次线性方程组有非零解，则 $D_3=0$

即 $\mu-\mu\lambda=0$

得 $\mu=0$或$\lambda=1$

不难验证，当$\mu=0$或$\lambda=1$时,该齐次线性方程组确有非零解.

10. 问λ取何值时,齐次线性方程组 $\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0\\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$

有非零解？

解

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & -3+\lambda & 4\\ 2 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)^3+(\lambda-3)-4(1-\lambda)-2(1-\lambda)(-3-\lambda)$$

$$=(1-\lambda)^3+2(1-\lambda)^2+\lambda-3$$

齐次线性方程组有非零解，则 $D=0$

得 $\lambda=0,\lambda=2$或$\lambda=3$

不难验证,当$\lambda=0,\lambda=2$或$\lambda=3$时，该齐次线性方程组确有非零解.

第二章 矩阵及其运算

1．已知线性变换：

$$\begin{cases}x_1=2y_1+2y_2+y_3,\\ x_2=3y_1+y_2+5y_3,\\ x_3=3y_1+2y_2+3y_3,\end{cases}$$

求从变量x_1,x_2,x_3到变量y_1,y_2,y_3的线性变换.

解

由已知：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_2\end{pmatrix}$

故 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-4&9\\6&3&-7\\3&2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}y_1=-7x_1-4x_2+9x_3\\ y_2=6x_1+3x_2-7x_3\\ y_3=3x_1+2x_2-4x_3\end{cases}$$

2．已知两个线性变换

$$\begin{cases}x_1=2y_1+y_3,\\ x_2=-2y_1+3y_2+2y_3,\\ x_3=4y_1+y_2+5y_3,\end{cases}\qquad \begin{cases}y_1=-3z_1+z_2,\\ y_2=2z_1+z_3,\\ y_3=-z_2+3z_3,\end{cases}$$

求从z_1,z_2,z_3到x_1,x_2,x_3的线性变换.

解　由已知

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&3&2\\4&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&3&2\\4&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1&0\\2&0&1\\0&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6&1&3\\12&-4&9\\-10&-1&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$$

所以有 $\begin{cases}x_1=-6z_1+z_2+3z_3\\x_2=12z_1-4z_2+9z_3\\x_3=-10z_1-z_2+16z_3\end{cases}$

3．设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}$，

求 $3AB-2A$ 及 A^TB.

解

$$3AB-2A=3\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$=3\begin{pmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&13&22\\-2&-17&20\\4&29&-2\end{pmatrix}$$

$$A^TB=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{pmatrix}$$

4．计算下列乘积：

(1) $\begin{pmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}$； (2) $(1,2,3)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$； (3) $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}(-1,2)$；

(4) $\begin{pmatrix}2&1&4&0\\1&-1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-1&2\\1&-3&1\\4&0&-2\end{pmatrix}$；

(5) $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$；

(6) $\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&2&-1\\0&0&-2&3\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$.

解

(1) $\begin{pmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\times7+3\times2+1\times1\\1\times7+(-2)\times2+3\times1\\5\times7+7\times2+0\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35\\6\\49\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=(1\times3+2\times2+3\times1)=(10)$

(3) $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times(-1)&2\times2\\1\times(-1)&1\times2\\3\times(-1)&3\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\-1&2\\-3&6\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}2&1&4&0\\1&-1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-1&2\\1&-3&1\\4&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-7&8\\20&-5&-6\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 & a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 & a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3 \end{pmatrix}$

$\times\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

5．设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,　　$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，问：

(1) $AB=BA$ 吗?

(2) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 吗?

(3) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 吗?

解

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,　　$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

则 $AB=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$　　$BA=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$　　$\therefore AB\neq BA$

(2) $(A+B)^2=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 14 & 29 \end{pmatrix}$

但 $A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 15 & 27 \end{pmatrix}$

故 $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$

(3) $(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

而　　$A^2-B^2=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

故　　$(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$

6．举反列说明下列命题是错误的:

（1）若 $A^2=0$,则 $A=0$;

（2）若 $A^2=A$,则 $A=0$ 或 $A=E$;

（3）若 $AX=AY$,且 $A\neq 0$,则 $X=Y$.

解　(1)　取 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　　$A^2=0$,但 $A\neq 0$

(2)　取 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　　$A^2=A$,但 $A\neq 0$ 且 $A\neq E$

(3)　取 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　　$X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$　　$Y=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AX=AY$ 且 $A\neq 0$　但 $X\neq Y$

7．设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$,求 $A^2,A^3,\cdots,A^k$.

解　$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3\lambda & 1 \end{pmatrix}$

利用数学归纳法证明: $A^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\lambda & 1 \end{pmatrix}$

当 $k=1$ 时,显然成立,假设 k 时成立,则 $k+1$ 时

$$A^k=A^kA=\begin{pmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\(k+1)\lambda&1\end{pmatrix}$$

由数学归纳法原理知: $A^k=\begin{pmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{pmatrix}$

8．设 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$,求 A^k.

解　首先观察

$$A^2=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}\lambda^3&3\lambda^2&3\lambda\\0&\lambda^3&3\lambda^2\\0&0&\lambda^3\end{pmatrix}$$

由此推测　$A^k=\begin{pmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}&\frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\0&\lambda^k&k\lambda^{k-1}\\0&0&\lambda^k\end{pmatrix}$　$(k\ge 2)$

用数学归纳法证明:

当 $k=2$ 时,显然成立.

假设 k 时成立，则 $k+1$ 时，

$$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}&\frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\0&\lambda^k&k\lambda^{k-1}\\0&0&\lambda^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^{k+1}&(k+1)\lambda^{k-1}&\frac{(k+1)k}{2}\lambda^{k-1}\\0&\lambda^{k+1}&(k+1)\lambda^{k-1}\\0&0&\lambda^{k+1}\end{pmatrix}$$

由数学归纳法原理知：$A^k=\begin{pmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}&\frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\0&\lambda^k&k\lambda^{k-1}\\0&0&\lambda^k\end{pmatrix}$

9．设 A,B 为 n 阶矩阵，且 A 为对称矩阵，证明 B^TAB 也是对称矩阵.

证明　已知：$A^T=A$

则　$(B^TAB)^T=B^T(B^TA)^T=B^TA^TB=B^TAB$

从而　B^TAB 也是对称矩阵.

10．设 A,B 都是 n 阶对称矩阵，证明 AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

证明　由已知：$A^T=A$　$B^T=B$

充分性：$AB=BA\Rightarrow AB=B^TA^T\Rightarrow AB=(AB)^T$

即 AB 是对称矩阵.

必要性：$(AB)^T=AB\Rightarrow B^TA^T=AB\Rightarrow BA=AB$.

11．求下列矩阵的逆矩阵：

(1)$\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$;　(2)$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$;　(3)$\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-4&1\end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; (5) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

(6) $\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} (a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0)$

解

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad |A| = 1$

$A_{11} = 5, A_{21} = 2 \times (-1), A_{12} = 2 \times (-1), A_{22} = 1$

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$

故 $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $|A| = 1 \neq 0$ 　故 A^{-1} 存在

$A_{11} = \cos\theta \quad A_{21} = \sin\theta \quad A_{12} = -\sin\theta \quad A_{22} = \cos\theta$

从而 $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(3) $|A| = 2$, 　故 A^{-1} 存在

$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 2 \quad A_{31} = 0$

而 $\quad A_{12} = -13 \quad A_{22} = 6 \quad A_{32} = -1$

$A_{13} = -32 \quad A_{23} = 14 \quad A_{33} = -2$

故 $\quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$|A| = 24 \qquad A_{21} = A_{31} = A_{41} = A_{32} = A_{42} = A_{43} = 0$

$A_{11} = 24 \qquad A_{22} = 12 \qquad A_{33} = 8 \qquad A_{44} = 6$

$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -12 \qquad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -12$

$A_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4$

$A_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$

故 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(5) $|A| = 1 \neq 0$ 　故 A^{-1} 存在

而 $\quad A_{11} = 1 \quad A_{21} = -2 \quad A_{31} = 0 \quad A_{41} = 0$

$A_{12} = -2 \quad A_{22} = 5 \quad A_{32} = 0 \quad A_{42} = 0$

$A_{13} = 0 \quad A_{23} = 0 \quad A_{33} = 2 \quad A_{43} = -3$

$$A_{14}=0 \quad A_{24}=0 \quad A_{34}=-5 \quad A_{44}=8$$

从而 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&2&-3\\0&0&-5&8\end{pmatrix}$

(6) $A=\begin{pmatrix}a_1&&&0\\&a_2&&\\&&\ddots&\\0&&&a_n\end{pmatrix}$

由对角矩阵的性质知 $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1}&&&0\\&\frac{1}{a_2}&&\\&&\ddots&\\0&&&\frac{1}{a_n}\end{pmatrix}$

12．解下列矩阵方程：

(1) $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$； (2) $X\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}$；

(4) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}$.

解

(1) $X=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-23\\0&8\end{pmatrix}$

(2) $X=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&3&-2\\-3&3&0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-2&2&1\\-\frac{8}{3}&5&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

(3) $X=\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}2&-4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}6&6\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}$$

(4) $X=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&-4\\1&0&-2\end{pmatrix}$$

13．利用逆矩阵解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1,\\2x_1+2x_2+5x_3=2,\\3x_1+5x_2+x_3=3;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1-x_2-x_3=2,\\2x_1-x_2-3x_3=1,\\3x_1+2x_2-5x_3=0.\end{cases}$

解 (1) 方程组可表示为 $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&5\\3&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

故 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&5\\3&5&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

从而有 $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

(2) 方程组可表示为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

故 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

故有 $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

14． 设 $A^k = O$（k 为正整数),证明

$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.

证明　一方面， $E = (E - A)^{-1}(E - A)$

另一方面，由 $A^k = O$ 有

$$E = (E - A) + (A - A^2) + A^2 - \cdots - A^{k-1} + (A^{k-1} - A^k)$$

$$= (E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})(E - A)$$

故 $(E - A)^{-1}(E - A) = (E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})(E - A)$

两端同时右乘 $(E - A)^{-1}$

就有 $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$

15． 设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = O$,证明 A 及 $A + 2E$ 都可逆,并求 A^{-1} 及 $(A + 2E)^{-1}$.

证明　由 $A^2 - A - 2E = O$ 得 $A^2 - A = 2E$

两端同时取行列式: $|A^2 - A| = 2$

即 $|A||A - E| = 2$,故 $|A| \neq 0$

所以 A 可逆,而 $A + 2E = A^2$

$|A + 2E| = |A^2| = |A|^2 \neq 0$　　故 $A + 2E$ 也可逆.

由 $A^2 - A - 2E = O \Rightarrow A(A - E) = 2E$

$\Rightarrow A^{-1}A(A - E) = 2A^{-1}E \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(A - E)$

又由 $A^2 - A - 2E = O \Rightarrow (A + 2E)A - 3(A + 2E) = -4E$

$\Rightarrow (A + 2E)(A - 3E) = -4E$

$\therefore (A + 2E)^{-1}(A + 2E)(A - 3E) = -4(A + 2E)^{-1}$

$\therefore (A + 2E)^{-1} = \frac{1}{4}(3E - A)$

16． 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $AB = A + 2B$,求 B.

解　由 $AB = A + 2B$ 可得 $(A - 2E)B = A$

故 $B = (A - 2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

17．设 $P^{-1}AP=\Lambda$,其中 $P=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,$\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$,求 A^{11}.

解　$P^{-1}AP=\Lambda$ 故 $A=P\Lambda P^{-1}$ 所以 $A^{11}=P\Lambda^{11}P^{-1}$

$|P|=3$　$P^*=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}$　$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

而　$\Lambda^{11}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}^{11}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2^{11}\end{pmatrix}$

故 $A^{11}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2^{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2731 & 2732\\ -683 & -684\end{pmatrix}$

18．设 m 次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$,记

$$f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$$

$f(A)$ 称为方阵 A 的 m 次多项式.

(1)设 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$,证明：$\Lambda^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0\\ 0 & \lambda_2^k\end{pmatrix}$,$f(\Lambda)=\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & 0\\ 0 & f(\lambda_2)\end{pmatrix}$;

(2)设 $A=P\Lambda P^{-1}$,证明：$A^k=P\Lambda^kP^{-1}$,$f(A)=Pf(\Lambda)P^{-1}$.

证明

(1)　i)利用数学归纳法.当 $k=2$ 时

$$\Lambda^2=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & 0\\ 0 & \lambda_2^2\end{pmatrix}$$

命题成立,假设 k 时成立,则 $k+1$ 时

$$\Lambda^{k+1}=\Lambda^k\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0\\ 0 & \lambda_2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1^{k+1} & 0\\ 0 & \lambda_2^{k+1}\end{pmatrix}$$

故命题成立.

ii)左边 $=f(\Lambda)=a_0E+a_1\Lambda+a_2\Lambda^2+\cdots+a_m\Lambda^m$

$$=a_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+a_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}+\cdots+a_m\begin{pmatrix}\lambda_1^m & 0\\ 0 & \lambda_2^m\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_0+a_1\lambda_1+a_2\lambda_1^2+\cdots+a_m\lambda_1^m & 0\\ 0 & a_0+a_1\lambda_2+a_2\lambda_2^2+\cdots+a_m\lambda_2^m\end{pmatrix}$$

$=\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & 0\\ 0 & f(\lambda_2)\end{pmatrix}$=右边

(2)　i)　利用数学归纳法.当 $k=2$ 时

$A^2=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^2P^{-1}$ 成立

假设 k 时成立,则 $k+1$ 时

$A^{k+1}=A^k\cdot A=P\Lambda^kP^{-1}P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^{k+1}P^{-1}$ 成立,故命题成立,

即　$A^k=P\Lambda^kP^{-1}$

ii)　证明

右边 $=Pf(\Lambda)P^{-1}$

$=P(a_0E+a_1\Lambda+a_2\Lambda^2+\cdots+a_m\Lambda^m)P^{-1}$

$=a_0PEP^{-1}+a_1P\Lambda P^{-1}+a_2P\Lambda^2P^{-1}+\cdots+a_mP\Lambda^mP^{-1}$

$=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m=f(A)$=左边

19．设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^*，证明：

(1)　若 $|A|=0$,则 $|A^*|=0$;

(2)　$|A^*|=|A|^{n-1}$.

证明

(1)　用反证法证明．假设 $|A^*|\neq 0$ 则有 $A^*(A^*)^{-1}=E$

由此得 $A=AA^*(A^*)^{-1}=|A|E(A^*)^{-1}=O\ \therefore\ A^*=O$

这与 $|A^*|\neq 0$ 矛盾，故当 $|A|=0$ 时

有 $|A^*|=0$

(2)　由于 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$，则 $AA^*=|A|E$

取行列式得到：$|A||A^*|=|A|^n$

若 $|A|\neq 0$　则 $|A^*|=|A|^{n-1}$

若 $|A|=0$ 由(1)知 $|A^*|=0$ 此时命题也成立

故有 $|A^*|=|A|^{n-1}$

20．取 $A=B=-C=D=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,验证 $\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix}|A|&|B|\\|C|&|D|\end{vmatrix}$

检验: $\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{vmatrix}=\left|\begin{array}{cc:cc}2&0&0&0\\0&2&0&0\\ \hdashline -1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{array}\right|=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=4$

而　$\begin{vmatrix}|A|&|B|\\|C|&|D|\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$

故　$\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix}|A|&|B|\\|C|&|D|\end{vmatrix}$

21．设 $A=\begin{pmatrix}3&4&&\\4&-3&&O\\&&2&0\\O&&2&2\end{pmatrix}$,求 $|A^8|$ 及 A^4

解　$A=\begin{pmatrix}3&4&&\\4&-3&&O\\&&2&0\\O&&2&2\end{pmatrix}$，令 $A_1=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$　　$A_2=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$

则 $A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$

故 $A^8=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}^8=\begin{pmatrix}A_1^8&O\\O&A_2^8\end{pmatrix}$

$|A^8|=|A_1^8||A_2^8|=|A_1|^8|A_2|^8=10^{16}$

$$A^4=\begin{pmatrix}A_1^4&O\\O&A_2^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^4&0&&\\0&5^4&&O\\&&2^4&0\\O&&2^6&2^4\end{pmatrix}$$

22．设 n 阶矩阵 A 及 s 阶矩阵 B 都可逆,求 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}$.

解　将 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}$ 分块为 $\begin{pmatrix}C_1&C_2\\C_3&C_4\end{pmatrix}$

其中　C_1 为 $s\times n$ 矩阵，C_2 为 $s\times s$ 矩阵

　　C_3 为 $n\times n$ 矩阵，C_4 为 $n\times s$ 矩阵

则 $\begin{pmatrix}O&A_{n\times n}\\B_{s\times s}&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1&C_2\\C_3&C_4\end{pmatrix}=E=\begin{pmatrix}E_n&O\\O&E_s\end{pmatrix}$

由此得到 $\begin{cases}AC_3=E_n\Rightarrow C_3=A^{-1}\\AC_4=O\Rightarrow C_4=O\quad(A^{-1}\text{存在})\\BC_1=O\Rightarrow C_1=O\quad(B^{-1}\text{存在})\\BC_2=E_s\Rightarrow C_2=B^{-1}\end{cases}$

故 $$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

1．把下列矩阵化为行最简形矩阵：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

解 (1) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \underset{r_3+(-3)r_1}{\overset{r_2+(-2)r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3\div(-2)}{\overset{r_2\div(-1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_3-r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3\div 3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{r_2+3r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_1+r_3}{\overset{r_1+(-2)r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \underset{r_3+(-2)r_1}{\overset{r_2\times 2+(-3)r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_1+3r_2}{\overset{r_3+r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1\div 2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\3&-3&5&-4&1\\2&-2&3&-2&0\\3&-3&4&-2&-1\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-3r_1\\r_3-2r_1\\r_4-3r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\0&0&-4&8&-8\\0&0&-3&6&-6\\0&0&-5&10&-10\end{pmatrix}$

$\overset{\substack{r_2\div(-4)\\r_3\div(-3)\\r_4\div(-5)}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\0&0&1&-2&2\\0&0&1&-2&2\\0&0&1&-2&2\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1-3r_2\\r_3-r_2\\r_4-r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0&2&-3\\0&0&1&-2&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}2&3&1&-3&-7\\1&2&0&-2&-4\\3&-2&8&3&0\\2&-3&7&4&3\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1-2r_2\\r_3-3r_2\\r_4-2r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}0&-1&1&1&1\\1&2&0&-2&-4\\0&-8&8&9&12\\0&-7&7&8&11\end{pmatrix}$

$\overset{\substack{r_2+2r_1\\r_3-8r_1\\r_4-7r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}0&-1&1&1&1\\1&0&2&0&-2\\0&0&0&1&4\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\r_2\times(-1)\\r_4-r_3}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&-1&-1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\overset{r_2+r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

2. 在秩是r的矩阵中,有没有等于 0 的$r-1$阶子式?有没有等于 0 的r阶子式?

解　在秩是r的矩阵中,可能存在等于 0 的$r-1$阶子式,也可能存在等于 0 的r阶子式.

例如，$\alpha=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$R(\alpha)=3$同时存在等于 0 的 3 阶子式和 2 阶子式.

3． 从矩阵A中划去一行得到矩阵B,问A,B的秩的关系怎样?

解　$R(A)\ge R(B)$

设$R(B)=r$，且B的某个r阶子式$D_r\ne 0$.矩阵B是由矩阵A划去一行得

到的，所以在A中能找到与D_r相同的r阶子式$\overline{D_r}$，由于$\overline{D_r}=D_r\ne 0$，故而$R(A)\ge R(B)$.

4． 求作一个秩是 4 的方阵,它的两个行向量是$(1,0,1,0,0)$,$(1,-1,0,0,0)$

解　设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为五维向量,且$\alpha_1=(1,0,1,0,0)$，

$\alpha_2=(1,-1,0,0,0)$,则所求方阵可为$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\end{pmatrix}$,秩为 4,不妨设

$\begin{cases}\alpha_3=(0,0,0,x_4,0)\\\alpha_4=(0,0,0,0,x_5)\\\alpha_5=(0,0,0,0,0)\end{cases}$取$x_4=x_5=1$

故满足条件的一个方阵为$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&-1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

5． 求下列矩阵的秩,并求一个最高阶非零子式：

(1) $\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix}3&2&-1&-3&-1\\2&-1&3&1&-3\\7&0&5&-1&-8\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}2&1&8&3&7\\2&-3&0&7&-5\\3&-2&5&8&0\\1&0&3&2&0\end{pmatrix}$.

解 (1) $\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\3&1&0&2\\1&3&-4&4\end{pmatrix}$

$\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&4&-6&5\\0&4&-6&5\end{pmatrix}\overset{r_3-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&4&-6&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$秩为2

二阶子式$\begin{vmatrix}3&1\\1&-1\end{vmatrix}=-4$.

(2) $\begin{pmatrix}3&2&-1&-3&-2\\2&-1&3&1&-3\\7&0&5&-1&-8\end{pmatrix}\underset{r_3-7r_1}{\overset{\substack{r_1-r_2\\r_2-2r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&3&-4&-4&1\\0&-7&11&9&-5\\0&-21&33&27&-15\end{pmatrix}$

$\overset{r_3-3r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&-4&-4&1\\0&-7&11&9&-5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$秩为2.

二阶子式$\begin{vmatrix}3&2\\2&-1\end{vmatrix}=-7$.

(3) $\begin{pmatrix}2&1&8&3&7\\2&-3&0&7&-5\\3&-2&5&8&0\\1&0&3&2&0\end{pmatrix}\underset{\substack{r_2-2r_4\\r_3-3r_4}}{\overset{r_1-2r_4}{\sim}}\begin{pmatrix}0&1&2&-1&7\\0&-3&-6&3&-5\\0&-2&-4&2&0\\1&0&3&2&0\end{pmatrix}$

$\underset{r_3+2r_1}{\overset{r_2+3r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}0&1&2&-1&7\\0&0&0&0&16\\0&0&0&0&14\\1&0&3&2&0\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3\div 14\\r_4\div 16\\r_4-r_3}}{\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\r_4\leftrightarrow r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&3&2&0\\0&1&2&-1&7\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$秩为 3

三阶子式$\begin{vmatrix}0&7&-5\\5&8&0\\3&2&0\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}5&8\\3&2\end{vmatrix}=70\neq 0$.

6．求解下列齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3-x_4=0,\\2x_1+x_2+x_3-x_4=0,\\2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\\3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0,\\5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0,\\3x_1+x_2+2x_3-7x_4=0,\\4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0,\\x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0,\\2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0,\\4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0,\\7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0.\end{cases}$

解 (1) 对系数矩阵实施行变换:

$\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\2&1&1&-1\\2&2&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&-1\\0&0&1&-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$即得$\begin{cases}x_1=\frac{4}{3}x_4\\x_2=-3x_4\\x_3=\frac{4}{3}x_4\\x_4=x_4\end{cases}$

故方程组的解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-3\\\frac{4}{3}\\1\end{pmatrix}$

(2) 对系数矩阵实施行变换:

$\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\3&6&-1&-3\\5&10&1&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 即得$\begin{cases}x_1=-2x_2+x_4\\x_2=x_2\\x_3=0\\x_4=x_4\end{cases}$

故方程组的解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

(3) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{即得} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

故方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

(4) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{17} & \frac{13}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{19}{17} & \frac{20}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得 $\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{17}x_3 - \dfrac{13}{17}x_4 \\ x_2 = \dfrac{19}{17}x_3 - \dfrac{20}{17}x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$

故方程组的解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{17} \\ \frac{19}{17} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{17} \\ -\frac{20}{17} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

7．求解下列非齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 10, \\ 11x_1 + 3x_2 = 8; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ x - 2y + 4z = -5, \\ 3x + 8y - 2z = 13, \\ 4x - y + 9z = -6; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 4x + 2y - 2z + w = 2, \\ 2x + y - z - w = 1; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 3x - 2y + z - 3w = 4, \\ x + 4y - 3z + 5w = -2; \end{cases}$

解　(1) 对系数的增广矩阵施行行变换,有

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & -10 & 11 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$R(A) = 2$ 而 $R(B) = 3$,故方程组无解.

(2) 对系数的增广矩阵施行行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得 $\begin{cases} x = -2z - 1 \\ y = z + 2 \\ z = z \end{cases}$ 亦即 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) 对系数的增广矩阵施行行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得 $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}z + \dfrac{1}{2} \\ y = y \\ z = z \\ w = 0 \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) 对系数的增广矩阵施行行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得 $\begin{cases} x = \frac{1}{7}z + \frac{1}{7}w + \frac{6}{7} \\ y = \frac{5}{7}z - \frac{9}{7}w - \frac{5}{7} \\ z = z \\ w = w \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

8．λ 取何值时,非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷多个解?

解 (1) $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \neq 0$,即 $\lambda \neq 1, -2$ 时方程组有唯一解.

(2) $R(A) < R(B)$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$$

由 $(1-\lambda)(2+\lambda) = 0, (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \neq 0$

得 $\lambda = -2$ 时,方程组无解.

(3) $R(A) = R(B) < 3$,由 $(1-\lambda)(2+\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2 = 0$,

得 $\lambda = 1$ 时,方程组有无穷多个解.

9．非齐次线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

当 λ 取何值时有解？并求出它的解.

解 $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{3}(\lambda-1) \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) \end{pmatrix}$

方程组有解，须 $(1-\lambda)(\lambda+2) = 0$ 得 $\lambda = 1, \lambda = -2$

当 $\lambda = 1$ 时,方程组解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

当 $\lambda = -2$ 时,方程组解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

10．设 $\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1, \end{cases}$

问 λ 为何值时,此方程组有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解

时求解.

解 $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 5-\lambda & -\lambda-1 \end{pmatrix}$

$\overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5-\lambda}{2} & -2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \frac{(1-\lambda)(10-\lambda)}{2} & \frac{(1-\lambda)(4-\lambda)}{2} \end{pmatrix}$

当 $|A| \neq 0$,即 $\frac{(1-\lambda)^2(10-\lambda)}{2} \neq 0$ $\therefore \lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 10$ 时，有唯一解.

当 $\frac{(1-\lambda)(10-\lambda)}{2} = 0$ 且 $\frac{(1-\lambda)(4-\lambda)}{2} \neq 0$，即 $\lambda = 10$ 时，无解.

当$\frac{(1-\lambda)(10-\lambda)}{2}=0$且$\frac{(1-\lambda)(4-\lambda)}{2}=0$，即$\lambda=1$时，有无穷多解.

此时，增广矩阵为$\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

原方程组的解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\in R)$

11．试利用矩阵的初等变换，求下列方阵的逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix}3&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}3&-2&0&-1\\0&2&2&1\\1&-2&-3&-2\\0&1&2&1\end{pmatrix}$.

解　（1）$\begin{pmatrix}3&2&1&1&0&0\\3&1&5&0&1&0\\3&2&3&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&2&1&1&0&0\\0&-1&4&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix}3&2&0&\frac{3}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&-1&0&1&1&-2\\0&0&2&-1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&0&0&\frac{7}{2}&2&-\frac{9}{2}\\0&-1&0&1&1&-2\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{7}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{3}{2}\\0&1&0&-1&-1&2\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

故逆矩阵为$\begin{pmatrix}\frac{7}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{3}{2}\\-1&-1&2\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}3&-2&0&-1&1&0&0&0\\0&2&2&1&0&1&0&0\\1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix}1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\\0&4&9&5&1&0&-3&0\\0&2&2&1&0&1&0&0\end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix}1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&1&0&-3&-4\\0&0&-2&-1&0&1&0&-2\end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix}1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&1&0&-3&-4\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix}1&-2&0&0&-1&-1&-2&-2\\0&1&0&0&0&1`&0&-1\\0&0&1&0&-1&-1&3&6\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&1&-2&-4\\0&1&0&0&0&1&0&-1\\0&0&1&0&-1&-1&3&6\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{pmatrix}$

故逆矩阵为$\begin{pmatrix}1&1&-2&-4\\0&1&0&-1\\-1&-1&3&6\\2&1&-6&-10\end{pmatrix}$

12．(1)　设$A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\\3&-1\end{pmatrix}$,求$X$使$AX=B$；

(2) 设 $A=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-3&1\end{pmatrix}$,求 X 使 $XA=B$.

解

(1) $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}4&1&-2&1&-3\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{array}\right)\overset{\text{初等行变换}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&10&2\\0&1&0&-15&-3\\0&0&1&12&4\end{array}\right)$

$\therefore X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}10&2\\-15&-3\\12&4\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}A\\ \hline B\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\\ \hline 1&2&3\\2&-3&1\end{array}\right)\overset{\text{初等列变换}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\ \hline 2&-1&-1\\-4&7&4\end{array}\right)$

$\therefore X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-4&7&4\end{pmatrix}$.

第四章　向量组的线性相关性

1．设 $v_1=(1,\ 1,\ 0)^T, v_2=(0,\ 1,\ 1)^T, v_3=(3,\ 4,\ 0)^T$,

求 v_1-v_2 及 $3v_1+2v_2-v_3$.

解　$v_1-v_2=(1,\ 1,\ 0)^T-(0,\ 1,\ 1)^T$

$=(1-0,\ 1-1,\ 0-1)^T=(1,\ 0,\ -1)^T$

$3v_1+2v_2-v_3=3(1,\ 1,\ 0)^T+2(0,\ 1,\ 1)^T-(3,\ 4,\ 0)^T$

$=(3\times1+2\times0-3,\ 3\times1+2\times1-4,\ 3\times0+2\times1-0)^T$

$=(0,\ 1,\ 2)^T$

2．设 $3(a_1-a)+2(a_2+a)=5(a_3+a)$ 其中 $a_1=(2,5,1,3)^T$,

$a_2=(10,1,5,10)^T, a_3=(4,1,-1,1)^T$,求 a

解　由 $3(a_1-a)+2(a_2+a)=5(a_3+a)$ 整理得

$a=\frac{1}{6}(3a_1+2a_2-5a_3)=\frac{1}{6}[3(2,5,1,3)^T+2(10,1,5,10)^T-5(4,1,-1,1)^T]$

$=(1,2,3,4)^T$

3．举例说明下列各命题是错误的:

(1)若向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是线性相关的,则 a_1 可由 $a_2,\cdots a_m$,线性表示.

(2)若有不全为 0 的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使

$\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_ma_m+\lambda_1b_1+\cdots+\lambda_mb_m=0$

成立,则 $a_1,\cdots,a_m$ 线性相关, $b_1,\cdots,b_m$ 亦线性相关.

(3)若只有当 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 全为 0 时,等式

$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m + \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m = 0$

才能成立,则 $a_1, \cdots, a_m$ 线性无关，$b_1, \cdots, b_m$ 亦线性无关.

(4)若 $a_1, \cdots, a_m$ 线性相关，$b_1, \cdots, b_m$ 亦线性相关,则有不全为 0 的数,

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使 $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m = 0, \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m = 0$

同时成立.

解　(1) 设 $a_1 = e_1 = (1,0,0,\cdots,0)$

$a_2 = a_3 = \cdots = a_m = 0$

满足 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性相关,但 a_1 不能由 $a_2, \cdots, a_m$,线性表示.

(2) 有不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m + \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m = 0$$

原式可化为

$\lambda_1 (a_1 + b_1) + \cdots + \lambda_m (a_m + b_m) = 0$

取 $a_1 = e_1 = -b_1, a_2 = e_2 = -b_2, \cdots, a_m = e_m = -b_m$

其中 $e_1, \cdots, e_m$ 为单位向量,则上式成立,而

$$a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_m \text{ 均线性相关}$$

(3) 由 $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m + \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m = 0$ (仅当 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$)

$\Rightarrow a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_m + b_m$ 线性无关

取 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$

取 $b_1, \cdots, b_m$ 为线性无关组

满足以上条件,但不能说是 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性无关的.

(4) $a_1 = (1,0)^T \quad a_2 = (2,0)^T \quad b_1 = (0,3)^T \quad b_2 = (0,4)^T$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\dfrac{3}{4}\lambda_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ 与题设矛盾.}$$

4．设 $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_2 + a_3, b_3 = a_3 + a_4, b_4 = a_4 + a_1$,证明向量组 b_1, b_2, b_3, b_4 线性相关.

证明　设有 x_1, x_2, x_3, x_4 使得

$x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 + x_4 b_4 = 0$ 则

$x_1(a_1 + a_2) + x_2(a_2 + a_3) + x_3(a_3 + a_4) + x_4(a_4 + a_1) = 0$

$(x_1 + x_4)a_1 + (x_1 + x_2)a_2 + (x_2 + x_3)a_3 + (x_3 + x_4)a_4 = 0$

(1) 若 a_1, a_2, a_3, a_4 线性相关,则存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3, k_4,

$k_1 = x_1 + x_4; k_2 = x_1 + x_2; k_3 = x_2 + x_3; k_4 = x_3 + x_4;$

由 k_1, k_2, k_3, k_4 不全为零,知 x_1, x_2, x_3, x_4 不全为零,即 b_1, b_2, b_3, b_4 线性相关.

(2) 若 a_1, a_2, a_3, a_4 线性无关,则 $\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$

由 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 知此齐次方程存在非零解

则 b_1, b_2, b_3, b_4 线性相关.

综合得证.

5．设 $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \cdots, b_r = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$,且向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关,证明向量组 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 线性无关.

证明　设 $k_1 b_1 + k_2 b_2 + \cdots + k_r b_r = 0$ 则

$$(k_1 + \cdots + k_r)a_1 + (k_2 + \cdots + k_r)a_2 + \cdots + (k_p + \cdots + k_r)a_p + \cdots + k_r a_r = 0$$

因向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关,故

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \cdots + k_r = 0 \\ \qquad k_2 + \cdots + k_r = 0 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad k_r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

因为 $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ 故方程组只有零解

则 $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$ 所以 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 线性无关

6．利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组:

(1) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

解　(1) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_3 - 3r_1 \\ r_4 - r_1}}{\overset{r_2 - 3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$\underset{r_3 - r_2}{\overset{r_4 - r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以第 1、2、3 列构成一个最大无关组.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \underset{r_4 - r_1}{\overset{r_3 - 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\underset{r_3 \leftrightarrow r_4}{\overset{r_3 + r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以第 1、2、3 列构成一个最大无关组.

7．求下列向量组的秩,并求一个最大无关组:

(1)　$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 100 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$;

(2)　$a_1^T = (1,2,1,3), a_2^T = (4,-1,-5,-6), a_3^T = (1,-3,-4,-7)$.

解　(1)　$-2a_1 = a_3 \Rightarrow a_1, a_3$ 线性相关.

由 $\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 9 & 100 & 10 & 4 \\ -2 & -4 & 2 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 82 & 19 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

秩为 2,一组最大线性无关组为 a_1, a_2.

(2) $\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

秩为 2,最大线性无关组为 a_1^T, a_2^T.

8. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是一组 n 维向量,已知 n 维单位坐标向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 能由它们线性表示,证明 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性无关.

证明　n 维单位向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性无关

不妨设:

$$e_1 = k_{11}a_1 + k_{12}a_2 + \cdots + k_{1n}a_n$$
$$e_2 = k_{21}a_1 + k_{22}a_2 + \cdots + k_{2n}a_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n = k_{n1}a_1 + k_{n2}a_2 + \cdots + k_{nn}a_n$$

所以 $\begin{pmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}$

两边取行列式，得

$\begin{vmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{vmatrix}$ 由 $\begin{vmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{vmatrix} \neq 0$

即 n 维向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 所构成矩阵的秩为 n

故 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性无关.

9．设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是一组 n 维向量,证明它们线性无关的充分必要条件是：任一 n 维向量都可由它们线性表示.

证明　　设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为一组 n 维单位向量，对于任意 n 维向量

$a = (k_1, k_2, \cdots, k_n)^T$ 则有 $a = \varepsilon_1 k_1 + \varepsilon_2 k_2 + \cdots + \varepsilon_n k_n$ 即任一 n 维向量都可由单位向量线性表示.

$\xRightarrow{\text{必要性}}$ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性无关，且 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 能由单位向量线性表示，即

$$\alpha_1 = k_{11}\varepsilon_1 + k_{12}\varepsilon_2 + \cdots + k_{1n}\varepsilon_n$$
$$\alpha_2 = k_{21}\varepsilon_1 + k_{22}\varepsilon_2 + \cdots + k_{2n}\varepsilon_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_n = k_{n1}\varepsilon_1 + k_{n2}\varepsilon_2 + \cdots + k_{nn}\varepsilon_n$$

故 $\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix}$

两边取行列式，得

$$\begin{vmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{vmatrix}$$

由 $\begin{vmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

令 $A_{n\times n}=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix}$ 则

由 $\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{pmatrix}$

即 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 都能由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性表示，因为任一 n 维向量能由单位向量线性表示，故任一 n 维向量都可以由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性表示.

$\overset{\text{充分性}}{\Leftarrow}$ 已知任一 n 维向量都可由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性表示，则单位向量组：$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 可由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性表示，由 8 题知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性无关.

10．设向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_s$ 的秩为 r_1，向量组 $B:b_1,b_2,\cdots,b_t$ 的秩 r_2 向量组 C：$a_1,a_2,\cdots,a_s,b_1,b_2,\cdots,b_r$ 的秩 r_3，证明

$$\max\{r_1,r_2\}\le r_3\le r_1+r_2$$

证明　设 A,B,C 的最大线性无关组分别为 A',B',C'，含有的向量个数(秩)分别为 r_1,r_2,r_2，则 A,B,C 分别与 A',B',C' 等价，易知 A,B 均可由 C 线性表示，则秩(C)≥秩(A)，秩(C)≥秩(B)，即 $\max\{r_1,r_2\}\le r_3$

设 A' 与 B' 中的向量共同构成向量组 D，则 A,B 均可由 D 线性表示，

即 C 可由 D 线性表示，从而 C' 可由 D 线性表示，所以秩(C')≥秩(D)，D 为 r_1+r_2 阶矩阵，所以秩(D)≤ r_1+r_2 即 $r_3\le r_1+r_2$.

11.证明 $R(A+B)\le R(A)+R(B)$.

证明：设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$　$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$

且 A,B 行向量组的最大无关组分别为 $\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_r^T$　$\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_s^T$

显然，存在矩阵 A',B'，使得

$$\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}=A'\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_s^T \end{pmatrix},\begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{pmatrix}=B'\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_s^T \end{pmatrix}$$

$$\therefore A+B=\begin{pmatrix} a_1^T+b_1^T \\ a_2^T+b_2^T \\ \vdots \\ a_n^T+b_n^T \end{pmatrix}=A'\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_s^T \end{pmatrix}+B'\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_s^T \end{pmatrix}$$

因此　$R(A+B)\le R(A)+R(B)$

12．设向量组 $B:b_1,\cdots,b_r$ 能由向量组 $A:a_1,\cdots,a_s$ 线性表示为

$$(b_1,\cdots,b_r)=(a_1,\cdots,a_s)K,$$

其中 K 为 $s\times r$ 矩阵，且 A 组线性无关。证明 B 组线性无关的充分必要条

件是矩阵 K 的秩 $R(K)=r$.

证明　$\Rightarrow$ 若 B 组线性无关

令 $B=(b_1,\cdots,b_r)$　$A=(a_1,\cdots,a_s)$ 则有 $B=AK$

由定理知 $R(B)=R(AK)\le\min\{R(A),R(K)\}\le R(K)$

由 B 组：$b_1,b_2,\cdots,b_r$ 线性无关知 $R(B)=r$，故 $R(K)\ge r$.

又知 K 为 $r\times s$ 阶矩阵则 $R(K)\le\min\{r,s\}$

由于向量组$B: b_1, b_2, \cdots, b_r$能由向量组$A: a_1, a_2, \cdots, a_s$线性表示,则

$r \le s$

$\therefore \min\{r, s\} = r$

综上所述知$r \le R(K) \le r$即$R(K) = r$.

$\Leftarrow$若$R(k) = r$

令$x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_r b_r = 0$,其中$x_i$为实数$i = 1,2,\cdots,r$

则有$(b_1, b_2, \cdots, b_r)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = 0$

又$(b_1, \cdots, b_r) = (a_1, \cdots, a_s)K$,则$(a_1, \cdots, a_s)K\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = 0$

由于$a_1, a_2, \cdots, a_s$线性无关,所以$K \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = 0$

即
$$\begin{cases} k_{11}x_1 + k_{21}x_2 + \cdots + k_{r1}x_r = 0 \\ k_{12}x_1 + k_{22}x_2 + \cdots + k_{r2}x_r = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{1r}x_1 + k_{2r}x_2 + \cdots + k_{rr}x_r = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{1s}x_1 + k_{2s}x_2 + \cdots + k_{rs}x_r = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

由于$R(K) = r$则(1)式等价于下列方程组:

$$\begin{cases} k_{11}x_1 + k_{21}x_2 + \cdots + k_{r1}x_r = 0 \\ k_{12}x_1 + k_{22}x_2 + \cdots + k_{r2}x_r = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{1r}x_1 + k_{2r}x_2 + \cdots + k_{rr}x_r = 0 \end{cases}$$

由于$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{r1} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{1r} & k_{2r} & \cdots & k_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$

所以方程组只有零解$x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 0$.所以$b_1, b_2, \cdots, b_r$线性无关,

证毕.

13．设

$V_1 = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_1, \cdots, x_n \in R满足x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$

$V_2 = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_1, \cdots, x_n \in R满足x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}$

问V_1, V_2是不是向量空间？为什么？

证明　集合V成为向量空间只需满足条件:

若$\alpha \in V, \beta \in V$，则$\alpha + \beta \in V$

若$\alpha \in V, \lambda \in R$，则$\lambda\alpha \in V$

V_1是向量空间，因为:

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^T \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0$

$\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)^T \quad \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = 0$

$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_n + \beta_n)^T$

且$(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)$

$= (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = 0$　故$\alpha + \beta \in V_1$

$\lambda \in R, \lambda\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$

$\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + \cdots + \lambda\alpha_n = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = \lambda \cdot 0 = 0$故$\lambda\alpha \in V_1$

V_2不是向量空间，因为:

$(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+(\alpha_n+\beta_n)$

$=(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)+(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)=1+1=2$ 故 $\alpha+\beta\notin V_2$

$\lambda\in R,\lambda\alpha=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\cdots,\lambda\alpha_n)$

$\lambda\alpha_1+\lambda\alpha_2+\cdots+\lambda\alpha_n=\lambda(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)=\lambda\cdot 1=\lambda$

故当 $\lambda\neq 1$ 时，$\lambda\alpha\notin V_2$

14．试证:由 $a_1=(0,1,1)^T,a_2=(1,0,1)^T,a_3=(1,1,0)^T$ 所生成的向量空间

就

是 R^3.

证明　设 $A=(a_1,a_2,a_3)$

$$|A|=|a_1,a_2,a_3|\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=(-1)^{-1}\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

于是 $R(A)=3$ 故线性无关.由于 a_1,a_2,a_3 均为三维,且秩为 3,

所以 a_1,a_2,a_3 为此三维空间的一组基,故由 a_1,a_2,a_3 所生成的向量空间

就是 R^3.

15．由 $a_1=(1,1,0,0)^T,a_2=(1,0,1,1)^T$,所生成的向量空间记作 V_1,由

$b_1=(2,-1,3,3)^T,a_2=(0,1,-1,-1)^T$,所生成的向量空间记作 V_2,试证

$V_1=V_2$.

证明　设 $V_1=\{x=k_1a_1+k_2a_2|k_1,k_1\in R\}$

$V_2=\{x=\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2|\lambda_1,\lambda_1\in R\}$

任取 V_1 中一向量,可写成 $k_1a_1+k_2a_2$,

要证 $k_1a_1+k_2a_2\in V_2$,从而得 $V_1\subseteq V_2$

由 $k_1a_1+k_2a_2=\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2$ 得

$$\begin{cases}k_1+k_2=2\lambda_1\\k_1=\lambda_2-\lambda_1\\k_2=3\lambda_1-\lambda_2\\k_2=3\lambda_1-\lambda_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\lambda_1=k_1+k_2\\-\lambda_1+\lambda_2=k_1\end{cases}$$

上式中,把 k_1,k_2 看成已知数,把 λ_1,λ_2 看成未知数

$$D_1=\begin{vmatrix}2&0\\-1&1\end{vmatrix}=2\neq 0\qquad\Rightarrow\lambda_1,\lambda_2\text{有唯一解}$$

$\therefore V_1\subseteq V_2$

同理可证: $V_2\subseteq V_1$ $(\because D_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}\neq 0)$

故 $V_1=V_2$

16．验证 $a_1=(1,-1,0)^T,a_2=(2,1,3)^T,a_3=(3,1,2)^T$ 为 R^3 的一个基,并把

$v_1=(5,0,7)^T,v_2=(-9,-8,-13)^T$ 用这个基线性表示.

解　由于 $|a_1,a_2,a_3|=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&1&1\\0&3&2\end{vmatrix}=-6\neq 0$

即矩阵 (a_1,a_2,a_3) 的秩为 3

故 a_1,a_2,a_3 线性无关，则为 R^3 的一个基.

设 $v_1=k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3$，则

$$\begin{cases}k_1+2k_2+3k_3=5\\-k_1+k_2+k_3=0\\3k_2+2k_3=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=2\\k_2=3\\k_3=-1\end{cases}$$

故$v_1=2a_1+3a_2-a_3$

设$v_2=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\lambda_3a_3$，则

$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=-9\\-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-8\\3\lambda_2+2\lambda_3=-13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=3\\k_2=-3\\k_3=-2\end{cases}$$

故线性表示为

$v_2=3a_1-3a_2-2a_3$

17．求下列齐次线性方程组的基础解系：

(1)$\begin{cases}x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0\\2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0\\3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0\end{cases}$ (2)$\begin{cases}2x_1-3x_2-2x_3+x_4=0\\3x_1+5x_2+4x_3-2x_4=0\\8x_1+7x_2+6x_3-3x_4=0\end{cases}$

(3) $nx_1+(n-1)x_2+\cdots 2x_{n-1}+x_n=0$.

解 (1) $A=\begin{pmatrix}1&-8&10&2\\2&4&5&-1\\3&8&6&-2\end{pmatrix}\overset{\text{初等行变换}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&4&0\\0&1&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

所以原方程组等价于$\begin{cases}x_1=-4x_3\\x_2=\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4\end{cases}$

取$x_3=1,x_4=-3$得$x_1=-4,x_2=0$

取$x_3=0,x_4=4$得$x_1=0,x_2=1$

因此基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-4\\0\\1\\-3\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\4\end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix}2&-3&-2&1\\3&5&4&-2\\8&7&6&-3\end{pmatrix}\overset{\text{初等行变换}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&\frac{2}{19}&-\frac{1}{19}\\0&1&\frac{14}{19}&-\frac{7}{19}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

所以原方程组等价于$\begin{cases}x_1=-\frac{2}{19}x_3+\frac{1}{19}x_4\\x_2=-\frac{14}{19}x_3+\frac{7}{19}x_4\end{cases}$

取$x_3=1,x_4=2$得$x_1=0,x_2=0$

取$x_3=0,x_4=19$得$x_1=1,x_2=7$

因此基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\7\\0\\19\end{pmatrix}$

(3)原方程组即为

$x_n=-nx_1-(n-1)x_2-\cdots-2x_{n-1}$

取$x_1=1,x_2=x_3=\cdots=x_{n-1}=0$得$x_n=-n$

取$x_2=1,x_1=x_3=x_4=\cdots=x_{n-1}=0$得$x_n=-(n-1)=-n+1$

……

取$x_{n-1}=1,x_1=x_2=\cdots=x_{n-2}=0$得$x_n=-2$

所以基础解系为$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1})=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\\-n&-n+1&\cdots&-2\end{pmatrix}$

18．设 $A=\begin{pmatrix}2&-2&1&3\\9&-5&2&8\end{pmatrix}$，求一个 4×2 矩阵 B，使 $AB=0$，且 $R(B)=2$．

解　由于 $R(B)=2$，所以可设 $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$ 则由

$$AB=\begin{pmatrix}2&-2&1&3\\9&-5&2&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$可得

$$\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&3\\2&0&8&0\\0&2&0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-9\\5\end{pmatrix}$$,解此非齐次线性方程组可得唯一解

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{11}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$　故所求矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\\frac{11}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

19．求一个齐次线性方程组,使它的基础解系为

$\xi_1=(0,1,2,3)^T,\xi_1=(3,2,1,0)^T$．

解　显然原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix},(k_1,k_2\in R)$$

即 $\begin{cases}x_1=3k_2\\x_2=k_1+2k_2\\x_3=2k_1+k_2\\x_4=3k_1\end{cases}$ 消去 k_1,k_2 得

$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_4=0\\x_1-3x_3+2x_4=0\end{cases}$ 此即所求的齐次线性方程组.

20．设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知 η_1,η_2,η_3 是它的三个解向量．且

$$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\quad \eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

求该方程组的通解．

解　由于矩阵的秩为 3，$n-r=4-3=1$，一维．故其对应的齐次线性方程组的基础解系含有一个向量，且由于 η_1,η_2,η_3 均为方程组的解，由

非齐次线性方程组解的结构性质得

$$2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)=\underset{(\text{齐次解})}{(\eta_1-\eta_2)}+\underset{(\text{齐次解})}{(\eta_1-\eta_2)}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}=\text{齐次解}$$

为其基础解系向量，故此方程组的通解：$x=k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$，$(k\in R)$

21．设 A,B 都是 n 阶方阵，且 $AB=0$，证明 $R(A)+R(B)\le n$.

证明　设 A 的秩为 r_1，B 的秩为 r_2，则由 $AB=0$ 知，B 的每一列向量都是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解向量.

(1)　当 $r_1=n$ 时, 该齐次线性方程组只有零解, 故此时 $B=0$,

$r_1=n$，$r_2=0$，$r_1+r_2=n$ 结论成立.

(2)　当 $r_1<n$ 时, 该齐次方程组的基础解系中含有 $n-r_1$ 个向量, 从而 B 的列向量组的秩 $\le n-r_1$, 即 $r_2\le n-r_1$, 此时 $r_2\le n-r_1$, 结论成立。

综上, $R(A)+R(B)\le n$.

22．设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A,E$ 为 n 阶单位矩阵,证明

$R(A)+R(A-E)=n$

(提示:利用题 11 及题 21 的结论)

证明　$\because A(A-E)=A^2-A=A-A=0$

所以由 21 题所证可知 $R(A)+R(A-E)\le n$

又　$\because R(A-E)=R(E-A)$

由 11 题所证可知

$R(A)+R(A-E)=R(A)+R(E-A)\ge R(A+E-A)=R(E)=n$

由此 $R(A)+R(A-E)=n$.

23．求下列非齐次方程组的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解系：

(1) $\begin{cases}x_1+x_2=5,\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=1,\\5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11,\\5x_1+3x_2+6x_3-x_4=-1,\\2x_1+4x_2+2x_3+x_4=-6.\end{cases}$

解　(1) $B=\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\2&1&1&2&1\\5&3&2&2&3\end{pmatrix}\overset{\text{初等行变换}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&0&-8\\0&1&-1&0&13\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}$

$\therefore \eta=\begin{pmatrix}-8\\13\\0\\2\end{pmatrix},\xi=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

(2) $B=\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\5&3&6&-1&-1\\2&4&2&1&-6\end{pmatrix}\overset{\text{初等行变换}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&\frac{9}{7}&-\frac{1}{2}&1\\0&1&-\frac{1}{7}&\frac{1}{2}&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore \eta=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix},\xi_1=\begin{pmatrix}-9\\1\\7\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$

24. 设η^*是非齐次线性方程组$Ax=b$的一个解, $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$是对应的齐次线性方程组的一个基础解系, 证明:

(1) $\eta^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关;

(2) $\eta^*,\eta^*+\xi_1,\cdots,\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关。

证明　(1) 反证法, 假设$\eta^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性相关, 则存在着不全为 0 的数$C_0,C_1,\cdots,C_{n-r}$使得下式成立:

$$C_0\eta^*+C_1\xi_1+\cdots+C_{n-r}\xi_{n-r}=0 \qquad (1)$$

其中, $C_0\neq 0$否则, $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性相关, 而与基础解系不是线性相关的产生矛盾。

由于η^*为特解, $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$为基础解系, 故得

$A(C_0\eta^*+C_1\xi_1+\cdots+C_{n-r}\xi_{n-r})=C_0A\eta^*=C_0b$

而由(1)式可得$A(C_0\eta^*+C_1\xi_1+\cdots+C_{n-r}\xi_{n-r})=0$

故$b=0$, 而题中, 该方程组为非齐次线性方程组, 得$b\neq 0$

产生矛盾, 假设不成立, 故$\eta^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关.

(2) 反证法, 假使$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\cdots,\eta^*+\xi_{n-r}$线性相关.

则存在着不全为零的数$C_0,C_1,\cdots,C_{n-r}$使得下式成立:

$$C_0\eta^*+C_1(\eta^*+\xi_1)+\cdots+C_{n-r}(\eta^*+\xi_{n-r})=0 \qquad (2)$$

即$(C_0+C_1+\cdots+C_{n-r})\eta^*+C_1\xi_1+\cdots+C_{n-r}\xi_{n-r}=0$

1) 若$C_0+C_1+\cdots+C_{n-r}=0$, 由于$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$是线性无关的一组基础解

2) 系, 故$C_0=C_1=\cdots=C_{n-r}=0$, 由(2)式得$C_0=0$此时

$C_0=C_1=\cdots=C_{n-r}=0$与假设矛盾.

3) 若$C_0+C_1+\cdots+C_{n-r}\neq 0$由题(1)知, $\eta^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关, 故

$C_0+C_1+\cdots+C_{n-r}=C_1=C_2=\cdots=C_{n-r}=0$与假设矛盾,

综上, 假设不成立, 原命题得证.

25. 设$\eta_1,\cdots,\eta_s$是非齐次线性方程组$Ax=b$的s个解, $k_1,\cdots,k_s$为实数, 满足$k_1+k_2+\cdots+k_s=1$. 证明

$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$也是它的解.

证明　由于$\eta_1,\cdots,\eta_s$是非齐次线性方程组$Ax=b$的s个解.

故有　$A\eta_i=b \quad (i=1,\cdots,s)$

而$A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s)=k_1A\eta_1+k_2A\eta_2+\cdots+k_sA\eta_s$

$=b(k_1+\cdots+k_s)=b$

即　$Ax=b$　($x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$)

从而x也是方程的解.

26. 设非齐次线性方程组$Ax=b$的系数矩阵的秩为r, $\eta_1,\cdots,\eta_{n-r+1}$是它

的$n-r+1$个线性无关的解(由题 24 知它确有$n-r+1$个线性无关的解). 试证它的任一解可表示为

$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$　(其中$k_1+\cdots+k_{n-r+1}=1$).

证明　设x为$Ax=b$的任一解.

由题设知: $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$线性无关且均为$Ax=b$的解.

取$\xi_1=\eta_2-\eta_1,\xi_2=\eta_3-\eta_1,\cdots,\xi_{n-r}=\eta_{n-r+1}-\eta_1$, 则它的均为$Ax=b$的解.

用反证法证：$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关.

反设它们线性相关，则存在不全为零的数：

$l_1,l_2,\cdots,l_{n-r}$ 使得 $l_1\xi_1+l_2\xi_2+\cdots+l_{n-r}\xi_{n-r}=0$

即 $l_1(\eta_2-\eta_1)+l_2(\eta_3-\eta_1)+\cdots+l_{n-r}(\eta_{n-r+1}-\eta_1)=0$

亦即 $-(l_1+l_2+\cdots+l_{n-r})\eta_1+l_1\eta_2+l_2\eta_3+\cdots+l_{n-r}\eta_{n-r+1}=0$

由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$ 线性无关知

$-(l_1+l_2+\cdots+l_{n-r})=l_1=l_2=\cdots=l_{n-r}=0$

矛盾，故假设不对.

$\therefore \xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关，为 $Ax=b$ 的一组基.

由于 x,η_1 均为 $Ax=b$ 的解，所以 $x-\eta_1$ 为的 $Ax=b$ 解 $\Rightarrow$ $x-\eta_1$ 可由

$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表出.

$$\begin{aligned}x-\eta_1&=k_2\xi_1+k_3\xi_2+\cdots+k_{n-r-1}\xi_{n-r}\\&=k_2(\eta_2-\eta_1)+k_3(\eta_3-\eta_1)+\cdots+k_{n-r+1}(\eta_{n-r+1}-\eta_1)\end{aligned}$$

$x=\eta_1(1-k_2-k_3-\cdots-k_{n-r+1})+k_2\eta_2+k_3\eta_3+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}=0$

令 $k_1=1-k_2-k_3-\cdots-k_{n-r+1}$ 则 $k_1+k_2+k_3+\cdots+k_{n-r+1}=1$

$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$，证毕.

第五章　相似矩阵及二次型

1．试用施密特法把下列向量组正交化：

(1)　$(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$；

(2)　$(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

解　(1)　根据施密特正交化方法:

令 $b_1=a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

$$b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$b_3=a_3-\frac{[b_1,a_3]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_3]}{[b_2,b_2]}b_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},$$

故正交化后得：$(b_1,b_2,b_3)=\begin{pmatrix}1&-1&\frac{1}{3}\\1&0&-\frac{2}{3}\\1&1&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

(2)　根据施密特正交化方法令 $b_1=a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$b_3=a_3-\frac{[b_1,a_3]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_3]}{[b_2,b_2]}b_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}$$

故正交化后得 $(b_1,b_2,b_3)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&-\frac{1}{5}\\0&-1&\frac{3}{5}\\-1&\frac{2}{3}&\frac{3}{5}\\1&\frac{1}{3}&\frac{4}{5}\end{pmatrix}$

2．下列矩阵是不是正交阵:

(1) $\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&-1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&-\frac{8}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{8}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9}&-\frac{4}{9}&\frac{7}{9}\end{pmatrix}$.

解 (1) 第一个行向量非单位向量,故不是正交阵.

(2) 该方阵每一个行向量均是单位向量，且两两正交，故为正交阵.

3．设 A 与 B 都是 n 阶正交阵，证明 AB 也是正交阵.

证明 因为 A,B 是 n 阶正交阵，故 $A^{-1}=A^T$， $B^{-1}=B^T$

$(AB)^T(AB)=B^TA^TAB=B^{-1}A^{-1}AB=E$

故 AB 也是正交阵.

4．求下列矩阵的特征值和特征向量:

(1) $\begin{pmatrix}1&-1\\2&4\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n),(a_1\neq 0)$.

并问它们的特征向量是否两两正交?

解 (1) ① $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1\\2&4-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$.

② 当 $\lambda_1=2$ 时,解方程 $(A-2E)x=0$,由

$(A-2E)=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $P_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

所以 $k_1P_1(k_1\neq 0)$ 是对应于 $\lambda_1=2$ 的全部特征值向量.

当 $\lambda_2=3$ 时,解方程 $(A-3E)x=0$,由

$(A-3E)=\begin{pmatrix}-2&-1\\2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $P_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

所以 $k_2P_2(k_2\neq 0)$ 是对应于 $\lambda_3=3$ 的全部特征向量.

③ $[P_1,P_2]=P_1^TP_2=(-1,1)\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\neq 0$

故 P_1,P_2 不正交.

(2) ① $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&3\\2&1-\lambda&3\\3&3&6-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+1)(\lambda-9)$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=9$.

② 当 $\lambda_1=0$ 时，解方程 $Ax=0$，由

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $P_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

故 $k_1P_1(k_1\neq 0)$ 是对应于 $\lambda_1=0$ 的全部特征值向量.

当 $\lambda_2=-1$ 时,解方程 $(A+E)x=0$，由

$A+E=\begin{pmatrix}2&2&3\\2&2&3\\3&3&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&2&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $P_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

故$k_2P_2(k_2\neq 0)$是对应于$\lambda_2=-1$的全部特征值向量

当$\lambda_3=9$时，解方程$(A-9E)x=0$，由

$$A-9E=\begin{pmatrix}-8&2&3\\2&-8&3\\3&3&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$得基础解系$P_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

故$k_3P_3(k_3\neq 0)$是对应于$\lambda_3=9$的全部特征值向量.

③ $[P_1,P_2]=P_1^TP_2=(-1,-1,1)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=0$，

$[P_2,P_3]=P_2^TP_3=(-1,1,0)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=0$，

$[P_1,P_3]=P_1^TP_3=(-1,-1,1)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=0$，

所以P_1,P_2,P_3两两正交.

(3) $$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}a_1^2-\lambda&a_1a_2&\cdots&a_1a_n\\a_2a_1&a_2^2-\lambda&\cdots&a_2a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_na_1&a_na_2&\cdots&a_n^2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^n-\lambda^{n-1}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$
$$=\lambda^{n-1}\left[\lambda-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\right]$$

$\therefore\lambda_1=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$，$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$

当$\lambda_1=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$时，

$$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix}-a_2^2-a_3^2-\cdots-a_n^2&a_1a_2&\cdots&a_1a_n\\a_2a_1&-a_1^2-a_3^2-\cdots-a_n^2&\cdots&a_2a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_na_1&a_na_2&\cdots&-a_1^2-a_2^2-\cdots-a_{n-1}^2\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{初等行变换}}{\sim}\begin{pmatrix}a_n&0&\cdots&0&-a_1\\0&a_n&\cdots&0&-a_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_n&-a_{n-1}\\0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

取x_n为自由未知量，并令$x_n=a_n$，设$x_1=a_1,x_2=a_2,\cdots x_{n-1}=a_{n-1}$.

故基础解系为$P_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$

当$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$时，

$$(A-0\cdot E)=\begin{pmatrix}a_1^2&a_1a_2&\cdots&a_1a_n\\a_2a_1&a_2^2&\cdots&a_2a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_na_1&a_na_2&\cdots&a_n^2\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{初等行变换}}{\sim}\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

可得基础解系

$$P_2=\begin{pmatrix}-a_2\\a_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},P_3=\begin{pmatrix}-a_2\\0\\a_1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,P_n=\begin{pmatrix}-a_n\\0\\0\\\vdots\\a_1\end{pmatrix}$$

综上所述可知原矩阵的特征向量为

$$(P_1,P_2,\cdots,P_n)=\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

5．设方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ 相似，求 x,y.

解　方阵 A 与 Λ 相似，则 A 与 Λ 的特征多项式相同，即

$$|A-\lambda E|=|\Lambda-\lambda E|\Rightarrow\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & x-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & y-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}.$$

6．设 A,B 都是 n 阶方阵，且 $|A|\neq 0$，证明 AB 与 BA 相似.

证明　$|A|\neq 0$ 则 A 可逆

$A^{-1}(AB)A=(A^{-1}A)(BA)=BA$　则 AB 与 BA 相似.

7．设 3 阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=-1$；对应的特征向量依
次为

$$P_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad P_3=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

求 A.

解　根据特征向量的性质知 (P_1,P_2,P_3) 可逆,

得: $(P_1,P_2,P_3)^{-1}A(P_1,P_2,P_3)=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

可得 $A=(P_1,P_2,P_3)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}(P_1,P_2,P_3)^{-1}$

得 $A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

8．设 3 阶对称矩阵 A 的特征值 6，3，3，与特征值 6 对应的特征向量为
$P_1=(1,1,1)^T$,求 A.

解　设 $A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$

由 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，知① $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ x_2+x_4+x_5=6 \\ x_3+x_5+x_6=6 \end{cases}$

3 是 A 的二重特征值,根据实对称矩阵的性质定理知 $A-3E$ 的秩为 1,

故利用①可推出 $\begin{pmatrix} x_1-3 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4-3 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6-3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_4-3 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6-3 \end{pmatrix}$

秩为 1.

则存在实的 a,b 使得② $\begin{cases} (1,1,1)=a(x_2,x_4-3,x_5) \\ (1,1,1)=b(x_3,x_5,x_6-3) \end{cases}$ 成立.

由①②解得 $x_2=x_3=1,x_1=x_4=x_6=4,x_5=1$.

得 $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

9．试求一个正交的相似变换矩阵,将下列对称矩阵化为对角矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

解　(1) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2)$

故得特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

当$\lambda_1=-2$时，由

$$\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\text{解得}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

单位特征向量可取:$P_1=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}$

当$\lambda_2=1$时,由

$$\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\text{解得}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

单位特征向量可取：$P_2=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix}$

当$\lambda_3=4$时,由

$$\begin{pmatrix}-2&-2&0\\-2&-3&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\quad\text{解得}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_3\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

单位特征向量可取：$P_3=\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix}$

得正交阵$(P_1,P_2,P_3)=P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

(2)$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)$，

故得特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，由

$$\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{解得}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

此二个向量正交,单位化后,得两个单位正交的特征向量

$$P_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$P_2^*=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{-4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}\text{单位化得}P_2=\frac{\sqrt5}{3}\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}$$

当$\lambda_3=10$时,由

$$\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{解得}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_3\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

单位化$P_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$:得正交阵$(P_1,P_2,P_3)$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2\sqrt5}{15}&-\frac13\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4\sqrt5}{15}&-\frac23\\0&\frac{\sqrt5}{3}&\frac23\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

10．(1)　设$A=\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}$，求$\varphi(A)=A^{10}-5A^9$；

(2)　设$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$,求$\varphi(A)=A^{10}-6A^9+5A^8$.

解　(1)　$\because A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$是实对称矩阵.

故可找到正交相似变换矩阵 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\Lambda$

从而 $A=P\Lambda P^{-1}, A^k=P\Lambda^k P^{-1}$

因此$\varphi(A)=A^{10}-5A^9=P\Lambda^{10}P^{-1}-5P\Lambda^9P^{-1}$

$$=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5^{10}\end{pmatrix}P^{-1}-P\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5^{10}\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(2)　同(1)求得正交相似变换矩阵

$$P=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}=\Lambda, A=P\Lambda P^{-1}$

$$\varphi(A)=A^{10}-6A^9+5A^8$$

$$=A^8(A^2-6A+5E)=A^8(A-E)(A-5E)$$

$$=P\Lambda^8P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix}.$$

11．用矩阵记号表示下列二次型:

(1)　$f=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz$;

(2)　$f=x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz$;

(3)　$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_1x_4+6x_2x_3-4x_2x_4$.

解　(1)　$f=(x,y,z)\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

(2)　$f=(x,y,z)\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

(3)　$f=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 3 & -2\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$.

12．求一个正交变换将下列二次型化成标准形:

(1)　$f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$;

(2)　$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$.

解　(1)　二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 3-\lambda & 2\\ 0 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda)$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=5,\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=2$ 时，解方程 $(A-2E)x=0$，由

$$A-2E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. 取 $P_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=5$ 时，解方程 $(A-5E)x=0$，由

$$A-5E=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$取$P_2=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

当$\lambda_3=1$时，解方程$(A-E)x=0$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$取$P_3=\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$,

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

且有$f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2$.

(2)二次型矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0&-1\\1&1-\lambda&-1&0\\0&-1&1-\lambda&1\\-1&0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)^2,$$

故A的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=3,\lambda_3=\lambda_4=1$

当$\lambda_1=-1$时，可得单位特征向量$P_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,

当$\lambda_2=3$时，可得单位特征向量$P_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,

当$\lambda_3=\lambda_4=1$时，可得单位特征向量$P_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$, $P_4=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

且有$f=-y_1^2+3y_2^2+y_3^2+y_4^2$.

13．证明：二次型$f=x^TAx$在$\|x\|=1$时的最大值为矩阵A的最大特征值.

证明　　A为实对称矩阵，则有一正交矩阵T，使得

$$TAT^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=B\text{成立}.$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$A$的特征值，不妨设$\lambda_1$最大，

T为正交矩阵，则$T^{-1}=T^T$且$|T|=1$，故$A=T^{-1}B^T=T^TB^T$

则$f=x^TAx=x^TT^TBTx=y^TBy=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$.

其中$y=Tx$

当$\|y\|=\|Tx\|=|T|\|x\|=\|x\|=1$时，

即$\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}=1$即$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1$

$f_{\text{最大}}=(\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2)_{\text{最大}}\underset{y_1=1}{=}\lambda_1$.

故得证.

14．判别下列二次型的正定性：

(1) $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$;

(2) $f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4$
$-12x_3x_4$

解　(1) $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$,

$a_{11}=-2<0$, $\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -6\end{vmatrix}=11>0$, $\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{vmatrix}=-38<0$,

故f为负定.

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0 & -3\\ 2 & 0 & 9 & -6\\ 1 & -3 & -6 & 19\end{pmatrix}$, $a_{11}=1>0$, $\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=4>0$,

$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 9\end{vmatrix}=6>0, |A|=24>0$.

故f为正定.

15．设U为可逆矩阵，$A=U^TU$，证明$f=x^TAx$为正定二次型．

证明　设$U=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}f&=x^TAx=x^TU^TUx=(Ux)^T(Ux)\\&=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n,a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n,\cdots,a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n)\\&\quad\cdot\begin{pmatrix}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n\\ \vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n\end{pmatrix}\\&=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)^2+(a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n)^2\\&\quad+\cdots+(a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n)^2\ge 0.\end{aligned}$$

若"$=0$"成立，则$\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ \qquad\vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$成立.

即对任意$x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$使$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0$成立.

则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，$U$的秩小于$n$，则$U$不可逆，与题意产生矛盾.

于是$f>0$成立.

故$f=x^TAx$为正定二次型.

16．设对称矩阵A为正定矩阵，证明：存在可逆矩阵U，使$A=U^TU$.

证明　A正定，则矩阵A满秩，且其特征值全为正.

不妨设$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为其特征值，$\lambda_i>0$　$i=1,\cdots,n$

由定理8知，存在一正交矩阵P

使$P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

又因 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆， $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}^T$.

所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PQQ}^T\boldsymbol{P}^T=\boldsymbol{PQ}\cdot(\boldsymbol{PQ})^T$.

令 $(\boldsymbol{PQ})^T=\boldsymbol{U}$， $\boldsymbol{U}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}$.

线性代数试卷

一、（24 分）填空题：

1. 设 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 都是 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\underline{(-1)^n|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|}$

2. $\boldsymbol{A}^*$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵，$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$，则 $(2\boldsymbol{A}^*)^*=\underline{2\boldsymbol{A}}$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆阵， $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶不可逆阵，则<u>（D）</u>

   （A） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是可逆阵　　（B） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是不可逆阵

   （C） $\boldsymbol{AB}$ 是可逆阵　　（D） $\boldsymbol{AB}$ 是不可逆阵

4. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&3&5\\2&0&5\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&4&1\\1&2&a\\4&6&2\end{pmatrix}$，并且 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，要使 $R(\boldsymbol{X})=2$，则 $a=\underline{\quad 1\quad}$

5. n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\ (n>3)$ 线性无关的充分必要条件是<u>（D）</u>。

   （A） $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中任意两个向量线性无关

   （B） $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 全是非零向量

   （C）存在 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$，使得 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关

   （D） $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中任意一个向量都不能由其余两个向量线性表示

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×5 矩阵， $R(\boldsymbol{A})=2$， $\boldsymbol{B}$ 是 5×5 矩阵， $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的解，则 $R(\boldsymbol{B})$ 的最大数为 $\underline{\ 3\quad}$。

7. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的充分必要条件是<u>（C）</u>

   （A） $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值　　（B） $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征向量

   （C） $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量　　（D）存在正交阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵

8. 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=0$， $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$， $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为 $\underline{0,\ 1,\ -\dfrac{3}{2}}$

二、（8分）计算4阶行列式$D=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & a-1 \end{vmatrix}$。

$$D=\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ -1 & a-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

a^4

三、（10分）设$f(x)=x^8-6400$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求$f(\boldsymbol{A})$。

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^8=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix} 81^2 & 0 & 0 \\ 0 & 81^2 & 0 \\ 0 & 0 & 81^2 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^8-6400\boldsymbol{E}$$

$$=\begin{pmatrix} 161 & 0 & 0 \\ 0 & 161 & 0 \\ 0 & 0 & 161 \end{pmatrix}=161\boldsymbol{E}$$

四、（12分）已知向量组$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ n \end{pmatrix}$与向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$有相同的秩，

并且$\boldsymbol{\beta}_3$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，求$m,n$的值。

$\boldsymbol{\beta}_3$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，即$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性相关

$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=0$，解得$n=1$

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$有相同的秩，即$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的秩为2

$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=0$，即$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$，解得$m=2$

五、（10 分）试求$\boldsymbol{R}^3$中的向量$\boldsymbol{x}$在一组基向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$下的坐标

x_1,x_2,x_3变换到另一组基$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$下的坐标$y_1,y_2,y_3$的变换关系

式。

$$\boldsymbol{x}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+y_3\boldsymbol{\beta}_3=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)^{-1}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

六、（12 分）已知线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & a+8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b+7 \end{pmatrix}$ 有无穷多解，求 a,b 的值，并求出通解。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & a+8 & b+7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}$$

$a=b=0$ 时，方程组有无穷多解

$$x = c\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

七、（14 分）设对称矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 满足 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}| = 0$，

1．求 a；

2．求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值和对应的特征向量；

3．求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵。

由 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}| = 0$ 解得 $a=1$

由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ 解得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 3$

对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

正交矩阵 $\boldsymbol{P} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

八、（10 分）证明题：

1. 已知方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$，证明：$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$。

$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$

$\Rightarrow (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{A} - 2(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) = -2\boldsymbol{E} \Rightarrow (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\right] = \boldsymbol{E}$

所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 是可逆矩阵

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 \Rightarrow \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} + \boldsymbol{ABA} = \boldsymbol{O}$

$\Rightarrow \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{ABA} = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{AB}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 是可逆矩阵，所以 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$

2. 证明集合 $\boldsymbol{V} = \left\{ f(x) \;\middle|\; \int_0^1 f(x)dx = 0 \right\}$ 对于函数的加法和数乘构成实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的线性空间。

$f(x), g(x) \in \boldsymbol{V} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = 0, \int_0^1 g(x)dx = 0$

$\Rightarrow \int_0^1 [f(x)+g(x)]dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = 0 \Rightarrow f(x)+g(x) \in \boldsymbol{V}$

$f(x) \in \boldsymbol{V}, \lambda \in R \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = 0$

$\Rightarrow \int_0^1 [\lambda f(x)]dx = \lambda \int_0^1 f(x)dx = 0 \Rightarrow \lambda f(x) \in \boldsymbol{V}$

所以 $\boldsymbol{V} = \left\{ f(x) \;\middle|\; \int_0^1 f(x)dx = 0 \right\}$ 是实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的线性空间

线性代数试卷

一、（24 分）填空题:

1. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|^2\cdot|\boldsymbol{A}|=\underline{\frac{1}{2}}$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆阵，则下列____C____恒成立。

（A）$(2\boldsymbol{A})^{-1}=2\boldsymbol{A}^{-1}$　　（B）$\left(2\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$

（C）$\left[\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}\right]^{\mathrm{T}}=\left[\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\right]^{-1}$　　（D）$\left[\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\right]^{-1}=\left[\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}\right]^{\mathrm{T}}$

3. 若向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ 可由另一向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_{\mathrm{s}}$ 线性表示，则___C____。

（A）$\mathrm{r}\le \mathrm{s}$　　（B）$\mathrm{r}\ge \mathrm{s}$

（C）$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ 的秩 $\le$ $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_{\mathrm{s}}$ 的秩　　（D）$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$ 的秩 $\ge$ $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_{\mathrm{s}}$ 的秩

4. 当 k 满足__________时，齐次线性方程组 $\begin{cases}kx_1+kx_2+x_3=0\\2x_1+kx_2+x_3=0\\kx_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解。

5. 若齐次线性方程组的一个基础解系为 ξ_1,ξ_2,ξ_3，则___D___也是该其次线性方程组的基础解系。

（A）$\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3-\xi_1$　　（B）$\xi_1+\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3+\xi_1$

（C）$\xi_1-\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$　　（D）$\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$

6. 设 4 阶方阵 A 的秩为 2，则其伴随阵 A^* 的秩为___0____。

7. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 的三个特征值为___1，1，-1___。

8. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+2x_1x_2+3x_2{}^2$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\underline{\begin{pmatrix}1&1&0\\1&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$。

二、（8 分）计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}0&a&0&b\\a&0&b&0\\0&b&0&a\\b&0&a&0\end{vmatrix}$。

$$D=\begin{vmatrix}a&0&0&b\\0&a&b&0\\b&0&0&a\\0&b&a&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a&0&0&b\\0&a&b&0\\0&b&a&0\\b&0&0&a\end{vmatrix}$$

$$=\left(a^2-b^2\right)^2$$

三、（10 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}^{2n}-\boldsymbol{A}^2$（$n$ 为正整数）。

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&4&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{2n}=\begin{pmatrix}1&2n&2n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{2n}-\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&2n-2&2n-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

四、（8 分）设 $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$。

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&-4\\1&0&-2\end{pmatrix}$$

五、（10 分）设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\k\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$线性相关，求常数$k$；并找出一组最大无关组以及用该最大无关组表示其余向量。

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&k&1\\3&-1&2\end{vmatrix}=0$$

$k=-3$

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$是最大无关组

$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$

六、（14 分）已知线性方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_1+3x_2+5x_3+x_4=3\\x_1-x_2-3x_3+5x_4=3\\x_1-5x_2-11x_3+12x_4=k\end{cases}$$

求k，使得上述方程组有解，并求出所有的解。

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&3&5&1&3\\1&-1&-3&5&3\\1&-5&-11&12&k\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&1&2&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&k-16\end{pmatrix}$$

$k=16$时上述方程组有解

$$\boldsymbol{x}=\mathrm{c}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

七、（16 分）设对称矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&1\\0&1&x\end{pmatrix}$，已知$\boldsymbol{A}$有二重特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$，

1. 求x和另一个特征值λ_3；

2. 求$\boldsymbol{A}$的所有特征向量；

3. 求一个正交矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$。

$$|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\ \begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&1\\0&1&x\end{vmatrix}=2\cdot2\cdot\lambda_3$$

$a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$，$2+3+x=2+2+\lambda_3$

$x=3,\ \lambda_3=4$

$\lambda_1=\lambda_2=2$对应的特征向量$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_3=4$对应的特征向量$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

正交矩阵$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$可使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$

八、（10 分）证明题:

1. 设向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$都是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，数$k_1,k_2,\cdots,k_s$满足$k_1+k_2+\cdots+k_s=1$，则向量$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{a}_s$也是该方程组的解。

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{a}_s)=k_1\boldsymbol{Aa}_1+k_2\boldsymbol{Aa}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{Aa}_s\\&=k_1\boldsymbol{b}+k_2\boldsymbol{b}+\cdots+k_s\boldsymbol{b}\\&=(k_1+k_2+\cdots+k_s)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

2. $\boldsymbol{A}$为n阶方阵，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$是$n$维列向量，并且$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{y}$，证明$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$正交。

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\left(\frac12\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{y}\right)\\&=\frac12\left(\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\right)\boldsymbol{y}=\frac12(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm T}\boldsymbol{y}\\&=\frac12(\boldsymbol{0})^{\mathrm T}\boldsymbol{y}=0\text{，所以 }\boldsymbol{x}\text{ 与 }\boldsymbol{y}\text{ 正交}\end{aligned}$$