

00002774

0211.6-44

02

教辅: 189 1095 850/

F615

周- 19:00 ~ 20:00

# 随机过程习题集

周荫清 李春升 陈杰 编著



清华大学出版社

北京



北航

C0929057

## 内 容 简 介

全书共7章,内容包括随机过程的基本概念、随机过程的线性变换、窄带随机过程、高斯随机过程、泊松随机过程、马尔可夫过程和估计理论。

每章分为三部分:内容提要、例题和练习题。内容提要部分对每章的基本内容以及读者应该掌握的主要内容作了较深入的概括。针对各章的重要课题全书选编了约180道例题和180道练习题。书末附有部分练习题的答案。

本书层次清楚,概念清晰,语言通俗易懂,可供学习随机过程理论的工科大学生使用,亦可供有关科技人员学习随机过程理论时参考。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

本书防伪标签采用特殊防伪技术,用户可通过在图案表面涂抹清水,图案消失,水干后图案复现;或将表面膜揭下,放在白纸上用彩笔涂抹,图案在白纸上再现的方法识别真伪。

### 图书在版编目(CIP)数据

随机过程习题集/周荫清,李春升,陈杰编著. —北京:清华大学出版社,2004.9

ISBN 7-302-09086-6

I. 随… II. ①周… ②李… ③陈… III. 随机过程—高等学校—习题 IV. 0211.6-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第072240号

出 版 者:清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社 总 机:010-62770175

地 址:北京清华大学学研大厦

邮 编:100084

客户服务:010-62776969

组稿编辑:陈国新

文稿编辑:魏艳春

印 刷 者:北京密云胶印厂

装 订 者:三河市新茂装订有限公司

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:185×260 印张:15.5 字数:351千字

版 次:2004年9月第1版 2005年5月第2次印刷

书 号:ISBN 7-302-09086-6/TN·202

印 数:3001~5000

定 价:22.00元

随机过程理论是现代概率论中的一个重要分支,已广泛应用于通信、雷达、导航、自动控制、生物物理、系统工程、空间技术等多种工程科学技术中,并在其中显示出十分重要的作用。目前随机过程理论已经成为工科院校的一门重要基础理论课程。

在学习随机过程理论时,为了透彻理解随机过程的基本理论,掌握随机过程的分析方法,做习题是必不可缺的环节。为此,我们在编写《随机过程导论》一书的同时编写了本书。

全书共7章。第1章和第2章分别介绍随机过程的基本概念及其线性系统的分析方法;第3~6章分别介绍窄带随机过程、高斯随机过程、泊松随机过程和马尔可夫随机过程;第7章为估计理论,它是随机过程应用的一个方面,也是目前随机过程应用比较广泛的一个领域。

书中每章由内容提要、例题和练习题三部分组成。内容提要部分对每章的基本内容以及读者应该掌握的重点作了较深入的概括。针对各章的重要课题本书选编了适量的例题,并用例题的形式体现各章的基本内容与具体要求,而且从概念、推演、证明及应用四个方面对随机过程中的典型问题进行剖析,帮助读者深入理解基本概念,开拓思路,提高分析问题和解决问题的能力。需要指出的是,例题部分的解法不是惟一的,也许读者会有更好的解法。做习题是学习随机过程理论的重要环节,因此,书中列出了一定量的练习题。练习题的编排遵循由浅入深的原则,凡是难度大一些的题目都标上星号“\*”。书末附有部分练习题的答案。亲自求解本书中的习题,对于学好随机过程的基本理论是十分有益的,这将会大大提高读者解决实际问题的能力。

本书收入的例题和习题是作者近几年来在为北京航空航天大学电子信息工程学院本科生和研究生开设“随机过程理论”课程期间,从国内外有关书籍中经过精心挑选、反复推敲和设计而逐渐积累起来的。多数题目的选择意在培养学生分析问题和解决问题的综合能力,少数较难的例题和习题则用以开拓和深化随机过程理论,拓展应用方面的内容,同时也可开阅读者视野。

本书在1987年出版的《随机过程习题集》的基础上对内容重新进行了重要的修订、扩充和加工。本书第1~6章的内容提要部分及第7章由周荫清编写;第1~6章的例题和练习题由李春升编写;全书修订、扩充和加工由陈杰完成。最后,由周荫清统编全书。

参加编写和修订工作的还有徐华平、刘慧、文竹、刘利国、魏杰、孙兵和温东超,在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中难免出现错误和不妥之处,恳请读者批评、指正。

编 者

于北京航空航天大学

2003年12月



第 1 章 随机过程的基本概念 .....	1
1.1 内容提要 .....	1
1.1.1 随机过程的描述 .....	1
1.1.2 随机过程的数字特征 .....	2
1.1.3 平稳随机过程 .....	3
1.1.4 矢量随机过程 .....	5
1.2 例题 .....	7
1.3 练习题 .....	32
第 2 章 随机过程的线性变换 .....	37
2.1 内容提要 .....	37
2.1.1 线性系统 .....	37
2.1.2 随机过程的均方微分和积分 .....	37
2.1.3 随机过程通过线性系统的分析 .....	39
2.2 例题 .....	41
2.3 练习题 .....	70
第 3 章 窄带随机过程 .....	75
3.1 内容提要 .....	75
3.1.1 希尔伯特变换 .....	75
3.1.2 复随机过程 .....	76
3.1.3 窄带随机过程 .....	77
3.1.4 窄带随机过程的谱分解 .....	78
3.2 例题 .....	79
3.3 练习题 .....	93
第 4 章 高斯随机过程 .....	97
4.1 内容提要 .....	97
4.1.1 高斯随机矢量 .....	97
4.1.2 高斯随机过程 .....	100
4.1.3 维纳过程 .....	102

4.1.4 窄带平稳高斯过程	103
4.1.5 随机相位正弦波	104
4.1.6 窄带高斯随机过程	106
4.1.7 $\chi^2$ 分布及非中心 $\chi^2$ 分布	106
4.2 例题	107
4.3 练习题	131
第5章 泊松随机过程	135
5.1 内容提要	135
5.1.1 泊松计数过程	135
5.1.2 到达时间与到达时间间隔	136
5.1.3 更新计数过程	138
5.1.4 非齐次泊松过程	138
5.1.5 复合泊松过程	139
5.1.6 过滤的泊松过程	139
5.2 例题	140
5.3 练习题	155
第6章 马尔可夫过程	157
6.1 内容提要	157
6.1.1 马尔可夫链	157
6.1.2 马尔可夫序列	160
6.1.3 可数状态的马尔可夫过程	161
6.1.4 连续马尔可夫过程	162
6.2 例题	163
6.3 练习题	178
第7章 估计理论	185
7.1 内容提要	185
7.1.1 匹配滤波	185
7.1.2 信号参量估计	186
7.1.3 波形估计	191
7.2 例题	195
7.3 练习题	226
练习题答案	233
参考文献	242

# 随机过程的基本概念

## 1.1 内容提要

### 1.1.1 随机过程的描述

#### 1. 随机过程的定义

设  $E=\{e\}$  是样本空间, 若对每一时刻  $t \in T$  都有定义在  $E$  上的随机变量  $X(e, t)$ , 则称一族随机变量  $\{X(e, t), e \in E, t \in T\}$  为随机过程。通常简化为  $\{X(t), t \in T\}$ 。

#### 2. 统计描述

随机过程在时刻  $t$  的概率分布函数为

$$F_X(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} P\{X(t) \leq x\}$$

相应的概率密度函数为

$$p_X(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial F_X(x, t)}{\partial x}$$

并且有

$$F_X(x, t) = \int_{-\infty}^x p_X(y, t) dy$$

相应的特征函数为

$$\phi_X(v, t) \stackrel{\text{def}}{=} E\{\exp[jX(t)v]\}$$

随机过程的联合概率分布函数为

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$$

其联合概率密度为

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}$$

相应的特征函数为

$$\phi_n(v_1, t_1; v_2, t_2; \dots; v_n, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} E\left\{\exp\left[j \sum_{k=1}^n X(t_k) v_k\right]\right\}$$

#### 3. 一般分类

随机过程一般分为以下四类:

- (1) 连续随机过程 状态连续、时间参数连续的随机过程称为连续随机过程；  
 (2) 离散随机过程 状态离散、时间参数连续的随机过程称为离散随机过程；  
 (3) 连续随机序列 状态连续、时间参数离散的随机过程称为连续随机序列；  
 (4) 离散随机序列 状态离散、时间参数离散的随机过程称为离散随机序列。

### 1.1.2 随机过程的数字特征

设随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  在  $t_1, t_2$  时刻的取值为  $x_1, x_2$ , 其中数字特征分别定义如下。

- (1) 均值(数学期望)

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t)dx$$

- (2) 均方值

$$\phi_X^2(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x, t)dx$$

- (3) 方差

均方差  $\sigma_X(t)$

均方值  $\phi_X^2(t)$

$= E[X^2(t)]$

$$\sigma_X^2(t) = E\{[X(t) - m_X(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_X(t)]^2 p(x, t)dx$$

- (4) 自相关函数 (两不同时刻的相关性)

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

- (5) 协方差

$$C_X(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]\} \\ = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$$

当  $t_1 = t_2 = t$  时, 有

$$C_X(t, t) = \sigma_X^2(t) = R_X(t, t) - m_X^2(t)$$

如果随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  是平稳随机过程, 则有

- (1)  $m_X(t) = m_X$ ;  
 (2)  $\phi_X^2(t) = \phi_X^2$ ;  
 (3)  $\sigma_X^2(t) = \sigma_X^2$ ;  
 (4)  $R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau)$ , 其中  $\tau = t_1 - t_2$ ;  
 (5)  $C_X(t_1, t_2) = C_X(\tau) = R_X(\tau) - m_X^2$ ,  $C_X(t, t) = \sigma_X^2$ 。

随机过程可以是复函数, 定义复随机过程为

$$Z(t) = X(t) + jY(t)$$

复随机过程的数字特征分别定义如下。

- (1) 均值

$$m_Z(t) = m_X(t) + jm_Y(t)$$

- (2) 自相关函数

$$R_Z(t_1, t_2) = E[Z(t_1)Z^*(t_2)]$$

- (3) 协方差

$$\text{cov}[Z(t_1), Z(t_2)] = E[\dot{Z}(t_1)\dot{Z}^*(t_2)]$$



其中

$$\dot{Z}(t) = Z(t) - m_Z(t)$$

当  $t_1 = t_2 = t$  时, 有

$$\text{cov}[Z(t), Z(t)] = \text{var}[Z(t)] = \text{var}[X(t)] + \text{var}[Y(t)]$$

(4) 互相关函数

若有两个复随机过程

$$Z_1(t) = X_1(t) + jY_1(t)$$

$$Z_2(t) = X_2(t) + jY_2(t)$$

则互相关函数定义为

$$R_{Z_1 Z_2}(t_1, t_2) = E[Z_1(t_1) Z_2^*(t_2)]$$

### 1.1.3 平稳随机过程

平稳随机过程分为严格平稳随机过程和广义平稳随机过程。

定义 设  $X(t) (t \in T)$  为一随机过程, 若对于任意整数  $n$  和任意实数  $t_1, t_2, \dots, t_n, t_i \in T, i=1, 2, \dots, n$ , 以及任意实数  $\tau$ , 有分布函数

$$\begin{aligned} F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau) \end{aligned}$$

或概率密度函数

$$\begin{aligned} p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau) \end{aligned}$$

则称这类过程为严格平稳随机过程。

定义 设  $\{X(t), t \in T\}$  是一个平稳随机过程, 若  $E[X^2(t)] < \infty$ , 且  $E[X(t)] = m_X =$  常数,  $R(t_1, t_2) = R(\tau), \tau = t_1 - t_2$ , 则称  $\{X(t), t \in T\}$  为广义平稳随机过程。广义平稳随机过程是一个二阶矩过程。二阶矩过程定义如下。

定义 设  $\{X(t), t \in T\}$  为一随机过程, 若对一切  $t \in T$ , 有

$$E\{X^2(t)\} < \infty$$

则称  $\{X(t), t \in T\}$  为二阶矩过程。

#### 1. 平稳随机过程相关函数的性质

设随机过程  $X(t), Y(t)$  为单独及联合平稳, 则有

(1)  $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$ , 如果随机过程为实过程, 那么自相关函数是偶函数, 亦即  $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$ ;

$$(2) |R_X(\tau)| \leq R_X(0) = \sigma_X^2;$$

$$(3) R_X(\infty) = \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_X(\tau) = m_X^2;$$

$$(4) \sum_{i,j=1}^{\infty} R_X(t_i - t_j) \lambda(t_i) \lambda(t_j) \geq 0;$$

$$(5) R_{XY}(\tau) = R_{YX}^*(-\tau);$$

$$(6) |R_{XY}(\tau)| \leq [R_X(0)R_Y(0)]^{1/2}.$$

## 2. 遍历性

样本函数  $x(t)$  的时间平均定义为

$$\overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

若随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  是遍历的, 则样本集的各种统计平均以概率 1 等于相应的时间平均。

### (1) 均值

$$m_X = \overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

### (2) 自相关函数

$$R_X(\tau) = \overline{x(t)x^*(t-\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x^*(t-\tau) dt$$

### (3) 互相关函数

$$R_{XY}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y^*(t-\tau) dt$$

## 3. 平稳过程的功率谱密度

### (1) 广义平稳随机过程的功率谱密度定义为

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

其中

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

上述公式称为维纳-辛钦定理。

对于实随机过程, 由于  $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$ , 故有

$$S_X(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_X(\tau) \cos \omega\tau d\tau$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_X(\omega) \cos \omega\tau d\omega$$

### (2) 功率谱密度性质

不论随机过程是实过程还是复过程, 均有

$$S_X^*(\omega) = S_X(\omega)$$

这表明功率谱密度必为实函数。

若  $X(t)$  是实函数, 则有

$$S_X(\omega) = S_X(-\omega)$$

这表明功率谱密度必为偶函数。

### (3) 互谱密度

若两个随机过程  $X(t), Y(t)$  是联合广义平稳的, 则它们的互功率谱密度定义为

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) = K_{YX}^*(-\tau)$$

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

其中

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

一般而言,有

$$S_{XY}(\omega) = S_{YX}(\omega)$$

若  $X(t), Y(t)$  为实过程,则有

$$S_{YX}(\omega) = S_{XY}(-\omega)$$

#### 1.1.4 矢量随机过程

$$S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega) = S_{YX}^*(\omega)$$

设  $\{X(t), t \in T\}$  为  $m$  维矢量随机过程, 定义为

$$X(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t)]^T$$

##### 1. 统计描述

矢量随机过程  $X(t)$  在时刻  $t$  的概率分布函数为

$$F_X(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} P\{X(t) \leq x\}$$

相应的概率密度函数为

$$p_X(x, t) = \frac{\partial^n F_X(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial^n F_X(x, t)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_m}$$

式中,  $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ .

矢量随机过程的联合概率分布函数为

$$F_{X^1, \dots, X^n}(x^1, t_1; x^2, t_2; \dots; x^n, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} P\{X(t_1) \leq x^1, X(t_2) \leq x^2, \dots, X(t_n) \leq x^n\}$$

式中,  $X^i = [X_1^i, X_2^i, \dots, X_m^i]^T$ ,  $x^i = [x_1^i, x_2^i, \dots, x_m^i]^T$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

相应的概率密度函数为

$$\begin{aligned} p_{X^1, \dots, X^n}(x^1, t_1; x^2, t_2; \dots; x^n, t_n) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{mn} F_{X^1, \dots, X^n}(x^1, t_1; x^2, t_2; \dots; x^n, t_n)}{\partial x^1 \partial x^2 \cdots \partial x^n} \\ &= \frac{\partial^{mn} F_{X^1, \dots, X^n}(x^1, t_1; x^2, t_2; \dots; x^n, t_n)}{\partial x_1^1 \cdots \partial x_m^1 \cdots \partial x_1^n \cdots \partial x_m^n} \end{aligned}$$

##### 2. 特征函数

矢量随机过程在时刻  $t_i$  的特征函数为

$$\phi_X(v, t_i) \stackrel{\text{def}}{=} E[\exp\{jX^T(t_i) v\}]$$

其中

$$X(t_i) = [X_1(t_i), X_2(t_i), \dots, X_m(t_i)]^T$$

$$v = [v_1, v_2, \dots, v_m]^T$$

矢量随机过程联合特征函数为

$$\phi_{X^1, \dots, X^n}(v^1, t_1; v^2, t_2; \dots; v^n, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} E\left[\exp\left\{j \sum_{k=1}^n X^k(t_k) v^k\right\}\right]$$

其中,  $\mathbf{X}(t_k) = [X_1(t_k), X_2(t_k), \dots, X_m(t_k)]^T$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ 。

### 3. 数字特征

设矢量随机过程  $Z(t)$  定义为

$$Z(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_m(t) \end{bmatrix}$$

(1) 均值矢量

$$m_Z(t) = E[Z(t)] = [E\{X_1(t)\}, E\{X_2(t)\}, \dots, E\{X_m(t)\}]^T$$

(2) 协方差阵

$$\begin{aligned} P_{ZZ}(t_1, t_2) &= \text{cov}[Z(t_1), Z(t_2)] \\ &\stackrel{\text{def}}{=} E\{[Z(t_1) - m_Z(t_1)][Z(t_2) - m_Z(t_2)]^T\} \\ &= E[Z(t_1)Z^T(t_2)] - m_Z(t_1)m_Z^T(t_2) \end{aligned}$$

(3) 自相关阵

$$R_Z(t_1, t_2) = E[Z(t_1)Z^T(t_2)]$$

式中, 令  $t_1 = t_2 = t$ , 则可得到均方差阵为

$$P_Z(t) = E[Z(t)Z^T(t)]$$

(4) 方差阵

$$P_{ZZ}(t) = E[Z(t)Z^T(t)] - m_Z(t)m_Z^T(t)$$

(5) 互协方差阵

$$P_{Z_1 Z_2}(t_1, t_2) = \text{cov}[Z_1(t_1), Z_2(t_2)] \stackrel{\text{def}}{=} E\{[Z_1(t_1) - m_{Z_1}(t_1)][Z_2(t_2) - m_{Z_2}(t_2)]^T\}$$

(6) 互相关阵

$$R_{Z_1 Z_2}(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} E[Z_1(t_1)Z_2^T(t_2)]$$

### 4. 平稳性

若一个矢量随机过程  $\{Z(t), t \in T\}$  的均值矢量与方差阵和时间  $t$  无关, 而自协方差阵仅与时间差  $\tau = t_1 - t_2$  有关, 即  $m_Z(t) = m_Z$ ,  $P_{ZZ}(t) = P_{ZZ}$ , 且  $P_{ZZ}(t_1, t_2) = P_{ZZ}(t_1 - t_2) = P_{ZZ}(\tau)$ ,  $\tau = t_1 - t_2$

则称此矢量随机过程为广义平稳矢量过程。显然有

$$R_{ZZ}(\tau) = E[Z(t)Z^T(t-\tau)] = P_{ZZ}(\tau) + m_Z m_Z^T$$

### 5. 统计独立和不相关

(1) 独立矢量随机过程

定义 若一个矢量随机过程  $\{X(t), t \in T\}$ , 在  $t \in T$  的任意时刻  $t_1, t_2, \dots, t_n$  上, 其联合概率分布函数为

$$F_{X^1, X^2, \dots, X^n}(x^1, t_1; x^2, t_2; \dots; x^n, t_n) = \prod_{k=1}^n F_{X^k}(x^k, t_k)$$

则称此类矢量过程为独立矢量随机过程。

显然,对应的联合概率密度函数为

$$p_{X^1, \dots, X^n}(x^1, t_1; x^2, t_2; \dots; x^n, t_n) = \prod_{k=1}^n p_{X^k}(x^k, t_k)$$

## (2) 统计独立

定义 若两个矢量随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  和  $\{Y(t), t \in T\}$ , 在  $t \in T$  内的任意  $n$  个时刻点上, 其联合概率分布函数为

$$\begin{aligned} F_{X^1, \dots, X^n, Y^1, \dots, Y^n}(x^1, t_1; x^2, t_2; \dots; x^n, t_n; y^1, t_1; \dots; y^n, t_n) \\ = F_{X^1, \dots, X^n}(x^1, t_1; x^2, t_2; \dots; x^n, t_n) F_{Y^1, \dots, Y^n}(y^1, t_1; \dots; y^n, t_n) \end{aligned}$$

则称此两个随机过程统计独立。其中

$$X(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)]^T$$

$$Y(t) = [Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)]^T$$

对应的概率密度函数为

$$\begin{aligned} p_{X^1, \dots, X^n, Y^1, \dots, Y^n}(x^1, t_1; x^2, t_2; \dots; x^n, t_n; y^1, t_1; \dots; y^n, t_n) \\ = p_{X^1, \dots, X^n}(x^1, t_1; x^2, t_2; \dots; x^n, t_n) p_{Y^1, \dots, Y^n}(y^1, t_1; \dots; y^n, t_n) \end{aligned}$$

## (3) 不相关

对于矢量随机过程  $\{X(t), t \in T\}$ , 若有

$$\begin{aligned} R_{X^1 X^2}(t, t) &= E[X(t_1) X^T(t_2)] = E[X(t_1)] E[X^T(t_2)] \\ &= m_{X^1}(t_1) m_{X^2}^T(t_2) \end{aligned}$$

则称此矢量随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  为不相关过程。显然, 对于不相关过程有

$$P_{X^1 X^2}(t_1, t_2) = R_{X^1 X^2}(t_1, t_2) - m_{X^1}(t_1) m_{X^2}^T(t_2) = 0$$

独立矢量随机过程必不相关, 但反之未必。

## 1.2 例题

例 1.1 设有正弦波随机过程  $X(t) = A \cos \omega t$ , 其中  $0 \leq t < \infty$ ,  $\omega$  为常数。A 是均匀分布于  $[0, 1]$  之间的随机变量。

(1) 确定随机变量  $X(t_i)$  的概率密度,  $t_i = 0, \frac{\pi}{4\omega}, \frac{3\pi}{4\omega}, \frac{\pi}{\omega}$ ;

(2) 当  $t' = \pi/(2\omega)$  时, 求  $X(t')$  的概率密度。

解 (1) 令  $t=0$ , 则  $X(0) = A \cos(\omega \times 0) = A$ , 故

$$p_X(x) = p_A(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

令  $t = \pi/(4\omega)$ , 则  $X(\frac{\pi}{4\omega}) = A \cos(\omega \times \frac{\pi}{4\omega}) = \frac{A}{\sqrt{2}}$ , 故

$$p_X(x) = p_A(\sqrt{2}x) \left| \frac{dA}{dx} \right| = \begin{cases} \sqrt{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\int_x f_X(x) dx = \int_A f_A(a) da$$

已知  
代入  $a = f(x)$

令  $t = 3\pi/(4\omega)$ , 则  $X\left(\frac{3\pi}{4\omega}\right) = A\cos\left(\omega \times \frac{3\pi}{4\omega}\right) = -\frac{A}{\sqrt{2}}$ , 故

$$p_X(x) = p_A(-\sqrt{2}x) \left| \frac{dA}{dx} \right| = \begin{cases} \sqrt{2}, & -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

令  $t = \pi/\omega$ , 则  $X\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = A\cos\left(\omega \times \frac{\pi}{\omega}\right) = -A$ , 故

$$p_X(x) = p_A(-x) \left| \frac{dA}{dx} \right| = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 令  $t' = \pi/(2\omega)$ , 则  $X\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = A\cos\left(\omega \times \frac{\pi}{2\omega}\right) = 0$ , 故

$$p_X(x) = \delta(x)$$

例 1.2 利用重复抛掷硬币的实验定义一个随机过程

$$X(t) = \begin{cases} \cos \pi t, & \text{出现正面} \\ 2t, & \text{出现反面} \end{cases}$$

设“出现正面”和“出现反面”的概率为  $1/2$ 。

(1) 求  $X(t)$  的一维分布函数  $F_X\left(x, \frac{1}{2}\right)$  和  $F_X(x, 1)$ ;

(2) 求  $X(t)$  的二维分布函数  $F_X\left(x_1, x_2; \frac{1}{2}, 1\right)$ 。

解 令随机变量  $Y$  表示抛掷硬币实验的结果。若“出现正面”，令  $Y=1$ ；若“出现反面”，令  $Y=-1$ ，且有  $P\{Y=1\} = P\{Y=-1\} = \frac{1}{2}$ 。

(1) 当  $t = \frac{1}{2}$  时，若  $Y=1$ ，则

$$X\left(\frac{1}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

若  $Y=-1$ ，则

$$X\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

于是

$$\begin{aligned} F_X\left(x, \frac{1}{2}\right) &= P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right) \leq x\right\} = P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right) \leq x \mid Y=1\right\} \cdot P\{Y=1\} + \\ &\quad P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right) \leq x \mid Y=-1\right\} \cdot P\{Y=-1\} \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

同理可得

$$F_X(x, 1) = P\{X(1) \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

(2) 类似地, 当  $t = \frac{1}{2}$  时, 若  $Y = 1$ , 则

$$X\left(\frac{1}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

若  $Y = -1$ , 则

$$X\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

当  $t = 1$  时, 若  $Y = 1$ , 则

$$X(1) = \cos \pi = -1$$

若  $Y = -1$ , 则

$$X(1) = 2 \times 1 = 2$$

于是

$$F_X\left(x_1, x_2; \frac{1}{2}, 1\right) = P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right) \leq x_1, X(1) \leq x_2\right\} = \begin{cases} 0, & x_1 < 0, -\infty < x_2 < \infty \\ 0, & x_1 \geq 0, x_2 < -1 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x_1 < 1, -1 \leq x_2 < 2 \\ \frac{1}{2}, & x_1 \geq 1, -1 \leq x_2 < 2 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x_1 < 1, x_2 \geq 2 \\ 1, & x_1 \geq 1, x_2 \geq 2 \end{cases}$$

例 1.3 给定一个随机过程  $X(t)$  和任一实数  $x$ , 定义另一个随机过程

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & X(t) \leq x \\ 0, & X(t) > x \end{cases}$$

证明  $Y(t)$  的均值函数和自相关函数分别为  $X(t)$  的一维和二维分布函数。

证明 证法一: 设  $p_1(x, t)$  和  $p_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$  分别为  $X(t)$  的一维和二维概率密度, 则

$$\begin{aligned} m_Y &= E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) p_1(x, t) dx \\ &= \int_{-\infty}^x p_1(x, t) dx = F_1(x, t) \\ R_Y(t_1, t_2) &= E[Y(t_1)Y(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_1 y_2 p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \\
 &= F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)
 \end{aligned}$$

证法二：注意到对应于任意给定的  $t$ ,  $Y(t)$  是一个仅仅取值为 0 或 1 的离散型随机变量，因此

$$m_Y = E[Y(t)] = 1 \cdot P\{Y(t) = 1\} + 0 \cdot P\{Y(t) = 0\}$$

$$= P\{X(t) \leq x\} = F_1(x, t)$$

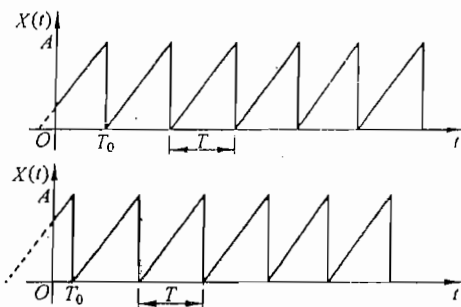
$$R_Y(t_1, t_2) = E[Y(t_1)Y(t_2)]$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \times 1 \times P\{Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 1\} + 1 \times 0 \times P\{Y(t_1) = 1, Y(t_2) = 0\} + \\
 &\quad 0 \times 1 \times P\{Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 1\} + 0 \times 0 \times P\{Y(t_1) = 0, Y(t_2) = 0\} \\
 &= P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\} \\
 &= F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)
 \end{aligned}$$

例 1.4 考虑随机过程  $X(t)$ ，其样本函数是周期性锯齿波。两个典型的样本函数如例题图 1.4 所示。每个样本函数都具有相同的形状，但它们将  $t=0$  时刻以后出现的第一个零值时刻记为  $T_0$ ，假设  $T_0$  是一个均匀分布的随机变量

$$p_{T_0}(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求  $X(t)$  的一维概率密度  $p_X(x)$ 。



例题图 1.4

解 由三角关系可得

$$X(t) = \frac{A}{T}(T - T_0 + t), \quad -T + T_0 \leq t \leq T_0$$

其中

$$T_0 = T - \frac{T}{A}X(t) + t = f(X)$$

于是可以求得  $X(t)$  的概率密度为

$$\begin{aligned}
 p_X(x) &= p_{T_0}[f(x)] \left| \frac{dT_0}{dx} \right| \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{A}, & 0 \leq x \leq A \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
 \end{aligned}$$



由于  $p_X(x)$  与  $t$  无关, 表明  $X(t)$  是一阶平稳随机过程。

**例 1.5** 若正弦波随机过程  $X(t)$  取如下形式:

$$X(t) = A \cos(\omega t + \Theta)$$

其中振幅  $A$  取常数, 角频率  $\omega$  取常数, 相位  $\Theta$  是一个随机变量, 它均匀分布于  $[-\pi, \pi]$  间, 即

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi < \theta < \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求在  $t$  时刻随机过程  $X(t)$  的概率密度  $p_X(x)$ 。

**解** 根据特征函数的定义, 有

$$\phi_X(v) = E[e^{jvX(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} p_X(x) dx \quad (1)$$

此外, 又有

$$\begin{aligned} \phi_X(v) &= E[e^{jvA \cos(\omega t + \Theta)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvA \cos(\omega t + \theta)} p(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jvA \cos(\omega t + \theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi + \omega t}^{\pi + \omega t} e^{jvA \cos y} dy \end{aligned}$$

根据积分性质, 若  $\phi_X(t)$  为周期函数, 周期为  $T$ , 则

$$\int_{-\frac{T}{2} + \alpha}^{\frac{T}{2} + \alpha} \phi_X(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \phi_X(t) dt$$

式中  $\alpha$  为任意常数, 故

$$\phi_X(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jvA \cos y} dy = \int_{-A}^A e^{jv} \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}} dx \quad (2)$$

比较式(1)和式(2), 可得  $X(t)$  的概率密度为

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}}, & |x| < A \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

**例 1.6** 将例题 1.4 中的锯齿波过程作一点改动, 使每个脉冲的幅度  $A$  为服从麦克斯韦(Maxwell)分布的随机变量

$$p_A(a) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}a^2}{a^3\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2a^2}\right), & a \geq 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$$

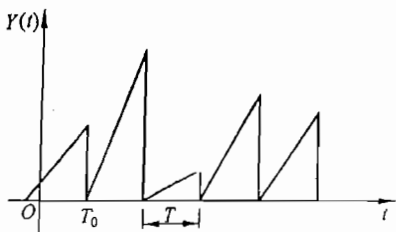
例题图 1.6 给出了一个典型的样本函数, 其中  $T_0$  的定义和例题 1.4 相同。假设不同脉冲的幅度  $A$  之间统计独立, 并均与  $T_0$  统计独立, 求  $Y(t)$  的一维概率密度  $p_Y(y)$ 。

**解** 根据独立性假设, 对于任意时刻  $t$  可将  $Y(t)$  表示为

$$Y(t) = AX(t)$$

其中  $X(t)$  为例题 1.4 中的等幅锯齿波, 幅度为 1。已知统计独立的随机变量之积的概率密度为

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} p_A(a) p_X\left(\frac{y}{a}\right) da$$



例题图 1.6

其中  $p_A(a)$  已知, 且有

$$p_X\left(\frac{y}{a}\right) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \frac{y}{a} \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \int_y^{\infty} \frac{1}{a} \cdot \frac{\sqrt{2}a^2}{a^3\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2a^2}\right) da \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_y^{\infty} \frac{a}{a^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2a^2}\right) da \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\alpha} \exp\left(-\frac{y^2}{2a^2}\right), & y \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

注意  $p_Y(y)$  恰好是高斯概率密度正半部分的两倍。因  $p_Y(y)$  与  $t$  无关, 故  $Y(t)$  是一阶平稳的。

例 1.7 考虑一个正弦振荡器, 由于器件的热噪声和分布参数的影响, 振荡器的输出正弦波可视为一个随机过程

$$X(t) = A \sin(\Omega t + \Theta)$$

其中振幅  $A$ 、角频率  $\Omega$  和相位  $\Theta$  是相互独立的随机变量, 并且已知

$$\begin{aligned} p_A(a) &= \begin{cases} \frac{2a}{A_0^2}, & 0 \leq a \leq A_0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ p_{\Omega}(\omega) &= \begin{cases} \frac{1}{100}, & 250 \leq \omega \leq 350 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ p_{\Theta}(\theta) &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

(1) 求  $X(t)$  的一维概率密度;

(2)  $X(t)$  是一阶平稳过程吗?

解 (1) 首先设

$$Y(t) = \sin(\omega t + \Theta)$$

其中  $\omega$  为常数。注意到对于任意时刻  $t$ ,  $Y(t)$  不是  $\Theta$  的单调函数, 应用特征函数法可以求得

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & -1 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

进一步设

$$Z(t) = a\sin(\omega t + \Theta) = aY(t)$$

其中  $a, \omega$  均为常数。显然

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= p_Y\left(\frac{z}{a}\right) \left|\frac{dy}{dz}\right| \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-z^2}}, & -a < z < a \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

比较  $X(t)$  和  $Z(t)$  可以看出

$$Z(t) = X(t | A = a, \Omega = \omega)$$

即  $Z(t)$  是  $X(t)$  的条件形式, 因此有

$$p_Z(z) = p_{X|A,\Omega}(x | a, \omega)$$

故

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, a, \omega) da d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{X|A,\Omega}(x | a, \omega) p_A(a) p_{\Omega}(\omega) da d\omega \\ &= \int_x^{A_0} \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \times \frac{2a}{A_0^2} da \int_{250}^{350} \frac{1}{100} d\omega \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi A_0^2} \sqrt{A_0^2 - x^2}, & 0 \leq x \leq A_0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

(2)  $p_X(x)$  与  $t$  无关, 所以  $X(t)$  是一阶平稳过程。

例 1.8 随机过程定义为

$$X(t) = f(t + \epsilon)$$

其中  $f(t)$  是具有周期  $T$  的周期波形,  $\epsilon$  在区间  $(0, T)$  内为均匀分布的随机变量。证明  $X(t)$  是平稳随机过程。

证明 由题设可知

$$p_{\epsilon}(\epsilon) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 < \epsilon < T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

于是可以求得

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) p_{\epsilon}(\epsilon) d\epsilon$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T f(t+\varepsilon) \frac{1}{T} d\varepsilon \\
&= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(s) ds \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T f(s) ds \\
&= m_X \\
R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\
&= \int_0^T f(t_1+\varepsilon)f(t_2+\varepsilon) \frac{1}{T} d\varepsilon \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T f(t_1+\varepsilon)f(t_2+\varepsilon) d\varepsilon \\
&= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{T+t_1} f(s)f(s+t_2-t_1) ds \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T f(s)f(s+t_2-t_1) ds \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T f(s)f(s-\tau) ds, \quad \tau = t_1 - t_2
\end{aligned}$$

故  $X(t)$  是平稳随机过程。

注：若  $f(t)$  是周期为  $T$  的周期函数，则有

$$\int_{x_0}^{T+x_0} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

例 1.9 考虑一维随机游走过程  $Y_n$ ，其中  $Y_0=0, Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ， $X_i$  为一个取值  $-1$  和  $+1$  的随机变量，已知  $P\{X_i=-1\}=q, P\{X_i=+1\}=p$ ，并且  $X_i$  彼此统计独立。

- (1) 求  $P\{Y_n=m\}$ ;
- (2) 求  $E[Y_n]$  和  $\text{var}[Y_n]$ ;
- (3) 若  $p>q$ ，则  $Y_n$  是平稳的吗？为什么？

解 (1) 根据特征函数的定义，有

$$\phi_{X_i}(v) = E\{e^{jvX_i}\} = pe^{jv} + qe^{-jv}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

由于  $Y_n$  是  $n$  个统计独立的随机变量之和，因此  $Y_n$  的特征函数应为  $X_i$  的特征函数之积，即

$$\begin{aligned}
\phi_{Y_n}(v) &= (pe^{jv} + qe^{-jv})^n \\
&= \sum_{k=0}^n C_n^k p^{n-k} e^{j(n-k)v} q^k e^{-jkv} \\
&= \sum_{k=0}^n C_n^k p^{n-k} q^k e^{j(n-2k)v}
\end{aligned}$$

根据定义

$$\phi_{Y_n}(v) = \sum_m P(Y_n = m) e^{jmv}$$

故

$$P\{Y_n = n - 2k\} = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^{n-k} q^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

令  $m = n - 2k$ , 则有

$$P\{Y_n = m\} = \frac{n!}{\left(\frac{n-m}{2}\right)! \left(\frac{n+m}{2}\right)!} p^{\frac{n+m}{2}} q^{\frac{n-m}{2}}, \quad m = -n, -n+2, \dots, n$$

(2) 因为

$$E[Y_n] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$$

且

$$E[X_i] = 1 \times p + (-1) \times q = p - q$$

故

$$E[Y_n] = n(p - q)$$

又因

$$E[X_i^2] = 1 \times p + 1 \times q = p + q = 1$$

故

$$\text{var}[X_i] = E[X_i^2] - \{E[X_i]\}^2 = 1 - (p - q)^2$$

所以

$$\text{var}[Y_n] = n[1 - (p - q)^2]$$

(3) 当  $p > q$  时,  $Y_n$  是非平稳的。因为  $Y_n$  的均值和方差都有随  $n$  线性增加的趋势。

例 1.10 给定一个随机变量  $\Theta$ , 其特征函数为  $\phi(v)$ , 另外给定一个常数  $\omega$ , 构造一个随机过程

$$X(t) = \cos(\omega t + \Theta)$$

证明当且仅当  $\phi(1) = \phi(2) = 0$  时,  $X(t)$  才是一个广义平稳过程, 并举出一个满足上述条件的例子。

证明 先考察均值

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E\{\cos(\omega t + \Theta)\} \\ &= E[\cos\Theta]\cos\omega t - E[\sin\Theta]\sin\omega t \end{aligned}$$

当且仅当

$$\phi(1) = E[\cos\Theta] + jE[\sin\Theta] = 0$$

时,  $m_X(t)$  才与  $t$  无关。

再考察自相关函数

$$\begin{aligned} R_X(t + \tau, t) &= E\{\cos[\omega(t + \tau) + \Theta]\cos(\omega t + \Theta)\} \\ &= \frac{E\{\cos\omega\tau + \cos(2\omega t + \omega\tau + 2\Theta)\}}{2} \\ &= \frac{\cos\omega\tau}{2} + \frac{E[\cos 2\Theta]\cos(2\omega t + \omega\tau)}{2} - \frac{E[\sin 2\Theta]\sin(2\omega t + \omega\tau)}{2} \end{aligned}$$

当且仅当

$$\phi(2) = E[\cos 2\Theta] + jE[\sin 2\Theta] = 0$$

即

$$E[\cos 2\theta] = E[\sin 2\theta] = 0$$

时,  $R_X(t+\tau, t)$  与  $t$  无关, 仅取决于时间差  $\tau$ 。

综上所述, 当且仅当

$$\phi(1) = \phi(2) = 0$$

时,  $X(t)$  为广义平稳过程。

例如, 当  $\theta$  在  $[0, \pi]$  上均匀分布时, 则有

$$\phi(v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jv\theta} d\theta = \frac{\sin \pi v}{\pi v} e^{j\pi v}$$

显然满足

$$\phi(1) = \phi(2) = 0$$

并且  $X(t)$  为广义平稳过程。

例 1.11 随机过程由下述三个样本函数组成, 且等概率发生

$$X(t, e_1) = 1, X(t, e_2) = \sin t, X(t, e_3) = \cos t$$

(1) 计算均值  $m_X(t)$  和自相关函数  $R_X(t_1, t_2)$ ;

(2) 该随机过程  $X(t)$  是否平稳?

解 (1) 根据定义, 均值和自相关函数分别为

$$m_X(t) = E[X(t)] = \frac{1}{3}(1 + \sin t + \cos t)$$

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \sin t_1 \sin t_2 + \frac{1}{3} \times \cos t_1 \cos t_2$$

$$= \frac{1}{3}(1 + \cos \tau)$$

式中,  $\tau = t_1 - t_2$ 。

(2) 由于均值  $m_X(t)$  与时间  $t$  有关, 故  $X(t)$  是非平稳过程。

例 1.12 设随机过程  $X(t) = A \cos(\omega t + \theta)$ , 其中  $A$  为具有瑞利分布的随机变量, 其概率密度为

$$p_A(a) = \begin{cases} \frac{a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right), & a \geq 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$$

$$p_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

随机变量  $\theta$  与  $A$  统计独立,  $\omega$  为常数。试问  $X(t)$  是否为平稳随机过程?

解 根据定义, 可以求得均值和自相关函数分别为

$$m_X(t) = E[X(t)]$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} p_A(a) p_\theta(\theta) \times a \cos(\omega t + \theta) d\theta da$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \times \frac{1}{2\pi} \times a \cos(\omega t + \theta) d\theta da \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
 R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\
 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} a^2 \cos(\omega t_1 + \theta) \cos(\omega t_2 + \theta) \times p_A(a) p_\theta(\theta) d\theta da \\
 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a^2 \{ \cos \omega(t_1 - t_2) + \cos[\omega(t_1 + t_2) + 2\theta] \} \times \\
 &\quad \frac{a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \times \frac{1}{2\pi} da d\theta \\
 &= \frac{\cos \omega(t_1 - t_2)}{2} \int_0^\infty \frac{a^3}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) da \\
 &= \sigma^2 \cos \omega(t_1 - t_2) = \sigma^2 \cos \omega \tau
 \end{aligned}$$

其中,  $\tau = t_1 - t_2$ 。故  $X(t)$  是平稳随机过程。

例 1.13 设随机过程  $Z(t) = X \sin t + Y \cos t$ , 其中  $X$  和  $Y$  是相互独立的二元随机变量, 它们分别以  $2/3$  和  $1/3$  的概率取值  $-1$  和  $2$ 。

(1) 求  $Z(t)$  的均值函数和自相关函数;

(2) 证明  $Z(t)$  是广义平稳过程, 但不是狭义平稳过程。

解 (1) 根据定义, 可以求得均值和自相关函数分别为

$$\begin{aligned}
 m_Z(t) &= E[X \sin t + Y \cos t] \\
 &= \underline{E(X) \sin t + E(Y) \cos t}
 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
 R_Z(t_1, t_2) &= E[(X \sin t_1 + Y \cos t_1)(X \sin t_2 + Y \cos t_2)] \\
 &= E(X^2) \sin t_1 \sin t_2 + E(XY) [\sin t_1 \cos t_2 + \cos t_1 \sin t_2] + \\
 &\quad E(Y^2) \cos t_1 \cos t_2
 \end{aligned}$$

其中

$$E(X) = E(Y) = (-1) \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 0$$

直接算  $E(X^2)$   $E(X^2) = E(Y^2) = (-1)^2 \times \frac{2}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} = 2$

注意:  $E(XY) = E(X)E(Y) = 0$

将上述结果代入  $m_Z(t)$  和  $R_Z(t_1, t_2)$  中可得

$$m_Z(t) = 0$$

$$R_Z(t_1, t_2) = 2 \cos(t_1 - t_2)$$

(2) 由(1)可知  $Z(t)$  是广义平稳过程, 进一步考察

$$\begin{aligned}
 E[Z^3(t)] &= R_3(0) < \infty \quad \underline{E[Z^3(t)]} = E[(X \sin t + Y \cos t)^3] \\
 &= E(X^3) \sin^3 t + 3E(X^2 Y) \sin^2 t \cos t + \\
 &\quad 3E(X Y^2) \sin t \cos^2 t + E(Y^3) \cos^3 t
 \end{aligned}$$

故  $Z(t)$  不是狭义平稳过程。

故  $Z(t)$  不是狭义平稳过程。

其中

$$E(X^3) = E(Y^3) = (-1)^3 \times \frac{2}{3} + 2^3 \times \frac{1}{3} = 2$$

$$E(X^2 Y) = E(X^2)E(Y) = 0$$

$$E(XY^2) = E(X)E(Y^2) = 0$$

将上述结果代入上式可得

$$E[Z^3(t)] = 2(\sin^3 t + \cos^3 t)$$

故  $Z(t)$  不是狭义平稳过程。

**例 1.14** 定义复随机过程  $X(t) = Yf(t)$ , 其中  $Y$  是一个零均值的实随机变量,  $f(t)$  是一个确定性复函数。证明  $X(t)$  是广义平稳过程的充要条件是  $f(t)$  具有如下形式:

$$f(t) = ce^{j(\lambda t + \theta)}$$

其中  $c, \lambda, \theta$  均为常数。

证明 充分性 若

$$f(t) = ce^{j(\lambda t + \theta)}$$

则有

$$X(t) = cYe^{j(\lambda t + \theta)}$$

且

$$E[X(t)] = E(Y)ce^{j(\lambda t + \theta)} = 0$$

因此有

$$\begin{aligned} E[X(t+\tau)X^*(t)] &= E\{cYe^{j[\lambda(t+\tau)+\theta]} \cdot cYe^{-j(\lambda t + \theta)}\} \\ &= E(Y^2)c^2 e^{j\lambda\tau} = \sigma^2 c^2 e^{j\lambda\tau} \end{aligned}$$

其中  $\sigma^2 = E(Y^2)$ , 故  $X(t)$  为广义平稳过程。

必要性 若  $X(t)$  为广义平稳过程, 则

$$E[X(t+\tau)X^*(t)] = E(Y^2)f(t+\tau)f^*(t)$$

必须与  $t$  无关, 而只是  $\tau$  的函数。若取  $\tau=0$ , 则应有

$$|f(t)|^2 = c_1$$

其中,  $c_1$  为常数。因此,  $f(t)$  可以写成如下形式:

$$f(t) = ce^{j\varphi(t)}$$

其中,  $c$  为常数,  $\varphi(t)$  是待定函数。由于

$$f(t+\tau)f^*(t) = c^2 e^{j[\varphi(t+\tau)-\varphi(t)]}$$

应与  $t$  无关, 因此应有

$$\frac{d}{dt}[\varphi(t+\tau) - \varphi(t)] = 0$$

即对于任意的  $\tau$ , 均有

$$\frac{d\varphi(t+\tau)}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

因此可令  $\varphi'(t) = \lambda$ , 其中,  $\lambda$  为实常数。解这个微分方程可得  $\varphi(t) = \lambda t + \theta$ ,  $\theta$  为实常数。故

$$f(t) = ce^{j(\lambda t + \theta)}$$

**例 1.15** 当且仅当  $U$  与  $V$  是不相关的随机变量, 并且均值都为 0, 方差相等时, 过程



$X(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t$  是广义平稳过程。

证明 充分性 设  $U$  与  $V$  是满足所述条件的随机变量, 则

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E[X(t)] = E[U\cos\omega t + V\sin\omega t] \\ &= E(U)\cos\omega t + E(V)\sin\omega t \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_X(t+\tau, t) &= E\{[U\cos\omega(t+\tau) + V\sin\omega(t+\tau)] \times \\ &\quad [U\cos\omega t + V\sin\omega t]\} \\ &= E[U^2\cos\omega(t+\tau)\cos\omega t + V^2\sin\omega(t+\tau)\sin\omega t] + \\ &\quad E[UV][\cos\omega(t+\tau)\sin\omega t + \sin\omega(t+\tau)\cos\omega t] \\ &= \sigma^2\cos\omega\tau \end{aligned}$$

式中,  $\sigma^2 = \text{var}(U) = \text{var}(V)$ 。故  $X(t)$  为广义平稳过程。

必要性 设  $X(t)$  是广义平稳过程, 若  $m_U = E(U)$  且  $m_V = E(V)$ , 则

$$m_X(t) = m_U\cos\omega t + m_V\sin\omega t$$

显然, 若  $m_X(0) = 0$ , 则有  $m_U = 0$ 。取  $t = \frac{\pi}{2\omega}$  时, 有  $m_V = 0$ ; 若  $m_X(0) \neq 0$ , 取  $t = 0$  与

$t = \frac{\pi}{2\omega}$ , 有  $m_X = m_U = m_V$ , 于是

$$1 = \cos\omega t + \sin\omega t$$

上式在一些点, 如  $t = \frac{\pi}{4\omega}$  处显然不成立, 故必须  $m_U = m_V = 0$ 。

$$\begin{aligned} E[X(t+\tau)X(t)] &= E(U^2)\cos\omega(t+\tau)\cos\omega t + E(V^2)\sin\omega(t+\tau)\sin\omega t + \\ &\quad E(UV)\sin\omega(\tau+2t) \end{aligned}$$

若上式与  $t$  无关, 必须  $E(UV) = 0, E(U^2) = E(V^2)$ 。这就给出了所给条件的必要性。

例 1.16 设  $\{Y_n, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  是不相关的随机变量序列, 具有相同的均值  $\mu$  和方差  $\sigma^2$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_m$  是任意实数, 令

$$X_n = a_1 Y_n + a_2 Y_{n-1} + \dots + a_m Y_{n-m+1} \quad \text{把 } n \text{ 看成 } t$$

(1) 求过程  $X_n$  的相关函数;

(2)  $X_n$  平稳吗? 为什么?

解 (1) 按定义可以求得均值和自相关函数分别为

$$m_X = E[X_n] = \mu(a_1 + a_2 + \dots + a_m)$$

和

$$R_X(n+v, n) = E[X_{n+v}X_n]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^m a_i Y_{n+v-i+1} \sum_{j=1}^m a_j Y_{n-j+1}\right] \quad \text{因为互不相关!}$$

$$= E[a_m a_m Y_{n-v+1}^2 + a_{m-v+1} a_{m-1} Y_{n-m+2}^2 + \dots + a_1 a_{v+1} Y_n^2]$$

$$= \begin{cases} (\sigma^2/\mu^2) (a_m a_{m-v} + a_{m-1} a_{m-v+1} + \dots + a_{v+1} a_1), & v \leq m-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 因为  $R_X(n+v, n)$  只依赖于滞后  $v$ , 而与  $n$  无关, 故  $X_n$  为平稳序列。

例 1.17 设有一个复随机过程

$$Z(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{i\omega_k t}$$

式中  $A_k (k=1, 2, \dots, n)$  是  $n$  个实随机过程,  $\omega_k (k=1, 2, \dots, n)$  是  $n$  个实数。试问  $A_k$  应满足什么条件才能使  $Z(t)$  成为一个复的广义平稳过程。

解 根据定义, 其均值为

$$m_z(t) = E[Z(t)] = E\left[\sum_{k=1}^n A_k e^{i\omega_k t}\right] = \sum_{k=1}^n E(A_k) e^{i\omega_k t}$$

当且仅当  $E(A_k) = 0 (k=1, 2, \dots, n)$  时,  $m_z(t)$  才与  $t$  无关。

相关函数为

$$\begin{aligned} R_z(t+\tau, t) &= E[Z(t+\tau)Z^*(t)] \\ &= E\left[\sum_{k=1}^n A_k e^{i\omega_k(t+\tau)} \cdot \sum_{m=1}^n A_m e^{-i\omega_m t}\right] \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n E(A_k A_m) e^{i(\omega_k - \omega_m)t} e^{i\omega_k \tau} \end{aligned}$$

当且仅当

$$E(A_k A_m) = \sigma_k^2 \delta_{km} = \begin{cases} \sigma_k^2, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

有

$$R_z(\tau) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 e^{i\omega_k \tau}$$

故  $R_z(\tau)$  与  $t$  无关。

综上可得,  $Z(t)$  为广义平稳过程的条件为

- (1)  $E(A_k) = 0, \quad k=1, 2, \dots, n;$
- (2)  $E(A_k A_m) = \sigma_k^2 \delta_{km}, \quad k, m=1, 2, \dots, n.$

例 1.18 设随机过程  $X(t) = A \sin(2\pi\theta_1 t + \theta_2)$ , 其中  $A$  为常数,  $\theta_1$  和  $\theta_2$  为相互独立的随机变量。 $\theta_1$  的概率密度函数为偶函数,  $\theta_2$  在  $[-\pi, \pi]$  内均匀分布, 证明:

- (1)  $X(t)$  为广义平稳过程;
- (2)  $X(t)$  的均值是各态历经的。

证明 (1) 注意到

$$E\{g(\theta_1, \theta_2)\} = E\{E[g(\theta_1, \theta_2) | \theta_1]\}$$

利用这一公式有

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E[A \sin(2\pi\theta_1 t + \theta_2)] \\ &= AE\{E[\sin 2\pi\theta_1 t \cos \theta_2 + \cos 2\pi\theta_1 t \sin \theta_2 | \theta_1]\} \\ &= AE\{\sin 2\pi\theta_1 t E[\cos \theta_2] + \cos 2\pi\theta_1 t E[\sin \theta_2]\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E\{A \sin(2\pi\theta_1 t_1 + \theta_2) \cdot A \sin(2\pi\theta_1 t_2 + \theta_2)\} \\ &= \frac{A^2}{2} E\{E[\cos 2\pi\theta_1(t_1 - t_2) - \cos[2\pi\theta_1(t_1 + t_2) + 2\theta_2] | \theta_1]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{A^2}{2} E\{\cos 2\pi\theta_1(t_1 - t_2)\} \\
 &= A^2 \int_0^\infty \cos 2\pi\theta_1(t_1 - t_2) p_{\theta_1}(\theta_1) d\theta_1 \\
 &= R_X(\tau)
 \end{aligned}$$

其中,  $\tau = t_1 - t_2$

(2) 因为

$$\begin{aligned}
 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A \sin(2\pi\theta_1 t + \theta_2) dt \\
 &= 0 \\
 &= m_X(t)
 \end{aligned}$$

$\because \int_{-T}^T \sin(2\pi\theta_1 t + \theta_2) dt \leq 1$

故  $X(t)$  的均值是各态历经的。

直接由定义出发可以给出第(1)题的另一证法:

$$\begin{aligned}
 p(\theta_1, \theta_2) &= p_1(\theta_1) p_2(\theta_2) \\
 m_X(t) &= E[A \sin(2\pi\theta_1 t + \theta_2)] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A \sin(2\pi\theta_1 t + \theta_2) p_1(\theta_1) p_2(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \\
 &= A \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\theta_1 t + \theta_2) d\theta_2 \right] p_1(\theta_1) d\theta_1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_X(t_1, t_2) &= E\{A \sin(2\pi\theta_1 t_1 + \theta_2) \cdot A \sin(2\pi\theta_1 t_2 + \theta_2)\} \\
 &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \{ \cos 2\pi\theta_1(t_1 - t_2) - \cos[2\pi\theta_1(t_1 + t_2) + 2\theta_2] \} \frac{1}{2\pi} d\theta_2 \right] \times \\
 &\quad p_1(\theta_1) d\theta_1 \\
 &= A^2 \int_0^\infty \cos 2\pi\theta_1(t_1 - t_2) p_1(\theta_1) d\theta_1 \\
 &= R_X(\tau), \quad \tau = t_1 - t_2
 \end{aligned}$$

可以看出结论同第(1)题完全相同。

**例 1.11** 设  $X(t)$  为一平稳随机过程, 若对应于某一个  $T \neq 0$ ,  $X(t)$  的自相关函数  $R(\tau)$  满足  $R(T) = R(0)$ , 证明  $R(\tau)$  必为以  $T$  为周期的周期函数。

证明 由于

$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$$

且

$$\begin{aligned}
 R(T) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega T} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos \omega T d\omega
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 R(0) - R(T) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos \omega T) S(\omega) d\omega \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

其中  $(1 - \cos \omega T) S(\omega) \geq 0$ , 故有  $(1 - \cos \omega T) S(\omega) = 0$ .

因此可得

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega_k) \delta(\omega - \omega_k)$$

式中  $\omega_k = \frac{1}{T} \times 2k\pi$ . 故

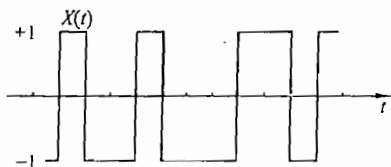
$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega_k) e^{j\omega_k \tau}$$

即  $R(\tau)$  是以  $T$  为周期的周期函数。

**例 1.20** 设  $X(t)$  为一个二元波过程, 它的一个样本函数如图 1.20 所示。已知在 4 个单位长度的时间间隔内波形取正、负值的概率各为  $1/2$ , 假设任意一个间隔内波形的取值与任何其他间隔的取值无关, 为使过程均有平稳性, 例题图 1.20 中有意不设定时间轴的原点。

(1) 求  $X(t)$  的自相关函数;

(2) 求  $X(t)$  的功率谱密度。



例题图 1.20

**解** (1) 令  $X_1 = X(t_1)$ ,  $X_2 = X(t_2)$ , 根据相关函数定义, 有

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X_1 X_2] \\ &= 1 \times 1 \times P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} + 1 \times (-1) \times P\{X_1 = 1, X_2 = -1\} + \\ &\quad (-1) \times 1 \times P\{X_1 = -1, X_2 = 1\} + (-1) \times (-1) \times P\{X_1 = -1, X_2 = -1\} \\ &= P\{X_1 = 1 | X_2 = 1\} \cdot P\{X_2 = 1\} - P\{X_1 = 1 | X_2 = -1\} \cdot P\{X_2 = -1\} - \\ &\quad P\{X_1 = -1 | X_2 = 1\} \cdot P\{X_2 = 1\} + P\{X_1 = -1 | X_2 = -1\} \cdot P\{X_2 = -1\} \end{aligned}$$

已知

$$P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2$$

以及

$$P\{X_1 = -1 | X_2 = 1\} = 1 - P\{X_1 = 1 | X_2 = 1\}$$

$$P\{X_1 = -1 | X_2 = -1\} = 1 - P\{X_1 = 1 | X_2 = -1\}$$

将上述结果代入  $R_X(t_1, t_2)$  式中可得

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} \times P\{X_1 = 1 | X_2 = 1\} - \frac{1}{2} \times P\{X_1 = 1 | X_2 = -1\} - \\ &\quad \frac{1}{2} \times [1 - P\{X_1 = 1 | X_2 = 1\}] + \frac{1}{2} [1 - P\{X_1 = 1 | X_2 = -1\}] \\ &= P\{X_1 = 1 | X_2 = 1\} - P\{X_1 = 1 | X_2 = -1\} \end{aligned}$$

下面分两种情况讨论。

①  $|t_2 - t_1| > 1$

此时  $t_1$  和  $t_2$  位于不同区间,由题中条件可知  $X_1$  和  $X_2$  统计独立,因此

$$P\{X_1 = 1 | X_2 = 1\} = P\{X_1 = 1 | X_2 = -1\} = P\{X_1 = 1\} = \frac{1}{2}$$

将上式代入  $R_X(t_1, t_2)$  中可得

$$R_X(t_1, t_2) = 0$$

②  $|t_2 - t_1| \leq 1$

首先考虑概率  $P\{X_1 = 1 | X_2 = -1\}$ 。这一概率意味着“ $t_1$  和  $t_2$  位于不同区间”以及“ $X_1$  和  $X_2$  取值不同”这两个事件同时发生的概率,即这应是一个联合事件的概率,但注意到上述两个事件是统计独立的,因而这个联合概率密度应为两个事件分别发生的概率之积。下面分别求出这两个概率。

设“ $t_1$  和  $t_2$  位于不同区间”为事件  $A$ 。若  $|t_2 - t_1| = 0$ , 则  $P(A) = 0$ ; 若  $|t_2 - t_1| = 1$ , 则  $P(A) = 1$ ; 在  $(0, 1)$  区间内,  $P(A)$  线性变化,即

$$P(A) = |t_2 - t_1|, \quad |t_2 - t_1| \leq 1$$

设“ $X_1$  和  $X_2$  取值不同”为事件  $B$ , 显然

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

故有

$$P\{X_1 = 1 | X_2 = -1\} = P(A)P(B) = \frac{1}{2} |t_2 - t_1|, \quad |t_2 - t_1| \leq 1$$

同理可得

$$\begin{aligned} P\{X_1 = 1 | X_2 = 1\} &= 1 - P\{X_1 = -1 | X_2 = 1\} \\ &= 1 - \frac{1}{2} |t_2 - t_1|, \quad |t_2 - t_1| \leq 1 \end{aligned}$$

综合可得

$$R_X(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|, & |\tau| \leq 1 \\ 0, & |\tau| > 1 \end{cases}$$

式中  $\tau = t_1 - t_2$ 。

(2) 根据维纳-辛钦公式,有

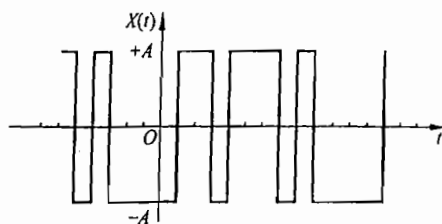
$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-1}^1 (1 - |\tau|) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

例 1.21 设  $X(t)$  为一个随机电报波过程,它的一个样本函数如例题图 1.21 所示。已知在任一时刻波形取  $+A$  和  $-A$  的概率相同,在时间间隔  $\tau$  内波形变号的次数  $n$  服从

参数为  $\lambda$  的泊松分布

$$P(n, \tau) = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau}$$

- (1) 求  $X(t)$  的自相关函数;  
(2) 求  $X(t)$  的功率谱密度函数。



例题图 1.21

解 (1) 根据自相关函数的定义, 可得

当  $\tau \geq 0$  时

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E[X(t)X(t-\tau)] \\ &= A^2 \cdot P\{X(t-\tau) = X(t)\} + (-A^2) \cdot P\{X(t-\tau) = -X(t)\} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} P\{X(t-\tau) = X(t)\} &= P\{n \text{ 为偶数}\} \\ &= \exp(-\lambda\tau) \sum_{\substack{n=0 \\ \text{偶数}}}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} \\ &= \exp(-\lambda\tau) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2k}}{(2k)!} \\ &= \exp(-\lambda\tau) \cosh(\lambda\tau) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} P\{X(t-\tau) = -X(t)\} &= P\{n \text{ 为奇数}\} \\ &= \exp(-\lambda\tau) \sum_{\substack{n=0 \\ \text{奇数}}}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} \\ &= \exp(-\lambda\tau) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \exp(-\lambda\tau) \sinh(\lambda\tau) \end{aligned}$$

将上式代入  $R_X(\tau)$  的表达式可得

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= A^2 \exp(-\lambda\tau) [\cosh(\lambda\tau) - \sinh(\lambda\tau)] \\ &= A^2 \exp(-2\lambda\tau), \quad \tau \geq 0 \end{aligned}$$

由于  $R_X(\tau)$  是偶函数, 故

$$R_X(\tau) = A^2 \exp(-2\lambda |\tau|)$$

(2) 利用傅里叶变换对

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

故

$$S_X(\omega) = \frac{4\lambda A^2}{\omega^2 + 4\lambda^2}$$

例 1.22 已知随机过程  $X(t)$  和  $Y(t)$  的谱密度为

$$S_X(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9}$$

$$S_Y(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 2}$$

求  $X(t)$  和  $Y(t)$  的自相关函数和均方值。

解 因为已知

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9} \\ &= \frac{3}{8} \times \frac{1}{\omega^2 + 1} + \frac{5}{8} \times \frac{1}{\omega^2 + 9} \end{aligned}$$

根据维纳-辛钦定理有

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}[S_X(\omega)] \\ &= \frac{3}{16} e^{-|\tau|} + \frac{5}{48} e^{-3|\tau|} \end{aligned}$$

于是

$$\psi_X^2 = R_X(0) = \frac{3}{16} + \frac{5}{48} = \frac{7}{24}$$

同理可得

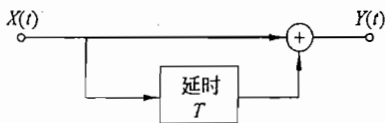
$$S_Y(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 2} = \frac{-1}{\omega^2 + 1} + \frac{2}{\omega^2 + 2}$$

$$R_Y(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\sqrt{2}|\tau|} - \frac{e^{-|\tau|}}{2}$$

$$\psi_Y^2 = R_Y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

例 1.23 在例题图 1.23 中, 若  $X(t)$  是平稳随机过程, 证明过程  $Y(t)$  的功率谱是

$$S_Y(\omega) = 2S_X(\omega)(1 + \cos\omega T)$$



例题图 1.23

解 根据自相关函数的定义, 有

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[Y(t)Y(t-\tau)] \\ &= E\{[X(t) + X(t-T)][X(t-\tau) + X(t-\tau-T)]\} \\ &= E[X(t)X(t-\tau)] + E[X(t)X(t-\tau-T)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{j\omega T} + e^{-j\omega T} \\ = 2\cos\omega T \end{aligned}$$

不满足叠加定理!

$$\begin{aligned} & E[X(t-T)X(t-\tau)] + E[X(t-T)X(t-\tau-T)] \\ &= 2R_X(\tau) + R_X(\tau-T) + R_X(\tau+T) \end{aligned}$$

根据维纳-辛钦定理, 可得

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \mathcal{F}[R_Y(\tau)] \\ &= 2S_X(\omega) + S_X(\omega)e^{j\omega T} + S_X(\omega)e^{-j\omega T} \\ &= 2S_X(\omega)(1 + \cos\omega T) \end{aligned}$$

例 1.24 设  $S(\omega)$  是一个随机过程的功率谱密度函数, 证明  $d^2 S(\omega)/d\omega^2$  不可能是功率谱密度函数。

证明 根据自相关函数的性质可知

$$|R(0)| \geq |R(\tau)|$$

又设

$$S_1(\omega) = \frac{d^2 S(\omega)}{d\omega^2}$$

由于相关函数和功率谱密度构成傅里叶变换对, 亦即

$$R_1(\tau) \leftrightarrow S_1(\omega)$$

根据傅里叶变换的微分性质可知

$$R_1(\tau) = -\tau^2 R(\tau)$$

若对应于某个  $\tau_1 \neq 0$ , 有  $R(\tau_1) \neq 0$ , 则

$$|R_1(0)| < |R_1(\tau_1)|$$

即  $R_1(\tau)$  不可能是自相关函数, 因此  $S_1(\omega) = d^2 S(\omega)/d\omega^2$  不可能是功率谱密度函数。

习题课:

例 1.25 设随机过程  $X(t) = a \cos(\Omega t + \Theta)$ , 其中  $a$  为常量,  $\Omega$  和  $\Theta$  为相互独立的随机变量, 且  $\Theta$  均匀分布于  $(0, 2\pi)$  中,  $\Omega$  的一维概率密度为偶函数, 即  $f_\Omega(\omega) = f_\Omega(-\omega)$ 。

求证  $X(t)$  的功率谱密度为

$$S_X(\omega) = \pi a^2 f_\Omega(\omega)$$

证明 根据相关函数的定义, 有

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E\{X(t)X(t-\tau)\} \\ &= E\{a^2 \cos(\Omega t + \Theta) \cos[\Omega(t-\tau) + \Theta]\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} a^2 \cos(\omega t + \theta) \cos[\omega(t-\tau) + \theta] \frac{f_\Omega(\omega) d\theta d\omega}{2\pi} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{2} \cos\omega\tau f_\Omega(\omega) d\omega \\ &= \int_0^{\infty} a^2 \cos\omega\tau f_\Omega(\omega) d\omega \end{aligned}$$

根据维纳-辛钦定理, 可得

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} a^2 \cos\omega'\tau f_\Omega(\omega') e^{-j\omega\tau} d\omega' d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \pi a^2 [\delta(\omega - \omega') + \delta(\omega + \omega')] f_\Omega(\omega') d\omega' \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 f(x) * \delta(x) &= f(x) \\
 f(x) \times \delta(x) &= f(0) \delta(x) \\
 \int f(x) \delta(x) dx &= f(0) \\
 &= \frac{1}{2} \pi a^2 [f_a(\omega) + f_a(-\omega)] \\
 &= \pi a^2 f_a(\omega)
 \end{aligned}$$

故有

$$S_X(\omega) = \pi a^2 f_a(\omega)$$

例 1.26 设  $X(t)$  和  $Y(t)$  是联合平稳的。试证明

$$\operatorname{Re}\{S_{XY}(\omega)\} = \operatorname{Re}\{S_{YX}(\omega)\}$$

$$\operatorname{Im}\{S_{XY}(\omega)\} = -\operatorname{Im}\{S_{YX}(\omega)\}$$

证明 先求互相关函数

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t-\tau)] = R_{YX}(-\tau)$$

根据维纳-辛钦定理,有

$$\begin{aligned}
 S_{XY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \\
 &= S_{YX}^*(\omega)
 \end{aligned}$$

所以

$$\operatorname{Re}\{S_{XY}(\omega)\} = \operatorname{Re}\{S_{YX}(\omega)\}$$

$$\operatorname{Im}\{S_{XY}(\omega)\} = -\operatorname{Im}\{S_{YX}(\omega)\}$$

例 1.27 给定一个随机过程

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta)$$

式中,  $A$  和  $\omega_0$  为常量,  $\Theta$  在区间  $(0, 2\pi)$  内为均匀分布的随机变量。

(1) 利用  $P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt$ , 求  $X(t)$  的功率;

(2) 利用式

$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T^2(\omega)|]}{2T}$$

求  $X(t)$  的功率谱,并由式

$$P_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega$$

计算功率。

解 (1) 根据均方值定义,有

$$\begin{aligned}
 E[X^2(t)] &= E[A^2 \cos^2(\omega_0 t + \Theta)] \\
 &= \frac{A^2}{2} E[1 + \cos(2\omega_0 t + 2\Theta)] \\
 &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\omega_0 t + \theta)}{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{A^2}{2}
 \end{aligned}$$

于是,可以求得

$$P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt = \frac{A^2}{2}$$

(2) 根据定义,有

$$\begin{aligned} \Lambda_T(\omega) &= \int_{-T}^T X(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-T}^T A \cos(\omega_0 t + \Theta) e^{-j\omega t} dt \\ &= AT e^{j\Theta} \frac{\sin[(\omega - \omega_0)T]}{(\omega - \omega_0)T} + AT e^{-j\Theta} \frac{\sin[(\omega + \omega_0)T]}{(\omega + \omega_0)T} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} E[|X_T(\omega)|^2] &= E\left\{ \left| AT e^{j\Theta} \frac{\sin[(\omega - \omega_0)T]}{(\omega - \omega_0)T} + AT e^{-j\Theta} \frac{\sin[(\omega + \omega_0)T]}{(\omega + \omega_0)T} \right|^2 \right\} \\ &= A^2 T^2 \{ \text{Sinc}^2[(\omega - \omega_0)T] + \text{Sinc}^2[(\omega + \omega_0)T] + \\ &\quad \text{Sinc}[(\omega - \omega_0)T] \text{Sinc}[(\omega + \omega_0)T] \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos 2\theta d\theta \} \end{aligned}$$

按照功率谱的定义,可以求得

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T} \\ &= \frac{A^2}{2} \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

其中利用了

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{\pi} \left[ \frac{\sin(aT)}{aT} \right] = \delta(a)$$

于是所求功率为

$$\begin{aligned} P_X &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{2} \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] d\omega \\ &= \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

例 1.28 若随机过程  $X(t)$  的样本函数可用傅里叶级数表示为

$$X(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_0(t+t_0) + b_n \sin n\omega_0(t+t_0)]$$

式中  $t_0$  是在一个周期内均匀分布的随机变量,  $a_n, b_n$  是常数。试求出  $X(t)$  的功率谱密度表达式。

解 首先,把  $X(t)$  化成复指数形式的级数,即

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_0(t+t_0) + b_n \sin n\omega_0(t+t_0)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0(t+t_0)} \end{aligned}$$

这里,  $F_n = \frac{(a_n - jb_n)}{2}$ ,  $F_0 = \frac{a_0}{2}$ ,  $F_n = F_{-n}^*$ .

根据相关函数的定义,有

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E\{X(t)X^*(t-\tau)\} \\ &= E\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0(t+t_0)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m^* e^{-jm\omega_0(t-\tau+t_0)}\right\} \\ &= E\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_n F_m^* e^{j(n-m)\omega_0(t+t_0)} e^{jm\omega_0\tau}\right\} \end{aligned}$$

由于

$$E\{e^{jn\omega_0(t+t_0)}\} = 0$$

故有

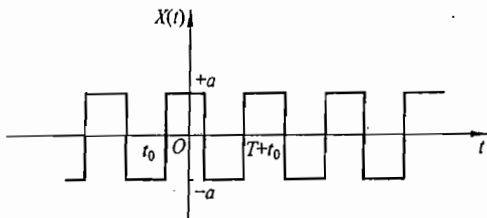
$$R_X(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |F_m|^2 e^{jm\omega_0\tau}$$

根据维纳-辛钦定理,可得

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} |F_m|^2 \delta(\omega - m\omega_0) \\ &= 2\pi |F_0|^2 + 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} |F_m|^2 [\delta(\omega - m\omega_0) + \delta(\omega + m\omega_0)] \\ &= \frac{\pi a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m^2 + b_m^2}{2} \pi [\delta(\omega - m\omega_0) + \delta(\omega + m\omega_0)] \end{aligned}$$

例 1.29 随机过程  $X(t)$  具有例题图 1.29 所示的周期性样本函数,  $a$  是一个常数,  $t_0$  是在周期  $T$  内均匀分布的随机变量。

- (1) 求  $X(t)$  的功率谱密度  $S_X(\omega)$ ;
- (2) 当  $Y(t) = a + X(t)$  时, 求  $S_Y(\omega)$ 。



例题图 1.29

解 (1) 首先将  $X(t)$  展成傅里叶级数, 即

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0(t-t_0)}$$

式中

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{2a}{jn^2\pi} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

根据相关函数的定义

$$\begin{aligned}
 R_X(\tau) &= E\{X(t)X^*(t-\tau)\} \\
 &= E\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0(t-t_0)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m^* e^{-jm\omega_0(t-\tau-t_0)}\right\} \\
 &= E\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_n F_m^* e^{j(n-m)\omega_0(t-t_0)} e^{jm\omega_0\tau}\right\} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} |F_m|^2 e^{jm\omega_0\tau}
 \end{aligned}$$

利用维纳-辛钦定理, 可以求得

$$\begin{aligned}
 S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} |F_m|^2 \delta(\omega - m\omega_0) \\
 &= 2\pi |F_0|^2 + 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} |F_m|^2 [\delta(\omega - m\omega_0) + \delta(\omega + m\omega_0)] \\
 &= \frac{8a^2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin^2\left(\frac{m\pi}{2}\right) \delta(\omega - m\omega_0)
 \end{aligned}$$

(2) 若  $Y(t) = a + X(t)$ , 则有

$$\begin{aligned}
 R_Y(\tau) &= E[Y(t)Y(t-\tau)] \\
 &= E\{[a + X(t)][a + X(t-\tau)]\} \\
 &= a^2 + aE[X(t)] + aE[X(t-\tau)] + E[X(t)X(t-\tau)] \\
 &= a^2 + R_X(\tau)
 \end{aligned}$$

根据维纳-辛钦定理, 故有

$$\begin{aligned}
 S_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= 2\pi a^2 \delta(\omega) + S_X(\omega) \\
 &= 2\pi a^2 \delta(\omega) + \frac{8a^2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin^2\left(\frac{m\pi}{2}\right) \delta(\omega - m\omega_0)
 \end{aligned}$$

例 1.30 设平稳过程  $X(t)$  具有有限的均方值, 其功率谱密度函数为有理函数

$$S(\omega) = C \frac{(\omega - \alpha_1)(\omega - \alpha_2) \cdots (\omega - \alpha_N)}{(\omega - \beta_1)(\omega - \beta_2) \cdots (\omega - \beta_M)}, \quad \alpha_i \neq \beta_i$$

其中  $N$  和  $M$  是偶函数。证明以下几点:

- (1)  $S(\omega)$  为实偶函数;
- (2)  $C$  为常数;
- (3) 具有非零虚部的  $\alpha_i$  和  $\beta_i$  分别共轭成对出现;

- (4) 对于任意  $\omega$ , 都有  $S(\omega) \geq 0$ ;  
 (5) 分子若有实根, 则必为偶次的;  
 (6) 分母不可能有实根;  
 (7)  $N < M$ .

证明 (1) 根据维纳-辛钦定理, 有

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cos\omega\tau d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \sin\omega\tau d\tau \end{aligned}$$

因  $R(\tau)$  是偶函数,  $\sin\omega\tau$  是奇函数, 故后一项为零。所以  $S(\omega)$  为实偶函数。

$$\begin{aligned} (2) \lim_{\omega \rightarrow \infty} S(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} C\omega^{N-M} \frac{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\omega}\right) \left(1 - \frac{\alpha_2}{\omega}\right) \cdots \left(1 - \frac{\alpha_N}{\omega}\right)}{\left(1 - \frac{\beta_1}{\omega}\right) \left(1 - \frac{\beta_2}{\omega}\right) \cdots \left(1 - \frac{\beta_M}{\omega}\right)} \\ &\rightarrow C\omega^{N-M}, \quad \omega \rightarrow \infty \end{aligned}$$

由于对于任意  $\omega$ ,  $S(\omega)$  都为实偶函数, 故  $C$  必为实常数。

(3) 零点为例, 设

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 + jb_1 = r_1 e^{j\theta_1} \\ \alpha_2 &= a_2 + jb_2 = r_2 e^{j\theta_2} \end{aligned}$$

则

$$(\omega - \alpha_1)(\omega - \alpha_2) = \omega^2 - [(a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)]\omega + r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

欲使上式为实函数, 必须有  $b_1 = -b_2$ ,  $\theta_1 = -\theta_2$ , 即  $\alpha_1 = \alpha_2^*$ 。

对于极点的讨论相同。

(4) 根据定义显然。

(5) 设  $\alpha_i$  为一个实数, 当且仅当含  $\alpha_i$  的因子为偶次, 即  $(\omega - \alpha_i)^{2n}$  时, 才能保证对于任意  $\omega$  均有  $S(\omega) \geq 0$ 。若不然, 即  $n$  为奇数, 那么  $S(\omega)$  中出现因子  $(\omega - \alpha_i)^n$ , 则显然当  $\omega < \alpha_i$  和  $\omega > \alpha_i$  两种不同情况时,  $S(\omega)$  将变号, 从而与第(4)题矛盾。

(6) 因为假定过程  $X(t)$  具有有限的均方值  $\psi_X^2$ , 且

$$\psi_X^2 = R_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$$

即  $S(\omega)$  沿实轴可积, 若  $S(\omega)$  的分母中有一实根, 那么当积分路线经过此点时, 将使积分变为奇异的, 与假设矛盾。

(7) 由于假设  $\psi_X^2$  有限, 即积分  $\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$  存在, 因此应用

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega S(\omega) = 0$$

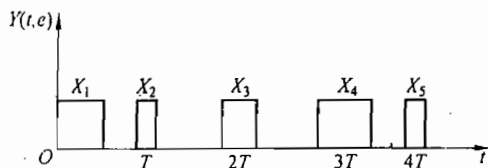
当  $\omega$  很大时, 由第(2)题已知

$$S(\omega) = \frac{C}{\omega^{M-N}}$$

欲保证  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega S(\omega) = 0$  成立, 即应有  $M > N$ 。又由第(3)题已知  $N$  和  $M$  均为偶数, 则必有  $M \geq N + 2$ , 因此  $N < M$ 。

### 1.3 练习题

1.1 设某信号源,每  $T$  秒产生一个幅度为  $A$  的方波脉冲,其脉冲宽度  $X$  为均匀分布于  $[0, T]$  中的随机变量。这样构成一个随机过程  $Y(t), 0 \leq t < \infty$ , 其中一个样本函数示于练习题图 1.1。设不同间隔中的脉冲是统计独立的。求  $Y(t)$  的概率密度  $f_Y(y)$ 。



练习题图 1.1

1.2 设随机过程  $X(t)$  的均值为  $m_X(t)$ , 协方差函数为  $C_X(t_1, t_2)$ ,  $\phi(t)$  为普通确知函数。求随机过程  $Y(t) = X(t) + \phi(t)$  的均值和方差。

1.3 若相关函数  $R_X(\tau)$  存在某些  $T$ , 使得  $R_X(T) = R_X(0)$ , 则以概率 1 存在

$$X(t+T) = X(t)$$

1.4 一个随机过程

$$X(t) = A \sin(\omega_0 t + \Theta)$$

其中,  $A$  和  $\omega_0$  是常数,  $\Theta$  是在  $(-\pi, \pi)$  区间内均匀分布的随机变量。

(1) 求  $Y(t) = X^2(t)$  的自相关函数;

(2)  $X(t)$  和  $Y(t)$  是联合广义平稳过程吗?

1.5 随机过程

$$X(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

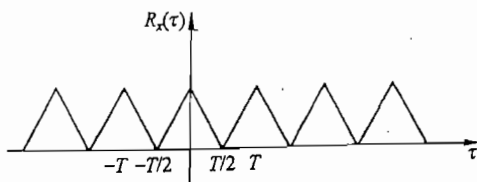
式中,  $\omega_0$  为常数,  $A$  和  $B$  是具有不同概率密度函数、方差相同、均值为零的不相关随机变量。试证:  $X(t)$  是广义平稳但不是严格平稳的。

1.6 已知随机变量  $\Theta$  在  $[0, 2\pi]$  内均匀分布, 试判断下列随机过程是否广义平稳:

(1)  $X(t) = \cos \omega t + \cos(\omega t + \Theta)$ ;

(2)  $X(t) = (1 - e^{-\beta t}) \cos(\omega t + \Theta)$ 。

1.7 设随机过程  $X(t)$  具有周期的自相关函数, 其周期为  $T$ , 如练习题图 1.7 所示。试求该过程的功率谱密度。



练习题图 1.7

## 1.8 设两平稳过程

$$X(t) = \cos(\omega_0 t + \Theta)$$

$$Y(t) = \sin(\omega_0 t + \Theta)$$

式中,  $\omega_0$  为常数,  $\Theta$  是在  $(0, 2\pi)$  内均匀分布的随机变量。试问该两随机过程是否联合平稳; 它们是否相关、正交和统计独立。

## 1.9 设随机过程

$$Z(t) = X \cos \omega t - Y \sin \omega t$$

式中,  $\omega$  为常量。  $X$  和  $Y$  是统计独立、具有同分布的高斯过程  $N(0, \sigma^2)$ 。令

$$V = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \phi = \arctan \frac{Y}{X}$$

- (1) 求  $f_V(v)$  和  $f_\phi(\phi)$ ;
- (2)  $V$  和  $\phi$  统计独立吗?
- (3) 求  $f_Y(y, t)$ , 并问  $Y(t)$  平稳吗?

1.10 设随机过程  $X(t) = b + Nt$ , 已知  $b$  为常数,  $N$  为高斯随机变量, 其均值为  $m$ 、方差为  $\sigma^2$ 。求随机过程  $X(t)$  的一维概率密度。

1.11 研究随机电报信号的均值的各态历经性, 其自相关函数为

$$R(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$$

1.12 设随机过程  $X(t) = A \sin(\omega t + \Theta)$ , 其中  $A, \Theta$  是相互独立的统计随机变量, 且

$$P\left(\theta = \frac{1}{2}\right) = P\left(\theta = -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$P_A(a) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |a| < 1 \\ 0, & |a| \geq 1 \end{cases}$$

试证明  $X(t)$  是广义平稳过程, 但不是严格平稳过程。

1.13 热噪声的取样观察值为  $\{X(n), n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ,  $\{X(n)\}$  是一实随机序列, 它相互独立, 且均服从  $N(0, \sigma^2)$  分布。求它的均值和相关函数。问这一随机序列是平稳的吗?

1.14 若  $X(t), Y(t)$  为实平稳随机过程, 且联合平稳。则有

$$(1) R_{XY}(\tau) \leq R_X(0)R_Y(0);$$

$$(2) C_{XY}(\tau) \leq C_X(0)C_Y(0).$$

1.15 设有平稳随机过程  $X(t) = Y$ , 其中  $Y$  是异于零的随机变量。问该过程是否各态历经?

## 1.16 设随机过程

$$X(t) = A^2 \cos^2(\omega_0 t + \Theta)$$

其中  $A$  和  $\omega_0$  是常数,  $\Theta$  在  $(0, 2\pi)$  区间内均匀分布。

(1) 利用式

$$P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt$$

求  $X(t)$  的功率;

(2) 利用式

$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T}$$

求  $X(t)$  的功率谱, 并由式

$$P_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega$$

计算功率。

1.17 设  $X(t)$  为平稳随机过程, 其自相关函数为  $R(\tau)$ 。构造随机积分

$$S = \int_a^b X(t) dt$$

证明  $E[S^2] = \int_{-T}^T (T - |\tau|) R(\tau) d\tau, T = b - a$ 。

1.18 设随机过程  $X(t)$  和  $Y(t)$  为

$$X(t) = U \cos t + V \sin t$$

$$Y(t) = U \sin t + V \cos t$$

其中  $U$  和  $V$  是两个相互独立的随机变量, 已知  $E(U) = E(V) = 0, E(U^2) = E(V^2) = \sigma^2$ 。

证明:

- (1)  $X(t)$  和  $Y(t)$  各自是广义平稳的随机过程;
- (2)  $X(t)$  和  $Y(t)$  不是广义联合平稳的随机过程。

1.19 设随机过程  $Z(t) = X(t) \cos \omega t - Y(t) \sin \omega t$ , 其中  $\omega$  为常数,  $X(t)$  和  $Y(t)$  为平稳随机过程。

- (1) 求  $Z(t)$  的自相关函数  $R_Z(t_1, t_2)$ ;
- (2) 若  $R_X(\tau) = R_Y(\tau), R_{XY}(\tau) = 0$ , 求  $R_Z(t_1, t_2)$ 。

1.20 设  $X(t)$  是雷达的发射信号, 遇到目标后返回接收机的微弱信号为  $aX(t - \tau_1)$ , 其中  $a \ll 1, \tau_1$  是信号返回时间。由于接收到的信号总是伴随有噪声  $n(t)$ , 于是接收到的信号为

$$Y(t) = aX(t - \tau_1) + n(t)$$

- (1) 如果  $X(t)$  和  $Y(t)$  是联合平稳过程, 求互相关函数  $R_{XY}(\tau)$ ;
- (2) 在第(1)题条件下, 假如  $n(t)$  为零均值, 且与  $X(t)$  统计独立, 求  $R_{XY}(\tau)$ 。

1.21 已知平稳随机过程的相关函数为

- (1)  $R_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-a|\tau|}$ ;
- (2)  $R_X(\tau) = \sigma_X^2 (1 - a|\tau|), |\tau| \leq \frac{1}{a}$ 。

试求其相关时间  $\tau_0$ 。

1.22 求随机过程  $X(t) = a \sin(\omega t + \Phi)$  的数学期望和方差。这里  $a$  和  $\omega$  都是正的常数,  $\Phi$  是以  $f(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\varphi^2/2}$  为概率密度函数的高斯分布随机变量。

1.23 设随机过程  $X(t) = A \sin(\omega t + \Theta)$ , 其中  $A$  和  $\omega$  为常数,  $\Theta$  为均匀分布的随机变量, 且



$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

证明  $X(t)$  为各态历经过程。

1.24 已知随机过程  $X(t)$  的自相关函数为

$$R_X(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega_1 \tau + b^2 e^{-a|\tau|}$$

求平稳过程  $X(t)$  的谱密度  $S_X(\omega)$ 。

1.25 设  $X(t)$  和  $Y(t)$  是两个相互独立的平稳过程, 均值分别为  $m_X$  和  $m_Y$ , 且  $X(t)$  的功率谱密度为  $S_X(\omega)$ 。定义  $Z(t) = X(t) + Y(t)$ , 求  $S_{XY}(\omega)$  和  $S_{XZ}(\omega)$ 。

1.26 设随机过程  $Z(t) = X(t)Y(t)$ , 其中  $X(t)$  和  $Y(t)$  是相互独立的平稳过程。

(1) 用  $X(t)$  和  $Y(t)$  的自相关函数和功率谱密度函数表示  $Z(t)$  的自相关函数  $R_Z(\tau)$  和功率谱密度  $S_Z(\omega)$ ;

(2) 设  $X(t)$  为二元波过程, 已知谱密度为

$$S_X(\omega) = \frac{\sin^2(\omega/2)}{(\omega/2)^2}$$

$$Y(t) = \cos(\omega_0 t + \Theta)$$

其中  $\omega_0$  为常数,  $\Theta$  是在  $[0, 2\pi]$  上均匀分布的随机变量, 求  $S_Z(\omega)$ 。

1.27 设

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i(t)$$

其中  $\alpha_i$  是一组实常量, 过程  $X_i(t)$  平稳且正交, 证明

$$S_X(\omega) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 S_{X_i}(\omega)$$

1.28 复随机过程

$$Z(t) = A e^{j\Omega t}$$

其中  $\Omega$  的概率密度为  $f_\Omega(\omega)$ ,  $A$  为复常数。求  $Z(t)$  的功率谱密度。

1.29 给定一个具有自相关函数  $R_X(\tau)$  的平稳过程  $X(t)$ ; 试证

$$P\{|X(t+\tau) - X(t)| \geq a\} \leq \frac{2[R(0) - R(\tau)]}{a^2}$$

1.30 过程  $X(t)$  的功率谱为

$$S(\omega) = \frac{1}{(1 + \omega^2)^2}$$

求自相关函数  $R(\tau)$ 。

1.31 已知

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{2\pi a_i}{\omega^2 + \omega_i^2}$$

求自相关函数  $R(\tau)$ 。

1.32 设  $X(t) = U + Vt$ , 实随机向量  $(U, V)$  的协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & r \\ r & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

求  $X(t)$  的协方差函数。

1.33 设二阶矩过程  $X(t)$  在  $[a, b]$  上可积, 证明:

$$(1) D\left[\int_a^b X(t) dt\right] \leq (b-a) \int_a^b D[X(t)] dt;$$

$$(2) \left\{ D\left[\int_a^b X(t) dt\right] \right\}^{1/2} \leq \int_a^b \sqrt{D[X(t)]} dt.$$

1.34 设

$$X(t) = \sum_{i=1}^n (U_i \cos \omega_i t + V_i \sin \omega_i t)$$

其中  $\omega_i > 0$  为常数,  $U_i$  和  $V_i (i=1, 2, \dots, n)$  为互不相关且均值为零、方差为  $\sigma^2$  的实值随机变量, 因而  $X(t)$  为平稳过程, 求相关函数及谱密度。

1.35 设  $X(n) (-\infty < n < \infty)$  为白噪声,  $|a| < 1$ , 则

$$Y(n) = \sum_{k=0}^n a^k X(n-k)$$

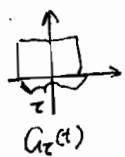
为平稳序列, 并求它的相关函数和谱密度。

1.36 试证: 在任意一个二阶矩过程上加一个任意的非随机函数, 其协方差函数保持不变。

$$e^{-at}u(t) \rightarrow \frac{1}{a+j\omega} \quad te^{-at}u(t) \rightarrow \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

$$e^{-a|t|} \rightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2} \quad \delta(t) \rightarrow 1$$

$$u(t) \rightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$



## 随机过程的线性变换

解微分方程

$$S_a(\omega, t) \rightarrow \frac{\pi}{\omega_0} G_{2\omega_0}(\omega)$$

$$\frac{1}{a+j\omega} \rightarrow$$

$$\frac{1}{a-j\omega} \rightarrow$$

可实现

$$F(t) \rightarrow 2\pi f(\omega)$$

$$f(at) \rightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad f(-t) \rightarrow F(-\omega)$$

$$f(t-t_0) \rightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

$$f(t) e^{j\omega_0 t} \rightarrow F(\omega - \omega_0)$$

$$\frac{d}{dt} f(t) \rightarrow j\omega F(\omega)$$

$$f_1(t) * f_2(t) \rightarrow F_1(\omega) F_2(\omega)$$

$$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \rightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

## 2.1 内容提要

### 2.1.1 线性系统

任意系统的输入和输出间的关系可以表示为

$$Y(t) = L[X(t)]$$

式中,  $X(t)$  表示输入,  $Y(t)$  表示输出,  $L$  是一个算子。如果算子  $L$  是线性的, 则称该系统为线性系统。

满足下列两个条件的算子为线性算子:

- (1)  $L\{aX(t)\} = aL\{X(t)\}$ , 其中  $a$  是任意常数,  $X(t)$  为任意函数;
- (2)  $L\{X_1(t) + X_2(t)\} = L\{X_1(t)\} + L\{X_2(t)\}$ , 其中  $X_1(t)$  和  $X_2(t)$  为任意函数。

任何线性集总参数的动态系统可用卷积函数描述它的输出输入关系, 即

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) X(\tau) d\tau$$

其中  $h(t, \tau) = L\{\delta(t - \tau)\}$  代表在  $\tau$  时刻输入端加以冲激信号而在  $t$  时刻输出端的响应。

对于因果性动态系统

$$h(t, \tau) = 0, \quad \tau > t$$

有

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) X(\tau) d\tau$$

对于线性、时不变并具有因果性的动态系统, 输出过程为

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) X(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} X(t - \tau) h(\tau) d\tau = X(t) * h(t)$$

### 2.1.2 随机过程的均方微分和积分

#### 1. 随机过程的极限

当  $t \rightarrow t_0$  时, 随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  依概率收敛于随机变量  $X$ , 其定义为

$$\lim_{t \rightarrow t_0} P\{|X(t) - X| > \epsilon\} = 0$$

或记为

$$\lim_{t \rightarrow t_0} X(t) \stackrel{P}{=} X$$

当  $t \rightarrow t_0$  时, 随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  依均方意义收敛于随机变量  $X$ , 其定义为

$$\lim_{t \rightarrow t_0} E\{[X(t) - X]^2\} = 0$$

或记为

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \text{l. i. m} X(t) = X$$

## 2. 随机过程的连续性

随机过程  $X(t)$  依均方收敛意义下在  $t$  时刻连续, 定义为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \text{l. i. m} X(t + \Delta t) = X(t)$$

或

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} E\{[X(t + \Delta t) - X(t)]^2\} = 0$$

随机过程  $X(t)$  依概率收敛意义下在  $t$  时刻连续, 定义为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} X(t + \Delta t) \stackrel{P}{=} X(t)$$

## 3. 随机过程的均方微分

定义 设有随机过程  $X(t)$ , 若有

$$\dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

则称  $\dot{X}(t)$  为  $X(t)$  的均方导数。

若有  $X^{(n)}(t) = \frac{d^n X(t)}{dt^n}$ , 则称  $X^{(n)}(t)$  为  $X(t)$  的  $n$  阶导数。

导数过程的数字特征:

$$(1) m_{\dot{X}}(t) = \frac{d}{dt} m_X(t);$$

$$(2) R_{\dot{X}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_X(t_1, t_2);$$

$$(3) R_{X\dot{X}}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2} R_X(t_1, t_2), R_{\dot{X}X}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_1} R_X(t_1, t_2);$$

$$(4) R_{X^{(n)}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^{2n}}{\partial t_1^n \partial t_2^n} R_X(t_1, t_2).$$

如果  $X(t)$  为平稳随机过程, 则有

平稳随机过程通过微分

$$\left\{ \begin{aligned} (1) m_{\dot{X}}(t) &= \frac{d}{dt} m_X(t) = 0; \\ (2) R_{\dot{X}}(\tau) &= -\frac{d^2 R_X(\tau)}{d\tau^2}, \tau = t_1 - t_2; \\ (3) R_{X\dot{X}}(\tau) &= -\frac{d}{d\tau} R_X(\tau), \tau = t_1 - t_2, R_{\dot{X}X}(\tau) = \frac{d}{d\tau} R_X(\tau), \tau = t_1 - t_2. \end{aligned} \right.$$

导数过程的功率谱 设随机过程  $X(t)$  为可微的平稳过程, 相关函数  $R_X(\tau)$ , 其导数

过程的功率谱为

$$S_{\dot{X}}(\omega) = \omega^2 S_X(\omega)$$

以此类推,  $n$  阶导数过程的功率谱为

$$S_{X^{(n)}}(\omega) = \omega^{2n} S_X(\omega)$$

互功率谱为

$$\begin{cases} S_{X\dot{X}}(\omega) = j\omega S_X(\omega) \\ S_{\dot{X}X}(\omega) = -j\omega S_X(\omega) \end{cases}$$

#### 4. 随机过程的均方积分

定义 随机过程  $\{X(t), t \in T\}$ , 若在域  $[a, b]$  均方可积, 且有

$$Y(t) = \int_a^t X(s) ds, a \leq t \leq b, \quad a, b \in T$$

则称  $Y(t)$  为  $X(t)$  的积分过程。

积分过程的数字特征:

(1) 均值

$$m_Y(t) = \int_a^t m_X(s) ds$$

(2) 自相关函数

$$R_Y(t_1, t_2) = \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} R_X(s, u) ds du$$

(3) 互相关函数

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \int_a^{t_1} R_X(t_1, s_2) ds_2$$

$$R_{YX}(t_1, t_2) = \int_a^{t_1} R_X(s_1, t_2) ds_1$$

(4) 协方差函数

$$C_Y(t_1, t_2) = \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} [R_X(u, s) - m_X(u)m_X(s)] du ds$$

若随机过程  $X(t)$  为平稳过程, 则有

$$(1) m_Y(t) = m_X \int_a^t ds = m_X(t-a);$$

$$(2) R_Y(t_1, t_2) = \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} R_X(s-u) ds du;$$

$$(3) R_{XY}(t_1, t_2) = \int_a^{t_1} R_X(t_1 - s_2) ds_2, R_{YX}(t_1, t_2) = \int_a^{t_1} R_X(s_1 - t_2) ds_1.$$

### 2.1.3 随机过程通过线性系统的分析

#### 1. 随机过程线性变换冲激响应法

设线性系统的冲激响应为  $h(t)$ , 输入随机过程为  $X(t)$ , 输出过程的数字特征定义如下。

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) h(t-\tau) d\tau = X(t) * h(t)$$

(1) 均值

$$m_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} m_X(\tau) h(t-\tau) d\tau = m_X(t) * h(t)$$

(2) 互相关函数

$$\begin{aligned} R_{YX}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_1 - u, t_2) h(u) du \\ &= R_X(t_1, t_2) * h(t_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_1, t_2 - u) h(u) du \\ &= R_X(t_1, t_2) * h(t_2) \end{aligned}$$

(3) 自相关函数

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(t_1, t_2 - u) h(u) du \\ &= R_{YX}(t_1, t_2) * h(t_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(t_1 - u, t_2) h(u) du \\ &= R_{XY}(t_1, t_2) * h(t_1) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_1 - u, t_2 - v) h(u) h(v) du dv \\ &= R_X(t_1, t_2) * h(t_1) * h(t_2) \end{aligned}$$

如果输入随机过程  $X(t)$  为平稳过程, 则有

(1) 均值

$$m_Y(t) = m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau$$

(2) 互相关函数

$$R_{YX}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau)$$

$$R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau)$$

(3) 自相关函数

$$R_Y(\tau) = R_{YX}(\tau) * h(-\tau)$$

$$R_Y(\tau) = R_{XY}(\tau) * h(\tau)$$

$$= R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = R_X(\tau) * R_h(\tau)$$

或

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau - u) R_h(u) du$$

式中, 系统权函数

$$R_h(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) h(\tau - u) d\tau$$

## 2. 随机过程线性变换的频谱法

设线性系统的传递函数为  $H(j\omega)$ , 输入随机过程  $\{X(t), t \in T\}$ , 其功率谱密度为  $S_X(\omega)$ , 则有:

(1) 输出过程的功率谱密度为

$$S_Y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_X(\omega) \quad R_Y = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

(2) 输入、输出过程的互谱密度为

$$S_{XY}(\omega) = H^*(j\omega) S_X(\omega) \quad R_{XY} = R_X(\tau) * h(-\tau)$$

$$S_{YX}(\omega) = H(j\omega) S_X(\omega) \quad R_{YX} = R_X(\tau) * h(\tau)$$

### 3. 随机过程线性变换的微分方程法

考虑下述随机微分方程:

$$a_n Y^{(n)}(t) + a_{n-1} Y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 Y(t) = X(t)$$

式中  $X(t)$  为输入随机过程,  $Y(t)$  为输出过程, 系数  $a_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, n$ ) 表示线性系统特征。

输出过程的统计特征如下。

(1) 均值

$$E[\dot{Y}(t)] = \dot{m}_Y(t)$$

$$E[Y^{(n)}(t)] = m_Y^{(n)}(t)$$

故有

$$a_n m_Y^{(n)}(t) + a_{n-1} m_Y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 m_Y(t) = m_X(t)$$

初始条件为

$$m_Y(0) = m_Y^{(1)}(0) = \cdots = m_Y^{(n-1)}(0) = 0$$

(2) 自相关函数

$$a_n \frac{\partial^2 R_{XY}(t_1, t_2)}{\partial t_2^2} + \cdots + a_0 R_{XY}(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2)$$

初始条件为

$$\frac{\partial^i R_{XY}(t_1, 0)}{\partial t_2^i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$a_n \frac{\partial^2 R_Y(t_1, t_2)}{\partial t_1^2} + \cdots + a_0 R_Y(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2)$$

初始条件为

$$\frac{\partial^i R_Y(0, t_2)}{\partial t_1^i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

## 2.2 例题

$$f(t) \rightarrow 2\pi f(-\omega)$$

$$f(at) \rightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$f(t-t_0) \rightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

$$f(t) e^{j\omega_0 t} \rightarrow F(\omega - \omega_0)$$

例 2.1 设  $\{X_n\}$  为一个随机变量序列,  $X$  为随机变量。对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 若当  $n \rightarrow \infty$  时, 都有  $X_n$  满足

$$P\{|X_n - X| > \epsilon\} \rightarrow 0$$

则称  $X_n$  依概率收敛于  $X$ 。证明若  $X_n$  依均方收敛于  $X$ , 则  $X_n$  必依概率收敛于  $X$ 。

证明 若  $X_n$  依均方收敛于  $X$ , 根据定义可知

$$E(|X_n - X|^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

由切比雪夫不等式

$$P(|X_n - X| > \epsilon) \leq \frac{E(|X_n - X|^2)}{\epsilon^2}$$

可知, 若当  $n \rightarrow \infty$  时,  $E(|X_n - X|^2) \rightarrow 0$ , 则对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 必有

$$P(|X_n - X| > \epsilon) \rightarrow 0$$

所以若  $X_n$  依均方收敛于  $X$ , 则必依概率收敛于  $X$ .

例 2.2 设二阶矩实随机变量序列  $\{X_n\}, \{Y_n\} (n=1, 2, \dots)$  及二阶矩随机变量  $X, Y$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{X_n\} = E\{X\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{Y_n\} = E\{Y\}$ , 则有

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{X_n\} = E\{X\} = E\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\}$ ;
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{|X_n|^2\} = E\{|X|^2\} = E\{|\lim_{n \rightarrow \infty} X_n|^2\}$ ;
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{aX_n + bY_n\} = aE\{X\} + bE\{Y\}$ , 这里  $a, b$  为常数;
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{X_n Y_n\} = E\{XY\}$ .

证明 (1) 利用施瓦茨不等式

$$\begin{aligned} |E\{X_n\} - E\{X\}| &= |E\{X_n - X\}| \\ &\leq E\{|X_n - X|\} \leq \{E[(X_n - X)^2]\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{X_n\} = E\{X\}$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{X_n - X\} = 0$ , 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{X_n\} = E\{X\} = E\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\}$$

(2) 利用三角不等式

$$\sqrt{E\{|X + Y|^2\}} \leq \sqrt{E\{|X|^2\}} + \sqrt{E\{|Y|^2\}}$$

则有

$$\begin{aligned} E\{|X_n|^2\} &= E\{|X + X_n - X|^2\} \\ &= E\{|X|^2\} + 2E\{|X||X_n - X|\} + E\{|X_n - X|^2\} \\ &\leq E\{|X|^2\} + 2\{E\{|X|^2\} \cdot E\{|X_n - X|^2\}\}^{\frac{1}{2}} + E\{|X_n - X|^2\} \\ &= (\sqrt{E\{|X|^2\}} + \sqrt{E\{|X_n - X|^2\}})^2 \end{aligned}$$

于是可得

$$\sqrt{E\{|X_n|^2\}} - \sqrt{E\{|X|^2\}} \leq \sqrt{E\{|X_n - X|^2\}}$$

若令  $X = X - X_n + X_n$ , 同理可得

$$\sqrt{E\{|X|^2\}} - \sqrt{E\{|X_n|^2\}} \leq \sqrt{E\{|X - X_n|^2\}}$$

故

$$|\sqrt{E\{|X|^2\}} - \sqrt{E\{|X_n|^2\}}| \leq \sqrt{E\{|X - X_n|^2\}}$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $E\{|X_n - X|^2\} \rightarrow 0$ , 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{|X_n|^2\} = E\{|X|^2\} = E\{|\lim_{n \rightarrow \infty} X_n|^2\}$$



(3) 计算

$$\begin{aligned}
 & E\{|aX_n + bY_n - aX - bY|^2\} \\
 &= E\{|a(X_n - X) + b(Y_n - Y)|^2\} \\
 &\leq \{E[|a|^2 |X_n - X|^2]\}^{\frac{1}{2}} + \{E[|b|^2 |Y_n - Y|^2]\}^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

故

$$\text{l. i. m}_{n \rightarrow \infty} (aX_n + bY_n) = aX + bY$$

(4) 由于

$$\begin{aligned}
 |E\{X_m Y_n\} - E\{XY\}| &= |E\{X_m Y_n - XY\}| \\
 &= |E\{X(Y_n - Y) + (X_m - X)Y + (X_m - X)(Y_n - Y)\}| \\
 &\leq E\{|X(Y_n - Y)|\} + E\{|Y(X_m - X)|\} + E\{|(X_m - X)(Y_n - Y)|\} \\
 &\leq \{E[|X|^2]E[|Y_n - Y|^2]\}^{\frac{1}{2}} + \{E[|X_m - X|^2]E[|Y|^2]\}^{\frac{1}{2}} + \\
 &\quad \{E[|X_m - X|^2 |Y_n - Y|^2]\}^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

所以  $\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} E\{X_m Y_n\} = E\{XY\}$ .例 2.3 设有一具有二阶矩的随机变量序列  $\{\xi(n); n=1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\xi(n)$  的相关函数为

$R_{\xi\xi}(n_1, n_2) = E\{\xi(n_1)\xi^*(n_2)\}$ 。若有序列  $\{a_n\}, n=1, 2, 3, \dots$ , 并定义  $\eta(n) = \sum_{k=1}^n a_k \xi(k)$ , 问应具备什么条件才能使  $\eta(n)$  为均方收敛序列。

解

$$\begin{aligned}
 E[\eta(n)\eta^*(m)] &= E\left\{\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_k a_i^* \xi(k)\xi^*(i)\right\} \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_k a_i^* E\{\xi(k)\xi^*(i)\} \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_k a_i^* R_{\xi\xi}(k, i)
 \end{aligned}$$

Loève 收敛准则, 如果  $\{\eta(n)\}$  为均方收敛, 则要求

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} E\{\eta(n)\eta^*(m)\} = c(\text{常数})$$

即要求  $\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_k a_i^* R_{\xi\xi}(k, i) = c(\text{常数}) < \infty$ , 即要求级数  $\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m a_k a_i^* R_{\xi\xi}(k, i)$  为收敛级数。

例 2.4 设平稳过程  $X(t)$  是均方可微的, 其导数为  $X'(t)$ 。证明对于任意给定的  $t$ , 随机变量  $X(t)$  和  $X'(t)$  都是正交的和不相关的, 即

$$E[X(t)X'(t)] = E[X(t)]E[X'(t)] = 0$$

证明 根据相关函数的定义, 有

$$\begin{aligned}
 E[X(t)X'(t)] &= E\left[X(t) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{X(t+\epsilon) - X(t)}{\epsilon}\right] \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E\left[X(t) \frac{X(t+\epsilon) - X(t)}{\epsilon}\right]
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [R(\varepsilon) - R(0)]$$

$$= \underline{R'(0)}$$

考虑到自相关函数的性质

且  $R(\tau)$  为偶函数, 因此  $\tau=0$  为  $R(\tau)$  的极值点, 从而有  $R'(0)=0$ , 由此可得

$$E[X(t)X'(t)] = 0$$

进一步, 若令  $E[X(t)] = m(t)$ , 则  $E[X'(t)] = m'(t)$ 。由于  $X(t)$  为平稳过程,  $m(t)$  为常数, 因此  $m'(t) = 0$ , 从而有

$$E[X(t)]E[X'(t)] = 0$$

所以

$$E[X(t)X'(t)] = E[X(t)]E[X'(t)] = 0$$

例 2.5 已知  $R_X(\tau) = e^{-\tau^2}$ , 如果  $Y(t) = X(t) + \dot{X}(t)$ , 求  $R_Y(\tau)$ 。

解 根据相关函数的定义, 可得

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[Y(t)Y(t-\tau)] \\ &= E\{[X(t) + \dot{X}(t)][X(t-\tau) + \dot{X}(t-\tau)]\} \\ &= E\{X(t)X(t-\tau) + \dot{X}(t)\dot{X}(t-\tau) + \dot{X}(t)X(t-\tau) + X(t)\dot{X}(t-\tau)\} \\ &= \underline{R_X(\tau) - R'_X(\tau) + R'_X(\tau) - R_X(\tau)} \\ &= R_X(\tau) - R'_X(\tau) \\ &= (3 - 4\tau^2)e^{-\tau^2} \end{aligned}$$

例 2.6 设有微分方程

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \eta(t), \quad t \in T$$

$$\xi(t_0) = \xi_0$$

其中  $\eta(t)$  是二阶矩过程,  $\xi_0$  是二阶矩随机变量, 且  $\eta(t)$  和  $\xi_0$  是相互统计独立的。研究  $\xi(t)$  的统计特性。

解 对已知方程两边积分得

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^t \eta(u) du$$

该解是惟一的。又因为

$$E\{\xi(t)\} = E\{\xi(t_0)\} + \int_{t_0}^t E\{\eta(u)\} du$$

因此当  $E\{\eta(u)\} = 0$  时, 有

$$E\{\xi(t)\} = E\{\xi(t_0)\}$$

从而有

$$\begin{aligned} E\{\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}\} &= R_{\xi\xi}(t_1, t_2) \\ &= E\{\xi_0\overline{\xi_0}\} + E\{\xi_0\}E\int_{t_0}^{t_2}\overline{\eta(u)}du + E\{\overline{\xi_0}\}E\int_{t_0}^{t_1}\eta(u)du + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E\left\{\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2}\eta(u)\overline{\eta(v)}dudv\right. \\
&= E\{|\xi_0|^2\} + E\{\xi_0\}\int_{t_0}^{t_1}E\{\eta(u)\}du + \\
& E\{\overline{\xi_0}\}\int_{t_0}^{t_1}E\{\eta(u)\}du + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2}R_{\eta\eta}(u,v)dudv
\end{aligned}$$

若  $E\{\eta(u)\}=0$ , 则

$$R_{\eta\eta}(t_1, t_2) = E\{|\xi_0|^2\} + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2}R_{\eta\eta}(u,v)dudv$$

例 2.7 随机过程  $X(t)$  的自相关函数  $R_X(\tau)$ , 其功率谱为  $S_X(\omega)$ , 若

$$S_X(\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_c$$

证明:

$$(1) R_X(0) - R_X(\tau) \leq \frac{1}{2}R_X(0)\omega_c^2\tau^2;$$

$$(2) P\{|X(t+\tau) - X(t)| > \epsilon\} \leq \frac{\omega_c^2\tau^2 E[X^2(t)]}{\epsilon^2}, \quad \epsilon > 0.$$

证明 (1) 由  $|\sin\omega\tau| \leq |\omega\tau|$ , 可得

$$1 - \cos\omega\tau = 2\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \leq \frac{\omega^2\tau^2}{2}$$

根据给定条件, 有

$$\begin{aligned}
R_X(0) - R_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S_X(\omega) (1 - \cos\omega\tau) d\omega \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S_X(\omega) \frac{\omega^2\tau^2}{2} d\omega \\
&\leq \frac{\omega_c^2\tau^2}{2} \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S_X(\omega) d\omega \\
&= \frac{\omega_c^2\tau^2}{2} R_X(0)
\end{aligned}$$

故

$$R_X(0) - R_X(\tau) \leq \frac{1}{2}R_X(0)\omega_c^2\tau^2$$

(2) 根据切比雪夫不等式, 有

$$\begin{aligned}
P\{|X(t+\tau) - X(t)| > \epsilon\} &\leq \frac{E\{|X(t+\tau) - X(t)|^2\}}{\epsilon^2} \\
&= \frac{2[R_X(0) - R_X(\tau)]}{\epsilon^2}
\end{aligned}$$

利用第(1)题的结论, 则有

$$P\{|X(t+\tau) - X(t)| > \epsilon\} \leq \frac{\omega_c^2\tau^2 E[X^2(t)]}{\epsilon^2}$$

例 2.8 随机过程  $X(t)$  的自相关函数  $R_X(\tau)$ , 功率谱密度为  $S_X(\omega)$ ,  $S_X(\omega)$  的定义和

例 2.7 中  $S_X(\omega)$  的定义相同。证明: 对于  $|\tau| \leq \frac{\pi}{\omega_c}$ , 有

$$\frac{2\tau^2}{\pi^2} |R_X''(0)| \leq R_X(0) - R_X(\tau) \leq \frac{\tau^2}{2} |R_X''(0)|$$

证明 根据相关函数的性质可得

$$\begin{aligned} R_X(0) - R_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S_X(\omega) (1 - \cos \omega \tau) d\omega \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S_X(\omega) \frac{\omega^2 \tau^2}{2} d\omega \\ &= \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \omega^2 S_X(\omega) d\omega \\ &= -\frac{\tau^2}{2} R_X''(0) \end{aligned}$$

又由于

$$\begin{aligned} R_X(0) - R_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S_X(\omega) (1 - \cos \omega \tau) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S_X(\omega) 2 \sin^2 \left( \frac{\omega \tau}{2} \right) d\omega \end{aligned}$$

考虑到

$$|\sin a| \geq \left| \frac{2}{\pi} a \right|, \quad |a| \leq \frac{\pi}{2}$$

所以

$$\begin{aligned} R_X(0) - R_X(\tau) &\geq \frac{2\tau^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \omega^2 S_X(\omega) d\omega \\ &= -\frac{2\tau^2}{\pi^2} R_X''(0) \end{aligned}$$

又因为

$$E\{[X'(t)]^2\} = -R_X''(0) \geq 0$$

即

$$R_X''(0) \leq 0$$

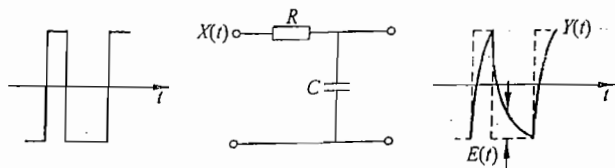
故

$$\frac{2\tau^2}{\pi^2} |R_X''(0)| \leq R_X(0) - R_X(\tau) \leq \frac{\tau^2}{2} |R_X''(0)|$$

例 2.9 设线性系统  $H(j\omega)$  的输入为平稳过程  $X(t)$ , 其功率谱密度为  $S_X(\omega)$ , 输出为  $Y(t)$ 。

(1) 求误差过程  $E(t) = Y(t) - X(t)$  的功率谱密度函数  $S_E(\omega)$ ;

(2) 如例题图 2.9 所示, 设输入到 RC 电路的是一个二元波过程, 求误差过程  $E(t)$  的功率谱密度  $S_E(\omega)$ 。



例题图 2.9

解 (1) 根据相关函数的定义, 可得

$$\begin{aligned} R_E(\tau) &= E\{[Y(t) - X(t)][Y(t-\tau) - X(t-\tau)]\} \\ &= R_Y(\tau) + R_X(\tau) - R_{XY}(\tau) - R_{YX}(\tau) \end{aligned}$$

由于

$$S_Y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_X(\omega)$$

$$S_{YX}(\omega) = H(j\omega) S_X(\omega)$$

$$S_{XY}(\omega) = H^*(j\omega) S_X(\omega)$$

所以

$$\begin{aligned} S_E(\omega) &= |H(j\omega)|^2 S_X(\omega) + S_X(\omega) - H^*(j\omega) S_X(\omega) - H(j\omega) S_X(\omega) \\ &= |H(j\omega) - 1|^2 S_X(\omega) \end{aligned}$$

(2) RC 电路传递函数为

$$H(j\omega) = \frac{a}{a + j\omega}, \quad a = \frac{1}{RC}$$

由例 1.20 可知  $S_X(\omega) = \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$ .

所以

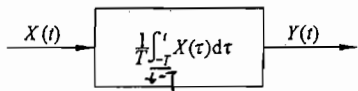
$$S_E(\omega) = |H(j\omega) - 1|^2 S_X(\omega) = \frac{4\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{a^2 + \omega^2}$$

例 2.10 一个平均电路如例题图 2.10 所示。

(1) 证明系统的冲激响应函数为

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 设输入过程  $X(t)$  的功率谱密度为  $S_X(\omega)$ , 求输出过程  $Y(t)$  的功率谱密度  $S_Y(\omega)$ 。



例题图 2.10

证明 (1) 设  $X(t)$  为白噪声过程

$$R_X(\tau) = \delta(\tau)$$

因为

$$\begin{aligned} R_{YX}(\tau) &= E\{Y(t)X(t-\tau)\} \\ &= \frac{1}{T} \int_{t-\tau}^t E\{X(a)X(t-\tau)\} da \\ &= \frac{1}{T} \int_{t-\tau}^t \delta(a-t+\tau) da \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{T} \int_{\tau-T}^{\tau} \delta(u) du, \quad u = a - t + \tau \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \leq \tau \leq T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
 \end{aligned}$$

故当输入为白噪声过程时, 对应于  $\tau > 0$ , 应有

$$h(\tau) = R_{YX}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \leq \tau \leq T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 由于

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\frac{\omega T}{2}}
 \end{aligned}$$

所以

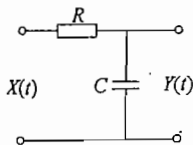
$$S_Y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_X(\omega) = \frac{\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2} S_X(\omega)$$

例 2.11 如例题图 2.11 所示, 低通 RC 滤波器的输入为白噪声, 其物理功率谱密度为  $F_X(\omega) = N_0, 0 < \omega < \infty$ , 相应的自相关函数  $R_X(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ 。

(1) 试求输出的  $F_Y(\omega)$  和  $R_Y(\tau)$

(2) 令  $t_3 > t_2 > t_1$ , 证明:

$$R_Y(t_3 - t_1) = \frac{R_Y(t_3 - t_2) R_Y(t_2 - t_1)}{R_Y(0)}$$



例题图 2.11

解 (1) 容易求的传递函数为

$$H(j\omega) = \frac{a}{a + j\omega}$$

其中,  $a = \frac{1}{RC}$ 。

输出过程的物理功率谱为

$$F_Y(\omega) = |H(j\omega)|^2 F_X(\omega) = \frac{a^2 N_0 / 2}{a^2 + \omega^2}, \quad 0 < \omega < \infty$$

$$\frac{2a}{\omega^2 \tau^2} \leftrightarrow e^{-a|\tau|} \quad \therefore \frac{N_0 a}{2} e^{-a|\tau|}$$

第2章 随机过程的线性变换 49

相应的相关函数为

$$R_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{F_Y(\omega)}{2} \right] = \frac{N_0}{4} a e^{-a|\tau|}$$

(2) 由于  $t_3 > t_2 > t_1$ , 则有

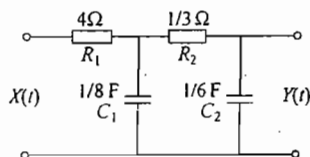
$$\begin{aligned} \frac{R_Y(t_3 - t_2) R_Y(t_2 - t_1)}{R_Y(0)} &= \frac{\frac{N_0 a}{4} e^{-(t_3 - t_2)} \cdot \frac{N_0 a}{4} e^{-(t_2 - t_1)}}{\frac{N_0 a}{4}} \\ &= \frac{N_0 a}{4} e^{-(t_3 - t_1)} \\ &= R_Y(t_3 - t_1) \end{aligned}$$

故

$$R_Y(t_3 - t_1) = \frac{R_Y(t_3 - t_2) R_Y(t_2 - t_1)}{R_Y(0)}$$

例 2.12 在例题图 2.12 中, 设输入为白噪声过程  $X(t)$ , 其自相关函数为  $R_X(\tau) = S_0 \delta(\tau)$ 。求

- (1) 系统的冲激响应函数;
- (2) 输出过程  $Y(t)$  的均方值。



例题图 2.12

解 (1) 利用电路定律的运算形式, 由分压关系可以写出系统的传递函数为

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2} \\ &= \frac{36}{36 + j44\omega - \omega^2} \\ &= \frac{36}{16\sqrt{7}} \left( \frac{1}{j\omega + 22 - 8\sqrt{7}} - \frac{1}{j\omega + 22 + 8\sqrt{7}} \right) \end{aligned}$$

相应的系统冲激函数为

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] \\ &= \frac{9}{4\sqrt{7}} [e^{-(22-8\sqrt{7})t} - e^{-(22+8\sqrt{7})t}] u(t) \end{aligned}$$

(2) 根据定义, 输出过程的均方值为

$$\psi_Y^2 = R_Y(0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_0 h^2(t) dt$$

$$R_Y(\tau) = E[X(t+\tau)X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_0 h(t+\tau)h(t) dt$$

$$R_Y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_0 d\omega$$

$$= \frac{81}{112} S_0 \left\{ \int_0^\infty [e^{-(22-8\sqrt{7})t} - e^{-(22+8\sqrt{7})t}]^2 dt \right\}$$

$$= \frac{9}{22} S_0$$

例 2.13 证明均值为零、自相关函数为  $R_X(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$  的白噪声  $X(t)$  通过一个理想积分器后输出方程  $Y(t) = \int_0^t X(u) du$  的均方值为  $\sigma^2 t$ 。

证明 输出过程的相关函数为

$$R_Y(t_1, t_2) = E \left[ \int_0^{t_1} X(u) du \int_0^{t_2} X(v) dv \right] = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} E[X(u)X(v)] du dv$$

当  $t_1 < t_2$  时, 令  $\tau = u - v, d\tau = -dv$ , 则有

$$R_Y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \left[ \int_{u-t_2}^u \sigma^2 \delta(\tau) d\tau \right] du = \int_0^{t_1} \sigma^2 du = \sigma^2 t_1$$

当  $t_1 > t_2$  时, 令  $\tau = u - v, d\tau = du$ , 则有

$$R_Y(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} \left[ \int_{-v}^{t_1-v} \sigma^2 \delta(\tau) d\tau \right] dv = \int_0^{t_2} \sigma^2 dv = \sigma^2 t_2$$

综合上述结果, 可得

$$R_Y(t_1, t_2) = \sigma^2 \min(t_1, t_2)$$

$$\psi_Y^2 = E[Y^2(t)] = R_Y(t, t) = \sigma^2 t$$

例 2.14 在例题图 2.11 所示的 RC 电路中, 设输入过程  $X(t)$  的自相关函数为

$$R_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}, \quad \beta > 0$$

求输出过程  $Y(t)$  的功率谱密度函数  $S_Y(\omega)$ , 自相关函数  $R_Y(\tau)$  和均方值  $\psi_Y^2$ 。

解 根据维纳-辛钦定理, 得

$$S_X(\omega) = \frac{2\beta\sigma^2}{\omega^2 + \beta^2}$$

RC 电路的传递函数为

$$H(j\omega) = \frac{\alpha}{\alpha + j\omega}, \quad \alpha = \frac{1}{RC}$$

所以

$$S_Y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_X(\omega) = \frac{2\beta\alpha^2\sigma^2}{(\omega^2 + \alpha^2)(\omega^2 + \beta^2)}$$

对  $S_Y(\omega)$  取傅里叶逆变换, 可得相关函数为

$$R_Y(\tau) = \frac{\sigma^2 \alpha}{\alpha^2 - \beta^2} (\alpha e^{-\beta|\tau|} - \beta e^{-\alpha|\tau|})$$

均方值为

$$\psi_Y^2 = R_Y(\tau) = \frac{\sigma^2 \alpha}{\alpha + \beta}$$

例 2.15 一个线性时不变系统的传递函数为

$$H(j\omega) = \frac{j\omega - \alpha}{j\omega + \beta}$$



输入平稳过程  $X(t)$  的自相关函数为

$$R_X(\tau) = e^{-a|\tau|}, \quad a > 0$$

求输入和输出之间的互相关函数  $R_{YX}(\tau)$ 。

解 系统传递函数可以写成

$$H(j\omega) = \frac{j\omega - \alpha}{j\omega + \beta} = 1 - \frac{\alpha + \beta}{j\omega + \beta}$$

相应的冲激响应函数为

$$h(\tau) = \delta(\tau) - (\alpha + \beta)e^{-\beta\tau}u(\tau)$$

其互相关函数为

$$\begin{aligned} R_{YX}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau - v)h(v)dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(v) - (\alpha + \beta)e^{-\beta v}u(v)]e^{-a|\tau - v|}dv \\ &= e^{-a|\tau|} - (\alpha + \beta) \int_0^{\infty} e^{-\beta v} e^{-a|\tau - v|} dv \end{aligned}$$

下面计算上式中的积分。

(1)  $\tau < 0$  时

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta v} e^{-a|\tau - v|} dv = \int_0^{\infty} e^{-\beta v} e^{a(\tau - v)} dv = \frac{e^{a\tau}}{a + \beta}$$

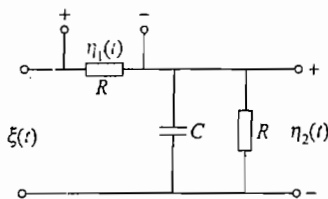
(2)  $\tau \geq 0$  时

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\beta v} e^{-a|\tau - v|} dv &= \int_0^{\tau} e^{-\beta v} e^{a(\tau - v)} dv + \int_{\tau}^{\infty} e^{-\beta v} e^{-a(\tau - v)} dv \\ &= \frac{e^{-\beta\tau} - e^{-a\tau}}{a - \beta} + \frac{e^{-\beta\tau}}{a + \beta} \end{aligned}$$

综合上述结果可得

$$R_{YX}(\tau) = \begin{cases} \left(1 - \frac{a + \beta}{a + \beta}\right)e^{a\tau}, & \tau < 0 \\ e^{-a\tau} - \frac{a + \beta}{a - \beta}(e^{-\beta\tau} - e^{-a\tau}) - \frac{a + \beta}{a + \beta}e^{-\beta\tau}, & \tau \geq 0 \end{cases}$$

例 2.16 设有电路如例题图 2.16, 输入过程  $\xi(t)$  为平稳随机过程, 且  $E\{\xi(t)\} = 0$ ,  $R_{\xi\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$ , 求  $\eta_1(t)$ ,  $\eta_2(t)$  的功率谱密度和两者的互谱密度。



例题图 2.16

解

$$H_1(jf) = \frac{R}{R + \frac{R \frac{1}{j2\pi fC}}{R + \frac{1}{j2\pi fC}}} = \frac{j2\pi f + \alpha}{j2\pi f + 2\alpha}$$

其中,  $\alpha = \frac{1}{CR}$ 。

$$H_2(jf) = \left[ \frac{R \frac{1}{j2\pi fC}}{R + \frac{1}{j2\pi fC}} \right] \left/ \left[ R + \frac{R \frac{1}{j2\pi fC}}{R + \frac{1}{j2\pi fC}} \right] \right. = \frac{\alpha}{j2\pi f + 2\alpha}$$

因为

$$R_{\xi\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$$

故

$$S_{\xi\xi}(f) = \frac{2\sigma^2\beta}{\beta^2 + (2\pi f)^2}$$

$$\eta_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t-u)\xi(u)du$$

$$\eta_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t-v)\xi(v)dv$$

$$R_{\eta_1\eta_2}(t_1, t_2) = E\{\eta_1(t_1)\overline{\eta_2(t_2)}\}$$

$$= E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t_1-u)\xi(u)du \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t_2-v)\xi(v)dv}\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t_1-u)\overline{h_2(t_2-v)}R_{\xi\xi}(u-v)dudv$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(u)\overline{h_2(v)}R_{\xi\xi}(t_1-u-t_2+v)dudv$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(u)\overline{h_2(v)}R_{\xi\xi}(\tau-u+v)dudv$$

可见  $R_{\eta_1\eta_2}(t_1, t_2)$  仅是时间差  $\tau = t_1 - t_2$  的函数, 对  $R_{\eta_1\eta_2}(t_1, t_2)$  做傅里叶变换得

$$S_{\eta_1\eta_2}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\eta_1\eta_2}(t_1, t_2)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(u)\overline{h_2(v)}R_{\xi\xi}(\tau-u+v)e^{-j2\pi f\tau}d\tau dudv$$

$$= H_1(jf)\overline{H_2(jf)}S_{\xi\xi}(f)$$

故

$$S_{\eta_1\eta_2}(f) = \frac{j2\pi f + \alpha}{j2\pi f + 2\alpha} \frac{\alpha}{2\alpha - j2\pi f} \frac{2\sigma^2\beta}{\beta^2 + (2\pi f)^2}$$

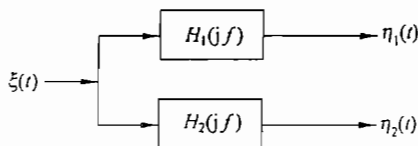
$$S_{\eta_1\eta_1}(f) = |H_1(jf)|^2 S_{\xi\xi}(f)$$

$$= \frac{\alpha^2 + (2\pi f)^2}{(2\alpha)^2 + (2\pi f)^2} \frac{2\sigma^2\beta}{\beta^2 + (2\pi f)^2}$$

$$S_{\eta_2\eta_2}(f) = |H_2(jf)|^2 S_{\xi\xi}(f)$$

$$= \frac{a^2}{(2a)^2 + (2\pi f)^2} \frac{2\sigma^2 \beta}{\beta^2 + (2\pi f)^2}$$

例 2.17 如例题图 2.17 所示, 设有两个线性时不变系统, 它们的转移函数分别为  $H_1(jf)$ ,  $H_2(jf)$ , 如用一平稳随机过程  $\xi(t)$  送到两个系统,  $\eta_1(t)$  和  $\eta_2(t)$  分别为两个系统的输出。若  $\xi(t)$  的均值为零, 如何设计  $H_1(jf)$ ,  $H_2(jf)$  才能保证  $\eta_1(t)$ ,  $\eta_2(t)$  是统计不相关的。



例题图 2.17

解 由题意可知

$$\eta_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t-u)\xi(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(u)\xi(t-u)du$$

$$\eta_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t-v)\xi(v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(v)\xi(t-v)dv$$

因此

$$E\{\eta_1(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t-u)E\{\xi(u)\}du = 0$$

$$E\{\eta_2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t-v)E\{\xi(v)\}dv = 0$$

$$\begin{aligned} E\{\eta_1(t_1)\overline{\eta_2(t_2)}\} &= E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(u)\overline{h_2(v)}\xi(t_1-u)\overline{\xi(t_2-v)}dudv\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(u)\overline{h_2(v)}R_{\xi\xi}(t_1-t_2-u+v)dudv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(u)\overline{h_2(v)}R_{\xi\xi}(\tau-u+v)dudv \end{aligned}$$

上式说明  $\eta_1(t)$ ,  $\eta_2(t)$  的互相关函数是时间差  $\tau$  的函数, 即

$$\begin{aligned} R_{\eta_1\eta_2}(\tau) &= E\{\eta_1(t_1)\overline{\eta_2(t_2)}\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(u)\overline{h_2(v)}R_{\xi\xi}(\tau-u+v)dudv \end{aligned}$$

故  $\eta_1(t)$ ,  $\eta_2(t)$  的互谱密度为

$$S_{\eta_1\eta_2}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\eta_1\eta_2}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = H_1(jf)\overline{H_2(jf)}S_{\xi\xi}(f)$$

根据上式可知, 如果设计两系统转移函数的幅频特性是没有交叠的, 即通带没有交叠, 则  $S_{\eta_1\eta_2}(f) = 0$ , 于是  $R_{\eta_1\eta_2}(\tau) = 0$ , 即  $\eta_1(t)$  和  $\eta_2(t)$  是不相关的。

例 2.18 设有线性时间系统, 其单位样值响应为  $\{h_k\}$ , 其中

$$h_k = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ e^{-\alpha k}, & k \geq 0, \alpha > 0 \end{cases}$$

系统的输入信号为一平稳随机序列, 其均值为 0, 且相关函数为

$$R_{\xi\xi}(n) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

求输出过程的均值和相关函数。

解 系统的转移函数为

$$H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} (e^{\alpha} z)^{-k} = \frac{1}{1 - (e^{\alpha} z)^{-1}} = \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha} - z^{-1}}$$

输出过程的均值为

$$E\{\eta_n\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k E\{\xi_{n-k}\} = 0$$

输入过程的相关函数的 Z 变换为

$$\Phi_{\xi\xi}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{\xi\xi}(n) z^{-n} = \frac{N_0}{2}$$

于是有

$$\Phi_{\eta\eta}(z) = \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha} - z^{-1}} \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha} - z} \frac{N_0}{2} = \frac{e^{2\alpha} N_0}{2(e^{\alpha} - z^{-1})(e^{\alpha} - z)}$$

求  $\Phi_{\eta\eta}(z)$  的反变换得到输出过程的自相关函数为

$$R_{\eta\eta}(n) = \frac{N_0}{2} \times \frac{e^{2\alpha}}{e^{2\alpha} - 1} e^{-\alpha|n|}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

例 2.19 线性系统  $h(t)$  的输入为平稳过程  $X(t)$ , 其功率谱密度为  $S_X(\omega)$ , 输出为  $Y(t)$ 。若对于任意  $\varepsilon > 0$ , 当  $|\tau| > \varepsilon$  时, 有  $R_X(\tau) = 0$ , 证明:

$$R_{YX}(\tau) \approx S_X(0)h(\tau) - \frac{1}{2}S_X''(0)h''(\tau)$$

证明 输入和输出之间的互相关函数为

$$\begin{aligned} R_{YX}(\tau) &= R_X(\tau) * h(\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(u)h(\tau-u)du \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} R_X(u)h(\tau-u)du \end{aligned}$$

将  $h(\tau-u)$  展开为泰勒级数, 仅取前三项近似, 可得

$$h(\tau-u) \approx h(\tau) - h'(\tau)u + \frac{1}{2}h''(\tau)u^2$$

于是可得

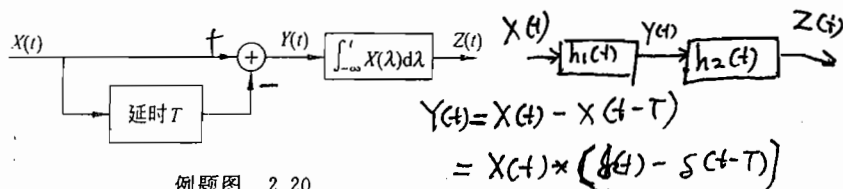
$$\begin{aligned} R_{YX}(\tau) &\approx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} R_X(u) \left[ h(\tau) - h'(\tau)u + \frac{1}{2}h''(\tau)u^2 \right] du \\ &= h(\tau) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} R_X(u) du - h'(\tau) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u R_X(u) du + \\ &\quad \frac{h''(\tau)}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u^2 R_X(u) du \\ &= S_X(0)h(\tau) - \frac{1}{2}S_X''(0)h''(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \delta(t-T) \rightarrow e^{-j\omega T} \\ \delta(t+T) \rightarrow e^{j\omega T} \end{cases}$$

$$e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega$$

其中第二项积分中  $uR_X(u)$  为奇函数, 故此项为零。第三项中利用了傅里叶变换的频域微分特性。

例 2.20 一个线性系统如例题图 2.20 所示,  $X(t)$  为输入,  $Z(t)$  为输出。



例题图 2.20

$$\begin{aligned} Y(t) &= X(t) - X(t-T) \\ &= X(t) * [\delta(t) - \delta(t-T)] \end{aligned}$$

$$Z(t) = \int_{-\infty}^t Y(\lambda) d\lambda$$

(1) 求整个系统的传递函数;

(2) 若  $X(t)$  是谱密度为  $S_0$  的白噪声, 试求  $Z(t)$  的均方值。

解 (1) 由图示系统可得

$$\begin{aligned} Z(t) &= \int_{-\infty}^t [X(a) - X(a-T)] da \\ &= \int_{-\infty}^t X(a) * [\delta(a) - \delta(a-T)] da \\ &= X(t) * [\delta(t) - \delta(t-T)] * u(t) \end{aligned}$$

其中

$$h(t) = [\delta(t) - \delta(t-T)] * u(t) = u(t) - u(t-T)$$

为系统冲激响应。故

$$H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega}{2}} e^{j\frac{\omega T}{2}}$$

(2) 因为输出过程功率谱为

$$S_Z(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_X(\omega) = S_0 \frac{\sin^2(\frac{\omega T}{2})}{(\frac{\omega}{2})^2}$$

按照均方值的定义, 可得

$$\begin{aligned} \phi_Z^2 &= R_Z(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_Z(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \times 4S_0 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\omega T/2)}{(\omega/2)^2} d\frac{\omega}{2} \\ &= TS_0 \end{aligned}$$

或者

$$\phi_Z^2 = R_Z(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0 h^2(t) dt = TS_0$$

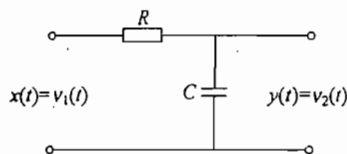
例 2.21 线性系统  $H(f)$  的输入  $x(t)$  具有功率谱  $S_X(f)$ , 设  $y(t)$  为输出并且定义

$$e(t) = y(t) - x(t)$$

(1) 求  $S_E(f)$ ;

(2) 考虑例题图 2.21 的系统, 规定  $x(t)=v_1(t)$ ,  $y(t)=v_2(t)$ , 其中  $v_1(t)$  是一个随机二元传输波形, 自相关函数为

$$R_{v_1 v_1}(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T}, & |\tau| \leq T \\ 0, & |\tau| > T \end{cases}$$



例题图 2.21

求  $S_E(f)$ 。

解 (1)  $e(t)$  的相关函数为

$$\begin{aligned} R_E(\tau) &= E[e(t)e(t-\tau)] \\ &= E[(y(t) - x(t))(y(t-\tau) - x(t-\tau))] \\ &= R_Y(\tau) - R_{XY}(\tau) - R_{XY}(-\tau) + R_X(\tau) \end{aligned}$$

于是可得

$$S_E(f) = S_Y(f) - S_{XY}(f) - S_{XY}^*(f) + S_X(f)$$

(2) 由例题图 2.21 可知系统的传递函数为

$$H(f) = \frac{1}{j2\pi RCf + 1}$$

输入的功率谱为

$$S_X(f) = T \frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2}$$

将(1)的结果代入上式, 得

$$\begin{aligned} S_E(f) &= S_X(f) |H(f) - 1|^2 \\ &= T \frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2} \frac{(2\pi RCf)^2}{(2\pi RCf)^2 + 1} \end{aligned}$$

例 2.22 随机过程  $Y(t)$  满足微分方程

$$Y''(t) + 3Y'(t) + 2Y(t) = X(t)$$

其中对于任意  $t$ ,  $X(t)$  都为白噪声, 其自相关函数  $R_X(\tau) = K\delta(\tau)$ 。证明  $Y(t)$  的自相关函数  $R_Y(\tau)$  满足方程

$$R_Y''(\tau) + 3R_Y'(\tau) + 2R_Y(\tau) = 0, \quad \tau > 0$$

其中, 初始条件为  $R_Y(0) = \frac{K}{12}$ ,  $R_Y'(0) = 0$ 。

证明 将原方程两边取傅里叶变换可得

$$Y(j\omega)[(j\omega)^2 + 3j\omega + 2] = X(j\omega)$$

因此, 可得系统传递函数为

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2}$$

由于,  $S_X(\omega) = K$ , 故有

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= |H(j\omega)|^2 S_X(\omega) \\ &= \frac{K}{(2-\omega^2)^2 + 9\omega^2} \\ &= \frac{K}{3} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{1-j\omega} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2+j\omega} + \frac{1}{2-j\omega} \right) \right] \end{aligned}$$

所以

$$R_Y(\tau) = \frac{K}{3} \left[ \left( \frac{1}{2} e^{-\tau} - \frac{1}{4} e^{-2\tau} \right) u(\tau) - \left( \frac{1}{2} e^{\tau} - \frac{1}{4} e^{2\tau} \right) u(-\tau) \right]$$

当取  $\tau > 0$  时, 可得

$$R_Y(\tau) = \frac{K}{3} \left( \frac{1}{2} e^{-\tau} - \frac{1}{4} e^{-2\tau} \right)$$

从而容易验证,  $R_Y(\tau)$  满足

$$\begin{cases} R_Y''(\tau) + 3R_Y'(\tau) + 2R_Y(\tau) = 0 \\ R_Y(0) = \frac{K}{12} \\ R_Y'(0) = 0 \end{cases}$$

例 2.23 一个线性系统  $H(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$  其输入过程为  $X(t)$  和输出过程为  $Y(t)$ , 有

$$X(t) = A_i \sin \omega_i t + n_i(t)$$

$$Y(t) = A_o \sin(\omega_i t + \theta) + n_o(t)$$

输出中的  $A_o \sin(\omega_i t + \theta)$  和  $n_o(t)$  分别对应于输入中的信号  $A_i \sin \omega_i t$  和噪声  $n_i(t)$ 。证明若  $n_i(t)$  为单位谱高的白噪声, 则当  $\alpha = \omega_i$  时, 输出信噪比  $A_o^2 / E[n_o^2(t)]$  为最大, 并说明此结果的物理意义。

证明 设

$$X(t) = v_i(t) + n_i(t), \quad v_i(t) = A_i \sin \omega_i t$$

$$Y(t) = v_o(t) + n_o(t), \quad v_o(t) = A_o \sin(\omega_i t + \theta)$$

由于线性系统服从叠加原理, 故可将信号与噪声分开讨论。由于

$$R_{n_i}(\tau) = \delta(\tau)$$

$$S_{n_i}(\omega) = 1$$

$$S_{n_o}(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{n_i}(\omega) = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}$$

故

$$R_{n_o}(\tau) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$$

$$E[n_o^2(t)] = R_{n_o}(0) = \frac{1}{2\alpha}$$

又因

$$v_i(t) = A_i \sin \omega_i t = \frac{A_i}{2j} (e^{j\omega_i t} - e^{-j\omega_i t})$$

故

$$V_i(\omega) = \frac{A_i}{2j} \pi [\delta(\omega - \omega_c) - \delta(\omega + \omega_c)]$$

$$V_o(\omega) = V_i(\omega) H(j\omega)$$

$$= \frac{\pi A_i}{2j} \left[ \frac{1}{\alpha + j\omega_c} \delta(\omega - \omega_c) - \frac{1}{\alpha - j\omega_c} \delta(\omega + \omega_c) \right]$$

于是得

$$v_o(t) = \frac{\pi A_i}{2j} \left[ \frac{1}{\alpha + j\omega_c} e^{j\omega_c t} - \frac{1}{\alpha - j\omega_c} e^{-j\omega_c t} \right]$$

$$= \frac{\pi A_i}{\alpha^2 + \omega_c^2} (\alpha \sin \omega_c t - \omega_c \cos \omega_c t)$$

$$= \frac{\pi A_i}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_c^2}} \sin(\omega_c t + \theta)$$

$$= A_0 \sin(\omega_0 t + \theta), \quad \theta = \arctan \frac{\omega_c}{\alpha}$$

其中

$$A_0^2 = \frac{\pi^2 A_i^2}{\alpha^2 + \omega_c^2}$$

且

$$\frac{A_0^2}{E[n_0^2(t)]} = \frac{2\alpha\pi^2 A_i^2}{\alpha^2 + \omega_c^2}$$

令

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{A_0^2}{E[n_0^2(t)]} \right\} = \frac{2\pi^2 A_i^2 (\omega_c^2 - \alpha^2)}{\alpha^2 + \omega_c^2} = 0$$

于是可得

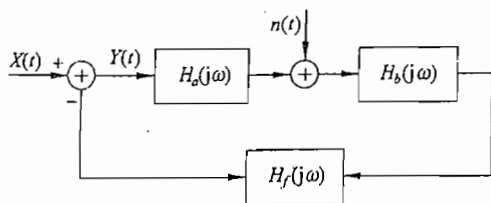
$$\alpha = \omega_c$$

可以验证  $\alpha = \omega_c$  时输出信噪比达最大值。物理意义: 系统输入单频信号频率同系统的谐振频率相同时输出信噪比最大。

**例 2.24** 在例题图 2.24 所示的反馈线性系统中,  $n(t)$  为白噪声,  $S_n(\omega) = 1$ ,  $X(t)$  与  $n(t)$  不相关, 即有  $R_{Xn}(\tau) = 0$ 。设

$$H_o(j\omega) = \frac{H_b(j\omega) H_f(j\omega)}{1 + H_a(j\omega) H_b(j\omega) H_f(j\omega)}$$

的傅里叶变换为  $h_o(t)$ ,  $Y(t)$  如图中所示。证明  $R_{Yn}(\tau) = -h_o(\tau)$ 。



例题图 2.24



证明 根据叠加原理可设

$$Y(t) = Y_n(t) + Y_x(t) = h_1(t) * n(t) + h_2(t) * X(t)$$

而由于

$$H_1(j\omega) = \frac{-H_b(j\omega)H_f(j\omega)}{1 + H_a(j\omega)H_b(j\omega)H_f(j\omega)} = -H_0(j\omega)$$

$$H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + H_a(j\omega)H_b(j\omega)H_f(j\omega)}$$

$$h_1(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_1(j\omega)] = -h_0(t)$$

$$h_2(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_2(j\omega)]$$

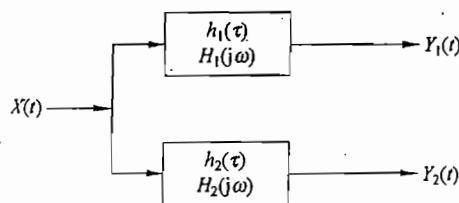
因此

$$\begin{aligned} R_{Yn}(\tau) &= E[Y(t)n(t-\tau)] \\ &= E\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty} -h_0(u)n(t-u)du + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(u)X(t-u)du\right]n(t-\tau)\right\} \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} h_0(u)E[n(t-u)n(t-\tau)]du + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(u)E[X(t-u)n(t-\tau)]du \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} h_0(u)R_n(\tau-u)du + \int_{-\infty}^{\infty} h_2(u)R_{Xn}(\tau-u)du \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} h_0(u)\delta(\tau-u)du \\ &= -h_0(\tau) \end{aligned}$$

例 2.25 在例题图 2.25 所示系统中输入  $X(t)$  同时作用于两个系统。

(1) 求输出  $Y_1(t)$  和  $Y_2(t)$  的互谱密度  $S_{Y_1Y_2}(\omega)$ ;

(2) 设  $X(t)$  是零均值的具有单位谱高的白噪声, 若要使  $Y_1(t)$  和  $Y_2(t)$  为不相关过程,  $h_1(\tau)$  和  $h_2(\tau)$  应满足什么条件?



例题图 2.25

解 (1) 根据图示系统, 可得

$$\begin{aligned} Y_1(t)Y_2(t-\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{Y_1(t)}_{X(t-a)} \underbrace{X(t-\tau-u)}_{X(t-\tau)h_2(u)} du \\ Y_1(t)X(t-\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(t-a)X(t-\tau)h_1(a)da \end{aligned}$$

对上式取期望,可得

$$R_{Y_1 Y_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{Y_1 X}(\tau + u) h_2(u) du$$

$$R_{Y_1 X}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau - a) h_1(a) da$$

所以

$$R_{Y_1 Y_2}(\tau) = R_X(\tau) * h_1(\tau) * h_2(-\tau)$$

$$S_{Y_1 Y_2}(\omega) = S_X(\omega) H_1(j\omega) H_2^*(j\omega)$$

(2) 欲使  $Y_1(t)$  和  $Y_2(t)$  为不相关过程, 应有

$$R_{Y_1 Y_2}(\tau) = 0$$

因此,  $h_1(t)$  和  $h_2(t)$  应满足

$$h_1(t) * h_2(-t) = 0$$

在频域里

$$H_1(j\omega) H_2^*(j\omega) = 0$$

即在频域要求两个系统的通带互不重叠。

例 2.26 要构成一个随机过程  $X(t)$ , 它的功率谱密度为

$$S_X(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9}$$

(1) 求一可实现的稳定系统  $H(j\omega)$ , 当具有单位谱高的白噪声  $W(t)$  输入该系统时, 输出过程的功率谱密度恰为  $S_X(\omega)$  (此系统一般称为成形滤波器)。

(2) 问第(1)题的答案是否惟一, 或证明惟一性, 或求出另一个可实现的稳定系统。

解 (1) 考虑到

$$S_X(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_w(\omega)$$

根据题意, 则有

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9} = \frac{\omega^2 + 4}{(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 1)}$$

对应上式的一个可实现的稳定系统为

$$H(j\omega) = \frac{2 + j\omega}{(3 + j\omega)(1 + j\omega)} = \frac{2 + j\omega}{3 + 4j\omega - \omega^2}$$

(2) 第(1)题的答案不是惟一的, 显然存在另一个解为

$$H(j\omega) = \frac{2 - j\omega}{3 + 4j\omega - \omega^2}$$

例 2.27 构造一个随机过程  $Y(t)$ , 它的功率谱密度函数为  $S(\omega) = \frac{b^2}{a^4 + \omega^4}$ , 求成形滤波器的状态模型。

解 根据题意, 可以写出

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{b^2}{a^4 + \omega^4} = \frac{b^2}{(a^2 - \omega^2)^2 + 2a^2\omega^2}$$

因此, 成形滤波器的传递函数为

$$H(j\omega) = \frac{b}{a^2 + \sqrt{2}aj\omega + (j\omega)^2}$$

与上式相应的微分方程为

$$\ddot{X}(t) + \sqrt{2}a\dot{X}(t) + a^2X(t) = bW(t)$$

相应的状态模型为

$$\begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ \ddot{X}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & -\sqrt{2}a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ \dot{X}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} W(t)$$

$$Y(t) = [1, 0] \begin{bmatrix} X(t) \\ \dot{X}(t) \end{bmatrix}$$

其中  $W(t)$  的自相关函数为  $R_W(\tau) = \delta(\tau)$ 。

例 2.28 随机过程  $Y(t)$  满足微分方程

$$\begin{cases} Y'(t) + 2Y(t) = X(t), & t > 0 \\ Y(0) = 1 \end{cases}$$

其中  $X(t)$  为平稳过程, 并且已知  $E[X(t)] = 2$ ,  $R_X(\tau) = 4 + 2e^{-|\tau|}$ 。求  $E[Y(t)]$ ,  $R_{XY}(t_1, t_2)$  和  $R_Y(t_1, t_2)$ , 其中  $t > 0, t_1 > 0, t_2 > 0$ 。

解 (1) 令  $m_Y(t) = E[Y(t)]$ , 对原方程取期望可得

$$\begin{cases} m_Y'(t) + 2m_Y(t) = 2 \\ m_Y(0) = 1 \end{cases}$$

解此方程, 得

$$m_Y(t) = 1$$

(2) 将原方程改写成为

$$\begin{cases} Y'(t_2) + 2Y(t_2) = X(t_2) \\ Y(0) = 1 \end{cases}$$

上式两边乘  $X(t_1)$  并取期望可得

$$\begin{cases} \frac{\partial R_{XY}(t_1, t_2)}{\partial t_2} + 2R_{XY}(t_1, t_2) = 4 + 2e^{-|t_1 - t_2|} \\ R_{XY}(t_1, 0) = 2 \end{cases}$$

解此方程, 可得

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \begin{cases} 2 + \frac{2}{3}(e^{t_2 - t_1} - e^{-t_1 - 2t_2}), & t_1 > t_2 \\ 2 + 2(e^{t_1 - t_2} - e^{t_1 - 2t_2}), & t_1 < t_2 \end{cases}$$

(3) 原方程改写成

$$\begin{cases} \frac{\partial R_Y(t_1, t_2)}{\partial t_1} + 2R_Y(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) \\ R_Y(0, t_2) = 1 \end{cases}$$

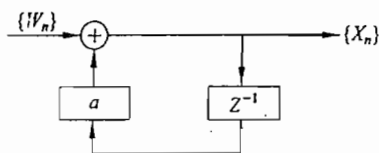
解此方程可得

$$R_Y(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{3}(e^{t_2-t_1} - e^{-t_1-2t_2} + e^{-2(t_1+t_2)} - e^{t_2-2t_1}), & t_1 > t_2 \\ 1 + \frac{2}{3}(e^{t_1-t_2} - e^{t_1-2t_2} + e^{-2(t_1+t_2)} - e^{-t_2-2t_1}), & t_1 < t_2 \end{cases}$$

例 2.29 设随机序列  $\{X_n\}$  是由一个白噪声序列  $\{W_n\}$  经过例题图 2.29 所示线性系统所得到的输出, 即

$$X_n = aX_{n-1} + W_n, \quad X_0 = 0$$

式中  $X_0$  表示初始值, 且已知  $\{W_n\}$  是平稳的, 其均值为  $m_W$ , 方差为  $\sigma_W^2$ 。



例题图 2.29

(1) 求  $\{X_n\}$  的均值  $E\{X_n\}$ , 并说明在什么条件下  $\{X_n\}$  是均值平稳的;

(2) 设  $m_W = 0$ , 求  $\{X_n\}$  的协方差函数  $\text{cov}(X_n, X_{n-m})$ , 并说明在什么条件下  $\{X_n\}$  是广义平稳的;

(3) 设  $m_W = 0$ , 在  $\{X_n\}$  为广义平稳的条件下, 求  $\{X_n\}$  的归一化的自相关函数  $R(m)$ 。(注:  $R(m) = \frac{\text{cov}(X_n, X_{n-m})}{\text{var}(X_n)}$ )

解 (1) 系统的冲激响应为

$$h(n) = a^n U(n)$$

输出为

$$X_n = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)W(n-m)$$

对上式取期望, 则有

$$\begin{aligned} E\{X_n\} &= E\left\{\sum_{m=0}^{\infty} h(m)W(n-m)\right\} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} h(m)E[W(n-m)] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a^m m_W \end{aligned}$$

当  $|a| < 1$  时,  $\{X_n\}$  是均值平稳的, 且

$$E\{X_n\} = \frac{m_W}{1-a}, \quad |a| < 1$$

(2) 由于  $m_W = 0$ , 故有协方差为

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_n, X_{n-m}) &= R_X(n, m-n) \\ &= E\{X(n)X(n-m)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} h(k) W(n-k) \sum_{l=0}^{\infty} h(l) W(n-m-l) \right\} \\
 &= E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h(k) h(l) R_W(m+l-k) \right\}
 \end{aligned}$$

又由于白噪声的相关函数为

$$R_W(n) = \begin{cases} \sigma_W^2, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

所以

$$\text{cov}(X_n, X_{n-m}) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) h(k-m) \sigma_W^2$$

当  $m > 0$  时, 有

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(X_n, X_{n-m}) &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k a^{k-m} \sigma_W^2 U(k-m) \\
 &= \frac{\sigma_W^2 a^m}{1-a^2}, \quad |a| < 1
 \end{aligned}$$

当  $m < 0$  时, 有

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(X_n, X_{n-m}) &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k a^{k-m} \sigma_W^2 \\
 &= \frac{\sigma_W^2 a^{-m}}{1-a^2}, \quad |a| < 1
 \end{aligned}$$

故当  $a^2 < 1$  时,  $\{X_n\}$  为广义平稳, 且

$$\text{cov}(X_n, X_{n-m}) = \frac{\sigma_W^2 a^{|m|}}{1-a^2}, \quad |a| < 1$$

(3) 根据定义, 随机过程  $\{X_n\}$  的方差为

$$\begin{aligned}
 \text{var}(X_n) &= E[X_n^2] = R_X(0) \\
 &= \text{cov}(X_n, X_n) = \frac{\sigma_W^2}{1-a^2}, \quad |a| < 1
 \end{aligned}$$

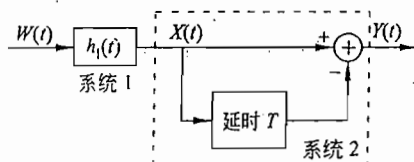
所以

$$R(m) = \frac{\text{cov}(X_n, X_{n-m})}{\text{var}(X_n)} = a^{|m|}, \quad |a| < 1$$

例 2.30 例题图 2.30 所示系统中, 若已知

$$h_1(t) = e^{-at} U(t), \quad a > 0$$

并已知输入  $W(t)$  是均值为零, 谱密度为  $N_0/2$  的高斯噪声, 求输出过程  $Y(t)$  的一维概



例题图 2.30

率密度  $p_Y(y)$ 。

解 高斯过程通过线性系统后仍为高斯过程,因此欲求  $p_Y(y)$ ,只需求前两阶矩即可。已知  $W(t)$  为零均值,  $Y(t)$  亦为零均值,因此只需求方差  $\sigma_Y^2$  即可。

方法一: 对于系统 1, 已知  $h_1(\tau)$ , 直接可得

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

对于系统 2, 冲激响应为

$$h_2(\tau) = \delta(\tau) - \delta(\tau - T)$$

传递函数为

$$H_2(j\omega) = 1 - e^{-j\omega T}$$

故

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= |H_1(j\omega)|^2 |H_2(j\omega)|^2 S_X(\omega) \\ &= \frac{N_0}{2} \frac{2 - 2\cos\omega T}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

从而有

$$\sigma_Y^2 = R_Y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(\omega) d\omega = \frac{N_0}{2a} (1 - e^{-aT})$$

方法二: 先求  $X(t)$  的自相关函数  $R_X(\tau)$ , 考虑到

$$S_X(\omega) = |H(j\omega)|^2 \cdot \frac{N_0}{2} = \frac{N_0}{2(a^2 + \omega^2)}$$

故相应的相关函数为

$$R_X(\tau) = \frac{N_0}{4a} e^{-a|\tau|}$$

由于

$$Y(t) = X(t) - X(t - T)$$

所以

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= E\{Y^2(t)\} \\ &= E\{[X(t) - X(t - T)]^2\} \\ &= 2R_X(0) - 2R_X(T) \\ &= \frac{N_0}{2a} (1 - e^{-aT}) \end{aligned}$$

$E[X(t)X(t-T)] = R_X(T)$

于是可得  $Y(t)$  的一维概率密度为

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}\right)$$

例 2.31 已知  $X(t)$  为一个零均值的平稳高斯过程, 其自相关函数为  $R_X(\tau)$ 。设  $X(t)$  通过平方律检波器后的输出过程为  $Y(t) = X^2(t)$ 。

- (1) 求  $Y(t)$  的自相关函数  $R_Y(\tau)$ ;
- (2) 求  $Y(t)$  的均值  $m_Y$  和方差  $\sigma_Y^2$ ;
- (3) 求  $Y(t)$  的一维概率密度  $p_Y(y)$ 。

解 (1) 根据相关函数的定义, 有

$$R_Y(\tau) = E[Y(t)Y(t-\tau)] = E[X^2(t)X^2(t-\tau)]$$

对于联合高斯的两个随机变量  $X$  和  $Y$ , 有

$$E(X^2Y^2) = E(X^2)E(Y^2) + 2[E(XY)]^2$$

此结论的证明见例题 4.4。由于  $X(t)$  和  $X(t-\tau)$  是联合高斯的, 所以

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[X^2(t)]E[X^2(t-\tau)] + 2\{E[X(t)X(t-\tau)]\}^2 \\ &= R_X^2(0) + 2R_X^2(\tau) \end{aligned}$$

(2) 直接算出  $Y(t)$  的均值和方差分别为

$$m_Y = E[Y(t)] = E[X^2(t)] = R_X(0)$$

$$\sigma_Y^2 = R_Y(0) - m_Y^2 = 2R_X^2(0)$$

(3) 考虑到

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2R_X(0)}\right)$$

故此

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= p_X(\sqrt{y})|(\sqrt{y})'| + p_X(-\sqrt{y})|(-\sqrt{y})'| \\ &= \left[\frac{1}{2\sqrt{y}}p_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}}p_X(-\sqrt{y})\right]U(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)y}} \exp\left(-\frac{y}{2R_X(0)}\right)U(y) \end{aligned}$$

例 2.32  $X(t)$  与题 2.31 中相同, 设  $X(t)$  通过线性全波检波器后的输出过程为

$$Z(t) = |X(t)|$$

(1) 求  $Z(t)$  的自相关函数  $R_Z(\tau)$ ;

(2) 求  $Z(t)$  的均值  $m_Z$  和方差  $\sigma_Z^2$ ;

(3) 求  $Z(t)$  的一维概率密度  $p_Z(z)$ 。

解 (1) 根据相关函数的定义, 有

$$R_Z(\tau) = E\{Z(t)Z(t-\tau)\} = E\{|X(t)||X(t-\tau)|\}$$

对于联合高斯的两个随机变量  $X$  和  $Y$ , 若它们均值都为零, 方差分别为  $\sigma_X^2$  和  $\sigma_Y^2$ , 相关系数为  $r$ , 考虑到

$$E\{|X||Y|\} = \frac{2\sigma_X\sigma_Y}{\pi}(\cos a + a \sin a)$$

其中

$$a = \arcsin r, \quad -\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$$

此结论的证明见例题 4.4。又因  $X(t)$  和  $X(t-\tau)$  是联合高斯的, 且有

$$\sigma_X^2 = E[X^2(t)] = R_X(0)$$

$$r = \frac{E\{X(t)X(t-\tau)\}}{\sqrt{E\{X^2(t)\}E\{X^2(t-\tau)\}}} = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$$

所以

$$R_z(\tau) = \frac{2R_x(0)}{\pi}(\cos a + a \cos a)$$

式中

$$a = \arcsin \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$$

(2) 考虑到

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2R_X(0)}\right)$$

因此可以直接计算出  $Z(t)$  的均值和方差分别为

$$\begin{aligned} m_z &= E[Z(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| p_X(x) dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2R_X(0)}\right) dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi} R_X(0)} \end{aligned}$$

和

$$E[Z^2(t)] = R_z(0) = \frac{2R_X(0)}{\pi} \left( \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right) = R_X(0)$$

$$\sigma_z^2 = E[Z^2(t)] - m_z^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) R_X(0)$$

(3) 根据概率密度的性质, 可以直接算出

$$\begin{aligned} p_z(z) &= [p_X(z) + p_X(-z)] U(z) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\left(-\frac{z^2}{2R_X(0)}\right) U(z) \end{aligned}$$

例 2.33  $X(t)$  与题 2.31 中相同, 设  $X(t)$  通过线性半波检波器后的输出过程为

$$W(t) = \begin{cases} X(t), & X(t) \geq 0 \\ 0, & X(t) < 0 \end{cases}$$

(1) 求  $W(t)$  的自相关函数  $R_W(\tau)$ ;

(2) 求  $W(t)$  的均值  $m_W$  和方差  $\sigma_W^2$ ;

(3) 求  $W(t)$  的一维概率密度  $p_W(w)$ 。

解 (1) 设

$$W(t) = \frac{1}{2} [ |X(t)| + X(t) ] = \frac{1}{2} [ Z(t) + X(t) ]$$

其中  $Z(t) = |X(t)|$ 。对于  $Z(t)$  统计特性的详细讨论见例题 2.32。  $W(t)$  的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_W(\tau) &= E\{W(t)W(t-\tau)\} \\ &= \frac{1}{4} E\{[Z(t) + X(t)][Z(t-\tau) + X(t-\tau)]\} \\ &= \frac{1}{4} [R_Z(\tau) + R_X(\tau)] \end{aligned}$$

其中  $R_Z(\tau)$  见例题 2.32。



(2) 直接算出  $W(t)$  的均值

$$\begin{aligned} m_w &= E\{W(t)\} \\ &= \int_0^\infty x p_X(x) dx = \frac{m_z}{2} = \sqrt{\frac{R_X(0)}{2\pi}} \end{aligned}$$

考虑到

$$E[W^2(t)] = R_w(0) = \frac{1}{4}[R_z(0) + R_X(0)] = \frac{R_X(0)}{2}$$

故  $W(t)$  的方差为

$$\sigma_w^2 = E[W^2(t)] - m_w^2 = \left(1 - \frac{1}{\pi}\right) \frac{R_X(0)}{2}$$

(3)  $W(t)$  的一维概率分布函数为

$$\begin{aligned} F_w(w) &= \int_{\frac{1}{2}[|x|+x] \approx w} p_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 p_X(x) dx U(w) + \int_0^w p_X(x) dx U(w) \\ &= \frac{1}{2} U(w) + \int_0^w p_X(x) dx U(w) \end{aligned}$$

故  $W(t)$  的一维概率密度为

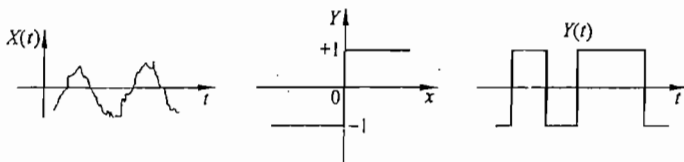
$$\begin{aligned} p_w(w) &= F'_w(w) \\ &= \frac{1}{2} \delta(w) + p_X(w) U(w) \\ &= \frac{1}{2} \delta(w) + \frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\left\{-\frac{w^2}{2R_X(0)}\right\} U(w) \end{aligned}$$

例 2.34  $X(t)$  与题 2.31 中相同, 设  $X(t)$  通过一个非线性系统后的输出过程为  $Y(t)$ , 如例题图 2.34 所示。

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & X(t) \geq 0 \\ -1, & X(t) < 0 \end{cases}$$

证明  $Y(t)$  的自相关函数  $R_Y(\tau)$  满足

$$R_Y(\tau) = \frac{2}{\pi} \arcsin\left[\frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}\right]$$



例题图 2.34

证明 根据相关函数的定义, 有

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E\{Y(t)Y(t-\tau)\} \\ &= P\{X(t)X(t-\tau) > 0\} - P\{X(t)X(t-\tau) < 0\} \end{aligned}$$

对于联合高斯的两个随机变量  $X$  和  $Y$ , 若它们均值为零, 相关系数为  $r$ , 则有

$$P(XY > 0) = \frac{1}{2} - \frac{a}{\pi}$$

$$P(XY < 0) = \frac{1}{2} + \frac{a}{\pi}$$

其中

$$a = \arcsin r, \quad -\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$$

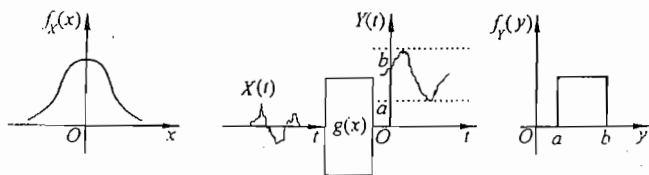
此结论的证明见例题 4.1. 由于  $X(t)$  和  $X(t-\tau)$  是联合高斯的, 且

$$r = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$$

所以

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} + \frac{a}{\pi} - \left( \frac{1}{2} - \frac{a}{\pi} \right) = \frac{2a}{\pi} = \frac{2}{\pi} \arcsin \left[ \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)} \right]$$

例 2.35 如例题图 2.35 所示, 设  $X(t)$  为零均值的平稳正态过程, 其自相关函数为  $R_X(\tau)$ , 试求一个记忆系统  $g(x)$ , 使该系统的输出  $Y(t) = g[X(t)]$  在  $(a, b)$  区间上为均匀分布。



例题图 2.35

解 根据题意可知

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq y \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

又由  $X(t)$  为高斯过程, 故有

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2R_X(0)}\right)$$

考虑到

$$p_Y(x) = \frac{p_X(x)}{|g'(x)|}$$

故有

$$|g'(x)| = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2R_X(0)}\right)$$

取

$$g'(x) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2R_X(0)}\right)$$

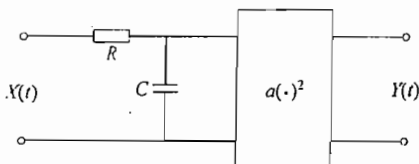
则有

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{b-a}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2R_X(0)}\right) du + C \\ &= (b-a) \operatorname{erfc}\left[\frac{x}{\sqrt{R_X(0)}}\right] + C \end{aligned}$$

因为,  $g(-\infty)=a, g(\infty)=b, g(0)=\frac{1}{2}(a+b)$ , 故

$$g(x) = (b-a) \operatorname{erfc}\left[\frac{x}{\sqrt{R_X(0)}}\right]$$

例 2.36 如例题图 2.36 所示非线性系统。该系统输入为零均值, 功率谱密度为  $G_X(\omega) = N_0/2$  的高斯白噪声。不考虑其他因素, 试求输出随机过程  $Y(t)$  的自相关函数和功率谱密度。



例题图 2.36

解 已知

$$R_X(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

设  $RC$  电路的输出过程为  $X_1(t)$ , 故有

$$\begin{aligned} S_{X_1}(\omega) &= |H_1(j\omega)|^2 S_X(\omega) \\ &= \left| \frac{a}{a + j\omega} \right|^2 S_X(\omega) \\ &= \frac{a^2}{a^2 + \omega^2} S_X(\omega), \quad a = \frac{1}{RC} \end{aligned}$$

对应的相关函数为

$$R_{X_1}(\tau) = \frac{N_0}{4RC} e^{-\frac{1}{RC}|\tau|}$$

因为,  $E(X^2 Y^2) = E(X^2)E(Y^2) + 2[E(XY)]^2$ , 所以

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= a^2 E[X_1^2(t) X_1^2(t-\tau)] \\ &= a^2 R_{X_1}^2(0) + 2a^2 R_{X_1}^2(\tau) \end{aligned}$$

将  $R_{X_1}(\tau)$  代入上式, 则有

$$R_Y(\tau) = \frac{a^2 N_0^2}{16R^2 C^2} \left[ 1 + 2 \exp\left(-\frac{2|\tau|}{RC}\right) \right]$$

对应的功率谱密度为

$$S_Y(\omega) = \frac{a^2 N_0^2}{16R^2 C^2} \left[ 2\pi \delta(\omega) + \frac{8RC}{4 + (RC\omega)^2} \right]$$

## 2.3 练习题

2.1 已知随机过程  $X(t)$  的相关函数为

$$R_X(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|} (1 + a|\tau|)$$

求  $Y(t) = X(t+\tau)$  和  $Z(t) = \dot{X}(t+\tau)$  的方差。

2.2 已知

$$R_X(\tau) = Ae^{-a|\tau|} \left( 1 + a|\tau| + \frac{1}{3}a^2\tau^2 \right)$$

求  $X(t)$  和  $\dot{X}(t)$  的互相关函数。

2.3 令

$$Y(t) = K_1 X(t) + K_2 \dot{X}(t)$$

若  $R_X(\tau) = Ae^{-a|\tau|} (1 + a|\tau|)$ , 求  $S_Y(\omega)$ 。

2.4 设有实平稳随机过程  $X(t)$ , 其相关函数为  $R_X(\tau)$ 。证明:

$$R_X(0) - R_X(\tau) \geq \frac{1}{4a} [R_X(0) - R_X(2\tau)]$$

2.5 已知随机过程  $X(t)$  的自相关函数为

$$(1) R_X(\tau) = e^{-a\tau^2};$$

$$(2) R_X(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|}.$$

试问: 随机过程  $X(t)$  是否均方连续、均方可微?

2.6 已知  $R_X(\tau) = e^{-a\tau^2}$ , 求  $r_X(\tau)$ ,  $r_{\dot{X}X}(\tau)$  和  $r_{\ddot{X}}(\tau)$ 。

2.7 已知相关函数  $R_X(t_1, t_2) = 5e^{-(t_1 - t_2)^2}$ , 求随机过程  $Z(t) = X(t) + \dot{X}(t)$  的相关函数。

2.8 设随机过程  $X(t) = U \cos 3t$ , 这里  $U$  是随机变量, 且  $E(U) = 1, D(U) = 1$ , 求随机过程

$$Y(t) = \frac{1}{t} \int_0^t X(s) ds$$

的均值、相关函数和方差。

2.9 已给相关函数  $R_X(t_1, t_2) = Ae^{-|t_1 - t_2|}$ , 求积分

$$Y(t) = \int_0^t X(s) ds$$

的相关函数和方差。

2.10 假设随机过程  $X(t)$  是广义平稳过程, 均值为  $m_X$ , 协方差函数为

$$C_X(\tau) = \begin{cases} \sigma_X^2 \left( 1 - \frac{|\tau|}{\tau_0} \right), & 0 \leq |\tau| \leq \tau_0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

证明过程  $X(t)$  通过一个平均积分器的输出过程

$$Y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t X(s) ds$$

满足

$$\text{var}[Y(t)] = \begin{cases} \sigma_x^2 \left(1 - \frac{T}{3\tau_0}\right), & 0 \leq T < \tau_0 \\ \sigma_x^2 \left(1 - \frac{\tau_0}{3T}\right) \frac{\tau_0}{T}, & T \geq \tau_0 \end{cases}$$

2.11 随机过程  $X(t)$  通过积分器

$$Y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t X(t') dt'$$

证明:

- (1)  $E[Y(t)] = m_X(t) * [u(t) - u(t-T)] \frac{1}{T}$ ;
- (2)  $R_Y(t_1, t_2) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R_X(\tau_1 + t_1 - T, \tau_2 + t_2 - T) d\tau_1 d\tau_2$ ;
- (3)  $\text{var}[Y(t)] = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) C_X(\tau) d\tau$ .

2.12 如果短时间平均器的输入为随机电报信号, 它的自协方差函数为

$$C_X(\tau) = \frac{e^{-2\lambda|\tau|}}{4}$$

$Y(t)$  为平均器的输出过程。试证:

$$D[Y(t)] = \frac{1}{4\lambda T} \left(1 - \frac{1}{2\lambda T} + \frac{1}{2\lambda T} e^{-2\lambda T}\right)$$

2.13 设有线性离散时间动态系统, 它的单位冲激响应为

$$h(k) = \begin{cases} e^{-ak}, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad a > 0$$

即该系统为因果系统。设输入信号为一平稳随机序列, 它的均值为 0, 相关函数为

$$R_X(n) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

即输入为白噪声的抽样序列。求输出过程的均值和相关函数。

2.14 平稳随机过程  $X(t)$  通过冲激响应为  $h(t)$  的线性系统, 输出  $Y(t) = X(t) * h(t)$ ,

证明:

- (1)  $m_Y(t) = m_X(t) * h(t)$ ;
- (2)  $R_{YX}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau)$ ;
- (3)  $R_Y(\tau) = R_X(\tau) * R_h(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$ ;
- (4)  $C_Y(\tau) = C_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$ .

2.15 均方极限的惟一性。设  $\{X_n\} (n=1, 2, \dots)$  是具有二阶矩的随机变量序列,  $X, Y$  为两个具有二阶矩的随机变量, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} mX_n = X, \lim_{n \rightarrow \infty} mX_n = Y$ , 则有  $X=Y$ 。

2.16 柯西准则。设  $\{X_n\} (n=1, 2, \dots)$  是随机变量序列,  $E\{|X_n|^2\} < \infty$ , 则  $\{X_n\}$  均方收敛于  $X$  的充要条件是

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} E[|X_n - X_m|^2] = 0$$

2.17\* Loève 准则。同练习题 2.16 的条件, 则  $\{X_n\}$  均方收敛于  $X$  的充要条件是

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} E\{X_n X_m\} = \text{常数}$$

2.18\* 设二阶矩的随机变量序列  $\{X_n\} (n=1, 2, \dots)$  及二阶矩随机变量  $X$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ , 设  $f(u)$  是一确定性函数, 且满足利普希茨条件, 即

$$|f(u) - f(v)| \leq M |u - v|$$

其中  $M$  为常数。假设  $\{f(X_n)\} (n=1, 2, \dots)$  和  $f(X)$  均为二阶矩随机变量, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{f(X_n)\} = E\{f(X)\}$$

2.19 设有一个宽平稳随机过程  $X(t)$ , 其自相关函数为

$$R_X(\tau) = A \cos \tau$$

其均值为零, 试证:  $X(t)$  是无限可导的, 且

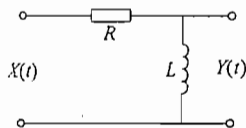
$$R_X(\tau) = R_{\dot{X}}(\tau) = R_{\ddot{X}}(\tau) = \dots = R_X^{(n)}(\tau) = \dots$$

2.20 若  $\{X(t), t \in [a, b]\}$  为均方连续随机过程, 则对一切  $t \in [a, b]$  有

$$(1) E\left\{\left|\int_a^b X(u) du\right|^2\right\} \leq (t-a) \int_a^t E\{|X(u)|^2\} du;$$

$$(2) \left\{E\left|\int_a^b X(u) du\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \int_a^b \{E|X(u)|^2\}^{\frac{1}{2}} du.$$

2.21 在练习题图 2.21 所示的 RL 电路中, 输入谱密度为  $S_0$  的白噪声  $X(t)$ , 求输出过程  $Y(t)$  的自相关函数。



练习题图 2.21

2.22 练习题图 2.22 所示的系统通常称为梳状滤波器。

(1) 证明梳状滤波器的传递函数  $H(f)$  满足

$$|H(f)|^2 = 2(1 - \cos 2\pi f T)$$

并画出  $|H(f)|^2$  的图形;

(2) 证明对应于  $f \ll 1/T$ , 有

$$S_Y(f) = 4\pi^2 f^2 T^2 S_X(f)$$

并说明这一结果的物理意义。



练习题图 2.22

2.23 设白噪声的相关函数为  $N_0\delta(\tau)/2$ , 加到一个理想窄带放大器的输入端, 放大器频谱特性为

$$H(j\omega) = \begin{cases} 2, & |\omega - \omega_c| \leq \frac{\Delta\omega}{2} \\ 0, & |\omega - \omega_c| > \frac{\Delta\omega}{2} \end{cases}$$

求输出白噪声的总平均功率。

2.24 平稳过程  $W(t)$  在  $t=0$  时刻接入一个线性系统, 在  $t=T$  时刻断开, 即系统输入  $X(t)$  为

$$X(t) = \begin{cases} W(t), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

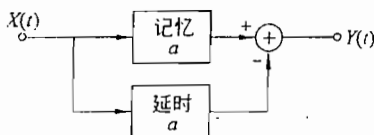
若已知  $W(t)$  是具有单位谱高的白噪声, 系统的冲激响应函数为

$$h(t) = e^{-at}U(t), \quad a > 0$$

求输出  $Y(t)$  的自相关函数  $R_Y(t_1, t_2)$ 。

2.25 对于练习题图 2.25 所示的系统, 证明:

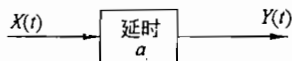
$$S_Y(\omega) = 4S_X(\omega)\sin^2 a\omega$$



练习题图 2.25

2.26 练习题图 2.26 所示的系统为一个理想延时器, 设输入过程  $X(t)$  的自相关函数为  $R_X(\tau)$ 。

- (1) 求输出过程  $Y(t)$  的自相关函数  $R_Y(\tau)$  和输入输出之间的互相关函数  $R_{XY}(\tau)$ ;
- (2) 直观地看, 所得的结果合理吗?



练习题图 2.26

2.27\* 考虑微分方程

$$\begin{cases} Y'(t) + aY(t) = X(t) \\ Y(0) = 0 \end{cases}$$

其中  $X(t)$  为平稳过程, 并且已知  $E[X(t)] = \lambda$ ,  $R_X(\tau) = \lambda^2 + \lambda\delta(\tau)$ 。求  $E[Y(t)]$ ,  $R_{XY}(t_1, t_2)$  和  $R_Y(t_1, t_2)$ , 其中  $t > 0, t_1 > 0, t_2 > 0$ 。

2.28 一个线性系统的输入过程  $X(t)$  的功率谱密度为  $S_X(\omega) = (\omega^2 + 3)/(\omega^2 + 8)$ , 若要求该系统的输出为具有单位谱高的白噪声过程。

(1) 求满足以上要求的可实现稳定系统的传递函数(此系统一般称为白化滤波器);

(2) 第(1)题的答案是否惟一,或证明惟一性,或求出另一个可实现的稳定系统。

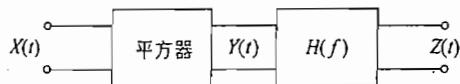
2.29\* 一个非线性系统如练习题图 2.29 所示。假设输入  $X(t)$  为零均值平稳高斯噪声。

证明:

$$(1) S_Y(f) = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df \right]^2 \delta(f) + 2S_X(f) * S_X(f);$$

$$(2) S_Z(f) = S_Y(f) |H(f)|^2;$$

$$(3) D[Z(t)] = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [S_X(f) * S_X(f)] |H(f)|^2 df.$$



练习题图 2.29

2.30\*  $X(t)$  是零均值平稳高斯过程,其概率密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right)$$

已知  $g[X(t)]$  是一个无记忆函数,且令  $Y(t) = g[X(t)]$ 。

$$(1) \text{ 试证: } R_{YX}(\tau) = KR_X(\tau), \text{ 其中 } K = \frac{1}{\sigma_X^2} \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)f(x)dx;$$

$$(2) \text{ 若取 } g(x) = \text{sgn}(x), \text{ 试证: } R_X(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_X R_{YX}(\tau).$$



$$\begin{aligned}\tilde{X}(w) &= X(t) * \pi t \\ \tilde{S}(w) &= 2S(w)U(w) \\ \tilde{X}(t) &= X(t) + j\hat{X}(t)\end{aligned}$$

## 窄带随机过程

$$\begin{aligned}\delta(t) &\rightarrow 1 \\ 1 &\rightarrow 2\pi\delta(w) \\ U(t) &\rightarrow \pi\delta(w) + jw \\ \frac{1}{2}\left(\delta(w) + \frac{1}{j\pi w}\right) &\rightarrow U(w)\end{aligned}$$

### 3.1 内容提要 $\frac{1}{\pi t} \rightarrow -j\operatorname{sgn}(w)$

若随机过程的功率谱密度限制在中心频率附近的一个较窄频带内, 频带之外功率谱密度全为零, 且该频带宽度远小于中心频率, 则称此过程为窄带随机过程。本章主要用希尔伯特变换讨论窄带过程。

#### 3.1.1 希尔伯特变换

为了讨论窄带过程的复表示, 引入希尔伯特变换。

##### 1. 定义

在区间 $(-\infty, \infty)$ 内, 给定实值函数 $x(t)$ , 它的希尔伯特变换定义为

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= H \cdot x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t-\tau)}{\tau} d\tau \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t+\tau)}{\tau} d\tau\end{aligned}$$

希尔伯特逆变换为

$$\begin{aligned}x(t) &= H^{-1} \cdot \hat{x}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t-\tau} d\tau \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(t-\tau)}{\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(t+\tau)}{\tau} d\tau\end{aligned}$$

##### 2. 性质

(1) 若 $x(t) \Leftrightarrow X(w)$ , 则

$$\hat{x}(t) \Leftrightarrow -jX(w)\operatorname{sgn}(w)$$

式中符号函数为

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ -1, & \omega < 0 \end{cases}$$

(2) 若  $a(t)$  的傅里叶变换为

$$A(\omega) = \begin{cases} A(\omega), & |\omega| < B \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则

$$H[a(t) \cos \omega_0 t] = a(t) \sin \omega_0 t$$

$$H[a(t) \sin \omega_0 t] = -a(t) \cos \omega_0 t$$

(3)  $H \cdot \hat{x}(t) = -x(t)$ 。

(4)  $x(t)$  和  $\hat{x}(t)$  是正交的, 即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \hat{x}(t) dt = 0$$

(5)  $x(t)$  和  $\hat{x}(t)$  在  $R_1$  空间功率相等, 即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \hat{x}^2(t) dt$$

(6) 若  $y(t) = v(t) * x(t)$ , 则  $\hat{y}(t) = v(t) * \hat{x}(t)$ , 或  $\hat{y}(t) = x(t) * \hat{v}(t)$ 。

(7)  $R_x(\tau) = R_{\hat{x}}(\tau)$ ,  $S_x(\omega) = S_{\hat{x}}(\omega)$ 。

(8)  $R_{\hat{x}x}(\tau) = \hat{R}_x(\tau)$ ,  $R_{x\hat{x}}(\tau) = -\hat{R}_x(\tau)$ ,  $R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) = -R_{\hat{x}x}(-\tau)$ ,  $R_{x\hat{x}}(\tau) = R_{\hat{x}x}(-\tau)$ ,  $R_{\hat{x}\hat{x}}(0) = R_{\hat{x}x}(0) = 0$ 。

### 3.1.2 复随机过程

#### 1. 复随机过程的数字特征

设  $X(t), Y(t)$  为实随机过程, 定义复随机过程为

$$Z(t) = X(t) + jY(t)$$

则复随机过程的数字特征如下。

(1) 均值

$$m_Z(t) = m_X(t) + jm_Y(t)$$

(2) 自相关函数

$$R_Z(t_1, t_2) = E[Z(t_1)Z^*(t_2)]$$

(3) 协方差

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}[Z(t_1), Z(t_2)] &= E\{[Z(t_1) - m_Z(t_1)][Z(t_2) - m_Z(t_2)]^*\} \\ &= R_Z(t_1, t_2) - m_Z(t_1)m_Z^*(t_2) \end{aligned}$$

(4) 互相关函数

若有两个复随机过程  $Z_1(t)$  和  $Z_2(t)$ , 则互相关函数为

$$R_{Z_1 Z_2}(t_1, t_2) = E[Z_1(t_1)Z_2^*(t_2)]$$

#### 2. 实随机过程的复过程表示

设  $X(t)$  为一平稳随机过程, 其希尔伯特变换为  $\hat{X}(t)$ , 实过程  $X(t)$  的复表示定义为

$$\tilde{X}(t) = X(t) + j\hat{X}(t)$$

其中  $X(t) = \operatorname{Re} \tilde{X}(t)$ 。

实随机过程的数学特征如下：

$$(1) R_{\tilde{X}}(\tau) = R_X(\tau);$$

$$(2) R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) = \hat{R}_X(\tau), R_{X\hat{X}}(\tau) = -\hat{R}_X(\tau);$$

$$(3) R_{\tilde{X}}(\tau) = 2[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)], R_{\tilde{X}}(-\tau) = 2[R_X(\tau) - j\hat{R}_X(\tau)] = R_{\tilde{X}}^*(\tau);$$

$$(4) R_{X\hat{X}}(0) = R_{\hat{X}X}(0) = 0.$$

实随机过程的功率谱密度如下：

$$(1) S_{\tilde{X}}(\omega) = S_X(\omega);$$

$$(2) S_{\tilde{X}}(\omega) = \begin{cases} 4S_X(\omega), & \omega > 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases}$$

### 3.1.3 窄带随机过程

#### 1. 窄带随机过程的正交表示

设有窄带随机过程

准正弦振荡：

$$X(t) = A(t) \cos[\overset{2\pi f_0}{\downarrow} \omega_0 t + \Phi(t)]$$

则其正交表示为

正交表示：

$$X(t) = A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t$$

其中

$$A_c(t) = A(t) \cos \Phi(t) = \eta_c(t)$$

$$A_s(t) = A(t) \sin \Phi(t) = \eta_s(t)$$

且有

$$A(t) = [A_c^2(t) + A_s^2(t)]^{1/2}$$

$$\Phi(t) = \arctan \frac{A_s(t)}{A_c(t)}$$

#### 2. 窄带随机过程正交表示的统计特征

$$(1) R_c(\tau) = R_X(\tau) \cos \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

$$R_s(\tau) = R_X(\tau) \cos \omega_0 \tau - \hat{R}_X(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

$$R_c(\tau) = R_s(\tau)$$

$$(2) R_a(\tau) = R_X(\tau) \sin \omega_0 \tau - \hat{R}_X(\tau) \cos \omega_0 \tau$$

$$R_{ac}(\tau) = -R_X(\tau) \sin \omega_0 \tau + \hat{R}_X(\tau) \cos \omega_0 \tau$$

$$R_a(\tau) = -R_{ac}(\tau) = -R_a(-\tau)$$

$$(3) \text{在同一时刻 } R_a(0) = 0;$$

## (4) 功率谱密度

$$\begin{aligned}
 S_{N_c}(f) &= S_{N_s}(f) \\
 &= \begin{cases} -j[G_x(\omega + \omega_0) - G_x(\omega - \omega_0)], & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\
 G_X(\omega) &= \frac{1}{2}[G_c(\omega + \omega_0) + G_c(\omega - \omega_0)] \\
 &= \frac{1}{2}[G_s(\omega - \omega_0) + G_s(\omega + \omega_0)], \quad |\omega| < \omega_c \\
 G_c(\omega) &= G_s(\omega) \\
 &= \begin{cases} G_X(\omega - \omega_0) + G_X(\omega + \omega_0), & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
 \end{aligned}$$

## 3. 窄带随机过程的复表示

设随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  为窄带平稳实过程, 其复表示式为

$$\tilde{X}(t) = X(t) + j\hat{X}(t)$$

利用窄带过程的正交表示, 则有

$$\tilde{X}(t) = [A_c(t) + jA_s(t)]e^{j\omega_0 t} = \tilde{A}(t)e^{j\omega_0 t}$$

其中  $\tilde{A}(t)$  为复低频过程, 其相关函数为

$$R_{\tilde{A}}(\tau) = 2[R_c(\tau) + jR_{sc}(\tau)]$$

复过程  $\tilde{X}(t)$  的相关函数为

$$R_{\tilde{X}}(\tau) = R_{\tilde{A}}(\tau)e^{j\omega_0 \tau}$$

其功率谱密度为

$$G_{\tilde{X}}(\omega) = 4G_X(\omega)U(\omega)$$

$X(t)$  的希尔伯特变换  $\hat{X}(t)$  的功率谱密度为

$$G_{\hat{X}}(\omega) = G_X(\omega)$$

互功率谱密度为

$$G_{X\hat{X}}(\omega) = jG_X(\omega)\text{sgn}(\omega)$$

$$G_{\hat{X}X}(\omega) = -jG_X(\omega)\text{sgn}(\omega)$$

## 3.1.4 窄带随机过程的谱分解

1. 均方周期性随机过程  $\{X(t)\}$  展开成傅里叶级数表示式

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\omega_0 t}, \quad 0 \leq t \leq T$$

式中傅里叶系数

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(u) e^{-jn\omega_0 u} du$$

且

$$E[A_n] = \begin{cases} E[X(t)], & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$E[A_n A_m^*] = \begin{cases} a_n, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

## 2. 非周期性随机过程 $\{X(t)\}$ 展开成傅里叶级数表示式

若平稳随机过程  $X(t)$  不是周期性, 则在一给定的时间间隔  $|t| < T/2$  的范围内可展开成傅里叶级数.

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\omega_0 t}, \quad |t| < T/2$$

式中

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(u) e^{-jn\omega_0 u} du$$

但

$$E[A_n A_m^*] \neq 0, \quad n \neq m$$

## 3. 窄带过程 $\{X(t)\}$ 展开成傅里叶级数表示式

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jn\omega_0 t}, \quad |t| < T/2$$

式中系数

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

令

$$A_n = A_{cn} + jA_{sn}$$

其中

$$A_{cn} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$A_{sn} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) \sin n\omega_0 t dt$$

并且窄带过程的傅里叶表示与正交表示的关系有

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [A_c(t) + jA_s(t)] e^{j(\omega_c - n\omega_0)t} dt$$

## 3.2 例题

例 3.1 分别求下列信号的希尔伯特变换:

(1)  $s_1(t) = \sin \omega_0 t$ ;

(2)  $s_2(t) = \cos \omega_0 t$ 。

解 (1) 根据希尔伯特变换的定义, 有

$$H \cdot s_1(t) = H \cdot \sin \omega_0 t$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0(t-\tau)}{\tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\sin \omega_0 t \cos \omega_0 \tau - \cos \omega_0 t \sin \omega_0 \tau) \frac{1}{\tau} d\tau \\
 &= \frac{\cos \omega_0 t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\sin \omega_0 \tau}{\tau} d\tau \\
 &= \frac{\cos \omega_0 t}{\pi} (-\pi) \\
 &= -\cos \omega_0 t
 \end{aligned}$$

(2) 同理可得

$$\begin{aligned}
 H \cdot s_2(t) &= H \cdot \cos \omega_0 t \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega_0(t-\tau)}{\tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \omega_0 t \cos \omega_0 \tau + \sin \omega_0 t \sin \omega_0 \tau) \frac{1}{\tau} d\tau \\
 &= \frac{\sin \omega_0 t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 \tau}{\tau} d\tau \\
 &= \frac{\sin \omega_0 t}{\pi} \pi \\
 &= \sin \omega_0 t
 \end{aligned}$$

例 3.2 证明: (1) 偶函数的希尔伯特变换为奇函数; (2) 奇函数的希尔伯特变换为偶函数。

证明 (1) 根据希尔伯特变换的定义, 有

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t-\tau)}{\tau} d\tau \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t+\tau)}{\tau} d\tau
 \end{aligned}$$

若  $x(t)$  为偶函数, 即  $x(-t) = x(t)$ , 则有

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(-t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(-t-\tau)}{\tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t+\tau)}{\tau} d\tau \\
 &= -\hat{x}(t)
 \end{aligned}$$

故  $\hat{x}(t)$  为奇函数。

(2) 若  $x(t)$  为奇函数, 即  $x(-t) = -x(t)$ , 则有

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(-t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(-t-\tau)}{\tau} d\tau \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t+\tau)}{\tau} d\tau \\
 &= \hat{x}(t)
 \end{aligned}$$

故  $\hat{x}(t)$  为偶函数。

例 3.3  $\hat{x}(t)$  为  $x(t)$  的希尔伯特变换。证明:

(1)  $x(t)$  和  $\hat{x}(t)$  在范围  $(-\infty < t < \infty)$  内功率相等, 即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \hat{x}^2(t) dt$$

(2) 在范围  $(-\infty < t < \infty)$  内,  $x(t)$  和  $\hat{x}(t)$  是正交的, 即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \hat{x}(t) dt = 0$$

证明 (1) 根据相关函数的定义, 有

$$R_{\hat{x}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \hat{x}(t) \hat{x}(t - \tau) dt$$

其中  $\hat{x}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t+u)}{u} du$ 。将  $\hat{x}(t)$  代入  $R_{\hat{x}}(\tau)$ , 则有

$$\begin{aligned} R_{\hat{x}}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t+u)}{u} du \cdot \left[ -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t-\tau+v)}{v} dv \right] \right\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 uv} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+u) \cdot x(t-\tau+v) dt \right] du dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_x(u+\tau-v)}{\pi v} dv \right] du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{R}_x(u+\tau)}{u} du \\ &= R_x(\tau) \end{aligned}$$

显然,  $R_{\hat{x}}(0) = R_x(0)$ , 故

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \hat{x}^2(t) dt$$

(2) 根据各态历经相关函数定义, 有

$$\begin{aligned} R_{\hat{x}}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \hat{x}(t - \tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \left[ -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t - \tau + u)}{u} du \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{u\pi} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t - \tau + u) dt \right] du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{\pi} \frac{R_x(\tau - u)}{u} du \\ &= -\hat{R}_x(\tau) \end{aligned}$$

同理可得  $R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) = \hat{R}_x(\tau)$ , 则有

$$R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) = R_{\hat{x}\hat{x}}(-\tau) = \hat{R}_x(-\tau) = -R_{\hat{x}\hat{x}}(-\tau)$$

显然,  $R_{\hat{x}\hat{x}}(0) = -R_{\hat{x}\hat{x}}(0)$ , 即  $R_{\hat{x}\hat{x}}(0) = 0$ 。

例 3.4 广义平稳过程  $X(t)$  的希尔伯特变换为  $\hat{X}(t)$ , 试证明:

$$(1) R_{X\hat{X}}(\tau) = -R_{\hat{X}X}(\tau) = -\hat{R}_X(\tau);$$

$$(2) R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau);$$

$$(3) R_{X\hat{X}}(-\tau) = -R_{X\hat{X}}(\tau).$$

证明 (1) 根据互相关函数的定义, 有

$$\begin{aligned} R_{X\hat{X}}(\tau) &= E\{X(t) \hat{X}(t-\tau)\} \\ &= E\left\{X(t) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(t-\tau-u)}{u} du\right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E\{X(t) X(t-\tau-u)\}}{u} du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_X(\tau+u)}{u} du \\ &= -\hat{R}_X(\tau) \end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned} R_{\hat{X}X}(\tau) &= E\{\hat{X}(t) X(t-\tau)\} \\ &= E\left\{\left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(t-u)}{u} du\right] X(t-\tau)\right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_X(\tau-u)}{u} du \\ &= \hat{R}_X(\tau) \end{aligned}$$

故

$$R_{X\hat{X}}(\tau) = -R_{\hat{X}X}(\tau) = -\hat{R}_X(\tau)$$

(2) 根据自相关函数的定义, 有

$$\begin{aligned} R_{\hat{X}}(\tau) &= E\{\hat{X}(t) \hat{X}(t-\tau)\} \\ &= E\left\{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(t-u)}{u} du \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(t-\tau-v)}{v} dv\right\} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_X(\tau+v-u)}{u} du\right] dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{R}_X(\tau+v)}{v} dv \\ &= R_X(\tau) \end{aligned}$$

故

$$R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau)$$

(3) 由自相关函数的性质可知

$$R_X(\tau) = R_X(-\tau)$$

又由于偶函数的希尔伯特变换为奇函数, 即

$$\hat{R}_X(-\tau) = -\hat{R}_X(\tau)$$

再利用第(1)题的结论, 则有



$$R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) = -\hat{R}_X(\tau)$$

$$R_{\hat{X}\hat{X}}(-\tau) = -\hat{R}_X(-\tau) = \hat{R}_X(\tau)$$

$$R_{\hat{X}\hat{X}}(-\tau) = -R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau)$$

即  $R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau)$  是奇函数, 同理可以证明  $R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau)$  也是奇函数。

例 3.5 窄带平稳过程为

$$Z(t) = X(t)\cos\omega_0 t - Y(t)\sin\omega_0 t$$

证明:

$$(1) R_Y(\tau) = R_Z(\tau)\cos\omega_0 \tau + \hat{R}_Z(\tau)\sin\omega_0 \tau;$$

$$(2) R_Z(\tau) = R_X(\tau)\cos\omega_0 \tau + R_{XY}(\tau)\sin\omega_0 \tau.$$

证明 (1) 由希尔伯特变换的性质可知

$$Z(t) = X(t)\cos\omega_0 t - Y(t)\sin\omega_0 t$$

$$\hat{Z}(t) = X(t)\sin\omega_0 t + Y(t)\cos\omega_0 t$$

解出  $Y(t)$  可得

$$Y(t) = \hat{Z}(t)\cos\omega_0 t - Z(t)\sin\omega_0 t$$

根据相关函数的定义, 有

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E\{Y(t)Y(t-\tau)\} \\ &= E\{[\hat{Z}(t)\cos\omega_0 t - Z(t)\sin\omega_0 t] \times \\ &\quad [\hat{Z}(t-\tau)\cos\omega_0(t-\tau) - Z(t-\tau)\sin\omega_0(t-\tau)]\} \\ &= R_{\hat{Z}\hat{Z}}(\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau) - R_{\hat{Z}Z}(\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau) - \\ &\quad R_{Z\hat{Z}}(\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau) + R_{ZZ}(\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau) \end{aligned}$$

由于

$$R_{\hat{Z}}(\tau) = R_Z(\tau)$$

$$R_{\hat{Z}\hat{Z}}(\tau) = -\hat{R}_Z(\tau)$$

$$R_{\hat{Z}Z}(\tau) = \hat{R}_Z(\tau)$$

因此将上述结果代入  $R_Y(\tau)$  可得

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= R_Z(\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau) + \hat{R}_Z(\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau) - \\ &\quad \hat{R}_Z(\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau) + R_Z(\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau) \\ &= R_Z(\tau)\cos\omega_0 \tau + \hat{R}_Z(\tau)\sin\omega_0 \tau \end{aligned}$$

(2) 根据相关函数的定义, 有

$$\begin{aligned} R_Z(\tau) &= E\{Z(t)Z(t-\tau)\} \\ &= E\{[X(t)\cos\omega_0 t - Y(t)\sin\omega_0 t] \times \\ &\quad [X(t-\tau)\cos\omega_0(t-\tau) - Y(t-\tau)\sin\omega_0(t-\tau)]\} \\ &= R_X(\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau) - R_{YX}(\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau) - \\ &\quad R_{XY}(\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau) + R_Y(\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau) \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}R_X(\tau) &= R_Y(\tau) \\ R_{XY}(\tau) &= -R_{YX}(\tau)\end{aligned}$$

故将上述结果代入  $R_Z(\tau)$ , 可得

$$\begin{aligned}R_Z(\tau) &= R_X(\tau)[\cos\omega_0 t \cos\omega_0(t-\tau) + \sin\omega_0 t \sin\omega_0(t-\tau)] - \\ &\quad R_{XY}(\tau)[\sin\omega_0 t \cos\omega_0(t-\tau) - \cos\omega_0 t \sin\omega_0(t-\tau)] \\ &= R_X(\tau)\cos\omega_0 \tau + R_{XY}(\tau)\sin\omega_0 \tau\end{aligned}$$

例 3.6 证明下式成立:

$$(1) R_{\tilde{X}}(\tau) = E\{\tilde{X}(t)\tilde{X}^*(t-\tau)\} = 2[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)];$$

$$(2) E\{\tilde{X}(t)\tilde{X}(t-\tau)\} = 0.$$

证明 (1) 根据复随机过程相关函数的定义, 有

$$\begin{aligned}R_{\tilde{X}}(\tau) &= E\{\tilde{X}(t)\tilde{X}^*(t-\tau)\} \\ &= E\{[X(t) + j\hat{X}(t)][X(t-\tau) - j\hat{X}(t-\tau)]\} \\ &= R_X(\tau) + R_{\hat{X}}(\tau) + jR_{\hat{X}X}(\tau) - jR_{X\hat{X}}(\tau)\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}R_{X\hat{X}}(\tau) &= -\hat{R}_X(\tau) \\ R_{\hat{X}X}(\tau) &= \hat{R}_X(\tau) \\ R_{\hat{X}}(\tau) &= R_X(\tau)\end{aligned}$$

故有

$$E\{\tilde{X}(t)\tilde{X}^*(t-\tau)\} = 2[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)]$$

(2) 计算

$$\begin{aligned}E\{\tilde{X}(t)\tilde{X}(t-\tau)\} &= E\{[X(t) + j\hat{X}(t)][X(t-\tau) + j\hat{X}(t-\tau)]\} \\ &= R_X(\tau) - R_{\hat{X}}(\tau) + jR_{\hat{X}X}(\tau) + jR_{X\hat{X}}(\tau)\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}R_{X\hat{X}}(\tau) &= -\hat{R}_X(\tau) = -R_{\hat{X}X}(\tau) \\ R_{\hat{X}}(\tau) &= R_X(\tau)\end{aligned}$$

所以

$$E\{\tilde{X}(t)\tilde{X}(t-\tau)\} = 0$$

例 3.7 对于窄带平稳随机过程

$$Y(t) = A_c(t)\cos\omega_0 t - A_s(t)\sin\omega_0 t$$

若已知  $R_Y(\tau) = a(\tau)\cos\omega_0 \tau$ , 求证:  $R_{A_s}(\tau) = R_{A_c}(\tau) = a(\tau)$ .

证明 由窄带随机过程正交表示的统计特征的性质知

$$R_{A_s}(\tau) = R_{A_c}(\tau) = R_Y(\tau)\cos\omega_0 \tau + \hat{R}_Y(\tau)\sin\omega_0 \tau$$

已知  $R_Y(\tau) = a(\tau)\cos\omega_0 \tau$ , 故其希尔伯特变换为  $\hat{R}_Y(\tau) = a(\tau)\sin\omega_0 \tau$ , 将此结果代入上式,

可得

$$R_{A_1}(\tau) = R_{A_2}(\tau) = a(\tau)\cos^2\omega_0\tau + a(\tau)\sin^2\omega_0\tau = a(\tau)$$

例 3.8 设零均值平稳窄带噪声  $Y(t)$  具有对称功率谱密度, 且  $R_Y(\tau) = a(\tau)\cos\omega_0\tau$ , 求相关函数  $R_{\hat{Y}}(\tau)$ ,  $R_{\tilde{Y}}(\tau)$  和方差  $\sigma_{\hat{Y}}^2, \sigma_{\tilde{Y}}^2$ 。

解 由平稳窄带过程的性质知

$$R_{\hat{Y}}(\tau) = R_Y(\tau) = a(\tau)\cos\omega_0\tau$$

$$\sigma_{\hat{Y}}^2 = \sigma_Y^2 = R_Y(0) = a(0)$$

由例题 3.6 可知

$$\begin{aligned} R_{\tilde{Y}}(\tau) &= 2[R_Y(\tau) + j\hat{R}_Y(\tau)] \\ &= 2[a(\tau)\cos\omega_0\tau + ja(\tau)\sin\omega_0\tau] \\ &= 2a(\tau)e^{j\omega_0\tau} \end{aligned}$$

且

$$\sigma_{\tilde{Y}}^2 = R_{\tilde{Y}}(0) = 2a(0)$$

例 3.9 若  $X(t)$  为窄带平稳随机过程, 它的功率谱密度为  $S_X(f)$ , 在频率范围  $f_0 - f_c \leq |f| \leq f_0 + f_c$  内,  $S_X(f)$  不等于零, 对于其他频率  $S_X(f) = 0$ , 则

$$X(t) = X_c(t)\cos 2\pi f_0 t + X_s(t)\sin 2\pi f_0 t$$

其中  $X_c(t), X_s(t)$  均为宽平稳随机过程, 且

$$\begin{aligned} S_{X_c}(f) &= S_{X_s}(f) \\ &= \begin{cases} S_X(f - f_0) + S_X(f + f_0), & |f| \leq f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases} \\ S_{X_c X_s}(f) &= -S_{X_s X_c}(f) \\ &= \begin{cases} j[S_X(f - f_0) - S_X(f + f_0)], & |f| \leq f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases} \end{aligned}$$

并且

$$E\{X^2(t)\} = E\{X_c^2(t)\} = E\{X_s^2(t)\}$$

证明 设  $Y(t) = X(t) + j\hat{X}(t)$ ,  $\hat{X}(t)$  为  $X(t)$  的希尔伯特变换。用  $e^{-j2\pi f_0 t}$  和  $Y(t)$  相乘得

$$\begin{aligned} Y(t)e^{-j2\pi f_0 t} &= [X(t) + j\hat{X}(t)](\cos 2\pi f_0 t - j\sin 2\pi f_0 t) \\ &= [X(t)\cos 2\pi f_0 t + \hat{X}(t)\sin 2\pi f_0 t] + \\ &\quad j[-X(t)\sin 2\pi f_0 t + \hat{X}(t)\cos 2\pi f_0 t] \\ &= X_c(t) - jX_s(t) \end{aligned}$$

其中

$$X_c(t) = X(t)\cos 2\pi f_0 t + \hat{X}(t)\sin 2\pi f_0 t$$

$$X_s(t) = X(t)\sin 2\pi f_0 t - \hat{X}(t)\cos 2\pi f_0 t$$

故

$$X(t) = X_c(t)\cos 2\pi f_0 t + X_s(t)\sin 2\pi f_0 t$$

又因为

$$R_{X_c}(\tau) = R_{X_s}(\tau) = R_X(\tau)\cos 2\pi f_0\tau + \hat{R}_X(\tau)\sin 2\pi f_0\tau$$

所以有

$$\begin{aligned} S_{X_c}(f) &= S_{X_s}(f) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{X_c}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [R_X(\tau)\cos 2\pi f_0\tau + \hat{R}_X(\tau)\sin 2\pi f_0\tau] e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2}[S_X(f-f_0) + S_X(f+f_0)] + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi t} * R_X(\tau)\right) \sin 2\pi f_0\tau e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2}[S_X(f-f_0) + S_X(f+f_0)] + \\ &\quad \frac{1}{2}\{\operatorname{sgn}[f+f_0] S_X(f+f_0) - \operatorname{sgn}[f-f_0] S_X(f-f_0)\} \\ &= \begin{cases} S_X(f-f_0) + S_X(f+f_0), & |f| \leq f_c \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

最后, 因为

$$\begin{aligned} R_{X_c X_s}(f) &= -R_{X_s X_c}(f) \\ &= -R_X(\tau)\sin 2\pi f_0\tau + \hat{R}_X(\tau)\cos 2\pi f_0\tau \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} S_{X_c X_s}(f) &= -S_{X_s X_c}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{X_c X_s}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [-R_X(\tau)\sin 2\pi f_0\tau + \hat{R}_X(\tau)\cos 2\pi f_0\tau] e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \frac{j}{2}[S_X(f-f_0) - S_X(f+f_0)] + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi t} * \hat{R}_X(\tau)\right) \cos 2\pi f_0\tau \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \frac{j}{2}[S_X(f-f_0) - S_X(f+f_0)] - \\ &\quad \frac{j}{2}\{\operatorname{sgn}[f-f_0] S_X(f-f_0) + \operatorname{sgn}[f+f_0] S_X(f+f_0)\} \\ &= \begin{cases} j[S_X(f-f_0) - S_X(f+f_0)], & |f| \leq f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases} \end{aligned}$$

显然有

$$R_{X_c}(0) = R_{X_s}(0) = R_X(0)$$

即

$$E\{X^2(t)\} = E\{X_c^2(t)\} = E\{X_s^2(t)\}$$

例 3.10 一个线性系统输入为  $X(t)$  时, 相应的输出为  $Y(t)$ 。证明若该系统的输入为  $X(t)$  的希尔伯特变换  $\hat{X}(t)$ , 则相应的输出  $Y(t)$  的希尔伯特变换  $\hat{Y}(t)$ 。

证明 根据线性系统理论可知

$$Y(t) = L[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

又因

$$\hat{X}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(t-u)}{\pi u} du$$

故

$$\begin{aligned} L[\hat{X}(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(t-\tau)h(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(t-\tau-u)}{\pi u} du \right] h(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X(t-\tau-u)h(\tau)d\tau \right] \frac{1}{\pi u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y(t-u)}{\pi u} du \\ &= \hat{Y}(t) \end{aligned}$$

所以  $\hat{Y}(t) = L[\hat{X}(t)]$ 。

例 3.11 证明若加到例题图 3.11 所示系统  $H(j\omega) = 2U(\omega)$  的输入为  $X(t)$ , 则相应的输出为对应于  $X(t)$  的解析信号, 即

$$Z(t) = X(t) + j\hat{X}(t)$$

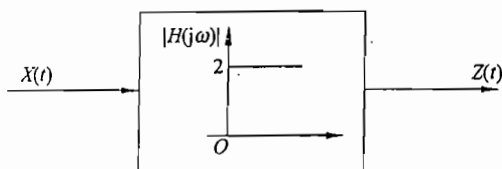
证明 由傅里叶变换的对称性

$$U(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$\pi\delta(t) - \frac{1}{jt} \leftrightarrow 2\pi U(\omega)$$

又因为  $Z(\omega) = 2X(\omega)U(\omega)$ , 所以有

$$\begin{aligned} Z(t) &= 2X(t) * \mathcal{F}^{-1}[U(\omega)] \\ &= 2X(t) * \left[ \frac{\delta(t)}{2} - \frac{1}{2\pi jt} \right] \\ &= X(t) * \delta(t) + X(t) * \frac{j}{\pi t} \\ &= X(t) + j\hat{X}(t) \end{aligned}$$



例题图 3.11

例 3.12 谱密度为  $N_0/2$  的零均值白高斯噪声通过一个理想带通滤波器, 此滤波器的增益为 1, 中心频率为  $f_c$ , 带宽为  $2B$ . 求滤波器输出端的窄带过程  $n(t)$  和它的同相及正交分量的自相关函数  $R_n(\tau)$ ,  $R_{n_c}(\tau)$  和  $R_{n_s}(\tau)$ .

解 根据题意可知, 此滤波器的幅频特性为

$$|H(f)| = \begin{cases} 1, & |f - f_c| < B, |f + f_c| < B \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

而

$$\begin{aligned} S_n(f) &= |H(f)|^2 \frac{N_0}{2} \\ &= \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & |f - f_c| < B, |f + f_c| < B \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

根据维纳-辛钦定理, 可得

$$\begin{aligned} R_n(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \int_{f_c-B}^{f_c+B} \frac{N_0}{2} \cdot e^{j2\pi f\tau} df + \int_{-f_c-B}^{-f_c+B} \frac{N_0}{2} \cdot e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \frac{N_0 \sin 2\pi B\tau}{\pi\tau} \cos 2\pi f_c\tau \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} S_{n_c}(f) = S_{n_s}(f) &= \begin{cases} 2S_n(f + f_c), & -B < f < B \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} N_0, & -B < f < B \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

所以有

$$R_{n_c}(\tau) = R_{n_s}(\tau) = \int_{-B}^B N_0 e^{j2\pi f\tau} df = \frac{N_0 \sin 2\pi B\tau}{\pi\tau}$$

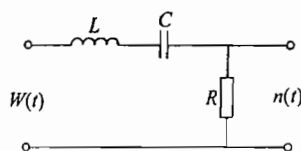
或者

$$\begin{aligned} R_{n_c}(\tau) = R_{n_s}(\tau) &= R_n(\tau) \cos 2\pi f_c\tau + \hat{R}_n(\tau) \sin 2\pi f_c\tau \\ &= \frac{N_0 \sin 2\pi B\tau}{\pi\tau} \cos^2 2\pi f_c\tau + \frac{N_0 \sin 2\pi B\tau}{\pi\tau} \sin^2 2\pi f_c\tau \\ &= \frac{N_0 \sin 2\pi B\tau}{\pi\tau} \end{aligned}$$

例 3.13 考虑例题图 3.13A 所示的 RLC 带通滤波器. 设滤波器的品质因数  $Q \gg 1$ , 输入是谱密度为  $N_0/2$  的零均值白高斯噪声  $W(t)$ , 求滤波器输出端的窄带过程  $n(t)$  和它的同相及正交分量的功率谱密度  $S_n(f)$ ,  $S_{n_c}(f)$  和  $S_{n_s}(f)$ , 并以图示之.

解 滤波器的传递函数为

$$H(f) = \frac{R}{R + j2\pi fL + \frac{1}{j2\pi fC}}$$



例题图 3.13A

令  $f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ ,  $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ , 则

$$H(f) = \frac{1}{1 + jQ[(f/f_c) - (f_c/f)]}$$

若  $Q \gg 1$ , 即幅频特性十分尖锐, 因此  $H(f)$  可以近似表示为

$$H(f) = \begin{cases} \frac{1}{1 + j2Q(f - f_c)/f_c}, & f > 0 \\ \frac{1}{1 + j2Q(f + f_c)/f_c}, & f < 0 \end{cases}$$

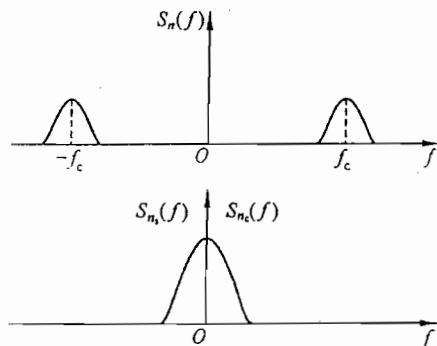
因为

$$\begin{aligned} S_n(f) &= |H(f)|^2 \frac{N_0}{2} \\ &= \begin{cases} \frac{N_0/2}{1 + 4Q^2(f - f_c)^2/f_c^2}, & f > 0 \\ \frac{N_0/2}{1 + 4Q^2(f + f_c)^2/f_c^2}, & f < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} S_{n_c}(f) &= S_n(f) \\ &= \begin{cases} S_n(f - f_c) + S_n(f + f_c), & |f| > f_c \\ 0, & |f| < f_c \end{cases} \\ &= \frac{N_0}{1 + (2Qf/f_c)^2} \end{aligned}$$

功率谱密度  $S_n(f)$ ,  $S_{n_c}(f)$  和  $S_{n_s}(f)$  示意图如图 3.13B 所示。

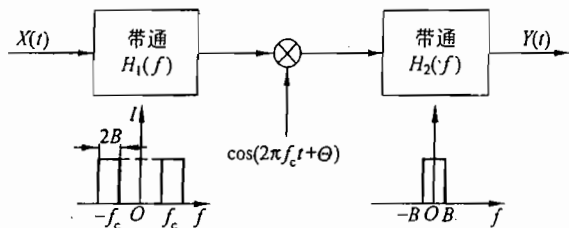


例题图 3.13B

例 3.14 设例题图 3.14 所示系统的输入是谱密度为  $\frac{N_0}{2}$  的零均值白高斯噪声  $X(t)$ ,  $\Theta$  在  $(0, 2\pi)$  上均匀分布, 且与  $X(t)$  统计独立。

(1) 求输出过程  $Y(t)$  的功率谱密度  $S_Y(f)$ ;

(2) 求  $Y(t)$  的方差。



例题图 3.14

解 (1) 定义单位矩形脉冲为

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1, & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

于是有

$$H_1(f) = \text{rect}\left(\frac{f-f_c}{2B}\right) + \text{rect}\left(\frac{f+f_c}{2B}\right)$$

$$H_2(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

令  $X_1(t)$  表示  $X(t)$  经过  $H_1(f)$  后的输出, 则有

$$\begin{aligned} S_{X_1}(f) &= |H_1(f)|^2 S_X(f) \\ &= \frac{N_0}{2} \left[ \text{rect}\left(\frac{f-f_c}{2B}\right) + \text{rect}\left(\frac{f+f_c}{2B}\right) \right]^2 \\ &= \frac{N_0}{2} \left[ \text{rect}\left(\frac{f-f_c}{2B}\right) + \text{rect}\left(\frac{f+f_c}{2B}\right) \right] \end{aligned}$$

又令

$$X_2(t) = X_1(t) \cos(2\pi f_c t + \Theta)$$

容易求得

$$R_{X_2}(\tau) = \frac{1}{2} R_{X_1}(\tau) \cos 2\pi f_c \tau$$

故有

$$\begin{aligned} S_{X_2}(f) &= \frac{1}{2} S_{X_1}(f) * \frac{1}{2} [\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)] \\ &= \frac{N_0}{8} \left[ 2\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) + \text{rect}\left(\frac{f-2f_c}{2B}\right) + \text{rect}\left(\frac{f+2f_c}{2B}\right) \right] \end{aligned}$$

于是得到输出功率谱为



$$S_Y(f) = |H_2(f)|^2 S_{X_2}(f) = \frac{N_0}{4} \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

(2) 傅里叶变换对

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \frac{\sin f\tau}{f\tau}$$

利用傅里叶变换的对称性可得

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} B N_0 \frac{\sin 2B\tau}{2B\tau}$$

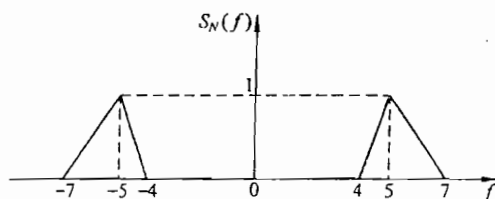
于是有

$$\sigma_Y^2 = R_Y(0) = \frac{1}{2} B N_0$$

例 3.15 一窄带平稳过程  $N(t)$  的功率谱密度  $S_N(f)$  如例题图 3.15 所示。

(1) 求  $N(t)$  的同相和正交分量的功率谱密度；

(2) 求它们之间的互谱密度  $S_{N_c N_s}(f)$ 。



例题图 3.15

解 (1) 根据图示可以写出  $S_N(f)$  的表达式如下：

$$S_N(f) = \begin{cases} 1 - (5 - |f|), & 4 \leq |f| \leq 5 \\ 1 + \frac{1}{2}(5 - |f|), & 5 \leq |f| \leq 7 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此  $N(t)$  的同相和正交分量的功率谱密度为

$$\begin{aligned} S_{N_c}(f) &= S_{N_s}(f) \\ &= \begin{cases} S_N(f + f_c) + S_N(f - f_c), & |f| \leq f_c = 5 \\ 0, & |f| > f_c = 5 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2 - \frac{3}{2}|f|, & 0 \leq |f| \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2}|f|, & 1 \leq |f| \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 由窄带随机过程的性质可知

$$R_{N_c N_s}(\tau) = R_N(\tau) \sin 2\pi f_c \tau - \hat{R}_N(\tau) \cos 2\pi f_c \tau$$

因此有

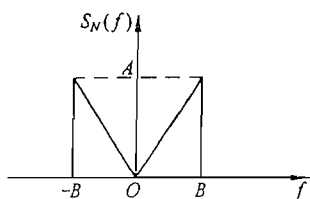
$$S_{N_i N_i}(f) = j[S_N(f - f_c) - S_N(f + f_c)], |f| < f_c$$

$$= \begin{cases} -j\left(1 + \frac{1}{2}f\right), & -2 \leq f \leq -1 \\ j\frac{1}{2}f, & -1 \leq f \leq 1 \\ j\left(1 - \frac{1}{2}f\right), & 1 \leq f \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

例 3.16 两个平稳过程  $X(t)$  和  $Y(t)$  之间有下面的关系:

$$Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_c t + \Theta) - X(t)\sin(2\pi f_c t + \Theta)$$

其中  $f_c$  为常数,  $\Theta$  为  $(0, 2\pi)$  上均匀分布的随机变量,  $\Theta$  与  $X(t)$  统计独立。已知  $X(t)$  的功率谱密度  $S_X(f)$  如例题图 3.16A 所示, 求出并画出  $Y(t)$  的功率谱密度  $S_Y(f)$ 。



例题图 3.16A

解 根据相关函数的定义, 有

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E\{Y(t)Y(t-\tau)\} \\ &= E\{[X(t)\cos(2\pi f_c t + \Theta) - X(t)\sin(2\pi f_c t + \Theta)] \times \\ &\quad [X(t-\tau)\cos(2\pi f_c(t-\tau) + \Theta) - X(t-\tau)\sin(2\pi f_c(t-\tau) + \Theta)]\} \\ &= R_X(\tau)\cos 2\pi f_c \tau - R_X(\tau)E[\sin(2\pi f_c(2t-\tau) + 2\Theta)] \\ &= R_X(\tau)\cos 2\pi f_c \tau \end{aligned}$$

又由傅里叶变换的性质, 可得

$$S_Y(f) = S_X(f) * \frac{1}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$$

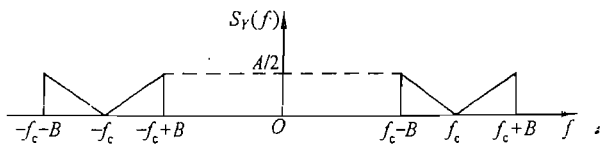
其中

$$S_X(f) = \begin{cases} \frac{A}{B}|f|, & |f| \leq B \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

故

$$S_Y(f) = \begin{cases} \frac{A}{2B}[|f - f_c| + |f + f_c|], & |f \pm f_c| \leq B \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则功率谱密度  $S_Y(f)$  示意图如例题图 3.16B 所示。



例题图 3.16B

例 3.17 已知随机过程  $X(t)$  的功率谱密度  $S_X(\omega)$  满足

$$S_X(\omega) = 0, \quad |\omega| > B$$

取常数  $\omega_0 \gg B$ , 构造一个新的随机过程  $Y(t)$  如下:

$$Y(t) = X(t) \cos \omega_0 t - \hat{X}(t) \sin \omega_0 t$$

求  $Y(t)$  的功率谱密度  $S_Y(\omega)$ , 并画出  $S_X(\omega)$  和  $S_Y(\omega)$  的关系。

解 由希尔伯特变换的性质可知

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) \cos \omega_0 \tau - \hat{R}_X(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

记傅里叶变换对为

$$R_X(\tau) \leftrightarrow S_X(\omega)$$

$$\hat{R}_X(\tau) \leftrightarrow G_X(\omega)$$

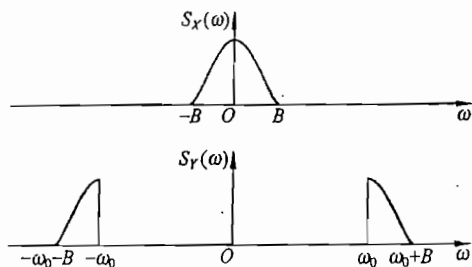
则由于

$$G_X(\omega) = \begin{cases} -jS_X(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ jS_X(\omega), & \omega < 0 \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= S_X(\omega) * \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \\ &\quad \frac{j}{2} G_X(\omega) * [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= \begin{cases} S_X(\omega - \omega_0), & \omega \geq \omega_0 \\ S_X(\omega + \omega_0), & \omega \leq -\omega_0 \end{cases} \end{aligned}$$

因此功率谱  $S_X(\omega)$  和  $S_Y(\omega)$  的关系如例题图 3.17 所示。



例题图 3.17

### 3.3 练习题

3.1 已知实信号  $s(t) = \cos \omega_0 t$ , 求经过两次希尔伯特正交变换后的信号  $s_0(t)$ 。

3.2 对于复平稳随机过程, 证明自相关函数  $R(\tau)$  有下列性质:

- (1)  $R(0) \geq 0$ ;
- (2)  $R(-\tau) = R^*(\tau)$ ;
- (3)  $|R(\tau)| \leq R(0)$ ;

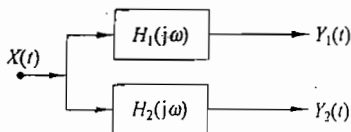
(4)  $R(\tau)$  为非负定的, 即对于任意  $n$  个复数  $z_1, z_2, \dots, z_n$  及  $n$  个实数  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ , 都有

$$\sum_{i,j=1}^n R(\tau_i - \tau_j) z_i z_j^* \geq 0$$

3.3 证明两正交分量的互相关函数为

$$\begin{aligned} R_c(\tau) &= E[X_c(t)X_c(t-\tau)] \\ &= \hat{R}_X(\tau)\cos\omega_0\tau - R_X(\tau)\sin\omega_0\tau \end{aligned}$$

3.4 自相关函数为  $N_0\delta(\tau)/2$  的白噪声  $X(t)$ , 分成两路经过频率响应特性分别为  $H_1(j\omega)$  和  $H_2(j\omega)$  的对称谱窄带系统, 如练习题图 3.4 所示。



练习题图 3.4

(1) 求  $H_1(j\omega)$  和  $H_2(j\omega)$  在什么条件下, 互相关函数  $R_{Y_1Y_2}(\tau)$  为偶函数;

(2) 求  $H_1(j\omega)$  和  $H_2(j\omega)$  在什么条件下,  $Y_1(t)$  和  $Y_2(t)$  统计独立。

3.5 设复随机过程  $Z(t)$  为

$$Z(t) = e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$$

式中  $\varphi$  是在  $(0, 2\pi)$  上均匀分布的随机变量。求  $E[Z^*(t)Z(t-\tau)]$  和  $E[Z(t)Z^*(t-\tau)]$ 。

3.6 零均值平稳窄带噪声  $Y(t)$  具有对称功率谱, 其相关函数为  $R_Y(\tau) = A(\tau)\cos\omega_0\tau$ 。求正交和同相分量的相关函数  $R_c(\tau)$ ,  $R_s(\tau)$  和方差  $\sigma_c^2$ ,  $\sigma_s^2$ , 并求互相关函数  $R_{cs}(\tau)$ ,  $R_{sc}(\tau)$ 。

3.7 设对称窄带平稳高斯过程为

$$Y(t) = A_c(t)\cos\omega_0 t - A_s(t)\sin\omega_0 t$$

证明

$$E[A_c(t)A_s(t-\tau)] = 0$$

3.8 设平稳窄带高斯噪声  $n(t)$  的均值为零, 方差为  $\sigma^2$ , 其表示式为

$$\begin{aligned} n(t) &= A(t)\cos[\omega_0 t + \Phi(t)] \\ &= A_c(t)\cos\omega_0 t - A_s(t)\sin\omega_0 t \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} A_c(t) &= A(t)\cos\Phi(t) \\ A_s(t) &= A(t)\sin\Phi(t) \end{aligned}$$

证明:

(1)  $A(t)$  为平稳瑞利分布, 其两个正交分量  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  为平稳高斯过程, 均值为 0, 方差为  $\sigma^2$ , 且同一时刻两正交变量  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  统计独立;

(2) 同一时刻  $t$  四个变量  $A_c(t)$ ,  $A_s(t)$ ,  $\dot{A}_c(t)$  和  $\dot{A}_s(t)$  构成相互独立的四维联合高斯分布, 并求其分布密度;

(3) 平稳过程  $A(t)$  与其导数  $\dot{A}(t)$  是统计独立的。

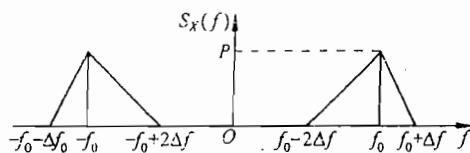
3.9 证明实值函数  $X(t)$  的希尔伯特变换的希尔伯特变换是原实值函数  $X(t)$  的负值。

3.10 设平稳随机过程  $X(t)$  是均方可微的, 其导数为  $\dot{X}(t)$ 。证明对于任意的  $t$ , 随机变量  $X(t)$  和  $\dot{X}(t)$  都是正交的和不相关的。

3.11 已知零均值窄带宽平稳实随机过程  $X(t)$  的功率谱具有练习题图 3.11 所示的形状, 且  $\Delta f \ll f_0$ , 将过程  $X(t)$  表示为

$$X(t) = A(t)\cos 2\pi f_0 t - B(t)\sin 2\pi f_0 t$$

- (1) 试证明  $A(t)$  和  $B(t)$  是宽平稳随机过程;
- (2) 求  $A(t)$  的功率谱  $S_A(f)$ ;
- (3)  $A(t)$  和  $B(t)$  是否是正交过程, 为什么?



练习题图 3.11



# 高斯随机过程

## 第4章

### CHAPTER 4

## 4.1 内容提要

高斯随机过程是最常见、最易处理的一类随机过程,是二阶矩过程的一个重要子类。

在许多实际问题中常会遇到大量随机变量和的问题。根据中心极限定理,凡是大量独立的、均匀微小的随机变量的和,在满足一定的条件下都近似服从高斯分布(或称正态分布)。因此高斯过程在随机过程理论中占有极其重要的地位。

在通信、控制等工程学科中,在某些情况下常采用高斯假定。因此高斯过程应用十分广泛。

本章重点分析高斯随机过程及其通过线性系统后的统计特征。

### 4.1.1 高斯随机矢量

#### 1. 条件分布

设有二维高斯随机矢量

$$\begin{aligned} p_X(x) &= p(x_1, x_2) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 2r\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \end{aligned}$$

其边缘分布为

$$\begin{aligned} p_{X_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2) dx_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x_1-a_1)^2\right\} \\ p_{X_2}(x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2) dx_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x_2-a_2)^2\right\} \end{aligned}$$

其条件分布为

$$p_{X_2|X_1}(x_2 | x_1) = \frac{p(x_1, x_2)}{p_{X_1}(x_1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{2|1}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{2|1}^2}(x_2-a_{2|1})^2\right\}$$

式中

$$\sigma_{2|1}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{22}^2 - \frac{\sigma_{21}^2\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}^2} = \sigma_{22}^2 - \frac{\sigma_{12}^4}{\sigma_{11}^2}$$

$$a_{2|1} \stackrel{\text{def}}{=} a_2 + \frac{\sigma_{21}^2}{\sigma_{11}^2}(x_1 - a_1)$$

和

$$p_{x_1|x_2}(x_1 | x_2) = \frac{p(x_1, x_2)}{p_{x_2}(x_2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{1|2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{1|2}^2}(x_1 - a_{1|2})^2\right\}$$

式中

$$\sigma_{1|2}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{11}^2 - \frac{\sigma_{12}^2 \sigma_{21}^2}{\sigma_{22}^2} = \sigma_{11}^2 - \frac{\sigma_{12}^4}{\sigma_{22}^2}$$

$$a_{1|2} \stackrel{\text{def}}{=} a_1 + \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}^2}(x_2 - a_2)$$

设有  $m+l$  维高斯随机矢量

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

其中,  $X_1$  为前  $m$  个分量, 构成  $m$  维随机矢量;  $X_2$  为后  $l$  个分量, 构成  $l$  维随机矢量。则有

$$\begin{aligned} p_X(x) &= p_{x_1 x_2}(x_1, x_2) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{m+l/2}(\det P)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{bmatrix}^T P^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}(\det \tilde{P}_{11})^{1/2}} \times \\ &\quad \exp\left\{-\frac{1}{2} [x_1 - a_1 - P_{12} P_{22}^{-1}(x_2 - a_2)]^T \tilde{P}_{11}^{-1} [x_1 - a_1 - P_{12} P_{22}^{-1}(x_2 - a_2)]\right\} \times \\ &\quad \frac{1}{(2\pi)^{l/2}(\det P_{22})^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (x_2 - a_2)^T P_{22}^{-1} (x_2 - a_2)\right] \end{aligned}$$

式中

$$\tilde{P}_{11} = P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{21}$$

$$\det P = \det \tilde{P}_{11} \cdot \det P_{22}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11}^{-1} & -\tilde{P}_{11}^{-1} P_{12} P_{22}^{-1} \\ -P_{22}^{-1} P_{12} \tilde{P}_{11}^{-1} & P_{22}^{-1} + P_{22}^{-1} P_{12} \tilde{P}_{11}^{-1} P_{12} P_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

其边缘分布为

$$\begin{aligned} p_{x_2}(x_2) &= \int_{R^m} p_{x_1 x_2}(x_1, x_2) dx_1 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{l/2}(\det P_{22})^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (x_2 - a_2)^T P_{22}^{-1} (x_2 - a_2)\right\} \end{aligned}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned} p_X(x) &= p_{x_1 x_2}(x_1, x_2) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{l/2}(\det \tilde{P}_{22})^{1/2}} \times \end{aligned}$$



$$\exp\left\{-\frac{1}{2}[x_2 - a_2 - P_{21}P_{11}^{-1}(x_1 - a_1)]^T \tilde{P}_{22}^{-1}[x_2 - a_2 - P_{21}P_{11}^{-1}(x_1 - a_1)]\right\} \times \\ \frac{1}{(2\pi)^{m/2}(\det P_{11})^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_1 - a_1)^T P_{11}^{-1}(x_1 - a_1)\right]$$

其中

$$\tilde{P}_{22} = P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{12}$$

其边缘分布为

$$p_{X_1}(x_1) = \int_{R^1} p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_2 \\ = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}(\det P_{11})^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_1 - a_1)^T P_{11}^{-1}(x_1 - a_1)\right]$$

其条件分布为

$$p_{X_1|X_2}(x_1 | x_2) = \frac{p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)}{p_{X_2}(x_2)} \\ = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}(\det \tilde{P}_{11})^{1/2}} \times \\ \exp\left\{-\frac{1}{2}[x_1 - a_1 - P_{12}P_{22}^{-1}(x_2 - a_2)]^T \tilde{P}_{11}^{-1}[x_1 - a_1 - P_{12}P_{22}^{-1}(x_2 - a_2)]\right\} \\ p_{X_2|X_1}(x_2 | x_1) = \frac{p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)}{p_{X_1}(x_1)} \\ = \frac{1}{(2\pi)^{l/2}(\det \tilde{P}_{22})^{1/2}} \times \\ \exp\left\{-\frac{1}{2}[x_2 - a_2 - P_{21}P_{11}^{-1}(x_1 - a_1)]^T \tilde{P}_{22}^{-1}[x_2 - a_2 - P_{21}P_{11}^{-1}(x_1 - a_1)]\right\}$$

其条件均值为

$$E[X_1 | X_2] = a_1 + P_{12}P_{22}^{-1}(x_2 - a_2) \\ = E[X_1] + \text{cov}[X_1, X_2](\text{var}[X_2])^{-1}(x_2 - E[X_2])$$

$$E[X_2 | X_1] = a_2 + P_{21}P_{11}^{-1}(x_1 - a_1)$$

其条件方差为

$$\text{var}[X_1 | X_2] = \tilde{P}_{11} = P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21} \\ = \text{var}[X_1] - \text{cov}[X_1, X_2](\text{var}[X_2])^{-1}\text{cov}[X_2, X_1] \\ \text{var}[X_2 | X_1] = \tilde{P}_{22} = P_{22} - P_{12}P_{11}^{-1}P_{12}$$

## 2. n 维高斯随机矢量各阶矩

### (1) 一阶原点矩

$$E[X_k] = \frac{1}{j} \times \frac{\partial}{\partial v_k} \phi(v_1, v_2, \dots, v_k, \dots, v_n) \Big|_{v_1=v_2=\dots=v_n=0} \\ = \frac{1}{j} \times j \times a_k = a_k$$

一阶原点矩表示第  $k$  个分量的均值。

(2) 二阶混合中心矩

$$\begin{aligned} E[X_i X_k] &= (-j)^2 \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_k} \phi(v_1, v_2, \dots, v_n) \Big|_{v_1=v_2=\dots=v_n=0} \\ &= C_{ik} + a_i a_k \end{aligned}$$

$$E[(X_i - a_i)(X_k - a_k)] = E\{X_i X_k\} - a_i a_k = C_{ik}$$

(3) 高阶混合矩

设  $X_1, X_2, X_3, X_4$  为零均值的四元联合高斯随机矢量, 则有

$$E[X_1 X_2 X_3 X_4] = E[X_1 X_2]E[X_3 X_4] + E[X_1 X_3]E[X_2 X_4] + E[X_1 X_4]E[X_2 X_3]$$

#### 4.1.2 高斯随机过程

定义 如果随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  的任意有限维分布都是高斯分布, 则称它为高斯随机过程或正态随机过程。

对于高斯随机过程, 它的任意  $n$  个取样的联合概率密度均为高斯分布的概率密度, 所以高斯过程  $X(t)$  的任意  $n$  维联合密度表示式为

$$\begin{aligned} p_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |C|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-a)^T C^{-1}(x-a)\right] \end{aligned}$$

其中

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

$$a = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$$

$C$  为协方差阵, 其表示如下:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

其元素为

$$C_{ik} = E\{[X(t_i) - a_i][X(t_k) - a_k]\}$$

相应的特征函数为

$$\phi_X(v) = \exp\left[ja^T v - \frac{1}{2} v^T C v\right]$$

式中,  $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$ 。而且有

$$p_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \exp(-jv^T x) \phi(v) dv$$

高斯随机过程的统计描述如下。

##### 1. 一维高斯分布概率密度

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2} \times \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right]$$

相应的特征函数为

$$\phi(v, t) = \exp\left(jav - \frac{\sigma^2 v^2}{2}\right)$$

若均值为零, 方差为 1, 则有

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

相应的特征函数为

$$\phi(v, t) = \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)$$

而且有

$$p(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jvx} \phi(v) dv$$

## 2. 二维高斯分布概率密度

$$p(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2r\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

式中  $r$  为相关系数; 且

$$r = \frac{\text{cov}[X(t_1), X(t_2)]}{\sigma_1\sigma_2}$$

相应的特征函数为

$$\phi(v_1, v_2; t_1, t_2) = \exp\left[j(a_1v_1 + a_2v_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2v_1^2 + 2r\sigma_1\sigma_2v_1v_2 + \sigma_2^2v_2^2)\right]$$

若均值为零, 方差为 1, 则有

$$p(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)}(x_1^2 - 2rx_1x_2 + x_2^2)\right]$$

相应的特征函数为

$$\phi(v_1, v_2; t_1, t_2) = \exp\left[-\frac{1}{2}(v_1^2 + 2rv_1v_2 + v_2^2)\right]$$

若  $X(t_1)$  与  $X(t_2)$  互不相关, 即  $r=0$ , 则有

$$\phi(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right\} = p(x_1)p(x_2)$$

相应的特征函数为

$$\phi(x_1, x_2; t_1, t_2) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2)\right\}$$

而且有

$$p(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-j(x_1v_1 + x_2v_2)\} \phi(v_1, v_2) dv_1 dv_2$$

3.  $n$  维高斯分布概率密度

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} D^{1/2} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} \exp \left\{ -\frac{1}{2D} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ik} \frac{x_i - a_i}{\sigma_i} \frac{x_k - a_k}{\sigma_k} \right\}$$

式中, 行列式

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{vmatrix}$$

而相关系数

$$r_{ik} = \frac{E\{[X(t_i) - a_i][X(t_k) - a_k]\}}{\sigma_i \sigma_k}$$

且有

$$r_{ii} = 1, \quad r_{ik} = r_{ki}$$

并且  $D_{ik}$  为行列式  $D$  中元素  $r_{ik}$  的代数余子式。相应的特征函数为

$$\phi_n(v_1, v_2, \dots, v_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \exp \left\{ j \sum_{i=1}^n a_i v_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C_X(t_i, t_k) v_i v_k \right\}$$

式中,  $C_X(t_i, t_k) = \sigma_i \sigma_k r_{ik}$ 。

若随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  是平稳的, 则有

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} D^{1/2} \sigma^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ik} (x_i - a)(x_k - a) \right\}$$

相应的特征函数为

$$\phi_n(v_1, v_2, \dots, v_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \exp \left\{ ja \sum_{i=1}^n v_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C_X(\tau_{i-k}) v_i v_k \right\}$$

式中协方差

$$C_X(\tau_{i-k}) = \sigma^2 r(\tau_{i-k})$$

高斯随机过程的性质如下:

- (1) 高斯随机过程作用于一线性系统, 其输出仍为高斯过程;
- (2) 广义平稳高斯过程必为严格平稳;
- (3) 高斯随机过程不相关和相互独立等价。

## 4.1.3 维纳过程

维纳过程是一个重要的独立增量过程。而且是齐次的独立增量过程, 其定义如下。

定义 若随机过程满足下列条件:

- (1) 设  $X(t)$  是一独立增量过程, 且对于任意的  $t_1, t_2, t_i \in [0, \infty), i=1, 2, t_1 < t_2$  及

$h > 0$ , 增量  $X(t_2 + h) - X(t_1 + h)$  都具有相同的分布密度;

(2) 对于任意的  $t \in [0, \infty)$ , 增量  $X(t_2) - X(t_1)$  都具有如下高斯分布密度:

$$p_{X(t_2) - X(t_1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(t_2 - t_1)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \times \frac{x^2}{t_2 - t_1}\right\}, \quad -\infty < x < \infty$$

(3)  $P[X(0)=0]=1$ 。

则称  $X(t)$  为规范化维纳过程。

规范化维纳过程的数字特征如下。

(1) 均值

$$E[X(t)] = 0, \quad t \in [0, \infty)$$

(2) 相关函数

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \min(t_1, t_2)$$

如果存在  $W(t) = mt + \sigma X(t)$ , 则有

$$E[W(t)] = mt$$

式中  $m$  为常数, 称为偏移系数。

$$\text{var}[W(t)] = E\{[W(t) - mt]^2\} = \sigma^2 t$$

式中  $\sigma^2$  为常数, 称为过程强度。由于  $E[W(t)] = mt$ ,  $\text{var}[W(t)] = \sigma^2 t$  均为时间的函数, 因此  $W(t)$  为非平稳高斯过程。

#### 4.1.4 窄带平稳高斯过程

设  $\{X(t), t \in T\}$  为零均值、平稳窄带高斯过程, 其表示为

$$X(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)]$$

用两正交分量表示, 则有

$$X(t) = X_c(t) \cos \omega_0 t - X_s(t) \sin \omega_0 t$$

其中两正交分量  $X_c(t)$  和  $X_s(t)$  是单独和联合高斯的。且有

$$E[X_c(t)] = E[X_s(t)] = 0$$

$$\sigma_{X_c}^2 = \sigma_{X_s}^2 = \sigma_X^2$$

$$R_{X_c}(0) = R_{X_s}(0) = R_X(0)$$

$$R_{cs}(0) = E[X_c(t)X_s(t)] = 0$$

两正交分量的联合分布密度为

$$p(x_c, x_s) = p(x_c)p(x_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_X^2} \exp\left(-\frac{x_c^2 + x_s^2}{2\sigma_X^2}\right)$$

##### 1. 包络和相位的一维分布密度

包络和相位的联合分布密度为

$$p(A, \varphi) = \begin{cases} \frac{A}{2\pi\sigma_X^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_X^2}\right), & A \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

包络的一维分布密度为

$$p(A) = \frac{A}{\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right), \quad A \geq 0$$

相位的一维分布密度为

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

## 2. 包络和相位的二维分布密度

$$p(A_1, A_2; \varphi_1, \varphi_2) = \begin{cases} \frac{A_1 A_2}{4\pi^2 |C|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2|C|^{1/2}}[\sigma_x^2(A_1^2 + A_2^2) - 2a(\tau)A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]\right\}, \\ A_1, A_2 \geq 0, 0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi \\ 0, \quad \text{其他} \end{cases}$$

包络的二维分布密度为

$$p(A_1, A_2) = \begin{cases} \frac{A_1 A_2}{|C|^{1/2}} I_0\left(\frac{A_1 A_2 a(\tau)}{|C|^{1/2}}\right) \exp\left[-\frac{\sigma_x^2(A_1^2 + A_2^2)}{2|C|^{1/2}}\right], & A_1, A_2 \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

相位的二维分布密度为

$$p(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{cases} \frac{|C|^{1/2}}{4\pi^2 \sigma^4} \left[ \frac{(1 - \cos^2 \phi)^{1/2} - \phi \cos \phi}{(1 - \cos^2 \phi)^{3/2}} \right], & 0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

式中

$$\phi = \arccos[1 - r(\tau) \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]$$

由上述表达式可以看出

$$p(A_1, A_2; \varphi_1, \varphi_2) \neq p(A_1, A_2) p(\varphi_1, \varphi_2)$$

这表明,在不同时刻窄带高斯过程的包络和相位不是统计独立的。

### 4.1.5 随机相位正弦波加窄带平稳高斯过程

设随机相位正弦波与窄带平稳高斯过程之和为

$$Y(t) = S(t) + N(t)$$

式中  $S(t)$  为随机相位正弦波, 即

$$\begin{aligned} S(t) &= B \cos(\omega_0 t + \theta) \\ &= B \cos \theta \cos \omega_0 t - B \sin \theta \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

而窄带平稳高斯过程的均值为零, 方差为  $\sigma^2$ , 其表示式为

$$N(t) = N_c(t) \cos \omega_0 t - N_s(t) \sin \omega_0 t$$

故合成过程为

$$\begin{aligned} Y(t) &= A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t \\ &= A(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)] \end{aligned}$$

其中

$$A_c(t) = B\cos\theta + N_c(t)$$

$$A_s(t) = B\sin\theta + N_s(t)$$

而

$$A(t) = [A_c^2(t) + A_s^2(t)]^{1/2}$$

$$\Phi(t) = \arctan \frac{A_s(t)}{A_c(t)}$$

### 1. 包络的分布密度

$$p(A|\theta) = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2+B^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{AB}{\sigma^2}\right), \quad A \geq 0$$

式中  $I_0\left(\frac{AB}{\sigma^2}\right)$  为零阶修正贝塞尔函数。

由于上式右边并不包含  $\theta$ , 这意味着包络分布实际上与相位无关, 故上式可写成

$$p(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2+B^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{AB}{\sigma^2}\right), \quad A \geq 0$$

该式表明, 包络分布服从莱斯分布, 当  $B \rightarrow 0$  时, 莱斯分布趋于瑞利分布。

令  $v = A/\sigma$ ,  $b = B/\sigma$ , 则在小信噪比条件下, 即当  $bv \ll 1$  时, 包络分布服从瑞利分布, 即

$$p(v) \approx v \exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\}, \quad v \geq 0$$

在大信噪比条件下, 即当  $bv \gg 1$  时, 包络分布服从高斯分布, 即

$$p(v) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(v-b)^2\right], \quad v \geq 0$$

### 2. 相位的分布密度

$$p(\phi|\theta) = \frac{1}{2\pi} \exp\{-E^2\} + \frac{E\cos(\phi-\theta)}{2\sqrt{\pi}} \times \\ \exp[-E^2\sin^2(\phi-\theta)] \{1 + \operatorname{erf}[E\cos(\phi-\theta)]\}$$

式中  $E^2 = b^2/2$ , 并定义误差函数为

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$$

当信噪比很小 ( $E \rightarrow 0$ ) 时, 在给定  $\theta$  的条件下, 相位  $\Phi(t)$  服从均匀分布, 即

$$p(\phi|\theta) \approx \frac{1}{2\pi}$$

当信噪比很大 ( $E \gg 1$ ) 时, 相位分布密度为

$$p(\phi|\theta) \approx \frac{E\cos(\phi-\theta)}{\sqrt{\pi}} \exp[-E^2\sin^2(\phi-\theta)]$$

上式表明,  $p(\phi|\theta)$  为  $\phi - \theta$  的偶函数, 当  $\phi = \theta$  时得最大值, 即  $p(\phi|\theta) = E/\sqrt{\pi}$ 。随着  $\phi$  偏离  $\theta$ ,  $p(\phi|\theta)$  很快衰减。这意味着合成过程的相位主要分布在信号相位  $\theta$  的附近。

### 4.1.6 窄带高斯随机过程通过非线性系统

#### 1. 窄带高斯过程包络平方的概率分布

设非线性系统特性为

$$Y = X^2$$

若输入为窄带高斯过程,即

$$X(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)]$$

则输出过程  $Y(t)$  的包络分布服从指数分布

$$p(y) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right), \quad y \geq 0$$

相应的特征函数为

$$\phi(v) = \frac{1}{1 - j2\sigma^2 v}$$

#### 2. 窄带高斯过程加正弦波的包络平方的概率分布

$$p(y) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y + B^2)\right\} I_0\left(\frac{\sqrt{y}B}{\sigma^2}\right), \quad y \geq 0$$

相应的特征函数为

$$\phi(v) = \exp\left(-\frac{B^2}{\sigma^2}\right) \left(\frac{1}{1 - j2\sigma^2 v}\right) \exp\left(\frac{B^2/\sigma^2}{1 - j2\sigma^2 v}\right)$$

### 4.1.7 $\chi^2$ 分布及非中心 $\chi^2$ 分布

#### 1. $\chi^2$ 分布

设有  $n$  个统计独立的高斯随机变量  $X_i, i=1, 2, \dots, n$ , 其均值为零, 方差为  $\sigma^2$ , 则称

$$S = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

为具有  $n$  个自由度的  $\chi^2$  变量。

$\chi^2$  变量的概率分布密度为

$$p_S(s) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} s^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{s}{2}}$$

式中伽马函数为

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$$

而它的均值为  $E[S]=n$ , 方差为  $V[S]=2n$ , 自由度为

$$n = \frac{2E^2(S)}{V(S)}$$

相应的特征函数为



$$\phi(v) = \frac{1}{(1 - 2jv)^{n/2}}$$

两个统计独立, 自由度分别为  $M$  和  $N$  的  $\chi^2$  随机变量  $S_M$  和  $S_N$ , 它们之和为  $M+N$  个自由度的  $\chi^2$  分布。

## 2. 非中心 $\chi^2$ 分布

设有  $n$  个统计独立的高斯随机变量  $X_i, i=1, 2, \dots, n$ , 其均值为零, 方差为  $\sigma^2$ , 则称

$$S = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i + B_i)^2$$

为具有  $n$  个自由度的非中心  $\chi^2$  变量。其中  $B_i$  为非随机量。

非中心  $\chi^2$  变量的分布密度为

$$p_s(s) = \frac{1}{2} \left( \frac{s}{\lambda} \right)^{\frac{n-2}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda+s}{2}\right) I_{\frac{n-2}{2}-1}(\sqrt{\lambda s})$$

式中

$$\lambda = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n B_i^2$$

而  $I_{\frac{n-2}{2}-1}$  为第一类  $\frac{n}{2}-1$  阶修正贝塞尔函数。其相应的特征函数为

$$\phi(v) = \left( \frac{1}{1 - j2\sigma^2 v} \right)^{n/2} \exp\left(-\frac{nB_i^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{nB_i^2/2\sigma^2}{1 - j2\sigma^2 v}\right)$$

若  $S_M$  和  $S_N$  是统计独立非中心  $\chi^2$  变量, 各有  $M$  和  $N$  个自由度, 非中心参变量分别为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ , 则它们之和是具有  $M+N$  个自由度的非中心  $\chi^2$  变量, 其非中心参量为  $\lambda_1 + \lambda_2$ 。

## 4.2 例题

例 4.1 已知随机变量  $X$  和  $Y$  是联合高斯的, 它们的联合概率密度为

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)\right]$$

求  $X$  和  $Y$  取不同符号的概率。

解 根据题意,  $X$  和  $Y$  取不同符号的概率为

$$\begin{aligned} P(XY < 0) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 p(x, y) dx dy + \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 p(x, y) dy dx \\ &= 2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 p(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)\right] dx dy \end{aligned}$$

以  $x', y'$  代换  $x/\sigma_1, y/\sigma_2$  则有

$$P(XY < 0) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)}(x'^2 - 2rx'y' + y'^2)\right] dx' dy'$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x'-ry'}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2 - \frac{1}{2}y'^2\right] dx' dy'$$

令  $u = \frac{x'-ry'}{\sqrt{1-r^2}}, v = y'$ , 则有

$$\begin{aligned} P(XY < 0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\frac{v}{\sqrt{1-r^2}}}^{-\frac{v}{r}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2}\right\} du dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arcsin r} R \exp\left\{-\frac{R^2}{2}\right\} d\theta dR \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\arcsin r + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\arcsin r}{\pi} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{a}{\pi} \end{aligned}$$

式中,  $a = \arcsin r, -\pi/2 < a < \pi/2$ .

例 4.2 已知随机变量  $X$  和  $Y$  的联合概率密度为

$$p_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) + \frac{1}{2\pi} e^{-x^2} g(x) g(y), \quad -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$

其中

$$g(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| < \pi \\ 0, & |x| \geq \pi \end{cases}$$

(1) 求边缘分布  $p_X(x)$  和  $p_Y(y)$ ;

(2) 证明  $X$  和  $Y$  不相关, 但不是统计独立的。

解 (1) 根据边缘分布的定义, 可以求得

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dy + \frac{1}{2\pi} e^{-x^2} g(x) \int_{-\pi}^{\pi} \cos y dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

同理可得

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

即  $X$  和  $Y$  均服从标准高斯分布  $N(0, 1)$ , 但它们不是联合高斯的。

(2) 根据题意, 可知  $E(X) = E(Y) = 0, D(X) = D(Y) = 1$ , 故

$$\begin{aligned} r &= E(XY) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{1}{2\pi} e^{-x^2} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx \int_{-\pi}^{\pi} y \cos y dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

于是得到  $X$  和  $Y$  是不相关的。但由于

$$p_{XY}(x, y) \neq p_X(x)p_Y(y)$$

所以  $X$  和  $Y$  不是统计独立的。

此题表明,两个高斯随机变量若不是联合高斯的,则不相关与统计独立并不等价。

例 4.3 已知独立随机变量  $X$  服从高斯分布  $N(0, \sigma^2)$ , 证明:

$$(1) E(X^n) = \begin{cases} 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (n-1) \sigma^n, & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$(2) E(|X|^n) = \begin{cases} 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k-1) \sigma^{2k}, & n = 2k \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^k k! \sigma^{2k+1}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

证明 (1) 将积分式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

的两边相对  $a$  微分  $k$  次, 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k-1)}{2^k} \sqrt{\frac{\pi}{a^{2k+1}}}$$

令  $a = 1/(2\sigma^2)$ ,  $n = 2k$ , 则得

$$E(X^n) = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (n-1) \sigma^n, \quad n \text{ 为偶数}$$

而当  $n$  为奇数时, 因下式中被积函数为奇函数, 故有

$$E(X^n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 0$$

于是可得

$$E(X^n) = \begin{cases} 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (n-1) \sigma^n, & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

(2) 当  $n$  为偶数时, 与第(1)小题结果相同。当  $n$  为奇数时, 令  $n = 2k+1$ , 由于  $p(x)$  为偶函数, 所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2k+1} p(x) dx = 2 \int_0^{\infty} x^{2k+1} p(x) dx$$

因而有

$$E(|X|^n) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} x^{2k+1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

令  $y = x^2/(2\sigma^2)$ , 于是有

$$E(|X|^n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^k \sigma^{2k+1} \int_0^{\infty} y^k e^{-y} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^k k! \sigma^{2k+1}$$

其中利用了

$$k! = \int_0^{\infty} y^k e^{-y} dy$$

故有

$$E(|X|^n) = \begin{cases} 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k-1)\sigma^{2k}, & n = 2k \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^k k! \sigma^{2k+1}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

例 4.4 已知随机变量  $X$  和  $Y$  是联合高斯的, 它们的联合概率密度与例题 4.1 相同。证明以下各式:

- (1)  $E\{XY\} = r\sigma_1\sigma_2$ ;
- (2)  $E\{X^2Y^2\} = (2r^2+1)\sigma_1^2\sigma_2^2 = E\{X^2\}E\{Y^2\} + 2E^2\{XY\}$ ;
- (3)  $E\{|XY|\} = \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi}(\cos a + a \sin a)$ 。

其中  $a = \arcsin r$ ,  $-\pi/2 < a < \pi/2$ 。

证明 上述关系式可由直接积分得证, 但这种证明方法过于复杂。可以利用下面的公式来证明

$$E\{g_1(X)g_2(Y)\} = E\{g_1(X)E\{g_2(Y) | X\}\}$$

首先, 容易证明

$$\begin{aligned} p_{Y|X}(y | x) &= \frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x)} \\ &= \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi(1-r^2)}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-r^2)}\left(y - \frac{r\sigma_2}{\sigma_1}x\right)^2\right] \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} E\{Y | X\} &= \frac{r\sigma_2}{\sigma_1}X \\ E\{Y^2 | X\} &= \sigma_2^2(1-r^2) + \frac{r^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2}X^2 \end{aligned}$$

(1) 根据条件期望的性质, 有

$$\begin{aligned} E\{XY\} &= E\{XE\{Y | X\}\} = E\left\{X \frac{r\sigma_2}{\sigma_1}X\right\} \\ &= \frac{r\sigma_2}{\sigma_1}E\{X^2\} = r\sigma_1\sigma_2 \end{aligned}$$

(2) 同理可得

$$\begin{aligned} E\{X^2Y^2\} &= E\{X^2E\{Y^2 | X\}\} \\ &= E\left\{X^2\left[\sigma_2^2(1-r^2) + \frac{r^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2}X^2\right]\right\} \\ &= \sigma_2^2(1-r^2)E\{X^2\} + \frac{r^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2}E\{X^4\} \end{aligned}$$

由矩与特征函数的关系可得

$$E\{X^4\} = (-j)^4 \phi_X^{(4)}(v) \Big|_{v=0} = 3\sigma_1^4$$

故有

$$E\{X^2Y^2\} = (2r^2+1)\sigma_1^2\sigma_2^2$$

显然

$$E(X^2)E(Y^2) + 2E^2\{XY\} = (2r^2 + 1)\sigma_1^2\sigma_2^2$$

故证得

$$E\{X^2Y^2\} = (2r^2 + 1)\sigma_1^2\sigma_2^2 = E(X^2)E(Y^2) + E^2\{XY\}$$

(3) 先证  $E\{|XY|\}$  满足下式:

$$\frac{\partial E\{|XY|\}}{\partial \mu} = E\left\{\frac{d|X|}{dX} \frac{d|Y|}{dY}\right\}$$

这里,  $\mu = E\{XY\} - E\{X\}E\{Y\}$ 。因此

$$\frac{\partial E\{|XY|\}}{\partial \mu} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |xy| \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi(v_1, v_2)}{\partial \mu} e^{-i(v_1x + v_2y)} dv_1 dv_2 dx dy$$

式中,  $\phi(v_1, v_2)$  为  $X$  和  $Y$  的联合特征函数。因为

$$\phi(v_1, v_2) = \exp\left[-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 v_1^2 + 2\mu v_1 v_2 + \sigma_2^2 v_2^2)\right]$$

而

$$\frac{\partial \phi(v_1, v_2)}{\partial \mu} = -v_1 v_2 \phi(v_1, v_2)$$

此外, 由于

$$\frac{1}{(2\pi)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} -v_1 v_2 \phi(v_1, v_2) e^{-i(v_1x + v_2y)} dv_1 dv_2 = \frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial x \partial y}$$

于是可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial E\{|XY|\}}{\partial \mu} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |xy| \frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 |xy|}{\partial x \partial y} p(x, y) dx dy \\ &= E\left\{\frac{d|X|}{dX} \frac{d|Y|}{dY}\right\} \end{aligned}$$

又由于  $\frac{d|X|}{dX} = \begin{cases} -1, & X < 0 \\ 1, & X > 0 \end{cases}$  且  $\frac{d|Y|}{dY} = \begin{cases} -1, & Y < 0 \\ 1, & Y > 0 \end{cases}$  由题 4.1 可知

$$P(XY < 0) = \frac{1}{2} - \frac{a}{\pi}$$

$$P(XY > 0) = 1 - P(XY < 0) = \frac{1}{2} + \frac{a}{\pi}$$

其中,  $a = \arcsin r = \arcsin \frac{\mu}{\sigma_1 \sigma_2}$ , 故

$$\begin{aligned} E\left\{\frac{d|X|}{dX} \frac{d|Y|}{dY}\right\} &= P(XY > 0) - P(XY < 0) \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\mu}{\sigma_1 \sigma_2} \end{aligned}$$

当  $\mu = 0$  时,  $X$  和  $Y$  不相关, 由于  $X$  和  $Y$  是联合高斯的, 因而也是统计独立的, 于是有

$$E\{|XY|\} \Big|_{\mu=0} = E\{|X|\}E\{|Y|\} = \frac{2}{\pi} \sigma_1 \sigma_2$$

解微分方程

$$\frac{\partial E\{|XY|\}}{\partial \mu} = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\mu}{\sigma_1 \sigma_2}$$

因而可得

$$\begin{aligned} E\{|XY|\} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\mu} \arcsin \frac{\mu}{\sigma_1 \sigma_2} d\mu + \frac{2}{\pi} \sigma_1 \sigma_2 \\ &= \frac{2}{\pi} \sigma_1 \sigma_2 (\cos a + a \sin a) \end{aligned}$$

式中,  $a = \arcsin r$ ,  $-\pi/2 < a < \pi/2$ 。

**例 4.5**  $n$  元高斯分布的随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互统计独立的充要条件是它们两两不相关。

**证明 必要性** 若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为  $n$  个相互统计独立的高斯分布的随机变量, 则其联合概率密度为

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) \cdots p_{X_n}(x_n)$$

其特征函数为

$$\begin{aligned} \phi_X(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \phi_{X_1}(v_1) \phi_{X_2}(v_2) \cdots \phi_{X_n}(v_n) \\ &= \prod_{i=1}^n \exp \left\{ j m_i v_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 v_i^2 \right\} \\ &= \exp \left\{ j \sum_{i=1}^n m_i v_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 v_i^2 \right\} \end{aligned}$$

式中  $m_i, \sigma_i^2$  分别为  $x_i$  的均值和方差。其协方差阵为

$$B = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

因而, 当  $k \neq i, b_{ki} = 0$ , 则  $X_k, X_i$  是互不相关的。

**充分性** 若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为  $n$  个两两不相关的高斯随机变量, 则

$$b_{ki} = E\{(X_k - m_k)(X_i - m_i)\} = 0, \quad k \neq i$$

其特征函数为

$$\phi_X(v_1, v_2, \dots, v_n) = \exp \left\{ j v^T m - \frac{1}{2} v^T B v \right\}$$

式中,  $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T, m = [m_1, m_2, \dots, m_n]^T$ 。

$B$  为协方差阵, 因而有

$$\begin{aligned} \phi_X(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \exp \left\{ j \sum_{i=1}^n m_i v_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 v_i^2 \right\} \\ &= \prod_{i=1}^n \exp \left\{ j m_i v_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 v_i^2 \right\} \\ &= \prod_{i=1}^n \phi_{X_i}(v_i) \end{aligned}$$

式中  $\phi_{X_i}(v_i)$  是  $X_i$  的特征函数。根据特征函数的性质可知,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是相互统计独立的。

例 4.6 若  $X$  为高斯分布的随机矢量。 $X_1, X_2$  是  $X$  的两个子矢量, 即

$$X = [X_1, X_2]^T$$

令

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

其中  $B_{11}, B_{22}$  分别为  $X_1, X_2$  的协方差阵,  $B_{12}$  是由  $X_1$  及  $X_2$  的相应分量的协方差阵构成的互协方差矩阵, 且  $B_{12} = B_{21}^T$ , 则  $X_1$  与  $X_2$  相互统计独立的条件是  $B_{12} = 0$ 。

证明 必要性 若  $X_1$  与  $X_2$  相互统计独立, 则  $X_1$  的任何一个分量与  $X_2$  的任何一个分量统计独立, 因此其协方差为 0, 从而由它们构成的相互协方差矩阵  $B_{12} = B_{21}^T = 0$ 。

充分性 当  $B_{12} = B_{21}^T = 0$  时, 有

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$$

令  $v = [v_1, v_2]^T$ , 其中  $v_1, v_2$  分别与  $X_1, X_2$  的维数相同, 则

$$\begin{aligned} v^T B v &= [v_1^T, v_2^T] \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= v_1^T B_{11} v_1 + v_2^T B_{22} v_2 \end{aligned}$$

再令,  $m = [m_1, m_2]^T$ , 其中  $m_1, m_2$  分别是  $X_1, X_2$  的数学期望, 则

$$v^T m = [v_1^T, v_2^T] \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = v_1^T m_1 + v_2^T m_2$$

故  $X$  的特征函数为

$$\begin{aligned} \phi_X(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \exp \left\{ j v^T m - \frac{1}{2} v^T B v \right\} \\ &= \exp \left[ j (v_1^T m_1 + v_2^T m_2) - \frac{1}{2} (v_1^T B_{11} v_1 + v_2^T B_{22} v_2) \right] \\ &= \exp \left[ j v_1^T m_1 - \frac{1}{2} v_1^T B_{11} v_1 \right] \exp \left[ j v_2^T m_2 - \frac{1}{2} v_2^T B_{22} v_2 \right] \\ &= \phi_{X_1}(v_1) \phi_{X_2}(v_2) \end{aligned}$$

其中  $\phi_{X_1}(v_1), \phi_{X_2}(v_2)$  分别表示子矢量  $X_1, X_2$  的特征函数。根据特征函数的性质, 可知  $X_1$  和  $X_2$  是相互统计独立的。

例 4.7 设  $X$  是一个四维的零均值高斯随机矢量, 其协方差矩阵为  $\Lambda_X$ , 它们的表达式分别如下:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_X = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \lambda_{34} \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} & \lambda_{43} & \lambda_{44} \end{bmatrix}$$

(1) 求  $E\{X_1 X_2 X_3 X_4\}$ ;

(2) 求  $E\{X_1^2 X_2^2\}$ 。

解 (1) 随机矢量  $X$  的联合特征函数为

$$\begin{aligned}\phi_X(\mathbf{v}) &= \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{v}^T \Lambda_X \mathbf{v}\right] \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 v_i \lambda_{ij} v_j\right)\end{aligned}$$

令  $L_i = \sum_{j=1}^n v_j \lambda_{ij}$ , 则有

$$L_i = -\frac{\partial \phi_X(\mathbf{v})}{\partial v_i} \frac{1}{\phi_X(\mathbf{v})}$$

$$L_i \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} = 0, \quad \frac{\partial L_i}{\partial v_j} = \lambda_{ij}$$

$$\frac{\partial \phi_X(\mathbf{v})}{\partial v_1} = -L_1 \phi_X(\mathbf{v})$$

$$\frac{\partial \phi_X(\mathbf{v})}{\partial v_1 \partial v_2} = \phi_X(\mathbf{v}) [L_1 L_2 - \lambda_{12}]$$

$$\frac{\partial \phi_X(\mathbf{v})}{\partial v_1 \partial v_2 \partial v_3} = \phi_X(\mathbf{v}) [-L_1 L_2 L_3 + L_3 \lambda_{12} + L_2 \lambda_{13} + L_1 \lambda_{23}]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_X(\mathbf{v})}{\partial v_1 \partial v_2 \partial v_3 \partial v_4} &= \phi_X(\mathbf{v}) [L_1 L_2 L_3 L_4 - \lambda_{34} L_1 L_2 - \lambda_{24} L_1 L_3 - \lambda_{14} L_2 L_3 - \\ &\quad L_2 L_4 \lambda_{13} - L_1 L_4 \lambda_{23} - L_3 L_4 \lambda_{12} + \lambda_{12} \lambda_{34} + \lambda_{13} \lambda_{24} + \lambda_{23} \lambda_{14}]\end{aligned}$$

故

$$E\{X_1 X_2 X_3 X_4\} = \left. \frac{\partial \phi_X(\mathbf{v})}{\partial v_1 \partial v_2 \partial v_3 \partial v_4} \right|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} = \lambda_{12} \lambda_{34} + \lambda_{13} \lambda_{24} + \lambda_{23} \lambda_{14}$$

(2) 令  $X_3 = X_1, X_4 = X_2$ , 由第(1)小题结果可得

$$E\{X_1^2 X_2^2\} = 2\lambda_{12}^2 + \lambda_{11}\lambda_{22}$$

例 4.8 已知随机矢量  $X$  的均值矢量为  $m_X$ , 协方差阵为  $\Lambda_X$ , 定义随机变量  $Y$  为

$$Y = G^T X$$

若对于任意使  $E\{Y^2\} < \infty$  的非零实矢量  $G$ ,  $Y$  均为高斯的, 试求  $X$  的联合特征函数  $\phi(\mathbf{v})$ 。

解 根据均值和方差的定义, 有

$$m_Y = E\{G^T X\} = G^T m_X$$

$$\sigma_Y = E\{(Y - m_Y)^2\} = E\{(Y - m_Y)(Y - m_Y)^T\}$$

$$= E\{(G^T X - G^T m_X)(X^T G - m_X^T G)\}$$

$$= G^T E\{(X - m_X)(X - m_X)^T\} G$$

$$= G^T \Lambda_X G$$

由于  $Y$  服从高斯分布, 所以其特征函数为

$$\begin{aligned}\phi_Y(v) &= \exp\left\{jvm_Y - \frac{1}{2}\sigma_Y^2 v^2\right\} \\ &= \exp\left\{jvG^T m_X - \frac{1}{2}vG^T \Lambda_X Gv\right\}\end{aligned}$$



又由于

$$\phi_Y(v) = E\{e^{jv^T Y}\} = E\{e^{jv^T G^T X}\}$$

$$\phi_X(v) = E\{e^{jv^T X}\}$$

因此,比较以上两式可得

$$\begin{aligned}\phi_X(v) &= \phi_Y(v) \Big|_{vG^T = v^T} \\ &= \exp\left\{j v^T m_X - \frac{1}{2} v^T \Lambda_X v\right\}\end{aligned}$$

此结果表明  $X$  是高斯随机矢量。本题事实上给出了高斯随机矢量的另一种定义方法。

**例 4.9** 已知  $n$  维随机矢量  $X$  服从标准高斯分布  $N(0, I)$ , 即  $X$  的均值矢量为零。协方差阵为单位矩阵  $I$ , 构造一个新的随机变量, 即

$$Z = X^T B X$$

其中  $B$  为正定对称矩阵。证明:

$$\phi_Z(v) = \prod_{k=1}^n (1 - 2jv\lambda_k)^{-\frac{1}{2}}$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是  $B$  的特征值。

**证明** 因为  $B$  是正定对称矩阵, 因而  $B^T = B$ , 所以必存在正交矩阵  $W$  满足  $W^T W = I$ , 使得

$$W^T B W = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为  $B$  的特征值。令

$$X = W Y$$

则有

$$Y = W^{-1} X = W^T X = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]^T$$

且  $Y$  满足

$$E\{Y\} = E\{W^T X\} = W^T E\{X\} = 0$$

$$E\{Y Y^T\} = E\{W^T X X^T W\} = W^T E\{X X^T\} W = W^T I W = I$$

因此  $Y$  为高斯分布  $N(0, I)$ , 即  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  统计独立且均服从标准高斯分布  $N(0, 1)$ 。

其特征函数为

$$\begin{aligned}\phi_Z(v) &= E\{e^{jvZ}\} = E\{e^{jvX^T B X}\} \\ &= E\{e^{jvY^T W^T B W Y}\} = E\{e^{jvY^T \Lambda Y}\} \\ &= E[\exp\{e^{jv\sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i^2}\}] = \prod_{i=1}^n E\{e^{jv\lambda_i Y_i^2}\}\end{aligned}$$

其中

$$E\{e^{jv\lambda_i Y_i^2}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jv\lambda_i y_i^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_i^2}{2}} dy_i$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}(1-2j\omega\lambda_i)y_i^2\right] dy \\
 &= (1-2j\omega\lambda_i)^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

将此结果代入  $\phi_z(v)$  的表达式即得

$$\phi_z(v) = \prod_{k=1}^n (1-2j\omega\lambda_k)^{-\frac{1}{2}}$$

例 4.10 高斯随机矢量的另一种定义方法如下: 设随机矢量  $X=[X_1, X_2, \dots, X_N]^T$  的所有分量都是高斯的, 定义随机变量  $Y$  为

$$Y = G^T X = \sum_{n=1}^N g_n X_n$$

若对于任意使  $E\{Y^2\} < \infty$  的非零常矢量  $G=[g_1, g_2, \dots, g_N]^T$ ,  $Y$  均为高斯的, 则称  $X_1, X_2, \dots, X_N$  为联合高斯的, 同时称  $X$  为高斯随机矢量。若

$$E\{X\} = m$$

$$E\{(X-m)(X-m)^T\} = \Lambda$$

证明当  $\Lambda$  为正定时,  $X$  的概率密度为

$$p(x) = [(2\pi)^N |\Lambda|]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-m)^T \Lambda^{-1}(x-m)\right]$$

证明 由线性代数可知, 对于正定对称矩阵  $\Lambda$ , 必然存在正交矩阵  $W(WW^T = I)$ , 使得

$$W\Lambda W^T = \Lambda'$$

其中  $\Lambda'$  为对角矩阵, 且其中每个元素均大于零, 因此不妨记

$$\Lambda' = \begin{bmatrix} \sigma_1'^2 & & & \\ & \sigma_2'^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_N'^2 \end{bmatrix}$$

对  $X$  作线性变换

$$X' = WX$$

由于  $X$  是高斯随机矢量, 因此  $X'$  中的每个元素  $X'_1, X'_2, \dots, X'_N$  均为高斯的。可以求得  $X'$  的数学期望为

$$m' = E\{X'\} = E\{WX\} = Wm = [m'_1, m'_2, \dots, m'_N]^T$$

于是  $X'$  的协方差为

$$\begin{aligned}
 \Lambda' &= E\{(X' - m')(X' - m')^T\} \\
 &= WE\{(X - m)(X - m)^T\}W^T \\
 &= W\Lambda W^T = \begin{bmatrix} \sigma_1'^2 & & & \\ & \sigma_2'^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_N'^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

由 $\Lambda'$ 可知 $X'_1, X'_2, \dots, X'_N$ 是两两互不相关的, 由于它们是高斯的, 因而也是统计独立的, 所以

$$\begin{aligned} p_{X'}(x') &= \prod_{n=1}^N p_n(x'_n) \\ &= \prod_{n=1}^N (2\pi\sigma_n'^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(x'_n - m')^2}{2\sigma_n'^2}\right] \\ &= [(2\pi)^N |\Lambda'|]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x' - m')^T \Lambda' (x' - m')\right] \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} p_X(x) &= p_{X'}(x') \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \\ x' &= Wx \\ \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| &= |W| \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} p_X(x) &= p_{X'}(x') |W| \\ &= [(2\pi)^N |W|^2 |\Lambda'|]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(Wx - Wm)^T (W\Lambda W^T)^{-1} (Wx - Wm)\right] |W| \\ &= [(2\pi)^N |\Lambda|]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x - m)^T \Lambda^{-1} (x - m)\right] \end{aligned}$$

此题表明, 若高斯随机变量的任意线性组合为高斯的, 则其必是联合高斯的。

例 4.11 将上题的定义方法推广到随机过程, 可得高斯过程的另一种定义方法。设 $X(t)$ 为定义在 $(a, b)$ 上的随机过程, 定义随机变量 $Y$ 为

$$Y = \int_a^b g(t) X(t) dt$$

若对于任意 $E\{Y^2} < \infty$ 的非零实函数 $g(t)$ ,  $Y$ 均为高斯的, 则称 $X(t)$ 为高斯随机过程。证明 $X(t)$ 为如上定义的高斯过程, 则对应于 $(a, t)$ 内的任意一组时刻 $t_1, t_2, \dots, t_n$ , 随机变量 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ 都是联合高斯的。

证明 已知 $X(t)$ 为高斯过程, 若取

$$g_k(t) = \delta(t - t_k), \quad t_k \in (a, b), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

则可得到

$$X(t_k) = \int_a^b g_k(t) X(t) dt = \int_a^b \delta(t - t_k) X(t) dt$$

因此 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ 均为高斯的。进一步对应于任意一组常数 $g_1, g_2, \dots, g_n$ , 令

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{k=1}^n g_k X(t_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ g_k \int_a^b \delta(t - t_k) X(t) dt \right] \\ &= \int_a^b \left[ \sum_{k=1}^n g_k \delta(t - t_k) \right] X(t) dt \end{aligned}$$

$$= \int_a^b g(t) X(t) dt$$

式中

$$g(t) = \sum_{i=1}^n g_i \delta(t - t_i)$$

由于  $Y$  是高斯的, 由上题结论可知  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$  是联合高斯的。

例 4.12 设  $X(t)$  是定义在  $(a, b)$  上的一个高斯随机过程,  $g_1(t)$  和  $g_2(t)$  是两个任意的非零实函数, 令

$$Y_1 = \int_a^b g_1(t) X(t) dt$$

$$Y_2 = \int_a^b g_2(t) X(t) dt$$

证明  $Y_1$  和  $Y_2$  是联合高斯的。

证明 根据高斯过程的性质可知  $Y_1$  和  $Y_2$  都是高斯的, 对于任意非零常数  $k_1$  和  $k_2$ , 令

$$\begin{aligned} Z &= k_1 Y_1 + k_2 Y_2 \\ &= k_1 \int_a^b g_1(t) X(t) dt + k_2 \int_a^b g_2(t) X(t) dt \\ &= \int_a^b [k_1 g_1(t) + k_2 g_2(t)] X(t) dt \\ &= \int_a^b g(t) X(t) dt \end{aligned}$$

其中

$$g(t) = k_1 g_1(t) + k_2 g_2(t)$$

由于  $Z$  为高斯的, 因此  $Y_1$  和  $Y_2$  是联合高斯的。

例 4.13 试说明高斯随机过程在任意一组时间  $t_1, t_2, \dots, t_k$  的集合所组成的样本都是联合高斯矢量。

解 首先定义

$$\mathbf{X} = [X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)]^T$$

为一个  $k$  维矢量。如果

$$\mathbf{z} = \mathbf{G}^T \mathbf{X}$$

对式中任何  $\mathbf{G}^T$  是高斯的, 则可得所求的结果。

因为任一  $\mathbf{G}^T$  可被划分为

$$\mathbf{G}^T = [g_1, g_2, g_3, \dots, g_k]^T$$

故把  $\mathbf{z}$  写成  $X(t)$  的函数, 即

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^k g_i X(t_i)$$

设

$$g(t) = \sum_{i=1}^k g_i \delta(t - t_i)$$

则有

$$\begin{aligned}\int_{T_1}^{T_2} g(t) X(t) dt &= \int_{T_1}^{T_2} \sum_{i=1}^N g_i(t) \delta(t-t_i) X(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^N g_i X(t_i) = z\end{aligned}$$

这表明  $z$  是高斯的, 由于在分析时对于任何  $G^T$  都是适用的, 所以样本是联合高斯的。

**例 4.14** 设随机过程

$$X(t) = U \cos \omega t + V \sin \omega t$$

其中  $\omega$  为常数,  $U$  和  $V$  是两个相互独立的高斯随机变量。已知

$$E(U) = E(V) = 0$$

$$E(U^2) = E(V^2) = \sigma^2$$

求  $X(t)$  的一维和二维概率密度函数。

**解** 由于  $U$  和  $V$  是统计独立的高斯随机变量, 容易知道  $X(t)$  为高斯过程, 因此欲求一维和二维概率密度函数, 只需求前两阶矩即可。

先求一维概率密度。因为

$$m_X(t) = E\{X(t)\} = E(U) \cos \omega t + E(V) \sin \omega t = 0$$

和

$$\begin{aligned}\sigma_X^2(t) &= E\{X^2(t)\} = E(U^2) \cos^2 \omega t + E(V^2) \sin^2 \omega t + \\ &\quad 2E(UV) \sin \omega t \cos \omega t = \sigma^2\end{aligned}$$

故有

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

下面求二维概率密度。因为

$$m = \begin{bmatrix} m_X(t_1) \\ m_X(t_2) \end{bmatrix} = 0$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} E\{X^2(t_1)\} & E\{X(t_1)X(t_2)\} \\ E\{X(t_2)X(t_1)\} & E\{X^2(t_2)\} \end{bmatrix}$$

其中

$$E\{X^2(t_1)\} = E\{X^2(t_2)\} = \sigma^2$$

$$E\{X(t_1)X(t_2)\} = E\{X(t_2)X(t_1)\}$$

$$= \sigma^2 \cos \omega \tau, \quad \tau = t_1 - t_2$$

于是有

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & \cos \omega \tau \\ \cos \omega \tau & 1 \end{bmatrix} \sigma^2$$

故有

$$p_X(x_1, x_2; \tau) = \frac{1}{2\pi |\Lambda|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} [x_1, x_2] \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right\}$$

例 4.15 设  $X(t)$  为平稳高斯过程, 并且是均方可微的, 其自相关函数为  $R_X(\tau)$ 。求随机过程

$$Y(t) = \frac{X(t+\epsilon) - X(t)}{\epsilon}$$

的一维概率密度  $p_Y(y)$ , 并证明当  $\epsilon \rightarrow 0$  时,  $p_Y(y)$  趋于均值为零, 方差为  $-R_X''(0)$  的高斯分布。

解 对于任意时刻  $t$ ,  $Y(t)$  为一个高斯随机变量。这样,  $Y(t)$  的均值和方差分别为

$$m_Y(t) = E\{Y(t)\} = \frac{1}{\epsilon} [E\{X(t+\epsilon)\} - E\{X(t)\}] = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2(t) &= E\{Y^2(t)\} \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} [E\{X^2(t+\epsilon)\} + E\{X^2(t)\} - 2E\{X(t+\epsilon)X(t)\}] \\ &= \frac{2}{\epsilon^2} [R_X(0) - R_X(\epsilon)] \end{aligned}$$

故有

$$P_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi[R_X(0) - R_X(\epsilon)]/\epsilon^2}} \exp\left\{-\frac{\epsilon^2 y^2}{4[R_X(0) - R_X(\epsilon)]}\right\}$$

注意到  $R_X(\tau)$  为偶函数, 故  $R_X'(0) = 0$ 。因此

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2[R_X(0) - R_X(\epsilon)]}{\epsilon^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-R_X'(\epsilon)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [-R_X''(\epsilon)] = R_X''(0)$$

于是可得

$$p_Y(y) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi[-R_X''(0)]}} \exp\left(-\frac{y^2}{2R_X''(0)}\right)$$

例 4.16 设  $X(t)$  为平稳高斯过程, 其均值为零, 自相关函数为  $R(\tau) = e^{-|\tau|}$ , 求随机变量  $Y = \int_0^1 X(t) dt$  的概率密度函数  $p_Y(y)$ 。

解 因为  $X(t)$  为高斯过程, 所以  $Y$  为高斯随机变量, 欲求  $p_Y(y)$ , 只需求前二阶矩。首先计算随机变量  $Y$  的前二阶矩。

$$E(Y) = E\left\{\int_0^1 X(t) dt\right\} = \int_0^1 E\{X(t)\} dt = 0$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= E\left\{\int_0^1 X(t) dt \int_0^1 X(\tau) d\tau\right\} \\ &= \int_0^1 \int_0^1 E\{X(t)X(\tau)\} dt d\tau \\ &= \int_0^1 \int_0^1 e^{-|t-\tau|} dt d\tau \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 e^{-(t-\tau)} d\tau + \int_0^1 e^{t-\tau} d\tau\right] dt \\ &= 2e^{-1} \end{aligned}$$

于是可得

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi e^{-1}}} \exp\left(-\frac{y^2}{4e^{-1}}\right)$$

例 4.17 设

$$Z(t) = X\cos 2\pi t + Y\sin 2\pi t$$

其中  $X$  和  $Y$  是统计独立、零均值高斯随机变量, 其方差为  $\sigma^2$ 。

(1) 求  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$  的概率密度  $f_R(r)$ ;

(2) 若在  $t=0, \frac{1}{4}$  和  $\frac{1}{2}$  取样, 写出样本的联合概率密度。

解 (1) 先计算随机变量  $R$  的分布函数。

$$\begin{aligned} F_R(r) &= P(R \leq r) = P(\sqrt{X^2 + Y^2} \leq r) \\ &= \iint_{\sqrt{x^2 + y^2} \leq r} p(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr d\theta \\ &= \int_0^r \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr \end{aligned}$$

其相应的概率密度函数为

$$p_R(r) = F'_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), & r \geq 0 \\ 0, & r < 0 \end{cases}$$

可以看出它是瑞利分布密度。

(2) 根据题意, 该样本是  $Z(0) = X, Z\left(\frac{1}{4}\right) = Y, Z\left(\frac{1}{2}\right) = -X$ , 故  $Z(0)$  和  $Z\left(\frac{1}{4}\right)$  是统计独立的, 而  $Z\left(\frac{1}{2}\right)$  是  $Z(0)$  的一个线性函数。另外, 不难求得  $Z(t)$  的概率密度函数为

$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right)$$

因此

$$p(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2\sigma^2}\right) \delta(z_1 + z_3)$$

例 4.18 设有线性系统, 它的冲激响应为  $h(t)$ , 输入为平稳实高斯随机过程。试证明输入  $X(t)$  与输出  $Y(t)$  为联合高斯分布的随机过程。

证明 此线性系统输出为

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) X(\tau) d\tau$$

显然, 它是高斯分布的实随机过程。令

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} [g_1(t)X(t) + g_2(t)Y(t)] dt$$

式中  $g_1(t), g_2(t)$  为实确知函数。  $X(t)$  可写成

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

故有

$$\begin{aligned}
 Z &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ g_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \delta(t-\tau) d\tau + g_2(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) X(\tau) d\tau \right] dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) \delta(t-\tau) dt + \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) h(t-\tau) dt \right] d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) g(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

其中

$$g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) \delta(t-\tau) dt + \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) h(t-\tau) dt$$

它为确知函数。故  $Z$  是高斯随机变量, 亦  $X(t)$  和  $Y(t)$  是联合高斯过程。

例 4.19 设  $X(t)$  是一维纳过程, 已知  $E[X^2(t)] = \sigma_X^2 t$ 。

(1) 对应于一组时刻  $t_1 < t_2 < \cdots < t_N$ , 记  $X = [X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_N)]^T$ , 求  $p_X(x)$ ;

(2) 定义另一个随机过程  $Y(t) = \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du$ , 求  $p_Y(y)$ 。

解 (1) 维纳过程是一类特殊的高斯过程, 欲求其概率密度, 只需求前二阶矩。由维纳过程的定义和性质可知

$$E\{X(t_i)X(t_j)\} = \sigma_X^2 \min(t_i, t_j)$$

故

$$\Lambda_X = \sigma_X^2 \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_N \end{pmatrix}$$

则有

$$p_X(x) = [(2\pi)^N |\Lambda|]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x^T}{2} \Lambda^{-1} x\right\}$$

(2) 对于任意时刻  $t$ ,  $Y(t)$  是高斯过程  $X(t)$  的一个线性函数, 因此  $Y(t)$  是高斯的。其均值和方差分别为

$$E\{Y(t)\} = \frac{1}{t} \int_0^t E\{X(u)\} du = 0$$

和

$$\begin{aligned}
 E\{Y^2(t)\} &= E\left\{\frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \cdot \frac{1}{t} \int_0^t X(v) dv\right\} \\
 &= \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^t E\{X(u)X(v)\} du dv \\
 &= \frac{1}{t^2} \int_0^t \left[ \int_0^u \sigma_X^2 v dv \right] \sigma_X^2 u du \\
 &= \frac{\sigma_X^2}{t^2} \int_0^t \left( ut - \frac{u^2}{2} \right) du \\
 &= \frac{\sigma_X^2}{3} t
 \end{aligned}$$

于是可得

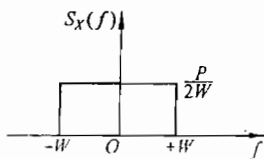


$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2 t/3}} \exp\left(-\frac{3y^2}{2\sigma_X^2 t}\right)$$

例 4.20 设  $X(t)$  为一个零均值高斯过程, 其功率谱密度  $S_X(f)$  如例题图 4.20 所示, 若每  $\frac{1}{2W}$  秒对  $X(t)$  取样一次, 得到样本集合  $X(0), X\left(\frac{1}{2W}\right), \dots$ , 求前  $N$  个样本的联合概率密度。

解 根据维纳-辛钦定理, 有

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \int_{-W}^W \frac{P}{2W} e^{j2\pi f\tau} df \\ &= P \frac{\sin 2\pi W\tau}{2\pi W\tau} \end{aligned}$$



例题图 4.20

注意到

$$R_X\left(\frac{k}{2W}\right) = 0, \quad k \neq 0$$

这表明间隔  $\frac{1}{2W}$  秒的取样是两两不相关的, 由于  $X(t)$  为高斯过程, 因此这些样本是彼此独立的。记

$$X_k = X\left(\frac{k}{2W}\right)$$

因此可得

$$\begin{aligned} E(X_k) &= 0 \\ E(X_k^2) &= R_X(0) = P \\ p_{X_k}(x_k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi P}} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2P}\right) \end{aligned}$$

则  $N$  个样本的联合概率密度为

$$p(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) = \frac{1}{(2\pi P)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2P} \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2\right)$$

例 4.21 二极管的电压  $X(t)$  是平稳高斯过程, 具有零均值及自相关函数  $R_X(\tau) = ce^{-a|\tau|}$ 。求二极管的电流  $Y(t) = Ie^{aX(t)}$  的均值、方差和功率谱密度。

解 依题意可得

$$\begin{aligned} m_X &= 0 \\ \sigma_X^2 &= R_X(0) = c \end{aligned}$$

于是可得

$$p_X(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \exp\left(-\frac{x^2}{2c}\right)$$

电流过程  $Y(t)$  的均值为  $m_Y(t)$ , 即

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E\{Y(t)\} \\ &= E\{Ie^{aX(t)}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} I e^{ax} \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \exp\left(-\frac{x^2}{2c}\right) dx \\
&= I e^{\frac{1}{2}ac^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \exp\left(-\frac{(x-ac)^2}{2c}\right) dx \\
&= I e^{\frac{1}{2}ac^2}
\end{aligned}$$

电流过程  $Y(t)$  的方差为  $\sigma_Y^2(t)$ , 因此有

$$\begin{aligned}
E\{Y^2\} &= E\{I^2 e^{2aX(t)}\} = I^2 e^{c(2a)^2/2} = I^2 e^{2ca^2} \\
\sigma_Y^2 &= E\{Y^2\} - E^2\{Y\} \\
&= I^2 e^{2ca^2} - I^2 e^{ca^2} \\
&= I^2 e^{ca^2} (e^{ca^2} - 1)
\end{aligned}$$

为了求  $Y(t)$  的功率谱密度, 首先求相关函数  $R_Y(\tau)$ 。根据相关函数的定义, 有

$$\begin{aligned}
R_Y(\tau) &= E\{Y(t+\tau)Y(t)\} \\
&= E\{I e^{aX(t+\tau)} I e^{aX(t)}\} \\
&= I^2 E\{e^{aX(t+\tau)+aX(t)}\} \\
&= I^2 \phi_X\left(\frac{a}{j}, \frac{a}{j}; \tau\right)
\end{aligned}$$

其中特征函数为

$$\begin{aligned}
\phi_X(v_1, v_2; \tau) &= \exp\left\{j \sum_{i=1}^2 v_i m_X - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 [R_X(\tau_{ik}) - m_X^2] v_i v_k\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 R_X(\tau_{ik}) v_i v_k\right\}
\end{aligned}$$

式中

$$\tau_{ik} = \begin{cases} 0, & i = k, \\ \tau, & i \neq k, \end{cases} \quad i, k = 1, 2$$

故有

$$R_Y(\tau) = I^2 \exp\{a^2 c + a^2 R_X(\tau)\}$$

将  $R_Y(\tau)$  展开成泰勒级数, 有

$$\begin{aligned}
R_Y(\tau) &= I^2 e^{ca^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{k!} R_X^k(\tau) \\
&= I^2 e^{ca^2} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k}}{k!} c^k e^{-ak|t|}\right)
\end{aligned}$$

于是求得电流  $Y(t)$  的功率谱密度为

$$\begin{aligned}
S_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= I^2 e^{ca^2} \left(2\pi\delta(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k a^{2k}}{k!} \times \frac{2ak}{\omega^2 + a^2 k^2}\right)
\end{aligned}$$

例 4.22 随机过程  $X(t)$  是高斯的, 具有自相关函数  $R_X(t)$ 。试证(遍历性)若

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T R_X^2(\tau) d\tau = 0$$

则有

$$E\{X^2(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X^2(t) dt$$

证明 设  $Y(t) = X^2(t)$ , 则有

$$R_Y(\tau) = R_X^2(\tau) + 2R_X^2(0)$$

且

$$m_Y^2 = R_Y(\infty) = 2R_X^2(0)$$

另外, 由均值各态历经充要条件知道, 若  $Y(t)$  满足

$$E\{Y(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Y(t) dt$$

则必须有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) [R_Y(\tau) - m_Y^2] d\tau = 0 \quad (1)$$

即

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) [R_X^2(\tau) + 2R_X^2(0) - 2R_X^2(0)]^2 d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) R_X^2(\tau) d\tau = 0 \end{aligned}$$

由本题给出的条件, 有

$$0 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) R_X^2(\tau) d\tau \leq 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^{2T} R_X^2(\tau) d\tau = 0$$

故式(1)成立, 即  $Y(t)$  是各态历经的, 因此有

$$E\{X^2(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X^2(t) dt$$

例 4.23 一个线性系统的冲激响应函数为

$$h(t) = e^{-\beta t} U(t), \quad \beta > 0$$

输入  $X(t)$  是一个零均值的平稳高斯过程, 其自相关函数为

$$R_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0, \alpha \neq \beta$$

设输出过程为  $Y(t)$ 。

(1)  $Y(0) \geq r$  的概率是多少?

(2) 若观测到  $X(-T) = 0, Y(0) \geq r$  的概率是多少?

(3) 若观测到  $X(T) = 0, Y(0) \geq r$  的概率是多少?

注: 在(2), (3)题中, 均假设  $T > 0$ 。

解 (1) 先求随机变量  $Y(0)$  的概率密度函数。由于已知  $Y(0)$  是一个零均值的高斯随机变量, 因此只需要求出方差  $\sigma_Y^2$ 。根据本题给定的条件可以求得

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{1}{\beta + j\omega} \\ S_X(\omega) &= \frac{2\alpha\sigma_X^2}{\alpha^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

根据随机过程线性变换性质, 故有

$$\begin{aligned}
 S_Y(\omega) &= |H(j\omega)|^2 S_X(\omega) \\
 &= \frac{1}{\beta^2 + \omega^2} \frac{2\alpha\sigma_X^2}{\alpha^2 + \omega^2} \\
 &= \frac{2\alpha\sigma_X^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left[ \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{1}{\beta^2 + \omega^2} \right]
 \end{aligned}$$

由维纳-辛钦定理可以求得

$$\begin{aligned}
 R_Y(\tau) &= \frac{\alpha\sigma_X^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left[ \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|} - \frac{1}{\beta} e^{-\beta|\tau|} \right] \\
 \sigma_Y^2 &= R_Y(0) = \frac{1}{\beta} \times \frac{\sigma_X^2}{\beta + \alpha}
 \end{aligned}$$

于是可得

$$\begin{aligned}
 P\{Y(0) > r\} &= \int_r^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}\right) dy \\
 &= \operatorname{erfc}\left(\frac{r}{\sigma_Y}\right)
 \end{aligned}$$

(2) 先求给定  $X(-T)$  时  $Y(0)$  的条件概率密度。由于  $X(t)$  和  $Y(t)$  是联合高斯的,  $p_{Y(0)|X(-T)}(y|x)$  亦应为高斯分布。故

$$p_{Y(0)|X(-T)}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{(y-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]$$

其中

$$m_1 = \frac{\operatorname{cov}[Y(0), X(-T)]}{\sigma_X^2} X$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_Y^2 \left\{ 1 - \frac{\operatorname{cov}[Y(0), X(-T)]^2}{\sigma_Y \sigma_X} \right\}$$

由于观测到  $X(-T)=0$ , 因此可知  $m_1=0$ 。又由相关定理可以求得

$$\begin{aligned}
 \operatorname{cov}[Y(0), X(-T)] &= E[Y(0)X(-T)] \\
 &= R_{YX}(T) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(u)R(T-u)du \\
 &= \sigma_X^2 \int_0^{\infty} e^{-\beta u} e^{-\alpha|T-u|} du \\
 &= \sigma_X^2 \int_0^T e^{-\beta u} e^{-\alpha(T-u)} du + \sigma_X^2 \int_T^{\infty} e^{-\beta u} e^{-\alpha(u-T)} du \\
 &= \frac{\sigma_X^2}{\alpha^2 - \beta^2} [2\alpha e^{-\beta T} - (\alpha + \beta) e^{-\alpha T}]
 \end{aligned}$$

故

$$P\{Y(0) \geq r | X(-T) = 0\} = \int_r^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma_1^2}\right\} dy = \operatorname{erfc}\left\{\frac{r}{\sigma_1}\right\}$$

(3) 与第(2)小题类似, 先求  $X(T)=0$  时  $Y(0)$  的条件概率密度。同理可得

$$p_{Y(0)|X(T)}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left[-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]$$

其中

$$\begin{aligned}
 m_2 &= \frac{\text{cov}[Y(0), X(T)]}{\sigma_X^2} X \\
 \sigma_2^2 &= \sigma_Y^2 \left\{ 1 - \frac{\text{cov}[Y(0), X(T)]}{\sigma_Y \sigma_X} \right\} \\
 \text{cov}[Y(0), X(T)] &= E[Y(0)X(T)] \\
 &= R_{XY}(T) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(u) R_X(T+u) du \\
 &= \sigma_X^2 \int_0^{\infty} e^{-\beta u} e^{-\alpha|T+u|} du \\
 &= \frac{\sigma_X^2}{\alpha + \beta} e^{-\alpha T}
 \end{aligned}$$

故可得

$$P\{Y(0) \geq r \mid X(T) = 0\} = \int_r^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}\right) dy = \text{erfc}\left(\frac{r}{\sigma_2}\right)$$

例 4.24 在例题图 4.24 的接收机中,  $s(t)$  是一个确定性的信号, 且具有能量  $E_s = \int_0^T s^2(t) dt$ 。噪声  $n(t)$  是一个零均值具有协方差函数为

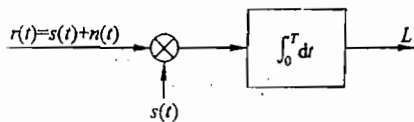
$$K_n(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$$

的高斯过程的一个样本函数。

- (1) 求  $f_L(x)$  的表示式;
- (2) 如果

$$s(t) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

计算  $f_L(x)$  的参量。



例题图 4.24

解 (1) 系统输出为

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^T [s^2(t) + n(t)] s(t) dt \\
 &= \int_0^T s^2(t) dt + \int_0^T n(t) s(t) dt \\
 &= E_s + \int_0^T n(t) s(t) dt \\
 &= E_s + N
 \end{aligned}$$

因为  $n(t)$  是零均值高斯过程, 故

$$\begin{aligned} E(L) &= E\left\{E_s + \int_0^T n(t)s(t)dt\right\} \\ &= E_s + \int_0^T E[n(t)]s(t)dt \\ &= E_s \\ \sigma_N^2 &= E\left[\int_0^T s(t)n(t)dt \cdot \int_0^T n(u)s(u)du\right] \\ &= \int_0^T \int_0^T s(t)s(u)\sigma^2 e^{-a|t-u|} dt du \end{aligned}$$

根据高斯特性,  $L$  的概率密度是

$$f_L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} \exp\left[-\frac{(x-E_s)^2}{2\sigma_N^2}\right]$$

(2) 对于这个特定信号, 方差为

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 &= \int_0^T \int_0^T s(t)s(u)\sigma^2 e^{-a|t-u|} dt du \\ &= \int_0^T \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \sin^2\left(\frac{2\pi nu}{T}\right) \sigma^2 e^{-a|t-u|} dt du \\ &= 2 \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) e^{-at} dt \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi nu}{T}\right) e^{au} \sigma^2 du \\ &= 2\sigma^2 \left[ \frac{T}{4a} + \frac{e^{-aT}-1}{4a^2} + \frac{aT}{4(a^2+4\omega^2)} + \frac{e^{-aT}-1}{2(a^2+4\omega^2)} \right] \end{aligned}$$

式中  $\omega = 2\pi n/T$ , 而均值为

$$E(L) = E_s = \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{3}{8}T$$

例 4.25 对于均值为 0, 方差为  $\sigma^2$  的窄带高斯过程

$$Y(t) = A_c(t)\cos\omega_0 t - A_s(t)\sin\omega_0 t$$

求证包络  $A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)}$  在任意时刻所给出的随机变量  $A_i$ , 其数学期望和方差分

别为  $E(A_i) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$ ,  $D(A_i) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$ .

证明 由窄带过程和高斯过程的性质, 可知  $A_c(t)$  和  $A_s(t)$  相互独立, 且与  $Y(t)$  有相同的分布。从而有

$$p(A_c, A_s) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_c^2 + A_s^2}{2\sigma^2}\right)$$

故可得

$$\begin{aligned} E(A_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{A_c^2 + A_s^2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_c^2 + A_s^2}{2\sigma^2}\right) dA_c dA_s \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r \cdot r \cdot \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr d\theta \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} E(A_i^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (A_c^2 + A_s^2) \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_c^2 + A_s^2}{2\sigma^2}\right) dA_c dA_s \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r^2 \cdot r \cdot \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr d\theta \\ &= 2\sigma^2 \end{aligned}$$

因此可得

$$D(A_i) = E(A_i^2) - E^2(A_i) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$$

例 4.26 已知信号与窄带高斯噪声之和为

$$X(t) = a\cos(\omega_0 t + \Theta) + N(t)$$

其中  $\Theta$  是  $(0, 2\pi)$  内的均匀分布的随机变量,  $N(t)$  为窄带平稳高斯过程, 均值为 0, 方差为  $\sigma^2$ , 且可表示为

$$N(t) = N_c(t)\cos\omega_0 t - N_s(t)\sin\omega_0 t$$

证明  $X(t)$  的包络平方的自相关函数为

$$R_X(\tau) = a^4 + 4a^2\sigma^2 + 4\sigma^4 + 4[a^2R_{N_c}(\tau) + R_{N_c}^2(\tau) + R_{N_s}^2(\tau)]$$

证明

$$\begin{aligned} X(t) &= a\cos(\omega_0 t + \Theta) + N(t) \\ &= [a\cos\Theta + N_c(t)]\cos\omega_0 t - [a\sin\Theta + N_s(t)]\sin\omega_0 t \end{aligned}$$

$X(t)$  的包络平方为  $A(t)$ , 则有

$$\begin{aligned} A(t) &= [a\cos\Theta + N_c(t)]^2 + [a\sin\Theta + N_s(t)]^2 \\ &= a^2 + 2aN_c(t)\cos\Theta + 2aN_s(t)\sin\Theta + N_c^2(t) + N_s^2(t) \end{aligned}$$

根据相关函数的定义, 有

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E\{A(t)A(t-\tau)\} \\ &= E\{[a^2 + 2aN_c(t)\cos\Theta + 2aN_s(t)\sin\Theta + N_c^2(t) + N_s^2(t)] \times \\ &\quad [a^2 + 2aN_c(t-\tau)\cos\Theta + 2aN_s(t-\tau)\sin\Theta + N_c^2(t-\tau) + N_s^2(t-\tau)]\} \\ &= E\{a^4 + 2a^3N_c(t)\cos\Theta + 2a^3N_s(t)\sin\Theta + a^2N_c^2(t) + a^2N_s^2(t) + \\ &\quad 2a^3N_c(t-\tau)\cos\Theta + 4a^2N_c(t)N_c(t-\tau)\cos^2\Theta + 4a^2N_s(t)N_c(t-\tau)\sin\Theta\cos\Theta + \\ &\quad 2aN_c^2(t)N_c(t-\tau)\cos\Theta + 2aN_s^2(t)N_c(t-\tau)\cos\Theta + 2a^3N_c(t-\tau)\sin\Theta + \\ &\quad 4a^2N_c(t)N_s(t-\tau)\sin\Theta\cos\Theta + 4a^2N_s(t)N_s(t-\tau)\sin^2\Theta + \\ &\quad 2aN_c^2(t)N_s(t-\tau)\sin\Theta + 2aN_s^2(t)N_s(t-\tau)\sin\Theta + \\ &\quad a^2N_c^2(t-\tau) + 2aN_c(t)N_c^2(t-\tau)\cos\Theta + 2aN_s(t)N_c^2(t-\tau)\sin\Theta + \\ &\quad N_c^2(t)N_c^2(t-\tau) + N_s^2(t)N_c^2(t-\tau) + \\ &\quad a^2N_s^2(t-\tau) + 2aN_c(t)N_s^2(t-\tau)\cos\Theta + 2aN_s(t)N_s^2(t-\tau)\sin\Theta + \\ &\quad N_c^2(t)N_s^2(t-\tau) + N_s^2(t)N_s^2(t-\tau)\} \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} E\{N_c(t)\} &= E\{N_s(t)\} = 0 \\ E\{N_c^2(t)\} &= E\{N_s^2(t)\} = \sigma^2 \\ E\{N_c(t)N_s(t)\} &= R_{N_c N_s}(0) = 0 \end{aligned}$$

$$R_{N_c}(\tau) = R_{N_i}(\tau)$$

$$R_{N_c N_i}(\tau) = -R_{N_i N_c}(\tau)$$

并且零均值高斯变量的齐次阶混合矩为零,即

$$\begin{aligned} E\{N_c^2(t)N_i(t-\tau)\} &= E\{N_i^2(t)N_c(t-\tau)\} \\ &= E\{N_c^2(t)N_c(t-\tau)\} = E\{N_i^2(t)N_i(t-\tau)\} \\ &= E\{N_c(t)N_c^2(t-\tau)\} = E\{N_i(t)N_i^2(t-\tau)\} \\ &= E\{N_c(t)N_i^2(t-\tau)\} = E\{N_i(t)N_c^2(t-\tau)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

又因为

$$E\{X^2(t)Y^2(t-\tau)\} = R_X(0)R_Y(0) + 2R_{XY}^2(\tau)$$

式中  $X(t)$  和  $Y(t)$  为联合高斯过程。则有

$$E\{N_c^2(t)N_c^2(t-\tau)\} = \sigma^4 + 2R_{N_c}^2(\tau)$$

$$E\{N_i^2(t)N_i^2(t-\tau)\} = \sigma^4 + 2R_{N_i}^2(\tau)$$

$$E\{N_c^2(t)N_c^2(t-\tau)\} = \sigma^4 + 2R_{N_c N_i}^2(\tau)$$

$$E\{N_c^2(t)N_i^2(t-\tau)\} = \sigma^4 + 2R_{N_c N_i}^2(\tau)$$

将上述各式代入  $R_X(\tau)$ , 可得

$$R_X(\tau) = a^4 + 4a^2\sigma^2 + 4\sigma^4 + 4[a^2R_{N_c}(\tau) + R_{N_i}^2(\tau) + R_{N_c N_i}^2(\tau)]$$

例 4.27 设随机变量  $X$  和  $Y$  相互独立, 并且都服从  $\chi^2$  分布, 自由度分别为  $m$  及  $n$ 。

证明随机变量  $Z = X + Y$  也服从  $\chi^2$  分布, 并且自由度为  $m + n$ 。

证明 由积分卷积公式及随机变量和的性质得

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= p_X(z) * p_Y(z) \\ &= \int_0^z p_X(x) p_Y(z-x) dx \\ &= \int_0^z \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} (z-x)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{(z-x)}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{z}{2}} \int_0^z x^{\frac{m}{2}-1} (z-x)^{\frac{n}{2}-1} dx \end{aligned}$$

令  $x = zt$ , 当  $x=0$  时  $t=0$ , 当  $x=z$  时  $t=1$ , 从而有

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})} z^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} \int_0^1 t^{\frac{m}{2}-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} dt \\ &= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})} z^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})} z^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} \frac{\Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m+n}{2})} \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)} z^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}}$$

故  $Z=X+Y$  服从  $\chi^2$  分布, 并且自由度为  $m+n$ 。

### 4.3 练习题

4.1 随机变量  $X, Y$  的联合概率密度为

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right]$$

则有

$$P(X > 0, Y > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{ax} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dy dx$$

这里  $a = \rho(1-\rho^2)^{-1/2}$ , 又可导出

$$P(XY < 0) = 1 - 2P(X > 0, Y > 0) = \frac{1}{\pi} \arccos \rho$$

4.2 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是统计独立并且具有相同分布的一组随机变量, 令随机变量

$$Y = \sum_{k=1}^n X_k$$

证明: 若  $X_k$  服从高斯分布  $N(m_k, \sigma_k^2)$ , 则  $Y$  必服从高斯分布  $N(m_Y, \sigma_Y^2)$ , 并且有

$$m_Y = \sum_{k=1}^n m_k, \quad \sigma_Y^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$$

4.3 设  $V_X, V_Y$  和  $V_Z$  表示一个基本粒子沿  $X, Y$  和  $Z$  轴的速度分量, 粒子速度的大小为

$$V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2}$$

若各速度分量是统计独立的随机变量, 且均服从高斯分布  $N(0, \sigma^2)$ , 求  $V$  的概率密度  $p_V(v)$ 。

4.4 设  $X_1, X_2$  为相互统计独立、均值为零, 方差为 1 的高斯分布随机变量。假定

$$Y^T = [Y_1, Y_2] = \begin{bmatrix} X_1 & | & X_2 \\ X & - & | & X_2 \end{bmatrix}$$

证明:

- (1)  $Y_1$  和  $Y_2$  都是高斯分布的;
- (2)  $Y^T = [Y_1, Y_2]$  不是二维高斯分布。

4.5 设高斯矢量  $X$  的均值为零, 协方差阵为  $R_X$ , 证明随机变量  $Y = X^T Q X$  的特征函数为

$$\phi_Y(v) = \frac{1}{|I - j2vR_XQ|^{1/2}}$$

4.6 若  $X$  与  $Y$  相互独立且服从参数  $a_1 = a_2 = 0, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$  的高斯分布, 则随机变量  $\rho^2 = X^2 + Y^2$  与  $\Theta = X/Y$  相互独立。

4.7\* 若随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立且服从相同的分布, 且  $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$  与  $\Theta = X/Y$  相互独立, 则  $X$  和  $Y$  是高斯分布。

4.8 随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 且其和是高斯分布的。证明  $X_i (i=1, 2, \dots, n)$  每一个都具有高斯分布。

4.9\* 设  $p(x)$  是分布密度, 则

$$H[p(x)] = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x) dx$$

称为连续分布的熵。证明: 如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = 1$$

则  $H[p(x)] \leq \ln \sqrt{2\pi e}$ , 而且仅对高斯分布等号成立。

4.10 随机矢量  $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$  服从  $n$  元高斯分布  $N(m, B)$  的充要条件是它的任何一个线性组合  $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i = a^T X$  服从一元高斯分布

$$N\left(\sum_{i=1}^n a_i m_i, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j b_{ij}\right)$$

式中

$$a = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$$

$a_i$  为任意常数,  $b_{ij}$  为  $X_i, X_j$  的互协方差,  $m_i$  为  $X_i$  的均值。

4.11 若  $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$  服从  $n$  元高斯分布  $N(m, B)$ , 而  $C$  为任意  $m \times n$  矩阵, 则  $Y = CX$  服从  $m$  元高斯分布  $N(Cm, CBC^T)$ 。式中  $m$  为  $X$  的均值,  $B$  为协方差阵。

4.12 若高斯过程  $\{X(t), t \in T\}$  在  $T$  上均方可导, 则  $\{X'(t), t \in T\}$  也是高斯分布。

4.13 若高斯过程  $\{X(t), t \in T\}$  在  $T$  上均方可积, 则有

(1) 过程  $Y(t) = \int_a^t X(u) du$  (其中  $a, t \in T$ ) 是高斯过程;

(2) 过程  $Z(t) = \int_a^b X(u) h(t, u) du$  (其中  $a, b \in T$ ) 是高斯过程。

4.14 设  $X, Y$  为独立高斯  $N(0, \sigma^2)$  随机变量, 对随机过程  $X(t)$  求下列随机变量的数学期望:

$$X_1 = \max_{0 \leq t \leq 1} X(t), \quad X_2 = \int_0^1 X(t) dt, \quad X_3 = \int_0^1 X^2(t) dt$$

其中  $X(t)$  为

$$(1) X(t) = \begin{cases} X, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ Y, & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases};$$

(2)  $X(t) = Xt + Y$ 。

4.15 两个随机过程  $X(t), Y(t)$  分别如下:

$$X(t) = U \cos \omega t + V \sin \omega t$$

$$Y(t) = Z \cos(\omega t + \Theta)$$

其中  $\omega$  为正常数,  $U, V$  为独立高斯  $N(0, \sigma^2)$  变量,  $Z, \Theta$  为独立随机变量,  $\Theta$  服从  $[0, 2\pi]$  上均匀分布,  $Z$  服从瑞利分布, 其密度函数为

$$p(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

证明  $X(t), Y(t)$  具有完全相同的有限维分布。

4.16 设  $X(t)$  是实高斯分布平稳随机过程, 它的数学期望为 0, 定义

$$Y(t) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{X(t)X(t-\tau)}{|X(t)X(t-\tau)|} \right]$$

试证明

$$E[Y(t)] = \frac{1}{\pi} \arccos[r_X(\tau)]$$

其中

$$r_X(\tau) = \frac{\text{cov}[X(t), X(t-\tau)]}{\sigma_X^2}$$

4.17 设  $X(t)$  是均值为零的平稳高斯过程, 用

$$Y(t) = X^2(t)$$

定义一个新的随机过程, 求证

$$\dot{R}_Y(\tau) = R_X^2(0) + 2R_X^2(\tau)$$

4.18 设  $X(t) (t \geq 0)$  和  $P\{X(0)=0\}=1$  是维纳过程, 求证  $X(t)$  的协方差是

$$C(t_1, t_2) = 2D \min(t_1, t_2), \quad t_1, t_2 \geq 0$$

4.19 研究一维随机游动。游动者从原点出发, 每隔  $\Delta$  秒掷一枚硬币并走步长  $\lambda$ , 若硬币正面朝上向右走一步, 否则向左走一步。如果  $X(t)$  表示在走完  $n$  步时游动者从原点向右的位置, 求证

$$(1) E\{X(t=n\Delta)\}=0, E\{X^2(t=n\Delta)\}=t\lambda^2/\Delta;$$

(2) 在  $\Delta \rightarrow 0$  的极限情况下,  $\lambda$  像  $\Delta^{\frac{1}{2}}$  那样趋于零, 且  $n \rightarrow \infty$  时  $n\Delta \rightarrow$  常数, 求证这个极限过程是维纳过程。

4.20 设  $\{W(t), t \geq 0\}$  为维纳过程, 求下列随机过程的协方差函数:

(1)  $W(t+a) - W(a)$ , 其中  $a$  为常数, 且  $a > 0$ ;

(2)  $W(t+a) - W(t)$ , 其中  $a$  为常数, 且  $a > 0$ ;

$$(3) \int_0^t W(s) ds;$$

(4)  $W^2(t)$ 。

4.21 设  $\{W(t), t \geq 0\}$  为维纳过程, 证明

$$W_1(t) = \begin{cases} tW\left(\frac{1}{t}\right), & t \geq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

也是一个维纳过程。

4.22 求 $\chi^2$ 分布随机变量的均值和方差。

4.23 求非中心 $\chi^2$ 分布随机变量的均值和方差。

4.24 证明  $n$  个自由度的中心 $\chi^2$ 变量的第  $m$  阶中心矩为

$$2^m \left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdots \left(\frac{n}{2} + m - 1\right)$$

## 泊松随机过程

## 5.1 内容提要

泊松过程是一类直观意义很强,而且极为重要的随机过程,其应用范围十分广泛。在公共事业、生物学、物理学、通信工程等领域的许多问题都可用泊松过程物理模拟。

## 5.1.1 泊松计数过程

## 1. 计数过程

在时间 $[0, \infty)$ 内出现事件  $A$  的总数所组成的过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为计数过程。计数过程一般满足下列条件:

- (1)  $N(t)$  是一个正整数;
- (2)  $N(0) \stackrel{\text{def}}{=} 0$ ;
- (3) 如果有两个时刻  $s, t$ , 且  $s < t$ , 则  $N(s) \leq N(t)$ ;
- (4) 对于  $s < t$ ,  $N(t) - N(s)$  代表在时间间隔  $[s, t]$  内出现事件  $A$  的次数。

## 2. 泊松计数过程

定义 设有一随机计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ , 其状态仅取非负整数值, 并满足下列条件:

- (1) 零初值性,  $P\{N(0)=0\}=1$ ;
- (2) 平稳性, 对于任意的  $t \geq s \geq 0, \Delta t > 0$ , 都有
 
$$P\{[N(t) - N(s)] = k\} = P\{[N(t + \Delta t) - N(s + \Delta t)] = k\}, \quad k \geq 0$$
- (3) 对于任意的正整数  $n$  及任何非负实数  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , 都有
 
$$[N(t_1) - N(t_0)], [N(t_2) - N(t_1)], \dots, [N(t_n) - N(t_{n-1})]$$

相互统计独立;

- (4) 单跳跃, 即

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{P\{[N(t + \Delta t) - N(t)] = k\}}{\Delta t} = 0, \quad t \geq 0$$

- (5) 随机性, 令

$$P\{[N(t + \Delta t) - N(t)] = 0\} = p, \quad 0 < p < 1$$

且

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} P\{[N(t+\Delta t) - N(t)] = k\} = 1, \quad t, \Delta t \geq 0$$

则称该随机计数过程为泊松计数过程。

若随机过程  $\{N(t), t \geq 0\}$  为泊松计数过程, 则有

$$p_k(t) = P\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

泊松计数过程的统计特征如下。

(1) 均值

$$E[N(t_0 + t, t_0)] = \lambda t$$

(2) 均方值

$$E[N^2(t_0 + t, t_0)] = (\lambda t)^2 + \lambda t$$

(3) 方差

$$D[N(t_0 + t, t_0)] = \lambda t$$

(4) 相关函数

$$R_N(t_1, t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min(t_1, t_2)$$

当  $t_1 = t_2 = t$  时, 有

$$R_N(t, t) = \lambda t(1 + \lambda t)$$

### 3. 泊松脉冲列

泊松脉冲列定义为

$$X(t) = \frac{d}{dt} N(t) = \sum_i \delta(t - t_i)$$

(1) 均值

$$E[X(t)] = \frac{d}{dt} E[N(t)] = \lambda$$

(2) 相关函数

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_N(t_1, t_2) \\ &= \lambda^2, \quad t_1 \neq t_2 \end{aligned}$$

## 5.1.2 到达时间与到达时间间隔

### 1. 到达时间

观测区间中出现第  $k$  个事件的发生时刻  $t_k$  称为第  $k$  个事件的到达时间。显然, 到达时间是随机发生的, 它是一个随机变量。

现在令  $T_k$  表示计数随机过程中第  $k$  个事件的到达时间, 这是一个随机变量, 于是有

$$F_{T_k}(t) = 1 - F_{N(t)}(k-1), \quad k = 1, 2, \dots$$

如果  $\{N(t), t \in [0, \infty)\}$  是泊松计数过程, 则有

$$F_{T_k}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

相应的概率密度为

$$f_{T_k}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

上述概率分布称为伽马分布。

在这种情况下,有

$$E[T_k] = \frac{k}{\lambda}$$

$$\text{var}[T_k] = \frac{k}{\lambda^2}$$

其特征函数为

$$\phi_{T_k}(v) = \frac{\lambda^k}{(\lambda - jv)^k}$$

## 2. 到达时间间隔

设  $\{N(t), t \in [0, \infty)\}$  是一个具有到达时间为  $\{T_k, k=1, 2, \dots\}$  的计数过程, 称间隔

$$Z_1 \stackrel{\text{def}}{=} T_1$$

$$Z_k \stackrel{\text{def}}{=} T_k - T_{k-1}, \quad k=2, 3, 4, \dots$$

为计数过程的到达时间间隔。到达时间间隔是一个离散参数、连续随机变量的随机过程  $\{Z_k, k=1, 2, \dots\}$ 。显然有

$$F_{Z_k}(z) = 1 - P[N_{t_{k-1}+z} - N_{t_{k-1}} = 0]$$

如果计数过程具有平稳增量, 则对于一切  $k$  都有

$$F_{Z_k}(z) = 1 - P[N_z = 0]$$

进一步, 若给定的计数过程是泊松计数过程, 则有

$$F_{Z_k}(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda z}, & z \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

相应的概率密度为

$$f_{Z_k}(z) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda z}, & z \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

在这种情况下, 有

$$E[Z_k] = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[T_k] = kE[Z_k], \quad k=1, 2, 3, \dots$$

## 3. 到达时间的条件分布

设  $\{N(t), 0 \leq t < \infty\}$  是一泊松计数过程, 并假定  $N(t) = k$ , 亦即在时间  $t$  内发生  $k$  个

事件。这些事件的到达时间是相互统计独立的,而且在时间间隔 $(0, t]$ 中均匀分布。此事件为

$$f_{U_i}(u_i | N(t) = k) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & 0 < u_i \leq t, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, k$$

### 5.1.3 更新计数过程

设 $\{N(t), t \in [0, \infty)\}$ 是一计数过程,如果这个计数过程的时间间隔是相互统计独立的随机变量,并且具有相同分布函数,于是称这类过程为更新计数过程。

更新计数过程的更新函数 $m(t)$ 是该过程的期望值,即

$$m(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[N(t)]$$

其导数为

$$\lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} m(t)$$

称为更新过程的更新密度。于是有

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{T_k}(t)$$

如果各阶导数存在,则有

$$\lambda(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{T_k}(t)$$

根据定义,可以得到更新密度的傅里叶变换

$$\Lambda(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t) e^{ivt} dt$$

于是有

$$\Lambda(v) = \frac{\phi_z(v)}{1 - \phi_z(v)}$$

式中 $\phi_z(v)$ 是计数过程时间间隔的普通特征函数。

### 5.1.4 非齐次泊松过程

若计数随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足下列条件:

- (1) 零初值性,  $N(0) = 0$ ;
- (2)  $\{N(t), t \geq 0\}$ 是独立增量过程;
- (3) 单跳跃

$$P\{[N(t + \Delta t) - N(t)] = 1\} = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

和

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{P\{[N(t + \Delta t) - N(t)] = k\}}{\Delta t} = 0, \quad t \geq 0$$

- (4) 随机性, 令

$$P\{[N(t + \Delta t) - N(t)] = 0\} = p, \quad 0 < p < 1$$



且

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{[N(t+\Delta t) - N(t)] = k\} = 1$$

则称  $\{N(t), t \geq 0\}$  是非齐次泊松过程。

若  $\{N(t), t \geq 0\}$  是非齐次泊松过程, 则在时间间隔  $[t_0, t_0+t]$  内出现事件  $A$  为  $k$  次的概率为

$$\begin{aligned} P\{[N(t_0+t) - N(t_0)] = k\} \\ = \frac{[m(t_0+t) - m(t_0)]^k}{k!} \exp\{-[m(t_0+t) - m(t_0)]\} \end{aligned}$$

式中

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$$

非齐次泊松过程的均值和方差分别为

$$E[N(t)] = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau$$

和

$$\text{var}[N(t)] = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau$$

### 5.1.5 复合泊松过程

设  $\{N(t), t \geq 0\}$  是一个强度为  $\lambda$  的泊松过程,  $\{Y_n, n=1, 2, \dots\}$  是一串相互独立、且有相同分布的随机变量, 且  $\{N(t)\}$  与  $\{Y_n\}$  亦相互统计独立, 令

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n, \quad t \geq 0$$

则称  $\{X(t), t \geq 0\}$  为复合泊松过程。

复合泊松过程统计特征如下:

(1) 均值

$$E[X(t)] = \lambda t E[Y]$$

(2) 均方值

$$E[X^2(t)] = (\lambda t)^2 (E[Y])^2 + \lambda t E[Y^2]$$

(3) 方差

$$D[X(t)] = \lambda t E[Y^2]$$

### 5.1.6 过滤的泊松过程

设随机过程  $\{X(t), t \in [0, \infty)\}$ , 若有

$$X(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} h(t - U_j)$$

式中  $h(t)$  为线性时不变系统的冲激响应。随机变量  $U_j$  是在时间间隔  $(0, t]$  内发生的事件的无序到达时刻。这样一类随机过程称为过滤的泊松过程。

过滤的泊松过程的均值和方差分别为

$$E[X(t)] = \lambda \int_0^t h(u) du$$

和

$$\text{var}[X(t)] = \lambda \int_0^t h^2(u) du$$

随机变量  $X_t$  相应的特征函数为

$$\phi_{X_t}(v) = \exp\left[\lambda \int_0^t (e^{ivh(u)} - 1) du\right]$$

## 5.2 例题

例 5.1 负指数分布是惟一的无记忆过程。称取非负实值的随机变量  $T$  是无记忆的, 如果对于任意正数  $x$  和  $y$  都有

$$P\{T \geq x+y | T \geq x\} = P\{T \geq y\}$$

试证取非负实值的随机变量  $T$  是无记忆的充分必要条件是  $T$  服从负指数分布, 即

$$P\{T \geq x\} = \begin{cases} e^{-\mu x} & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

证明 由已知条件

$$P\{T \geq x+y | T \geq x\} = P\{T \geq y\}$$

两边同乘以  $P\{T \geq x\}$ , 可得

$$P\{T \geq x+y, T \geq x\} = P\{T \geq x\}P\{T \geq y\}$$

这里, 因为  $x, y$  为任意正数, 故事件  $\{T \geq x+y\}$  与事件  $\{T \geq x\}$  有下述关系:

$$\{T \geq x+y\} \subset \{T \geq x\}$$

所以有

$$P\{T \geq x+y\} = P\{T \geq x\}P\{T \geq y\}$$

令  $y=0$ , 则有

$$P\{T \geq x\} = P\{T \geq x\}P\{T \geq 0\}$$

因为对于一切  $x$  (正数) 上式均成立, 故  $P\{T \geq 0\} = 1$ 。

先求解  $P\{T \geq x\}$ 。因为

$$\begin{aligned} P'\{T \geq x\} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{T \geq x + \Delta x\} - P\{T \geq x\}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{T \geq x\}P\{T \geq \Delta x\} - P\{T \geq x\}}{\Delta x} \\ &= P\{T \geq x\} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{T \geq \Delta x\} - P\{T \geq 0\}}{\Delta x} \\ &= P\{T \geq x\}P'\{T \geq 0\} = cP\{T \geq x\} \end{aligned}$$

所以, 解此微分方程后可得

$$P\{T \geq x\} = e^{cx}, \quad x \geq 0$$

故

$$P\{T \geq x\} = \begin{cases} e^{-\mu x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

其中,  $\mu = -c = -P'\{T \geq 0\}$ 。

**作业例 5.2** 设  $\{V(t), t \geq 0\}$  为一个独立增量过程, 且  $X(0) = 0$ 。若用  $F(t)$  表示  $X(t)$  的方差函数

$$F(t) = E\{[X(t) - E\{X(t)\}]^2\}$$

(1) 证明  $X(t)$  的协方差函数  $C(t, s)$  满足

$$\begin{aligned} C(t, s) &= E\{[X(t) - E\{X(t)\}][X(s) - E\{X(s)\}]\} \\ &= F[\min(t, s)] \end{aligned}$$

(2) 对应于泊松过程和维纳过程分别求出相应的  $F(t)$  和  $C(t, s)$ 。

证明 (1) 根据定义, 设  $E\{X(t)\} = m(t)$ , 若  $t < s$ , 则

$$\begin{aligned} C(t, s) &= E\{[X(t) - m(t)][X(s) - m(s)]\} \\ &= E\{[X(t) - m(t)][X(s) - m(s) + X(t) - m(t) - X(t) + m(t)]\} \\ &= E\{[X(t) - m(t)]^2\} + E\{[X(t) - m(t)][X(s) - m(s) - X(t) + m(t)]\} \\ &= F(t) + E\{[X(t) - m(t)]\}E\{X(s) - m(s) - X(t) + m(t)\} \\ &= F(t) \end{aligned}$$

若  $t > s$ , 同理可得

$$C(t, s) = F(s)$$

故

$$C(t, s) = F[\min(t, s)]$$

(2) 对于泊松过程  $X(t)$ , 已知

$$P\{X(t) = k\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$E\{X(t)\} = \lambda t$$

$$E\{X^2(t)\} = \lambda t + (\lambda t)^2$$

故可求得方差函数为

$$F(t) = \lambda t$$

又由第(1)题可得

$$C(t, s) = \lambda \min(t, s)$$

对于维纳过程  $X(t)$ , 已知  $E\{X(t)\} = 0$ ,  $E\{X^2(t)\} = \sigma_X^2 t$ , 故方差函数为

$$F(t) = \sigma_X^2 t$$

于是可得

$$C(t, s) = \sigma_X^2 \min(t, s)$$

**例 5.3** 在时间  $t$  内向电话总机呼唤  $k$  次的概率为

$$p_t(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

其中  $\lambda > 0$  为常数。如果在任意两相邻的时间间隔内的呼唤次数是相互独立的, 求在时间  $2t$  内呼唤  $n$  次的概率  $p_{2t}(n)$ 。

解 设在时间  $2t$  内呼唤  $n$  次用  $A$  表示, 在第一时间间隔内呼唤  $k$  次用  $H_k$  表示, 有  $p(H_k) = p_t(k)$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ , 则第二时间间隔内有  $p(A|H_k) = p_t(n-k)$ , 由乘法公式得

$$\begin{aligned} p_{2t}(n) &= \sum_{k=0}^n p_t(k) p_t(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-2\lambda} \lambda^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \\ &= e^{-2\lambda} \lambda^n \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n!} \\ &= \frac{\lambda^n}{n!} e^{-2\lambda} 2^n \\ &= \frac{(2\lambda)^n}{n!} e^{-2\lambda} \end{aligned}$$

例 5.4 设随机变量  $X, Y$  相互独立, 且分别服从参数为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的泊松分布. 试证

$$p\{X = k | X + Y = n\} = C_n^k \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left( 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k}$$

证明 由卷积公式及独立性得

$$\begin{aligned} p\{X + Y = n\} &= \sum_{i=0}^n P\{X = i, Y = n - i\} \\ &= \sum_{i=0}^n P\{X = i\} P\{Y = n - i\} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-i}}{(n-i)!} e^{-\lambda_2} \\ &= \frac{1}{n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \lambda_1^i \lambda_2^{n-i} \\ &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \end{aligned}$$

又由概率乘法公式可得

$$\begin{aligned} p\{X = k | X + Y = n\} &= \frac{P\{X = k, X + Y = n\}}{P\{X + Y = n\}} \\ &= \frac{P\{X = k, Y = n - k\}}{P\{X + Y = n\}} \\ &= \frac{P\{X = k\} P\{Y = n - k\}}{P\{X + Y = n\}} \\ &= \frac{\frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}} \\ &= C_n^k \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left( 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k} \end{aligned}$$

例 5.5 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是统计独立且具有相同分布的一组随机变量, 令随机变量

$$Y = \sum_{k=1}^n X_k$$

证明: 若  $X_k$  服从参数为  $\lambda_k$  的泊松分布, 则  $Y$  必服从参数为  $\lambda_Y$  的泊松分布, 并且有

$$\lambda_Y = \sum_{k=1}^n \lambda_k$$

证明 若  $X_k$  服从参数为  $\lambda_k$  的泊松分布, 则特征函数为

$$\phi_{X_k}(v) = \exp[\lambda_k(e^{iv} - 1)]$$

$$\phi_{X_k}(v) = e^{\lambda_k(e^{iv} - 1)}$$

又由于  $X_1, X_2, \dots, X_n$  统计独立, 因此随机变量  $Y$  的特征函数为

$$\begin{aligned} \phi_Y(v) &= \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(v) \\ &= \exp\left[\sum_{k=1}^n \lambda_k(e^{iv} - 1)\right] \\ &= \exp\left[\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)(e^{iv} - 1)\right] \\ &= \exp\{\lambda_Y(e^{iv} - 1)\} \end{aligned}$$

其中,  $\lambda_Y = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ . 因此可得  $Y$  必服从参数为  $\lambda_Y$  的泊松分布。

例 5.6 考虑电子管中的电子发射问题, 设单位时间内到达阳极的电子数目  $N$  服从泊松分布

$$P\{N = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

每个电子携带的能量构成一个随机变量序列  $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$ , 已知  $\{X_k\}$  与  $N$  统计独立,  $\{X_k\}$  之间互不相关并且具有相同的均值和方差

$$E\{X_k\} = \eta, \quad D(X_k) = \sigma^2$$

单位时间内阳极接收到的能量为  $S = \sum_{k=1}^N X_k$ . 求  $S$  的均值  $E(S)$  和方差  $D(S)$ .

解 利用恒等式

$$E(S) = E\{E[S | N]\}$$

则有

$$E[S | N] = E\left[\sum_{k=1}^N X_k | N\right] = \sum_{k=1}^N E[X_k | N]$$

由于已知  $\{X_k\}$  与  $N$  统计独立, 所以

$$E[X_k | N] = E(X_k) = \eta$$

$$E[S | N] = N\eta$$

又已知  $N$  服从泊松分布, 即有

$$E(N) = \lambda$$

故有

$$E(S) = E\{E[S | N]\} = E[N\eta] = \lambda\eta$$

同理可得

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E\{E[S^2 | N]\} \\ E[S^2 | N] &= E\left\{\sum_{k=1}^N X_k \sum_{m=1}^N X_m \mid N\right\} \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N E[X_k X_m | N] \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N E[X_k X_m] \end{aligned}$$

式中有  $N$  项  $k=m$ , 相应的

$$\begin{aligned} E(X_k^2) &= D(X_k) + E^2(X_k) \\ &= \sigma^2 + \eta^2 \end{aligned}$$

剩下的  $N^2 - N$  项  $k \neq m$ 。由于已知  $\{X_k\}$  互不相关, 故

$$\begin{aligned} E[X_k X_m] &= E(X_k) E(X_m) = \eta^2 \\ E[S^2 | N] &= N(\sigma^2 + \eta^2) + (N^2 - N)\eta^2 \\ &= \sigma^2 N + \eta^2 N^2 \end{aligned}$$

又由于  $N$  服从泊松分布, 所以

$$\begin{aligned} E(N) &= D(N) = \lambda \\ E(N^2) &= D(N) + E^2(N) = \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

于是有

$$E[S^2] = E\{E[S^2 | N]\} = E\{\sigma^2 N + \eta^2 N^2\} = \sigma^2 \lambda + \eta^2 (\lambda^2 + \lambda)$$

所以

$$\begin{aligned} D(S) &= E(S^2) - E^2(S) \\ &= \sigma^2 \lambda + \eta^2 (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 \eta^2 \\ &= \lambda(\sigma^2 + \eta^2) \end{aligned}$$

作业

例 5.7 设  $X(t)$  是一个参数为  $\lambda$  的泊松过程。

(1) 证明  $X(t)$  的一阶特征函数为

$$\phi(v) = E\{e^{jvX(t)}\} = e^{\lambda t(e^{jv}-1)}$$

(2) 若  $t_2 > t_1$ ,  $m$  和  $n$  是两个整数, 证明

$$P\{X(t_1) = m, X(t_2) = m+n\} = e^{-\lambda t_2} \lambda^{m+n} \frac{(t_2 - t_1)^n t_1^m}{m! n!}$$

证明 (1) 由泊松过程的定义可知

$$P\{X(t) = k\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

故其一阶特征函数为

$$\begin{aligned} \phi(v) &= E\{e^{jvX(t)}\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{jvk} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{jv} \lambda t)^k}{k!} \end{aligned}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{jv}}$$

$$= e^{\lambda(e^{jv}-1)}$$

(2) 由于泊松过程是独立增量过程, 因此有

$$\begin{aligned} P\{X(t_1) = m, X(t_2) = m+n\} \\ &= P\{X(t_1) = m, X(t_2) - X(t_1) = n\} \\ &= P\{X(t_1) = m\} P\{X(t_2) - X(t_1) = n\} \\ &= e^{-\lambda_1} \frac{(\lambda_1 t_1)^m}{m!} e^{-\lambda(t_2-t_1)} \frac{\lambda^n (t_2-t_1)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda_2} \lambda^{m+n} \frac{(t_2-t_1)^n t_1^m}{m! n!} \end{aligned}$$

**例 5.8** 设  $X_1(t)$  和  $X_2(t)$  是两个参数为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的统计独立泊松过程。证明:

(1)  $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$  是具有参数为  $\lambda_1 + \lambda_2$  的泊松计数过程;

(2)  $X(t) = X_1(t) - X_2(t)$  不是泊松计数过程。

**证明** (1) 根据特征函数的定义, 容易求得泊松过程  $X_1(t)$  和  $X_2(t)$  的特征函数分别为

$$\phi_{X_1}(v) = E\{e^{jvX_1(t)}\} = \exp[\lambda_1 t(e^{jv} - 1)]$$

和

$$\phi_{X_2}(v) = E\{e^{jvX_2(t)}\} = \exp[\lambda_2 t(e^{jv} - 1)]$$

由于过程  $X_1(t)$  和  $X_2(t)$  统计独立, 则有

$$\begin{aligned} \phi_X(v) &= \phi_{X_1}(v) \phi_{X_2}(v) \\ &= \exp[(\lambda_1 + \lambda_2)t(e^{jv} - 1)] \end{aligned}$$

因此可知  $X(t)$  服从泊松分布, 参数为  $\lambda_1 + \lambda_2$ 。

(2) 根据独立性及特征函数的性质, 有

$$\begin{aligned} \phi_X(v) &= E\{e^{jvX(t)}\} \\ &= E\{e^{jv[X_1(t) - X_2(t)]}\} \\ &= E\{e^{jvX_1(t)}\} E\{e^{-jvX_2(t)}\} \\ &= \phi_{X_1}(v) \phi_{X_2}(-v) \\ &= \exp[\lambda_1 t(e^{jv} - 1)] \exp[\lambda_2 t(e^{-jv} - 1)] \\ &= \exp[\lambda_1 t e^{jv} + \lambda_2 t e^{-jv} - (\lambda_1 + \lambda_2)t] \end{aligned}$$

因此, 它不是泊松过程的特征函数, 故  $X(t)$  不是泊松过程。

**例 5.9** 设  $X(t)$  和  $Y(t)$  ( $0 \leq t < \infty$ ) 是分别具有比率  $\lambda_X$  和  $\lambda_Y$  的独立泊松计数过程。证明在过程  $X(t)$  的任意两个相邻事件之间的时间间隔内, 过程  $Y(t)$  恰好有  $k$  个事件发生的概率为

$$P = \frac{\lambda_X}{\lambda_X + \lambda_Y} \left( \frac{\lambda_Y}{\lambda_X + \lambda_Y} \right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**证明** 假定  $\tau$  是泊松计数过程  $X(t)$  的两个相邻事件之间的时间间隔, 根据题意, 由于  $X(t)$  和  $Y(t)$  统计独立, 则有

$$P\{Y(t+\tau) - Y(t) = k\} = \frac{(\lambda_Y \tau)^k}{k!} e^{-\lambda_Y \tau}$$

不难理解,过程  $X(t)$  的不同到达时间间隔有下面的概率密度函数:

$$f_\tau(\tau) = \begin{cases} \lambda_X e^{-\lambda_X \tau}, & \tau \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

并且知道过程  $X(t)$  是泊松计数过程,故过程  $Y(t)$  恰好有  $k$  个事件发生的概率为

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\infty \frac{(\lambda_Y \tau)^k}{k!} e^{-\lambda_Y \tau} \lambda_X e^{-\lambda_X \tau} d\tau \\ &= \frac{\lambda_X \lambda_Y^k}{k!} \int_0^\infty \tau^k e^{-(\lambda_X + \lambda_Y)\tau} d\tau \\ &= \frac{\lambda_X \lambda_Y^k}{k!} \frac{k!}{(\lambda_X + \lambda_Y)^{k+1}} \\ &= \frac{\lambda_X}{\lambda_X + \lambda_Y} \left( \frac{\lambda_Y}{\lambda_X + \lambda_Y} \right)^k \end{aligned}$$

例 5.10 设相互独立且具有相同分布的随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的分布函数为

$$P\{X_i \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

又设  $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ,  $Y_n$  的概率密度函数为  $f(y)$ , 求证

$$f(y) = e^{-\lambda y} \frac{\lambda^n y^{n-1}}{(n-1)!}, \quad y > 0$$

证明 因为

$$P\{X_i \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

则其概率密度函数为

$$P_{X_i}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

由于随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  统计独立,且具有相同的分布。容易求得  $X_i$  的特征函数为

$$\phi_{X_i}(v) = \frac{\lambda}{\lambda - jv}$$

由特征函数的性质,可得  $Y_n$  的特征函数为

$$\phi_Y(v) = \prod_{i=1}^n \phi_{X_i}(v) = \left( \frac{\lambda}{\lambda - jv} \right)^n$$

故可得

$$f(y) = e^{-\lambda y} \frac{\lambda^n y^{n-1}}{(n-1)!}$$

例 5.11 乘客按比率为  $\lambda_A$  的泊松过程登上飞机 A (从  $t=0$  开始), 当飞机 A 有  $N_A$  个乘客时就起飞。与此独立的事件为乘客以比率为  $\lambda_B$  的泊松过程登上飞机 B (从  $t=0$  开始), 当飞机 B 有  $N_B$  个乘客时就起飞。

(1) 写出飞机 A 在飞机 B 之后离开的概率表示式;

(2) 对于  $N_A = N_B$  和  $\lambda_A = \lambda_B$  的情况下, 计算第(1)题的概率表示式。

解 (1) 令  $T_A$  表示乘飞机 A 的第  $N_A$  个乘客的到达时间,  $T_B$  表示乘飞机 B 的第



$$\begin{aligned}
 &= \frac{P\{N_{\tau_1} = k_1, N_{\tau_2} = k_2, \dots, N_{\tau_M} = k_M, N_t = k\}}{P\{N_t = k\}} \\
 &= \frac{P\{N_{\tau_1} = k_1, N_{\tau_2} = k_2, \dots, N_{\tau_M} = k_M\}}{P\{N_t = k\}}
 \end{aligned}$$

因为泊松计数过程具有平稳独立增量,故

$$\begin{aligned}
 &P\{N_{\tau_1} = k_1, N_{\tau_2} = k_2, \dots, N_{\tau_M} = k_M\} \\
 &= \prod_{m=1}^M P\{N_{\tau_m} = k_m\}
 \end{aligned}$$

此外,由于在任一区间发生的事件数均具有泊松概率分布,于是得

$$P\{N_{\tau_m} = k_m\} = \frac{e^{-\lambda \tau_m} (\lambda \tau_m)^{k_m}}{k_m!}$$

和

$$P\{N_t = k\} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$$

将所得结果代入条件概率表示式,于是有

$$\begin{aligned}
 &P\{N_{\tau_1} = k_1, N_{\tau_2} = k_2, \dots, N_{\tau_M} = k_M \mid N_t = k\} \\
 &= \frac{\prod_{m=1}^M \frac{e^{-\lambda \tau_m} (\lambda \tau_m)^{k_m}}{k_m!}}{\frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}} \\
 &= \frac{k!}{t^k} \prod_{m=1}^M \frac{(\tau_m)^{k_m}}{k_m!}
 \end{aligned}$$

若将划分做得足够细,使得  $M > k$ , 且任一单个子间隔中发生的事件不多于一个,那么这种情况下  $k$  个子间隔中均各有一个事件发生。于是有

$$\tau_m^{k_m} = \tau_m^1 = \tau_m, \quad k_m! = 1$$

而剩下的  $M-k$  个子间隔中的每一个均不发生事件  $A$ , 在这些  $M-k$  个间隔中,有

$$(\tau_m)^{k_m} = (\tau_m)^0 = 1, \quad k_m! = 0! = 1$$

于是条件概率可改写为

$$\begin{aligned}
 &P\{t_1 \in \delta(\tau_1), t_2 \in \delta(\tau_2), \dots, t_k \in \delta(\tau_k) \mid N_t = k\} \\
 &= \frac{k!}{t^k} \prod_{j=1}^k \tau_j
 \end{aligned}$$

例 5.13 假定一给定的更新计数过程的不同到达时刻是指数分布的

$$F_Z(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- (1) 确定相应的特征函数  $\phi_Z(v)$ ;
- (2) 确定这一过程的第  $j$  次到达时间的特征函数  $\phi_{T_j}(v)$ ;
- (3) 确定第  $j$  次到达时间所对应的概率分布函数;
- (4) 证明这个过程的更新计数随机变量  $N_t$  的概率分布函数为

$N_B$  个乘客的到达时间, 根据题意, 其飞机 A 在飞机 B 之后离开的概率为  $P\{T_A > T_B\}$ 。

对于简单的泊松计数过程  $X(t)$ , 到达时间的概率密度函数为

$$f_{X_k}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

因此有

$$f_{T_A}(t) = \begin{cases} \lambda_A e^{-\lambda_A t} \frac{(\lambda_A t)^{N_A-1}}{(N_A-1)!}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

和

$$f_{T_B}(t) = \begin{cases} \lambda_B e^{-\lambda_B t} \frac{(\lambda_B t)^{N_B-1}}{(N_B-1)!}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

由于  $T_A$  和  $T_B$  是统计独立的, 故有

$$\begin{aligned} P\{T_A > T_B\} &= \int_0^\infty f_{T_B}(t_B) dt_B \int_{t_B}^\infty f_{T_A}(t_A) dt_A \\ &= \int_0^\infty \int_{t_B}^\infty \lambda_A \lambda_B e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t} \frac{(\lambda_A t)^{N_A-1} (\lambda_B t)^{N_B-1}}{(N_A-1)! (N_B-1)!} dt_A dt_B \end{aligned}$$

(2) 如果  $f_{T_A}(t) = f_{T_B}(t)$ , 则被积函数关于  $45^\circ$  线对称, 于是有

$$P\{T_A > T_B\} = \frac{1}{2}$$

例 5.12 如果一个泊松过程  $\{N(t), t \geq 0\}$ , 已知在  $[0, t]$  内出现  $k$  个事件 ( $k \geq 1$ ), 则  $k$  个事件 A 的到达时间  $\{S'_1, S'_2, \dots, S'_k\}$  是一组  $k$  维、独立、同分布的随机变量所组成的顺序统计量, 且每一随机变量均匀分布于  $[0, t]$  内。假定已知在  $[0, t]$  内恰好有  $k$  个事件 A 发生, 换言之, 亦即泊松过程  $N_t = k$ 。求这些事件发生的时刻的条件概率。

解 首先, 用  $t_0, t_1, \dots, t_M$  将  $[0, t]$  划分成相邻的  $M$  个子时间间隔, 并令  $t_0 = 0$  且  $t_M = t$ , 定义

$$\tau_m = t_m - t_{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

于是有

$$t = \sum_{m=1}^M \tau_m$$

需要指出的是, 在事件 A 发生的时间  $t_k$  和划分时刻  $t_m$  之间不存在任何先验关系。令

$$\delta(\tau_m) = (t_{m-1}, t_m)$$

在  $\delta(\tau_m)$  中发生的事件数用  $k_m$  表示, 于是有

$$k = \sum_{m=1}^M k_m$$

因此不难得到

$$P\{N_{t_1} = k_1, N_{t_2} = k_2, \dots, N_{t_M} = k_M \mid N_t = k\}$$

$$F_{N_t}(k) = \sum_{j=1}^k \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^j}{j!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

即证明  $N_t$  具有泊松概率分布。

解 (1) 根据特征函数的定义, 可得

$$\begin{aligned} \phi_Z(v) &= E\{e^{jvZ}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvZ} dF_Z(t) \\ &= \int_0^{\infty} e^{jvZ} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{\lambda - jv} \end{aligned}$$

(2) 根据第  $j$  次到达时间的定义, 有

$$\phi_{T_j}(v) = [\phi_Z(v)]^j = \left( \frac{\lambda}{\lambda - jv} \right)^j$$

(3) 由于第  $j$  次到达时间对应的概率密度函数是特征函数  $\phi_{T_j}(v)$  的逆傅里叶变换, 故有

$$f_{T_j}(t) = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^j t^{j-1}}{(j-1)!}$$

其分布函数为

$$F_{T_j}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

(4) 利用等价事件的概率分布函数

$$F_{X_k}(t) = 1 - F_{T_{k+1}}(t)$$

则有

$$\begin{aligned} F_{N_t}(j) &= 1 - F_{T_{j+1}}(t) \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^j \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

即  $N_t$  有一个泊松概率分布。

例 5.14 设  $X(t)$  是一个泊松过程, 按以下方式构造一个新的随机过程  $Y(t)$ :

作图

$$Y(0) = 0, \quad Y(t) = \sum_{n=1}^{X(t)} Z_n$$

其中  $Z_n$  为独立同分布的一组随机变量, 且与  $X(t)$  相互独立, 已知  $Z_n$  的特征函数为  $\phi_Z(v)$ 。

(1) 求  $Y(t)$  的一阶特征函数  $\phi_Y(v)$ ;

(2) 求  $E\{Y(t)\}$ ,  $E\{Y^2(t)\}$  和  $\text{var}\{Y(t)\}$ 。

解 (1) 利用恒等式

$$E(Y) = E\{E[Y | X]\}$$

根据特征函数的定义, 有

$$\begin{aligned} \phi_Y(v) &= E\{e^{jvY(t)}\} \\ &= E\{E[e^{jvY(t)} | X(t) = k]\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} E\{e^{jvY(t)} | X(t) = k\} P\{X(t) = k\}$$

其中

$$E\{e^{jvY(t)} | X(t) = k\} = E\left\{\exp\left(\sum_{n=1}^k Z_n\right)\right\} = \prod_{n=1}^k E\{e^{jvZ_n}\} = [\phi_Z(v)]^k$$

$$P\{X(t) = k\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

故有

$$\begin{aligned}\phi_Y(v) &= \sum_{k=0}^{\infty} [\phi_Z(v)]^k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [\phi_Z(v) \lambda t]^k \\ &= e^{-\lambda t} e^{\phi_Z(v) \lambda t} \\ &= e^{-\lambda t [\phi_Z(v) - 1]}\end{aligned}$$

(2) 由特征函数与矩的关系, 可得数学期望为

$$\begin{aligned}E\{Y(t)\} &= -j \left. \frac{d\phi_Y(v)}{dv} \right|_{v=0} \\ &= -j \lambda t \left. \frac{d\phi_Z(v)}{dv} e^{\lambda t [\phi_Z(v) - 1]} \right|_{v=0}\end{aligned}$$

由于

$$-j \left. \frac{d\phi_Z(v)}{dv} \right|_{v=0} = E(Z), \quad \phi_Z(0) = 1$$

故有

$$E\{Y(t)\} = \lambda t E(Z)$$

其均方值为

$$\begin{aligned}E\{Y^2(t)\} &= - \left. \frac{d^2 \phi_Y(v)}{dv^2} \right|_{v=0} \\ &= - \left\{ \left( \lambda t \frac{d\phi_Z(v)}{dv} \right)^2 e^{\lambda t [\phi_Z(v) - 1]} + \lambda t \frac{d^2 \phi_Z(v)}{dv^2} e^{\lambda t [\phi_Z(v) - 1]} \right\} \Big|_{v=0} \\ &= (\lambda t)^2 E^2(Z) + \lambda t E(Z^2)\end{aligned}$$

于是其方差为

$$\text{var}\{Y(t)\} = E\{Y^2(t)\} - E^2[Y(t)] = \lambda t E(Z^2)$$

例 5.15 定义复合泊松过程为

$$\left\{ Y_t = \sum_{n=1}^{X_t} \xi_n, \quad t \geq 0 \right\}$$

假定  $\lambda=5$ ,  $\xi_n$  服从如下分布:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000}, & 1000 \leq x \leq 2000 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求均值  $E(Y_t)$ , 方差  $\text{var}(Y_t)$  和特征函数  $\phi_Y(v)$ ;

(2) 若  $\xi_n$  服从下述分布:

$$P(\xi_n < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

试再求解第(1)题的问题。

解 (1) 由题意可知,  $Y_t$  的特征函数为

$$\phi_Y(v) = \exp\{\lambda t [\phi_\xi(v) - 1]\}$$

则  $Y_t$  的均值为

$$E(Y_t) = \lambda t E(\xi)$$

$$\text{var}(Y_t) = \lambda t E(\xi^2)$$

这里

$$E(\xi) = \int_{1000}^{2000} x \frac{1}{1000} dx = 1500$$

$$E(\xi^2) = \int_{1000}^{2000} x^2 \frac{1}{1000} dx = \frac{7}{3} \times 10^6$$

$$\begin{aligned} \phi_\xi(v) &= \int_{1000}^{2000} e^{jvx} \frac{1}{1000} dx \\ &= \frac{e^{j1000v}}{1000v} \sin 1000v \end{aligned}$$

故有

$$E(Y_t) = 7500t$$

$$\text{var}(Y_t) = \frac{35}{3} \times 10^6 t$$

$$\phi_Y(v) = \exp\left(\frac{\sin 1000v}{200v} e^{j1000v} t - 5t\right)$$

(2) 若  $\xi_n$  服从指数分布, 则有

$$E(\xi) = \frac{1}{\mu}$$

$$E(\xi^2) = \frac{2}{\mu^2}$$

$$\phi_\xi(v) = \frac{\mu}{\mu - jv}$$

所以可得

$$E(Y_t) = \frac{5t}{\mu}$$

$$\text{var}(Y_t) = \frac{10t}{\mu^2}$$

$$\phi_Y(v) = \exp\left(\frac{j5vt}{\mu - jv}\right)$$

例 5.16 考虑一个非齐次泊松过程  $\{N(t), t \geq 0\}$ , 其中

$$\lambda(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos \omega t)$$

求  $E\{N(t)\}$  和  $\text{var}\{N(t)\}$ 。

解 由于  $N(t)$  的特征函数为

$$\phi_{N(t)}(v) = \exp\left[-(1 - e^{iv}) \int_0^t \lambda(u) du\right]$$

故  $N(t)$  的数学期望为

$$\begin{aligned} E\{N(t)\} &= (-j) \left. \frac{d\phi_{N(t)}(v)}{dv} \right|_{v=0} \\ &= \int_0^t \lambda(u) du \\ &= \int_0^t \frac{1}{2}(1 + \cos \omega t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( t + \frac{\sin \omega t}{\omega} \right), \quad \omega \neq 0 \end{aligned}$$

而其均方值为

$$\begin{aligned} E\{N^2(t)\} &= - \left. \frac{d^2 \phi_{N(t)}(v)}{dv^2} \right|_{v=0} \\ &= \left[ \int_0^t \lambda(u) du \right]^2 + \int_0^t \lambda(u) du \end{aligned}$$

于是可得其方差为

$$\begin{aligned} \text{var}\{N(t)\} &= E\{N^2(t)\} - E^2\{N(t)\} \\ &= \int_0^t \lambda(u) du \\ &= \frac{1}{2} \left( t + \frac{\sin \omega t}{\omega} \right), \quad \omega \neq 0 \end{aligned}$$

例 5.17 设  $\{X(t), 0 \leq t < \infty\}$ , 并有

$$X(t) = \sum_{j=1}^{N_t} h(t - U_j)$$

式中, 在时刻  $U_j$  发生的事件, 在时刻  $t$  的输出为  $h(t - U_j)$ 。式中在间隔  $(0, t)$  内发生的事件数由泊松计数随机变量  $N_t$  描述, 随机变量  $U_j$  是在间隔  $(0, t)$  内所发生事件的无序到达时刻, 这种过程称滤波泊松过程。求特征函数  $\phi_{X_t}(v)$ 。

解 利用恒等式

$$E\{Y\} = E\{E[Y | X]\}$$

并且根据特征函数的定义, 可得

$$\begin{aligned} \phi_{X_t}(v) &= E\{e^{jvX(t)}\} \\ &= E\{E[e^{jvX(t)} | N_t]\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E[e^{jvX(t)} | N_t = k] P\{N_t = k\} \end{aligned}$$

这里

$$E[e^{jvX(t)} | N_t = k] = E\left\{\exp\left[jv \sum_{i=1}^k h(t - U_i)\right]\right\}$$

由于  $U_i$  是统计独立且具有同分布的随机变量, 故有

$$\begin{aligned} E[e^{jvX(t)} | N_t = k] &= \prod_{i=1}^k E\{\exp[jvh(t - U_i)]\} \\ &= \{E\{\exp[jvh(t - U_i)]\}\}^k \end{aligned}$$

因为  $U_i$  在  $(0, t)$  内是均匀分布的, 所以

$$\begin{aligned} E\{\exp[jvh(t - U_i)]\} &= \frac{1}{t} \int_0^t \exp[jvh(t - u_i)] du_i \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \exp[jvh(u)] du \end{aligned}$$

将上述结果代入  $\phi_{X_t}(v)$ , 可得

$$\begin{aligned} \phi_{X_t}(v) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \exp[jvh(u)] du \right\}^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= e^{-\lambda t} \exp\left\{ \lambda \int_0^t \exp[jvh(u)] du \right\} \\ &= \exp\left\{ \lambda \int_0^t \{\exp[jvh(u)] - 1\} du \right\} \end{aligned}$$

例 5.18 对于 5.17 题所定义的滤波泊松过程

$$X(t) = \sum_{j=1}^{N_t} h(t - U_j; Y_j)$$

考虑其特殊情况, 即

$$h(\tau; Y_j) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau < Y_j \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中  $Y_j$  是统计独立、分布相同的非负随机变量。设

$$\phi_{X_t}(v) = \exp\left\{ \lambda \int_0^t E_Y[e^{jvh(\tau; Y)} - 1] d\tau \right\}$$

(1) 证明  $X(t)$  是泊松随机变量, 其均值是

$$E[X(t)] = \lambda \int_0^t [1 - F_Y(s)] ds$$

(2) 证明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[X(t)] = \lambda E[Y]$$

证明 (1) 由于

$$h(\tau; Y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau < Y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} E_Y[e^{jvh(\tau; Y)} - 1] &= (e^{jv} - 1)P\{Y \geq \tau\} \\ &= (e^{jv} - 1)[1 - F_Y(\tau)] \end{aligned}$$

将此式代入  $\phi_{X_t}(v)$  的表达式, 则有

$$\phi_{X_t}(v) = \exp \left\{ \lambda \int_0^t [1 - F_Y(\tau)] (e^{jv} - 1) d\tau \right\}$$

故有

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= -j \left. \frac{d\phi_{X_t}(v)}{dv} \right|_{v=0} \\ &= \lambda \int_0^t [1 - F_Y(\tau)] d\tau \end{aligned}$$

(2) 因为

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^\infty [1 - F_Y(\tau)] d\tau &= \lambda [1 - F_Y(\tau)] \tau \Big|_0^\infty + \lambda \int_0^\infty \tau dF_Y(\tau) \\ &= \lambda \int_0^\infty \tau p_Y(\tau) d\tau \\ &= \lambda E[Y] \end{aligned}$$

所以可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[X(t)] = \lambda \int_0^\infty [1 - F_Y(\tau)] d\tau = \lambda E[Y]$$

例 5.19 到达交换台(具有无限多通道)的呼叫电话符合参数为  $\lambda$  的泊松过程, 每次对话服从平均值为  $1/\mu$  的指数分布。令  $X(t)$  是  $t$  时刻对话的数目。

(1) 求  $E[X(t)]$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} E[X(t)]$ ;

(2) 求  $\text{var}[X(t)]$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{var}[X(t)]$ ;

(3) 在过程中没有呼叫的概率是多少?

解 (1) 依题意, 有

$$p_Y(\tau) = \begin{cases} \mu e^{-\mu\tau}, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$$

利用例 5.18 的结论, 可得

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \lambda \int_0^t [1 - F_Y(\tau)] d\tau \\ &= \lambda \int_0^t e^{-\mu\tau} d\tau \\ &= \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[X(t)] = \frac{\lambda}{\mu}$$

(2) 因为泊松随机变量的均值和方差是相同的。故有

$$\text{var}[X(t)] = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{var}[X(t)] = \frac{\lambda}{\mu}$$

(3) 没有呼叫意味着  $X(t) = 0$ , 故没有呼叫的概率为



$$\begin{aligned}
 P\{X(t) = 0\} &= \exp\{-E[X(t)]\} \\
 &= \exp\left[-\frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})\right]
 \end{aligned}$$

### 5.3 练习题

5.1 泊松过程可用下面形式表示:

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

求证:

- (1) 均值为  $\lambda t$ ;
- (2) 均方值为  $(\lambda t)^2 + \lambda t$ ;
- (3) 相关函数为

$$R(t_1, t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min(t_1, t_2)$$

5.2 设有一泊松过程  $\{N(t), t \geq 0\}$ , 若有两时刻  $s$  和  $t$ , 且  $s < t$ , 试证明

$$P\{N(s) = k \mid N(t) = n\} = C_n^k \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

其中,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

5.3 对泊松随机过程  $\{N(t), t \geq 0\}$  进行微分, 可以得到泊松脉冲序列, 即

$$X(t) = \frac{d}{dt}N(t) = \sum_i \delta(t - t_i)$$

求过程  $X(t)$  的均值和相关函数。

5.4 已知泊松计数过程

$$P[N(t) = j] = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$$

求泊松计数过程第  $k$  个到达时间的概率密度表示式、均值、方差和特征函数。

5.5 若  $N_1(t)$  是一个具有比率为  $\lambda$  的泊松计数过程, 并令  $N_2(t) = N_1^2(t)$ 。试问  $N_2(t)$  是泊松分布吗? 求  $E[N_2(t)]$  和  $\text{var}[N_2(t)]$ 。

5.6 考虑比率为  $\lambda$  的泊松过程。在时间  $(0, t)$  内发生了  $n$  个事件。求第  $r$  个事件发生时间的概率密度。

5.7 计数过程  $\{N_t, 0 \leq t < \infty\}$  是一个泊松计数过程。

(1) 证明泊松计数过程时间间隔的均值为

$$E[Z_k] = \frac{1}{\lambda}, \quad k = 1, 2, \dots$$

式中  $\lambda$  为泊松计数过程参数;

(2) 证明泊松计数过程第  $k$  个到达时间的均值为

$$E[T_k] = kE[Z_k]$$

5.8 两个变量的母函数定义为

$$\Psi_{XY}(s_1, s_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} s_1^i s_2^j P\{X = i, Y = j\}$$

其中  $X$  和  $Y$  是取整数值的随机变量, 若令

$$\Psi_{XY}(s_1, s_2) = \exp(-a_1 - a_2 - b + a_1 s_1 + a_2 s_2 + b s_1 s_2), \quad a_1, a_2, b > 0$$

证明  $X, Y$  均服从泊松分布, 但  $X, Y$  不是统计独立的。

5.9 假设学生进入某教室的规律符合比率为  $\lambda$  的泊松分布, 每个学生进入这个教室的概率为  $p$ , 且每个学生进入教室是独立的。令  $X(t)$  是进入教室的学生数。

(1) 求  $P[X(t)=k], k=0, 1, 2, \dots$ ;

(2)  $X(t)$  是泊松计数过程吗?

5.10 考虑例题 5.17 定义的滤波泊松过程, 令

$$X(t) = \sum_{j=1}^{N_t} h(t - U_j, Y_j)$$

其中  $Y_j$  是具有概率密度为  $f_Y(y)$  的分布相同的统计独立的随机变量。

(1) 求  $\phi_{X_t}(v)$ ;

(2) 求  $E[X(t)]$  和  $\text{var}[X(t)]$ 。

5.11 设  $\{X(t), 0 \leq t < \infty\}$  是强度为  $\lambda$  的泊松过程, 令

$$M_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$$

试求  $E[M_T]$  和  $\text{var}[M_T]$ 。

5.12 一个出版商采用邮局订阅的方式来销售杂志, 其顾客响应符合一天平均速率为 6 的泊松过程。他们分别以  $1/2, 1/3$  和  $1/6$  的概率订阅 1 年、2 年或 3 年, 其选择是相互独立的。对于每次订阅, 当订阅一年时, 该出版商得 1 元手续费。令  $X(t)$  表示该出版商在  $[0, t)$  内从销售得到的总手续费。求  $X(t)$  的数学期望  $E[X(t)]$  和方差  $\text{var}[X(t)]$ 。

5.13 滤波泊松过程  $\{X(t), 0 \leq t < \infty\}$ , 规定

$$X(t) = \sum_{j=1}^{N_t} h(t - U_j)$$

(1) 求证

$$E[X(t)] = \lambda \int_0^t h(v) dv$$

(2) 求证

$$R_X(t, t-\tau) = \lambda \int_0^t h(v) h(v-\tau) dv + \lambda^2 \left[ \int_0^t h(v) dv \right]^2$$

5.14 设在时间区间  $[0, t)$  内来到某商店的顾客数  $X(t)$  是参数为  $\lambda$  的泊松过程, 每个来到商店的顾客购买某些货物的概率是  $p$ , 不买东西就离去的概率是  $1-p$ , 且每个顾客是否购买货物是相互独立的。令  $Y(t)$  为  $[0, t)$  内购买货物的顾客数。试证明  $Y(t) = \{Y(t), t \geq 0\}$  是参数  $\lambda p$  的泊松过程。

# 马尔可夫过程



## 6.1 内容提要

马尔可夫过程是一类占有主要地位、具有普遍意义的随机过程,应用十分广泛。

设  $\{X(t), t \in T\}$  为马尔可夫过程,  $T$  为时间参数集。过程  $X(t)$  可能取的值为状态,可能取的值的全体组成过程的状态空间  $I$ 。  $X(t)$  一般可分成如下四类:

- (1) 时间参数离散,状态空间离散,这类过程称为马尔可夫链;
- (2) 时间参数离散,状态空间连续,这类过程称为马尔可夫序列;
- (3) 时间参数连续,状态空间离散,这类过程称为纯不连续马尔可夫过程;
- (4) 时间参数连续,状态空间连续,这类过程称为连续马尔可夫过程,或扩散过程。

### 6.1.1 马尔可夫链

通常我们认为马尔可夫链是系统在任一时刻所处状态组成的随机序列。

#### 1. 马尔可夫链的定义

(1) 定义 设  $\{X_n, n \in N^+\}$  为一随机序列,时间参数集  $N^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , 其状态空间  $I = \{a_1, a_2, \dots\}$ , 若对所有的  $n \in N^+$ , 都有

$$\begin{aligned} P\{X_n = a_{i_n} \mid X_{n-1} = a_{i_{n-1}}, X_{n-2} = a_{i_{n-2}}, \dots, X_1 = a_{i_1}\} \\ = P\{X_n = a_{i_n} \mid X_{n-1} = a_{i_{n-1}}\} \end{aligned}$$

则称  $\{X_n, n \in N^+\}$  为马尔可夫链。

(2) 转移概率 称下述条件概率为  $n-m$  步转移概率

$$p_{ij}(m, n) = P\{X_n = j \mid X_m = i\} \quad i, j \in I$$

且

$$\begin{aligned} p_{ij}(m, n) &\geq 0, \quad i, j \in I \\ \sum_{j \in I} p_{ij}(m, n) &= 1, \quad i \in I \end{aligned}$$

一步转移概率为

$$p_{ij}(m) = p_{ij}(m, m+1) = P\{X_{m+1} = j \mid X_m = i\}, \quad i, j \in I$$

$k$  步转移概率为

$$p_{ij}^{(k)}(m) = P\{X_{m+k} = j \mid X_m = i\}, \quad i, j \in I$$

转移概率矩阵为

$$P = (p_{ij}^{(k)}(m), i, j \in I)$$

(3) 齐次马尔可夫链

定义 称马尔可夫链  $\{X_n, n \in N^+\}$  为齐次的, 如果它的转移概率为

$$p_{ij}(m) = P\{X_{m+1} = j \mid X_m = i\} = p_{ij}, \quad i, j \in I$$

且

$$p_{ij} \geq 0, \quad i, j \in I$$

$$\sum_{j \in I} p_{ij} = 1, \quad i \in I$$

定义表明, 齐次马尔可夫链, 对于任意  $k$  步转移概率  $p_{ij}^{(k)}(m, n)$  都与  $m$  无关, 且任意  $k$  步转移概率均可由一步转移概率决定。

一步转移概率

$$p_{ij} = P\{X_{m+1} = j \mid X_m = i\}, \quad i, j \in I$$

$k$  步转移概率

$$p_{ij}^{(k)} = P\{X_{m+k} = j \mid X_m = i\}, \quad i, j \in I$$

转移概率矩阵

$$P = (p_{ij}^{(k)}, i, j \in I)$$

## 2. 科尔莫戈罗夫-查普曼方程

科尔莫戈罗夫-查普曼方程是一个重要方程, 它表明若过程开始位于状态  $i$ , 经过  $m+r$  步转移到状态  $j$ , 必须是经过  $m$  步从  $i$  转到中间点  $k$ , 再从中间点  $k$  经余下  $r$  步转移到状态  $j$ , 一般地有

$$p_{ij}^{(m+r)}(n) = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(m)}(n) p_{kj}^{(r)}(n+m), \quad i, j \in I$$

或矩阵形式

$$P^{(m+r)}(n) = P^{(m)}(n) P^{(r)}(n+m)$$

对于齐次马尔可夫链, 则有

$$p_{ij}^{(m+r)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(r)}, \quad i, j \in I$$

或矩阵形式

$$P^{(m+r)} = P^{(m)} P^{(r)}$$

式中

$$P^{(m)} = (p_{ij}^{(m)}, i, j \in I)$$

假设  $r=1$ , 根据科尔莫戈罗夫-查普曼方程有

$$p_{ij}^{(m+1)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(m)} p_{kj} = \sum_{k \in I} p_{ik} p_{kj}^m$$

不难看出

$$P^{(m)} = P^m$$

它表明  $m$  步转移概率完全由一步转移概率决定。

## 3. 马尔可夫链中状态分类

(1) 状态可达 如果状态  $i$  和  $j$  存在某个  $n \geq 1$ , 使  $p_{ij}^{(n)} > 0$ , 则称自状态  $i$  可达状态  $j$ , 记为  $i \rightarrow j$ . 反之, 如果自状态  $i$  不能到达状态  $j$ , 则此时对一切  $n \geq 1$ ,  $p_{ij}^{(n)} = 0$ , 并记为  $i \nrightarrow j$ . 如果自状态  $i$  可达状态  $k$ , 自状态  $k$  可达状态  $j$ , 则自状态  $i$  可达状态  $j$ . 状态可达具有传递性.

(2) 状态相通 如果自状态  $i$  可达状态  $j$ , 且自状态  $j$  可达状态  $i$ , 则称状态  $i$  和  $j$  相通, 记为  $i \leftrightarrow j$ . 如果状态  $i$  和  $k$  相通, 状态  $k$  和  $j$  相通, 则状态  $i$  和  $j$  相通. 状态相通具有传递性.

(3) 状态空间的分解 根据状态相通的概念可以把状态空间分成一些隔离的类.

定义 1 设  $C$  为状态空间一个子集, 如果对于任意的  $i \in C, j \notin C$ , 都有  $p_{ij} = 0$ , 则称  $C$  是闭集.

定义 2 设  $P = (p_{ij}, i, j \in I)$  是某马尔可夫链的转移矩阵, 如果状态空间  $I$  中任意两个状态  $i$  和  $j$  是相通的, 即  $i \leftrightarrow j$ , 则称  $I$  是不可约的. 反之, 则称  $I$  是可约的.

显然,  $I$  为不可约的充要条件是:  $I$  不包含封闭的真子集.

(4) 常返态和非常返态 对于任意两个状态  $i$  和  $j$ ,  $T_{ij}$  表示从状态  $i$  出发首次进入状态  $j$  的概率, 即

$$T_{ij}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{n: X_0(\omega) = i, X_n(\omega) = j, n \geq 1\}$$

对于任意两个状态  $i$  和  $j$ ,  $f_{ij}^{(n)}$  表示自状态  $i$  出发经  $n$  步首次到达状态  $j$  的概率, 即

$$f_{ij}^{(n)} = P\{T_{ij} = n \mid X_0 = i\}$$

而  $f_{ij}$  表示自状态  $i$  出发, 迟早到达状态  $j$  的概率, 即

$$f_{ij} = \sum_{1 \leq n < \infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{1 \leq n < \infty} P\{T_{ij} = n \mid X_0 = i\} = P\{T_{ij} < \infty\}$$

对于任意两个状态  $i$  和  $j$  及  $1 \leq n < \infty$ ,  $p_{ij}^{(n)}$  表示从状态  $i$  出发经  $n$  步转移处于状态  $j$  的概率, 即

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{v=1}^n f_{ij}^{(v)} p_{ij}^{(n-v)}$$

如果  $j=i$ , 则  $T_{ii}$  表示从状态  $i$  出发首次返回状态  $i$  所需的时间.  $f_{ii}$  表示从状态  $i$  出发经过有限步迟早要返回状态  $i$  的概率. 因此, 若  $f_{ii} = 1$ , 则称状态  $i$  是常返的; 若  $f_{ii} < 1$ , 则称状态  $i$  是非常返的.

于是可得如下定理.

定理 状态  $i$  是常返的充要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

如果状态  $i$  是非常返的, 则有

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}} < \infty$$

(5) 周期状态和非周期状态

定义 称正整数集合

$$\{n: n \geq 1, p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

的最大公约数

$$G.C.D\{n: n \geq 1, p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

为状态  $i$  的周期, 记为  $d$ , 或称状态  $i$  是具有周期为  $d$  的周期性状态。

反之, 如果除了  $d=1$  之外, 各  $n$  值中没有其他公约数能使  $p_{ii}^{(n)} > 0$ , 则称状态  $i$  为非周期性的。

特别的, 当  $d=1$  时, 则称状态  $i$  是无周期的。当  $\{n: n \geq 1, p_{ii}^{(n)} > 0\}$  为空集时, 不考虑状态  $i$  的周期。

#### 4. 遍历性与平稳分布

##### (1) 遍历性

定义 设  $\{X_n, n \in N^+\}$  为一齐次马尔可夫链, 若对一切状态  $i, j, i, j \in I$ , 存在不依赖于  $i$  的常数  $\pi_j$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$$

则称  $\{X_n, n \in N^+\}$  具有遍历性。式中  $p_{ij}^{(n)}$  为该链的  $n$  步转移概率,  $\pi_j$  为平稳时的状态概率。

##### (2) 平稳分布

定义 设  $\{X_n, n \in N^+\}$  为一齐次马尔可夫链, 若一个概率分布  $\{p_j\}$  满足方程

$$p_j = \sum_i p_i p_{ij}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

则称  $\{X_n\}$  是平稳的,  $\{p_j\}$  称为  $\{X_n\}$  的平稳分布。

显然

$$p_j > 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sum_j p_j = 1$$

对于平稳分布, 一般地有

$$p_j = \sum_i p_i p_{ij}^{(n)}$$

### 6.1.2 马尔可夫序列

#### 1. 定义

定义 一个随机变量序列  $X_n$ , 若对于任意的  $n$ , 有

$$F(x_n | x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1) = F(x_n | x_{n-1})$$

则称  $X_n$  为马尔可夫序列。

在马尔可夫序列中, 若已知现在、将来和过去相互独立, 则有

$$f(x_n, x_r | x_r) = f(x_n | x_r) f(x_r | x_r), \quad n > r > s$$

#### 2. 转移概率密度

马尔可夫序列的转移概率密度满足下列方程:

$$f(x_n | x_r) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_n | x_r) f(x_r | x_s) dx_r, \quad n > r > s$$

### 3. 高斯-马尔可夫序列

(1) 定义 如果一个  $n$  维矢量随机序列  $\{X(k), k \in N^+\}$  既是高斯的, 又是马尔可夫序列, 则称它为高斯-马尔可夫序列。

显然, 高斯-马尔可夫序列的高斯特性决定了它们的幅度概率分布, 而马尔可夫特性决定了序列在时间上的传播。

设高斯-马尔可夫序列为

$$X(n+1) = AX(n) + W(n)$$

其中,  $A$  为常数,  $W(n)$  高斯白噪声, 其均值为  $m_w(n)$ , 方差为  $\sigma_w^2(n)$ 。假定  $X(n)$  取值为  $x_n$ , 则转移概率为  $f(x_{n+1} | x_n)$ , 且它也是高斯的。

(2) 统计特征

条件均值

$$E[X(n+1) | x_n] = Ax_n + m_w(n)$$

条件方差

$$\text{var}[X(n+1) | x_n] = \sigma_w^2(n)$$

均值

$$E[X(n+1)] = Am_x(n) + m_w(n)$$

方差

$$\text{var}[X(n+1)] = A^2 \sigma_x^2(n) + \sigma_w^2(n)$$

协方差

$$\begin{aligned} C_X(n, s) &= E\{[X(n) - m_X(n)][X(s) - m_X(s)]\} \\ &= A^{n-s} \sigma_X^2(s) \end{aligned}$$

如果  $X(n)$  为平稳序列, 则有

$$C_X(n, s) = A^{n-s} \sigma_X^2(s)$$

## 6.1.3 可数状态的马尔可夫过程

状态离散、时间连续的马尔可夫过程称为可数状态的马尔可夫过程。

### 1. 定义

定义 设  $\{X(t), t \in T\}$ ,  $T = [0, \infty)$ ,  $I = \{0, 1, 2, \dots\}$  或  $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  是一族随机变量, 若对每一个正整数  $n$  及  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ,  $\{i_0, i_1, \dots, i_n\} \subset I$ , 都有

$$P\{X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \dots, X_{t_1} = i_1, X_{t_0} = i_0\} = P\{X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}\}$$

则称  $\{X(t), t \in T\}$  是一个可数状态的马尔可夫过程。

特别地, 若

$$P\{X_{t+h} = j | X_{t+h} = i\} = P\{X_t = j | X_t = i\}, \quad i, j \in I, 0 \leq s \leq t, h > 0$$

且

$$P\{X_t = i\} \cdot P\{X_{t+h} = i\} > 0$$

则称  $\{X(t), t \in T\}$  是时齐的可数状态马尔可夫过程。

## 2. 转移概率

可数状态马尔可夫过程  $\{X(t), t \in T\}$  的转移概率为

$$p_{ij}(t) = P\{X_{t+t} = j \mid X_t = i\}$$

转移概率矩阵为

$$P(t) = (p_{ij}(t), i, j \in I)$$

科尔莫戈罗夫-查普曼方程为

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in I} p_{ik}(s) p_{kj}(t)$$

或为矩阵形式:

$$P(s+t) = P(s)P(t)$$

## 3. 科尔莫戈罗夫-费勒前进方程和后退方程

科尔莫戈罗夫-费勒前进方程为

$$\dot{p}_{ij} = \sum_{k \in I} p_{ik}(t) q_{kj}, \quad i, j \in I, t \geq 0$$

或为矩阵形式:

$$\dot{P}(t) = P(t)Q$$

科尔莫戈罗夫-费勒后退方程为

$$\dot{p}_{ij}(t) = \sum_{k \in I} q_{ik} p_{kj}(t), \quad i, j \in I, t \geq 0$$

或为矩阵形式:

$$\dot{P}(t) = QP(t)$$

## 6.1.4 连续马尔可夫过程

状态和时间参数均连续变化的马尔可夫过程称为连续马尔可夫过程,有时又称为扩散过程。

### 1. 统计特性

定义 设  $\{X(t), t \in T\}$  为一随机过程,若对于每个  $n$  和  $T$  中的  $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ , 都有

$$F(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}; \cdots; x_1, t_1) = F(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1})$$

则称  $\{X(t), t \in T\}$  为连续马尔可夫过程。

如果存在概率密度函数,等价地有

$$f(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}; \cdots; x_1, t_1) = f(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1})$$

连续马尔可夫过程的统计特性完全由它的一阶、二阶分布函数决定,即

$$f(x_1, t_1; x_2, t_2; \cdots; x_n, t_n)$$



$$\begin{aligned}
 &= f_1(x_1, t_1) \prod_{k=1}^{n-1} f_2(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k) \\
 &= \frac{\prod_{k=1}^{n-1} f_2(x_k, t_k; x_{k+1}, t_{k+1})}{\prod_{k=2}^{n-1} f_1(x_k, t_k)}.
 \end{aligned}$$

## 2. 转移概率

连续马尔可夫过程的转移概率定义为

$$P\{s, x; t, A\} = P\{X(t) \in A | X(s) = x\}, \quad s, t \in T, s < t$$

式中  $A$  为状态空间  $I$  的一个子集。特别地, 当  $A = (-\infty, y)$  时, 有

$$P\{s, x; t, (-\infty, y)\} = P\{X(t) < y | X(s) = x\}$$

一般地, 常将  $P\{s, x; t, (-\infty, y)\}$  记为

$$\begin{aligned}
 F(s, x; t, y) &= F(t, y | s, x) \\
 &= P\{X(t) < y | X(s) = x\}
 \end{aligned}$$

称之为连续马尔可夫过程的转移概率分布。

如果  $F(s, x; t, y)$  关于  $y$  的导数存在, 则有

$$f(s, x; t, y) = f(t, y | s, x) = \frac{\partial}{\partial y} F(s, x; t, y)$$

称之为连续马尔可夫过程的转移概率密度。

显然

$$F(s, x; t, y) = \int_{-\infty}^y f(s, x; t, u) du$$

若

$$F(s, x; t, y) = F\{t-s; x, y\} = F(\tau; x, y)$$

则称过程为齐次的连续马尔可夫过程。

## 3. 科尔莫戈罗夫-查普曼方程

$$f(x_n, t_n | x_i, t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_n, t_n | x_r, t_r) f(x_r, t_r | x_i, t_i) dx_r, \quad t_n > t_r > t_i$$

## 6.2 例题

**例 6.1** (天气预报问题) 如果明天是否有雨仅与今天的天气(是否有雨)有关, 而与过去的天气无关, 并设今日下雨、明日有雨的概率为  $\alpha$ , 今日无雨而明日有雨的概率为  $\beta$ 。求今日有雨且第四日仍有雨的概率。

**解** 假定把有雨的称为 0 状态天气, 把无雨的称为 1 状态天气, 则本例是一个两状态的马尔可夫链, 它的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

设  $\alpha=0.7, \beta=0.4$ , 则一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

于是两步转移概率矩阵为

$$P^{(2)} = (P)^2 = PP = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix}$$

四步转移概率为

$$P^{(4)} = (P^{(2)})^2 = P^{(2)} P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{pmatrix}$$

由此可知, 今日有雨且第四日仍有雨的概率为

$$P_{00}^{(4)} = 0.5749$$

**例 6.2** 考虑一个不断投掷一枚硬币的过程。以  $Y_n$  表示投掷到第  $n$  次时已出现的正面的次数

(1) 证明  $\{Y_n, n \geq 0\}$  是一个马尔可夫过程;

(2) 求  $\{Y_n, n \geq 0\}$  的一步转移概率。

**解** (1) 以  $X_i$  表示第  $i$  次投掷的结果, 如果投出正面, 令  $X_i=1$ ; 如果投出反面, 令  $X_i=0$ 。那么  $X_i$  的分布密度是

$$P(X_i=0) = \frac{1}{2}, \quad P(X_i=1) = \frac{1}{2}$$

于是有  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ 。由于投掷硬币是相互独立的试验, 所以  $X_n (i=1, 2, \dots, n)$  相互独立。这样, 对于任意的  $n_1 < n_2 \leq n_3 < n_4$ , 都有

$$Y_{n_2} - Y_{n_1} = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} X_i$$

$$Y_{n_4} - Y_{n_3} = \sum_{i=n_3+1}^{n_4} X_i$$

且它们相互独立, 规定  $Y_0=0$ , 这说明  $\{Y_n, n \geq 0\}$  是一个独立的增量过程。因此它必是一个马尔可夫链。

(2) 定义  $p_{ij} = P(Y_{m+1}=j | Y_m=i)$ , 现在  $Y_m=i$  表示投掷了  $i$  次, 从  $Y_m$  到  $Y_{m+1}$  就是再投掷一次硬币, 如果第  $m+1$  次出现反面, 那么  $Y_{m+1}$  仍处于状态  $i$ ; 如果第  $m+1$  次出现正面, 那么  $Y_{m+1}$  仍处于状态  $i+1$ ,  $m+1$  次出现反面,  $Y_{m+1}$  处于状态  $i$  和状态  $i+1$  以外各状态是不可能的, 所以

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & j=i \\ \frac{1}{2}, & j=i+1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

**例 6.3** 一个质点沿标有整数的直线游动。经过一步就能从点  $i$  移到  $i-1$  的概率为

$p$ , 留在点  $i$  的概率为  $q$ , 移到点  $i+1$  的概率为  $r$ , 且有  $p+q+r=1$ . 求一步转移概率矩阵和两步转移概率矩阵.

解 根据题意, 则有  $p_{i,i+1}=p, p_{i,i}=q, p_{i,i-1}=r$  而且

$$p_{ij} = 0 \quad j < i-1 \text{ 或 } j > i+1$$

于是有

$$p_{ij} = \begin{cases} 0, & j < i-1 \\ p, & j = i-1 \\ q, & j = i \\ r, & j = i+1 \\ 0, & j > i+1 \end{cases}$$

故一步转移概率矩阵为

$$P^{(1)} = (p_{ij})$$

根据二步转移概率的性质

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k \in I} p_{ik} p_{kj}$$

则有

$$p_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 0, & j < i-2 \\ p^2, & j = i-2 \\ 2pq, & j = i-1 \\ q^2 + 2pr, & j = i \\ 2rq, & j = i+1 \\ r^2, & j = i+2 \\ 0, & j > i+2 \end{cases}$$

所以二步转移概率矩阵为

$$P^{(2)} = (p_{ij}^{(2)})$$

例 6.4 设  $\{X_n, n \in N^+\}$  为一个马尔可夫链, 其状态空间  $I = \{a, b, c\}$ , 转移矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

求:

- (1)  $P\{X_1=b, X_2=c, X_3=a, X_4=c, X_5=a, X_6=c, X_7=b \mid X_0=c\}$ ;
- (2)  $P\{X_{n+2}=c \mid X_n=b\}$ .

解 (1) 根据马尔可夫特性和齐次性, 可得

$$\begin{aligned} & P\{X_1=b, X_2=c, X_3=a, X_4=c, X_5=a, X_6=c, X_7=b \mid X_0=c\} \\ &= P\{X_1=b \mid X_0=c\} \cdot P\{X_2=c \mid X_1=b\} \cdot P\{X_3=a \mid X_2=c\} \cdot \\ & \quad P\{X_4=c \mid X_3=a\} \cdot P\{X_5=a \mid X_4=c\} \cdot P\{X_6=c \mid X_5=a\} \cdot \\ & \quad P\{X_7=b \mid X_6=c\} \end{aligned}$$

$$p_{32} \cdot p_{23} \cdot p_{21} \cdot p_{12} \cdot p_{31} \cdot p_{12} \cdot p_{32} \quad \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{9}{25} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{2500}$$

(2) 因为二步转移概率矩阵为

$$P^{(2)} = PP = \begin{pmatrix} \frac{17}{30} & \frac{9}{40} & \frac{5}{24} \\ \frac{8}{15} & \frac{3}{10} & \frac{1}{6} \\ \frac{17}{30} & \frac{3}{20} & \frac{17}{90} \end{pmatrix}$$

故有

$$P\{X_{n+2} = c \mid X_n = b\} = P_{b,c}^{(2)} = \frac{1}{6}$$

例 6.5 设有一个质点在直线上做随机游动。随机游动的状态空间为  $I = \{1, 2, \dots, m\}$ , 游动的概率规则是经过一步自点  $i$  移到  $i+1$  的概率为  $p$ ; 移到点  $i-1$  的概率为  $q$ , 且  $p+q=1, 1 \leq i \leq m-1$ . 其中 0 和  $m$  两个状态为吸收态。求其转移概率矩阵。

解 显然这一过程  $\{X_n, n=0, 1, 2, \dots\}$  是一齐次马尔可夫链, 其一步转移概率为

$$\begin{aligned} p_{i,i+1} &= p, \quad 1 \leq i \leq m-1 \\ p_{i,i-1} &= q, \quad 1 \leq i \leq m-1 \\ p_{i,j} &= 0, \quad j \neq i-1, i+1, 1 \leq i \leq m-1 \\ p_{00} &= 1 \\ p_{mm} &= 1 \end{aligned}$$

由于吸收状态 0 和  $m$  为状态空间的两个端点, 故称这种过程为带有吸收壁的随机游动。不难看出, 状态  $i$  为马尔可夫链的吸收态的充要条件是  $p_i = 1$ 。

一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

它是一个  $(m+1) \times (m+1)$  矩阵。

例 6.6 设  $\{Y_n, n=0, 1, 2, \dots\}$  是直线上的整数格子点上的随机徘徊, 即

$$Y_n = Y_0 + X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad n \geq 1$$

$\{Y_0, X_1, X_2, \dots\}$  相互独立, 且  $\{X_1, X_2, \dots\}$  具有公共分布

$$P(X_n = k) = p_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k = 1$$

则  $\{Y_n, n=0, 1, 2, \dots\}$  是一个时齐的可数状态的马尔可夫链。

证明 状态空间为  $I = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , 时间参数集为  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , 其一步转移概

率为

$$p_{ij} = P\{Y_n = j \mid Y_{n-1} = i\} = P\{X_n = j - i\} = p_{j-i}, \quad n \geq 1, i, j \in I$$

事实上,由 $\{Y_0, X_1, X_2, \dots\}$ 相互独立可得

$$\begin{aligned} P\{Y_n = i_n \mid Y_{n-1} = i_{n-1}, \dots, Y_0 = i_0\} \\ &= \frac{P\{Y_n = i_n, Y_{n-1} = i_{n-1}, \dots, Y_0 = i_0\}}{P\{Y_{n-1} = i_{n-1}, \dots, Y_0 = i_0\}} \\ &= \frac{P\{X_n = i_n - i_{n-1}, X_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2}, \dots, X_1 = i_1 - i_0, Y_0 = i_0\}}{P\{X_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2}, \dots, X_1 = i_1 - i_0, Y_0 = i_0\}} \\ &= P\{X_n = i_n - i_{n-1}\} \\ &= P\{Y_n = i_n \mid Y_{n-1} = i_{n-1}\} \end{aligned}$$

由此可以看出 $\{Y_n, n=0, 1, 2, \dots\}$ 是可数状态的马尔可夫链,而且它还是时齐的,其转移概率为

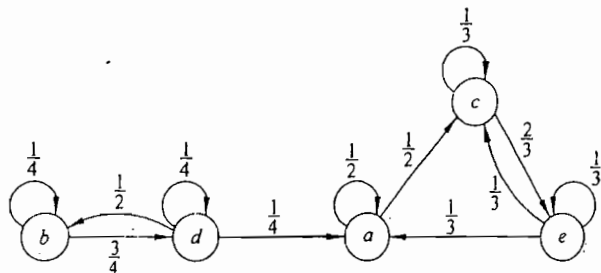
$$\begin{aligned} p_{ij} &= P\{Y_n = j \mid Y_{n-1} = i\} \\ &= P\{X_n = j - i\} = p_{j-i}, \quad n \geq 1, i, j \in I \end{aligned}$$

例 6.7 设  $X_n$  为马尔可夫链,状态空间  $I = \{a, b, c, d, e\}$ ,其概率转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

求其闭集。

解 过程的状态传递图如例题图 6.7 所示。节点表示状态,若  $p_{ij} > 0$ ,则从状态  $i$  到状态  $j$  用箭弧相连。从图中看出,集合  $\{b, d\}$  可达集合  $\{a, c, e\}$ ,但反过来都是不可达的。于是,一旦过程离开了状态集  $\{b, d\}$ ,就不可能再回到状态  $b$  或状态  $d$ 。这样,闭集有两个,即  $\{a, c, e\}$  与  $\{a, b, c, d, e\}$ 。由于有两个闭集,故该马尔可夫链是可约的。删去移动矩阵中的第 2 行、第 2 列与第 4 行、第 4 列,可得



例题图 6.7

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

这就是马尔可夫链  $X_n$  限定在不可约闭集  $\{a, c, e\}$  上的马尔可夫矩阵。

例 6.8 设有四个状态  $(0, 1, 2, 3)$  的马尔可夫链, 其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

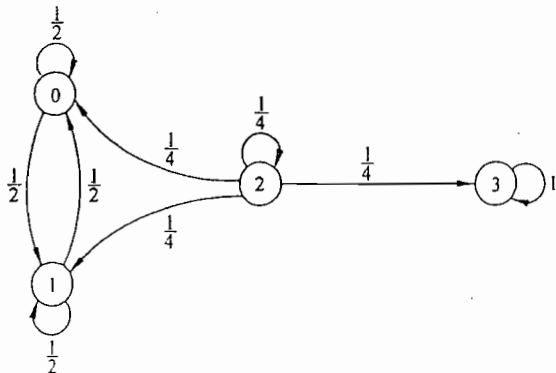
试对其状态进行分类。

解 在这一马尔可夫链中,  $p_{33}=1, p_{30}=p_{31}=p_{32}=0$ , 因此状态 3 是一个闭集, 它是吸收态的。显然状态 3 不可能到达任何其他状态。

从状态 2 出发可以到达 0, 1, 3 三个状态。但是从 0, 1, 3 三个状态出发都不可能到达状态 2。所以 0, 1 两个状态和状态 2 也是不相通的, 0, 1 两个状态也构成一个闭集。而且

$$\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

构成一个随机矩阵。于是, 该马尔可夫链由两个闭集  $\{0, 1\}$  和  $\{3\}$ 。该过程的状态转移图如例题图 6.8 所示。图中节点处圆圈内的数字代表状态, 状态  $i$  到状态  $j$  用箭弧相连, 箭头上的数字代表转移概率。



例题图 6.8

例 6.9 设  $X$  为一马尔可夫链, 其状态空间为

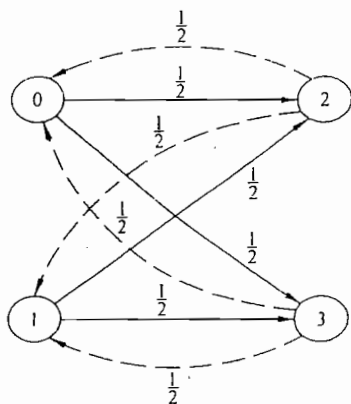
$$I = \{0, 1, 2, 3\}$$

其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

试画出其状态传递图, 回答该过程是否有周期性。

解 根据转移概率矩阵, 容易画出状态传递图如例题图 6.9 所示。



例题图 6.9

四个状态可以分成  $\{0, 1\}, \{2, 3\}$  两个子集。该过程有确定性的周期转移

$$\{0, 1\} \rightarrow \{2, 3\} \rightarrow \{0, 1\} \rightarrow \{2, 3\} \cdots$$

显然它的周期  $d=2$ 。

例 6.10 马尔可夫链的转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{pmatrix}$$

求其平稳概率分布。

解 设其平稳分布为  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ , 根据

$$\pi = \pi P$$

得

$$\begin{cases} q\pi_0 + q\pi_1 + 0 \cdot \pi_2 = \pi_0 \\ p\pi_0 + 0 \cdot \pi_1 + q\pi_2 = \pi_1 \\ 0 \cdot \pi_0 + p\pi_1 + q\pi_2 = \pi_2 \end{cases}$$

且

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

求解上述方程可得

$$\pi_1 = \frac{p}{q} \pi_0$$

$$\pi_2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \pi_0$$

$$\pi_0 \left[ 1 + \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2 \right] = 1$$

故有

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2}$$

$$\pi_1 = \frac{\frac{p}{q}}{1 + \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2}$$

$$\pi_2 = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^2}{1 + \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2}$$

例 6.11

设  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  是独立随机变量序列, 概率密度函数为  $f_{X_n}(x) = f_n(x)$ . 现在令

$$Y_1 = X_1$$

$$Y_2 = X_1 + X_2$$

$$\dots\dots$$

$$Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

求证  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$  是马尔可夫序列。

证明 因为

$$f(y_1, y_2) = f_{Y_2}(y_2 | Y_1 = y_1) f_{Y_1}(y_1)$$

又由已知条件有

$$f_{Y_1}(y_1) = f_{X_1}(y_1) = f_1(y_1)$$

$$f_{Y_2}(y_2 | Y_1 = y_1) = f_{X_1+X_2}(y_2 | X_1 = y_1)$$

$$= f_{X_2}(X_2 = y_2 - y_1 | X_1 = y_1)$$

$$= f_{X_2}(y_2 - y_1)$$

$$= f_2(y_2 - y_1)$$

故有

$$f(y_1, y_2) = f_1(y_1) f_2(y_2 - y_1)$$

推广到  $n$  个随机变量, 有

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = f_1(y_1) f_2(y_2 - y_1) \dots f_n(y_n - y_{n-1})$$

而



$$f(y_n | y_{n-1}, \dots, y_1) = \frac{f(y_1, y_2, \dots, y_n)}{f(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})} = f_n(y_n - y_{n-1})$$

由此式可知,  $f(y_n | y_{n-1}, \dots, y_1)$  与  $y_{n-1}, \dots, y_1$  无关, 因此序列  $\{Y_n\}$  是一马尔可夫序列。

例 6.12 已知一个独立随机变量序列  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ , 有

$$f_{X_n}(x) = f_n(x)$$

$$Y_1 = X_1$$

$$Y_2 = X_1 + X_2$$

$$\dots\dots$$

$$Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

若  $E\{X_n\} = 0$ , 且  $X_n$  与  $Y_{n-1}$  独立, 证明

$$E\{Y_n | Y_{n-1}, \dots, Y_1\} = Y_{n-1}$$

证明 由上题可知,  $Y_n$  是马尔可夫序列, 则有

$$\begin{aligned} E\{Y_n | Y_{n-1}, \dots, Y_1\} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_n p(y_n | y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1) dy_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y_n p(y_n | y_{n-1}) dy_n \\ &= E\{Y_n | Y_{n-1}\} \end{aligned}$$

又因为

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i = X_n + \sum_{i=1}^{n-1} X_i = X_n + Y_{n-1}$$

故有

$$\begin{aligned} E\{Y_n | Y_{n-1}\} &= E\{X_n + Y_{n-1} | Y_{n-1}\} \\ &= E\{X_n | Y_{n-1}\} + E\{Y_{n-1} | Y_{n-1}\} \\ &= E\{X_n\} + E\{Y_{n-1} | Y_{n-1}\} \\ &= E\{Y_{n-1} | Y_{n-1}\} \end{aligned}$$

下面推导关系式

$$E[g(X) | x] = g(X)$$

这里  $X$  是随机变量,  $g(x)$  是一个确知函数。根据条件数学期望的定义, 有

$$E[g(X) | x] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p[g(x) | x] dx$$

不难理解

$$E[g(x) | X = x] = 1$$

$$E[g(x) | X \neq x] = 0$$

故有

$$\begin{aligned} E[g(X) | X] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \delta(X - x) dx \\ &= g(X) \end{aligned}$$

若令  $X = Y_{n-1}$ ,  $g(X) = Y_{n-1}$ , 则有

$$E[Y_{n-1} | Y_{n-1}] = Y_{n-1}$$

故

$$E\{Y_n | Y_{n-1}, \dots, Y_1\} = Y_{n-1}$$

**例 6.13 (赌徒输光问题)** 赌徒甲有  $a$  元, 赌徒乙有  $b$  元, 两人进行赌博, 每赌一局输者给赢者 1 元, 没有和局, 直赌至两人中有一人输光为止。设在每一局中, 甲赢的概率为  $p$ , 乙赢的概率为  $q=1-p$ 。

**解** 这个问题也是一个随机游动问题, 从甲的角度看, 他初始时刻处于  $a$ , 每次移动一格, 向右移(即赢 1 元)的概率为  $p$ , 向左移(即输 1 元)的概率为  $q$ 。如果一旦达到 0 (即甲全输光) 这个游动就停止。

这是一个有限齐次马尔科夫链, 它的状态空间是

$$I = \{0, 1, \dots, a+b\}$$

转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这里有两个特殊的状态, “0”和“ $a+b$ ”。在整个游动过程中, 一旦到达这两个状态, 就永远停留在那里, 不再继续游动下去, 这种状态称为吸收状态, 也有人将这两种状态想像成两个吸收壁, 一碰上去就被吸住不动了。

**例 6.14** 求上例中甲输光的概率。

**解** 甲的状态空间是

$$I = \{0, 1, \dots, a+b\}$$

所谓甲输光即从状态  $a$  转移到状态 0。

现在用  $u_i$  表示甲从状态  $i$  转移到状态 0 的概率, 所要计算的就是  $u_a$ 。由于 0 和  $a+b$  是吸收状态, 所以有  $u_0=1, u_{a+b}=0$ 。

全概率公式

$$u_i = pu_{i+1} + qu_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, a+b-1$$

的含义是, 甲从有  $i$  元开始赌到输光的概率等于“他接下去赢了一局(概率为  $p$ ), 处于状态  $i+1$  后再输光”和“他接下去输了一局(概率为  $q$ ), 处于状态  $i-1$  后再输光”这两个事件的和事件的概率。

由于  $p+q=1$ , 所以上式可写为

$$(p+q)u_i = pu_{i+1} + qu_{i-1}$$

亦即

$$p(u_{i+1} - u_i) = q(u_i - u_{i-1})$$

先讨论  $p=q=1/2$  的情况, 这时有

$$u_{i+1} - u_i = u_i - u_{i-1}$$

令  $i=1, 2, \dots, a+b-1$ , 得

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$$

.....

$$u_i = u_0 + ir$$

.....

$$u_{a+b} = u_0 + (a+b)r$$

将  $u_{a+b}=0, u_0=1$  代入最后一式,得

$$r = -\frac{1}{a+b}$$

所以

$$u_i = 1 - \frac{i}{a+b}, \quad i = 1, 2, \dots, a+b-1$$

令  $i=a$ , 求得甲输光的概率

$$u_a = \frac{b}{a+b}$$

这个结果说明,在  $p=q$  的情况下(即甲、乙每局比赛中输赢是等可能的情况下),甲输光的概率与乙的赌本  $b$  成正比,即双方的赌本越悬殊,赌本小者输光的可能性就越大。

由于甲、乙的地位是对称的,所以乙输光的概率为

$$u_b = \frac{a}{a+b}$$

可见  $u_a + u_b = 1$ , 这表明甲、乙中总有一个要输光,赌博不可能无穷无尽地继续下去。

再讨论  $p \neq q$  的情况,此时,全概率公式可改写为

$$u_{i+1} - u_i = \frac{q}{p}(u_i - u_{i-1})$$

这个式子反复递推下去,可得

$$u_{i+1} - u_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i (u_1 - u_0) = \left(\frac{q}{p}\right)^i (u_1 - 1)$$

两边从  $k$  到  $a+b-1$  求和,得

$$\begin{aligned} u_{a+b} - u_k &= (u_1 - 1) \sum_{i=k}^{a+b-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i \\ &= (u_1 - 1) \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \frac{q}{p}} \end{aligned}$$

令  $k=0$ , 并注意到  $u_{a+b}=0$ , 则有

$$1 = u_0 = (1 - u_1) \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \frac{q}{p}}$$

即

$$1 - u_1 = \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

进而求得

$$u_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}, \quad k = 1, 2, \dots, a+b-1$$

令  $k=a$ , 得到甲输光的概率为

$$u_a = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^b}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}}$$

类似地, 由甲、乙的对称性可知, 乙输光的概率为

$$u_b = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^b - \left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}}$$

由于  $u_a + u_b = 1$ , 所以在  $p \neq q$  时两个人中也总有一个人要输光。

例 6.15 证明马尔可夫过程方程(科尔莫戈罗夫-查普曼方程), 即证明对于  $t_1 < t_2 < t_3$ , 马尔可夫过程  $X(t)$  的转移概率满足

$$p_{X_3|X_1}(x_3 | x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_3|X_2}(x_3 | x_2) p_{X_2|X_1}(x_2 | x_1) dx_2$$

证明 根据马尔可夫特性有

$$\begin{aligned} p(x_3, x_2, x_1) &= p_{X_3|X_2, X_1}(x_3 | x_2, x_1) \cdot p_{X_2|X_1}(x_2 | x_1) p_{X_1}(x_1) \\ &= p_{X_3, X_2|X_1}(x_3, x_2 | x_1) p_{X_1}(x_1) \end{aligned}$$

从而有

$$p_{X_3, X_2|X_1}(x_3, x_2 | x_1) = p_{X_3|X_2, X_1}(x_3 | x_2, x_1) p_{X_2|X_1}(x_2 | x_1)$$

于是得

$$\begin{aligned} p_{X_3|X_1}(x_3 | x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_3, X_2|X_1}(x_3, x_2 | x_1) dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_3|X_2, X_1}(x_3 | x_2, x_1) p_{X_2|X_1}(x_2 | x_1) dx_2 \end{aligned}$$

例 6.16 给定一个随机过程  $X(t)$  及两个时刻  $t_1$  和  $t_2$ , 且  $t_1 < t_2$ , 若对于任意时刻  $t < t_1$ ,  $X(t)$  都与  $X(t_2) - X(t_1)$  统计独立, 证明  $X(t)$  必为马尔可夫过程。

证明 记  $X_0 = X(t)$ ,  $X_1 = X(t_1)$ ,  $X_2 = X(t_2)$ ,  $X = (X_0, X_1, X_2)^T$ 。设  $Y_0 = X_0$ ,  $Y_1 = X_1$ ,  $Y_2 = X_2 - X_1$ ,  $Y = (Y_0, Y_1, Y_2)^T$  则有

$$|J| = \left| \frac{\partial Y}{\partial X} \right| = 1$$

$$\begin{aligned} p_X(x_0, x_1, x_2) &= p_Y(y_0, y_1, y_2) |J| \\ &= p_Y(y_0, y_1, y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= p_Y(x_0, x_1, x_2 - x_1) \\
 &= p(x_0, x_1) p(x_2 - x_1)
 \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
 p_X(x_2 | x_1, x_0) &= \frac{p_X(x_2, x_1, x_0)}{p(x_1, x_0)} \\
 &= \frac{p(x_1, x_0) p(x_2 - x_1)}{p(x_1, x_0)} \\
 &= p(x_2 - x_1)
 \end{aligned}$$

此式与  $X_0$  无关, 所以  $X(t)$  为马尔可夫过程。

例 6.17 设有一参数连续、状态离散的马尔可夫过程  $\{X(t), t \geq 0\}$ , 其状态空间为  $I = \{1, 2, \dots, m\}$ , 当  $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, m$  时,  $q_{ij} = 1$ 。当  $i = 1, 2, \dots, m$  时,  $q_{ii} = -(m-1)$ 。求  $p_{ii}(t)$ 。

解 由下式:

$$\dot{p}_{ij}(t) = \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k \in I} p_{ik}(t) q_{kj}$$

则有

$$\dot{p}_{ij}(t) = -(m-1)p_{ij}(t) + \sum_{\substack{k \neq j \\ k \in I}} p_{ik}(t)$$

根据

$$\sum_{k=1}^m p_{ik}(t) = 1$$

则有

$$\sum_{\substack{k \neq j \\ k \in I}} p_{ik}(t) = 1 - p_{ij}(t)$$

故

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_{ij}(t) &= -(m-1)p_{ij}(t) + [1 - p_{ij}(t)] \\
 &= -mp_{ij}(t) + 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

求解上述方程, 得

$$p_{ij}(t) = ce^{-mt} + \frac{1}{m}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

利用初始条件

$$p_{ii}(0) = 1$$

$$p_{ij}(0) = 0$$

则当  $i = j$  时,  $c = 1 - 1/m$ , 而  $i \neq j$  时,  $c = -1/m$ 。于是可得

$$p_{ii}(t) = \left(1 - \frac{1}{m}\right)e^{-mt} + \frac{1}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$p_{ij}(t) = \frac{1}{m}(1 - e^{-mt}), \quad i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, m$$

例 6.18 若信号模型其时间参数是连续变化的, 并且有下述形式:

$$\dot{X}(t) = \alpha X(t) + \beta W(t)$$

其中  $W(t)$  为白色高斯过程, 其均值和协方差为

$$\begin{aligned} m_W(t) &= E[W(t)] \\ C_W(t, s) &= E\{[W(t) - m_W(t)][W(s) - m_W(s)]\} \\ &= \sigma_W^2(t)\delta(t-s) \end{aligned}$$

则称过程  $\{X(t), t \in T\}$  是连续高斯马尔可夫过程。

(1) 求证  $\dot{m}_X(t) = \alpha m_X(t) + \beta m_W(t)$ ;

(2) 若令  $V_X(t) = \sigma_X^2(t)$ , 则  $\dot{V}_X(t) = 2\alpha V_X(t) + \beta^2 \sigma_W^2(t)$ 。

证明 (1) 对定义式两边取期望, 有

$$E\{\dot{X}(t)\} = \alpha E[X(t)] + \beta E[W(t)]$$

即

$$\dot{m}_X(t) = \alpha m_X(t) + \beta m_W(t)$$

(2) 按方差定义, 有

$$V_X(t) = \sigma_X^2(t) = E\{[X(t) - m_X(t)]^2\}$$

对此式两边微分, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_X(t) &= 2E\{[X(t) - m_X(t)][\dot{X}(t) - \dot{m}_X(t)]\} \\ &= 2E\{[X(t) - m_X(t)][\alpha X(t) - \alpha m_X(t) + \beta W(t) - \beta m_W(t)]\} \\ &= 2\alpha V_X(t) + 2\beta E[X_1(t)W_1(t)] \end{aligned}$$

式中

$$X_1(t) = X(t) - m_X(t)$$

$$W_1(t) = W(t) - m_W(t)$$

由定义式, 不难得到其解为

$$X(t_n) = e^{\alpha(t_n - t_{n-1})} X(t_{n-1}) + \beta \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{\alpha(t_n - s)} W(s) ds$$

式中  $t_n$  和  $t_{n-1}$  表示任意两个时刻。将  $X_1(t)$  和  $W_1(t)$  代入上式, 则得

$$X_1(t) = e^{\alpha(t-t_0)} X_1(t_0) + \beta \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-s)} W(s) ds$$

于是有

$$E\{X_1(t)W_1(t)\} = e^{\alpha(t-t_0)} E\{X_1(t_0)W_1(t)\} + \beta \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-s)} E[W_1(t)W_1(s)] ds$$

由于  $X(t_0)$  与  $W(t)$  不相关, 故上式右端第一项为零。第二项为

$$\int_{t_0}^t e^{\alpha(t-s)} E\{W_1(t)W_1(s)\} ds = \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-s)} \sigma_W^2(s) \delta(t-s) ds = \frac{1}{2} \sigma_W^2(t)$$

则有

$$E\{W_1(t)W_1(s)\} = \frac{1}{2} \beta \sigma_W^2(t)$$

故有

$$\dot{V}_X(t) = 2\alpha V_X(t) + \beta^2 \sigma_W^2(t)$$

例 6.19 随机过程  $\{X(t), t \geq t_0\}$  由方程  $\dot{X}(t) = 0$  确定, 其中  $X(t_0)$  和  $\dot{X}(t_0)$  具有联合高斯分布。试分析其特性。

解 首先, 由微分方程解得

$$X(t) = \dot{X}(t_0)(t - t_0) + X(t_0)$$

由于  $X(t_0)$  和  $\dot{X}(t_0)$  是联合高斯分布的, 因此过程  $\{X(t), t \geq t_0\}$  是一个高斯随机过程。

其次, 设  $t_3 > t_2 > t_1$ , 不难得到

$$X(t_3) = X(t_0) + \dot{X}(t_0)(t_3 - t_0)$$

$$X(t_2) = X(t_0) + \dot{X}(t_0)(t_2 - t_0)$$

$$X(t_1) = X(t_0) + \dot{X}(t_0)(t_1 - t_0)$$

由此可得

$$X(t_3) = X(t_2) + \dot{X}(t_0)(t_3 - t_2)$$

$$X(t_2) = X(t_1) + \dot{X}(t_0)(t_2 - t_1)$$

于是有

$$X(t_3) = X(t_2) + \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} [X(t_2) - X(t_1)]$$

由上式可以看出, 过程  $\{X(t), t \geq t_0\}$  的将来  $t = t_3$  时的统计特性完全由  $t = t_1, t_2$  时的统计特性确定, 而与过去时刻  $t < t_1$  无关。因此它是一个二阶马尔可夫过程。

上述表明, 过程  $\{X(t), t \geq t_0\}$  也是一个二阶高斯-马尔可夫过程。

例 6.20 在一个线性生灭过程中, 假定人口中的每一个人在间隔  $(t, t + \Delta t)$  内以概率  $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$  生一个儿女, 假定这些人是统计独立的, 则如果在时刻  $t$  人口中有  $n$  个人, 则在  $(t, t + \Delta t)$  中出生的概率是  $n\lambda + o(\Delta t)$ 。同样, 如果在  $(t, t + \Delta t)$  内一个人死亡的概率是  $\mu \Delta t + o(\Delta t)$ , 则如果在  $t$  时刻有  $n$  个人活着, 在  $(t, t + \Delta t)$  中死亡的概率是  $n\mu + o(\Delta t)$ 。

这样, 在一个线性的生灭过程  $X(t)$  中,  $\lambda_n = n\lambda$ ,  $\mu_n = n\mu$ , ( $n = 0, 1, 2$ ), 和  $X(t_0) = n_0$  是在  $t = 0$  时人口中的个人数目。

定义

$$M_X(t) = E[X(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n(t)$$

其中  $p_n(t)$  是时刻  $t$  处于状态  $n$  的无条件概率。

(1) 写出由  $p_n(t)$  确定的微分方程。

(2) 导出  $M_X(t)$  的微分方程。

(3) 求  $M_X(t)$ 。

解 (1) 首先写出如下矩阵:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu & -2(\mu + \lambda) & 2\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & (n-1)\mu & -(n-1)(\lambda + \mu) & \cdots & (n-1)\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n\mu & \cdots & -n(\mu + \lambda) & n\lambda \end{bmatrix} \quad (1)$$

记下矩阵中的各列,可得到

$$\dot{p}_0(t) = \mu p_1(t) \quad (2)$$

$$\dot{p}_1(t) = -(\mu + \lambda)p_1(t) + 2\mu p_2(t) \quad (3)$$

.....

$$\dot{p}_n(t) = (n-1)\lambda p_{n-1}(t) - n(\mu + \lambda)p_n(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t), \quad n \geq 1 \quad (4)$$

(2) 由定义得

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t) \quad (5)$$

用  $n$  乘(4)式的两边,并从 1 到  $\infty$  对(4)式求和,得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \dot{p}_n(t) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) n p_{n-1}(t) - (\mu + \lambda) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n(t) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) p_{n+1}(t) \quad (6)$$

根据(5)式可以看出(6)式的左端是  $\dot{M}_X(t)$ 。为了计算右端,修改求和的下标,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) n p_{n-1}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} m(m+1) p_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1) p_m(t) \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) p_{n+1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) p_{n+1}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (m-1) m p_m(t) \quad (8)$$

将(7)式和(8)式代入(6)式中得

$$\dot{M}_X(t) = \sum_{m=1}^{\infty} [\lambda(m^2 + m) - (\mu + \lambda)m^2 + \mu(m^2 - m)] p_m(t)$$

(3) 因为

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\lambda - \mu) m p_m(t) = (\lambda - \mu) M_X(t) \quad (9)$$

初始条件是

$$M_X(0) = n_0$$

所以其解为

$$M_X(t) = n_0 e^{(\lambda - \mu)t}, \quad t \geq 0$$

## 6.3 练习题

6.1 一质点在区间  $[0, 4]$  中随机游动,在 0 点以概率 1 向右游动,在 4 点以概率 1 向左游动,在其他各点上各以概率  $1/3$  向左右游动或留在原地。求转移概率矩阵。

6.2 改动练习题 6.1 的端点条件,在 0 点以概率  $1/2$  向右游动,以概率  $1/2$  留在原地;在 4 点以概率  $1/2$  向左游动,以概率  $1/2$  留在原地。求转移概率矩阵。

6.3 设  $P^{(n)}$  是某个马尔可夫链的  $n$  步转移矩阵 ( $n \geq 1$ ),  $P^{(1)} = P$  是其(一步)转移矩阵,则有

$$P^{(n)} = P^n$$

及

$$P^{(n)} P^{(m)} = P^{(n+m)}, \quad n, m \geq 1$$

6.4 设

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \quad 0 < a, b < 1$$



求证

$$P^n = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b} \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$$

6.5 设某容器内之质点,每隔一个单位时间发生一次变化,已在其内之某点可逃离此容器(其概率为  $q$ ),也可留在其内(其概率为  $p$ ),  $p+q=1$ 。不在其内之质点也可进入其内,进入的个数服从强度为  $\lambda$  的泊松分布  $\left\{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k=0,1,2,\dots\right\}$ 。假定各质点之出、入、留是相互独立的,令  $X_n$  表时刻  $n$  此容器内之质点个数,则  $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$  是一个时齐的可数状态的马尔可夫链。

6.6 考虑在直线上整数点的随机游动,对于一切整数  $i$ ,有  $p_{i,i+1}=p$  和  $p_{i,i-1}=q$  ( $0 < p < 1, p+q=1$ ),求  $p_{00}^{(n)}$ 。

6.7 马尔可夫链的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) 求自第二个状态出发经过几步可转移到第三状态;

(2) 求两步转移概率矩阵。

6.8 讨论有限马尔可夫链的状态的分类、周期及平稳分布,假设转移概率矩阵如下:

(1)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$

(2)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$

(3)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

(4)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

(5)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$

(6)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

6.9 对于一个反射壁,考虑一随机徘徊矩阵,其中  $p_{i,i+1}=p, p_{i,i-1}=q (i=2,3,\dots)$  且  $p_{12}=p, p_{11}=q$ . 试证明如果  $p>q$ , 则状态是非常返的; 如果  $p=q$ , 则状态是常返零状态. 并求其平稳分布.

6.10 对于两个反射壁,设链的状态为  $1,2,\dots,n$ , 其转移概率矩阵的第一行和最后一行分别为  $(q,p,0,\dots,0)$  与  $(0,\dots,0,q,p)$ . 在所有其他各行中,  $p_{i,i+1}=p, p_{i,i-1}=q$ . 试求平稳分布.

6.11\* 证明一个对角线上的元素  $p_{ii}$  为正的不可约链不可能是周期的.

6.12 证明: 若随机变量  $X_0, X_1, \dots, X_N$  是马尔可夫链, 则随机变量  $Y_k = X_{N-k}$  也是马尔可夫链.

6.13\* 证明在齐次马尔可夫链中, 状态  $E_i$  是常返的充要条件是级数  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$  发散.

6.14 考虑具有两个状态  $I_1$  和  $I_2$  的马尔可夫链, 其转移概率为  $p_{11}=p_{22}=p, p_{12}=p_{21}=q (0<p<1, p+q=1)$ , 初始概率为  $P\{X_0=I_1\}=a, P\{X_0=I_2\}=1-a$ . 求  $\{p_{ii}^{(n)}\}, p_i(n)=P\{X_n=I_i\}$  以及对应的极限概率  $p_i$ .

6.15\* 证明有限的、不可约的马尔可夫链是非周期的, 当且仅当存在数  $n$ , 使得对于所有  $i$  及  $k$  都有  $p_{ii}^{(n+k)}>0$ .

6.16 一个航空订票系统有两台相同的计算机, 每天至多使用其中的一台机器. 工作着的机器在一天内损坏的概率为  $p$ , 车间只有一个修理工, 一次只能修理一台计算机, 且要花两天时间才能修复. 当一台机器损坏后, 当天即停止使用, 如果另一台是好的, 第二天就用这台好的, 而修理那台坏的 (以一天作为一个时间单位). 系统的状态可以用数偶  $(x, y)$  表示, 其中  $x$  是一天结束时仍没有损坏的台数, 而当损坏的计算机已被修理工修理了一天时,  $y$  取值为 1, 其他情况  $y$  取值为 0, 说明这个系统可以用马尔可夫链描述.

(1) 写出转移概率矩阵;

(2) 求平稳分布.

6.17 考虑一个典型矩阵, 它是一个具有 9 个状态  $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  的马尔可夫链的一步转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵中 \* 号表示具有正概率的元素. 试对其状态进行分类.

6.18 设有四个状态  $\{0,1,2,3\}$  的马尔可夫链, 它的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

试对其状态进行分类。

6.19 设  $X$  为一马尔可夫链, 其状态空间为

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

试画出其状态转移图。该过程是否具有周期性?

6.20\* 设马尔可夫链具有两个状态  $\{0, 1\}$ , 其  $Q$  矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu > 0$$

证明转移概率矩阵为

$$P(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \end{pmatrix}$$

6.21 由马尔可夫序列的定义, 证明  $E\{X_n | X_{n-1}, \dots, X_1\} = E\{X_n | X_{n-1}\}$ 。

6.22\* 设  $\{X_n, n=0, 1, 2, \dots\}$  是分支过程, 即是

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} \xi_{n+1}^{(i)}, \quad n \geq 0$$

$\{X_0, \xi_n^{(i)}, i=1, 2, \dots; n=1, 2, \dots\}$  是相互独立具有公共分布的随机变量族

$$P(\xi_n^{(i)} = k) = p_k, \quad i \geq 1, n \geq 1, k \geq 0$$

$$p_k \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1, \quad f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

则  $\{X_n, n=0, 1, 2, \dots\}$  是时齐的可数状态的马尔可夫链, 其状态空间为  $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ , 其

(一步)转移概率

$$p_{ij} = P(X_n = j | X_{n-1} = i), \quad n \geq 1$$

的矩母函数为

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} s^j = [f(s)]^i$$

6.23 对任一齐次的可数状态的马尔可夫过程  $\{X(t), t \in T\}$  的转移概率矩阵  $P(t)$ , 则有

$$P(s+t) = P(s)P(t), \quad s, t \geq 0$$

6.24 给定一个随机过程  $X(t)$ , 且

$$X_i = X(t_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

为独立随机变量序列, 构造一个新随机变量序列为

$$Y_1 = Y(t_1) = X_1, \quad Y_n + cY_{n-1} = X_n, \quad n \geq 2$$

其中  $c$  为常数. 求证  $Y(t)$  是马尔可夫过程.

6.25 设  $X(t)$  是离散马尔可夫过程, 且有

$$P\{X(t+\Delta t) = a_i | X(t) = a_i\} = 1 - q_i \Delta t$$

试证  $X(t)$  在区间  $(t, t+\tau)$  内的值是常数  $a_i$  的概率等于  $e^{-\tau}$ .

6.26 用  $X(t)$  表示在一个出生率为零的社会里, 时刻  $t$  的人口总数. 这个过程也可以描述在一个系统里, 在时刻  $t$  保持完好的组件数  $n(t)$ . 于是,  $X(t)$  是个取整数值的下降函数. 若在一个长为  $\Delta t$  的区间里, 死亡者多于一个的概率是  $(\Delta t)^2$  阶的, 那么有

$$P\{X(t+\Delta t) = i | X(t) = i\} = 1 - q_i \Delta t$$

$$P\{X(t+\Delta t) = i-1 | X(t) = i\} = q_i \Delta t$$

假定  $X(0) = n$  和  $q_i = iq$ , 令

$$P_n(t) = P\{X(t) = n | X(0) = N\}$$

于是就有

$$\frac{dP_N(t)}{dt} = -NqP_N(t)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -nqP_n(t) + (n+1)qP_{n+1}(t), \quad n < N$$

初始条件是  $P_N(0) = 1$ , 而对  $n < N$ ,  $P_n(0) = 0$ . 试求  $P_n(t)$ ,  $E\{X(t)\}$  和  $\sigma_X^2$ .

6.27 考虑具有  $k$  个通道的电话交换机, 当所有的  $k$  条线都占用时, 一次呼叫来到则就丢失了, 呼叫电话规律服从比率为  $\lambda$  的泊松过程, 呼叫的长短是具有平均值  $1/\mu$  的独立指数分布的随机变量.

(1) 写出前向科尔莫戈罗夫方程;

(2) 求平稳分布.

6.28 设一有限马尔可夫链有  $r$  个状态, 且  $i \rightarrow j$ , 证明: 必有  $n$  使  $1 \leq n \leq r$  及  $p_{ij}^{(n)} > 0$ .

6.29 证明: 有限马尔可夫链为遍历不可约的条件为, 存在  $n \geq 1$ , 对于所有  $i$  和  $j$ , 都有  $p_{ij}^{(n)} > 0$ .

6.30 设信号模型为

$$\dot{X}(t) = -aX(t) + W(t)$$

并有  $X(0)=0, m_{X_0}=0, \sigma_{X_0}^2=0, m_W=E[W(t)], \sigma_W^2=\text{var}[W(t)]$ 。试求均值和方差。

6.31 如果一篇文稿共有  $k$  个错误, 每校阅一次至少能发现一个错误, 但遗留下来的错误个数在  $0 \sim k-1$  之间是等可能的。求改正全部错误所需要校阅次数的数学期望。

6.32 设随机过程  $\{X(t), t \geq t_0\}$  有下述方程确定:

$$\dot{X}(t) = \frac{1}{t+1} X(t)$$

其中  $X(t_0)$  是零均值、方差为  $\sigma_0^2 > 0$  的高斯随机变量。试证明  $\{X(t), t \geq t_0\}$  是一个高斯-马尔可夫过程。



# 估计理论

## 第七章

### CHAPTER 7

## 7.1 内容提要

### 7.1.1 匹配滤波

匹配滤波器的应用十分广泛,它可以提高无线电系统检测信号的能力,在最佳信号参量估计、信号分辨、某些信号波形的产生和压缩等方面起着十分重要的作用。

所谓匹配滤波器就是这样一个最佳线性滤波器,在输入为已知信号加白噪声的条件下,使得输出的信噪比最大。

#### 1. 输出信噪比最大的线性滤波器

设线性滤波器的输入波形  $x(t)$  为

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

式中  $s(t)$  为已知波形的信号,  $n(t)$  为零均值,功率谱为  $G_n(\omega)$  的平稳随机噪声,于是可以得到使输出信噪比最大的线性滤波器的传递函数为

$$H(\omega) = c \frac{S^*(\omega)}{G_n(\omega)} e^{-j\omega t_0}$$

式中  $c$  为常数,  $S(\omega)$  是信号  $s(t)$  的功率谱,且

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

通过最佳线性滤波器得到最大输出信噪比  $d_m$  为

$$d_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{G_n(\omega)} d\omega$$

输出信号  $s_0(t)$  为

$$s_0(t) = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{G_n(\omega)} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega$$

由此式可以看出,当  $t=t_0$  时,输出信号值  $s_0(t_0)$  最大,是输出波形  $s_0(t)$  的尖峰。

#### 2. 匹配滤波器

如果输入为已知信号  $s(t)$  加白噪声  $n(t)$ ,那么使输出信噪比最大的最佳线性滤波器是一个匹配滤波器。此时,因

$$G_n(\omega) = \frac{N_0}{2}$$

于是,匹配滤波器的传输函数为

$$H(\omega) = cS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

式中  $c$  为常数。

对于实信号有

$$h(t) = cs(t_0 - t)$$

匹配滤波器输出的最大信噪比为

$$d_m = \frac{1}{2\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{2E}{N_0}$$

式中

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$$

## 7.1.2 信号参量估计

在随机信号受到噪声污染的情况下,人们希望从观测到的样本函数中对信号的某些未知参数进行估计,这类问题称为估计问题。

实际问题中,如观测到的随机函数为  $x(t) = s(t) + n(t)$ ,其中  $n(t)$  代表随机噪声,  $s(t)$  代表随机信号,于是  $x(t)$  代表观测到的样本函数。估计问题是从观测到的样本函数  $x(t)$  中对信号  $s(t)$  的某些未知参数进行估计。

### 1. 估计量及其性质

在估计问题中,根据对系统输入

$$x(t) = s(t; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) + n(t)$$

的一组测量值

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$$

来估计信号的参量

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$$

把测量值  $x$  的函数  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x)$  称为  $\theta$  的估计量,其中

$$\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m)$$

而其中  $\hat{\theta}_k$  表示第  $k$  个参量的估计值。可见估值依赖于观测样本,因此,它是随机变量。

估计量的性能标准如下。

(1) 无偏性 若估计量的均值等于非随机参量的真值

$$E[\hat{\theta}] = \theta$$

或等于随机参量的均值

$$E[\hat{\theta}] = E[\theta]$$

则称估计量具有无偏性,是无偏估计量,否则就是有偏的。

(2) 有效性 使估计方差最小的估计称为有效估计。



对于无偏估计量,其方差为

$$\text{var}[\hat{\theta}] = E\{[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2\} = E\{[\hat{\theta} - E(\theta)]^2\}$$

我们希望方差越小越好,若

$$\text{var}[\hat{\theta}_1] < \text{var}[\hat{\theta}_2]$$

则称估计 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效,能达到最小方差的估计量称为有效估计量。最小方差可由克拉默-拉奥不等式给出。

克拉默-拉奥下界

非随机参量的估计方差的下界为

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{\theta} - \theta | \theta] &= E[(\hat{\theta} - \theta)^2 | \theta] \\ &\geq \left\{ E\left[ \left( \frac{\partial \ln p(x | \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \middle| \theta \right] \right\}^{-1} \end{aligned}$$

对于随机参量的估计方差的下界,按照类似方差可以导出其结果,即为

$$\begin{aligned} E[(\hat{\theta} - \theta)^2] &\geq \left\{ E\left[ \left( \frac{\partial \ln p(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\}^{-1} \\ &= \left\{ -E\left[ \left( \frac{\partial^2 \ln p(x, \theta)}{\partial^2 \theta} \right) \right] \right\}^{-1} \end{aligned}$$

只有下述条件满足时,上式才能取等号:

$$\frac{\partial \ln p(x, \theta)}{\partial \theta} = (\hat{\theta} - \theta)K$$

式中 $K$ 不能是 $x, \hat{\theta}$ 及 $\theta$ 的函数。

(3) 一致性 若对于任意正数 $\epsilon$ ,存在一个数 $N$ ,使得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{|\theta - \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_N)| < \epsilon\} = 1$$

则称估计 $\hat{\theta}$ 是 $\theta$ 的一致估计量。

(4) 充分性 设有参量 $\theta$ 及其估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x)$ ,如果 $\theta$ 的似然函数 $p(x|\theta)$ 可分解成

$$p(x|\theta) = g[\hat{\theta}(x)|\theta]h(x), \quad h(x) \geq 0$$

则称 $\hat{\theta}(x)$ 为 $\theta$ 的充分估计量,式中 $h(x)$ 与 $\theta$ 无关, $g[\hat{\theta}(x)|\theta]$ 是 $\hat{\theta}(x)$ 的函数,与 $\theta$ 有关,它可以是估计量 $\hat{\theta}$ 的密度函数。

## 2. 贝叶斯估计

设 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ 代表 $m$ 个参量, $\hat{\theta}$ 表示真值 $\theta$ 的估计量。 $C(\theta, \hat{\theta})$ 表示标量代价函数,显然它与估计误差有关。可以写出三种典型的代价函数:

(1) 误差平方代价函数

$$C(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$$

(2) 误差绝对值代价函数

$$C(\theta, \hat{\theta}) = |\theta - \hat{\theta}|$$

## (3) 均匀代价函数

$$C(\theta, \hat{\theta}) = \begin{cases} 1, & |\theta - \hat{\theta}| \geq \frac{\Delta}{2} \\ 0, & |\theta - \hat{\theta}| < \frac{\Delta}{2} \end{cases}$$

当给定观测结果  $x$  时, 条件平均代价函数为

$$R(\hat{\theta} | x) = \int_{(\theta)} C(\theta, \hat{\theta}) p(\theta | x) d\theta$$

总的平均代价为

$$R(\hat{\theta}) = \int_{(x)} R(\hat{\theta} | x) p(x) dx$$

平均代价最小的准则称为贝叶斯准则。根据此准则得到的估值称为贝叶斯估计。

综合上述三种典型代价函数, 可以导出下面三种重要的估计准则。

(1) 最小均方估计 对于误差平方代价函数, 条件平均代价函数为

$$R(\hat{\theta} | x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\theta - \hat{\theta})^2 p(\theta | x) d\theta$$

为选取最佳估计, 要使平均代价函数最小, 只要将上式对  $\hat{\theta}$  求导, 并令其等于零, 可得

$$\hat{\theta}_m = \int_{-\infty}^{\infty} \theta p(\theta | x) d\theta$$

$\hat{\theta}_m$  所对应的平均代价是极小值, 它使估计的均方误差最小, 称为最小均方估计。由上式可以看出,  $\hat{\theta}_m$  恰好等于条件均值  $E[\theta | x]$ , 故最小均方估计又称为条件均值估计。

(2) 条件中位数估计 对于绝对误差代价函数, 条件平均代价函数为

$$\begin{aligned} R_{abs}(\hat{\theta} | x) &= \int_{-\infty}^{\infty} |\theta - \hat{\theta}| p(\theta | x) d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\hat{\theta}} -(\theta - \hat{\theta}) p(\theta | x) d\theta + \int_{\hat{\theta}}^{\infty} (\theta - \hat{\theta}) p(\theta | x) d\theta \end{aligned}$$

将上式对  $\hat{\theta}$  求导, 并令其等于零, 可得

$$\int_{-\infty}^{\hat{\theta}_{abs}} p(\theta | x) d\theta = \int_{\hat{\theta}_{abs}}^{\infty} p(\theta | x) d\theta$$

由此式可见平均绝对误差最小的估计  $\hat{\theta}_{abs}$  是条件概率密度  $p(\theta | x)$  的中位数, 故  $\hat{\theta}_{abs}$  又称作条件中位数估计  $\hat{\theta}_{med}$ , 且有

$$\hat{\theta}_{abs} = \hat{\theta}_{med}$$

(3) 最大后验概率估计 对于均匀代价函数, 条件平均代价函数为

$$R_{unf}(\hat{\theta} | x) = 1 - \int_{\hat{\theta}_{unf} - \frac{\Delta}{2}}^{\hat{\theta}_{unf} + \frac{\Delta}{2}} p(\theta | x) d\theta$$

故若要使  $R_{unf}(\hat{\theta} | x)$  最小, 则需右边积分最大。对于很小的  $\Delta$  而言, 为了使积分值最大, 应当选择  $\hat{\theta}_{unf}$  处在  $p(\theta | x)$  最大处, 亦即  $\hat{\theta}_{unf}$  与使后验概率密度  $p(\theta | x)$  最大的  $\hat{\theta}_{map}$  一致, 故又称为最大后验概率估计。于是, 由此导出最大后验概率方程为

$$\left. \frac{\partial p(x|\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_{\text{map}}} = 0$$

或

$$\left. \frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_{\text{map}}} = 0$$

利用关系式

$$p(\theta|x) = \frac{p(x,\theta)p(\theta)}{p(x)}$$

又可得

$$\left[ \frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \ln p(\theta)}{\partial \theta} \right]_{\theta=\hat{\theta}_{\text{map}}} = 0$$

其中第一项依赖于观测数据  $x$ , 第二项与参量先验概率有关。求解上式, 即可得到最大后验概率估计量  $\hat{\theta}_{\text{map}}$ 。

### 3. 最大似然估计

对于最大后验概率估计  $\hat{\theta}_{\text{map}}$  应满足下述方程的解:

$$\left[ \frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \ln p(\theta)}{\partial \theta} \right]_{\theta=\hat{\theta}_{\text{map}}} = 0$$

如果不能提供先验概率  $p(\theta)$ , 那么只能用上式右边第一项来决定参量  $\theta$  的估计量  $\hat{\theta}$ , 这种估计称为最大似然估计。它是使  $\theta$  的似然函数  $p(x|\theta)$  最大的估计, 并用  $\hat{\theta}_{\text{ml}}$  表示。于是

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(x|\theta) \right|_{\theta=\hat{\theta}_{\text{ml}}} = 0$$

称为最大似然方程。求解最大似然方程可以得到最大似然估计量  $\hat{\theta}_{\text{ml}}$ 。

### 4. 线性最小均方估计

设随机参量  $\theta$  与观测数据随机变量  $x$  有关, 且  $\theta$  在观测过程中不变, 根据  $N$  个观测数据  $x=(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , 对参量  $\theta$  做线性最小均方估计  $\hat{\theta}_{\text{lms}}$ 。为此先规定估计量具有线性函数

$$\hat{\theta}_{\text{lms}} = \sum_{k=1}^N h_k x_k + b$$

再选择适当的权重系数  $h_k$  及  $b$ , 使得估计的均方误差最小, 即使

$$\begin{aligned} E[\hat{\theta}] &= E[(\theta - \hat{\theta}_{\text{lms}})^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{(x)} (\theta - \hat{\theta}_{\text{lms}})^2 p(x, \theta) dx d\theta \end{aligned}$$

于是可以得到线性最小均方估计。其中

$$b = E[\theta] - \sum_{k=1}^N h_k E[x_k]$$

$$E[\hat{\theta} x_j] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

## 5. 最小二乘估计

设观测模型是线性的, 即观测数据  $x$  与参量  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  之间服从下面的线性关系:

$$x = c_1\theta_1 + c_2\theta_2 + \dots + c_m\theta_m + n$$

式中  $c_1, c_2, \dots, c_m$  是已知的常系数,  $n$  是观测噪声。若做了  $N$  次观测, 得到了  $N$  个类似的线性方程如下:

$$x_k = c_{k1}\theta_1 + c_{k2}\theta_2 + \dots + c_{km}\theta_m + n, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

用矢量及矩阵表示, 可写成

$$x = c\theta + n$$

式中

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$$

$$n = [n_1, n_2, \dots, n_N]^T$$

$$\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m]^T$$

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{Nm} \end{bmatrix}$$

当  $N \geq m$  时, 方程的数目多于未知数的数目。可以根据  $x$  来估计  $\theta$ 。若

$$R(\hat{\theta}) = (x - c\hat{\theta})^T(x - c\hat{\theta})$$

达到极小, 则称这个估计  $\hat{\theta}$  为最小二乘估计, 并用  $\hat{\theta}_{ls}$  表示。若果将此式展开又可得到

$$R(\hat{\theta}) = \sum_{k=1}^N \left( x_k - \sum_{j=1}^m c_{kj} \hat{\theta}_j \right)^2$$

可以看出  $R(\hat{\theta})$  代表各次观测值对估计偏差的平方和, 反映了  $N$  次观测总误差程度。令

$$\frac{\partial R(\hat{\theta})}{\partial \theta} = 0$$

则得

$$\hat{\theta}_{ls} = (c^T c)^{-1} c^T x$$

这便是最小二乘估计的表示式, 它只与观测数据  $x$  及观测系数  $c$  有关。

若设观测矢量噪声  $n$  的均值为零, 则有

$$\begin{aligned} E[\hat{\theta}_{ls}] &= (c^T c)^{-1} c^T E[x] \\ &= (c^T c)^{-1} c^T E[c\theta + n] \\ &= E[\theta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{\theta}_{ls}] &= E[(\theta - \hat{\theta}_{ls})(\theta - \hat{\theta}_{ls})^T] \\ &= (c^T c)^{-1} c^T V_n c (c^T c)^{-1} \end{aligned}$$

式中,  $V_n = E[nn^T]$ 。

### 7.1.3 波形估计

在处理器结构规定为线性的条件下,以波形均方误差最小为准则解决对随机过程的估计问题称为波形估计。

在研究信号参量估计问题时,曾假定信号参量在全部观测时间内是不变的,若在观测时间内,信号参量随着时间随机地变化,那么参量估计问题就转化为信号波形估计的问题。

在分析和讨论中,将关心三种基本的波形估计问题,即所谓最佳预测、滤波和平滑。假定在 $(0, T)$ 时间内的观测波形为

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

式中 $s(t)$ 代表被估计的波形,或是与被估计波形有关的信号; $n(t)$ 是观测噪声。最佳估计是指从观测到的 $x(t)$ 对 $s(t+a)$ 进行估计,使

$$E\{\left[\hat{s}(t+a) - s(t+a)\right]^2\} = E\{[s(t+a) - \hat{s}(t+a)]^2\}$$

最小。于是根据 $a$ 的范围可以分为以下三类问题:

- (1) 若 $a > 0$ ,则 $\hat{s}(t+a)$ 称为 $s(t+a)$ 的最佳预测(或外推);
- (2) 若 $a = 0$ ,则 $\hat{s}(t)$ 称为 $s(t)$ 的最佳滤波;
- (3) 若 $a < 0$ ,则 $\hat{s}(t+a)$ 称为 $s(t+a)$ 的最佳平滑(或内插)。

#### 1. 维纳滤波

维纳滤波理论所解决的问题是在最小均方误差准则下的线性滤波问题。

设线性滤波器的输入为混合信号,即

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

则滤波器的输出为

$$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

式中 $h(\tau)$ 表示线性滤波器的冲击响应。

为了使估计的均方误差最小,运用正交性原理使估计误差与观测数据正交,即

$$E\left\{\left[s(t) - \int_{-\infty}^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau\right]x(\tau)\right\} = 0, \quad -\infty < \tau < t$$

或用相关函数表示为

$$R_{ix}(\eta) = \int_0^\infty h(\lambda)R_x(\eta-\lambda)d\lambda, \quad 0 < \eta < \infty$$

上式称为维纳-霍普夫积分方程。

求解维纳-霍普夫积分方程。

(1) 解非因果关系的维纳-霍普夫积分方程

$$R_{ix}(\eta) = \int_{-\infty}^\infty h(\lambda)R_x(\eta-\lambda)d\lambda, \quad -\infty < \eta < \infty$$

于是得到

$$H(\omega) = \frac{G_s(\omega)}{G_s(\omega) + G_n(\omega)}$$

和

$$\text{var}[\tilde{s}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_s(\omega)G_n(\omega)}{G_s(\omega) + G_n(\omega)} d\omega$$

(2) 解因果关系的维纳-霍普夫积分方程

$$R_{sx}(\eta) = \int_0^{\infty} h(\lambda) R_s(\eta - \lambda) d\lambda, \quad 0 < \eta < \infty$$

于是得到

$$H(S) = \frac{1}{G^+(S)} \left[ \frac{G_{sx}(S)}{G_x(S)} \right]^+$$

$$\text{var}[\tilde{s}] = R_s(0) - \int_0^{\infty} h(\lambda) R_{sx}(\lambda) d\lambda$$

## 2. 标量信号的卡尔曼滤波和预测

(1) 信号模型和观测模型分别为

$$s(k) = as(k-1) + u(k-1)$$

$$x(k) = s(k) + n(k)$$

式中  $a$  为常数, 与信号统计特性有关。

(2) 先验统计特性

$$E[u(k)] = 0, \quad E[n(k)] = 0$$

$$E[u(k)u(j)] = \sigma_u^2 \delta_{kj}$$

$$E[n(k)n(j)] = \sigma_n^2 \delta_{kj}$$

$$E[u(k)n(k)] = 0$$

(3) 卡尔曼滤波及预测算法

滤波方程

$$\hat{s}(k) = a(k)s(k-1) + b(k)x(k)$$

式中  $b(k)$  为滤波增益,  $a(k)$  为加权系数, 且有

$$a(k) = a[1 - b(k)]$$

其中  $a$  为信号模型参数。

滤波增益方程为

$$b(k) = \frac{A + a^2 b(k-1)}{1 + A + a^2 b(k-1)}$$

式中  $A = \sigma_u^2 / \sigma_n^2$  为信噪比。

滤波的均方误差方程为

$$e(k) = E[s^2(k)]$$

$$= E\{\tilde{s}(k)[s(k) - \hat{s}(k)]\}$$

$$= E[\tilde{s}(k)s(k)] - a(k)E[\tilde{s}(k)\tilde{s}(k-1)] - b(k)E[\tilde{s}(k)x(k)]$$

由于正交条件

$$E[\tilde{s}(k)\tilde{s}(k-1)] = 0$$

$$E[\tilde{s}(k)x(k)] = 0$$

故有

$$e(k) = E[\hat{s}(k)s(k)]$$

此式表明,滤波的均方误差等于误差 $\hat{s}(k)$ 与被估计信号 $s(k)$ 乘积的数学期望。

一步预测为

$$\hat{s}(k+1|k) = a(k)\hat{s}(k|k-1) + \beta(k)x(k)$$

式中 $\beta(k)$ 是时变的预测增益,而权重系数

$$a(k) = \alpha - \beta(k)$$

于是一步预测方程又可写成

$$\hat{s}(k+1|k) = \alpha\hat{s}(k|k-1) + \beta(k)[x(k) - \hat{s}(k|k-1)].$$

预测均方误差为

$$\begin{aligned} e(k+1|k) &= E[s^2(k+1|k)] \\ &= E[\hat{s}(k+1|k)s(k+1)] \end{aligned}$$

考虑到

$$\begin{aligned} a(k) &= \alpha - \beta(k) \\ \sigma_u^2 &= (1 - a^2)\sigma_s^2 \end{aligned}$$

故预测均方误差又可表示为

$$e(k+1|k) = \alpha^2 e(k|k-1) - \alpha\beta(k)e(k|k-1) + \sigma_u^2$$

预测增益方程为

$$\beta(k) = \frac{\alpha e(k|k-1)}{e(k|k-1) + \sigma_u^2}$$

### 3. 矢量信号的卡尔曼滤波和预测

#### (1) 信号模型和观测模型

$$\begin{aligned} s(k+1) &= \varphi(k+1, k)s(k) + \Gamma(k)u(k) \\ x(k) &= c(k)s(k) + n(k) \end{aligned}$$

#### (2) 先验统计特性

$$\begin{aligned} E[u(k)] &= 0, \quad E[n(k)] = 0 \\ E[u(k)u^T(j)] &= V_u(k)\delta_{kj} \\ E[n(k)n^T(j)] &= V_n(k)\delta_{kj} \\ E[u(k)n^T(k)] &= 0 \\ E[s(0)] &= m_s(0) \\ E\{[s(0) - m_s(0)][s(0) - m_s(0)]^T\} &= V_s(0) \end{aligned}$$

#### (3) 卡尔曼滤波及预测算法

估计器为

$$\begin{aligned} \hat{s}(k|k) &= \varphi(k, k-1)\hat{s}(k-1|k-1) + K(k)w(k) \\ \hat{s}(k+1|k) &= \varphi(k+1, k)\hat{s}(k|k-1) + K(k+1, k)w(k) \\ w(k) &= x(k) - c(k)\hat{s}(k|k-1) \\ \hat{s}(k+1|k) &= \varphi(k+1, k)s(k|k) \end{aligned}$$

其增益为

$$K(k) = V_r(k | k-1) c^T(k) V_w^{-1}(k)$$

$$K(k+1, k) = \varphi(k+1, k) K(k)$$

$$K(k) = V_r(k) c^T(k) V_n^{-1}(k)$$

其方差为

$$V_w(k) = c(k) V_r(k | k-1) c^T(k) + V_n(k)$$

$$V_r(k | k) = [I - K(k) c(k)] V_r(k | k-1)$$

$$V_r(k+1 | k) = \varphi(k+1, k) V_r(k | k) \varphi^T(k+1, k) + \Gamma(k) V_n(k) \Gamma^T(k)$$

$$V_r^{-1}(k) = V_r^{-1}(k | k-1) + c^T(k) V_n^{-1}(k) c(k)$$

(4) 起始条件

$$\hat{s}(0) = m_s(0)$$

$$V_r(0) = V_s(0)$$

#### 4. 连续时间的卡尔曼滤波

(1) 信号模型和观测模型

$$\dot{s}(t) = \varphi(t) s(t) + \Gamma(t) u(t)$$

$$x(t) = c(t) s(t) + n(t)$$

(2) 先验统计特性

$$E[u(t)] = E[n(t)] = 0$$

$$E[u(t) u^T(\tau)] = V_u(t) \delta(t - \tau)$$

$$E[n(t) n^T(\tau)] = V_n(t) \delta(t - \tau)$$

$$E[u(t) n^T(t)] = 0$$

(3) 卡尔曼滤波算法

滤波方程为

$$\hat{s}(t | t) = \varphi(t) \hat{s}(t | t) + K(t) w(t)$$

$$= \varphi(t) \hat{s}(t | t) + K(t) [x(t) - c(t) \hat{s}(t | t)]$$

滤波增益方程为

$$K(t) = V_r(t | t) c^T(t) V_n^{-1}(t)$$

滤波误差的方差方程为

$$\dot{V}_r(t | t) = \varphi(t) V_r(t | t) + V_r(t | t) \varphi^T(t) + \Gamma(t) V_u(t) \Gamma^T(t) -$$

$$V_r^{-1}(t | t) c^T(t) V_n^{-1}(t) c(t) V_r^{-1}(t | t)$$

其中

$$\bar{s}(t) = s(t) - \hat{s}(t | t)$$

(4) 无偏估计起始条件

$$\hat{s}(0) = E[s(0)]$$

$$V_r(0) = \text{var}[s(0)]$$



## 7.2 例题

例 7.1 设线性滤波器的输入信号为

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

其中信号

$$s(t) = \begin{cases} Ae^{a(t-T)}, & t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

为指数视频脉冲,如例题图 7.1A 所示。 $n(t)$  为平稳白噪声,且与  $s(t)$  统计独立。试求匹配滤波器的传输函数  $H(\omega)$ , 并画出电路示意图。

解 先求信号  $s(t)$  的频谱

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{a - j\omega} e^{-j\omega T}$$

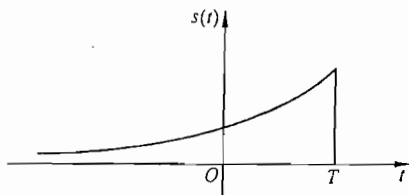
匹配滤波器传输函数为

$$H(\omega) = c S^*(\omega) e^{-j\omega t_0} = cA \frac{e^{j\omega T}}{a + j\omega} e^{-j\omega t_0}$$

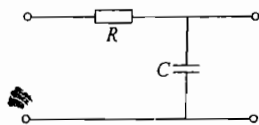
如取  $t_0 = T$ , 则有

$$H(\omega) = \frac{A}{a + j\omega}$$

相应电路如例题图 7.1B 所示。



例题图 7.1A



例题图 7.1B

例 7.2 设具有最大信噪比的最佳线性滤波器的输入混合信号为

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

其中信号

$$s(t) = A \exp\left(-\frac{t^2}{4a^2}\right)$$

噪声  $n(t)$  的功率谱密度为

$$G_n(\omega) = N_0 \exp(-\beta^2 \omega^2)$$

且  $n(t)$  与  $s(t)$  统计独立,  $\beta \ll a$ 。试求该线性滤波器的传输函数和冲激响应。

解 先计算输入信号的频谱

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = 2aA \sqrt{\pi} e^{-a^2 \omega^2}$$

故线性滤波器的传输函数为

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= c \frac{S^*(\omega)}{G_n(\omega)} e^{-j\omega t_0} \\
 &= K_0 \exp[-(\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 - j\omega t_0]
 \end{aligned}$$

相应的冲激响应为

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= K' \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \exp\left[-\frac{(t_0 - t)^2}{4(\alpha^2 - \beta^2)}\right]
 \end{aligned}$$

考虑到  $\beta \ll \alpha$ , 故又可得到

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= K_0 \exp(-\alpha^2 \omega^2 - j\omega t_0) \\
 h(t) &= K \exp\left[-\frac{(t - t_0)^2}{4\alpha^2}\right]
 \end{aligned}$$

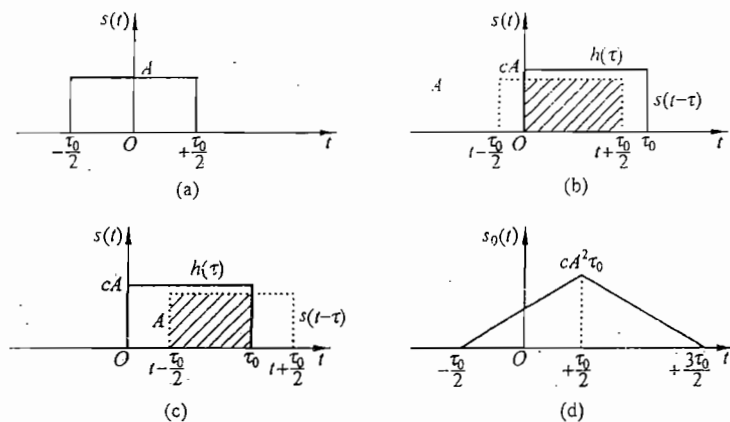
例 7.3 设输入为混合信号, 即有

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

其中输入信号  $s(t)$  为单个矩形视频脉冲

$$s(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \frac{\tau_0}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau_0}{2} \end{cases}$$

波形如例题图 7.3A(a) 所示。 $n(t)$  为白噪声, 其功率谱为  $N_0$ 。试求匹配滤波器的传输函数  $H(\omega)$ 、物理可实现的冲激响应  $h(t)$  和输出信号  $s_0(t)$  的波形。



例题图 7.3A

解 输入信号的频谱为

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = 2A \int_0^{\tau_0/2} \cos \omega t dt = A\tau_0 \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right)$$

于是求得匹配滤波器的传输函数为

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= c \left[ A\tau_0 \text{Sa} \left( \frac{\omega\tau_0}{2} \right) \right] e^{-j\omega\tau_0} \\
 &= cA\tau_0 \text{Sa} \left( \frac{\omega\tau_0}{2} \right) e^{-j\omega\tau_0}
 \end{aligned}$$

选取观测时刻  $t_0 = \tau_0/2$ , 故物理可实现的冲激响应为

$$h(t) = \begin{cases} cA, & 0 \leq t \leq \tau_0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

输出信号为

$$s_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

计算此式卷积积分时, 需要分段积分, 当  $-\frac{\tau_0}{2} \leq t \leq \frac{\tau_0}{2}$  时, 如例题图 7.3A(b) 所示, 则

可得

$$s_0(t) = \int_0^{t+\frac{\tau_0}{2}} cA^2 d\tau = cA^2 \left( t + \frac{\tau_0}{2} \right)$$

当  $\frac{\tau_0}{2} \leq t \leq \frac{3\tau_0}{2}$  时, 如例题图 7.3A(c), 可得

$$s_0(t) = \int_{t-\frac{\tau_0}{2}}^{\tau_0} cA^2 d\tau = cA^2 \left( \frac{3\tau_0}{2} - t \right)$$

而当  $t < -\frac{\tau_0}{2}$  和  $t > \frac{3\tau_0}{2}$  时, 有

$$s_0(t) = 0$$

将以上两式进行综合, 则得

$$s_0(t) = \begin{cases} cA^2 \left[ \tau_0 - \left| t - \frac{\tau_0}{2} \right| \right], & \left| t - \frac{\tau_0}{2} \right| \leq \tau_0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

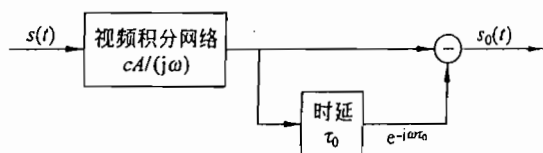
输出波形为例题图 7.3A(d) 所示的等腰三角形。当  $t = t_0 = \tau_0/2$  时, 由上式求得输出信号峰值为

$$s_0(t_0) = cA^2\tau_0$$

由于

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= cA\tau_0 \text{Sa} \left( \frac{\omega\tau_0}{2} \right) e^{-j\omega\tau_0} \\
 &= \frac{2cA}{\omega} \sin \left( \frac{\omega\tau_0}{2} \right) e^{-j\frac{\omega\tau_0}{2}} \\
 &= \frac{2cA}{\omega} \frac{e^{j\frac{\omega\tau_0}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau_0}{2}}}{2j} e^{-j\frac{\omega\tau_0}{2}} \\
 &= \frac{cA}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau_0})
 \end{aligned}$$

故知匹配滤波器可由例题图 7.3B 所示的线性网络构成, 其中视频积分网络的传输函数为  $cA/(j\omega)$ , 而延迟相减电路的传输函数为  $1 - e^{-j\omega\tau_0}$ 。



例题图 7.3B

例 7.4 考虑二元通信问题。设发射端发出的信号  $s$  以等可能性取值  $-1$  和  $+1$ , 接收端获得的观测  $r$  是受到噪声  $n$  污染的信号

$$r = s + n$$

已知  $n$  服从高斯分布  $N(0, \sigma_n^2)$ 。试根据一次观测求  $s$  的最大后验概率估计和最小均方误差估计。

解 根据题意可知

$$p_s(s) = \frac{1}{2} [\delta(s-1) + \delta(s+1)]$$

$$p_{R|s}(r|s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r-s)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

故有

$$\begin{aligned} p_R(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{R|s}(r|s) p_s(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r-s)^2}{2\sigma_n^2}\right] \times \frac{1}{2} [\delta(s-1) + \delta(s+1)] ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma_n} \left\{ \exp\left[-\frac{(r-1)^2}{2\sigma_n^2}\right] + \exp\left[-\frac{(r+1)^2}{2\sigma_n^2}\right] \right\} \end{aligned}$$

因此后验概率分布为

$$\begin{aligned} p_{s|R}(s|r) &= \frac{p_{R|s}(r|s) p_s(s)}{p_R(r)} \\ &= \frac{\exp\left[-\frac{(r-s)^2}{2\sigma_n^2}\right] [\delta(s-1) + \delta(s+1)]}{\exp\left[-\frac{(r-1)^2}{2\sigma_n^2}\right] + \exp\left[-\frac{(r+1)^2}{2\sigma_n^2}\right]} \end{aligned}$$

由上式看出, 只有当  $s = \pm 1$  时,  $p_{s|R}(s|r)$  才可能取最大值, 否则  $p_{s|R}(s|r)$  均为零。而欲使  $p_{s|R}(s|r)$  取极大, 应使  $|r-s|$  取极小, 因此可得最大后验概率估计为

$$\hat{s}_{\text{map}} = \text{sgn}r = \begin{cases} 1, & r > 0 \\ -1, & r < 0 \end{cases}$$

最小均方误差估计为

$$\begin{aligned} \hat{s}_{\text{ms}} &= \int_{-\infty}^{\infty} s p_{s|R}(s|r) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s \frac{\exp\left[-\frac{(r-s)^2}{2\sigma_n^2}\right] [\delta(s-1) + \delta(s+1)]}{\exp\left[-\frac{(r-1)^2}{2\sigma_n^2}\right] + \exp\left[-\frac{(r+1)^2}{2\sigma_n^2}\right]} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\exp\left(\frac{r}{\sigma_n^2}\right) - \exp\left(-\frac{r}{\sigma_n^2}\right)}{\exp\left(\frac{r}{\sigma_n^2}\right) + \exp\left(-\frac{r}{\sigma_n^2}\right)} \\
 &= \operatorname{th}\left(\frac{r}{\sigma_n^2}\right)
 \end{aligned}$$

例 7.5 设  $N$  次观测为

$$r_i = A + n_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

其中  $A$  为未知的确定信号, 噪声  $n_i (i=1, 2, \dots, N)$  相互独立并服从同样的分布  $N(0, \sigma^2)$ 。

(1) 求  $A$  的极大似然估计  $\hat{A}_{ml}$ ;

(2)  $\hat{A}_{ml}$  是否为无偏估计?

(3)  $\hat{A}_{ml}$  是否为有效估计?

解 (1) 设  $\mathbf{R} = (r_1, r_2, \dots, r_N)^T$ , 根据题意直接可以写出似然函数为

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{R} | A) &= \prod_{k=1}^N p(r_k | A) \\
 &= \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(r_k - A)^2}{2\sigma^2}\right] \\
 &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N (r_k - A)^2\right]
 \end{aligned}$$

对此式取自然对数后, 又可写成

$$\ln p(\mathbf{R} | A) = -\frac{N}{2} \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N (r_k - A)^2$$

令

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{R} | A)}{\partial A} = \frac{N}{\sigma^2} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N r_k - A \right] \Big|_{A=\hat{A}_{ml}} = 0$$

因此可得

$$\hat{A}_{ml} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N r_k$$

(2) 因

$$E(\hat{A}_{ml}) = E\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N r_k\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E(r_k) = A$$

故  $\hat{A}_{ml}$  是无偏估计。

(3) 由于

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{R} | A)}{\partial A} = \frac{N}{\sigma^2} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N r_k - A \right] = K(N) [\hat{A}_{ml}(\mathbf{R}) - A]$$

故  $\hat{A}_{ml}$  是有效估计。

例 7.6 要传输两个确定参数  $A_1$  和  $A_2$ , 为了保证传输可靠, 现构造两个信号  $s_1$  和  $s_2$  分别在两个信道上传输, 则有

$$s_1 = x_{11}A_1 + x_{12}A_2$$

$$s_2 = x_{21}A_1 + x_{22}A_2$$

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

其中  $x_{ij} (i, j=1, 2)$  均为已知常数。接收端获得的观测为

$$r_1 = s_1 + n_1$$

$$r_2 = s_2 + n_2$$

其中噪声  $n_1$  和  $n_2$  统计独立并且服从同样的分布  $N(0, \sigma_n^2)$ 。

(1) 求  $A_1$  和  $A_2$  的极大似然估计;

(2)  $A_1$  和  $A_2$  的极大似然估计是否为无偏估计?

(3)  $A_1$  和  $A_2$  的极大似然估计是否为有效估计?

解 (1) 为书写方便采用矩阵形式, 记

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \quad n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

于是有

$$s = xA$$

由于  $n_1$  和  $n_2$  是统计独立的高斯随机变量, 因此它们是联合高斯的, 所以似然函数为

$$p_{R|A}(r|A) = \frac{1}{2\pi |A|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (r^T - s^T) A^{-1} (r - s) \right\}$$

其中  $A = \sigma_n^2 I$ 。

对数似然函数为

$$\ln p_{R|A}(r|A) = -\ln(2\pi |A|^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2} (r^T - s^T) A^{-1} (r - s)$$

令

$$\frac{\partial \ln p_{R|A}(r|A)}{\partial A_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T x^T A^{-1} (r - xA) \Big|_{A=\hat{A}_{ml}} = 0$$

$$\frac{\partial \ln p_{R|A}(r|A)}{\partial A_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T x^T A^{-1} (r - xA) \Big|_{A=\hat{A}_{ml}} = 0$$

即应有

$$x^T A^{-1} (r - x\hat{A}_{ml}) = 0$$

由于已知  $|x| \neq 0$ , 所以似然估计量为

$$\hat{A}_{ml} = x^{-1}r$$

(2) 由于

$$E(\hat{A}_{ml}) = E\{x^{-1}(xA + n)\} = A$$

所以  $\hat{A}_{ml}$  是无偏估计。

(3) 由于

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \ln p_{R|A}(r|A)}{\partial A_1} \\ \frac{\partial \ln p_{R|A}(r|A)}{\partial A_2} \end{bmatrix} = x^T A^{-1} (r - xA)$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x} (\mathbf{x}^{-1} \mathbf{r} - \mathbf{A}) \\
 &= \mathbf{K}(\mathbf{A})(\hat{\mathbf{A}}_{ml} - \mathbf{A})
 \end{aligned}$$

所以可知  $\hat{\mathbf{A}}_{ml}$  为有效估计。

例 7.7 在一段时间  $[0, T]$  的两个端点对随机过程  $X(t)$  进行观测, 得  $X(0)$  和  $X(T)$ , 若用这两个观测数据求  $X(t)$  在  $[0, T]$  上的积分值

$$I = \int_0^T X(t) dt$$

的线性最小的均方误差估计, 即求

$$\hat{I} = aX(0) + bX(T)$$

(1)  $a = ?$   $b = ?$

(2) 讨论当  $T$  很小时会出现什么结果? 这个结果合理吗?

解 (1) 利用正交投影原理

$$E\{[I - \hat{I}]X(0)\} = 0$$

$$E\{[I - \hat{I}]X(T)\} = 0$$

可得

$$E\left\{\left[\int_0^T X(t) dt - aX(0) - bX(T)\right]X(0)\right\} = 0$$

$$E\left\{\left[\int_0^T X(t) dt - aX(0) - bX(T)\right]X(T)\right\} = 0$$

整理得

$$\int_0^T R(t) dt = aR(0) + bR(T)$$

$$\int_0^T R(T-t) dt = aR(T) + bR(0)$$

求解上式可得

$$a = b = \frac{\int_0^T R(t) dt}{R(0) + R(T)}$$

(2) 当  $T$  很小时, 应有  $R(0) \approx R(T)$ , 并根据积分中值定理可得

$$\int_0^T R(t) dt \approx TR(0)$$

将此式代入  $a$  和  $b$  的表达式中可得

$$a = b \approx \frac{T}{2}$$

于是得到线性最小的均方误差估计量为

$$\hat{I} = \frac{T}{2}[X(0) + X(T)]$$

即

$$\int_0^T X(t) dt \approx \frac{T}{2}[X(0) + X(T)]$$

这恰是积分的梯形近似公式,因此这一结果是合理的。

例 7.8 设输入为混合信号,即

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

其中,  $s(t)$  为输入信号,  $E[s(t)] = 0$ ;  $n(t)$  为噪声,  $E[n(t)] = 0$ 。现在利用测量到的  $x(t)$  对信号  $s(t)$  进行估计,这就是过滤问题。若  $s(t)$  和  $n(t)$  是相互统计独立的随机过程,求最佳估计  $\hat{s}(t)$ 。

解 利用正交性原理,设  $s(t)$  的最佳估计为

$$\hat{s}(t) = ax(t)$$

则有

$$E\{[s(t) - \hat{s}(t)]x(t)\} = E\{[s(t) - ax(t)]x(t)\} = 0$$

即

$$R_{sx}(0) = aR_x(0)$$

或

$$a = \frac{R_{sx}(0)}{R_x(0)}$$

由于

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

故有

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= E\{x(t+\tau)x(t)\} \\ &= E\{[s(t+\tau) + n(t+\tau)][s(t) + n(t)]\} \\ &= R_s(\tau) + R_n(\tau) \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} R_{sx}(\tau) &= E\{s(t+\tau)x(t)\} \\ &= E\{[s(t+\tau)][s(t) + n(t)]\} \\ &= R_s(\tau) \end{aligned}$$

因此有

$$a = \frac{R_s(0)}{R_s(0) + R_n(0)}$$

最小均方误差为

$$\begin{aligned} \text{var}[\tilde{s}] &= E\{[s(t) - \hat{s}(t)]^2\} \\ &= E\{[s(t) - ax(t)]s(t)\} \\ &= R_s(0) - aR_{sx}(0) \\ &= R_s(0) - \frac{R_{sx}^2(0)}{R_x(0)} \\ &= R_s(0) - \frac{R_s^2(0)}{R_s(0) + R_n(0)} \\ &= \frac{R_s(0)R_n(0)}{R_s(0) + R_n(0)} \end{aligned}$$

例 7.9 设有零均值实平稳过程  $\dot{s}(t)$ , 现在的问题是要利用已知值  $s(t)$  预测未来值



$s(t+\lambda)$ , 其中  $\lambda$  为一常数,  $\lambda > 0$ 。

解 这是一个预测问题。问题的实质是已知  $t$  时刻随机过程  $s(t)$  的值, 它是一随机变量, 对未知的随机变量  $s(t+\lambda)$  进行估计。可利用正交性原理, 设  $t+\lambda$  时的估计值为  $\hat{s}(t+\lambda)$ , 则有

$$\hat{s}(t+\lambda) = as(t)$$

选择合适的  $a$  值使

$$E\{[s(t+\lambda) - as(t)]s(t)\} = 0$$

故得

$$R_s(\lambda) = aR_s(0)$$

即

$$a = \frac{R_s(\lambda)}{R_s(0)} \leq 1$$

式中  $R_s(\lambda)$  代表  $s(t)$  的相关函数。可用例题图 7.9 中所示电路获得  $s(t+\lambda)$  的预测值。

最佳预测时的最小均方误差为

$$\begin{aligned} E\{[s(t+\lambda) - \hat{s}(t+\lambda)]^2\} &= E\{[s(t+\lambda) - as(t)]s(t+\lambda)\} \\ &= R_s(0) - aR_s(\lambda) \\ &= R_s(0) - \frac{R_s^2(\lambda)}{R_s(0)} \end{aligned}$$

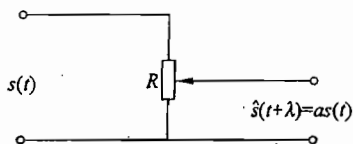
若随机过程  $s(t)$  的相关函数为  $R_s(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|}$ , 则有

$$a = \frac{R_s(\lambda)}{R_s(0)} = e^{-a\lambda}$$

最小均方误差为

$$E\{[s(t+\lambda) - \hat{s}(t+\lambda)]^2\} = \sigma^2(1 - e^{-2a\lambda})$$

如果  $e^{-2a\lambda} \ll 1$ , 则虽然利用了  $s(t)$  的信息, 但对估计  $s(t+\lambda)$  之值并无多大好处。



例题图 7.9

讨论: 正交性原理利用了  $e = s(t+\lambda) - as(t)$  与  $s(t)$  正交, 即

$$E\{[s(t+\lambda) - as(t)]s(t)\} = 0$$

若过程的相关函数为  $R_s(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|}$ , 又设  $u \leq t$ ,  $u$  代表  $t$  以前的时刻, 则  $s(t+\lambda) - as(t)$  也与  $s(u)$  正交。因为

$$\begin{aligned} E\{[s(t+\lambda) - as(t)]s(u)\} &= R_s(t+\lambda-u) - aR_s(t-u) \\ &= \sigma^2[e^{-a(t+\lambda-u)} - e^{-a\lambda}e^{-a(t-u)}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

说明, 当  $R_s(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|}$  时, 虽然  $(-\infty, t)$  内所有的信号值都是已知的, 但对于  $s(t+\lambda)$  的最佳估计仅仅利用了  $t$  时刻的信号值  $s(t)$ ,  $t$  时刻以前的信息对估计  $s(t+\lambda)$  并无帮助。

**例 7.10** 已知两个时刻  $t_1$  和  $t_2, t_1 > t_2$ , 用该两个时刻的观测值  $X(t_1)$  和  $X(t_2)$  对未  
来值  $X(t) (t > t_1 > t_2)$  进行估计, 求其最佳估值。若  $t_2$  的信息并不能改善  $X(t)$  的估值, 则  
 $X(t)$  的相关函数必须为负值指数形式函数, 即  $R_X(\tau) = ce^{-a|\tau|}$ 。

解 设  $X(t)$  的最佳估值为

$$\hat{X}(t) = aX(t_1) + bX(t_2)$$

利用正交性原理得

$$E\{[X(t) - \hat{X}(t)]X(t_1)\} = E\{[X(t) - aX(t_1) - bX(t_2)]X(t_1)\} = 0$$

$$E\{[X(t) - \hat{X}(t)]X(t_2)\} = E\{[X(t) - aX(t_1) - bX(t_2)]X(t_2)\} = 0$$

即

$$R_X(t - t_1) = aR_X(0) + bR_X(t_1 - t_2)$$

$$R_X(t - t_2) = aR_X(t_1 - t_2) + bR_X(0)$$

$$\begin{cases} a = \frac{R_X(0)R_X(t - t_1) - R_X(t_1 - t_2)R_X(t - t_2)}{R_X^2(0) - R_X^2(t_1 - t_2)} \\ b = \frac{R_X(0)R_X(t - t_2) - R_X(t_1 - t_2)R_X(t - t_1)}{R_X^2(0) - R_X^2(t_1 - t_2)} \end{cases}$$

若  $t_2$  的信息并不能改善  $X(t)$  的估值, 则要求  $b=0$ , 于是有

$$a = \frac{R_X(t - t_1)}{R_X(0)}$$

而

$$R_X(t - t_2) = aR_X(t_1 - t_2) = \frac{R_X(t - t_1)R_X(t_1 - t_2)}{R_X(0)}$$

设时间差  $\lambda_1 = t - t_1, \lambda_2 = t_1 - t_2$ , 上式可写成

$$R_X(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{R_X(\lambda_1)R_X(\lambda_2)}{R_X(0)}$$

$$\frac{R_X(\lambda_1 + \lambda_2)}{R_X(0)} = \frac{R_X(\lambda_1)}{R_X(0)} \cdot \frac{R_X(\lambda_2)}{R_X(0)}$$

不论  $\lambda_1, \lambda_2$  取何值都能满足上述关系式的惟一连续函数是指数形函数, 且  
 $|R_X(0)| \geq |R_X(\tau)|$ , 故要求  $R_X(\tau)$  的函数形式是  $R_X(\tau) = ce^{-a|\tau|}$ 。反之, 若  $R_X(\tau) = R_X(0)e^{-a|\tau|}$ , 则当  $t_2 < t_1$  时, 如果  $E\{[X(t) - aX(t_1)]X(t_1)\} = 0$ , 那么  $E\{[X(t) - aX(t_1)]X(t_2)\}$  必为零。但是如果没有  $t_1$  时刻的观测值, 那么  $t_2$  时刻的观测值对  $X(t)$  的估值是有帮助的。具有这种特性的随机过程称为广义马尔可夫过程。

**例 7.11** 利用  $t$  时刻随机过程  $s(t)$  的观测值和它的导数  $s'(t)$  观测值, 对未来的  $s(t+\lambda)$  ( $\lambda > 0$ ) 进行估计。

解 设  $s(t+\lambda)$  的最佳估值为  $\hat{s}(t+\lambda)$ , 并规定

$$\hat{s}(t+\lambda) = as(t) + bs'(t)$$

利用正交性原理得

$$E\{[s(t+\lambda) - \hat{s}(t+\lambda)]s(t)\} = E\{[s(t+\lambda) - as(t) - bs'(t)]s(t)\} = 0$$

$$E\{[s(t+\lambda) - \hat{s}(t+\lambda)]s'(t)\} = E\{[s(t+\lambda) - as(t) - bs'(t)]s'(t)\} = 0$$

由于实随机过程的相关函数是偶函数,当  $\tau=0$  时,  $R_s(\tau)$  是连续可导的(由于  $s'(t)$  存在),故  $R'_s(0)=0$ , 且

$$\begin{aligned} R_{ss'}(\tau) &= -R'_s(\tau) \\ R'_{ss'}(\tau) &= -R''_s(\tau) \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} R_s(\lambda) &= aR_s(0) - bR_{ss'}(0) = aR_s(0) \\ R'_{ss'}(\lambda) &= bR''_s(0) \end{aligned}$$

于是可得

$$\begin{aligned} a &= \frac{R_s(\lambda)}{R_s(0)} \\ b &= \frac{R'_{ss'}(\lambda)}{R''_s(0)} \end{aligned}$$

最小均方误差为

$$\begin{aligned} E\{[s(t+\lambda) - \hat{s}(t+\lambda)]^2\} &= E\{[s(t+\lambda) - as(t) - bs'(t)]s(t+\lambda)\} \\ &= R_s(0) - aR_s(\lambda) + bR'_{ss'}(\lambda) \end{aligned}$$

显然,当  $\lambda$  足够小时,  $a \approx 1$ 。又因

$$R'_{ss'}(\lambda) \approx R'_{ss'}(0) + R''_{ss'}(0)\lambda = R''_{ss'}(0)\lambda$$

于是可知

$$b \approx \lambda$$

故有

$$\hat{s}(t+\lambda) \approx s(t) + \lambda s'(t)$$

该结果与求函数增量的一般方法相一致。

**例 7.12** 设随机信号  $s(t)$ , 对其进行观测得到观测值  $x(t) = s(t) + n(t)$ , 其中  $n(t)$  是噪声, 利用正交性原理研究如何用观测值  $x(t)$  和  $x(t-\lambda)$  对  $s(t)$  的导数  $s'(t)$  进行最佳估计。

**解** 设  $s'(t)$  的最佳估计值为

$$\hat{s}'(t) = ax(t) + bx(t-\lambda)$$

利用正交性原理得

$$E\{[\hat{s}'(t) - s'(t)]x(t)\} = E\{[s'(t) - ax(t) - bx(t-\lambda)]x(t)\} = 0$$

$$E\{[\hat{s}'(t) - s'(t)]x(t-\lambda)\} = E\{[s'(t) - ax(t) - bx(t-\lambda)]x(t-\lambda)\} = 0$$

设  $s(t)$ ,  $n(t)$  是相互统计独立的随机过程, 且均值都为 0, 则

$$sR_{xx}(\tau) = R_{sn}(\tau) + R_{nn}(\tau)$$

$$R_{sx}(\tau) = E\{s'(t+\tau)x(t)\}$$

$$= E\left\{\left[\frac{s(t+\tau+\epsilon) - s(t+\tau)}{\epsilon}\right][s(t) + n(t)]\right\}_{\epsilon \rightarrow 0}$$

$$= E\left\{\left[\frac{s(t+\tau+\epsilon) - s(t+\tau)}{\epsilon}\right]s(t)\right\}_{\epsilon \rightarrow 0}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{R_{xx}(\tau + \epsilon) - R_{xx}(\tau)}{\epsilon} \\
 &= R'_{xx}(\tau)
 \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
 R'_{xx}(0) &= aR_{xx}(0) + bR_{xx}(\lambda) \\
 R'_{xx}(\lambda) &= aR_{xx}(\lambda) + bR_{xx}(0) \\
 a &= \frac{R'_{xx}(0)R_{xx}(0) - R'_{xx}(\lambda)R_{xx}(\lambda)}{R_{xx}^2(0) - R_{xx}^2(\lambda)} \\
 b &= \frac{R'_{xx}(\lambda)R_{xx}(0) - R'_{xx}(0)R_{xx}(\lambda)}{R_{xx}^2(0) - R_{xx}^2(\lambda)}
 \end{aligned}$$

由于  $s(t)$  和  $n(t)$  均为实平稳随机过程, 故  $R_{xx}(\tau)$ ,  $R_{nn}(\tau)$ ,  $R_{xn}(\tau)$  均为偶函数。若  $s(t)$ ,  $n(t)$  均可导, 则要求  $R'_{xx}(\tau) = 0$ ,  $R'_{nn}(\tau) = 0$ ,  $R'_{xn}(\tau) = 0$ 。当  $\lambda$  足够小时, 有

$$\begin{aligned}
 R'_{xx}(0)R_{xx}(0) - R'_{xx}(\lambda)R_{xx}(\lambda) &= -R'_{xx}(\lambda)R_{xx}(\lambda) \\
 &= -[R'_{xx}(0) + R''_{xx}(0)\lambda + \cdots][R_{xx}(0) + \cdots] \\
 &\approx R''_{xx}(0)R_{xx}(0)\lambda
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{xx}(\lambda) &= R_{xx}(0) + R'_{xx}(0)\lambda + \frac{R''_{xx}(0)}{2}\lambda^2 + \cdots \\
 &= R_{xx}(0) + \frac{R''_{xx}(0)}{2}\lambda^2 + \cdots
 \end{aligned}$$

于是可得

$$a \approx \frac{R''_{xx}(0)}{R''_{xx}(0)} \frac{1}{\lambda} = \frac{R''_{xx}(0)}{R''_{xx}(0) + R''_{nn}(0)} \frac{1}{\lambda}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
 R'_{xx}(\lambda)R_{xx}(0) - R'_{xx}(0)R_{xx}(\lambda) &= R'_{xx}(\lambda)R_{xx}(0) \\
 &= [R'_{xx}(0) + R''_{xx}(0)\lambda + \cdots]R_{xx}(0) \\
 &\approx R''_{xx}(0)R_{xx}(0)\lambda
 \end{aligned}$$

$$b \approx -\frac{R''_{xx}(0)}{R''_{xx}(0)} \frac{1}{\lambda} = -\frac{R''_{xx}(0)}{R''_{xx}(0) + R''_{nn}(0)} \frac{1}{\lambda}$$

$$\hat{s}'(t) \approx \frac{R''_{xx}(0)}{R''_{xx}(0) + R''_{nn}(0)} \frac{x(t) - x(t-\lambda)}{\lambda}$$

最小均方误差为

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\text{MMSE}}^2 &= E\{[s'(t) - \hat{s}'(t)]^2\} \\
 &= E\{[s'(t) - ax(t) - bx(t-\lambda)]s'(t)\} \\
 &= R_{s's'}(0) - aR'_{sx}(0) - bR'_{sx}(\lambda) \\
 &= -R''_{xx}(0) - bR'_{xx}(\lambda)
 \end{aligned}$$

只有当

$$E\{(n't)^2\} = [-R''_{nn}(0)] \ll E\{(s'(t))^2\} = [-R''_{xx}(0)]$$

时,  $R''_{xx}(0) \approx R''_{nn}(0)$ ,  $a = -b \approx 1/\lambda$ , 在这个条件下, 才有可能采用

$$\hat{s}'(t) \approx \frac{x(t) - x(t-\lambda)}{\lambda}$$

对  $s'(t)$  进行估计。

例 7.13 设有随机变量  $X$  和  $Y$ , 已知  $E\{X\} = m_1, n \geq 2, E\{Y\} = 0$ , 以及  $X = Y^2$ 。若以  $Y$  的观察值对  $X$  作线性估计, 求其最佳估计。

解 根据题意  $\mu_X = E\{X\} = E\{Y^2\} = m_2 \neq 0$ , 于是最佳线性估计  $\hat{X}$  应具有如下形式:

$$\hat{X} = aY + b$$

所谓最佳是指  $E\{[X - \hat{X}]^2\} = E\{[X - (aY + b)]^2\}$  取极小值, 就是选择  $a, b$  值以使  $E\{[X - \hat{X}]^2\}$  最小。

现在利用正交性原理求解可得

$$E\{X - aY - b\} = 0$$

$$b = E\{X\} = m_2$$

$$E\{[X - (aY + b)]Y\} = 0$$

或

$$E\{XY\} = aE\{Y^2\}$$

即有

$$a = \frac{E\{XY\}}{E\{Y^2\}} = \frac{E\{Y^3\}}{E\{Y^2\}} = \frac{m_3}{m_2}$$

故可得

$$\hat{X} = \frac{m_3}{m_2}Y + m_2$$

例 7.14 设有零均值实平稳随机过程  $s(t)$ ,  $t$  是  $[0, T]$  内的一点。若已知  $s(0)$  和  $s(T)$ , 利用  $s(0)$  和  $s(T)$  对  $s(t)$  进行最佳估计。

解 这是一个平滑问题。设  $s(t)$  的最佳估计为

$$\hat{s}(t) = as(0) + bs(T)$$

利用正交性原理得

$$E\{[s(t) - \hat{s}(t)]s(0)\} = E\{[s(t) - as(0) - bs(T)]s(0)\} = 0$$

$$E\{[s(t) - \hat{s}(t)]s(T)\} = E\{[s(t) - as(0) - bs(T)]s(T)\} = 0$$

即

$$R_s(t) = aR_s(0) + bR_s(T)$$

$$R_s(T-t) = aR_s(T) + bR_s(0)$$

其中  $R_s(\tau)$  代表  $s(t)$  的相关函数。解上述方程得

$$a = \frac{R_s(t)R_s(0) - R_s(T-t)R_s(T)}{R_s^2(0) - R_s^2(T)}$$

$$b = \frac{R_s(0)R_s(T-t) - R_s(T)R_s(t)}{R_s^2(0) - R_s^2(T)}$$

其最小均方误差为

$$\begin{aligned} E\{[s(t) - \hat{s}(t)]^2\} &= E\{[s(t) - as(0) - bs(T)]s(t)\} \\ &= R_s(0) - aR_s(t) - bR_s(T-t) \end{aligned}$$

讨论: (1) 如果  $t = T/2$ , 则

$$a = b = \frac{R_s\left(\frac{T}{2}\right)}{R_s(0) + R_s(T)}$$

(2) 若  $R_s(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|}$ ,  $0 < t < T$  则

$$a = \frac{e^{-at} - e^{-a(T-t)} e^{-aT}}{1 - e^{-2aT}} = \frac{\sinh a(T-t)}{\sinh(aT)}$$

$$b = \frac{e^{-a(T-t)} - e^{-aT} e^{-a}}{1 - e^{-2aT}} = \frac{\sinh(at)}{\sinh(aT)}$$

例 7.15 假设对某物理量  $a$  测量  $N$  次, 测量数据  $x$  为

$$x_k = a + n_k, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

其中  $n_k$  代表均值为零的随机测量误差, 求  $a$  的最小二乘估计  $\hat{a}_{ls}$ 。

解 根据最小二乘估计准则, 选择一个  $a$  使下式达到最小:

$$R(\hat{a}) = \sum_{k=1}^N (x_k - \hat{a})^2$$

为此使

$$\left. \frac{\partial R(\hat{a})}{\partial \hat{a}} \right|_{\hat{a}=\hat{a}_{ls}} = \sum_{k=1}^N 2(x_k - \hat{a}_{ls})(-1) = 0$$

于是得最小二乘估计量为

$$\hat{a}_{ls} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

例 7.16 观测某个点目标的等速直线运动。设观测数据  $x$  为

$$x_k = \theta_0 + \theta_1 t_k + n_k, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

其中  $x_k$  代表点目标在  $t_k$  时刻的距离, 参量  $\theta_0$  代表  $t=0$  时刻的初始距离, 参量  $\theta_1$  代表目标的平均速度, 要求根据对距离  $x$  的测量作出对  $\theta_0$  及  $\theta_1$  的估计。

解 这是一个最小二乘估计的问题。现在需要对两个参量作出估计。上式可以改写成矢量及矩阵形式

$$x = T\theta + n$$

其中

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$$

$$n = [n_1, n_2, \dots, n_N]^T$$

$$\theta = [\theta_0, \theta_1]^T$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_N \end{bmatrix}$$

根据最小二乘估计的表示式

$$\hat{\theta}_{ls} = (T^T T)^{-1} T^T x$$

将已知数据代入上式得

$$T^T T = \begin{bmatrix} N & N\bar{t} \\ N\bar{t} & \sum_{k=1}^N t_k^2 \end{bmatrix}$$

其中

$$\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N t_k$$

求逆矩阵

$$(T^T T)^{-1} = \frac{1}{N \sum_{k=1}^N (t_k - \bar{t})^2} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N t_k^2 & -N\bar{t} \\ -N\bar{t} & N \end{bmatrix}$$

故有

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{ls} &= (T^T T)^{-1} T^T x \\ &= \frac{1}{N \sum_{k=1}^N (t_k - \bar{t})^2} \begin{bmatrix} N\bar{x} \sum_{k=1}^N t_k^2 - N\bar{t} \sum_{k=1}^N t_k x_k \\ N \sum_{k=1}^N t_k x_k - N^2 \bar{t} \bar{x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

故参量估计  $\hat{\theta}_{0ls}$  和  $\hat{\theta}_{1ls}$  分别为

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{0ls} &= \frac{N\bar{x} \sum_{k=1}^N t_k^2 - N\bar{t} \sum_{k=1}^N t_k x_k}{N \sum_{k=1}^N (t_k - \bar{t})^2} \\ \hat{\theta}_{1ls} &= \frac{N \sum_{k=1}^N t_k x_k - N^2 \bar{t} \bar{x}}{N \sum_{k=1}^N (t_k - \bar{t})^2} \end{aligned}$$

同时可以看出,两者还存在下述关系:

$$\hat{\theta}_{0ls} = \bar{x} - \hat{\theta}_{1ls} \bar{t}$$

然后计算最小二乘估计的均方误差。假设各次测量是独立的,且有  $E[n] = 0$ ,  $\text{var}[n] = \sigma_n^2 I_N$ 。于是可以得到估计方差阵为

$$\text{var}[\hat{\theta}_{ls}] = (T^T T)^{-1} T^T V_n T (T^T T)^{-1}$$

$$= \frac{\sigma_n^2}{\left[ N \sum_{k=1}^N (t_k - \bar{t})^2 \right]^2} \begin{bmatrix} N \left( \sum_{k=1}^N t_k^2 \right)^2 - N^2 \bar{t}^2 \left( \sum_{k=1}^N t_k^2 \right) & - N^2 \bar{t}^2 \left( \sum_{k=1}^N t_k^2 \right) + N^3 \bar{t}^3 \\ - N^2 \bar{t}^2 \left( \sum_{k=1}^N t_k^2 \right) + N^3 \bar{t}^3 & N^2 \left( \sum_{k=1}^N t_k^2 \right) - N^3 \bar{t}^3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sigma_n^2}{N \sum_{k=1}^N (t_k - \bar{t})^2} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N t_k^2 & - N \bar{t} \\ - N \bar{t} & N \end{bmatrix}$$

故初始位置估计  $\hat{\theta}_{0ls}$  的方差为

$$\text{var}[\hat{\theta}_{0ls}] = - \frac{\sigma_n^2 \sum_{k=1}^N t_k^2}{N \sum_{k=1}^N (t_k - \bar{t})^2}$$

平均速度估计  $\hat{\theta}_{1ls}$  的方差为

$$\text{var}[\hat{\theta}_{1ls}] = \frac{\sigma_n^2}{\sum_{k=1}^N (t_k - \bar{t})^2}$$

两者之间的协方差为

$$\text{var}[\hat{\theta}_{0ls}, \hat{\theta}_{1ls}] = \frac{\sigma_n^2 \bar{t}}{\sum_{k=1}^N (t_k - \bar{t})^2}$$

例 7.17 设随机信号  $s(t)$  加白噪声  $n(t)$  通过线性滤波器, 信号与噪声的自相关函数分别为  $R_s(\tau) = \frac{1}{2} e^{-|\tau|}$  和  $R_n(\tau) = \delta(\tau)$ , 要求滤波器输出的信号波形均方误差最小。求滤波器的特性及均方误差。

解 这是一个维纳滤波问题。首先对  $R_s(\tau)$  及  $R_n(\tau)$  进行拉普拉斯变换, 分别得到

$$G_s(S) = \frac{1}{1-S^2}$$

$$G_n(S) = 1$$

因此

$$G_x(S) = G_s(S) + G_n(S) = \frac{1}{1-S^2} + 1 = \frac{(S+\sqrt{2})(S-\sqrt{2})}{(S+1)(S-1)}$$

故有

$$G_x^+(S) = \frac{S+\sqrt{2}}{S+1}$$

$$G_x^-(S) = \frac{S-\sqrt{2}}{S-1}$$

又因为



$$G_{ix}(S) = G_r(S) = \frac{1}{1-S^2} = \frac{-1}{(S+1)(S-1)}$$

于是可得

$$\begin{aligned} \frac{G_{ix}(S)}{G_x^-(S)} &= \frac{-1}{(S+1)(S-\sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{1+\sqrt{2}} \frac{1}{S+1} + \frac{-1}{1+\sqrt{2}} \frac{1}{S-\sqrt{2}} \end{aligned}$$

故有

$$\left[ \frac{G_{ix}(S)}{G_x^-(S)} \right]^+ = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \frac{1}{S+1}$$

最后得出维纳滤波器的传输函数为

$$H(S) = \frac{1}{G^+(S)} \left[ \frac{G_{ix}(S)}{G_x^-(S)} \right]^+ = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \frac{1}{S+\sqrt{2}}$$

冲激响应函数为

$$h(t) = \frac{1}{1+\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}t}, \quad t > 0$$

波形估计的均方误差为

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{s}] &= R_s(0) - \int_0^\infty h(\lambda) R_{ix}(\lambda) d\lambda \\ &= R_s(0) - \int_0^\infty h(\lambda) R_s(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{2} - \int_0^\infty \frac{1}{1+\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\lambda} \frac{1}{2} e^{-\lambda} d\lambda \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+\sqrt{2})^2} \approx 0.415 \end{aligned}$$

可以把这个结果与非因果关系的维纳滤波器的均方误差相比较,后者为

$$\begin{aligned} \text{var}[\bar{s}] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_s(\omega) G_n(\omega)}{G_s(\omega) + G_n(\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1/(1+\omega^2)}{1/(1+\omega^2) + 1} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2+\omega^2} d\omega \approx 0.354 \end{aligned}$$

可见前者比后者略大一点。

例 7.18 设  $x(t) = s(t) + n(t)$ ,  $s(t)$  和  $n(t)$  皆为零均值互不相关的实平稳随机过程,且

$$S_s(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}, \quad S_n(\omega) = 1$$

若不考虑网络的可实现性,求最佳滤波的方法。

解 最佳滤波是指对  $s(t)$  的最佳估值,即求  $\hat{s}(t)$ , 这时  $\alpha=0$ , 故有

$$S_z(\omega) = S_s(\omega) + S_n(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} + 1 = \frac{2+\omega^2}{1+\omega^2}$$

$$H(\omega) = \frac{S_r(\omega)}{S_x(\omega)} e^{j\omega\alpha} = \frac{1}{2 + \omega^2} e^{j\omega\alpha}$$

冲激响应函数为

$$h(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|t|}$$

由于  $t < 0$  时,  $h(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|t|} \neq 0$ , 该网络不满足网络的因果性, 因此是不能实现的。

例 7.19 若  $\eta(t) = s(t) + n(t)$ ,  $s(t)$  和  $n(t)$  为零均值互不相关的实平稳随机过程, 且

$$R_{ss}(\tau) = \frac{3}{2} e^{-|\tau|}, \quad R_{nn}(\tau) = \sigma(t)$$

利用  $(-\infty, t)$  范围内  $\eta(t)$  的观测值求  $s(t)$  的最佳估计值  $\hat{s}(t)$ 。

解 最佳估计即求最佳线性滤波器  $\hat{h}(t)$ , 从而使得  $E\{[s(t+\alpha) - \hat{s}(t+\alpha)]\}$  最小。则  $\hat{h}(t)$  满足方程

$$R_{s\eta}(u+\alpha) = \int_0^{+\infty} \hat{h}(\tau) R_{\eta\eta}(u-\tau) d\tau$$

定义

$$\phi(u) = R_{s\eta}(u+\alpha) - \int_0^{+\infty} \hat{h}(\tau) R_{\eta\eta}(u-\tau) d\tau$$

对此式进行拉普拉斯变换得

$$\Phi(p) = S_{s\eta}\left(\frac{p}{j}\right) e^{p\alpha} - S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right) \hat{H}(p)$$

本题的要求是从  $(-\infty, t)$  范围内  $\eta(t)$  的观测值中获得  $s(t)$  的最佳估计值, 因此  $\alpha = 0$ , 将  $\alpha = 0$  代入上式得

$$\Phi(p) = S_{s\eta}\left(\frac{p}{j}\right) - S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right) \hat{H}(p)$$

$$S_{ss}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ss}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{3}{1 + \omega^2}$$

因

$$R_{nn}(\tau) = \sigma(t)$$

则有

$$S_{nn}(\omega) = 1$$

于是可得

$$S_{\eta\eta}(\omega) = S_{ss}(\omega) + S_{nn}(\omega) = \frac{4 + \omega^2}{1 + \omega^2}$$

$$S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right) = \frac{p^2 - 4}{p^2 - 1} = \frac{(p+2)(p-2)}{(p+1)(p-1)}$$

分解  $S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right)$ , 使  $S_{\eta\eta}\left(\frac{p}{j}\right) = S_{\eta\eta}^+\left(\frac{p}{j}\right) S_{\eta\eta}^-\left(\frac{p}{j}\right)$ 。其中  $S_{\eta\eta}^+\left(\frac{p}{j}\right) = \frac{p+2}{p+1}$ , 其零点、极点均位于左半平面内。  $S_{\eta\eta}^-\left(\frac{p}{j}\right) = \frac{p-2}{p-1}$ , 其零点、极点均位于右半平面内。

$$R_{\eta}(\tau) = E\{s(t+\tau)\eta(t)\} = E\{s(t+\tau)[s(t_0+n(t))]\} = R_{\eta}(\tau)$$

$$S_{\eta}\left(\frac{p}{j}\right) = S_{\eta}\left(\frac{p}{j}\right) = -\frac{3}{p^2-1}$$

$$\frac{S_{\eta}\left(\frac{p}{j}\right)}{S_{\eta}^{-}\left(\frac{p}{j}\right)} = \frac{-3}{(p-2)(p+1)}$$

因此,  $\frac{S_{\eta}\left(\frac{p}{j}\right)}{S_{\eta}^{-}\left(\frac{p}{j}\right)}$  有一个极点位于左半平面内, 一个极点位于右半平面内, 设

$$G(p) = \frac{S_{\eta}\left(\frac{p}{j}\right)}{S_{\eta}^{-}\left(\frac{p}{j}\right)} = \frac{-3}{(p-2)(p+1)} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-2} = G_1(p) + G_2(p)$$

其中  $G_1(p) = 1/(p+1)$ , 极点为  $-1$ , 位于左半平面内, 其留数为  $1$ 。  $\hat{H}(p)S_{\eta}^{+}(p)$  的极点应与  $G_1(p)$  的极点一致, 而且  $\hat{H}(p)S_{\eta}^{+}(p)$  在该极点的留数就是  $G_1(p)$  在该极点的留数, 从而有

$$\hat{H}(p)S_{\eta}^{+}(p) = G_1(p) = \frac{1}{p+1}$$

$$\hat{H}(p) = \frac{G_1(p)}{S_{\eta}^{+}(p)} = \frac{\frac{1}{p+1}}{\frac{p+1}{p+2}} = \frac{1}{p+2}$$

所以

$$\hat{h}(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

**例 7.20** 如果把例题 7.19 中的过滤问题改为最佳预测问题, 即利用  $(-\infty, t)$  范围内的  $\eta(t)$  观测值对  $s(t+t_0)$  进行预测, 求实现最佳预测的方法。

**解** 本例题中  $\alpha = t_0$ , 而  $S_{\eta}\left(\frac{p}{j}\right), S_{\eta}^{-}\left(\frac{p}{j}\right)$  均同例题 7.19。则有

$$\frac{\Phi(p)}{S_{\eta}^{-}(p)} = \frac{S_{\eta}\left(\frac{p}{j}\right)e^{p\alpha}}{S_{\eta}^{-}(p)} - \hat{H}(p)S_{\eta}^{+}(p)$$

而

$$\frac{S_{\eta}\left(\frac{p}{j}\right)e^{p\alpha}}{S_{\eta}^{-}(p)} = G(p) = \frac{\frac{-3}{p^2-1}e^{p\alpha}}{\frac{p-2}{p-1}} = \frac{-3}{(p+1)(p-2)}e^{p\alpha}$$

$G(p)$  在左半平面内的极点为  $-1$ , 在该极点处的留数为  $\lim_{p \rightarrow -1} (p+1)G(p) = e^{-t_0}$ , 故

$$G_1(p) = \frac{e^{-t_0}}{p+1}$$

于是可得

$$\hat{H}(p) = \frac{G_1(p)}{S_{\eta}^+(p)} = \frac{e^{-t_0}}{p+2}$$

例 7.21 设观测为

$$r(u) = a(u) + n(u), \quad -\infty < u \leq t$$

其中  $a(u)$  和噪声  $n(u)$  互不相关, 且均值均为零, 功率谱密度分别为

$$S_a(\omega) = \frac{2K\sigma^2}{\omega^2 + K^2}$$

$$S_n(\omega) = N_0\omega^2$$

要求根据观测  $r(u)$  和估计信号  $a(t)$ , 求可实现的维纳滤波器。

解 现计算观测过程的功率谱密度

$$\begin{aligned} S_r(\omega) &= S_a(\omega) + S_n(\omega) \\ &= \frac{2K\sigma^2}{\omega^2 + K^2} + N_0\omega^2 \\ &= \frac{N_0\omega^4 + N_0K^2\omega^2 + 2K\sigma^2}{\omega^2 + K^2} \\ &= N_0 \frac{(j\omega + C_1)(j\omega + C_2)(-j\omega + C_1)(-j\omega + C_2)}{(j\omega + K)(-j\omega + K)} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} C_1 &= \left[ \frac{K^2}{2} + \frac{1}{2} \left( K^4 - \frac{8K\sigma^2}{N_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ C_2 &= \left[ \frac{K^2}{2} - \frac{1}{2} \left( K^4 - \frac{8K\sigma^2}{N_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

可实现的维纳滤波器的一般形式为

$$H_0(\omega) = \frac{1}{S_r^+(\omega)} \left[ \frac{S_d(\omega)}{S_r(\omega)} \right]^+$$

其中

$$\begin{aligned} S_d(\omega) &= S_a(\omega) = \frac{2K\sigma^2}{\omega^2 + K^2} \\ S_r^+(\omega) &= \sqrt{N_0} \frac{(j\omega + C_1)(j\omega + C_2)}{j\omega + K} \\ S_r^-(\omega) &= \sqrt{N_0} \frac{(-j\omega + C_1)(-j\omega + C_2)}{-j\omega + K} \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \left[ \frac{S_d(\omega)}{S_r(\omega)} \right]^+ &= \left[ \frac{1}{\sqrt{N_0}} \frac{-j\omega + K}{(-j\omega + C_1)(-j\omega + C_2)} \frac{2K\sigma^2}{(j\omega + K)(-j\omega + K)} \right]^+ \\ &= \left[ \frac{2K\sigma^2}{\sqrt{N_0}} \frac{1}{(-j\omega + C_1)(-j\omega + C_2)(j\omega + K)} \right]^+ \\ &= \frac{2K\sigma^2}{\sqrt{N_0}(K + C_1)(K + C_2)} \frac{1}{j\omega + K} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} H_0(\omega) &= \frac{1}{S_r^+(\omega)} \left[ \frac{S_d(\omega)}{S_r^-(\omega)} \right]^+ \\ &= \frac{2K\sigma^2}{N_0(K+C_1)(K+C_2)} \frac{1}{(j\omega+C_1)(j\omega+C_2)} \end{aligned}$$

例 7.22 考虑纯预测问题。设观测为

$$r(u) = a(u), \quad -\infty < u \leq t$$

即  $r(u)$  是没有受到噪声污染的信号  $a(u)$ 。要求估计  $t+T$  时刻信号的情况  $a(t+T)$ ，其中  $T \geq 0$ 。现已知

$$S_a(\omega) = \frac{2K}{\omega^2 + K^2}$$

求可实现的维纳滤波器的传输函数  $H_0(\omega)$  和相应的预测误差。

解 令  $d(t) = a(t+T)$ ，由于已知

$$S_r(\omega) = S_a(\omega) = \frac{2K}{\omega^2 + K^2}$$

故

$$\begin{aligned} S_r^+(\omega) &= \frac{\sqrt{2K}}{j\omega + K} \\ S_r^-(\omega) &= \frac{\sqrt{2K}}{-j\omega + K} \end{aligned}$$

计算相关函数

$$R_d(\tau) = E\{d(t)r(t-\tau)\} = E\{a(t+T)a(t-\tau)\} = R_a(\tau+T)$$

因此有

$$S_d(\omega) = S_a(\omega)e^{j\omega T} = \frac{2K}{\omega^2 + K^2} e^{j\omega T}$$

而且

$$\begin{aligned} \left[ \frac{S_d(\omega)}{S_r^-(\omega)} \right]^+ &= \left[ \frac{2Ke^{j\omega T}}{(j\omega + K)(-j\omega + K)} \frac{-j\omega + K}{\sqrt{2K}} \right]^+ \\ &= \sqrt{2K} e^{-K\tau} \frac{1}{j\omega + K} \end{aligned}$$

于是得可实现的维纳滤波器的传输函数为

$$H_0(\omega) = \frac{1}{S_r^+(\omega)} \left[ \frac{S_d(\omega)}{S_r^-(\omega)} \right]^+ = e^{-K\tau}$$

冲激响应为

$$h'_0(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{S_d(\omega)}{S_r^-(\omega)} \right]^+ = \sqrt{2K} e^{-K(\tau+T)}, \quad \tau > 0$$

又因为

$$R_a(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S_a(\omega)] = e^{-K|\tau|}$$

故均方误差为

$$\text{var}[\tilde{a}] = R_d(0) - \int_0^\infty [h'_0(\tau)]^2 d\tau$$

$$\begin{aligned}
 &= R_s(0) - \int_0^{\infty} 2K e^{-2K(t+\tau)} d\tau \\
 &= 1 - e^{-2KT}
 \end{aligned}$$

显然, 当  $T \rightarrow 0$  和  $T \rightarrow \infty$  时, 这一结果是合理的。

例 7.23 (维纳预测与平滑) 设输入信号  $s(t)$  和噪声  $n(t)$  都是均值为零的平稳随机过程, 两者不相关, 自相关函数分别为

$$R_s(\tau) = \frac{7}{12} e^{-\frac{1}{2}|\tau|}$$

$$R_n(\tau) = \frac{5}{6} e^{-|\tau|}$$

试求估计  $\hat{s}(t+a)$  及估计的均方误差。

解 对给定的自相关函数的两边进行拉普拉斯变换, 可以算出功率谱密度分别为

$$G_s(S) = \frac{7/3}{-4S^2 + 1}$$

$$G_n(S) = \frac{5/3}{-S^2 + 1}$$

从而有

$$\begin{aligned}
 G_x(S) &= G_s(S) + G_n(S) \\
 &= \frac{7/3}{-4S^2 + 1} + \frac{5/3}{-S^2 + 1} \\
 &= \frac{-9S^2 + 4}{(-4S^2 + 1)(-S^2 + 1)} \\
 &= \frac{(3S+2)}{(2S+1)(S+1)} \frac{(-3S+2)}{(-2S+1)(-S+1)}
 \end{aligned}$$

令  $g(t) = s(t+a)$ , 则有

$$\begin{aligned}
 R_{gx}(\tau) &= E[g(t+\tau)x(t)] \\
 &= E[s(t+\tau+a)x(t)] \\
 &= R_{sx}(\tau+a) \\
 &= R_s(\tau+a)
 \end{aligned}$$

对此式作拉普拉斯变换得

$$G_{gx}(S) = G_{sx}(S)e^{aS} = G_s(S)e^{aS}$$

故最佳线性滤波器的传输函数为

$$\begin{aligned}
 H(S) &= \frac{1}{G_x^+(S)} \left[ \frac{G_{gx}(S)}{G_x^-(S)} \right]^+ \\
 &= \frac{(2S+1)(S+1)}{3S+2} \left[ \frac{(-2S+1)(-S+1)}{-3S+2} \frac{7/3}{(-4S^2+1)} e^{aS} \right]^+ \\
 &= \frac{(2S+1)(S+1)}{3S+2} \left[ \left( \frac{1}{2S+1} + \frac{1/3}{-3S+2} \right) e^{aS} \right]^+
 \end{aligned}$$

现在需要进一步求出  $\left[ \left( \frac{1}{2S+1} + \frac{1/3}{-3S+2} \right) e^{aS} \right]^+$ 。

令

$$K(S) = \frac{1}{2S+1} + \frac{1/3}{-3S+2}$$

相应地有

$$k(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}, & t \geq 0 \\ \frac{1}{9}e^{\frac{2t}{3}}, & t < 0 \end{cases}$$

则  $[K(S)e^{s\alpha}]^+$  便是  $k(t+\alpha)$  的因果关系可实现部分, 参见例题图 7.23A, 这些因果部分为

$$k(t+\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(t+\alpha)}, & \alpha > 0 \\ \frac{1}{9}e^{-\frac{2}{3}(t+\alpha)}, & \alpha < 0, \quad 0 \leq t < |\alpha| \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(t+\alpha)}, & \alpha < 0, \quad t \geq |\alpha| \end{cases}$$

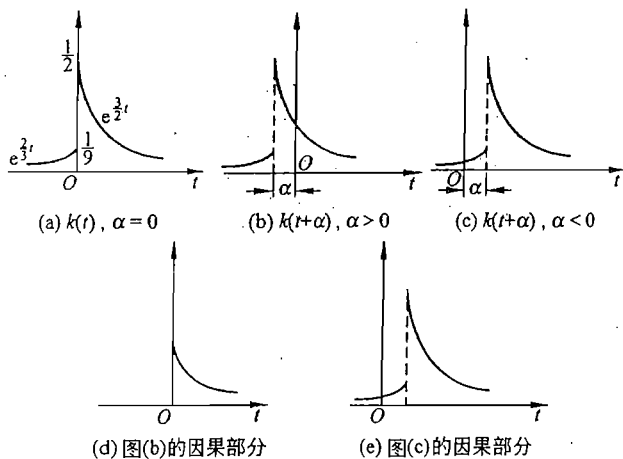
于是可以得出

$$[K(S)e^{s\alpha}]^+ = \begin{cases} \frac{1}{2S+1}e^{-\frac{\alpha}{2}}, & \alpha > 0 \\ \frac{1}{2S+1}, & \alpha = 0 \\ \frac{1}{3} \times \frac{e^{-\frac{2}{3}\alpha} - e^{s\alpha}}{3S-2} + \frac{1}{2} \times \frac{e^{s\alpha}}{S+1/2}, & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$H(S) = \frac{(2S+1)(S+1)}{3S+2} [K(S)e^{s\alpha}]^+$$

下面计算波形估计的均方误差。

$$\begin{aligned} \text{var}[\bar{s}(t+\alpha)] &= R_g(0) - \int_0^\infty h(\lambda) R_{gx}(\lambda+\alpha) d\lambda \\ &= R_f(0) - \int_0^\infty h(\lambda) R_{fx}(\lambda+\alpha) d\lambda \end{aligned}$$



例题图 7.23A

其中  $R_x(0) = \frac{7}{12}$ , 积分项是  $\alpha$  的函数, 用  $F(\alpha)$  表示, 则有

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} h(\lambda) R_{xx}(\lambda + \alpha) d\lambda$$

而

$$\begin{aligned} H(S) &= \frac{1}{G_x^+(S)} [K(S)e^{s\alpha}]^+ \\ &= \frac{1}{G_x^+(S)} \int_0^{\infty} k(t+\alpha)e^{-St} dt \end{aligned}$$

相应地有

$$h(\lambda) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{e^{S\lambda}}{G_x^+(S)} dS \int_0^{\infty} k(t+\alpha)e^{-St} dt$$

故得

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_0^{\infty} k(t+\alpha) \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{e^{-S(t+\alpha)}}{G_x^+(S)} dS \int_0^{\infty} R_{xx}(\lambda + \alpha) e^{S(\lambda+\alpha)} d\lambda dS dt \\ &= \int_0^{\infty} k(t+\alpha) \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{-S(t+\alpha)} \frac{G_{xx}(-S)}{G_x^+(S)} dS dt \\ &= \int_0^{\infty} k(t+\alpha) \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} K(-S) e^{-S(t+\alpha)} dS dt \\ &= \int_0^{\infty} k^2(t+\alpha) dt \\ &= \int_0^{\infty} k^2(t) dt \end{aligned}$$

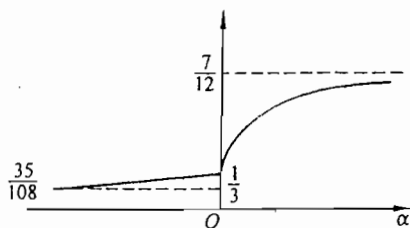
将  $k(t)$  的值代入此式, 得

$$F(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-\alpha}, & \alpha > 0 \\ \frac{1}{4}, & \alpha = 0 \\ \frac{1}{108}(1 - e^{\frac{4}{3}\alpha}) + \frac{1}{4}, & \alpha < 0 \end{cases}$$

故得

$$\text{var}[\hat{s}(t+\alpha)] = \frac{7}{12} - F(\alpha) = \frac{7}{12} - \int_0^{\infty} k^2(t) dt$$

可见, 当  $\alpha > 0$  时,  $\alpha$  越大 (即预测时间越长) 则误差越大; 当  $\alpha < 0$  时,  $|\alpha|$  越大 (即平滑时间越长) 则误差越小, 如例题图 7.23B。但误差都有极限值。



例题图 7.23B

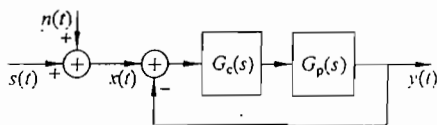


当  $\alpha = -\infty$  时,  $\text{var}[\tilde{s}(t+\alpha)] = 35/108$ 。

当  $\alpha = 0$  时,  $\text{var}[\tilde{s}(t+\alpha)] = 1/3$ 。

当  $\alpha = \infty$  时,  $\text{var}[\tilde{s}(t+\alpha)] = 7/12$ 。

**例 7.24** (反馈控制系统的维纳滤波) 考虑一个反馈控制系统, 如例题图 7.24 所示。其中  $G_p(S)$  为执行装置,  $G_c(S)$  为补偿器, 输入  $x(t)$  由平稳信号  $s(t)$  与白噪声  $n(t)$  组成。假设  $G_n(S) = N_0/2$ ,  $G_i(S) = 1/(1-S^2)$ ,  $G_p(S) = 1/S(S+1)$ , 要求在均方误差最小的意义下使输出  $y(t)$  跟踪信号  $s(t)$ , 求  $G_c(S)$ 。



例题图 7.24

**解** 这是个维纳滤波问题。不难得出, 跟踪环路的传输函数  $T(S)$  为

$$T(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{G_c(S)G_p(S)}{1 + G_c(S)G_p(S)}$$

则  $x(t)$  的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} G_x(S) &= G_i(S) + G_n(S) \\ &= \frac{1}{1-S^2} + \frac{N_0}{2} \\ &= \sqrt{\frac{N_0}{2}} \left( \frac{\sqrt{1+2/N_0} + S}{1+S} \right) \cdot \sqrt{\frac{N_0}{2}} \left( \frac{\sqrt{1+2/N_0} - S}{1+S} \right) \end{aligned}$$

则有

$$G_x^+(S) = \sqrt{\frac{N_0}{2}} \left( \frac{\sqrt{1+2/N_0} + S}{1+S} \right)$$

又因最佳传输函数  $T(S)$  应为

$$T(S) = 1 - \frac{1}{G_x^+(S)} \sqrt{\frac{N_0}{2}}$$

故

$$T(S) = 1 - \frac{1+S}{\sqrt{1+2/N_0} + S} = \frac{\sqrt{1+2/N_0} - 1}{\sqrt{1+2/N_0} + S}$$

于是可得补偿器的  $G_c(S)$  为

$$G_c(S) = \frac{1}{G_p(S)} \frac{T(S)}{[1-T(S)]} = S(\sqrt{1+2/N_0} - 1)$$

**例 7.25** 假设有一个随机信号  $s(k)$  为

$$s(k) = as(k-1) + u(k-1)$$

$$x(k) = s(k) + n(k)$$

已知  $E[s(k)] = 0$ ,  $R_s(j) = a^{|j|} \sigma_s^2$ ,  $\sigma_s^2 = \sigma_u^2 / (1-a^2)$ ; 根据测量方程, 以及  $\sigma_u^2 = \sigma_n^2$  和  $a^2 = 1/2$ , 试求对信号波形作递推滤波的时变增益  $b(k)$  及均方误差  $e(k)$ 。

解 首先确定递推方程式的起始条件。因为

$$\hat{s}(0) = E[s(0)] = 0$$

根据

$$\hat{s}(k) = a\hat{s}(k-1) + b(k)[x(k) - a\hat{s}(k-1)]$$

可以写出

$$\hat{s}(1) = b(1)x(1)$$

利用正交条件

$$E\{[s(1) - \hat{s}(1)]x(1)\} = 0$$

不难确定

$$b(1) = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_n^2} = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 - (1-a^2)\sigma_u^2} = \frac{2}{3} = 0.667$$

于是利用递推公式

$$b(k) = \frac{A + a^2 b(k-1)}{1 + A + a^2 b(k-1)}$$

式中信噪比为

$$A = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_n^2}$$

故可以逐次算出

$$b(2) = \frac{1 + a^2 b(1)}{2 + a^2 b(1)} = 0.57$$

$$b(3) = \frac{1 + a^2 b(2)}{2 + a^2 b(2)} = 0.562$$

.....

以及

$$e(1) = 0.667\sigma_n^2$$

$$e(2) = 0.57\sigma_n^2$$

$$e(3) = 0.562\sigma_n^2$$

.....

增益值  $b(1), b(2), \dots$  可以事前存储在计算机内, 当输入观测数据后便可不断地给出波形的滤波值  $\hat{s}(k)$ , 从而较容易地进行实时处理。

随着  $k$  的增加,  $b(k)$  趋近于稳定值。可以把  $b(k) = b(k-1)$  代入  $b(k)$  的表达式中, 从而求得该稳定值, 即

$$b(k) = \frac{1 + \frac{1}{2}b(k)}{2 + \frac{1}{2}b(k)}$$

该式可化简为

$$b^2(k) + 3b(k) + 2 = 0$$

于是得

$$b(k) = 0.56, \quad k \gg 1$$

例 7.26 考虑下述信号模型:

$$s(k+1) = \varphi(k+1, k)s(k) + u(k)$$

式中

$$\varphi(k+1, k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

用下面一个标量模型表示状态的测量:

$$x(k) = s_1(k) + n(k)$$

或写成

$$x(k) = c(k)s(k) + n(k)$$

式中  $c(k) = [1 \ 0]$ 。设动态噪声是平稳的白噪声, 其方差阵为

$$V_u(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

测量噪声是非平稳的白噪声, 其方差为

$$V_n(k) = 2 + (-1)^k$$

这意味着, 对于  $k$  为偶数时的测量噪声比  $k$  为奇数时要大。假设估计误差的方差阵起始条件为

$$V_r(0) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

要求计算卡尔曼滤波增益  $K(k)$ 。

解 首先计算预测误差的方差, 从而有

$$\begin{aligned} V_r(1|0) &= \varphi(1,0)V_r(0)\varphi^T(1,0) + \Gamma(0)V_u(0)\Gamma^T(0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

于是可得

$$K(1) = V_r(1|0)C^T(1)[C(1)V_r(1|0)C^T(1) + V_n(1)]^{-1}$$

对于  $V_n(k)$ , 则有

$$\begin{aligned} V_n(k) &= E[n(t)n^T(t)] \\ &= E\left\{\begin{pmatrix} n(k) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n(k) & 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \begin{pmatrix} 2 + (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} K(1) &= \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} (21)^{-1} = \begin{pmatrix} 20/21 \\ 10/21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 \\ 0.48 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

为了计算  $K(2)$ , 先计算  $V_r(1)$ , 即有

$$\begin{aligned} V_r(1) &= [I - K(1)C(1)]V_r(1|0) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20/21 \\ 10/21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.95 & 0.48 \\ 0.48 & 6.24 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

再算  $V_r(2|1)$ , 有

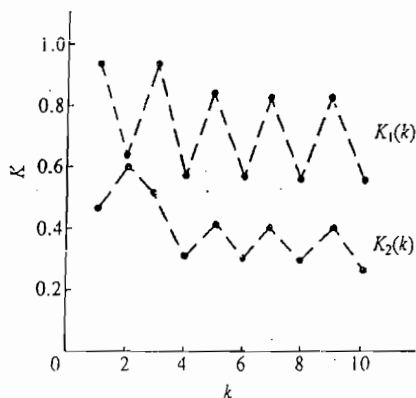
$$\begin{aligned} V_r(2|1) &= \varphi(2,1)V_r(1)\varphi^T(2,1) + \Gamma(1)V_n(1)\Gamma^T(1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.95 & 0.48 \\ 0.48 & 6.24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8.1 & 6.7 \\ 6.6 & 7.2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

于是可以算出

$$\begin{aligned} K(2) &= V_r(2|1)C^T(2)[C(2)V_r(2|1)C^T(2) + V_n(2)]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 8.1 & 6.7 \\ 6.6 & 7.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.1 & 6.7 \\ 6.6 & 7.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0.73 \\ 0.6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中  $K_1(2)=0.73$ ,  $K_2(2)=0.6$ 。接着可以计算  $V_r(2)$ , 再求出  $V_r(3|2)$  及  $K(3)$ , 等等, 以此类推, 结果示于例题图 7.26。从图中可以看出, 当  $k$  为奇数时, 卡尔曼滤波增益较大, 这反映了此时测量噪声较小, 测量数据的可靠性较高, 因此修正时可以采用较大的增益。从图中还可以看出, 经过几个采样时间后, 增益便处于近似周期性的稳定状态了。

在实际使用中, 关于卡尔曼滤波的计算都是在数字计算机上进行的。而且滤波器的卡尔曼增益矩阵与观测数据无关, 可以预先离线算出, 减少实时的在线计算量。



例题图 7.26

例 7.27 已知系统的状态方程为

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t)$$

其中

$$E\{U(t)U^T(\tau)\} = Q\delta(t-\tau)$$

其观测方程为

$$r(t) = C(t)X(t) + W(t)$$

其中

$$E\{W(t)W^T(\tau)\} = R(t)\delta(t-\tau)$$

对于上述模型可以知道,在一定条件下,卡尔曼滤波器中的方差方程为

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_P(t) &= A(t)\xi_P(t) + \xi_P(t)A^T(t) - \\ &\quad \xi_P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)\xi_P(t) + B(t)QB^T(t)\end{aligned}$$

这就是有名的黎卡提方程。一般情况下,它是一个非线性方程,很难得出 $\xi_P(t)$ 的解析解,往往不得不借助于计算机求其数值解。

但当系统模型中 $A, B, C$ 均为常数阵时,方差方程可用两个联立的线性方程来等效,从而可以求得 $\xi_P(t)$ 的解析解,若令

$$V_1(t) = \xi_P(t)V_2(t) \quad (1)$$

$$\dot{V}_2(t) = -A^TV_2(t) + C^TR^{-1}CV_1(t) \quad (2)$$

(1) 导出 $V_1(t)$ 和 $V_2(t)$ 应满足的状态方程,即若

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1(t) \\ \dot{V}_2(t) \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix}$$

将 $F$ 用系统模型中的已知量表示出来。

(2) 若假设对应于第(1)题状态方程的状态转移矩阵为

$$\varphi(t, t_0) = e^{F(t, t_0)} \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t, t_0) & \varphi_{12}(t, t_0) \\ \varphi_{21}(t, t_0) & \varphi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

求用 $\varphi(t, t_0)$ 和初始条件 $\xi_P(t_0)$ 表示的 $\xi_P(t)$ 的解析表达式。

解 (1) 对已知式(1)求导,并将式(2)和黎卡提方程代入其中,可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t) &= \dot{\xi}_P(t)V_2(t) + \xi_P(t)\dot{V}_2(t) \\ &= [A\xi_P(t) + \xi_P(t)A^T + BQB^T - \\ &\quad \xi_P(t)C^TR^{-1}C\xi_P(t)]V_2(t) + \\ &\quad \xi_P(t)[-A^TV_2(t) + C^TR^{-1}CV_1(t)] \\ &= AV_1(t) + BQB^TV_2(t)\end{aligned} \quad (3)$$

由式(2)和式(3)即得如下状态方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1(t) \\ \dot{V}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BQB^T \\ C^TR^{-1}C & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

即

$$F = \begin{bmatrix} A & BQB^T \\ C^TR^{-1}C & -A^T \end{bmatrix}$$

(2) 利用状态转移矩阵  $\varphi(t, t_0)$  可将齐次方程(4)的解表示为

$$\begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix} = \varphi(t, t_0) \begin{bmatrix} V_1(t_0) \\ V_2(t_0) \end{bmatrix}$$

即

$$V_1(t) = \varphi_{11}(t, t_0)V_1(t_0) + \varphi_{12}(t, t_0)V_2(t_0)$$

$$V_2(t) = \varphi_{21}(t, t_0)V_1(t_0) + \varphi_{22}(t, t_0)V_2(t_0)$$

将上述结果代入式(1)中即得

$$\begin{aligned} \xi_P(t) &= V_0(t)V_2^T(t) \\ &= [\varphi_{11}(t, t_0)V_1(t_0) + \varphi_{12}(t, t_0)V_2(t_0)]V_2^{-1}(t_0) \times \\ &\quad V_2(t_0)[\varphi_{21}(t, t_0)V_1(t_0) + \varphi_{22}(t, t_0)V_2(t_0)]^{-1} \\ &= [\varphi_{11}(t, t_0)\xi_P(t_0) + \varphi_{12}(t, t_0)][\varphi_{21}(t, t_0)\xi_P(t_0) + \varphi_{22}(t, t_0)]^{-1} \end{aligned}$$

本题给出了对于定常系统求解卡尔曼滤波器中的方差方程的一种很好的方法。

例 7.28 假设消息  $a(t)$  的功率谱密度为

$$S_a(\omega) = \frac{2KP}{\omega^2 + K^2}$$

若对  $a(t)$  不加任何调制, 即取状态变量  $x(t) = a(t)$ , 又设观测  $r(t)$  为

$$r(t) = x(t) + W(t)$$

其中  $W(t)$  是谱密度为  $N_0/2$  的白噪声。

- (1) 建立系统的状态方程和测量方程;
- (2) 写出相应的卡尔曼滤波算法中的滤波方程、增益方程和方差方程;
- (3) 利用例题 7.27 的方法求解方差方程(设  $\xi_P(t_0) = P$ );
- (4) 画出卡尔曼滤波器的方框图。

解 (1) 从  $S_a(\omega)$  出发建立系统的状态方程, 即将  $x(t)$  视为由白噪声  $u(t)$  激励一个线性系统  $H(\omega)$  的输出, 从而得出联系  $u(t)$  和  $x(t)$  的微分方程。因

$$S_a(\omega) = \frac{2KP}{\omega^2 + K^2} = 2KP \left| \frac{1}{j\omega + K} \right|^2 = 2KP |H(\omega)|^2$$

故有

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{U(\omega)} = \frac{1}{j\omega + K}$$

即

$$X(\omega) = j\omega + K = U(\omega)$$

对此式取反变换即得系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = -Kx(t) + u(t)$$

其中

$$\begin{aligned} E\{u(t)u(\tau)\} &= Q\delta(t-\tau) = 2KP\delta(t-\tau) \\ Q &= 2KP \end{aligned}$$

其观测方程为

$$r(t) = x(t) + W(t)$$

其中

$$E\{W(t)W(\tau)\} = R\delta(t-\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(t-\tau)$$

$$R = \frac{N_0}{2}$$

(2) 由系统的状态方程和测量方程可知

$$A = -K; \quad B = 1; \quad C = 1$$

$$Q = 2KP; \quad R = \frac{N_0}{2}$$

因此卡尔曼滤波算法中的滤波方程为

$$\dot{\hat{x}}(t) = 1 - k\hat{x}(t) + z(t)[r(t) - \hat{x}(t)]$$

增益方程为

$$z(t) = \frac{2}{N_0}\xi_P(t)$$

方差方程为

$$\dot{\xi}_P(t) = -K\xi_P(t) + 2KP - \frac{2}{N_0}\xi_P^2(t) \quad (*)$$

(3) 由例题 7.27 结果可知, 与方差方程等效的线性方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1(t) \\ \dot{V}_2(t) \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix}$$

其中系统矩阵为

$$F = \begin{bmatrix} -K & 2KP \\ \frac{2}{N_0} & K \end{bmatrix}$$

下面用凯莱-哈密顿方法求状态转移矩阵  $\varphi(\tau)$ 。系统矩阵  $F$  的特征方程为

$$|\lambda I - F| = \begin{vmatrix} \lambda + K & -2KP \\ -\frac{2}{N_0} & \lambda - K \end{vmatrix} = \lambda^2 - K^2 - \frac{4KP}{N_0} = 0$$

由此解出其特征根为

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{K^2 + 4KP/N_0} = \pm v$$

联立方程

$$\begin{cases} e^{v\tau} = K_0(\tau) + vK_1(\tau) \\ e^{-v\tau} = K_0(\tau) - vK_1(\tau) \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} K_0(\tau) = \cosh v\tau \\ K_1(\tau) = \frac{1}{v} \sinh v\tau \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\varphi(\tau) &= K_0(\tau)I + K_1(\tau)F \\ &= \begin{pmatrix} \cosh v\tau - \frac{K}{v} \sinh v\tau & \frac{2KP}{v} \sinh v\tau \\ \frac{2}{N_0 v} \sinh v\tau & \cosh v\tau + \frac{K}{v} \sinh v\tau \end{pmatrix}\end{aligned}$$

由例题 7.27 可知, 根据  $\varphi(\tau)$  和初始条件  $\xi_P(t_0) = P$  即可得出  $\xi_P(t)$  的解析解, 于是得

$$\begin{aligned}\xi_P(t) &= [\varphi_{11}(t)\xi_P(t_0) + \varphi_{12}(t)][\varphi_{21}(t)\xi_P(t_0) + \varphi_{22}(t)]^{-1} \\ &= \frac{2KP}{v+K} \frac{1 + \frac{v-K}{v+K}e^{-2vt}}{1 - \left(\frac{v-K}{v+K}\right)^2 e^{-2vt}}\end{aligned}$$

注: ① 由系统矩阵  $F$  求状态转移矩阵  $\varphi(\tau)$  有许多种方法, 这里给出的凯莱-哈密顿方法在一般情况下比较简单;

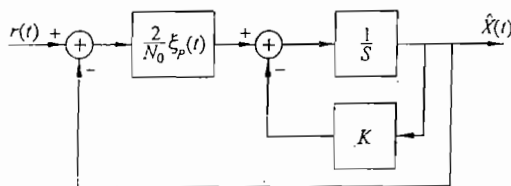
② 由于本题比较简单, 事实上例 7.27 中卡尔曼滤波器方差方程用分离变量法即可求解, 读者不妨作为一个练习用分离变量法求解此方程, 并比较结果;

③ 令  $t \rightarrow \infty$ , 可以由  $\xi_P(t+t_0)$  的表达式中得出  $\xi_P(t)$  的稳态值为

$$\xi_{P\infty} = \frac{N_0}{2}(v-K)$$

另一方面, 直接在方程中令  $\dot{\xi}_P(t) = 0$ , 同样可以解出相同的  $\xi_{P\infty}$ , 从而证明第(3)题的方法的可靠性。

(4) 综上所述, 卡尔曼滤波器的方框图如例题图 7.28 所示。



例题图 7.28

## 7.3 练习题

### 7.1 设信号为

$$s(t) = A \exp\left[-\left(\frac{2t}{\tau}\right)^2\right]$$

其中  $\tau$  为  $s(t)$  的值大于  $\frac{A}{e}$  的持续时间。求与该信号相匹配的滤波器的传输函数  $H(\omega)$ 。

### 7.2 设 RC 积分电路的输入信号为

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

其中  $n(t)$  的功率谱密度为



$$G_n(\omega) = \frac{N_0}{2}, \quad -\infty < \omega < \infty$$

$s(t)$  与  $n(t)$  统计独立, 且为矩形视频脉冲

$$s(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

若定义积分电路的等效噪声频带  $\Delta f_c = 1/(2RC)$ , 试求

- (1) 积分电路输出信噪比的表达式;
- (2) 最佳等效噪声频带  $\Delta f_{c, \text{opt}}$  与  $\tau$  成什么关系时, 积分电路输出端有最大信噪比。

7.3 设线性滤波器输入为混合信号, 即

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

其中

$$s(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < a \\ 2a - t, & a \leq t < 2a \\ 0, & t < 0, t \geq 2a \end{cases}$$

其中  $n(t)$  为平稳白噪声, 且与  $s(t)$  统计独立。试求匹配滤波器的传输函数  $H(\omega)$  与冲激响应  $h(t)$ 。

7.4 设信号  $s(t)$  为

$$s(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < \infty \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

求与该信号相匹配的滤波器中的冲激响应  $h(t)$ 。

7.5 设计一个线性系统, 使输出  $\frac{S}{N}$  可达最大, 其中

$$\frac{S}{N} = \frac{\left( \int_0^T h(\tau) s(t-\tau) d\tau \right)^2}{\frac{N_0}{2} \int_0^T h^2(\tau) d\tau}$$

(1) 证明  $h_{\text{opt}}(\tau) = K s(T-\tau)$  及  $H_{\text{opt}}(j\omega) = K S^*(j\omega) e^{-j\omega T}$ ;

(2) 说明  $T$  的意义 ( $e^{-j\omega T}$  的意义);

(3) 求  $\left( \frac{S}{N} \right)_{\max}$ , 并问从中可以得出什么结论;

(4) 当输入为矩形脉冲信号时, 画出输出波形的示意图。

7.6 设信号  $s(t)$  为

$$s(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \\ \frac{2A}{\tau - \tau_1} \left[ \frac{\tau}{2} + t \right], & -\frac{\tau}{2} < t < -\frac{\tau_1}{2} \\ A, & -\frac{\tau_1}{2} < t < \frac{\tau_1}{2} \\ \frac{2A}{\tau - \tau_1} \left[ \frac{\tau}{2} - t \right], & \frac{\tau_1}{2} < t < \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

求与该信号匹配的滤波器的传输函数  $H(\omega)$  与冲激响应  $h(t)$ 。

7.7 设线性滤波器输入混合信号为

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

已知  $s(t)$  与  $n(t)$  统计独立, 且

$$s(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$n(t)$  是平稳噪声, 其功率谱密度为

$$G_n(\omega) = \frac{2a\omega^2}{a^2 + \omega^2}, \quad -\infty < \omega < +\infty$$

试求信噪比最大的最佳线性滤波器的传输函数。

7.8 设线性滤波器输入混合信号为

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

其中信号  $s(t)$  为

$$s(t) = 1 - \cos\omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_0}$$

若噪声  $n(t)$  的“物理”功率谱密度  $F_n(\omega) = N_0, 0 < \omega < +\infty$ , 且它与信号统计独立, 设计匹配滤波器。

- (1) 求传输函数和冲激响应;
- (2) 求波形输出。
- (3) 如果噪声  $n(t)$  的功率谱密度为

$$G_n(\omega) = \frac{\omega_1^2}{\omega^2 + \omega_1^2}, \quad -\infty < \omega < +\infty$$

其中  $\omega_1$  为常数。试求输出信噪比最大的最佳线性滤波器的传输函数和冲激响应。

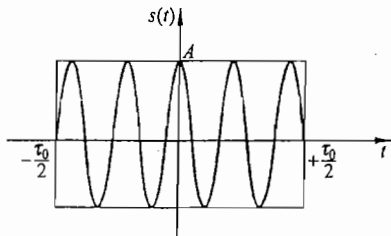
7.9 设输入信号  $s(t)$  为单个矩形射频脉冲, 其波形如练习题图 7.9 所示。即

$$s(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \cos\omega_0 t$$

式中, 矩形函数

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau_0}\right) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{\tau_0}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau_0}{2} \end{cases}$$

求其匹配滤波器的传输函数  $H(\omega)$ 、输出信号  $s_0(t)$  的波形、最大峰值信噪比  $d_{\max}$ 。



练习题图 7.9

7.10 给定  $x = \frac{s}{2} + n$ , 其中  $n$  是零均值且方差为 1 的随机变量。

(1) 求  $x$  的最大似然估计  $\hat{s}_{ml}$ ;

(2) 对于  $f(s) = \begin{cases} \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{s}{4}\right), & s \geq 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases}$

求最大后验概率估计  $\hat{s}_{map}$ 。

7.11 一个数字通信系统在长度为  $T$  的时间间隔内收到“1”的次数  $N$  服从参数为  $A$  的泊松分布, 即

$$P[N = n | A = a] = \frac{a^n}{n!} e^{-a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

其中  $A$  服从指数分布, 即有

$$P_A(a) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda a}, & a \geq 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$$

假设在某一段时间间隔  $T$  中, 观测到出现“1”的次数为  $n$ , 试根据这一观测求  $A$  的最大后验概率估计和最小均方误差估计。

7.12 已知  $r = ca + n, r \in \mathbb{R}^n, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, a \sim N(0, \sigma_a^2), n \sim N(0, \sigma_n^2)$ 。

求最小均方误差估计。

7.13 对于练习题 7.12, 求最大似然估计。

7.14 在描述雷达杂波时经常使用对数正态分布, 即

$$p(r | m, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} r \sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \ln^2\left(\frac{r}{m}\right)\right], \quad r > 0, m > 0, \sigma > 0$$

其中  $m$  是  $r$  的中位数,  $\sigma$  是  $\ln\left(\frac{r}{m}\right)$  的标准离差。  $r$  的均值与其中位数之比是一个十分重要的量, 记为  $\rho$

$$\rho = \frac{E(r)}{m} = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

假设可获得  $N$  个彼此独立的观测  $r_1, r_2, \dots, r_N$ 。

(1) 求  $m$  的极大似然估计;

(2) 求  $\rho$  的极大似然估计。

7.15 已知平稳过程  $X(t)$  均方可微, 要用  $t$  时刻观测到的  $X(t)$  和  $\dot{X}(t)$  去求  $Y(t) = X(t+T)$  的线性最小均方误差估计, 即

$$\hat{Y}(t) = aX(t) + b\dot{X}(t)$$

(例如在雷达跟踪问题中, 有时就要用  $t$  时刻观测的距离和速度数据去估计  $t+T$  时刻的距离, 用以确定跟踪距离门)。

(1) 求  $a$  和  $b$ 。

(2) 讨论当  $T$  很小时会出现什么结果。这个结果合理吗?

7.16 考虑一个混在噪声  $V$  中的  $n$  维矢量  $X$  的估计问题, 设观测方程为

$$Y = CX + V$$

其中  $Y, V$  为  $m$  维矢量,  $C$  为  $m \times n$  矩阵,  $V$  与  $X$  统计独立, 并且其概率密度分别为  $V \sim N(0, R)$  和  $X \sim (\mu_X, P_X)$ 。试由观测  $Y$  求  $X$  的

- (1) 最小方差估计;
- (2) 最大后验概率估计;
- (3) 极大似然估计。

7.17 已知电压  $s$ , 其概率密度为

$$f(s) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{8}\right)$$

现用几次电压测量的线性组合对  $s$  进行估计, 两只高级仪表的读数分别为  $x_1$  和  $x_2$ , 读数的真实电压加上零均值的正态误差是各自独立的, 且  $\sigma_n^2 = 2(V)$ 。

(1) 求  $s$  的最佳线性均方估计;

(2) 用四只不太准确的仪表, 重新测得有较大误差的数据  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ , 且方差  $\sigma_n^2 = 4(V)$ , 求最佳线性均方估计。

7.18 设有零均值实的平稳随机过程  $s(t)$ , 它的相关函数为  $R_s(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$ , 利用  $(-\infty, t]$  内对  $s(\cdot)$  的观测值求  $s(t+t_0)$  的最佳估值  $\hat{s}(t+t_0)$ 。

7.19 对于纯预测问题, 用  $t$  时刻对随机过程  $X(t)$  的一次观测去估计  $t+T$  时刻  $X(t)$  的值。已知  $X(t)$  的均值为零, 自相关函数为  $R(\tau)$ 。

- (1) 求  $X(t+T)$  的线性最小均方误差估计以及相应的均方误差;
- (2) 对于  $R(\tau) = e^{-K|\tau|}$  的特殊情况, 求解第(1)题;
- (3) 证明在第(2)题的条件下,  $t$  以前的全部知识对  $X(t+T)$  的线性最小均方误差估计毫无帮助。

7.20 设  $X$  为一个  $N$  维的零均值高斯随机矢量, 其协方差矩阵为

$$\Lambda_X = E\{XX^T\}$$

又设  $Y$  为一个零均值的高斯随机变量, 其方差为  $\sigma_Y^2$ ,  $Y$  与  $X$  是联合高斯的, 并且已知

$$K_{YX} = E\{YX^T\}$$

现在要利用对  $X$  的观测来估计  $Y$ 。

- (1) 求在最小均方误差准则下  $Y$  的最佳估计和相应的均方误差;
- (2) 求在线性最小均方误差准则下  $Y$  的最佳估计和相应的均方误差。同第(1)题的结果相比较可以得出什么结论?

7.21 要从受到噪声干扰的观测中估计具有有理谱密度的信号。设观测为

$$r(u) = a(u) + n(u); \quad -\infty < u \leq t$$

其中  $a(u)$  为信号, 其功率谱密度  $S_a(\omega)$  为有理分式,  $n(u)$  为谱密度等于  $N_0/2$  的白噪声,  $a(u)$  与  $n(u)$  互不相关, 即

$$S_r(\omega) = S_a(\omega) + \frac{N_0}{2}$$

若要求根据观测  $r(u)$  估计信号  $a(t)$ , 求可实现的维纳滤波器  $H_0(\omega)$ 。

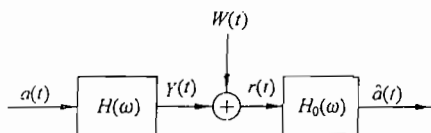
7.22 如练习题图 7.22 所示, 信号  $a(t)$  在传输之前先通过一个线性系统  $H(\omega)$ , 系统输出  $Y(t)$  在传输过程中受到不相关的白噪声  $W(t)$  的污染, 已知  $W(t)$  的谱密度为  $N_0/2$ , 信号  $a(t)$  的谱密度为

$$S_a(\omega) = \frac{2K\sigma^2}{\omega^2 + K^2}$$

线性系统传输函数为

$$H(\omega) = \left(\frac{\alpha}{K}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{j\omega + K}{j\omega + \alpha}$$

若要估计信号  $a(t)$ , 求可实现的维纳滤波器  $H_0(\omega)$ 。



练习题图 7.22

7.23 若  $X(t) = s(t) + n(t)$ ,  $s(t)$  和  $n(t)$  为零均值互不相关的实平稳随机过程, 且  $R_s(\tau) = A e^{-\beta|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ ,  $\beta \ll \omega_0$ ,  $n(t)$  为白噪声, 即  $S_n(\omega) = N_0$ 。若不考虑网络的可实现性, 求最佳过滤的方法。



# 练习题答案

## 第 1 章

- 1.1 设  $Y(t_1) = \begin{cases} A, & \text{如果脉冲长于 } t_1 \text{ 或等于 } t_1, \\ 0, & \text{如果脉冲短于 } t_1. \end{cases}$

$$f_Y(y) = \frac{t_1}{T} \delta(y) + \left(1 - \frac{t_1}{T}\right) \delta(y - A), \quad 0 \leq t_1 \leq T.$$

- 1.2  $m_Y(t) = m_X(t) + \phi(t), C_Y(t_1, t_2) = C_X(t_1, t_2).$

1.4 (1)  $R_Y(\tau) = \frac{A^4}{4} \left[ 1 + \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 \tau \right];$

(2)  $X(t)$  和  $Y(t)$  联合平稳。

- 1.6 全不是。

1.7  $S_X(\omega) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} S a^2 \left( \frac{n\pi}{2} \delta(\omega - n\omega_0) \right).$

- 1.8 联合平稳、相关(局部不相关)、非正交(局部正交), 统计不独立。

1.9 (1)  $f_V^*(v) = \frac{v}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right), \quad v \geq 0$

$$f_\Phi(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 < \varphi < 2\pi, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

(2) 统计独立;

(3)  $f_Y(y, t) = N(0, \sigma^2),$  一阶平稳。

1.10  $p_X(x) = N(b + mt, \sigma^2 t^2).$

1.11 均值各态历经。

1.13  $m_X(n) = 0, R_X(m) = \sigma^2 \delta(m),$  是平稳随机序列。

1.15 不是。

1.16 (1)  $P_X = \frac{3}{8} A^4;$

(2)  $P_X = \frac{3}{8} A^4.$

1.19 (1)  $R_Z(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 + R_Y(t_1, t_2) \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 -$   
 $R_{XY}(t_1, t_2) \cos \omega t_1 \sin \omega t_2 - R_{YX}(t_1, t_2) \sin \omega t_1 \cos \omega t_2;$

(2)  $R_Z(t_1, t_2) = R_X(\tau) \cos \omega \tau.$

1.20 (1)  $R_{XY}(\tau) = a R_X(\tau - \tau_1) + R_{XN}(\tau);$

(2)  $R_{XY}(\tau) = a R_X(\tau - \tau_1).$

1.21 (1)  $\frac{1}{a};$

$$(2) \frac{1}{2a}.$$

$$1.22 \quad E[X(t)] = a \sin \omega t e^{-\frac{1}{2}}, D[X(t)] = \frac{a^2}{2} - a^2 \sin^2 \omega t e^{-1}.$$

$$1.24 \quad S_X(\omega) = \frac{\pi a^2}{2} [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)] + \frac{2ab^2}{\omega^2 + a^2}.$$

$$1.25 \quad S_{XY}(\omega) = 2\pi m_X m_Y \delta(\omega), S_{XZ}(\omega) = S_X(\omega) + 2\pi m_X m_Y \delta(\omega).$$

$$1.26 \quad (1) S_Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} S_X(\omega) * S_Y(\omega);$$

$$(2) S_Z(\omega) = \frac{1}{4} \left[ \frac{\sin^2\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\right)}{\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\right)^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)}{\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)^2} \right].$$

$$1.28 \quad S_Z(\omega) = 2\pi |A|^2 f_n(\omega).$$

$$1.30 \quad R(\tau) = \frac{1}{4} (e^{-|\tau|} + |\tau| e^{-|\tau|}).$$

$$1.31 \quad R(\tau) = \pi \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\omega_i} e^{-\omega_i |\tau|}.$$

$$1.32 \quad C_X(t_1, t_2) = \sigma_1^2 + r(t_1 + t_2) + \sigma_2^2 t_1 t_2.$$

$$1.34 \quad R_X(\tau) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \cos \omega_i \tau, S_X(\omega) = \pi \sigma^2 \sum_{i=1}^n [\delta(\omega - \omega_i) + \delta(\omega + \omega_i)].$$

$$1.35 \quad R_Y(n) = \frac{a^{|n|}}{1 - |a|^2}, S_Y(\omega) = \frac{1}{|1 - a e^{-j\omega}|^2}.$$

## 第 2 章

$$2.1 \quad D(Y) = \sigma^2, D(Z) = a^2 \sigma^2.$$

$$2.2 \quad R_{\dot{X}\dot{X}}(\tau) = -\frac{1}{3} A \alpha^2 e^{-\alpha |\tau|} (1 + \alpha |\tau| - \alpha^2 \tau^2).$$

$$2.3 \quad S_Y(\omega) = \frac{2A\alpha^3}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)^2} (K_1^2 + K_2^2 \alpha^2).$$

2.5 (1) 均方连续、可微;

(2) 均方连续、不可微。

$$2.6 \quad r_X(\tau) = e^{-\alpha^2 \tau}, r_{\dot{X}\dot{X}}(\tau) = -\sqrt{2\alpha} e^{-\alpha^2 \tau}, r_{\dot{X}}(\tau) = (1 - 2\alpha \tau^2) e^{-\alpha^2 \tau}.$$

$$2.7 \quad R_Z(t_1, t_2) = 5[3 - 4(t_1 - t_2)^2] e^{-(t_1 - t_2)^2}.$$

$$2.8 \quad m_Y(t) = \frac{\sin 3t}{3t}, R_Y(t_1, t_2) = \frac{\sin 3t_1 \sin 3t_2}{9t_1 t_2}, \sigma_Y^2(t) = \frac{\sin^2 3t}{9t^2}.$$

$$2.9 \quad R_Y(t_1, t_2) = A[2\min(t_1, t_2) + e^{-t_1} + e^{-t_2} - e^{-|t_1 - t_2|} - 1], \sigma_Y^2(t) = 2A(t + e^{-t} - 1).$$

$$2.13 \quad E[Y(n)] = 0, R_Y(n) = \frac{N_0}{2} \frac{e^{2a}}{e^{2a} - 1} e^{-a|n|}.$$

$$2.21 \quad R_Y(\tau) = S_0 \delta(\tau) - \frac{S_0 \alpha}{2} e^{-\alpha |\tau|}.$$



$$2.23 \quad 2N_0\Delta\omega.$$

$$2.24 \quad R_Y(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{1}{a} e^{-\alpha_1} \cosh \alpha t_2, & 0 \leq t_1 \leq T, 0 \leq t_2 \leq t_1, \\ \frac{1}{a} e^{-\alpha_2} \cosh \alpha t_1, & 0 \leq t_1 \leq T, t_1 \leq t_2, \\ \frac{1}{a} e^{-\alpha T} \cosh \alpha t_2, & T \leq t_1, 0 \leq t_2 \leq T, \\ \frac{1}{a} e^{-\alpha_2} \cosh \alpha T, & T \leq t_1, T \leq t_2. \end{cases}$$

$$2.26 \quad (1) R_Y(\tau) = R_X(\tau), R_{XY}(\tau) = R_X(\tau - a);$$

(2) 以上两个结果是合理的, 因对于平稳过程, 延时并不改变其相关特性。

$$2.27 \quad m_Y(t) = \frac{\lambda}{a} (1 - e^{-\alpha}),$$

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \frac{\lambda^2}{a} (1 - e^{-\alpha_2}) + \lambda e^{-\alpha(t_2 - t_1)} U(t_2 - t_1),$$

$$R_Y(t_1, t_2) = \frac{\lambda^2}{a^2} (1 - e^{-\alpha_2})(1 - e^{-\alpha_1}) + \frac{\lambda}{2a} e^{-\alpha(t_2 - t_1)} (1 - e^{-2\alpha_1}), \quad t_2 > t_1.$$

由于  $R_Y(t_1, t_2) = R_Y(t_2, t_1)$ , 故当  $t_2 < t_1$  时, 只需交换上式中  $t_1$  和  $t_2$  的位置即可。

$$2.28 \quad (1) H(j\omega) = \frac{\sqrt{8} + j\omega}{\sqrt{3} + j\omega};$$

$$(2) \text{不惟一, 另一个解为 } H(j\omega) = \frac{\sqrt{8} - j\omega}{\sqrt{3} + j\omega}.$$

### 第 3 章

$$3.1 \quad s_0(t) = -\cos \omega_0 t.$$

$$3.4 \quad (1) H_1^*(j\omega) H_2(j\omega) \text{ 为实对称函数};$$

$$(2) H_1^*(j\omega) H_2(j\omega) = 0.$$

$$3.5 \quad E[Z^*(t)Z(t-\tau)] = e^{-j\omega_0\tau}, E[Z(t)Z^*(t-\tau)] = e^{j\omega_0\tau}.$$

$$3.6 \quad R_c(\tau) = R_s(\tau) = A(\tau), R_{cs}(\tau) = -R_{sc}(\tau) = 0, \sigma_c^2 = \sigma_s^2 = A(0).$$

$$3.8 \quad (2) p_A(A_c, A_s, \dot{A}_c, \dot{A}_s) = \frac{1}{4\pi^2 \sigma^2 \omega_c} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 \omega_c^2} [\omega_c^2 (A_c^2 + A_s^2) + (\dot{A}_c^2 + \dot{A}_s^2)] \right\}$$

$$\text{其中 } \omega_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_n(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) d\omega} = \frac{\sigma_n^2}{\sigma^2}.$$

3.11 解 (2) 由练习题图 3.11 可知,  $X(t)$  是窄带随机过程,  $A(t)$  和  $B(t)$  是  $X(t)$  的同相分量和正交分量, 因此有

$$S_A(f) = S_B(f) = \begin{cases} S_X(f + f_0) + S_X(f - f_0), & |f| \leq 2\Delta f \\ 0, & |f| > 2\Delta f \end{cases}$$

解

$$S_A(f) = S_B(f) = \begin{cases} \left(\frac{f}{2\Delta f} + 1\right)P, & -2\Delta f \leq f < -\Delta f \\ \left(\frac{3f}{2\Delta f} + 2\right)P, & -\Delta f \leq f < 0 \\ \left(-\frac{3f}{2\Delta f} + 2\right)P, & 0 \leq f < \Delta f \\ \left(-\frac{f}{2\Delta f} + 1\right)P, & \Delta f \leq f < 2\Delta f \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这里设  $S_X(f)$  的峰值为 1。

(3) 由窄带随机过程同相分量和正交分量性质可知  $A(t)$  和  $B(t)$  是正交过程。

## 第 4 章

$$4.3 \quad p_V(v) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v^2}{\sigma^3} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}, & v \geq 0, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

$$4.14 \quad (1) \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, 0, \sigma^2;$$

$$(2) \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}, 0, \frac{4}{3}\sigma^2。$$

$$4.20 \quad (1) \min(s, t);$$

$$(2) \begin{cases} a - |t-s|, & |t-s| \leq a, \\ 0, & |t-s| > a; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{1}{6}s^2(3t-s), & s \leq t, \\ \frac{1}{6}s^2(3s-t), & s > t; \end{cases}$$

$$(4) 2[\min(s, t)]^2。$$

$$4.22 \quad E[\chi^2] = n, D[\chi^2] = 2n。$$

$$4.23 \quad E[\chi^2] = \lambda + n, D[\chi^2] = \lambda + 2n。$$

## 第 5 章

$$5.3 \quad E[X(t)] = \lambda, R_X(t_1, t_2) = \lambda^2 + \lambda(t_1 - t_2)。$$

$$5.4 \quad f_{T_k}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad E[T_k] = \frac{k}{\lambda}, \quad D[T_k] = \frac{k}{\lambda^2},$$

$$\phi_{T_k}(v) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - jv}\right)^k。$$

$$5.5 \quad E[N_2(t)] = (\lambda t)^2 + \lambda t, \quad \text{var}[N_2(t)] = \frac{d^2}{d^2} [e^{\lambda t(e^{\lambda t}-1)}] \Big|_{\lambda=0} - [(\lambda t)^2 + \lambda t]^2.$$

$$f_{N^r}(x|n) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-r)! (r-1)!} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{n-r} \frac{x^{r-1}}{t^r}, & 0 \leq x \leq t, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

$$5.9 \quad (1) P[X(t)=k] = \frac{(\lambda p t)^k}{k!} e^{-\lambda p t};$$

(2) 是。

$$5.10 \quad (1) \phi_{X_t}(v) = \exp\left\{\lambda \int_0^t E_Y[\exp\{jv h(\tau, Y)\} - 1] d\tau\right\};$$

$$(2) E[X(t)] = \lambda \int_0^t E_Y[h(\tau, Y)] d\tau, \quad \text{var}[X(t)] = \lambda \int_0^t E_Y[h^2(\tau, Y)] d\tau.$$

$$5.11 \quad E[M_T] = \frac{1}{2}\lambda t, \quad \text{var}[M_T] = \frac{1}{3}\lambda t.$$

$$5.12 \quad E[X(t)] = 10t, \quad \text{var}[X(t)] = 20t.$$

## 第 6 章

6.1

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.2

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$6.6 \quad p_{00}^{(n)} = \begin{cases} C_n^{\frac{n}{2}} p^{n/2} q^{n/2}, & n \text{ 为偶数,} \\ 0, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

6.7 (1) 自第二个状态出发经过 2 步可转移到第三个状态;

(2)

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{13}{36} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{5}{24} & \frac{11}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

6.8 (1) 不可约链, 周期为 2, 平稳分布为  $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ ;

(2) 状态 1 为吸收状态, 平稳分布为  $\{1, 0\}$ ;

(3) 两个状态均为吸收状态, 平稳分布为  $\{p, q\}$ ,  $0 \leq p, q \leq 1, p+q=1$ ;

(4) 状态 2 为吸收状态, 平稳分布为  $\{0, 1\}$ ;

(5) 不可约链, 平稳分布为  $\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ ;

(6) 状态 4 为吸收状态, 平稳分布为  $\left\{\frac{2}{3}p, \frac{1}{3}p, 0, q\right\}$ ,  $0 \leq p, q \leq 1, p+q=1$ 。

6.9  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r, \dots)$ , 式中,  $\pi_r = \left(\frac{p}{q}\right)^r \frac{q-p}{p}$ ,  $p < q$ 。

6.10  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r, \dots)$ , 式中,  $\pi_r = \left(1 - \frac{p}{q}\right) \left(\frac{p}{q}\right)^{r-1} \left[1 - \left(\frac{p}{q}\right)^n\right]$ 。

6.14  $P_1(n) = \alpha p_{11}^{(n)} + \beta p_{21}^{(n)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)(p - q)^n$ ,

$P_2(n) = \alpha p_{12}^{(n)} + \beta p_{22}^{(n)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)(p - q)^n$ ,

$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ 。

6.16 (1)

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} (2,0) & (1,0) & (1,1) & (0,1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (2,0) \\ (1,0) \\ (1,1) \\ (0,1) \end{matrix} & \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & p \\ q & p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix};$$

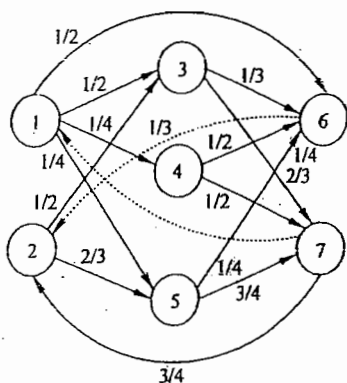
(2)  $\left\{\frac{q^2}{1+p^2}, \frac{p}{1+p^2}, \frac{pq}{1+p^2}, \frac{p^2}{1+p^2}\right\}$ 。

6.17 状态 1 为吸收态, 它本身构成一个闭集;  $\{2, 3\}$ ,  $\{4, 5\}$  各构成一个闭集。

6.18 所有状态都是相通的, 因此, 所有状态必然均为常返的, 整个状态空间  $I = \{0, 1, 2, 3\}$  构成一个闭集。

6.19 状态传递图如练习题答案图 6.19 所示。所有状态的周期都是 3。

6.26  $P_n(t) = C_N e^{-\eta t} (1 - e^{-\eta t})^{N-n}$ ,



练习题答案图 6.19

$$E\{X(t)\} = Ne^{-\alpha t}, \sigma_X^2 = Ne^{-\alpha t}(1 - e^{-\alpha t}).$$

$$\begin{aligned} 6.27 \quad (1) \quad \dot{p}_0(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \dot{p}_i(t) &= -\lambda p_{i-1}(t) - (\lambda + i\mu) p_i(t) + (i+1)\mu p_{i+1}(t), \quad 1 \leq i \leq k-1, \\ \dot{p}_k(t) &= -\lambda p_{k-1}(t) - k\mu p_k(t); \end{aligned}$$

$$(2) \quad p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0, p_i = \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i p_0, \text{ 这里 } p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}.$$

$$6.30 \quad m_X(t) = \frac{\pi^2 W}{2} (1 - e^{-\alpha t}), \dot{V}_X(t) = \frac{\sigma_W^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}).$$

$$6.31 \quad \text{数学期望为 } 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}.$$

## 第 7 章

$$7.1 \quad H(\omega) = K \exp\left(-\frac{\omega^2}{\Delta\omega^2} - j\omega t_0\right).$$

$$7.2 \quad (1) \quad d = \frac{2A^2}{N_0 \Delta f_c} (1 - e^{-2\Delta f_c \tau})^2;$$

$$(2) \quad \Delta f_{\text{cop1}} = \frac{0.6284}{\tau}.$$

$$7.3 \quad H(\omega) = -\frac{c}{\omega^2} [1 - e^{j\omega a}]^2 e^{-j\omega t_0},$$

$$h(t) = \begin{cases} t - (t_0 - 2a), & t_0 - 2a \leq t \leq t_0 - a, \\ t_0 - t, & t_0 - a \leq t \leq t_0, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

$$7.4 \quad h(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < \infty, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

$$7.6 \quad H(\omega) = \frac{K_0}{(j\omega)^2} \left[ 1 + \exp\left(-j\omega \frac{\tau - \tau_1}{2}\right) \right] \left[ -1 + \exp\left(-j\omega \frac{\tau + \tau_1}{2}\right) \right], \text{ 其中, } K_0 = \frac{2}{\tau - \tau_1}.$$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{2A}{\tau - \tau_1} t, & 0 \leq t < \frac{\tau - \tau_1}{2}, \\ A, & \frac{\tau - \tau_1}{2} \leq t < \frac{\tau + \tau_1}{2}, \\ \frac{2A}{\tau - \tau_1} (t - \tau), & \frac{\tau + \tau_1}{2} \leq t < \tau, \\ 0, & t > \tau, t < 0. \end{cases}$$

$$7.7 \quad H(\omega) = \frac{K_0}{j\omega} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{(j\omega)^2} \right) (1 - e^{-j\omega\tau}), \text{ 其中, } K_0 = \frac{cA}{2\alpha}.$$

$$7.8 \quad (1) \quad H(\omega) = c(1 - e^{-j\omega T_0}) \cdot \frac{\omega_0^2}{j\omega(\omega^2 - \omega_0^2)}, h(t) = c[1 - \cos\omega_0 t].$$

$$(2) \quad s_0(t) = ct + \frac{c}{2}(2T_0 - t)\cos\omega_0 t.$$

$$(3) \quad \text{在 } G_n(\omega) = \frac{\omega_1^2}{\omega^2 + \omega_1^2} \text{ 情况下, 则}$$

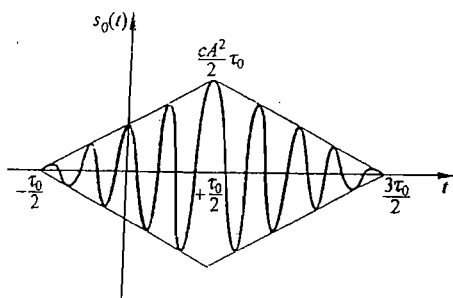
$$H'(\omega) = c(1 - e^{-j\omega T_0}) \cdot \frac{\omega_0}{j\omega(\omega^2 - \omega_0^2)} \cdot \frac{\omega^2 + \omega_1^2}{\omega_2},$$

$$h'(t) = 1 - \frac{\omega_0^2 + \omega_1^2}{\omega_1^2} \cos\omega_0 t.$$

$$7.9 \quad H(\omega) = \frac{cA\tau_0}{2} \left[ \text{sinc}\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau_0\right) + \text{sinc}\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\tau_0\right) \right] e^{-j\omega t_0},$$

$$s_0(t) = \begin{cases} \frac{cA^2}{2} \left[ \tau_0 - \left| t - \frac{\tau_0}{2} \right| \right] \cos\omega_0 \left( t - \frac{\tau_0}{2} \right), & \left| t - \frac{\tau_0}{2} \right| \leq \tau_0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

波形如练习题答案图 7.9 所示,  $d_{\max} = \frac{A^2 \tau_0}{N_0}$ .



练习题答案图 7.9

$$7.10 \quad (1) \quad \hat{s}_{ml} = 2x;$$

$$(2) \quad \hat{s}_{map} = \begin{cases} 2x - 1, & 2x - 1 \geq 0, \\ 0, & 2x - 1 < 0. \end{cases}$$

$$7.11 \quad \hat{a}_{map}(n) = \frac{n}{1 + \lambda}, \quad \hat{a}_{ms}(n) = \frac{1 + n}{1 + \lambda}.$$

$$7.14 \quad (1) \hat{m}_{ml} = \left( \prod_{k=1}^N r_k \right)^{\frac{1}{N}};$$

$$(2) \hat{\rho}_{ml} = \left[ \prod_{k=1}^N \left( \frac{r_k}{\hat{m}_{ml}} \right)^{\ln(r_k/\hat{m}_{ml})} \right]^{\frac{1}{2N}}.$$

$$7.15 \quad (1) a = \frac{R_X(T)}{R_X(0)}, b = \frac{R'_X(T)}{R'_X(0)};$$

(2) 当  $T$  很小时,  $a \approx 1, b \approx T$ , 因此  $\hat{X}(t+T) \approx X(t) + T \dot{X}(t)$ , 结果合理。

$$7.16 \quad (1) \hat{X}_{mv}(Y) = (P_X^{-1} + C^T R^{-1} C)^{-1} (C^T R^{-1} Y + P_X^{-1} \mu_X),$$

$$\text{var}[\tilde{X}_{mv}] = [P_X^{-1} + C^T R^{-1} C]^{-1};$$

$$(2) \hat{X}_{map}(Y) = (P_X^{-1} + C^T R^{-1} C)^{-1} (C^T R^{-1} Y + P_X^{-1} \mu_X),$$

$$\text{var}[\tilde{X}_{map}] = [P_X^{-1} + C^T R^{-1} C]^{-1};$$

$$(3) \hat{X}_{ml}(Y) = (C^T R^{-1} C)^{-1} C^T R^{-1} Y,$$

$$\text{var}[\tilde{X}_{ml}] = (C^T R^{-1} C)^{-1}.$$

$$7.17 \quad (1) \hat{s} = \frac{2}{5}(x_1 + x_2);$$

$$(2) E[(s - \hat{s})^2] = 0.8.$$

$$7.18 \quad \hat{s}(t+t_0) = e^{-\beta_0 t_0} s(t).$$

$$7.19 \quad (1) \hat{X}(t+T) = \frac{R(T)}{R(0)} X(t), e_0 = R(0) - \frac{R(T)}{R(0)};$$

$$(2) \hat{X}(t+T) = e^{-KT} X(t), e_0 = 1 - e^{-2KT}.$$

$$7.20 \quad (1) \hat{Y}(X) = E[Y|X] = K_{YX} \Lambda^{-1} X, e_0 = \sigma_Y^2 - K_{YX} \Lambda^{-1} K_{YX}^T;$$

(2)  $\hat{Y}(X) = K_{YX} \Lambda^{-1} X, e_0 = \sigma_Y^2 - K_{YX} \Lambda^{-1} K_{YX}^T$ ; 结果相同, 这表明在高斯假定下, 线性最小均方误差的估计即为条件均值。

$$7.21 \quad H_0(\omega) = 1 - \frac{\sqrt{N_0/2}}{S_r^+(\omega)}.$$

$$7.22 \quad H_0(\omega) = \sqrt{\frac{\alpha}{K}} \frac{4K\sigma^2}{N_0(K+\gamma)} \frac{(j\omega+\alpha)}{(j\omega+K)(j\omega+\gamma)},$$

$$\text{其中, } \gamma = \alpha \left( 1 + \frac{4\sigma^2}{\alpha N_0} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$7.23 \quad H_0(\omega) = \frac{\beta A}{\beta A + N_0[(\omega - \omega_0)^2 + \beta^2]},$$

$$E\{[s(t) - y(t)]^2\} = \frac{A}{\sqrt{1 + \frac{A}{N_0 \beta}}}.$$

## 参考文献

- 1 周荫清. 随机过程导论. 北京: 北京航空学院出版社, 1987
- 2 陆大经. 随机过程及其应用. 北京: 清华大学出版社, 1986
- 3 王梓坤. 随机过程论. 北京: 科学出版社, 1978
- 4 胡迪鹤. 应用随机过程引论. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1984
- 5 周荫清, 贺荣发, 陈炳和. 随机信号与检测理论. 航空专业教材编审组, 1985
- 6 A Papoulis. Probability Random Variables and Stochastic Processes. New York: McGraw-Hill, 198
- 7 W B Davenport. Probability and Random Processes. New York: McGraw-Hill, 1970
- 8 成都电讯工程学院 702 教研室编译. 概率论与随机过程习题集. 空军第二高射炮兵学院, 1981
- 9 H L 范特里斯著. 毛士艺, 周荫清等译. 检测、估计与调制理论. 北京: 国防工业出版社, 1983
- 10 惠伦著. 刘其培, 迟惠生译. 噪声中信号的检测. 北京: 科学出版社, 1977
- 11 许树声. 信号检测与估计. 北京: 国防工业出版社, 1985
- 12 袁天鑫. 最佳估计原理. 北京: 国防工业出版社, 1980
- 13 张炳根, 赵玉芝. 科学与工程中的随机微分方程. 北京: 海洋出版社, 1980
- 14 闵华玲. 随机过程. 上海: 同济大学出版社, 1987
- 15 李漳南, 吴荣. 随机过程教程. 北京: 高等教育出版社, 1987
- 16 A 弗里德曼著. 吴让泉译. 随机微分方程及其应用. 北京: 科学出版社, 1983

