同济大学课程考核试卷（B 卷）
2009—2010 学年第一学期

命题教师签名：　　　　　　　　　　审核教师签名：

课号：**122010**　　　课名：**线性代数 B**　　　　考试考查：**考试**

此卷选为：期中考试(　)、期终考试(√)、重考(　)试卷

年级_____专业____________学号__________姓名_________任课教师__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

（注意：本试卷共　大题，　大张，满分 100 分．考试时间为　分钟．要求写出解题过程，否则不予计分）

一、填空题（每空 3 分，共 24 分）

1. 已知 4 阶方阵为 $A=\left(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3,\beta_1\right)$，$B=\left(\alpha_1,2\alpha_2,\alpha_3,\beta_2\right)$，且 $\left|A\right|=-4$，$\left|B\right|=-2$，则行列式 $\left|A+B\right|=$______________。

2. 设行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&3&1\\1&0&0&0\\2&1&0&3\\4&5&1&2\end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 是 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $A_{41}+A_{42}=$_______。

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{pmatrix}$，伴随矩阵 $A^*\neq 0$，且 $A^*x=0$ 有非零解，则___________。

(A) $a=2$；　　(B) $a=2$ 或 $a=-4$；

(C) $a=-4$；　　(D) $a\neq 2$ 且 $a\neq -4$。

4. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (s\geq 2)$ 线性无关，且可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则以下结论中不能成立的是_______。

(A) 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关；

(B) 对任一个 $\alpha_j\ (1\leq j\leq s)$，向量组 $\alpha_j,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关；

(C) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价。

5. 已知 3 阶矩阵 A 与 B 相似且 $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，则 $B^{2012}-2A^2=$_____________。

6. 设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的特解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则以下命题中错误的是___B___。

(A) $\eta_0,\eta_0-\xi_1,\eta_0-\xi_2,\cdots,\eta_0-\xi_s$ 是 $Ax=b$ 的一组线性无关解向量；

(B) $2\eta_0+\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_s$ 是 $Ax=b$ 的解；

(C) $Ax=b$ 的每个解均可表为 $\eta_0,\eta_0+\xi_1,\eta_0+\xi_2,\cdots,\eta_0+\xi_s$ 的线性组合。

7. 设 4 阶矩阵 A 有一个特征值为 -2 且满足 $AA^T=5E$，$|A|>0$，则其伴随矩阵 A^* 的一个特征值为 ____________。

8. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 正定，则常数 a 的取值范围为__________。

二、（10 分）设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}$，且 $|A|>0$，$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$。求矩阵 B.

解：由 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$ 得 $\left(A-E\right)BA^{-1}=3E\Rightarrow\left(A-E\right)B=3A$

由 $A^*A=|A|E$ 两边同时取行列式有 $\left|A^*A\right|=\left|A^*\right|\left|A\right|=\left|A\right|^3$，从而 $\left|A^*\right|=\left|A\right|^2$，直接计算得

$\left|A^*\right|=1$，由 $|A|>0$ 有 $|A|=1$，即有 $A^*A=E$，$A=\left(A^*\right)^{-1}=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，

$\left|A-E\right|=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=1$，从而 $A-E$ 可逆，则 $B=\left(A-E\right)^{-1}3A=3\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

三、（10 分）已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$为所有 3 维实向量构成的线性空间$R^3$的两组基,

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为$P=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-1&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}$且$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

试求：(1) 基β_1,β_2,β_3；(2) 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 下有相同坐标的全体向量。

四、(10 分）设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$为 4 阶方阵，其中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是 4 维列向量，且

$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$。已知向量$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，试求线

性方程组$Ax=\beta$的通解。

五、(20 分）已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+4x_3^{\,2}+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$,

(1). 设矩阵A为二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$所对应的对称阵，试证$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$为$A$与$A^4$共同的特征

向量.

(2). 用正交变换将此二次型化为标准型.

六、(12 分)

设a_1,a_2,a_3为 3 维线性空间V的一组基，V上的线性变换T在a_1,a_2,a_3下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$$

(1). 求线性变换T在V的基a_1,a_1+a_2,a_1+a_3下的矩阵;

(2). 试证V中不存在一组基使T在该基下的矩阵为对角阵.

七、(14 分) 证明题:

(1). 设A为 2 阶实方阵, 且$|A|=-1$, 试证A可对角化.

(2). 设向量组$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$线性无关，$b_1=a_1+k_1a_4,b_2=a_2+k_2a_4,b_3=a_3+k_3a_4,b_4=a_4$

证明向量组b_1,b_2,b_3,b_4线性无关.