

第一篇 力 学

力学是一门古老的学问。在我国,公元前 5 世纪的《墨经》中已有关于杠杆原理的论述;在西方也可追溯到公元前 4 世纪亚里士多德(Aristotle)关于力产生运动的论述。但是力学作为一门科学理论的建立则已到了公元 17 世纪。公元 16 世纪末至 17 世纪初,伽利略(G. Galilei)用实验的方法发现了落体定律,其后牛顿(I. Newton)提出了以他名字命名的三个运动定律和万有引力定律,从而奠定了古典力学的基础。现在把以牛顿定律为基础的古典力学称为牛顿力学,或经典力学。经典力学理论是物理学中发展最早、最成熟的理论,它有严谨的理论体系和完备的研究方法。因而,从建立到 20 世纪初,牛顿力学兴盛了约 300 年。虽然在 20 世纪初发现了经典力学的局限性(局限于宏观物体的低速运动),因而在宏观物体的高速运动领域建立了相对论,在微观物体的低速运动领域建立了量子力学,但是在一般技术领域,更多的只涉及宏观低速问题,因此,经典力学是各工程技术(包括机械、建筑、水利、造船、航空、航天等)的理论基础。力学研究的对象是机械运动。机械运动是指物体间或物体内部各部分之间相对位置的变化。机械运动是存在于自然界中最普遍和最基本的运动形式。力学中提出的许多物理概念和物理原理适用于整个物理学。所以经典力学也是物理学和自然科学的基础。物体的运动总是在一定的空间和时间进行的,所以时空观问题也属力学研究的范畴。

本篇共 3 章。第一章质点运动学,主要研究质点运动的描述;第二章质点动力学,主要研究物体间的相互作用以及它们对物体运动的影响,着重介绍动量、角动量、能量等概念及相应的守恒定律;第三章介绍刚体定轴转动的运动学和动力学问题。

第一章 质点运动学

质点运动学侧重用几何学的观点研究质点机械运动状态随时间变化的关系。本章主要内容为：位置矢量、位移、速度和加速度等基本概念及质点的曲线运动和相对运动等。

1-1 质点运动的描述

一、参考系、坐标系、质点

自然界中所有的物体都在不停地运动，绝对静止不动的物体是不存在的。运动是物质存在的形式，是物质的固有属性，运动和物质是不可分割的。这就是运动的绝对性。例如在地面上相对静止的高楼都随地球一起以 $3.0 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度绕太阳运动，而太阳又以 $3.0 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度在银河系中运动。但是，要描述一个物体的机械运动，必须选择另一个运动物体或几个虽在运动而相互间相对静止的物体作为参考，然后再研究这个运动物体是如何相对于参考物体运动的。以上在描述物体运动时被选作参考的物体称为参考系。

在运动学中，参考系的选择可以是任意的。在实际问题中，参考系选择既要考虑问题的性质和需要，又要力求使对运动的描述变得简单。例如，确定交通车辆的位置时，可选用固定于地面上的房子或路牌作参考系，这样的参考系通常叫地面参考系。在实验室中确定某一物体的位置时，可选实验室的墙壁或固定的实验桌作参考系，这样的参考系就叫实验室参考系。经验表明，对同一物体的运动选择不同的参考系，对物体运动描述的结果是不相同的。例如，加速上升的升降机天花板上的一松动螺钉的下落过程，以升降机为参考系，螺钉的初速为零，作加速下落的直线运动；以地面为参考系，螺钉以脱落时升降机速度为初速作竖直上抛运动。在不同参考系中，对同一物体的运动具有不同的描述，叫做运动描述的相对性。运动描述的相对性表明，参考系的选择对描述一个物体的运动具有重要的意义。当我们研究一个物体的运动时，必须明确地选择恰当的参考系，只有选定了参考系，运动的描述才有意义。以后还会看到，凡是描述物体运动状态的物理量都具有相对性，如位置矢量、速度矢量等。

参考系选定之后，为了定量地描述一个物体相对于此参考系的位置，需在此参考系上建立固定的坐标系。最常用的坐标系是笛卡儿坐标系。

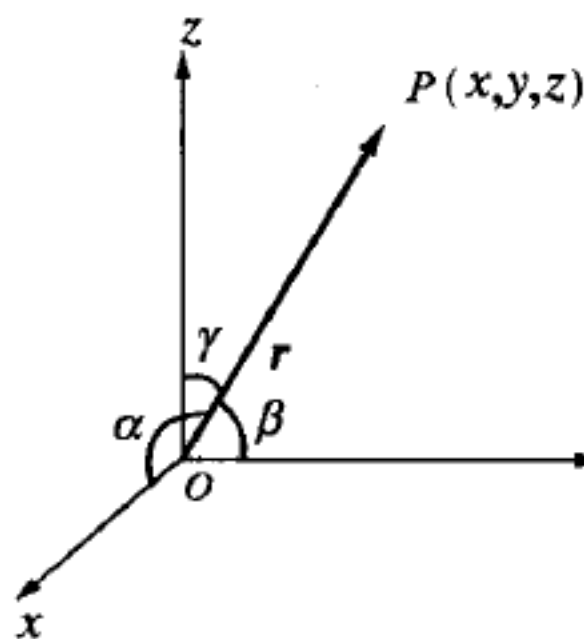
任何物体都有一定的大小、形状和内部结构。通常情况下，物体运动时，内部

各点的运动情况常常是不相同的. 因此要精确描写一般物体的运动并不是一件简单的事. 为使问题简化, 可以采用抽象的办法: 如果物体的大小和形状在所研究的问题中不起作用, 或所起的作用可以忽略不计, 我们就可以近似地把此物体看作一个没有大小和形状的理想物体, 称为质点. 质点是一个理想化模型, 质点仍然是一个物体, 它具有质量, 同时它已被抽象化为一个几何点. 质点是实际物体在一定条件下的抽象. 理想化模型的引入在物理学中是一种常见的重要的科学分析方法, 在以后的课程中还将引入一系列理想模型, 例如刚体、理想气体、点电荷等. 把物体抽象为质点的方法具有很大的实际意义和理论价值. 如在天文学中把庞大的天体抽象为质点的方法已获得极大的成功. 从理论上讲, 我们可以把整个物体看成由无数个质点所组成的质点系, 从分析研究这些最简单的质点入手, 就可能把握整个物体的运动, 所以质点运动是研究物体运动的基础. 物体抽象为质点需要注意: ①同一个物体在一个问题中可抽象为质点, 在另一个问题中则不能简化为质点. 例如研究地球绕太阳公转时, 由于地球至太阳的平均距离(约 1.5×10^8 km)比地球的半径(约为 6370 km)大得多, 地球上各点相对于太阳的运动可以看作是相同的, 可以把地球当作质点; 但研究地球自转时, 地球上各点的运动情况大不相同, 地球就不能当作质点处理了. ②注意区别质点与小物体. 物体再小(原子核的线度约为 10^{-15} m)也有大小、形状, 而质点为一几何点, 它没有大小, 在空间占有确切的位置.

二、位置矢量、位移

1. 位置矢量

空间任一点 P 的位置, 在直角坐标系中可以用一组坐标 (x, y, z) 来表示, 也可以用从坐标原点向 P 点引一有方向的线段 \mathbf{r} 来表示, 如图 1-1 所示. \mathbf{r} 称为位置矢量, 简称位矢, 也叫矢径.



矢径的端点就是质点的位置, 矢径在笛卡儿坐标系坐标轴上的投影分别为 x 、 y 、 z . 位置矢量可表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

式中 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} 分别为沿 x 、 y 、 z 轴的单位矢量. 位置矢量的大小为

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

图 1-1 质点的位置表示 位置矢量的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

式中 α 、 β 和 γ 分别是 \mathbf{r} 与 x 轴、 y 轴和 z 轴之间的夹角。

质点运动时,质点的空间位置随时间的变化关系可用矢径或坐标表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (1.1)$$

或
$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (1.2)$$

当质点在 Oxy 平面内运动时,式(1.2)简化为

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

知道了运动方程,质点的整个运动情况也就清楚了,所以运动学的主要任务之一就是根据各种问题的具体条件,求解质点的运动方程。

运动质点在空间所经过的径迹称为轨道。轨道为直线的运动,称为直线运动;轨道为曲线的运动,称为曲线运动。从式(1.2)中消去 t 后可得轨道方程,而式(1.2)是轨道的参数方程。例如一运动质点的运动方程为

$$\mathbf{r} = a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j}$$

由 $x = a \cos \omega t$, $y = a \sin \omega t$ 消去 t 便得其轨道方程为

$$x^2 + y^2 = a^2$$

位置矢量具有大小、方向,服从几何加法。位置矢量具有瞬时性,质点在运动过程中,不同时刻的位置矢量不同。位置矢量描述质点的运动状态,前面已经讲过,它具有相对性。运动质点的某一空间位置,用不同的坐标系来描写,表达式是不一样的。

式(1.1)表明:质点的实际运动是各分运动的矢量合成,这个由空间的几何性质所决定的各分运动和实际运动的关系叫运动的叠加(或合成)原理。

2. 位移

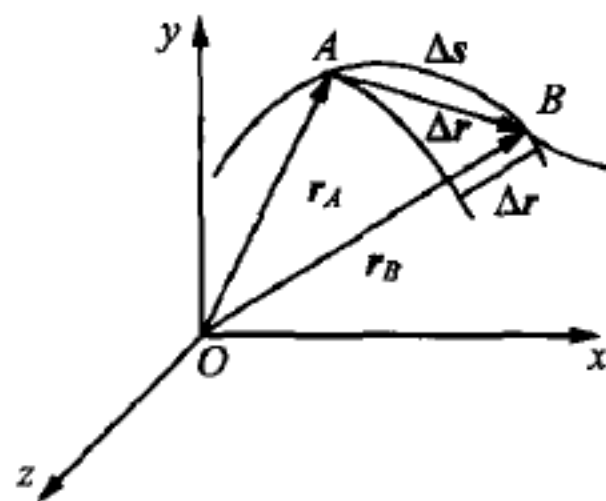
设曲线 AB 是质点轨道的一部分,如图 1-2 所示。 t 时刻质点在 A 点处, $t + \Delta t$ 时刻质点到达 B 点处。 A 、 B 两点的位置分别由 \mathbf{r}_A 和 \mathbf{r}_B 来表示。在 Δt 时间内,质点位置的变化可以用由 A 到 B 的有向线段 \overrightarrow{AB} 来表示,称为质点的位移。显然

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = \Delta \mathbf{r} \quad (1.3)$$

图 1-2 位移矢量

$\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ 表示矢径 \mathbf{r} 在 Δt 时间内的增量,所以用 $\Delta \mathbf{r}$ 表示。 $\Delta \mathbf{r}$ 即质点在 $t \sim t + \Delta t$ 这一段时间内的位移。

应该注意:①位移表示质点位置的改变,并非质点所经历的路程。如图 1-2 所



示, $\Delta \mathbf{r}$ 为矢量, 它的量值 $|\Delta \mathbf{r}|$ 即割线 AB 的长度, 而路程 Δs 是标量, 即曲线 \widehat{AB} 的长度. 只有在时间 Δt 趋近于零时 Δs 和 $|\Delta \mathbf{r}|$ 方可视为相等. 即使在直线运动中, 位移和路程也是两个截然不同的概念.

② $|\Delta \mathbf{r}|$ 不等于 Δr . $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$, 它反映 Δt 时间内质点相对于原点的径向长度变化. 一般地说 $|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta r$, 如图 1-2 所示.

③ 位置矢量和位移在量值上都表示长度, 常用单位为米(m)、千米(km)和厘米(cm).

三、速度、加速度

1. 速度

位移 $\Delta \mathbf{r}$ 和发生这段位移所经历的时间 Δt 的比称为质点在这一段时间内的平均速度. 以 $\bar{\mathbf{v}}$ 表示平均速度, 则

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (1.4)$$

平均速度是矢量, 它的方向就是位移的方向.

当 Δt 趋于零时式(1.4)的极限, 即质点位置矢量对时间的变化率, 称为质点在时刻 t 的瞬时速度, 也叫即时速度, 简称速度. 用 \mathbf{v} 表示速度, 则

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1.5)$$

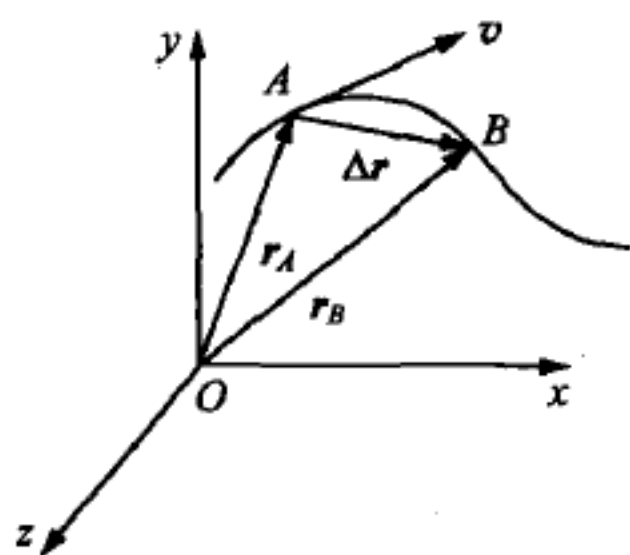


图 1-3 速度矢量

速度为矢量, 速度的方向就是 Δt 趋于零时 $\Delta \mathbf{r}$ 的方向, 如图 1-3 所示, 即质点运动轨道在 A 点的切线方向. 因此, 质点在 t 时刻的速度的方向就沿着该时刻质点所在处运动轨道的切线而指向运动的前方.

速度的大小叫速率, 以 v 表示, 则有

$$v = |\mathbf{v}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \quad (1.6)$$

若以 Δs 表示在 Δt 时间内质点沿轨道所经过的路程, 当 Δt 趋于零时, $|\Delta \mathbf{r}| = \Delta s$, 由此可得

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (1.7)$$

上式表明速率的大小又等于质点所走过的路程对时间的变化率. 一般地,

$$v = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \neq \frac{dr}{dt}$$

将式(1.1)代入式(1.5), 由于 i, j, k 不随时间改变, 所以有

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \quad (1.8)$$

速度沿三个坐标轴的分量 v_x, v_y, v_z 分别为

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (1.9)$$

速度的大小为

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.10)$$

速度是矢量, 既有大小, 又有方向, 服从几何加法; 速率是标量, 只有大小, 没有方向. 速度是描述质点运动状态的物理量, 对于不同的参考系, 质点速度的大小、方向是不同的, 速度具有相对性.

在国际单位制即 SI 制中, 速度的单位是米·秒⁻¹ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).

一些物体运动速度大小: 如光在真空中速度为 $3.0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 北京正负电子对撞机中电子速度为 0.999 999 98 倍的光速, 空气中声速 (0°C) 为 $3.3 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 人跑步(最大)速度约为 $11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. 加速度

在变速运动中, 质点的运动速度是随时间变化的, 而质点速度的变化情况要用加速度来表示.

若以 $\mathbf{v}(t)$ 和 $\mathbf{v}(t+\Delta t)$ 分别表示质点在 t 时刻和 $t+\Delta t$ 时刻的速度, 如图 1-4 所示, 则在这段时间内的平均加速度 $\bar{\mathbf{a}}$ 由下式定义:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (1.11)$$

当 Δt 趋于零时, 此平均加速度的极限, 即速度对时间的变化率, 称为质点在时刻 t 的瞬时加速度, 简称加速度, 以 \mathbf{a} 表示加速度, 则有

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1.12)$$

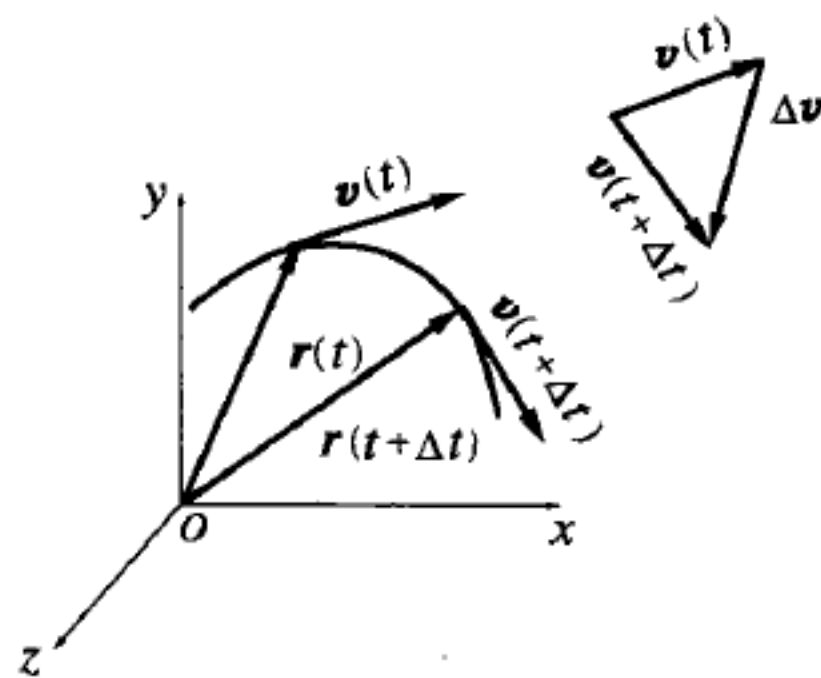


图 1-4 加速度矢量

加速度是矢量,是速度对时间的变化率,因此,不论是速度的大小发生变化,或者是速度的方向发生变化,或者是速度的大小和方向同时发生变化,都有加速度.

把式(1.5)代入式(1.12)得

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \quad (1.13)$$

把式(1.8)代入式(1.12)得

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dv_z}{dt}\boldsymbol{k} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \quad (1.14)$$

加速度沿三个坐标轴的分量分别为

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \quad (1.15)$$

加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.16)$$

加速度的单位是米·秒⁻²(m·s⁻²).

例 1-1 汽车向东行驶 5 km,又向南行驶 4 km,再向西行驶 2 km,求汽车合位移的方向和大小.

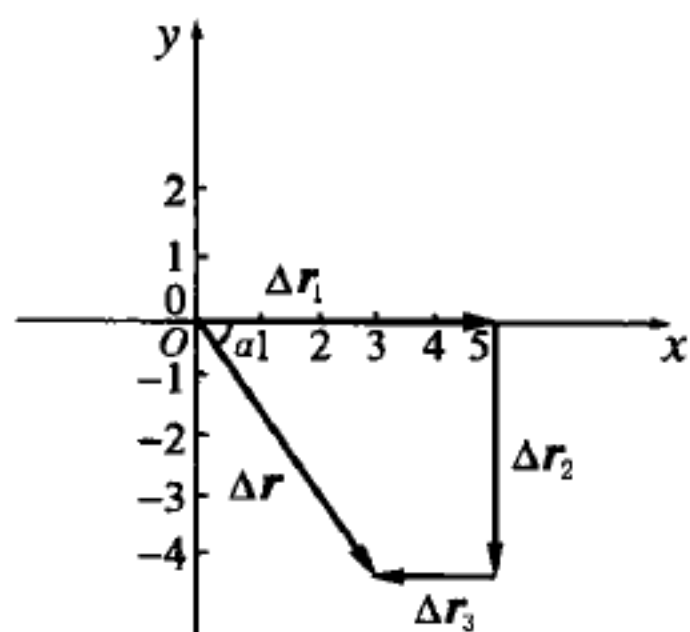


图 1-5 例 1-1 图

解 取向东为 x 轴的正方向,向北为 y 轴正方向建立坐标系,如图 1-5 所示,则对

第一位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}_1$ 有 $\Delta x_1 = 5 \text{ km}, \Delta y_1 = 0$

第二位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}_2$ 有 $\Delta x_2 = 0, \Delta y_2 = -4 \text{ km}$

第三位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}_3$ 有 $\Delta x_3 = -2 \text{ km}, \Delta y_3 = 0$

由位移定义得

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j}$$

$$|\Delta\boldsymbol{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

此处

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = (5 + 0 - 2) \text{ km} = 3 \text{ km}$$

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 = -4 \text{ km}$$

$$|\Delta\boldsymbol{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} \text{ km} = 5 \text{ km}$$

合位移与 x 轴夹角为

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \arctan\left(\frac{-4}{3}\right) = -53.1^\circ$$

例 1-2 一质点在 Oxy 平面内运动,其运动方程为 $x=4t, y=6-2t^2$, 式中 x, y 以 m 计, t 以 s 计.

(1) 求质点的轨道方程;

(2) 求 2 s 末质点的位置矢量、速度和加速度;

(3) 在什么时刻, 质点的位置矢量与速度矢量相互垂直?

(4) 在什么时刻, 质点离原点最近? 其距离是多少?

解 (1) 由运动方程 $x=4t$ 和 $y=6-2t^2$ 消去 t 得轨道方程为

$$y=6-2t^2=6-2\left(\frac{x^2}{16}\right)=6-\frac{x^2}{8}$$

(2) 位置矢量 $\mathbf{r}=4t\mathbf{i}+(6-2t^2)\mathbf{j}$, 第 2 s 末位置矢量 $\mathbf{r}(2)$ 为

$$\mathbf{r}(2)=8\mathbf{i}-2\mathbf{j}$$

速度矢量 $\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=4\mathbf{i}+(-4t)\mathbf{j}=4\mathbf{i}-4t\mathbf{j}$, 第 2 s 末速度 $\mathbf{v}(2)$ 为

$$\mathbf{v}(2)=4\mathbf{i}-8\mathbf{j}$$

加速度矢量 $\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-4\mathbf{j}$, 第 2 s 末加速度仍为 $-4\mathbf{j}$, 本题加速度大小为 $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 方向沿 y 轴负方向.

(3) 由 $\mathbf{r} \perp \mathbf{v}$ 得 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}=0$, 即 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}=xv_x+yv_y=0$, 由此得

$$4t \times 4 + (6-2t^2) \times (-4t) = 16t - 24t + 8t^3 = 8t^3 - 8t = 0$$

由上式解得 $t_1=0, t_2=1 \text{ s}, t_3=-1 \text{ s}$ 舍去; 所以 $t=0$ 和 $t=1 \text{ s}$ 时位置矢量与速度矢量相互垂直.

(4) 质点到原点的距离 r 为

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{16t^2+(6-2t^2)^2}=\sqrt{4t^4-8t^2+36}=2\sqrt{t^4-2t^2+9}$$

由 $\frac{dr}{dt}=0$ 得

$$4t^3-4t=0$$

解得 $t_1=0, t_2=1 \text{ s}, t_3=-1 \text{ s}$ 舍去. 而 $t_1=0, r_1=6 \text{ m}; t_2=1 \text{ s}, r_2=5.66 \text{ m}$, 所以 $t=1 \text{ s}$ 时质点离原点最近, 距离为 5.66 m .

例 1-3 某物体的运动规律为 $\frac{dv}{dt}=-kv^2t$, 式中 k 为大于零的常数, 当 $t=0$ 时, 初速为 v_0 , 求速度 v 与时间的关系.

解 由 $\frac{dv}{dt}=-kv^2t$, 得 $-\frac{dv}{v^2}=kt \, dt$, 由题意知 $t=0, v=v_0$, 所以

$$\int_{v_0}^v -\frac{dv}{v^2} = \int_0^t kt \, dt$$

积分并整理得

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{2}kt^2$$

四、质点运动学的两类问题

有了运动方程,不仅可以知道质点任意时刻所处的位置,而且通过微分还可以确定其速度和加速度. 反过来,若已知质点的速度或加速度,则根据初始条件、通过积分可以建立起质点的运动方程. 这就构成了运动学的两类问题. 第一类问题通过前面的例题已作过讨论,下面仅以一维运动为例说明如何建立运动方程. 掌握了基本方法后,读者不难自行推广到二维和三维运动情况.

一维运动中,位移、速度和加速度各矢量全都在同一直线上,因此可以把各量当标量来处理. 设质点的直线运动沿 x 轴进行,显然质点的坐标 x (质点的位置) 是随时刻 t 而改变的. 即

$$x = x(t)$$

x 为正值表示质点的位置在原点的右边(x 轴正向), x 为负值表示质点在原点左边. 相应地,瞬时速度、瞬时加速度分别为

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

v 和 a 的正负表示它们指向沿 x 轴正方向或沿 x 轴负方向. a 大于零或小于零并不表示质点是加速运动或减速运动. a 与 v 同向表示质点加速运动, a 与 v 反向表示质点减速运动.

例 1-4 设质点沿 x 轴作匀加速直线运动. 已知加速度 a 为一恒量,且 $t=0$ 时刻,质点的初位置为 x_0 ,初速度为 v_0 . 确定任一时刻质点的运动状态.

解 由 $a = \frac{dv}{dt}$ 得 $dv = a dt$, 两边积分得

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$$

即

$$v - v_0 = at \quad \text{或} \quad v = v_0 + at \quad \text{①}$$

再由 $v = \frac{dx}{dt}$ 得 $dx = v dt = (v_0 + at) dt$, 然后对两边积分得

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t (v_0 + at) dt$$

即

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (\text{位移公式}) \quad ②$$

或

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (\text{运动方程}) \quad ③$$

若由

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

便有

$$v dv = a dx$$

对两边积分

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x a dx$$

得

$$\frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = a(x - x_0)$$

或

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \quad ④$$

以上①、②、③、④便是匀加速直线运动的基本公式。

例 1-5 如图 1-6 所示,几个不同倾角的光滑斜面,有共同的底边,顶点也在同一竖直面上。当从各斜面顶端同时释放物体(视为质点)时,试问沿哪个斜面下滑的物体最先到达底端?

解 选沿倾角 θ 的斜面下滑的物体来研究,质点作匀加速直线运动。取此斜面顶端为坐标原点, x 轴沿斜面向下。沿 x 方向物体下滑的加速度 a 是重力加速度沿 x 方向的分量,即

$$a = g \sin \theta$$

由初始条件: $t=0$ 时, $x_0=0$, $v_0=0$, 则

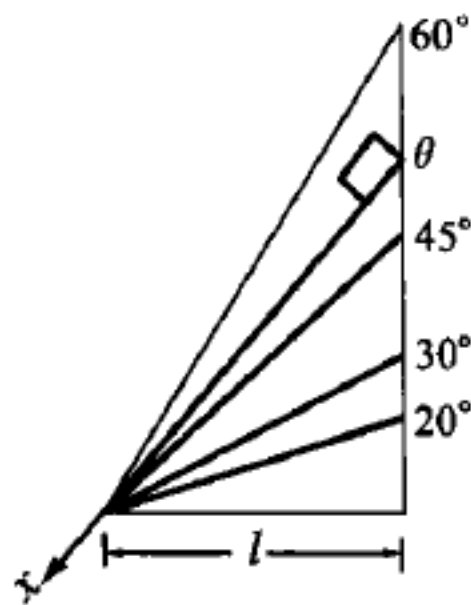


图 1-6 例 1-5 图

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2$$

物体从顶端下滑到底端经过的距离为 $x = l/\cos\theta$, 代入上式得

$$t = \left(\frac{2l}{g\sin\theta \cos\theta} \right)^{1/2} = \left(\frac{4l}{g\sin 2\theta} \right)^{1/2}$$

很显然, 当 $2\theta = \pi/2$, 即 $\theta = \pi/4 = 45^\circ$ 时, t 有最小值. 即沿倾角为 45° 的斜面下滑的物体最先到达底端.

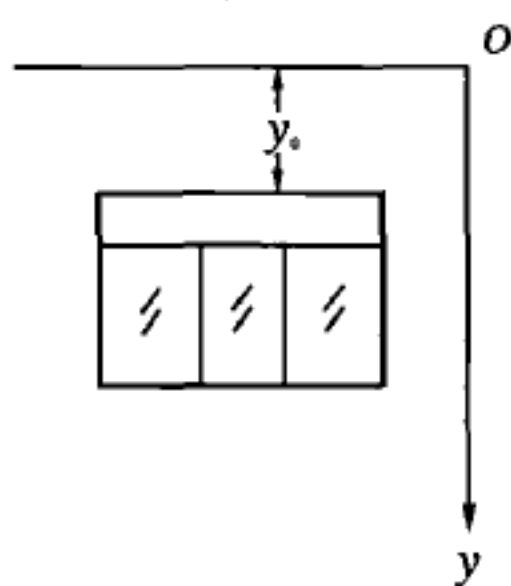


图 1-7 例 1-6 图

例 1-6 如图 1-7 所示, 一小球从屋檐落下, 在 0.25 s 内经过 3 m 高的窗户, 问窗顶距屋檐有多远?

解 以屋檐为坐标原点 O , 竖直向下为 y 轴正向, 设球过窗户顶时速度为 v_0 , 此时开始计时. 则有

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

$t = 0.25$ s 时

$$y - y_0 = 3 \text{ m} \quad (2)$$

由式①、②得

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{y - y_0 - \frac{1}{2}gt^2}{t} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{2} \times 10 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{4}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 10.75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

再由 $v_0^2 = 2gy_0$ 得

$$y_0 = \frac{v_0^2}{2g} = 5.78 \text{ m}$$

1-2 曲线运动

物体运动轨迹为曲线的运动称为曲线运动. 较简单的曲线运动是平面曲线运动, 如抛体运动、圆周运动. 描述质点的曲线运动仍然用位置矢量 r , 位移 Δr , 速度 v 和加速度 a , 这四个物理量前面已经讨论过. 值得注意的是, 在一般曲线运动中, 质点速度的大小、方向都随时间变化, 所以, 曲线运动中的加速度 a 同时反映着 v 的大小变化和方向变化. 为了研究问题方便, 我们把曲线运动看成是两种直线运

动(在相互正交方向上的两种直线运动)的合成,把曲线运动中的加速度分解为切向加速度和法向加速度,分别表示速度的大小和方向随时间的变化.

一、运动叠加原理

上一节已经介绍了运动叠加原理. 为了便于下面应用该原理讨论抛体运动,在此再一次给出该原理的文字叙述:

一个实际发生的运动,可以看成是几个各自独立进行的运动叠加而成. 这个结论称为运动的独立性原理或运动叠加原理.

二、抛体运动

下面应用运动叠加原理,分析竖直平面内的抛体运动.

如图 1-8 所示,设有一质点自某点 O 以初速度 v_0 抛出. 取 O 点为坐标原点,水平向右为 x 轴正方向,竖直向上为 y 轴正方向. 设 v_0 与 x 轴所成的抛射角为 θ_0 . 求质点:(1)任意时刻的速度 v ; (2)运动方程、位置矢量; (3)轨道方程; (4)飞行时间; (5)射程; (6)飞行的最大高度.

解 如果不考虑空气阻力、风速、风向等影响,则质点在水平方向上作匀速直线运动,而在竖直方向的运动为竖直上抛. 设抛出时刻为零,则质点在水平和竖直方向的初速度分别为

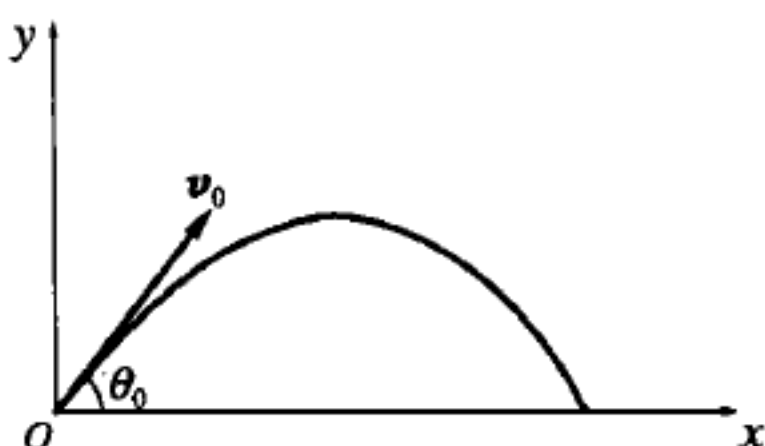


图 1-8 抛体运动

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0, \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta_0$$

质点总加速度为重力加速度 g , 方向沿负 y 方向. 所以 t 时刻质点速度为

$$(1) \quad v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta_0, \quad v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt$$

$$\mathbf{v} = (v_0 \cos \theta_0) \mathbf{i} + (v_0 \sin \theta_0 - gt) \mathbf{j}$$

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{(v_0 \cos \theta_0)^2 + (v_0 \sin \theta_0 - gt)^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 \sin \theta_0 gt + g^2 t^2}$$

(2) 运动方程, 位置矢量

$$x = v_0 \cos \theta_0 t, \quad y = v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

$$\mathbf{r} = (v_0 \cos \theta_0 t) \mathbf{i} + (v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} gt^2) \mathbf{j}$$

(3) 轨道方程

从 x, y 两式中消去 t 得轨道方程为

$$y = \tan\theta_0 x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta_0} x^2$$

(4) 飞行总时间 T

令 $y=0$, 即 $0 = v_0 \sin\theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, 得 $T_1=0$, 表示质点在起点时刻.

$$T_2 = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g} \text{ (飞行总时间)}$$

(5) 射程 R

在飞行总时间内, 质点在水平方向运动的距离为

$$R = v_0 \cos\theta_0 T_2 = v_0 \cos\theta_0 \times \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

在初速度一定的情况下, 显然 $\theta_0 = \pi/4$ 时射程最大. 最大射程为

$$R_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

(6) 飞行的最大高度 H

先求得飞到最高点所需的时间 t_H , 质点达到最高点时 $v_y=0$, 即

$$0 = v_0 \sin\theta_0 - g t_H$$

得

$$t_H = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$$

恰为飞行总时间的一半. 将 t_H 代入 y 式得最高点的高度 H 为

$$H = v_0^2 \sin^2\theta_0 / (2g)$$

从上式可知, 在初速度一定的情况下, 当 $\theta_0 = \pi/2$ 时得最大高度为

$$H_{\max} = v_0^2 / (2g)$$

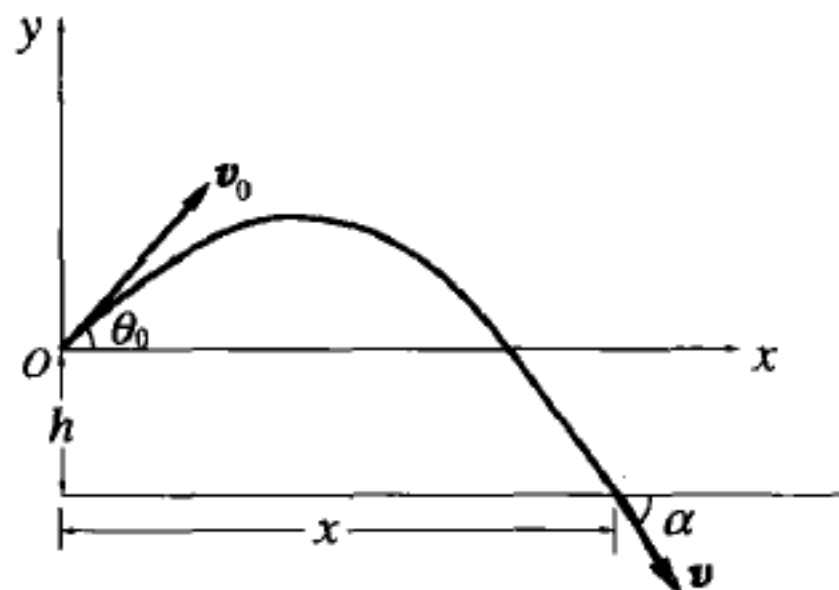


图 1-9 例 1-7 图

以上各式是弹道学的基本公式. 在此基础上如果考虑空气阻力、风速、风向等影响并加以校正, 便可得到炮弹等抛体运动的正确轨道.

例 1-7 从离地 $h=8.0 \text{ m}$ 的高处, 以抛射角 $\theta_0=30^\circ$ 、初速度 $v_0=10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 抛出一个小球, 问小球在何时、何处落地? 并求落地时速度的大小、方向.

解 小球作抛体运动, 建立坐标如图 1-9

所示,其运动方程为

$$x = v_0 \cos \theta_0 t \quad (1)$$

$$y = v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

轨道方程为

$$y = \tan \theta_0 x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0}$$

由小球落地,以 $y = -8.0 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 代入轨道方程,得

$$-8 = x_1 \tan 30^\circ - \frac{10 x_1^2}{2 \times 10^2 \times (\cos 30^\circ)^2}$$

即

$$\frac{x_1^2}{15} - 0.58 x_1 - 8 = 0$$

$$x_1 = \frac{0.58 \pm \sqrt{(-0.58)^2 + \frac{4}{15} \times 8}}{2/15} \text{ m} = \begin{cases} 16.1 \text{ m} \\ -7.4 \text{ m 舍去} \end{cases}$$

即落在距抛点水平距离为 16.1 m 处.

再由 $x = x_1 = v_0 \cos \theta_0 t$, 得落地时刻为

$$t = \frac{x_1}{v_0 \cos \theta_0} = \frac{16.1}{10 \times \cos 30^\circ} \text{ s} = 1.86 \text{ s}$$

速度的大小、方向如下:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = 10 \times \cos 30^\circ \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 8.66 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - g t = (10 \times \sin 30^\circ - 10 \times 1.86) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = -13.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 16.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

v 与 x 轴的夹角为

$$\alpha = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \left(\frac{-13.6}{8.66} \right) = -57.5^\circ$$

三、曲线运动中的切向、法向加速度

1. 匀速圆周运动

圆周运动是曲线运动的重要特例. 物体绕定轴转动时, 物体中每一个质点都在作圆周运动.

质点作圆周运动时, 如果每一时刻的速率都相等, 则这种运动称为匀速圆周运

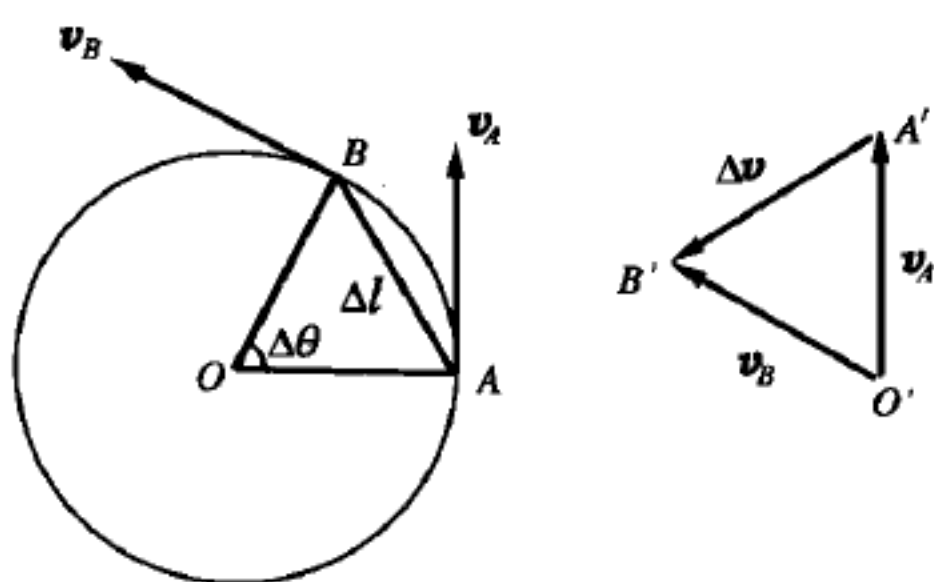


图 1-10 匀速圆周运动

动. 设圆周的半径为 R , 圆心为 O , t 时刻质点在圆周上 A 点, 速度为 v_A , $t + \Delta t$ 时刻质点沿圆周到达 B 点处, 速度为 v_B , v_A 与 v_B 大小相等均等于 v , 且 v_A 和 v_B 分别与半径 OA 和 OB 垂直, 如图 1-10 所示, 则速度的增量为

$$\Delta v = v_B - v_A$$

按加速度定义有

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_B - v_A}{\Delta t}$$

很容易看出, $\triangle AOB \sim \triangle A'O'B'$. 由相似三角形对应边成比例可得

$$\frac{|\Delta v|}{v} = \frac{\Delta l}{R}$$

式中 Δl 为 AB 弦的长度. 上式两边同除以 Δt 得

$$\frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{v}{R} \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

当 Δt 趋于零时, B 点趋于 A 点, 弦长 Δl 趋于弧长 Δs , 于是求得加速度的大小为

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{R} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \quad (1.17)$$

加速度的方向即 Δv 的极限方向. 当 $\Delta t \rightarrow 0$, 角 $\Delta \theta \rightarrow 0$, Δv 的极限方向垂直于 v_A . 所以在 A 点处加速度 a 的方向沿半径 OA 指向圆心. 这个加速度通常称为向心加速度, 它反映了速度方向随时间的改变.

2. 变速圆周运动

如果质点作圆周运动时其速率是随时间变化的, 则这种运动称为变速圆周运动. 如图 1-11 所示, 质点在 t 时刻与 $t + \Delta t$ 时刻分别在圆周上 A 、 B 两点处, 其速度分别为 v_A 和 v_B . 则

$$\Delta v = v_B - v_A$$

在速度三角形 CE 边上截取 $CF = CD$, 则可将 Δv 分解为两个矢量: Δv_n (即 \overrightarrow{DF}) 和 Δv_t (即 \overrightarrow{FE}), 于是 $\Delta v = \Delta v_n + \Delta v_t$, 两边同除 Δt 得平均加速度 \bar{a} 为

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v_n}{\Delta t} + \frac{\Delta v_t}{\Delta t}$$

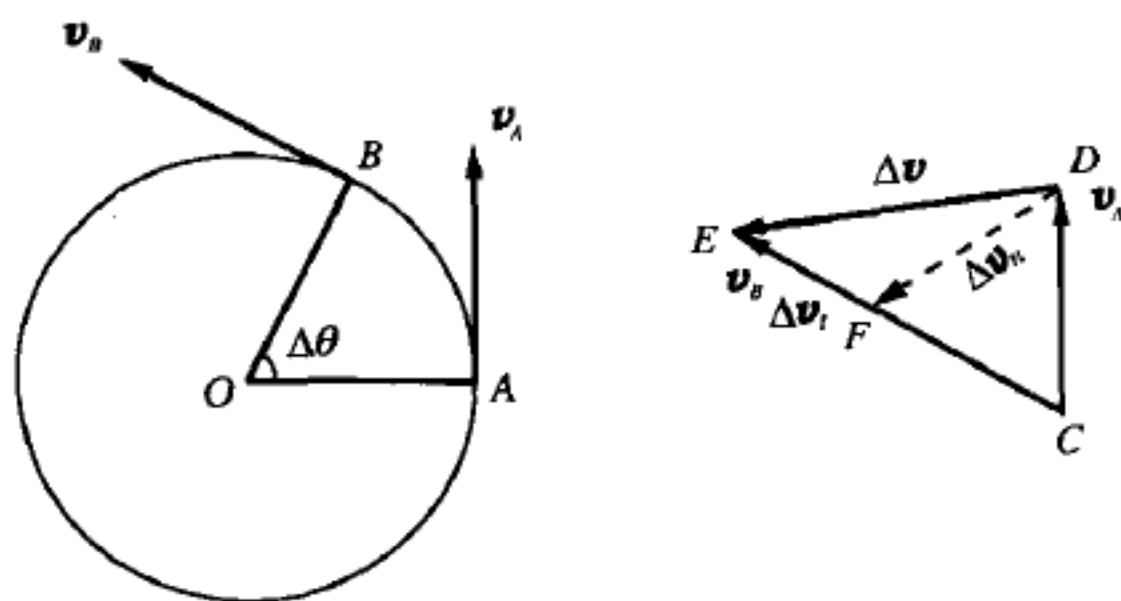


图 1-11 变速圆周运动

瞬时加速度 a 为

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_t}{\Delta t} \quad (1.18)$$

其中 Δv_n 与匀速圆周运动时的 Δv 相当, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta v_n / \Delta t$ 所表示的分加速度就是向心加速度, 也叫法向加速度, 用 a_n 表示. 它反映速度方向的变化. Δv_t 的极限方向与 v_A 方向一致, 在 A 点的切线方向上, 所以 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta v_t / \Delta t$ 表示的分加速度叫切向加速度, 用 a_t 表示, 它反映速度大小的变化.

a_n 、 a_t 的大小: 由式(1.17)知法向加速度的大小 $a_n = v^2 / R$, 式中 R 为圆半径, v 为质点所在点的瞬时速率. 而切向加速度 $a_t = dv/dt$, 等于瞬时速率的时间变化率.

总加速度为

$$a = a_n + a_t \quad (1.19)$$

a 的大小与方向(如图 1-12 所示)如下:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}, \quad \tan \theta = \frac{a_n}{a_t} \quad (1.20)$$

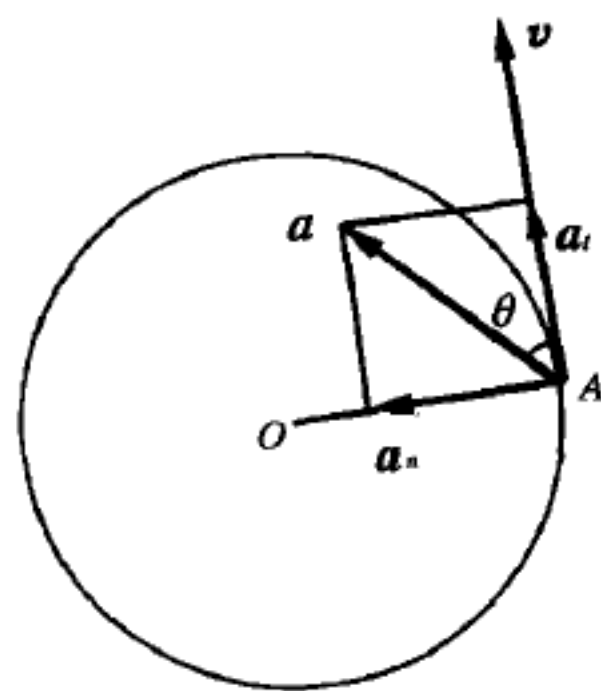


图 1-12 切向、法向加速度

式中 θ 为 a 与瞬时速度 v 的夹角.

3. 一般曲线运动

质点在平面内作一般曲线运动时, 在任意一段时间 Δt 内的速度增量 Δv 仍可分解为 Δv_n 和 Δv_t , 质点在曲线上任一点的加速度 a 也可分解为切向、法向加速度, 如图 1-13 所示. 这种分解法称为自然法, 它也是一种直角分解法. 但由于曲线上各点处的曲率中心和曲率半径是逐点不同的, 所以 a_n 和 a_t 的大小分别表示为

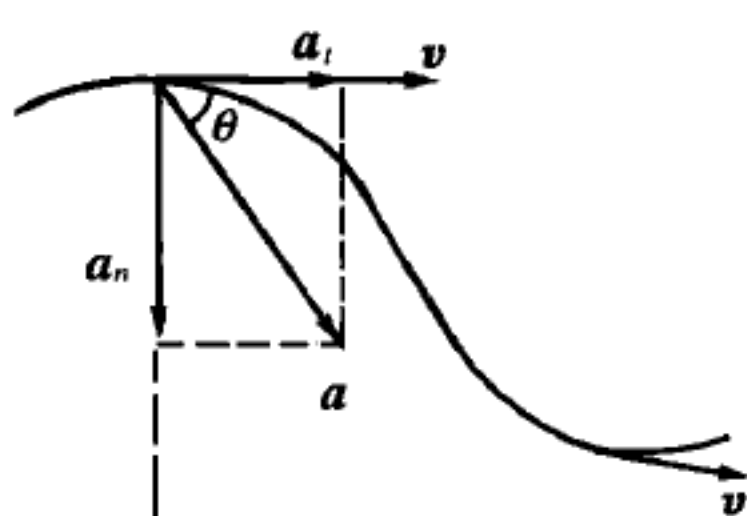


图 1-13 曲线运动

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_t = \frac{dv}{dt} \quad (1.21)$$

式中 ρ 是曲线上在该点处的曲率半径. v 是该点处质点的瞬时速率.

很显然, 质点作一般曲线运动时, $a_n \neq 0, a_t \neq 0$, 总加速度总指向曲线凹的一边; 质点作变速直线运动时, $a_n = 0, a_t \neq 0$; 而质点作匀速曲线运动时, $a_t = 0, a_n \neq 0$; 质点作匀速直线运动时则有 $a_n = 0$ 同时 $a_t = 0$.

四、圆周运动的角量描述

质点的圆周运动也常用角位置、角位移、角速度和角加速度等角量来描述. 设质点在平面内绕原点 O 沿半径为 R 的圆周运动, 如图 1-14 所示. 质点 t 时刻位置用矢径 (\vec{OA}) 与 x 轴的夹角 θ 来表示, 称为角位置. 若 $t + \Delta t$ 时质点到达圆周上 B 点, 在 Δt 时间内转过角度 $\Delta\theta$, 角 $\Delta\theta$ 称为质点对 O 点的角位移. 规定质点沿逆时针转过的角位移为正, 即 $\Delta\theta > 0$. 质点沿顺时针转过的角位移为负, 即 $\Delta\theta < 0$. 角位移、角位置的单位为弧度 (rad).

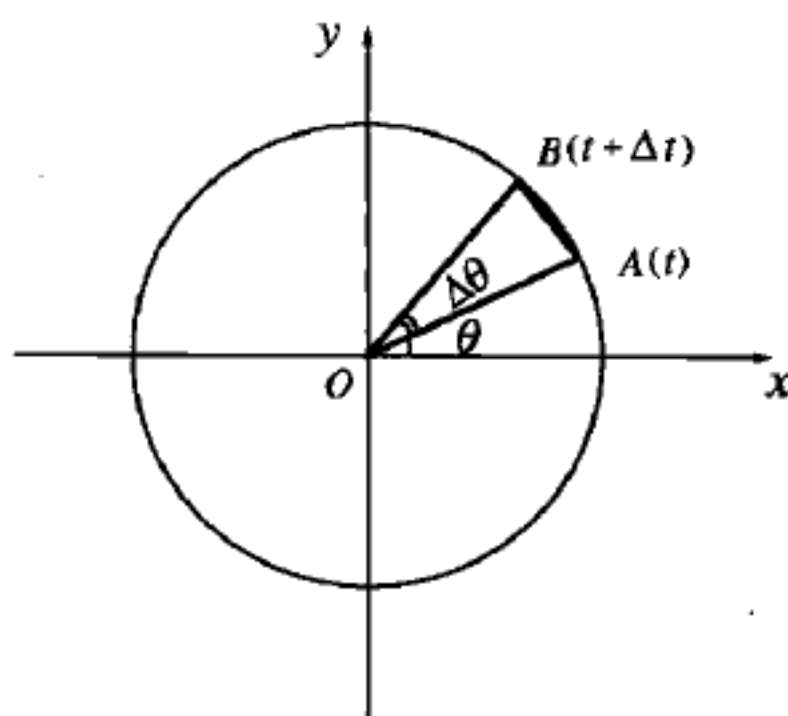


图 1-14 角量描述

质点在圆周运动中的角速度 ω 定义为

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (1.22)$$

单位为弧度 \cdot 秒⁻¹ (rad \cdot s⁻¹), 也用转 \cdot 分⁻¹ (r \cdot min⁻¹).

质点在圆周运动中的角加速度 β 为

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad (1.23)$$

与直线运动对比很容易得到匀角加速运动的基本公式

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \beta t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0) \end{cases} \quad (1.24)$$

式中 θ_0 、 θ 、 ω_0 、 ω 、 β 分别为质点初角位置、角位置、初角速度、角速度、角加速度。角加速度的单位是弧度·秒⁻² (rad·s⁻²)。

由图 1-14 可知, $\widehat{AB} = R\Delta\theta$, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时弦 \overline{AB} 与弧 \widehat{AB} 可视为等长, 即

$$|\overline{AB}| = R\Delta\theta$$

上式两边同除 Δt , $\Delta t \rightarrow 0$, 可由速度和角速度定义得线速度和角速度之间的关系式

$$v = R\omega \quad (1.25)$$

式(1.25)两边对 t 求导可得质点切向加速度和角加速度之间的关系为

$$a_t = R\beta \quad (1.26)$$

把式(1.25)代入向心加速度式 $a_n = \frac{v^2}{R}$, 可得质点向心加速度与角速度之间的关系为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = v\omega = R\omega^2 \quad (1.27)$$

例 1-8 质点以初速度 v_0 与水平面成 θ_0 角抛出, 忽略空气阻力, 求: (1) 任意时刻质点速度大小; (2) 任意时刻质点切向、法向加速度; (3) 轨道上任意点处曲率半径(用时刻 t 表示)以及轨道最高点处对应的曲率半径。

解 (1) 由题意知, 任意时刻水平方向速度为

$$v_x = v_0 \cos\theta_0$$

任意时刻竖直方向(向上为正)速度为

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt$$

所以, 任意时刻质点速度大小为

$$v = \sqrt{(v_0 \cos\theta_0)^2 + (v_0 \sin\theta_0 - gt)^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 \sin\theta_0 gt + g^2 t^2}$$

$$(2) a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{v_0^2 - 2v_0 \sin\theta_0 gt + g^2 t^2}) = \frac{g^2 t - v_0 \sin\theta_0 g}{\sqrt{v_0^2 - 2v_0 \sin\theta_0 gt + g^2 t^2}}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{g^2 - a_t^2} = \frac{gv_0 \cos\theta_0}{\sqrt{v_0^2 - 2v_0 \sin\theta_0 gt + g^2 t^2}}$$

$$(3) \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_0^2 - 2v_0 \sin\theta_0 gt + g^2 t^2)}{\frac{gv_0 \cos\theta_0}{\sqrt{v_0^2 - 2v_0 \sin\theta_0 gt + g^2 t^2}}} = \frac{(v_0^2 - 2v_0 \sin\theta_0 gt + g^2 t^2)^{3/2}}{gv_0 \cos\theta_0}$$

最高点处 $v_y = 0$, $v = v_x = v_0 \cos\theta_0$, $a_n = g$, 则 $\rho_{\text{高}} = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2 \cos^2\theta_0}{g}$ 。

例 1-9 一质点沿半径为 0.10 m 的圆周运动,其角位置 θ (以弧度表示)可用下式表示: $\theta = 2 + 4t^3$, 式中 t 以 s 计. 求: (1) 质点的速度, 切向、法向加速度; (2) 当切向加速度的大小恰为总加速度大小的一半时的 θ 值大小; (3) 哪一时刻质点的切向加速度、法向加速度恰好等值?

解 (1) $v = R \frac{d\theta}{dt} = R \times (12t^2) = 1.2t^2$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2.4t, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = 14.4t^4$$

(2) 由 $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$, 令 $\frac{a_t}{a} = \frac{1}{2}$

即

$$\frac{a}{a_t} = \frac{\sqrt{a_t^2 + a_n^2}}{a_t} = \sqrt{1 + \left(\frac{a_n}{a_t}\right)^2} = \sqrt{1 + 36t^6} = 2$$

故

$$1 + 36t^6 = 4, \quad 36t^6 = 3, \quad t^6 = \frac{1}{12}, \quad t = \frac{1}{\sqrt[6]{12}} \text{ s} = 0.66 \text{ s}$$

$$\theta = 2 + 4t^3 = 2 + 4 \times (0.66)^3 \text{ rad} = 3.15 \text{ rad}$$

(3) 按题意 $a_t = a_n$, 即 $14.4t^4 = 2.4t$, $t^3 = \frac{1}{6}$, 解得

$$t = \frac{1}{\sqrt[3]{6}} = 0.55 \text{ s}$$

1-3 相对运动

在 1-1 介绍运动描述的相对性时已经讲过, 对同一物体的运动选择不同的参考系, 对物体运动描述是不相同的. 下面进一步研究参考系选择对物体运动描述的影响, 并分析质点在两个以恒定速度作相对运动(平动)的坐标系中位移、速度之间的关系.

设想一列火车以恒定速率 u 沿轨道向右运动, $t=0$ 时刻车厢中一乘客位于车上 A' 点处, A' 点与此时地面上 A 点重合. 经过一段时间 t 后, 车厢沿轨道向右运动, 经过了距离 ut , 同时车上的乘客运动到车厢中 B 点处. 乘客在 t 时间内相对车厢的位移为 r' (即 $r_{\text{人车}}$), 同一时间内乘客对地面的位移为 r (即 $r_{\text{人地}}$), 而车厢相对地面的位移为 ut ($r_{\text{车地}}$). 如图 1-15 所示.

从图上可以看出

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u}t \quad (1.28)$$

将式(1.28)对时间 t 求导得

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \mathbf{u} \quad (1.29)$$

其中 $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ 是在 Oxy 坐标系中测得乘客的速度, Oxy 建立在地面这个固定参考系上, 因此, \mathbf{v} 称为绝对速度, 同时把质点相对于固定参考系的运动称为绝对运动. $d\mathbf{r}'/dt = \mathbf{v}'$ 是乘客相对 $O'x'y'$ 的

速度, $O'x'y'$ 是建立在车厢这个相对于固定参考系运动的参考系(也叫动参考系)上, 因此 \mathbf{v}' 称为相对速度, 同时把质点相对于动参考系的运动称为相对运动. \mathbf{u} 是车厢相对地面运动速度, 即动参考系相对固定参考系的速度, 称为牵连速度, 同时把动参考系相对固定参考系的运动叫牵连运动. 这种定义只是在两个参考系作相对平动条件下成立, 而动系相对定系作转动的情况将在理论力学等课程中讨论.

由式(1.29)可得

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u} \quad (1.30)$$

即

$$\mathbf{v}_{人地} = \mathbf{v}_{人车} + \mathbf{v}_{车地}$$

式(1.30)表示同一质点相对于两个相对作平动的参考系的速度之间关系, 叫做伽利略速度变换.

若质点运动速度随时而变, 则将式(1.30)对 t 求导得相应的加速度之间的关系为

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

即

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0 \quad (1.31)$$

当两个参考系相对作匀速直线运动时, \mathbf{u} 为常量, 则

$$\mathbf{a}_0 = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$$

所以有

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'$$

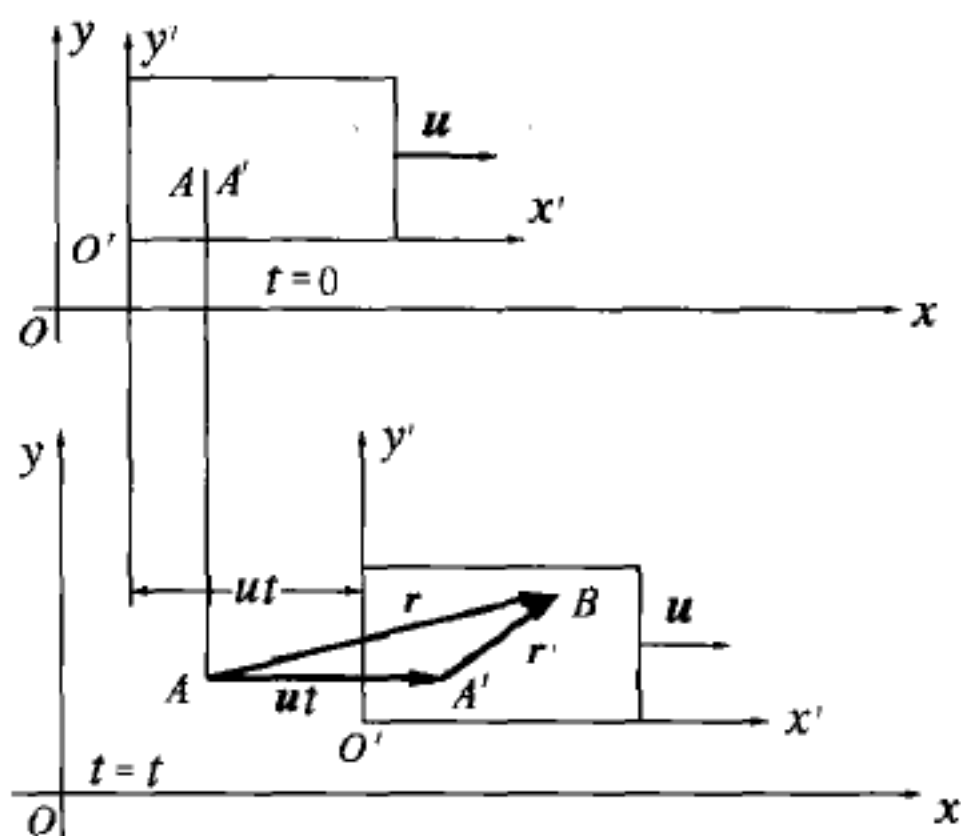


图 1-15 相对运动

式(1.31)中 $a = dv/dt$ 为质点相对定参考系的加速度, $a' = dv'/dt$ 为质点相对于动参考系的加速度, $a_0 = du/dt$ 为动参考系相对于定参考系的平动加速度.

进一步讨论会看到前面得到的伽利略速度变换公式是有条件的. 首先式(1.28)表示的位移叠加关系是有条件的. 因为位移矢量叠加应相对于同一参考系的位移而言, 但式(1.28)中 r 和 $u\Delta t$ 是相对于定参考系, 而 r' 则是相对于动参考系的, 因此式(1.28)成立的条件是位移 r' 无论是在定参考系测量还是在动参考系测量, 其结果都应一样. 长度测量与参考系相对运动无关这一事实叫做长度测量的绝对性. 由式(1.28)得出式(1.29)涉及时间测量. v 和 u 是定参考系中观察者根据自己的钟测量时间计算出来的, 而 v' 是动参考系中观察者根据他们自己的钟测量时间计算出来的. 式(1.29)成立的条件是, 两个参考系的钟测量同一段时间(乘客从 A' 到达 B 所用时间)的结果相同. 而时间的测量与参考系的相对运动无关这一事实叫做时间测量的绝对性. 由此可知伽利略速度变换的成立还依赖于时间测量的绝对性.

长度测量和时间测量的绝对性使人们形成了绝对时空观. 它反映了人们实践范围和对客观世界认识的局限. 随着人们对客观世界认识的深化, 所涉及的速度越来越大, 如北京正负电子对撞机中电子速度达到 $0.999\,999\,98\,c$, 发现长度和时间测量并不是绝对的, 而是相对的. 长度和时间在相对作高速运动的不同参考系中测量结果并不相同. 而只是在相对速度比较小的参考系中测量结果才比较接近. 这方面的讨论在本书“狭义相对论基础”中将详细讲述. 由此可知伽利略速度变换只是在相对速度远小于光速的参考系中才成立.

要注意区别速度的叠加和速度的变换两个不同的概念. 速度的叠加指在同一参考系中一个质点的速度和它的各分速度的关系. 速度的变换涉及有相对运动的两个参考系, 其公式的形式与相对速度的大小有关, 请读者学完相对论的内容之后再回顾一下速度变换受相对速度大小的影响.

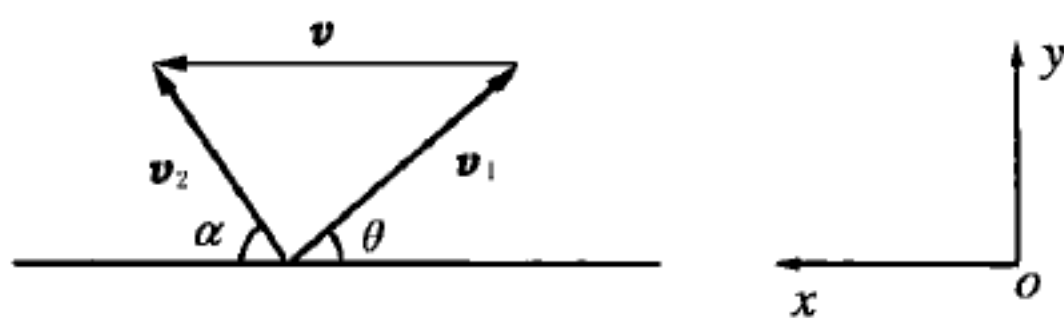


图 1-16 例 1-10 图

例 1-10 在距海港 B 为 l 远的 A 处, 有一走私船正以速率 v_1 沿与海岸成 θ 角的方向离开海岸, 为截获该船, 海关同时派速度大小为 v_2 的快艇从港口出发, 设 v_1 、 v_2 、 θ 已知, 求: (1) 快艇航向与海岸的夹角 α ; (2) 截获走私船

所需的时间.

解 (1) 以地(岸)为固定参考系, 走私船为动参考系, 快艇为运动物体, v 表示快艇对走私船的相对速度, 则

$$v_2 = v + v_1 \quad \text{①}$$

式中 v_2 为快艇对地速度即绝对速度 $v_{\text{快艇}}$, v_1 为走私船对地速度 $v_{\text{走私}}$. 上式也可

表示为

$$v_{\text{快岸}} = v_{\text{快走}} + v_{\text{走岸}}$$

由式①, $v = v_2 - v_1$, 建立坐标系投影得(如图 1-16 所示)

$$\begin{cases} v_x = v_2 \cos \alpha - (-v_1 \cos \theta) = v_2 \cos \alpha + v_1 \cos \theta & \text{②} \\ v_y = v_2 \sin \alpha - v_1 \sin \theta & \text{③} \end{cases}$$

为截获, 要求两船在 y 方向相同时间航程相等, 即 $v_y = 0$. 由式③得

$$v_2 \sin \alpha = v_1 \sin \theta, \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{v_1}{v_2} \sin \theta\right)$$

$$v = v_x = v_2 \cos \alpha + v_1 \cos \theta = \sqrt{v_2^2 - v_1^2 \sin^2 \theta} + v_1 \cos \theta$$

$$(2) \quad t = \frac{l}{v} = \frac{l}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2 \sin^2 \theta} + v_1 \cos \theta}$$

例 1-11 一带篷卡车篷高 $h = 2 \text{ m}$, 它停在马路上时雨点可落在车内到达篷后沿前方 $d = 1 \text{ m}$ 处, 当它以 $15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 速率沿平直马路行驶时, 雨滴恰好不能落入车内, 求雨滴的速度.

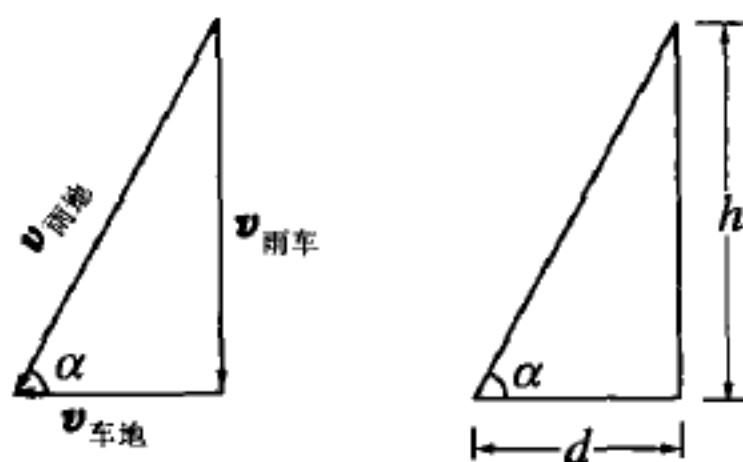


图 1-17 例 1-11 图

解 选地面为固定参考系, 如图 1-17 所示, 车为动参考系, 雨滴为运动物体, 则有

$$v_{\text{雨地}} = v_{\text{雨车}} + v_{\text{车地}}$$

根据题意作速度矢量三角形, 而

$$\alpha = \arctan \frac{h}{d} = 63.4^\circ$$

又

$$v_{\text{雨地}} \cos \alpha = v_{\text{车地}}$$

所以

$$v_{\text{雨地}} = \frac{v_{\text{车地}}}{\cos \alpha} = \frac{15}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 15\sqrt{5} \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

例 1-12 在相对地面静止的坐标系内, A 、 B 两船都以 $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率匀速行驶, A 船沿 x 轴正向, B 船沿 y 轴正向, 今在 A 船上设置与静止坐标系方向相同的坐标系(x 、 y 单位矢量分别用 i 、 j 表示), 求在 A 船上看到 B 船的速度.

解 以地为固定参考系, A 船为动参考系, B 船为运动物体, 则有

$$v_{A地} = 2i, v_{B地} = 2j$$

根据伽利略速度变换得

$$v_{B地} = v_{BA} + v_{A地}$$

所以

$$v_{BA} = v_{B地} - v_{A地} = 2j - 2i = -2i + 2j$$

习 题

1-1 从原点到 P 点的位置矢量 $r = -2i + 6j$. 而 P 点到 Q 的位移 $\Delta r = 4i - 2j$. 求从原点到 Q 点的位置矢量, 并作图表示.

1-2 设质点沿 x 轴运动, 其运动方程为 $x = 3t^2 - t^3$ (式中 x 以 m 计, t 以 s 计). (1) 求质点在 3 s 末的速度和加速度; (2) 质点在 1.5 s 是作加速运动还是作减速运动? (3) 求第 1 s 末到第 3 s 末时间内的位移和路程.

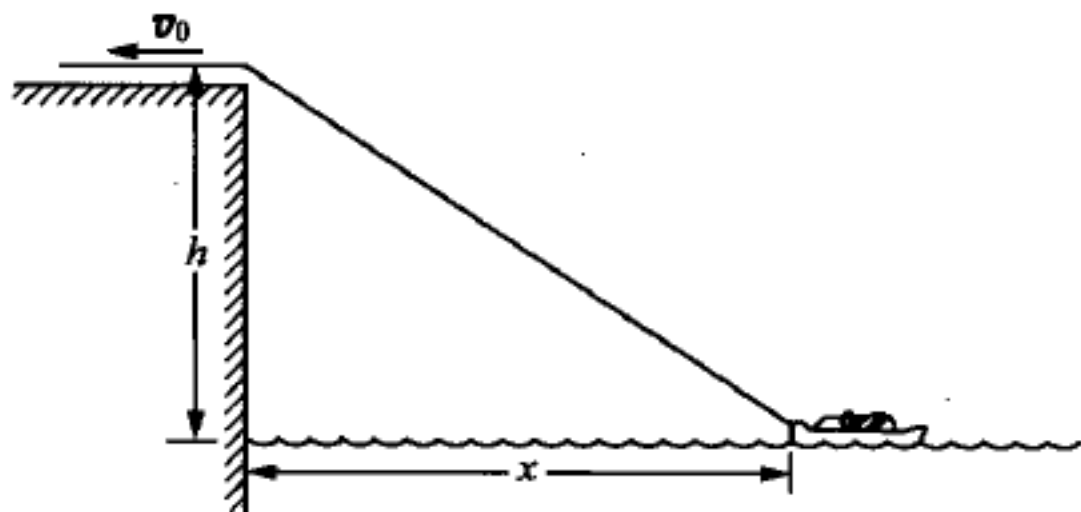
1-3 一质点在 xOy 平面内运动, 运动方程为 $x = 2t, y = 19 - 2t^2$ (SI). (1) 求质点的轨道方程; (2) 求 t 时刻质点的位置矢量, 速度矢量; (3) 什么时刻质点的位置矢量与其速度矢量恰好垂直? (4) 什么时刻质点离原点最近? 求这一距离.

1-4 一质点具有恒定加速度 $a = 6i + 4j$ (SI). t = 0 时, 质点速度为零, 位置矢量 $r_0 = 10i$. 求: (1) 质点在任意时刻的速度和位置矢量; (2) 质点的轨迹方程.

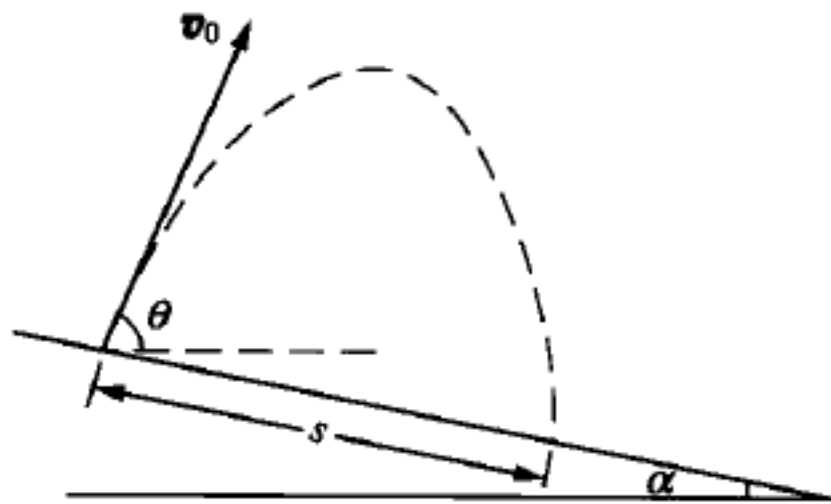
1-5 消防水枪喷出的水的流量是 $q = 280 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$. 水的流速 $v = 26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. 若水枪竖直向上喷射, 水流上升的高度是多少? 在任一瞬间空中有多少升水?

1-6 一升降机以加速度 $1.22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 上升, 当上升速度为 $2.44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时, 有一螺帽自升降机的天花板上松落, 天花板与升降机的底面相距 2.74 m. 计算: (1) 螺帽从天花板落到底面所需的时间; (2) 螺帽相对升降机外固定柱子下降的距离.

1-7 如图所示, 有人在离水面高 h 处通过滑轮用绳子拉船靠岸. 设人用匀速 v_0 收绳子拉船, 求当船与滑轮的水平距离为 x 时, 船的速度和加速度的大小.



题 1-7 图



题 1-8 图

1-8 如图所示, 一人站在山坡上, 山坡与水平面成 α 角. 他扔出一个初速度为 v_0 的小石

子, v_0 与水平面成 θ 角(向上).

(1) 如空气阻力不计, 试证小石子落在斜坡上距离为 s 处:

$$s = \frac{2v_0^2 \sin(\theta + \alpha) \cos\theta}{g \cos^2 \alpha}$$

(2) 由此证明, 对于给定的 v_0 和 α 值, s 在 $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ 时有最大值:

$$s_{\max} = \frac{v_0^2 (1 + \sin\alpha)}{g \cos^2 \alpha}$$

1-9 一个人扔石头的最大出手速度为 $v = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 他能击中一个与他的手水平距离为 $l = 50 \text{ m}$, 高 h 为 13 m 处的一个目标吗? 在这个距离上他能击中的目标的最大高度是多少?

1-10 一质点沿直线运动, 其坐标 x 与时间 t 如下关系: $x = Ae^{-\beta t} \cos\omega t$ (SI) (A, β 皆为常数). 求: (1) 任意时刻 t 质点的加速度; (2) 质点通过原点的时刻 t .

1-11 一质点沿半径为 R 的圆周运动, 其路程 s 随时间 t 变化的规律为

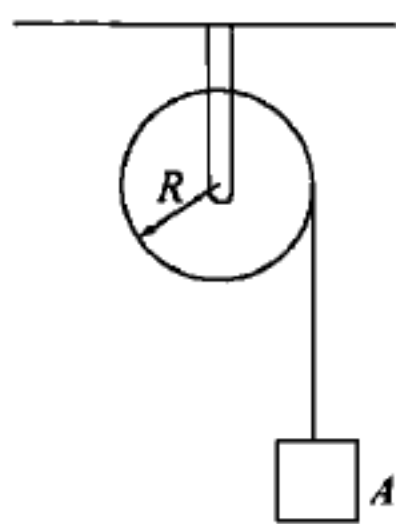
$$s = bt - \frac{1}{2}ct^2 \quad (\text{SI})$$

式中 b, c 为大于零的常数, 且 $b^2 > R$. 求: (1) 质点运动的切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n ; (2) $a_t = a_n$ 的时刻 t .

1-12 一质点沿半径为 R 的圆周按路程为 $s = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2$ 的规律运动, 其中 v_0, b 都是常量. (1) 求 t 时刻质点的加速度; (2) t 为何时, 加速度的大小等于 b ? (3) 当加速度为 b 时, 质点沿圆周运动了多少圈?

1-13 一质点沿半径为 0.1 m 的圆周运动, 用角坐标表示其运动方程为 $\theta = 2 + 4t^3$ (SI). (1) 求 $t = 2 \text{ s}$ 时质点切向加速度和法向加速度的大小; (2) 当 θ 等于多少时, 质点的加速度与半径的夹角成 45° ?

1-14 一个半径为 $R = 1.0 \text{ m}$ 的圆盘, 可以绕一水平轴自由转动, 一根轻绳绕在盘子的边缘, 其自由端拴一物体 A , 如图所示. 在重力作用下, 物体 A 从静止开始匀加速地下降, 在 $\Delta t = 2.0 \text{ s}$ 内下降的距离 $h = 0.4 \text{ m}$. 求物体开始下降后 3 s 末, 边缘上任一点的切向加速度与法向加速度.



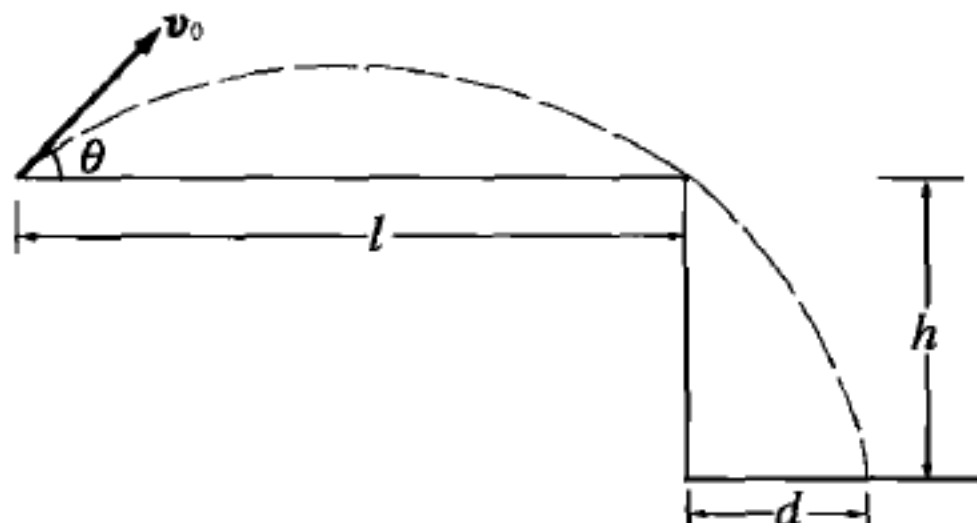
题 1-14 图

1-15 从同一地点, 以相同速率朝不同方向把许多石子扔向空中, 由运动学公式证明这些石子在空中相同高度处有相同速率(不计空气阻力).

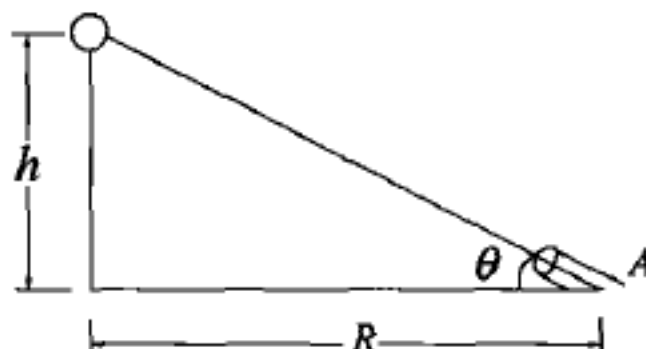
1-16 如图所示, 在一平坦高地上安放一门炮, 高地边缘是一向下的陡壁, 炮位距离陡壁 $l = 8100 \text{ m}$, 陡壁下面的地平面低于炮位 $h = 100 \text{ m}$. 用炮轰击掩蔽在陡壁后面的目标. 如果炮弹出口速率为 $v_0 = 300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 忽略空气阻力. 求: (1) 离陡壁最近的炮弹弹着点距陡壁的距离 d ; (2) 这时炮弹出口速度与水平面的夹角 θ .

1-17 如图所示, 一气象气球自地面以匀速 v 上升到天空, 在距离放出点为 R 处的 A 点用望远镜对气球进行观测. 记录得气球的仰角 θ 为时间 t 的函数. (1) 求出用 h 和 R 表示仰角 θ 的

公式; (2) 求出 $\frac{d\theta}{dt}$ 作为时间函数的公式; (3) 试证当上升时间 $t \gg \frac{R}{v}$ 时, $\frac{d\theta}{dt}$ 将按 $\frac{R}{vt^2}$ 趋近于零.



题 1-16 图



题 1-17 图

1-18 为转播电视而发射的地球同步卫星,它在赤道上空的圆形轨道上运动,周期等于地球自转周期 $T=24\text{ h}$. 求卫星离开地面的高度和卫星的速率(距地球中心 r 处的重力加速度 $a=g(R_e/r)^2$, R_e 是地球半径).

1-19 一飞轮的角速度在 5 s 内由 $900\text{ r}\cdot\text{min}^{-1}$ 均匀地减到 $800\text{ r}\cdot\text{min}^{-1}$. (1) 求角加速度; (2) 求在此 5 s 内的总转数; (3) 再经多长时间, 轮将停止转动?

1-20 北京正负电子对撞机的储存环的周长为 240 m , 电子要沿环以非常接近光速的速率运行. 这些电子运动的向心加速度是重力加速度的几倍?

1-21 一无风的下雨天, 一火车以 $20\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度前进, 车内旅客看见玻璃窗上的雨滴与铅垂线成 75° 角下降, 求雨滴下落的速度(设下降的雨滴作匀速运动).

1-22 飞机 A 以 $v_A=1000\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ 的速率(相对地面)向南飞行. 同时另一架飞机 B 以 $v_B=800\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ 的速率(相对地面)向东偏南 30° 角方向飞行. 求 A 机相对于 B 机的速度与 B 机相对于 A 机的速度.

1-23 一人骑自行车向东而行. 在速度为 $10\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 时, 觉得有南风, 速度增至 $15\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 时, 觉得有东南风. 求风的速度.

1-24 一架飞机从 A 处向东飞到 B 处, 然后又向西飞回 A 处, 飞机相对于空气的速率为 v' , 而空气相对于地面的速率为 u , A、B 之间的距离为 l , 飞机相对空气的速率 v' 保持不变.

(1) 假定空气是静止的(即 $u=0$), 试证来回飞行时间为

$$t_0 = 2l/v'$$

(2) 假定空气的速度向东, 试证来回飞行时间为

$$t_1 = \frac{t_0}{1 - \left(\frac{u}{v'}\right)^2}$$

(3) 假定空气的速度向北, 试证来回飞行的时间为

$$t_2 = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{v'}\right)^2}}$$

中外物理学家简介(一)

伽利略(Galileo Galilei 1564~1642),意大利物理学家、天文学家、数学家。他开创了以实验事实为基础并具有严密逻辑体系和数学表述形式的近代科学,为推翻以亚里士多德为代表的经院哲学对科学的禁锢、改变与加深人类对物质运动和宇宙的科学认识做出了巨大的贡献,被誉为“近代科学之父”。

伽利略对近代科学最重要的贡献在于创立了新的科学思想和科学研究方法。在伽利略的研究成果得到公认之前,物理学乃至整个自然科学只不过是哲学的一个分支,没有取得自己的独立地位。当时,哲学家们束缚在神学和亚里士多德教条的框框里,得不出符合实际的客观规律。伽利略继承和发展了阿基米德的方法论——注重科学实践的唯物主义世界观,敢于向传统的权威思想挑战,他不是先臆测事物发生的原因,而是先观察自然现象,由此发现自然规律。他摒弃神学的宇宙观,认为世界是一个有秩序的服从简单规律的整体,要了解大自然,就必须进行系统的实验定量观测,找出它的精确的数量关系。基于这样的新的科学思想,伽利略倡导了数学与实验相结合的研究方法,这种研究方法是他在科学上取得伟大成就的源泉,他以系统的实验和观察推翻了以亚里士多德为代表的、纯属思辨的传统的自然观,开创了以实验事实为根据并具有严密逻辑体系的近代科学。

伽利略的科学活动主要集中在天文学和力学方面。

在天文学方面,伽利略的贡献极其巨大。他的宇宙观的核心维护、坚持和发展了哥白尼学说。他的日心说观点是完全建立在对天文的长期观测所获得的大量新发现的可靠事实基础之上的。伽利略通过望远镜测得太阳黑子的周期性变化与金星的盈亏变化,看到银河中有无数恒星,有力地宣传了日心说。1632年出版的《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》是近代科学史上具有重大意义的著作。

1638年,伽利略完成了又一巨著《关于两门新科学的对话与数学证明对话集》,为物理学的发展做出了卓越的贡献。落体运动定律和惯性定律是该书中的重要内容。伽利略的实验主要是应用小球沿斜坡滚动的方法,证实了落体定律,也推出了不完整、不彻底的惯性定律——他只承认圆惯性运动,而不承认直线惯性运动。他的理论奠定了经典力学的基础,以后经牛顿发展完善,建立了近代经典力学的系统理论。伽利略所建立的摆的定律、惯性定律、落体运动定律,以及对抛体运动的研究和他提出的相对性原理,奠定了动力学的主要基础。

伽利略的一生,贡献是巨大的,特别是他坚持真理、不畏强权的科学态度,更是后人学习的榜样。当然他也有不正确的观念,如否定色、香、味等物质属性的客观性等,但这些都无损于一个伟大科学家的光辉形象。

第二章 质点动力学

质点动力学研究物体间的相互作用,以及这种相互作用所引起的物体运动状态变化的规律. 牛顿三定律是动力学的基础. 以牛顿运动定律为基础的力学体系称为牛顿力学或经典力学. 虽然描述运动的参考系是可以任选的,但牛顿定律只在惯性参考系中成立. 所以,本章在介绍牛顿定律后要引进力、质量、质心、惯性系、非惯性系等概念. 然后依次介绍力的时间累积作用、冲量、动量、动量守恒定律;冲量矩、角动量、角动量守恒定律;力的空间累积作用、功、能、机械能守恒定律以及经典力学的适用范围等.

2-1 牛顿运动定律 力

一、牛顿三定律

按照古希腊哲学家亚里士多德的观点,静止是物体的自然状态,要使物体以某一速度作匀速运动,必须有力对它作用才行. 17 世纪意大利物理学家和天文学家伽利略通过实验发现亚里士多德的观点是错误的. 伽利略指出,力不是维持运动的原因,而是使物体改变运动状态的原因. 牛顿接受并发展了伽利略的见解,并在他 1687 年出版的名著《自然哲学的数学原理》中提出了三条定律,牛顿所叙述的三条定律如下:

1. 第一定律

任何物体都保持静止的或沿一条直线作匀速运动的状态,除非作用在它上面的力迫使它改变这种状态.

第一定律表明,任何物体都有保持其运动状态不变的性质,这一性质叫惯性. 因此,第一定律也叫惯性定律. 第一定律也确定了力的含义,力是物体运动状态发生变化的原因. 而我们的祖先早在两千年以前就对力的意义有了明确的认识. 我国春秋时代的墨翟在他所著的“墨经”中写道:“力,形之所以奋也”. “形”就是物体,“奋”就是“由不动变为动”的意思.

2. 第二定律

运动的变化与所加的动力成正比;并且发生在这力所沿的直线的方向上.

第二定律给出了力和运动的定量关系. 叙述中的“运动”即物体的动量,定义为

$$p = mv \quad (2.1)$$

“变化”应理解为“对时间的变化率”. 若以 F 表示作用于质点上的外力,则牛顿第

二定律的数学表达式为

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad (2.2)$$

按照牛顿当时的观点,物体的质量 m 与它的运动速度 v 无关,是常量. 于是由式(2.2)得

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \quad (2.3)$$

式(2.3)便是中学物理中很熟悉的牛顿第二定律. 需要说明,式(2.2)应看作是牛顿第二定律的基本的普遍形式. 其原因之一,在物理学中动量这个概念比速度、加速度更为普遍和重要;原因之二,由相对论知识知道,物体的质量 m 与其运动速度 v 有关,特别是物体运动速度接近光速时更是如此. 这种情况下,式(2.3)不再成立,而式(2.2)仍然成立.

对牛顿第二定律, \mathbf{F} 表示作用于质点的合外力. 由第二定律可知,质点所受合外力与所获得加速度为瞬时关系;其二,物体的质量就是物体平动惯性大小的量度(惯性质量). 其三,第二定律概括了力的独立性. 即几个力同时作用在一个物体(质点)上所产生的加速度,应等于每个力单独作用时所产生的加速度的叠加(矢量加法),这便是力的独立性原理或力的叠加原理.

应用牛顿第二定律应注意:

- ① 牛顿第二定律只适用于质点的运动.
- ② 式(2.3)为矢量式,解题时常用其分量式. 如在平面直角坐标系 x, y 轴上的分量式为

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y \quad (2.4)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad \alpha = \arctan \frac{a_y}{a_x} \quad (\alpha \text{ 与 } x \text{ 轴间的夹角})$$

式中 F_x, F_y 分别表示作用于质点的所有外力在 x, y 轴上的分量之和,即

$$F_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, F_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}. a_x, a_y \text{ 分别表示质点的加速度 } \mathbf{a} \text{ 在 } x, y \text{ 轴上的分量.}$$

在处理曲线运动问题时,常用式(2.3)沿切向、法向的分量式

$$F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt}, \quad F_n = ma_n = m \frac{v^2}{\rho} \quad (2.5)$$

式中 F_t, F_n 表示质点所受合外力在切向、法向的分量,即切向力和法向力. a_t, a_n 分别表示切向、法向加速度.

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}, \quad \theta = \arctan \frac{a_n}{a_t} (a \text{ 与切向夹角})$$

③单位, 国际单位制中, 质量单位为千克(kg), 加速度单位为米·秒⁻²(m·s⁻²), 力的单位为牛顿(N).

3. 第三定律

对于每一个作用, 总有一个相等的反作用与之相反; 或者说, 两个物体对各自对方的相互作用总是相等的, 而且指向相反的方向.

若以 F_{12} 表示第一个物体受第二个物体的作用力, 以 F_{21} 表示第二个物体受第一个物体的作用力, 则第三定律的数学表达式表示为

$$F_{12} = -F_{21} \quad (2.6)$$

第三定律说明力是物体间相互作用, 是受力分析的依据. 理解第三定律应注意:

- ①作用力、反作用力互为对方存在的条件, 同时产生, 同时消失.
- ②作用力、反作用力分别作用在相互作用的两个物体上, 因此不能互相抵消.
- ③作用力、反作用力属同种性质的力.

二、力、常见力

1. 基本的自然力

近代科学证明, 自然界中只存在四种基本的力, 其他力都是这四种力的不同表现. 这四种力是引力、电磁力、强力和弱力.

(1) 引力(即万有引力)

这种力存在于宇宙万物之间. 根据万有引力定律, 任何两个质点都互相吸引, 这引力的大小与它们的质量的乘积成正比, 和它们的距离的平方成反比. 若用 m_1 和 m_2 分别表示两个质点的质量, 以 r 表示它们之间的距离, 则引力定律的数学表达式为

$$f = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2.7)$$

G 为引力常量, 在国际单位制中

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \quad (2.8)$$

式中的质量反映了物体的引力性质, 因此叫引力质量, 它是物体与其他物体相互吸引的性质的量度. 它与牛顿第二定律 $F=ma$ 中引入的反映物体抵抗运动变化这一性质的惯性质量在意义上是不同的. 但实验证明, 同一物体的这两个质量是相等的, 所以不必加以区分(稍后证明).

万有引力定律适用于两个质点. 但对于两个均匀球体之间的引力, 式(2.7)仍适用. 这时 m_1 和 m_2 分别表示两球的质量, r 表示两球体球心间距离.

重力为地球对其表面附近物体的引力. 根据万有引力定律, 把地球当作均匀球体, 则地面上质量为 m 的质点所受重力 P 为

$$P = G \frac{mM_E}{R^2}$$

式中 M_E 为地球质量, R 为地球半径. 按牛顿第二定律, 物体受重力 $P = mg$, $g = G \frac{M_E}{R^2}$ 为重力加速度(忽略地球自转的影响).

地面上两物体间引力是很小的. 如 $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$ 的两质点相距为 1 m 时, 它们之间引力为

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{1 \times 1}{1^2} \text{ N} = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N}$$

而质点的重力 $P = mg = 9.8 \text{ N}$, 比质点间引力大 10^{11} 倍. 但宇宙天体之间, 因天体质量很大, 所以引力起主要作用.

(2) 电磁力

电磁力是带电粒子或宏观带电物体间的作用力, 它是由光子作为传递媒介的. 静止电荷间的作用力叫库仑力. 运动电荷或电流间的相互作用力叫磁力. 磁力和电力具有同一本源, 所以统称为电磁力.

分子间或分子内原子间作用力属电磁力, 相互接触的物体间的弹力、摩擦力、正压力、张力都属电磁力.

电磁力、万有引力的作用距离可以很大, 所以称为长程力.

(3) 强力

作用于质子、中子、介子等强子之间的力称为强力. 强力是一种短程力. 强子之间的距离超过约 10^{-15} m 时, 强力就变得可以忽略不计, 强子间距离小于 10^{-15} m 时, 强力占主要的支配地位. 直到距离减小到大约 $0.4 \times 10^{-15} \text{ m}$ 时, 它都表现为引力, 距离再减小, 强力就表现为斥力.

强力是夸克所带的“色荷”之间的作用力——色力——的表现. 色力是由胶子作为传递媒介的.

(4) 弱力

弱力是存在于各种粒子之间的另一种相互作用, 但仅在粒子间的某些反应(如 β 衰变)中才显示出它的重要性. 弱力也是短程力, 比强力的力程更短, 约为 10^{-17} m . 弱力强度比强力小得多. 弱力是由 W^+ 、 W^- 、 Z^0 粒子作为传递媒介的. 弱力是在 1934 年由意大利物理学家费米首先提出, 认为它是 β 衰变的原因.

2. 常见力

(1) 重力

前面讨论过重力的特点:大小、方向均已知.其中重力大小等于质点质量乘以重力加速度,即 $P=mg$;方向与重力加速度方向相同,即竖直向下指向地心.

(2) 弹力

产生形变的物体由于要恢复原状而对与它接触的物体产生的力的作用叫弹性力.如弹簧的恢复力、绳中张力、作用于相互接触物体间垂直于接触面的正压力等都是弹性力.

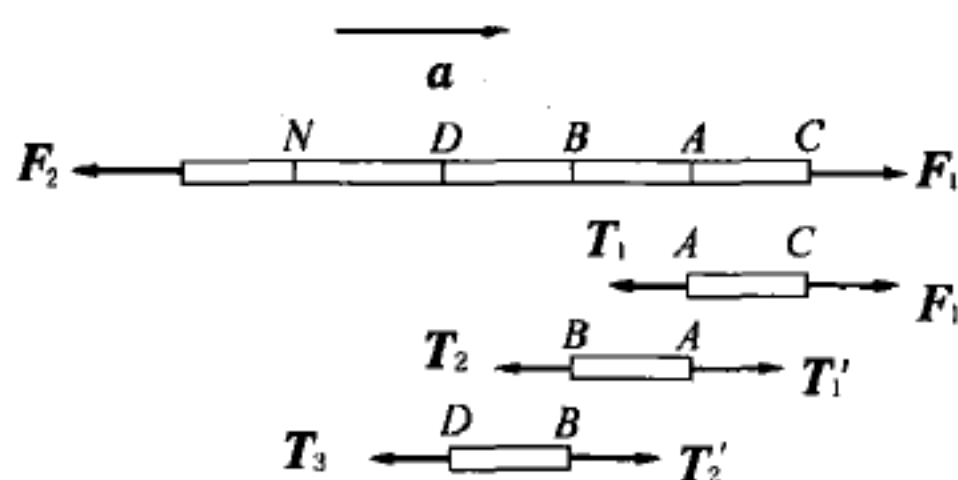


图 2-1 张力

弹力的特点为方向已知,大小与物体运动状态有关.

如图 2-1 所示,例如绳中张力,绳子受外力 F_1 和 F_2 的作用,我们讨论绳中张力的分布. T_1 、 T_1' 为绳中 A 点处的张力, T_1 、 T_1' 是一对作用力与反作用力; T_2 、 T_2' 也是一对作用力与反作用力,称为绳中 B 点处的张力. 设绳子 CA 段质量为 Δm_1 , AB 段质量为

Δm_2 , ..., 绳子的加速度为 a , 方向向右. 应用牛顿第二定律得

$$F_1 - T_1 = (\Delta m_1)a$$

$$T_1' - T_2 = (\Delta m_2)a$$

.....

所以

$$T_1 = F_1 - (\Delta m_1)a$$

$$T_2 = T_1' - (\Delta m_2)a = F_1 - (\Delta m_1)a - (\Delta m_2)a$$

.....

说明绳中不同点处张力不相等. T 与 a 有关. 当 $a=0$, 绳子静止或作匀速直线运动, 则 $T_1 = T_2 = \dots$, 绳内各点处张力相等; 若 $a \neq 0$, 但绳子的质量可以忽略不计 (即绳子为轻绳时), $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \dots = 0$, 仍有 $T_1 = T_2 = \dots$, 即绳内各点处张力相等. 而且 $T_1 = T_2 = \dots = F_1 = F_2$.

(3) 摩擦力

当相互接触的物体沿接触面有相对运动或有相对运动趋势时, 在物体接触面间产生的一对阻碍相对运动的力叫摩擦力. 摩擦力又分滑动摩擦力和静摩擦力.

其中, 两个相互接触的物体沿接触面发生相对运动时, 在接触面间产生的摩擦力为滑动摩擦力, 它的方向总是与相对滑动的方向相反. 当相对滑动的速度不是太

大或太小时,滑动摩擦力 f 与接触面上的正压力 N 成正比,即

$$f = \mu N \quad (2.9)$$

式中 μ 为滑动摩擦因数,它与接触面的材料和表面的状态(如粗糙程度、干湿程度等)有关, μ 数值可查有关手册.

当两个相互接触的物体虽未发生相对运动,但沿接触面有相对运动趋势时,在接触面间产生的摩擦力叫静摩擦力.

静摩擦力的大小可以变化.如图 2-2 所示,用一水平力 F 推一放置在粗糙水平面上的木箱,在没有推动之前木箱受地面给予静摩擦力 f_s 一定与推力 F 等大且反向.



图 2-2 静摩擦力

f_s 随 F 的增大而增大.但静摩擦力大小有一限度,当推力大到木箱就要被推动时,静摩擦力达到最大值,叫最大静摩擦力.实验证明,最大静摩擦力 $f_{s\max}$ 与两物体之间的正压力 N 成正比,即

$$f_{s\max} = \mu_s N \quad (2.10)$$

式中 μ_s 为静摩擦因数,它与接触面的材料和表面状态有关.同样的接触面, $\mu_s > \mu$. μ_s 数值可查有关手册.

可见静摩擦力为变力,它在 0 和最大值 $f_{s\max}$ 之间变化.只有物体处于即将滑动的临界状态,物体才受最大静摩擦力 $f_{s\max}$ 的作用.除此状态外静摩擦力为变力 f_s ,其大小由运动方程求解.

静摩擦力方向与相对运动的趋势相反.所谓相对运动的趋势是指如果没有摩擦力物体将要运动的方向,如图 2-2 中,若没有 f_s ,木箱将向右运动.

三、质量

牛顿第二定律引入惯性质量概念,用以描述物体平动惯性.由 $F = ma$ 可以看出,相同的力作用于不同的物体,质量较大的物体所获得的加速度较小,说明其运动状态比较难以改变,也就是说,质量大的物体其惯性大.反之,质量小的物体其惯性小.

在万有引力定律中也引进了质量概念.地面上物体受地球引力大小为

$$P = G \frac{mM_E}{R^2}$$

所以物体质量为

$$m = \frac{PR^2}{GM_E}$$

式中 M_E 为地球质量, R 为地球半径,均为常量.物体质量 m 由地球对它的引力 P

确定,这里定义的质量称为引力质量.

物体的惯性质量与引力质量是从不同的物理现象中定义的,但可以证明两者相等.证明如下:设 $m_{\text{惯}}$ 和 $m_{\text{引}}$ 分别代表物体的惯性质量和引力质量.地球表面物体受力的作用,由牛顿第二定律为

$$P = m_{\text{惯}} g$$

不考虑地球自转情况下, P 等于物体所受重力作用, g 为物体自由下落的加速度.

而地表面物体受地球引力作用为

$$P = G \frac{m_{\text{引}} M_E}{R^2}$$

比较两式得

$$g = \frac{P}{m_{\text{惯}}} = \left(\frac{GM_E}{R^2} \right) \frac{m_{\text{引}}}{m_{\text{惯}}}$$

实验证明,同一地点所有物体的自由落下的加速度 g 相同.

由上式可知 $\frac{m_{\text{引}}}{m_{\text{惯}}} = \text{常数}$. 适当选用单位,可使 $m_{\text{引}} = m_{\text{惯}}$. 以后对物体的两种质量不加区别,统称为物体的质量.

四、牛顿定律的应用

应用牛顿运动定律求解力学问题,学生在中学物理中已得到良好的训练,在此要强调解题的规范性.

应用牛顿定律解题的基本步骤如下:

①选研究对象.在所研究的问题中选取一个与所求问题相关的物体(当质点处理)作为研究对象,被选作研究对象的物体在相互作用的物体中应是已知条件最充分的.

②作隔离体图,分析受力情况.作隔离体图主要使物体间相互作用内力变为外力.因为题中待求量可能与物体间相互作用内力有关,而牛顿第二定律只讨论质点所受的外力作用.受力分析是正确解题的关键,受力分析理论依据为牛顿第三定律.受力分析顺序为重力、弹性力、摩擦力.要求把研究对象所受力画在隔离体图上,力求正确表示诸力的方向.

③建立坐标系,列方程.受力分析后写出矢量式的牛顿运动方程.建立恰当的坐标系,把矢量方程投影在坐标系中得到一个方程组.

④求解方程组,必要时讨论.得到方程组后,根据未知数个数必须与独立方程个数相等的原则,核定问题是否可解.如不可解,可根据题意再补充必要的独立方

程. 如果求解结果随某些量而变化, 则应讨论结果.

例 2-1 如图 2-3 所示, 质量为 M 的三角形劈置于水平桌面上, 另一质量为 m 的物体放在劈的斜面上. 设所有接触面都是光滑的, 求劈的加速度和 m 相对于劈的加速度.

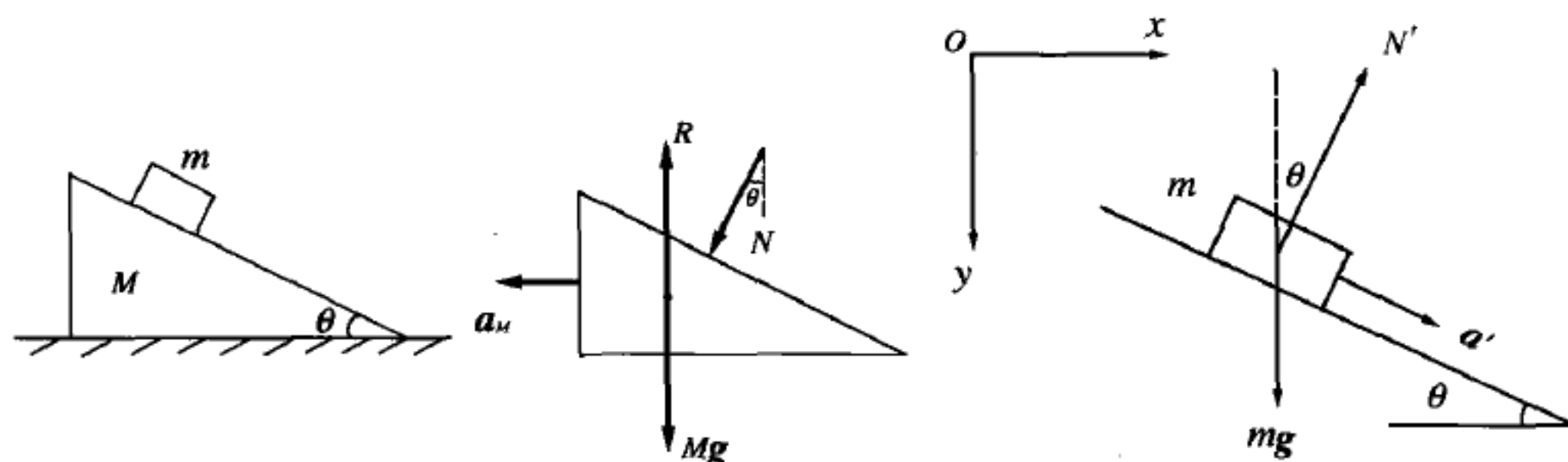


图 2-3 例 2-1 图

解 分别选 M, m 为研究对象, 受力分析如图 2-3, 建立坐标如图, x 轴正向沿水平向右, y 轴正方向竖直向下.

M 受重力 Mg , 桌面支承力 R , m 的正压力 N ; m 受重力 mg , 斜面的正压力 N' .

M 受 m 作用水平向左运动, 设其加速度为 a_M . m 沿斜面向下的加速度 a' (相对加速度), 设 m 对桌面的加速度为 a (绝对加速度), 则有

$$a = a' + a_M \quad (1)$$

在坐标系中投影得

$$a_x = a' \cos \theta - a_M, \quad a_y = a' \sin \theta$$

对 M 应用牛顿第二定律有

$$R + Mg + N = Ma_M$$

在 x 轴上投影得

$$-N \sin \theta = -Ma_M \quad (2)$$

对 m 应用牛顿第二定律得

$$N' + mg = ma$$

在坐标系中投影得

$$x \text{ 方向: } N' \sin \theta = ma_x = m(a' \cos \theta - a_M) \quad (3)$$

$$y \text{ 方向: } mg - N' \cos\theta = ma_y = ma' \sin\theta \quad (4)$$

由式②、③、④, 共 3 个未知量 a' 、 a_M 、 N , 可解. 联立求解得

$$a_M = \frac{mg \sin\theta \cos\theta}{m \sin^2\theta + M}, \quad a' = \frac{(m+M)g \sin\theta}{m \sin^2\theta + M}$$

例 2-2 如图 2-4(a)所示, 滑轮、绳子质量不计, 忽略轮轴处摩擦力, 绳子不可伸长. 已知物体 A 的质量 m_A 大于物体 B 的质量 m_B , 求 A、B 运动过程中弹簧秤的读数.

解 受力分析如图 2-4(b)、(c)、(d)所示.

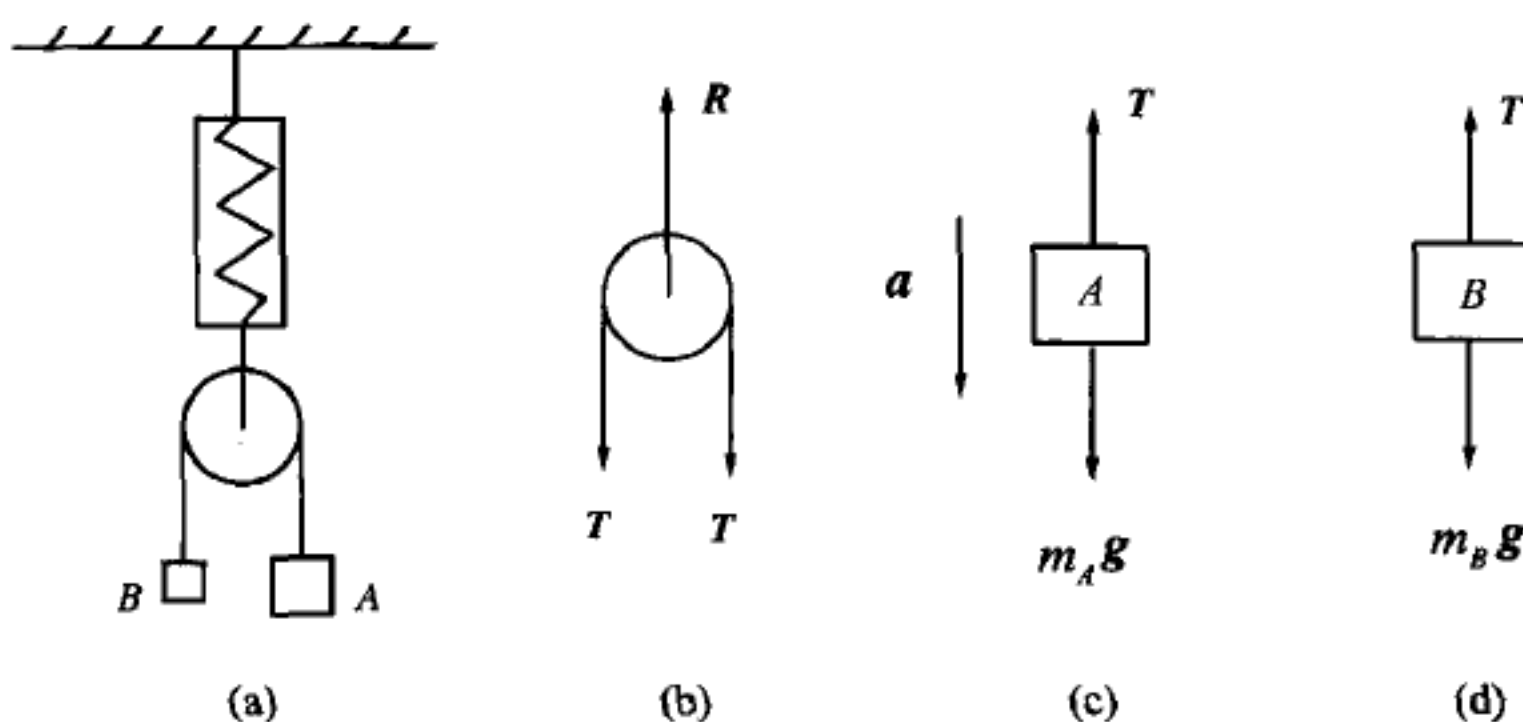


图 2-4 例 2-2 图

轮受弹簧作用 R (其反作用力 R' 即为弹簧秤读数) 和轮两边绳中张力 T (两边绳中张力相等) 而处于平衡. 如图 2-4(b)所示. 由此得

$$R - 2T = 0 \quad (1)$$

A 受力如图 2-4(c)所示, 由牛顿第二定律得

$$m_A g - T = m_A a \quad (2)$$

因绳子不可伸长, 所以 B 的加速度也为 a , 方向向上. 受力分析如图 2-4(d)所示, 由牛顿第二定律得

$$T - m_B g = m_B a \quad (3)$$

式②+③得

$$(m_A - m_B)g = (m_A + m_B)a$$

所以

$$a = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}g$$

由式②得

$$T = m_A(g - a)$$

代入式③得

$$R = 2T = 2m_A(g - a) = \frac{4m_A m_B}{(m_A + m_B)} g$$

所以弹簧秤读数 $R' = R = \frac{4m_A m_B}{(m_A + m_B)} g$.

此处需说明:①若滑轮质量不可忽略,则跨过滑轮的绳子两端张力不再相等,在第三章中将讨论这种情况;②若绳子可伸长,则本题中 A、B 的加速度可能大小不等.

例 2-3 如图 2-5 所示,一轻绳系一质量为 m 的小球在竖直平面内绕定点 O 作半径为 R 的圆周运动,已知 θ 和 v_C 的大小. 求:(1)小球运动到圆周上 C 点处时所受向心力作用和绳中张力;(2)小球恰能完成圆周运动时,它在最高点 A 所具有的最小速率.

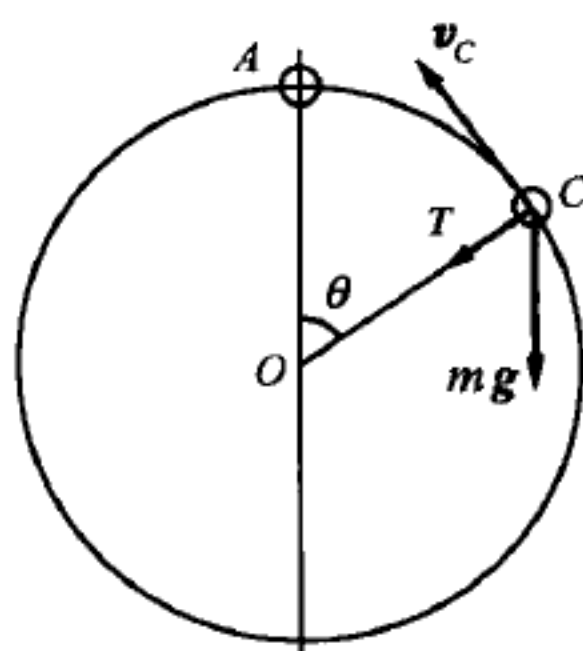


图 2-5 例 2-3 图

解 (1)选小球为研究对象,受重力 P 、绳中张力 T 作用.

在 C 点沿径向应用牛顿第二定律得

$$F_n = T + mg \cos \theta = m \frac{v_C^2}{R} \quad ①$$

绳中张力为

$$T = m \left(\frac{v_C^2}{R} - g \cos \theta \right)$$

(2)小球恰能完成圆周运动的条件是绳子不会松弛,即绳中张力 $T \geq 0$,所以在 A 点应用牛顿第二定律,得法向方程为

$$T + mg = m \frac{v_A^2}{R} \quad ②$$

即

$$T = m \frac{v_A^2}{R} - mg \geq 0$$

于是得

$$\frac{v_A^2}{R} - g \geq 0$$

所以

$$v_A^2 \geq Rg \quad \text{即} \quad v_A \geq \sqrt{Rg}$$

本题中若把轻绳换成质量可忽略的刚性轻杆, 则小球刚好能在竖直平面内作圆周运动的条件变为在 A 点处小球速度 $v_A \geq 0$.

例 2-4 由地面沿铅直方向发射质量为 m 的宇宙飞船, 如图 2-6 所示. 若不计空气阻力及其他阻力作用, 求宇宙飞船能脱离地球引力所需的最小初速度.

解 选飞船为研究对象, 只受地球万有引力为

$$F = G \frac{Mm}{x^2} \quad (1)$$

R 表示地球半径, 即

$$mg = G \frac{Mm}{R^2}$$

所以

$$G = \frac{gR^2}{M}$$

代入式①得

$$F = \frac{mgR^2}{x^2} \quad (2)$$

根据牛顿第二定律得

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{x^2}$$

所以

$$\frac{dv}{dt} = -gR^2 \frac{1}{x^2} \quad (3)$$

将 $\frac{dv}{dt}$ 恒等变形为

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

代入式③得

$$v \frac{dv}{dx} = -gR^2 \frac{1}{x^2}$$

分离变量得

$$v dv = -gR^2 \frac{dx}{x^2}$$

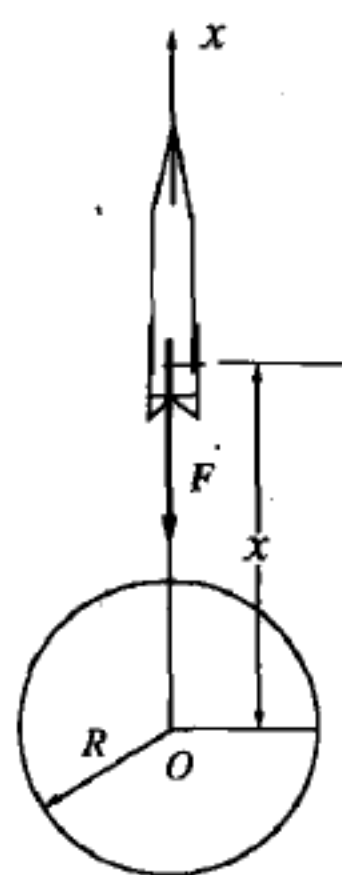


图 2-6 例 2-4 图

设飞船在地面附近($x=R$)发射时初速度为 v_0 , 在 x 处速度为 v , 对上式积分

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_R^x -gR^2 \frac{dx}{x^2}$$

得

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = gR^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right)$$

所以

$$v^2 = v_0^2 + 2gR^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right)$$

飞船脱离地球引力, 即飞船离地球无限远时 $x \rightarrow \infty$, $v=0$, 代入上式便可求得飞船脱离地球引力所需的最小初速度. 取地球平均半径 $R=6370 \text{ km}$.

$$v_0^2 = 2gR \quad \text{所以} \quad v_0 = \sqrt{2gR} = 11.2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

这个速度称为第二宇宙速度.

理论研究表明, 物体从地球表面附近以速度 $v_0 = \sqrt{gR} = 7.9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 沿水平方向发射后, 将沿地面绕地球作圆周运动成为一颗人造地球卫星, 这个速度称为第一宇宙速度. 物体不仅能脱离地球引力, 还能脱离太阳引力, 则要求以 $v_0 = 16.7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 速度从地球表面附近发射. 这个速度称为第三宇宙速度.

需要注意的是, 宇宙速度随发射地点而异, 如果发射不在地面附近, 而在与地心距离为 r 处, 则第一、第二宇宙速度表达式中 R 应换成 r , g 应换成 r 处的引力加速度 GM/r^2 . 所以该处的第一、第二宇宙速度分别为

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

例 2-5 如图 2-7 所示, 在光滑的水平面上有一固定的半径为 R 的半圆屏障, 有一质量为 m 的物体以初速 v_0 从屏障一端的切线方向进入屏障, 物体与屏障间的摩擦因数为 μ . 求: (1) 当物体速度为 v 时, 物体受到的摩擦力和切向加速度; (2) 物体速率随时间变化关系; (3) 物体速率从 v_0 变到 $v_0/3$ 所需的时间.

解 (1) 任意时刻, 物体速度为 v , 受向心力为

$$F_n = m \frac{v^2}{R}$$

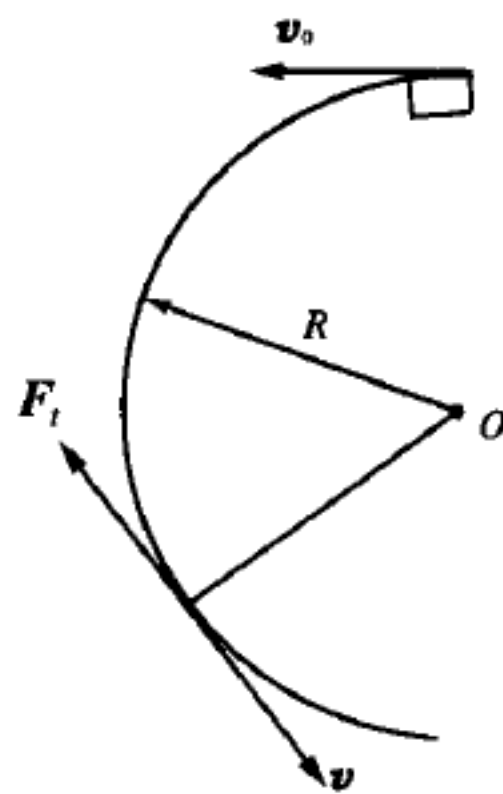


图 2-7 例 2-5 图

此时受摩擦力 F_t 与 v 反向, 且

$$F_t = -\mu F_n = -\mu m \frac{v^2}{R} \quad (1)$$

沿切向写出牛顿运动方程为

$$F_t = -\mu m \frac{v^2}{R} = ma_t$$

所以

$$a_t = -\mu \frac{v^2}{R} \quad (2)$$

a_t 与 v 反向.

(2) 因为

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -\mu \frac{v^2}{R} \quad (3)$$

移项并积分得

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{-v^2} = \int_0^t \frac{\mu}{R} dt \quad \text{即} \quad \frac{1}{v} \Big|_{v_0}^v = \frac{\mu}{R} t$$

整理得

$$v = \frac{v_0 R}{R + \mu v_0 t}$$

$$(3) \text{ 当 } v = \frac{1}{3} v_0 \text{ 时有 } \frac{1}{3} v_0 = \frac{v_0 R}{R + \mu v_0 t}, \text{ 所以 } t = \frac{2R}{\mu v_0}.$$

2-2 牛顿定律的适用范围

一、惯性系

在运动学中参考系的选择可以是任意的, 但在动力学中, 牛顿运动定律并不是对任何参考系都成立的. 我们把凡是牛顿运动定律成立的参考系称为惯性参考系, 简称惯性系. 相对于惯性系作匀速直线运动的一切参考系都是惯性系. 一个参考系是不是惯性系只能根据观察和实验的结果来判断. 天文学的研究结果表明: 太阳参考系(以太阳为原点, 以从太阳指向恒星的直线为坐标轴)为惯性系. 相对惯性系作变速运动的参考系为非惯性系.

地球有公转和自转, 所以并不是一个真正的惯性系, 自然界中严格的惯性系是不存在的. 但是计算表明, 地球自转时在赤道处向心加速度约为 $3.4 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 公转的加速度为 $6 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 太阳绕银河系中心转动的加速度约为 $3 \times 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 可见太阳是一个很好的惯性系. 在一般精度范围内, 地球也可近似看作惯性系. 地面上静止的物体和相对地面作匀速直线运动的物体都可看作惯性系. 而在地面上作变速运动的物体就不是惯性系.

由伽利略速度变换式 $v = v' + u$, 当 u 为常量, 则 $du/(dt) = 0$, 因此得加速度变

换关系为 $a=a'$. 在经典力学中, 物体的质量是常量, 因此, 在一个惯性系中牛顿第二定律成立, 即 $F=ma$, 在另一个惯性系, 牛顿第二定律也成立, 即 $F'=ma'$. 牛顿第二定律在所有的惯性系都有相同的数学形式. 可以证明其他力学规律也一样. 就是说, 力学定律在所有惯性系中都取相同的数学形式. 这个原理称为力学相对性原理. 通常叙述为: 在相互作用匀速直线运动的一切惯性系中, 一切力学现象是等同的, 即物体所遵从的力学规律完全相同.

二、非惯性系中的力学定律

在非惯性系中牛顿运动定律不适用. 例如在一列以加速度 a 作直线运动的车厢内, 有一个质量为 m 的小球放在光滑桌面上, 如图 2-8 所示. 如果取车厢为参考系, 小球虽然受合外力为零, 但具有加速度 $-a$. 所以牛顿运动定律不成立. 车厢为非惯性系. 如果假想在小球上有一个大小等于 ma , 方向与 a 相反的力 $f=-ma$ 作用着, 那么小球的运动仍然可用牛顿第二定律来描述. 这个假想力 f 是由非惯性系而引起的, 我们把它称为惯性力. 它与物体间相互作用引起的真实力不同, 它没有反作用力.

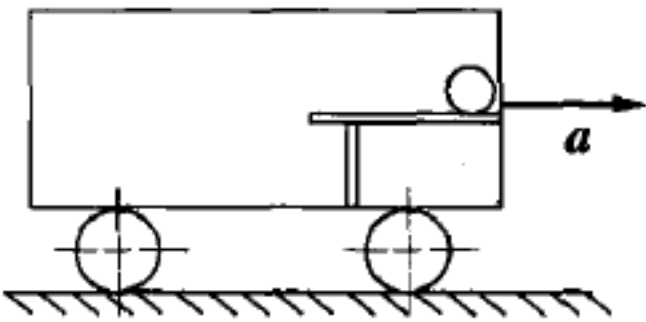


图 2-8 非惯性系

引入惯性力后, 非惯性系中仍可借用牛顿运动方程的数学表示, 即

$$\sum F_i + F_I = ma' \tag{2.11}$$

上式即非惯性系的力学规律. 式中 $\sum F_i$ 为作用于质点的合外力——真实力. a' 为质点相对于非惯性系的加速度. 惯性力以 F_I 表示, 以 a 表示非惯性系相对惯性系的加速度, 则 $F_I=-ma$.

对于其他非惯性系也有惯性力, 情况不同, 非惯性力数学表达式可以不同.

例 2-6 在例 2-1 中, 若选三角劈为参考系讨论质量为 m 的物体的运动, 三角劈为非惯性系. 对 m 受力分析如图 2-9 所示.

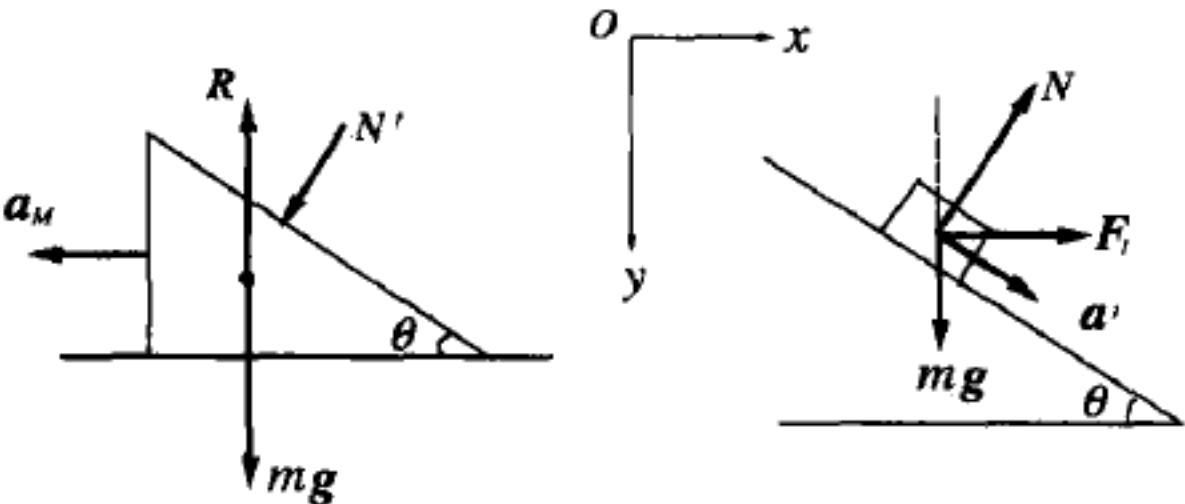


图 2-9 例 2-6 图

$$F_I = -ma_M \quad ①$$

对 M 有

$$N' \sin \theta = Ma_M$$

对 m 有

$$N + F_I + mg = ma'$$

在坐标系中分解得

$$\begin{cases} x \text{ 方向: } ma_M + N \sin \theta = ma'_x & ② \\ y \text{ 方向: } mg - N \cos \theta = ma'_y & ③ \end{cases}$$

因 m 始终在三角形劈面上运动, 还有补充方程

$$\tan \theta = \frac{a'_y}{a'_x} \quad ④$$

共有 $N(N' = N)$ 、 a_M 、 a'_x 、 a'_y 四个未知数, 四个独立方程, 完全可解.

需注意: a' 为 m 相对 M 的加速度, 若求 m 对地的加速度, 应由加速度变换公式: $a = a' + a_M$ 求解.

三、牛顿运动定律的适用范围

物理学的发展表明: 牛顿定律像其他一切物理规律一样都有一定的适用范围. 以牛顿定律为基础的经典力学只适用于解决宏观物体的低速运动. 宏观物体的高速运动遵守相对论力学的规律, 微观物体的运动遵循量子力学的规律. 这些内容本课程都将作简单介绍. 所谓高速和低速指物体运动速度与真空中光速相比. 当物体速度远小于真空中光速即为低速, 物体运动速度接近于真空中光速即为高速. 宏观与微观也没有严格界限, 一般物体线度接近于原子线度 (10^{-10} m) 就属微观物体.

目前碰到的工程技术问题, 绝大多数为宏观低速问题, 所以牛顿力学仍然是解决工程技术问题的理论基础和重要工具.

2-3 动量定理 动量守恒定律

在力的作用下, 质点的运动状态将要发生变化. 牛顿第二定律已经给出了作用于质点上的合外力与它的作用效果(指动量或速度的变化率)之间的瞬时关系. 因此, 牛顿第二定律也可以称为力的瞬时作用定律. 但是, 质点的运动状态变化必须经过一个运动过程才能体现出来, 这就意味着, 质点的运动状态变化是力持续作用的累积效应. 这种力的累积效应反映在两个方面: 一方面是力的时间累积效应, 即在力的作用下经过一段时间的累积, 物体的运动状态才发生变化, 哪怕作用时间很短也行; 另一方面是力的空间累积, 即在力的作用下物体必须经历一段位移, 物体的运动状态才发生变化, 哪怕是很小的位移也行. 下面先讨论力的时间累积效应.

一、质点的动量定理

力的时间累积效果可由牛顿第二定律直接导出. 由公式 $F = dp/(dt) = d(mv)/(dt)$, 一般地讲, F 是随时间变化的, 但在 dt 时间内, 可认为 F 为恒矢量, 于是 F 在 dt 时间累积作用为

$$Fdt = dp = d(mv) \quad (2.12)$$

式中 Fdt 表示 dt 时间内质点所受合外力的冲量. dp 表示在 dt 时间内动量的增量. 此式即动量定理的微分形式.

若质点受合外力 F 作用, F 随时间变化, t_1 时刻质点动量 $p_1 = mv_1$, t_2 时刻质点动量为 $p_2 = mv_2$, 则在 t_1 到 t_2 这段时间内 F 的累积效果为

$$\int_{t_1}^{t_2} Fdt = \int_{p_1}^{p_2} dp = p_2 - p_1$$

若以 I 表示此冲量, 则

$$I = \int_{t_1}^{t_2} Fdt$$

冲量 I 为矢量, 冲量等于力乘以力的作用时间, 冲量和动量在国际单位制中具有相同的量纲 MLT^{-1} , 而冲量的单位为牛顿·秒 ($N \cdot s$), 动量的单位为千克·米·秒⁻¹ ($kg \cdot m \cdot s^{-1}$). 只是恒力的冲量沿力的方向, 或者在无限小时间 dt 中, 冲量 Fdt 与外力 F 方向一致, 一般情况下合外力冲量方向沿质点动量增量方向. 把冲量代入上式得

$$I = p_2 - p_1 \quad (2.13)$$

此式说明: 物体受合外力的冲量等于物体动量的增量 (即末动量与初动量的矢量差), 称为动量定理. 动量定理反映质点受合外力的时间累积作用与质点状态变化 (动量变化) 之间的定量关系. (也有称之为力的时间累积作用定律.)

应用动量定理求解问题可以用作图法由几何关系求得; 也可把动量定理在直角坐标系中分解, 把矢量方程变为标量方程求解. 如

$$\begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = p_{2x} - p_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = p_{2y} - p_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = p_{2z} - p_{1z} \end{cases} \quad (2.14)$$

动量定理常用于求解碰撞、打击等问题. 两物体在碰撞的瞬间, 相互作用力叫冲力. 冲力作用时间很短, 量值很大且随时间变化, 较难以测量. 但两物体碰撞前后的动量易于测定, 由动量定理便可求得物体所受冲量. 如果碰撞时间可以测定, 则可以由冲量计算在这段时间内冲力的平均值. 冲力的平均值比冲力的峰值当然要小, 但在某些实际问题中, 平均冲力的估算是非常需要的. 以 \bar{F} 表示平均冲力, 则

$$\bar{F} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} F dt}{(t_2 - t_1)} = \frac{p_2 - p_1}{(t_2 - t_1)} \quad (2.15)$$

图 2-10 斜线部分面积(曲线下面积)表示冲力在 t_1 到 t_2 时间内的冲量.

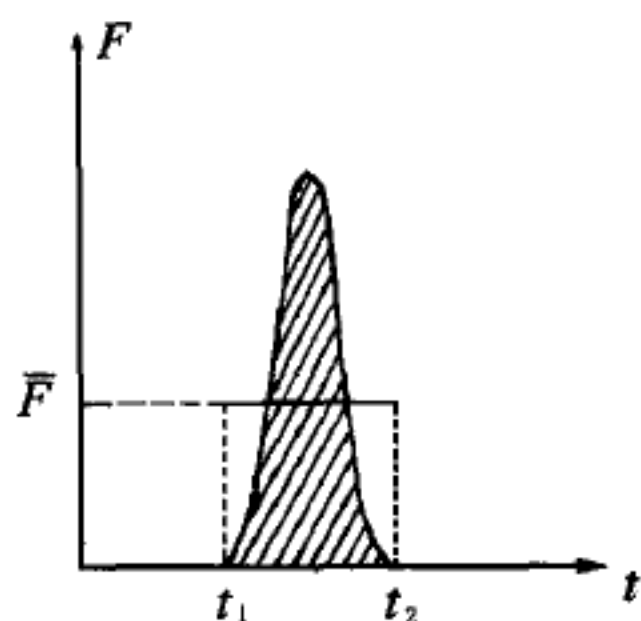


图 2-10 冲力

冲量计算往往把 $I = \int_{t_1}^{t_2} F dt$ 投影到直角坐标系

中得

$$\begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = \bar{F}_x (t_2 - t_1) \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = \bar{F}_y (t_2 - t_1) \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = \bar{F}_z (t_2 - t_1) \end{cases} \quad (2.16)$$

式中 \bar{F}_x 、 \bar{F}_y 、 \bar{F}_z 分别为 F_x 、 F_y 、 F_z 在 t_1 到 t_2 时间内的平均大小.

I 的大小为

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2 + I_z^2}$$

例 2-7 小球质量 $m=200 \text{ g}$, 以 $v_0=8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度沿与地面法线成 $\alpha=30^\circ$ 角的方向射向光滑地面, 然后与法线成 $\beta=60^\circ$ 角的方向弹起. 设碰撞时间 $\Delta t=0.01 \text{ s}$, 地面水平, 求小球给地面的平均冲力.

解 选小球为研究对象, 受力分析如图 2-11 所示.

因地面光滑, 地面对小球的作用沿地面法线, 以平均冲力 f 表示. 如图 2-11(a) 所示.

对小球应用动量定理得

$$I = (f + mg)\Delta t = mv - mv_0$$

作矢量三角形如图 2-11(b) 所示, 构成直角三角形.

$$\cos\alpha = \frac{mv_0}{|f + mg|\Delta t} = \frac{mv_0}{(f - mg)\Delta t}$$

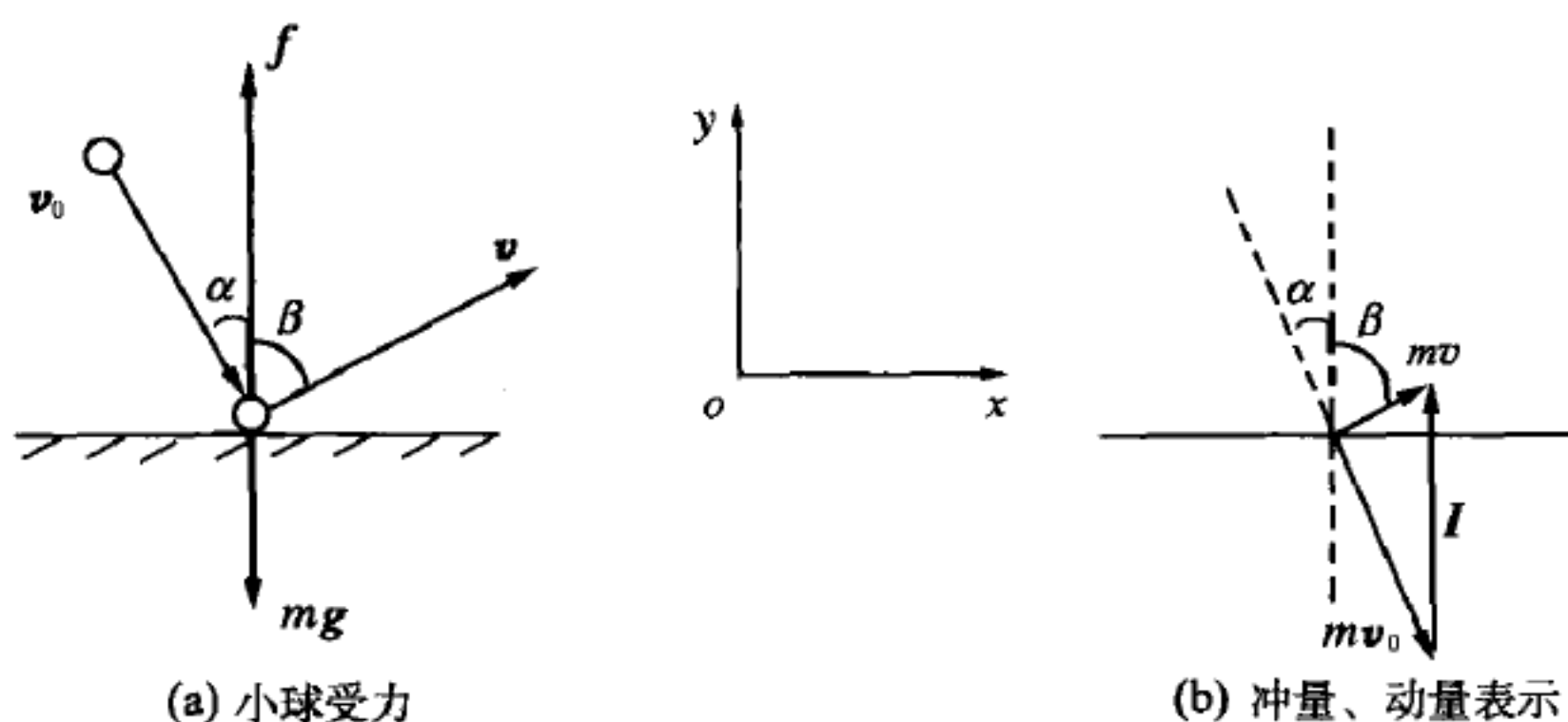


图 2-11 例 2-7 图

即
$$(f - mg)\Delta t = \frac{mv_0}{\cos\alpha}, \quad f = mg + \frac{mv_0}{\Delta t \cos\alpha}$$

代入数据得
$$f = 0.2 \times 9.8 + \frac{0.2 \times 8}{0.01 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ N} = 187 \text{ N}$$

而 $mg = 1.96 \text{ N}$ 与 f 相比可以忽略. 应注意: 在实际问题中如果有限大小的力 (如重力) 与冲力同时作用, 因冲力很大, 作用时间又很短, 有限大小的力的冲量就可忽略不计.

例 2-8 一粒子弹由枪口飞出的速度是 $300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. 在枪管内子弹受的合力由下式给出:

$$F = 400 - \frac{4}{3} \times 10^5 t$$

其中 F 以 N 为单位, t 以 s 为单位.

(1) 画 $F-t$ 曲线;

(2) 计算子弹行经枪管长度所需的时间.

设子弹到枪口时所受的力变为零.

(3) 该力的冲量大小, 其几何意义是什么?

(4) 求子弹的质量.

解 (1) 由 $t=0$, 得 $F=400 \text{ N}$; $F=0$, $t=3 \times 10^{-3} \text{ s}$, 作 $F-t$ 曲线如图 2-12 所示.

(2) $F=0$, $t=3 \times 10^{-3} \text{ s}$ (子弹行经枪管所需的时间)

$$(3) I = \int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_0^{3 \times 10^{-3}} (400 - \frac{4}{3} \times 10^5 t) dt$$

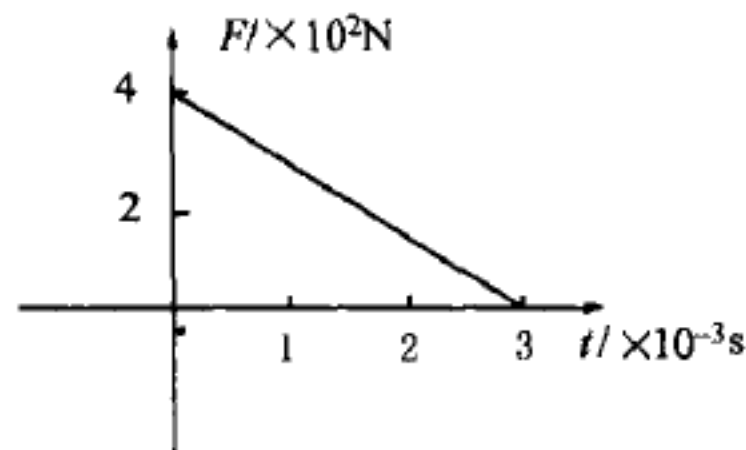


图 2-12 例 2-8 图

$$= (400t - \frac{4}{6} \times 10^5 t^2) \Big|_0^{3 \times 10^{-3}} = 0.6 \text{ N} \cdot \text{s}$$

几何意义:在 $F-t$ 坐标中力曲线下的面积

$$S = \frac{1}{2} \times 400 \times 3 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s} = 0.6 \text{ N} \cdot \text{s}$$

(4) 由
$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = mv_2 - mv_1$$

因为 $v_1 = 0, v_2 = 300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, t_1 = 0, t_2 = 3 \times 10^{-3} \text{ s}$, 所以

$$m = \frac{\int_0^{3 \times 10^{-3}} F dt}{v_2} = \frac{0.6}{300} \text{ kg} = 2 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

二、质点系动量定理

1. 两个质点 m_1, m_2 组成的系统

上一节讨论了一个质点的动量定理. 下面导出由 m_1, m_2 两个质点构成的系统的动量定理. 质点系各质点受力有两种:一种是系统内各质点间相互作用力称为内力;另一种是系统外其他物体对系统内任一质点的作用力称为外力. 设质点 m_1, m_2 除分别受外力 F_1, F_2 作用外,还分别受相互作用内力 f_{12}, f_{21} .

分别对 m_1, m_2 应用牛顿第二定律得

$$F_1 + f_{12} = \frac{dp_1}{dt}, \quad F_2 + f_{21} = \frac{dp_2}{dt}$$

两式相加得
$$F_1 + F_2 + f_{12} + f_{21} = \frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = \frac{d}{dt}(p_1 + p_2)$$

上式即两个质点构成的系统的动量定理的微分形式. 等式右边为质点系统总动量 $(p_1 + p_2)$ 对时间的变化率.

2. 由 n 个质点组成的系统

设每个质点的质量为 m_1, m_2, \dots, m_n , 分别受外力 F_1, F_2, \dots, F_n 与相互作用内力, 可以对每个质点应用牛顿第二定律, 然后相加得

$$\sum_{i=1}^n F_i + \sum_{i=1}^n f_{i\text{内}} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n p_i$$

式中 $f_{i\text{内}}$ 表示作用于第 i 个质点上的内力, 而系统内相互作用内力总是成对出现的, 所以有

$$\sum_{i=1}^n f_{i内} = 0$$

上式变为

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i$$

或变为

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{F}_i dt = \int d \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \Delta \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$$

$$\text{即} \quad \int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{F}_i dt = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \quad (2.17)$$

上式即质点系动量定理. 式中 \mathbf{p}_1 为初态质点系的总动量, \mathbf{p}_2 为末态质点系的总动量. 式(2.17)表明: 能引起质点系动量变化的是作用于系统的合外力冲量. 内力冲量只能引起系统内各质点动量变化, 但不影响系统的总动量.

三、动量守恒定律

由式(2.17)可知, 当质点系所受的合外力为零, 即 $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0$, 则

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \mathbf{p} = 0$$

$$\text{即} \quad \mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \text{常矢量} \quad (2.18)$$

\mathbf{p} 或 $\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i$ 表示任意时刻质点系的总动量. 就是说, 如果系统所受合外力为零, 则该系统的总动量保持不变, 这一结论叫做动量守恒定律.

应用动量守恒定律解题应注意:

①动量守恒定律的适用条件是系统所受的合外力为零, 即 $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0$. 但在某些作用极短暂的过程(如爆炸过程, 碰撞过程等)中, 内力往往比外力大得多, 外力对质点系总动量变化影响很小, 可以认为近似满足动量守恒条件. 即在 $\sum \mathbf{F}_i \ll f_{内}$ 条件下可以认为动量守恒.

②动量守恒定律为矢量式, 实际应用常用它的分量式.

$$\begin{cases} \text{当 } \sum F_{ix} = 0, m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + \cdots + m_n v_{nx} = \text{恒量} \\ \text{当 } \sum F_{iy} = 0, m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + \cdots + m_n v_{ny} = \text{恒量} \\ \text{当 } \sum F_{iz} = 0, m_1 v_{1z} + m_2 v_{2z} + \cdots + m_n v_{nz} = \text{恒量} \end{cases}$$

可见,只要质点系沿某坐标方向所受的合外力为零,则沿此方向上系统总动量的分量守恒.同时,虽然质点系所受合外力不为零,质点系总动量不守恒,但只要合外力沿某一方向分力为零,则沿此方向质点系动量守恒.

③动量守恒定律适用于惯性参考系.质点系的总动量: $m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_n v_n = p$,表示系统内每一质点相对于同一惯性系的动量和.

④动量守恒表示在守恒条件满足情况下,任意时刻质点系的总动量不变.

⑤动量守恒定律不仅适用于宏观物体,也适用于分子、原子和光子等微观粒子的相互作用过程.因此,动量守恒定律是物理学中最重要、最普遍的规律之一.

例 2-9 如图 2-13 所示:一质子($m_H = 1$ 原子质量单位, $v_H = 6 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$)和一氦核($m_{He} = 4$ 原子质量单位, $v_{He} = 4 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$)相碰撞,若在碰撞后质子速率 $v'_H = 6 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,方向如图所示,求碰后氦核的速度.

解 质子与氦核系统在碰撞前后动量守恒.

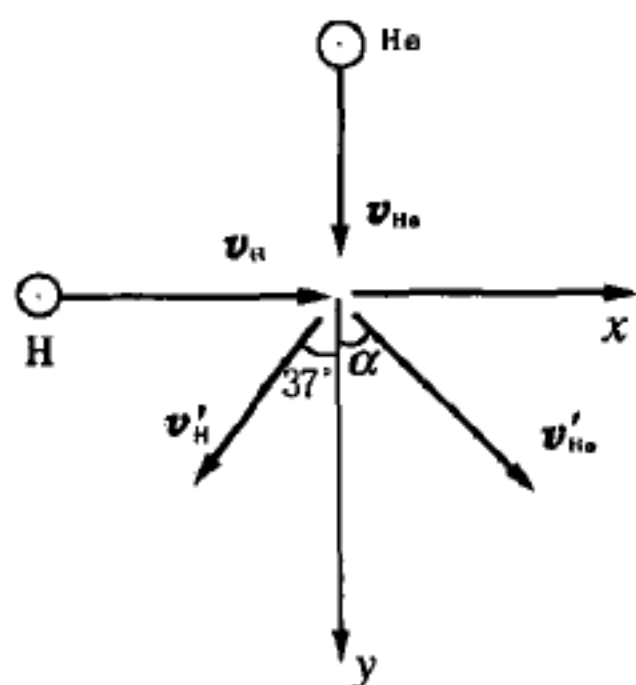


图 2-13 例 2-9 图

建立坐标系如图 2-13 所示,设碰撞后氦核的速率为 v'_{He} , 且与 y 轴成 α 角. 则初态(碰前)系统总动量为

$$m_H v_H + m_{He} v_{He}$$

末态(碰后)系统总动量为

$$m_H v'_H + m_{He} v'_{He}$$

由动量守恒定律则有

$$m_H v_H + m_{He} v_{He} = m_H v'_H + m_{He} v'_{He}$$

投影到坐标系中得

$$\begin{cases} x: m_H v_H = -m_H v'_H \sin 37^\circ + m_{He} v'_{He} \sin \alpha & \text{①} \\ y: m_{He} v_{He} = m_H v'_H \cos 37^\circ + m_{He} v'_{He} \cos \alpha & \text{②} \end{cases}$$

由式①得

$$v'_{He} \sin \alpha = \frac{m_H}{m_{He}} (v_H + v'_H \sin 37^\circ) = 2.4 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{③}$$

由式②得

$$v'_{\text{He}} \cos \alpha = v_{\text{He}} - \frac{m_{\text{H}}}{m_{\text{He}}} v'_{\text{H}} \cos 37^\circ = 2.8 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad ④$$

由式③、④可解得

$$v'_{\text{He}} = 3.7 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \alpha = 40^\circ 33'$$

例 2-10 两球质量分别为 $m_1 = 2.0 \text{ g}$, $m_2 = 5.0 \text{ g}$. 在光滑的水平桌面上运动. 用直角坐标系 Oxy 描述其运动, 两者速度分别为 $v_1 = 10\mathbf{i} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_2 = (3.0\mathbf{i} + 5.0\mathbf{j}) \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. 若碰后合为一体, 求碰后速度 v .

解 碰撞前后动量守恒.

碰前 m_1, m_2 系统总动量为 $m_1 v_1 + m_2 v_2$

碰后系统总动量为 $(m_1 + m_2) v$

由动量守恒定律得

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \quad ①$$

即

$$20\mathbf{i} + 15\mathbf{i} + 25\mathbf{j} = 7v_x\mathbf{i} + 7v_y\mathbf{j}$$

所以有

$$7v_x = 35, 7v_y = 25 \quad ②$$

由式②得

$$v_x = 5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}, v_y = \frac{25}{7} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

所以

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 6.14 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\alpha = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{\frac{25}{7}}{5} = \arctan \frac{5}{7} = 35.5^\circ$$

例 2-11 总质量为 M 的载物小船以速度 v 在静水中航行. 然后, 分别同时在船头和船尾以相对船的速度 u 抛出质量为 m 和 $2m$ 的两物体, 设 v, u 在同一直线上. 问: 抛出两物体后, 小船的速度变为多少? 假设水平方向船受的阻力可以忽略不计.

解 选两物体和船为系统, 抛出过程中沿水平方向系统受合外力为零. 所以系统动量守恒. 如图 2-14 所示.

初态: 抛出物体前, 物体和船对地的速度为 v , 动量为 Mv ;

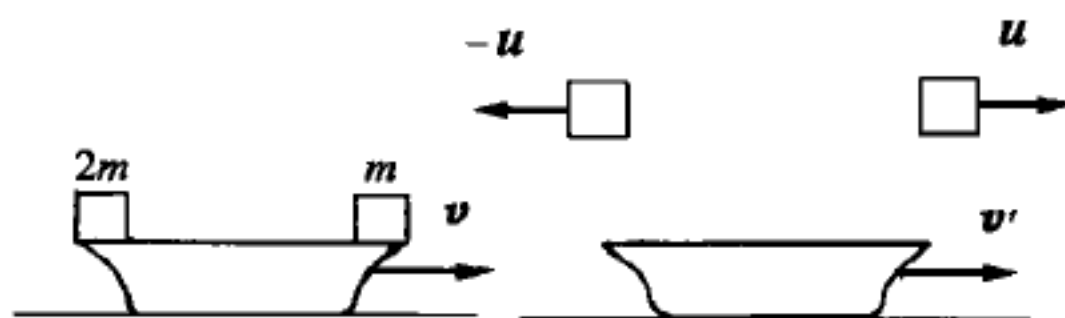


图 2-14 例 2-11 图

末态:抛出物体后,船对地速度变为 v' , 质量为 m 物体对地速度为 $v' + u$, 质量为 $2m$ 的物体对地的速度为 $v' - u$; 系统总动量为

$$(M - 3m)v' + m(v' + u) + 2m(v' - u)$$

由动量守恒定律得

$$Mv = (M - 3m)v' + m(v' + u) + 2m(v' - u)$$

求解得

$$v' = v + \frac{m}{M}u$$

* 四、火箭的飞行原理

火箭最早是中国发明的. 我国早在南宋时代就出现了“起火”, 其后又出现了利用起火推动的翎箭. 据明代茅元仪的《武备志》记载, 此前我们的祖先已发明了利用火药发动的“多箭头”(10 到 100 支)的火箭, 以及用于水战的称为“火龙出水”的二级火箭. 随着空间技术的发展, 火箭技术在近代有了很大的发展, 我国的火箭技术已达到世界先进水平.

火箭飞行的基本原理, 可用动量守恒定律来说明. 火箭自带燃料和助燃剂, 飞行时, 燃料在燃烧室中燃烧, 同时不断地向飞行的反方向喷射出大量高速气体, 使火箭在飞行方向上获得很大的动量, 因此获得很大的前进速度. 当火箭在远离地球的宇宙空间飞行时, 所受的空气阻力和引力比系统内力小得多, 可忽略, 因此火箭系统动量守恒. 火箭飞行过程中燃料不断燃烧, 系统的总质量不断减少, 火箭属于变质量系统.

设某时刻 t 火箭(包括火箭体及所带燃料等)系统的质量为 M , 速度为 v , 此时系统总动量为 Mv . 经过 dt 时间, 火箭喷出质量为 dm 的气体, 其喷出速度相对于火箭体为 u , u 也叫排出速率. 到 $t + dt$ 时刻, 火箭体速度增为 $v + dv$. 此时系统的总动量为

$$dm(v - u) + (M - dm)(v + dv)$$

如图 2-15 所示.

由于喷出气体的质量 dm 等于火箭质量的减少 $-dM$, 所以 $t + dt$ 时刻系统总