

小故事



北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

画家、仆人与小偷

抽象的价值：类与对象



回顾：各态历经性的定义

设 $X(t)$ 是平稳随机过程， $\overline{X(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt$
若 $\overline{X(t)} = E[X(t)] = m_x$ 依概率1成立，

即对任意的 $\varepsilon > 0$ ，有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P\{|\overline{X_T(t)} - E[X(t)]| \leq \varepsilon\} = 1$$

则称过程 $X(t)$ 的均值具有各态历经性。



回顾：平稳过程的功率谱密度

平稳随机过程的样本函数是**功率型**的

$$F_X(\omega, T) = \int_{-T}^T X(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T X^2(t) dt = \frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_X(\omega, T)|^2 d\omega$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X^2(t) dt \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|F_X(\omega, T)|^2] \right] d\omega$$



线性系统

主动降噪耳机



$$x(t) = s(t) + n(t)$$

$$h(t)$$

$$y(t)$$

$$X(t) = S(t) + N(t)$$

$$H(j\omega)$$

$$Y(t)$$

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = x(t)$$

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

滤波器设计，如何消除噪声？

信道均衡，如何获得 $h(t)$ 估计？

雷达目标估计、石油探测等

故障检测与故障诊断……

第6讲



北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

随机过程的均方微积分

主讲：张有光教授
电子信息工程学院



主要内容

- 随机过程 — 均方极限
- 随机过程 — 均方连续
- 随机过程 — 均方微分
- 随机过程 — 均方积分



一、随机过程的均方极限

- 随机序列依概率收敛
- 随机序列依均方收敛
- 均方收敛的主要性质
- 随机过程的均方极限



1、依概率收敛— 回顾

- 设 $\{X_n\}$ 为一随机变量序列, X 为一个随机变量, 若对任意小的正数 ε , 恒有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0$$

记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \stackrel{P}{=} X$

大数定律

中心极限定理

则称 $\{X_n\}$ 依概率收敛于 X



2、均方收敛

设 $\{X_n\}$ 为随机变量序列, X 为随机变量, 若 $E[X_n^2] < \infty, E[X^2] < \infty$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{|X_n - X|^2\} = 0$$

绝对值

记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\| = 0$

欧氏距离

这里 $\|X\| = \sqrt{E\{|X|^2\}}$ $\|\bullet\|$ 范数



2、均方收敛 - 续

则称 $\{X_n\}$ 均方收敛于 X ，或者说 X 是 $\{X_n\}$ 的均方极限，记为：
$$l.i.m_{n \rightarrow \infty} X_n = X$$

或简记为：
$$X_n \xrightarrow{m.s.} X$$

$$\text{由于 } P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E\{|X_n - X|^2\}}{\varepsilon^2}$$

则均方收敛一定依概率收敛！



3、均方收敛的主要性质

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z = Z$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n Z = cZ$$



3、均方收敛的主要性质 - 续

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [aX_n + bY_n] = aX + bY$$

$$E[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n]$$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} E[X_n Y_m] = E[XY]$$

特别地 $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n^2] = E[X^2]$



4、随机过程的依概率极限

- 设 $X(t)$ 为随机过程, X 为随机变量, 若对任意小的正数 ε , 恒有:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} P\{|X(t) - X| > \varepsilon\} = 0$$

则称 $X(t)$ 依概率收敛于随机变量 X

$$\lim_{t \rightarrow t_0} X(t) \stackrel{P}{=} X$$



4、随机过程的均方极限

设随机过程 $X(t)$ 和变量 X 都有二阶矩，
若 $\lim_{t \rightarrow t_0} \|X(t) - X\| = 0$ 或 $\lim_{t \rightarrow t_0} E\{|X(t) - X|^2\} = 0$

则称 $X(t)$ 均方收敛于 X ，或者说 X 是
 $X(t)$ 的均方极限，记为：

$$l.i.m_{t \rightarrow t_0} X(t) = X \quad X(t) \xrightarrow{m.s} X$$



二、随机过程的均方连续性

- 均方连续的定义
- 均方连续性定理
- 均值函数连续性



1、均方连续

■ 设 $X(t)$ 为随机过程，若对于 $t \in T$,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} l.i.m X(t + \Delta t) = X(t)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} E\{|X(t + \Delta t) - X(t)|^2\} = 0$$

则称随机过程 $X(t)$ 在 t 点均方连续，如果对于任意的 $t \in T$, $X(t)$ 都是均方连续，则称 $X(t)$ 在 T 域上均方连续。



2、均方连续性条件

- $X(t)$ 在时刻 t 均方连续的充要条件是：
自相关函数 $R(t_1, t_2)$ 在 (t, t) 处连续。

证明：
$$E \left\{ \left| X(t + \Delta t) - X(t) \right|^2 \right\}$$

$$= R_X(t + \Delta t, t + \Delta t) - R_X(t + \Delta t, t) - R_X(t, t + \Delta t) + R_X(t, t)$$



2、均方连续性条件

特别的对平稳过程

$$E \left\{ \left| X(t + \Delta t) - X(t) \right|^2 \right\} = 2 \left[R_X(0) - R_X(\Delta t) \right]$$

平稳过程一点连续，点点连续！



3、均值函数连续性

- 若随机过程 $X(t)$ 均方连续, 则其均值函数 $E[X(t)]$ 必定连续, 即

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} E[X(t + \Delta t)] = E[X(t)]$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} m_x(t + \Delta t) = m_x(t)$$

证明: $E[Z^2] = \sigma_Z^2 + \{E[Z]\}^2 \geq \{E[Z]\}^2$

$$E\{[X(t + \Delta t) - X(t)]^2\} \geq \{E[X(t + \Delta t) - X(t)]\}^2$$



4、均值连续性—说明

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} E[X(t + \Delta t)] = E[X(t)] = E[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} X(t + \Delta t)]$$

普通函数极限

随机过程极限

均值运算与极限运算可交换顺序



三、随机过程的均方微分

- 均方微分的基本定义
- 均方可微的充要条件
- 均方导数的均值函数
- 含有微分的相关函数



1、均方导数的定义

- 设 $X(t)$ 为一随机过程，若存在随机过程 $X'(t)$ ，使得对于 $t \in R$ ，有

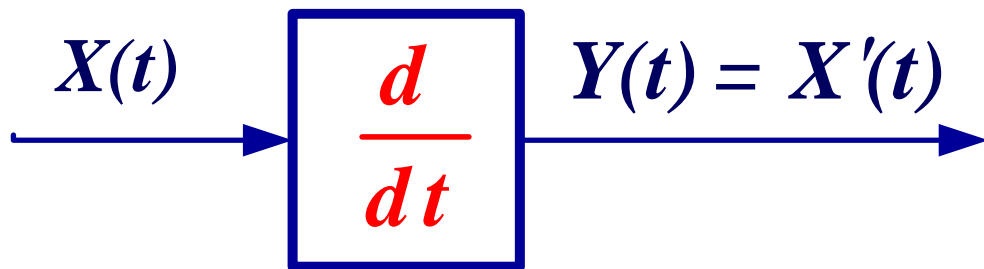
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} = X'(t)$$

则称 $X(t)$ 在 t 点均方可微，且称 $X'(t)$ 为在 t 点的均方导数。



2、均方微分（导数）变换

- 对于区域 T 上处处可导的随机过程 $X(t)$ 对应就有导数随机过程 $X'(t)$ ，那么称该变换为微分（导数）变换。
- 微分变换是线性时不变





2、均方可微的充要条件

随机过程 $X(t)$ 在 T 上均方可微的充要条件是：其相关函数 $R(t_1, t_2)$ 的二阶导数 $\frac{\partial^2 R(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$ 对于对角线上的每一点

$(t_1, t_2) \in T \times T$ 上存在



对于平稳过程有

$$R_X(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2) = R_X(\tau)$$

$$\text{故: } \left. \frac{\partial^2 R_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1=t_2=t}$$

$$= - \left. \frac{d^2 R_X(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = -R_X''(0)$$



举例

■ 已知随机过程 $X(t)$ 的相关函数为

$$R_X(\tau) = e^{-a\tau^2}, \quad \text{问 } X(t) \text{ 是否均方连续,}$$

均方可微?



3、均方导数的均值

$$\begin{aligned} E\left[\frac{d}{dt} X(t)\right] &= E\left\{l.i.m_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}\right\} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[X(t + h)] - E[X(t)]}{\Delta t} = \frac{d}{dt} E[X(t)] \end{aligned}$$

均值运算与导数运算可以交换顺序



4、含有微分的相关函数

$$\frac{\partial R(t_1, t_2)}{\partial t_1}, \frac{\partial R(t_1, t_2)}{\partial t_2}, \frac{\partial^2 R(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

$$Y(t) = X'(t)$$



$$R_{YX}(t_1, t_2)$$

$$R_{YX}(t_1, t_2) = E[X'(t_1)X(t_2)]$$

$$= E \left\{ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{X(t_1 + \Delta t) - X(t_1)}{\Delta t} \right] \cdot X(t_2) \right\}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} \right) E[X(t_1 + \Delta t)X(t_2) - X(t_1)X(t_2)]$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} \right) [R(t_1 + \Delta t, t_2) - R(t_1, t_2)] = \frac{\partial R(t_1, t_2)}{\partial t_1}$$



$$R_{YX}(t_1, t_2) = E[X'(t_1)X(t_2)] = \frac{\partial R(t_1, t_2)}{\partial t_1}$$
$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X'(t_2)] = \frac{\partial R(t_1, t_2)}{\partial t_2}$$

对于平稳过程 其中 $t_1 - t_2 = \tau$

$$R_{XY}(\tau) = -\frac{dR(\tau)}{d\tau} \quad R_{YX}(\tau) = \frac{dR(\tau)}{d\tau}$$
$$-\frac{dR(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{dR(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \Rightarrow R_{YX}(\tau) \Big|_{\tau=0} = 0$$



$$\begin{aligned} R_{YY}(t_1, t_2) &= E[Y(t_1)Y(t_2)] = \frac{\partial R_{YX}(t_1, t_2)}{\partial t_2} \\ &= \frac{\partial R_{XY}(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \frac{\partial^2 R_{XX}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \end{aligned}$$

对于平稳过程

$$R_{YY}(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} R_X(\tau)$$



5、导数过程Y(t)的功率谱

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2}{d\tau^2} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= -(j\omega)^2 S_X(\omega) = \omega^2 S_X(\omega) \end{aligned}$$

类似地

$$S_{X^{(n)}}(\omega) = \omega^{2n} S_X(\omega)$$

$$S_{XY}(\omega) = -j\omega S_X(\omega)$$

$$S_{YX}(\omega) = j\omega S_X(\omega)$$



四、随机过程的均方积分

- 均方积分的基本定义
- 均方可积的充要条件
- 均方积分的均值函数
- 均方积分的相关函数



1、均方积分的定义

设 $X(t)$ 为一个随机过程, $a, b \in T$, 且

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \Delta_n = \max_{0 \leq k \leq n-1} (t_{k+1} - t_k)$$

$$t_k \leq t'_k \leq t_{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

若 $\sum_{k=0}^{n-1} X(t'_k)(t_{k+1} - t_k)$ 具有均方极限

$$\int_a^b X(t)dt = \lim_{\Delta_n \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} X(t'_k)(t_{k+1} - t_k)$$



2、均方可积的充要条件

随机过程 $X(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方可积的充要条件是： $R(t_1, t_2)$ 在矩形域 $[a,b] \times [a,b]$ 上均方黎曼可积。

随机过程均方黎曼积分的性质取决于它的自相关函数的普通黎曼积分的性质。



3、均方积分的均值

随机过程 $X(t)$ 在 $[a,b]$ 及 $[c,d]$ 上均方可积则有

$$E\left[\int_a^b X(t)dt\right] = \int_a^b E[X(t)]dt$$

$$E\left[\int_a^b X(t)dt\right] = E\left[\lim_{\Delta_n \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} X(t'_k)(t_{k+1} - t_k)\right]$$

$$= \lim_{\Delta_n \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} E[X(t'_k)](t_{k+1} - t_k) = \int_a^b E[X(t)]dt$$



4、均方积分的相关函数

■ 同样条件下

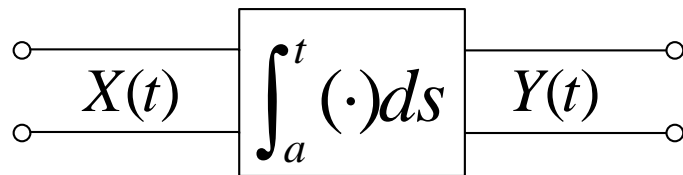
$$\begin{aligned} & E\left[\int_a^b X(t)dt \cdot \int_c^d X(t)dt\right] \\ &= \int_a^b \int_c^d E[X(t_1)X(t_2)]dt_1dt_2 \\ &= \int_a^b \int_c^d R(t_1, t_2)dt_1dt_2 \end{aligned}$$



5、随机过程的积分变换

- 若随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 在域 $[a, b]$ 上均方可积，且输出过程为

$$Y(t) = \int_a^t X(s) ds, a \leq t \leq b$$



1) 输出过程的均值

$$m_Y(t) = \int_a^t m_X(s) ds, a \leq t \leq b$$

若 $X(t)$ 为平稳过程，均值为 c ，则输出均值函数



2) 输出过程的自相关函数

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= E\left[\int_a^{t_1} \int_a^{t_2} X(s)X(\lambda)dsd\lambda\right] \\ &= \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} E[X(s)X(\lambda)]dsd\lambda = \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} R_X(s, \lambda)dsd\lambda \end{aligned}$$

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \int_a^{t_2} R_X(t_1, \lambda)d\lambda$$

$$R_{YX}(t_1, t_2) = \int_a^{t_1} R_X(s, t_2)ds$$



3) 输出过程的协方差函数

$$C_Y(t_1, t_2) = \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} C_X(s, \lambda) ds d\lambda$$

对于 $X(t)$ 平稳过程，其协方差函数：

$$C_X(t_1, t_2) = C_X(t_1 - t_2) = C_X(\tau) = R_X(\tau) - m_X^2;$$

$$\text{令 } Y = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt, \text{ 均值 } E[Y] = m_X, \text{ 方差}$$

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T C_X(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) C_X(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) [R_X(\tau) - m_X^2] d\tau \end{aligned}$$



小结 如何理解均方微积分？

- 从普通微积分推广到均方微积分
- 自相关函数描述极限、连续、导数
- 微分、积分作为线性变换，来看输出自相关、输入与输出互相关
- 作为平稳随机过程，以上2、3有更进一步的结论



随机过程 思考题

抽象的价值：从普通函数的微积分推广到随机过程的均方微积分，推广过程中，困难在哪里？有哪些概念获得了推广，推广以后的价值？有何启示？



习题

■ P128 第2~5



北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

谢谢！