

《概率论与数理统计》

| | | |
|------------|------------------------|-----------|
| 第一章 | 概率论的基本概念 | 2 |
| §2. | 样本空间、随机事件 | 2 |
| §4 | 等可能概型（古典概型） | 3 |
| §5. | 条件概率..... | 4 |
| §6. | 独立性..... | 4 |
| 第二章 | 随机变量及其分布 | 5 |
| §1 | 随机变量..... | 5 |
| §2 | 离散性随机变量及其分布律 | 5 |
| §3 | 随机变量的分布函数 | 6 |
| §4 | 连续性随机变量及其概率密度 | 6 |
| §5 | 随机变量的函数的分布 | 7 |
| 第三章 | 多维随机变量 | 7 |
| §1 | 二维随机变量 | 7 |
| §2 | 边缘分布..... | 8 |
| §3 | 条件分布..... | 8 |
| §4 | 相互独立的随机变量 | 9 |
| §5 | 两个随机变量的函数的分布 | 9 |
| 第四章 | 随机变量的数字特征 | 10 |
| §1. | 数学期望..... | 10 |
| §2 | 方差..... | 11 |

| | |
|------------------------------|-----------|
| §3 协方差及相关系数 | 11 |
| 第五章 大数定律与中心极限定理 | 12 |
| §1. 大数定律 | 12 |
| §2 中心极限定理 | 13 |

第一章 概率论的基本概念

§ 2. 样本空间、随机事件

1. 事件间的关系 $A \subset B$ 则称事件 B 包含事件 A, 指事件 A 发生必然导致事件 B 发生

$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件, 指当且仅当

A, B 中至少有一个发生时, 事件 $A \cup B$ 发生

$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件, 指当 A, B

同时发生时, 事件 $A \cap B$ 发生

$A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件, 指当且仅当

A 发生、B 不发生时, 事件 $A - B$ 发生

$A \cap B = \phi$, 则称事件 A 与 B 是互不相容的, 或互斥的, 指事件 A 与事

件 B 不能同时发生, 基本事件是两两互不相容的

$A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \phi$, 则称事件 A 与事件 B 互为逆事件, 又称事件

A 与事件 B 互为对立事件

2. 运算规则 交换律 $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

德摩根律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

§ 3. 频率与概率

定义 在相同的条件下, 进行了 n 次试验, 在这 n 次试验中, 事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**, 比值 n_A/n 称为事件 A 发生的**频率**

概率: 设 E 是随机试验, S 是它的样本空间, 对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数, 记为 $P(A)$, 称为事件的**概率**

1. 概率 $P(A)$ 满足下列条件:

(1) **非负性:** 对于每一个事件 A $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) **规范性:** 对于必然事件 S $P(S) = 1$

(3) **可列可加性:** 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是两两互不相容的事件, 有 $P(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$ (n 可以取 ∞)

2. 概率的一些重要性质:

(i) $P(\phi) = 0$

(ii) 若 A_1, A_2, \dots, A_n 是两两互不相容的事件, 则有 $P(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$ (n 可以取 ∞)

(iii) 设 A, B 是两个事件若 $A \subset B$, 则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$, $P(B) \geq P(A)$

(iv) 对于任意事件 A , $P(A) \leq 1$

(v) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ (逆事件的概率)

(vi) 对于任意事件 A, B 有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

§ 4 等可能概型 (古典概型)

等可能概型: 试验的样本空间只包含有限个元素, 试验中每个事件发生的可能性相同

若事件 A 包含 k 个基本事件, 即 $A = \{e_{i_1}\} \cup \{e_{i_2}\} \cup \dots \cup \{e_{i_k}\}$, 里

i_1, i_2, \dots, i_k 是 $1, 2, \dots, n$ 中某 k 个不同的数, 则有

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(\{e_{i_j}\}) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{S \text{ 中基本事件的总数}}$$

§ 5. 条件概率

(1) 定义: 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条

件下事件 B 发生的**条件概率**

(2) 条件概率符合概率定义中的三个条件

1° 非负性: 对于某一事件 B , 有 $P(B|A) \geq 0$

2° 规范性: 对于必然事件 S , $P(S|A) = 1$

3° 可列可加性: 设 B_1, B_2, \dots 是两两互不相容的事件, 则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i | A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i | A)$$

(3) 乘法定理 设 $P(A) > 0$, 则有 $P(AB) = P(B)P(A|B)$ 称为乘法公式

(4) 全概率公式: $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$

贝叶斯公式:
$$P(B_k | A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}$$

§ 6. 独立性

定义 设 A, B 是两事件, 如果满足等式 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称事件 A, B 相互独立

定理一 设 A, B 是两事件, 且 $P(A) > 0$, 若 A, B 相互独立, 则 $P(B|A) = P(B)$

定理二 若事件 A 和 B 相互独立, 则下列各对事件也相互独立: A 与 \bar{B} , \bar{A} 与 B , \bar{A} 与 \bar{B}

第二章 随机变量及其分布

§1 随机变量

定义 设随机试验的样本空间为 $S = \{e\}$. $X = X(e)$ 是定义在样本空间 S 上的实值单值函数, 称 $X = X(e)$ 为随机变量

§2 离散性随机变量及其分布律

1. 离散随机变量: 有些随机变量, 它全部可能取到的值是有限个或可列无限多个, 这种随机变量称为离散型随机变量

$P(X = x_k) = p_k$ 满足如下两个条件 (1) $p_k \geq 0$, (2) $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

2. 三种重要的离散型随机变量



(1) 分布

设随机变量 X 只能取 0 与 1 两个值, 它的分布律是



$P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k}$, $k = 0, 1$ ($0 < p < 1$), 则称 X 服从以 p 为参数的 分布或两点分布。

(2) 伯努利实验、二项分布

设实验 E 只有两个可能结果: A 与 \bar{A} , 则称 E 为伯努利实验. 设 $P(A) = p$ ($0 < p < 1$), 此时 $P(\bar{A}) = 1 - p$. 将 E 独立重复的进行 n 次, 则称这一串重复的独立实验为 n 重伯努利实验。

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ 满足条件 (1) $p_k \geq 0$, (2) $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ 注意到

$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ 是二项式 $(p+q)^n$ 的展开式中出现 p^k 的那一项, 我们称随机变量 X 服从参数为

n, p 的二项分布。

(3) 泊松分布

设随机变量 X 所有可能取的值为 $0, 1, 2, \dots$ ，而取各个值的概率为

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k=0, 1, 2, \dots, \text{其中 } \lambda > 0 \text{ 是常数, 则称 } X \text{ 服从参数为 } \lambda \text{ 的泊松分布记为}$$

$$X \sim \pi(\lambda)$$

§3 随机变量的分布函数

定义 设 X 是一个随机变量, x 是任意实数, 函数 $F(x) = P\{X \leq x\}$, $-\infty < x < \infty$

称为 X 的分布函数

分布函数 $F(x) = P(X \leq x)$, 具有以下性质 (1) $F(x)$ 是一个不减函数 (2)

$$0 \leq F(x) \leq 1, \text{ 且 } F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1 \quad (3) \quad F(x+0) = F(x), \text{ 即 } F(x) \text{ 是右连续的}$$

§4 连续性随机变量及其概率密度

连续随机变量: 如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 存在非负可积函数 $f(x)$, 使

对于任意函数 x 有 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, 则称 x 为连续性随机变量, 其中函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数, 简称概率密度

1 概率密度 $f(x)$ 具有以下性质, 满足 (1) $f(x) \geq 0$, (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$;

$$(3) \quad P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx; (4) \text{ 若 } f(x) \text{ 在点 } x \text{ 处连续, 则有 } F'(x) = f(x)$$

2. 三种重要的连续型随机变量

(1) 均匀分布

若连续性随机变量 X 具有概率密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则称 X 在区间 (a, b) 上服从

均匀分布. 记为 $X \sim U(a, b)$

(2) 指数分布

若连续性随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 其中 $\theta > 0$ 为常数, 则称 X

服从参数为 θ 的指数分布。

(3) 正态分布

若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty,$$

其中 $\mu, \sigma (\sigma > 0)$ 为常数, 则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布或高斯分布, 记为

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

特别, 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时称随机变量 X 服从标准正态分布

§ 5 随机变量的函数的分布

定理 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x), -\infty < x < \infty$, 又设函数 $g(x)$ 处处可导且恒有

$g'(x) > 0$, 则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)] |h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

第三章 多维随机变量

§ 1 二维随机变量

定义 设 E 是一个随机试验, 它的样本空间是 $S = \{e\}$. $X = X(e)$ 和 $Y = Y(e)$ 是定义在 S 上

的随机变量, 称 $X = X(e)$ 为随机变量, 由它们构成的一个向量 (X, Y) 叫做二维随机变量

设 (X, Y) 是二维随机变量, 对于任意实数 x, y , 二元函数 $F(x, y) = P\{(X \leq x) \cap (Y \leq y)\}$ 记成 $P\{X \leq x, Y \leq y\}$ 称为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数

如果二维随机变量 (X, Y) 全部可能取到的值是有限对或可列无限多对, 则称 (X, Y) 是离散型的随机变量。

我们称 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$ 为二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布律。

对于二维随机变量 (X, Y) 的分布函数 $F(x, y)$, 如果存在非负可积函数 $f(x, y)$,

使对于任意 x, y 有 $F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv$, 则称 (X, Y) 是连续性的随机变量, 函数 $f(x, y)$ 称为随机变量 (X, Y) 的概率密度, 或称为随机变量 X 和 Y 的**联合概率密度**。

§ 2 边缘分布

二维随机变量 (X, Y) 作为一个整体, 具有分布函数 $F(x, y)$. 而 X 和 Y 都是随机变量, 各自也有分布函数, 将他们分别记为 $F_X(x), F_Y(y)$, 依次称为二维随机变量 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的**边缘分布函数**。

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = P\{X = x_i\}, \quad i = 1, 2, \dots \quad p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = P\{Y = y_j\}, \quad j = 1, 2, \dots$$

分别称 $p_{i\cdot}, p_{\cdot j}$ 为 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的**边缘分布律**。

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \quad \text{分别称 } f_X(x),$$

$f_Y(y)$ 为 X, Y 关于 X 和关于 Y 的**边缘概率密度**。

§ 3 条件分布

定义 设 (X, Y) 是二维离散型随机变量, 对于固定的 j , 若 $P\{Y = y_j\} > 0$,

$$\text{则称 } P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad i = 1, 2, \dots \text{为在 } Y = y_j \text{ 条件下随}$$

机变量 X 的条件分布律, 同样 $P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, \quad j = 1, 2, \dots$ 为

在 $X = x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律。

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, (X, Y) 关于 Y 的边缘概

率密度为 $f_Y(y)$, 若对于固定的 y , $f_Y(y) > 0$, 则称 $\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件

概率密度, 记为 $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$

§ 4 相互独立的随机变量

定义 设 $F(x, y)$ 及 $F_X(x)$, $F_Y(y)$ 分别是二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布函数及边缘分布函数. 若对于所有 x, y 有 $P\{X = x, Y = y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}$, 即 $F\{x, y\} = F_X(x)F_Y(y)$, 则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的。

对于二维正态随机变量 (X, Y) , X 和 Y 相互独立的充要条件是参数 $\rho = 0$

§ 5 两个随机变量的函数的分布

1, $Z = X + Y$ 的分布

设 (X, Y) 是二维连续型随机变量, 它具有概率密度 $f(x, y)$. 则 $Z = X + Y$ 仍为连续性随机变量, 其概率密度为 $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y) dy$ 或 $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x) dx$

又若 X 和 Y 相互独立, 设 (X, Y) 关于 X, Y 的边缘密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$ 则

$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y) dy$ 和 $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx$ 这两个公式称为 f_X, f_Y 的卷积公式

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布

2, $Z = \frac{Y}{X}$ 的分布、 $Z = XY$ 的分布

设 (X, Y) 是二维连续型随机变量, 它具有概率密度 $f(x, y)$, 则 $Z = \frac{Y}{X}$, $Z = XY$ 仍为连续性随机变量其概率密度分别为

$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, xz) dx$ $f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x}) dx$ 又若 X 和 Y 相互独立, 设 (X, Y)

关于 X, Y 的边缘密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$ 则可化为 $f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(xz) dx$

$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y(\frac{z}{x}) dx$

3 $M = \max\{X, Y\}$ 及 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布

设 X, Y 是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为 $F_X(x), F_Y(y)$ 由于

$M = \max\{X, Y\}$ 不大于 z 等价于 X 和 Y 都不大于 z 故有 $P\{M \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\}$ 又

由于 X 和 Y 相互独立，得到 $M = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为 $F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z)$

$N = \min\{X, Y\}$ 的分布函数为 $F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$

第四章 随机变量的数字特征

§ 1. 数学期望

定义 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, k=1, 2, \dots$ 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对

收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$ ，即 $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$ ，若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛，则称积分

$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 的值为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$ ，即 $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

定理 设 Y 是随机变量 X 的函数 $Y = g(X)$ (g 是连续函数)

(i) 如果 X 是离散型随机变量，它的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, k=1, 2, \dots$ 若 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$

绝对收敛则有 $E(Y) = E(g(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$

(ii) 如果 X 是连续型随机变量，它的分概率密度为 $f(x)$ ，若 $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛则

有 $E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$

数学期望的几个重要性质

1 设 C 是常数，则有 $E(C) = C$

2 设 X 是随机变量， C 是常数，则有 $E(CX) = CE(X)$

3 设 X, Y 是两个随机变量，则有 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ ；

4 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 则有 $E(XY) = E(X)E(Y)$

§ 2 方差

定义 设 X 是一个随机变量, 若 $E\{[X - E(X)]^2\}$ 存在, 则称 $E\{[X - E(X)]^2\}$ 为 X 的方差, 记为 $D(X)$ 即 $D(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$, 在应用上还引入量 $\sqrt{D(X)}$, 记为 $\sigma(X)$, 称为标准差或均方差。

$$D(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (EX)^2$$

方差的几个重要性质

1 设 C 是常数, 则有 $D(C) = 0$,

2 设 X 是随机变量, C 是常数, 则有 $D(CX) = C^2 D(X)$, $D(X + C) = D(X)$

3 设 X, Y 是两个随机变量, 则有 $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2E\{(X - E(X))(Y - E(Y))\}$ 特别, 若 X, Y 相互独立, 则有 $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

4 $D(X) = 0$ 的充要条件是 X 以概率 1 取常数 $E(X)$, 即 $P\{X = E(X)\} = 1$

切比雪夫不等式: 设随机变量 X 具有数学期望 $E(X) = \mu$, 则对于任意正数 ε , 不等式

$$P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \text{ 成立}$$

§ 3 协方差及相关系数

定义 量 $E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$ 称为随机变量 X 与 Y 的协方差为 $Cov(X, Y)$, 即

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

而 $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 称为随机变量 X 和 Y 的相关系数

对于任意两个随机变量 X 和 Y , $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2Cov(X, Y)$

协方差具有下述性质

$$1 \operatorname{Cov}(X, Y) = \operatorname{Cov}(Y, X), \operatorname{Cov}(aX, bY) = ab\operatorname{Cov}(X, Y)$$

$$2 \operatorname{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \operatorname{Cov}(X_1, Y) + \operatorname{Cov}(X_2, Y)$$

定理 1 $|\rho_{XY}| \leq 1$

2 $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是, 存在常数 a, b 使 $P\{Y = a + bx\} = 1$

当 $\rho_{XY} = 0$ 时, 称 X 和 Y 不相关

附: 几种常用的概率分布表

| 分布 | 参数 | 分布律或概率密度 | 数学期望 | 方差 |
|-------|-----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|----------------------|
| 两点分布 | $0 < p < 1$ | $P\{X = k\} = p^k (1-p)^{1-k}, k = 0, 1,$ | p | $p(1-p)$ |
| 二项式分布 | $n \geq 1, 0 < p < 1$ | $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n,$ | np | $np(1-p)$ |
| 泊松分布 | $\lambda > 0$ | $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$ | λ | λ |
| 几何分布 | $0 < p < 1$ | $P(X = k) = (1-p)^{k-1} p, k = 1, 2, \dots$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ |
| 均匀分布 | $a < b$ | $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ |
| 指数分布 | $\theta > 0$ | $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ | θ | θ^2 |
| 正态分布 | μ $\sigma > 0$ | $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ | μ | σ^2 |

第五章 大数定律与中心极限定理

§ 1. 大数定律

弱大数定理 (辛欣大数定理) 设 X_1, X_2, \dots 是相互独立, 服从统一分布的随机变量序列, 并

具有数学期望 $E(X_k) = \mu (k=1,2,\dots)$. 作前 n 个变量的算术平均 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$, 则对于任意

$$\varepsilon > 0, \text{ 有 } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

定义 设 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ 是一个随机变量序列, a 是一个常数, 若对于任意正数 ε , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|Y_n - a| < \varepsilon\} = 1, \text{ 则称序列 } Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots \text{ 依概率收敛于 } a, \text{ 记为 } Y_n \xrightarrow{p} a$$

伯努利大数定理 设 f_A 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数, p 是事件 A 在每次试

验中发生的概率, 则对于任意正数 $\varepsilon > 0$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{f_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$ 或

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{f_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

§ 2 中心极限定理

定理一 (独立同分布的中心极限定理) 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 服从同一

分布, 且具有数学期望和方差 $E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2 (k=1,2, \dots)$, 则随机变量之和

$$\sum_{k=1}^n X_k \text{ 标准化变量, } Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - E(\sum_{k=1}^n X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n X_k)}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma},$$

定理二 (李雅普诺夫定理) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 它们具有数学期望

$$\text{和方差 } E(X_k) = \mu_k, D(X_k) = \sigma_k^2 > 0, k=1,2,\dots \text{ 记 } B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$$

定理三 (棣莫弗-拉普拉斯定理) 设随机变量 $\eta_n (n=1,2,\dots)$ 服从参数为 $n, p (0 < p < 1)$ 的

$$\text{二项分布, 则对任意 } x, \text{ 有 } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \Phi(x)$$