2014年北航随机过程理论期末考试

一、（本题25分，每小题5分）简要回答下列问题：

1. 随机过程的正交、互不相关和相互独立的定义及其相互关系。
2. 随机过程的各态历经性及实际意义。
3. 广义平稳随机过程与其均方导数过程在同一时刻正交但不相关。
4. 高斯随机过程的互不相关与相互独立等价。
5. 泊松过程不是广义平稳随机过程。

二、（本题15分）设随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 为

$$X(t) = U\cos\omega_0 t + V\sin\omega_0 t$$

$$Y(t) = U\sin\omega_0 t + V\cos\omega_0 t$$

其中 $\omega_0 > 0$，U 和 V 是两个相互独立的随机变量，且有 $E(U) = E(V) = 0$，$E(U^2) = E(V^2) = \sigma^2$。证明：

1. $X(t)$ 和 $Y(t)$ 各自是广义平稳随机过程；
2. $X(t)$ 和 $Y(t)$ 不是联合广义平稳随机过程。

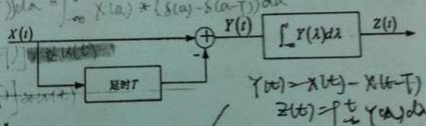
三、（本题10分）设广义平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = \begin{cases} 1 & |\tau| \le \frac{\pi}{\omega_0} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，

令

$$Y(t) = X(t)\cdot\cos(\omega_0 t + \Theta)$$

其中 $\omega_0 > 0$，Θ 为 $[0, 2\pi]$ 均匀分布的随机变量，且 $X(t)$ 与 Θ 相互独立。求随机过程 $Y(t)$ 的自相关函数和自功率谱密度。

四、（本题20分）设 $X(t)$ 为高斯白噪声过程，其功率谱密度为 $S_X(\omega) = 1/2$，通过如题图四所示的线性系统，其中 T 为延迟时间。

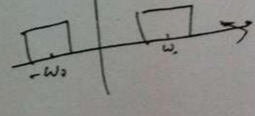


题图 四

1. 求 $X(t)$ 和 $Z(t)$ 的互相关函数 $R_{XZ}(\tau)$；
2. 求 $Z(t)$ 和 $X(t)$ 的互功率谱密度 $S_{ZX}(\omega)$；
3. 求 $Z(t)$ 的均方值 $E[Z^2(t)]$。

五、（本题20分）设雷达接收到方差为 σ_X^2 的零均值高斯白噪声信号，该信号经过带通滤波器

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega \pm \omega_0| \le \Delta\omega/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



后，变为

$$X(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \Phi(t)]$$

其中 ω_0 远远大于 $\Delta\omega$，$A(t)$ 与 $\Phi(t)$ 相互独立。

试求：

1. $X(t)$ 的希尔伯特变换 $\hat{X}(t)$；

2. 令 $X(t)=X_C(t)\cos\omega_0 t - X_S(t)\sin\omega_0 t$，请求出 $X_C(t)$ 与 $X_S(t)$ 各自的均值、方差，以及二者的联合概率密度函数 $f_{X_cX_s}(x_c,x_s)$。

$X(t) = \sim$
$\hat{X}(t) = \sim$
$\therefore X_c(t) = X(t)\cos w_0 t + \hat{X}(t)\sin w_0 t$
$X_s(t) = -X(t)\sin w_0 t + \hat{X}(t)\cos w_0 t$
$X_c(t) = A(t)\cos\theta(t)$
$\sigma_x^2 = R_x(0)$ 则 $X_c(t)$ 与 $X_s(t)$ 均值为0.
$E[X_s(t)] = E[X_c(t)]$
$\sigma_{xc}^2 = \sigma_{xs}^2 = \sigma_x^2$
$\therefore R_{cs}(0) = E[X_c(t)\,X_s(t)]$

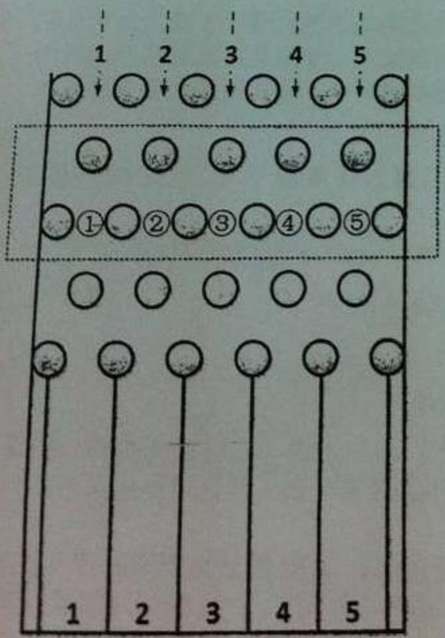
六、（本题 10 分） 如题图六所示为著名的高尔顿板模型，图中每一圆点表示一个柱体，它们彼此距离相等，上一层中每一个柱体都位于下一层两个柱体之间。从入口处丢入一个小球，小球下落过程中遇到柱体后均以 1/2 的概率向左/右滚下，直到滚入最下层的一个格子中为止。请用马尔科夫链的相关理论解决下列问题：

1. 已知：从入口1丢入小球，其经过通道①、②的概率分别为3/4、1/4；从入口2丢入小球，其经过通道①、②、③的概率分别为1/4、1/2、1/4；从入口3丢入小球，其经过通道②、③、④的概率分别为1/4、1/2、1/4；……。试求虚框中的一步转移概率矩阵为多少；

2. 当从3号入口处丢入一个小球时，其落入不同格子的概率各为多少。

① $p = $ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ 0 0 0

② $p^2 = $



题图 六

P.65 证明 对高斯 独立和不相关等价.

P.61 证明 多维高斯 线性变换为新的多维高斯.

2014 年秋季本科随机过程答案

一、简答题（25 分）

1.答：正交：两个随机过程 X(t)和 Y(t)，若对任意的t_1和t_2都有互相关函数等于零，即$R_{xy}(t_1，t_2) = 0$，则称两随机过程之间正交；

互不相关：两个随机过程 X(t)和 Y(t)，如果对任意的t_1和t_2都有互协方差函数等于零，即$C_{xy}(t_1，t_2) = 0$，则称两随机过程之间互不相关；

独立：如果对任意的$t_1，t_2，\cdots，t_n$和$t_1'，t_2'，\cdots，t_m'$，有

$$f_{xy}(x_1，x_2，\cdots，x_n；t_1，t_2，\cdots，t_n；y_1，y_2，\cdots，y_m；t_1'，t_2'，\cdots，t_m')$$

$$= f_x(x_1，x_2，\cdots，x_n；t_1，t_2，\cdots，t_n)f_Y(y_1，y_2，\cdots，y_m；t_1'，t_2'，\cdots，t_m')$$

则称两个随机过程之间是相互独立的。

相互关系：两个随机过程独立，则一定互不相关，互不相关则不一定相互独立；正交与不相关，独立没有必然联系。

（答出正交、互不相关、独立定义各一分，相互关系两分）

2.答：随机过程的各个样本都同样经历了随机过程的各种可能状态，即从随机过程的任何一个样本函数就可以得出它的全部统计信息，这就叫做随机过程的各态历经性。

独立：如果对任意的$t_1, t_2, \cdots, t_n$和$t_1', t_2', \cdots, t_m'$，有

$$f_{XY}(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n; y_1, y_2, \cdots, y_m; t_1', t_2', \cdots, t_m')$$

$$= f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) f_Y(y_1, y_2, \cdots, y_m; t_1', t_2', \cdots, t_m')$$

则称两个随机过程之间是相互独立的。
相互关系：两个随机过程独立，则一定互不相关，互不相关则不一定相互独立；正交与不相关，独立没有必然联系。
（答出正交、互不相关、独立定义各一分，相互关系两分）

2.答：随机过程的各个样本都同样经历了随机过程的各种可能状态，即从随机过程的任何一个样本函数就可以得出它的全部统计信息，这就叫做随机过程的各态历经性。
实际意义：若一个随机过程具有各态历经性，则可以用一个样本在时间上的平均来求出其均值和相关函数，大大简化了工作量。
（答出各态历经性内容 3 分，实际意义 2 分）

$\frac{d\,E[x(t)x(t-\tau)]}{dt}$ $\quad Y(t)=\frac{dX(t)}{dt}$

$\frac{dR_X(\tau)}{d\tau}$

3.答：X(t)为广义平稳随机过程，$Y(t) = \frac{dR(\tau)}{d\tau}$为其均方导数，则有$R_{XY}(\tau) = -\frac{dR(\tau)}{d\tau}$，$R_{YX}(\tau) = \frac{dR(\tau)}{d\tau}$，$R_{XY}(0) = R_{YX}(0)$

$R_{XY}(0) = E[x(t)y(t-\tau)]$

$R_{YX}(0) = E[y(t)x(t-\tau)]$

$$\therefore -\frac{dR_x(0)}{d\tau} = \frac{dR_x(0)}{d\tau}$$

$R_{XY}(\tau)=E[X(t+\tau)\frac{dR(t)}{dt}]$

$$\therefore \frac{dR_x(0)}{d\tau} = 0,\ R_{XY}(0) = R_{YX}(0) = 0$$

$C(t_1, t_1)=0$

即同一时刻正交且互不相关。
（写出均方导数公式 3 分，正交互不相关 2 分）

4.答：若高斯随机过程 X(t)，Y(t)相互独立，则一定互不相关；
若高斯随机过程 X(t)，Y(t)互不相关，则相关系数 r=0，X(t)，Y(t)的联合概率密度为 X(t)，Y(t)概率密度的乘积，X(t)，Y(t)相互独立；
（独立则互不相关 2 分，互不相关则独立 3 分）

5.答：泊松过程 N(t)的均值$E[N(t)] = \lambda t$，自相关函数$R_N(t_1, t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min(t_1, t_2)$,均值，自相关函数均和 t 相关，所以泊松随机过程不是平稳随机过程。
（答出泊松过程均值或自相关韩式公式 3 分，两者均跟 t 相关 2 分）

二、（15 分）

解：1.$E[X(t)] = E[U\cos\omega_0 t + V\sin\omega_0 t] = E[U]\cos\omega_0 t + E[V]\sin\omega_0 t = 0$

$$R_X(t_1, t_2) = E(X(t_1)X(t_2))$$
$$= E[(U\cos\omega_0 t_1 + V\sin\omega_0 t_1)(U\cos\omega_0 t_2 + V\sin\omega_0 t_2)]$$
$$= E[U^2\cos\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2$$
$$+ UV\sin\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2$$
$$+ UV\cos\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2 + V^2\cos\omega_0 t_2\sin\omega_0 t_1] = \sigma^2\cos\omega_0(t_1 - t_2)$$

均值为 0，自相关函数与 t 无关，所以 X(t)为平稳随机过程。
同理，Y(t)也为平稳随机过程。
（写出均值为零 5 分，写出自相关函数与 t 无关 5 分）

2. $E(X(t_1)Y(t_2)) = E[(U\cos\omega_0 t_1 + V\sin\omega_0 t_1)(U\sin\omega_0 t_2 + V\cos\omega_0 t_2)] =$
$E[U^2\cos\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2 +$
$UV\sin\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2 +$
$UV\cos\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2 + V^2\cos\omega_0 t_2\sin\omega_0 t_1] = \sigma^2\sin\omega_0(t_1 + t_2)$
与 t 相关，

$$\therefore X(t), Y(t)\text{不是广义联合平稳的。}$$

（答出$E(X(t_1)Y(t_2))$与 t 相关 5 分

三、（10 分）

$$R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)Y(t_2)]=E[X(t_1)\cos(w_0t_1+\Theta)X(t_2)\cos(w_0t_2+\Theta)]$$

$$=E[X(t_1)X(t_2)]E[\cos(w_0t_1+\Theta)\cos(w_0t_2+\Theta)]$$

$$=R_X(t_1-t_2)*\frac{1}{2}E[\cos(w_0t_1+w_0t_2+2\Theta)+\cos w_0(t_1-t_2)]$$

$$=\frac{1}{2}R_X(\tau)\cos(w_0\tau).$$

$$\because E[\cos(w_0t_1+w_0t_2+2\Theta)]=\cos(w_0t_1+w_0t_2)E[\cos(2\Theta)]-\sin(w_0t_1+w_0t_2)E[\sin(2\Theta)]$$

$$E[\cos(2\Theta)]=\int_0^{2\pi}\cos(2\Theta)\frac{1}{2\pi}d\Theta=0;$$

$$E[\sin(2\Theta)]=\int_0^{2\pi}\sin(2\Theta)\frac{1}{2\pi}d\Theta=0;$$

$$\therefore R_Y(\tau)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos(w_0\tau) & |\tau|\le\frac{\pi}{w_0}\\ 0 & \text{others}\end{cases}$$

$$S_Y(w)=\int_{-\frac{\pi}{w_0}}^{+\frac{\pi}{w_0}}\frac{1}{2}\cos(w_0\tau)e^{-jw\tau}d\tau=\frac{\pi}{2w_0}[sa(\frac{w-w_0}{w_0}\pi)+sa(\frac{w+w_0}{w_0}\pi)]=\frac{w\sin(\frac{w}{w_0}\pi)}{w_0^2-w^2}$$

评分标准：第一问五分，第二问五分；第一问写出自相关函数的定义得两分，写出计算过程两分，结果一分。第二问写出自谱密度是自相关函数的傅里叶变换得三分，结果两分。

四、（20 分）

说明：*为卷积符号，$\mathcal{F}$为傅里叶变换符号

解法一：

第 1 问 （8 分）：

由图示系统可得

$$Z(t)=\int_{-\infty}^{t}[X(a)-X(a-T)]da$$

86406

$$=\int_{-\infty}^{t}X(a)*[\delta(a)-\delta(a-T)]da$$

$$=X(t)*[\delta(t)-\delta(t-T)]*u(t)$$

由此可得系统冲激响应为：

$$h(t)=[\delta(t)-\delta(t-T)]*u(t)=u(t)-u(t-T)$$ （4 分）

又因为：

$$R_X(\tau)=\mathcal{F}^{-1}[S_X(\omega)]=\frac{1}{2}\delta(\tau)$$ (1 分)

所以

$$R_{XZ}(\tau)=R_X(\tau)*h(-\tau)=\frac{1}{2}\delta(\tau)*[u(-\tau)-u(-\tau-T)]$$

sinT+(

$$=\frac{1}{2}[u(-\tau)-u(-\tau-T)]$$ cosu （3 分）

864064

$$Z(t)=\int_{-\infty}^{t}[X(a)-X(a-T)]da$$

$$=\int_{-\infty}^{t}X(a)*[\delta(a)-\delta(a-T)]da$$

$$=X(t)*[\delta(t)-\delta(t-T)]*u(t)$$

由此可得系统冲激响应为：

$$h(t)=[\delta(t)-\delta(t-T)]*u(t)=u(t)-u(t-T)\quad(4分)$$

又因为：

$$R_X(\tau)=\mathcal{F}^{-1}[S_X(\omega)]=\frac{1}{2}\delta(\tau)\ (1分)$$

所以

$$R_{XZ}(\tau)=R_X(\tau)*h(-\tau)=\frac{1}{2}\delta(\tau)*[u(-\tau)-u(-\tau-T)]$$

$$=\frac{1}{2}[u(-\tau)-u(-\tau-T)]\quad(3分)$$

$\sin T+j\cos T-j$

$\cancel{\sin 0-j\cos 0}$

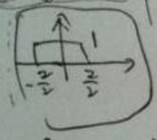
第 2 问 （7 分）：

$\sin\omega t+j\cos\omega t\Big|_0^T$

$(\cos\omega t-j\sin\omega t)\Big|_0^T$

$$H(j\omega)=\mathcal{F}[h(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}[u(t)-u(t-T)]e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{T}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega/2}e^{-j\frac{\omega T}{2}}=T\cdot Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right)e^{-j\frac{\omega T}{2}}\quad(3分)$$



所以：

$$S_{ZX}(\omega)=S_X(\omega)\cdot H(j\omega)=\frac{1}{2}H(j\omega)\quad(2分)$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega}e^{-j\frac{\omega T}{2}}=\frac{1}{2}T\cdot Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right)e^{-j\frac{\omega T}{2}}=\frac{1-e^{-j\omega T}}{2j\omega}\quad(2分)$$

$T\,Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right)e^{-j\omega\frac{T}{2}}$

第 3 问 （5 分）：

$$S_Z(\omega)=S_X(\omega)\cdot|H(j\omega)|^2=\frac{1}{2}\left(T\cdot Sa\frac{\omega T}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}=\frac{1-\mathrm{con}\omega T}{\omega^2}\quad(2分)$$

Sa 的傅里叶变换