线性代数（3 学时）期终试卷 A 卷

2006 年 1 月 9 日

专业________________学号________________姓名________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、（24 分）填空题：

1．已知 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 是三维列向量，设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2)$，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则

$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|+|2\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{B}|=$__________。

2．设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实对称阵，则下列命题不正确的是__________。

(A) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是实对称阵　　(B) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 是实对称阵

(C) $\boldsymbol{AB}$ 是实对称阵　　(D) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 是实对称阵

3．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，当 $k=$__________时，$k\boldsymbol{A}$ 是 $2\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}^{-1}$ 的逆矩阵（这里 $2\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆）。

4．$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & -2 \\ 1 & 1 & x & 1 \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=2$，则 $x=$__________。

5．n 维向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\ (n>3)$ 线性无关的充要条件是__________。

(A) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 中任意两个向量线性无关　　(B) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 全是非零向量

(C) 存在 n 维向量 $\boldsymbol{b}$，使得 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}$ 线性相关

(D) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 中任何一个向量都不能由其余两个向量线性表示

6．设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，则__________。

(A) $m>n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$　　(B) $m>n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$

(C) $n>m$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$　　(D) $n>m$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$

7．3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0、4、9，$\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵，则 $|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=$__________。

8．矩阵$A=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&4&\lambda\\0&\lambda&1\end{pmatrix}$为正定矩阵，则$\lambda$的取值范围是__________。

二、（6 分）求方程$\begin{vmatrix}1&0&0&x\\0&2&x&0\\0&x&3&0\\x&0&0&4\end{vmatrix}=0$的根。

三、（10 分）求一个 2 次多项式$f(x)$，满足$f(1)=1$，$f(-1)=9$，$f(2)=3$。

四、（10 分）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=k\boldsymbol{\alpha}_1+l\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\beta}_2=k\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3\\ \cdots\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_s=k\boldsymbol{\alpha}_s+l\boldsymbol{\alpha}_1\end{cases}$，$k,l$ 为实常数，问 k,l 满足什么关系时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系。

五、（12 分）已知 $\begin{pmatrix}1&3\\2&4\\1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&2\\a&1\\0&b\end{pmatrix}$，求 a,b，使得 $\boldsymbol{X}$ 存在，并求矩阵 $\boldsymbol{X}$。

六、（16 分）求一个正交变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$，将二次曲面方程：

$$x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 4$$

化为标准形方程，并问该二次曲面是什么类型的曲面？

八、（12 分）判别下列命题是否正确，正确的需要证明，错误的需要给出一个反例。

1. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。

2. $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，均有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$，则 $\boldsymbol{A}=\mathbf{O}$。

七、（10 分）设 $\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$，$\mathcal{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$，

1．证明：$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ 是向量空间 $\boldsymbol{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \boldsymbol{R} \right\}$ 的两个线性变换；

2．若线性变换的加法 $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ 定义为 $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\boldsymbol{a} = \mathcal{A}\boldsymbol{a} + \mathcal{B}\boldsymbol{a}$，乘法 $\mathcal{A}\mathcal{B}$ 定义为 $(\mathcal{A}\mathcal{B})\boldsymbol{a} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\boldsymbol{a})$，

$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^2$，求 $\mathcal{A}+\mathcal{B}$，$\mathcal{A}\mathcal{B}$ 的矩阵表达式。