# 数 学 作 业 纸 （科目： ）

班级： 姓名： 编号： 第 页

14-15.

一. 1. × 2. × 3. √ 4. × 5. √

二. 1. 反证，若不是广义平稳过程，则 $m_{XT}=E[X(t)]$ 与 $R_{XT}(\tau)=R_X(t_1,t_2)$ 必不同时满足，与各态历经矛盾.

2. $\Delta f_e=\frac{1}{2\pi}\frac{\int_0^\infty F_Y(w)dw}{F_Y(w_0)}=\frac{\int_0^\infty F_Y(f)df}{F_Y(f_0)}=\frac{\int_0^\infty |H(jf)|^2df}{|H(jf_0)|^2}$

相关时间 $t_0$ 与 $\Delta f_e$ 成反比.

3. 高斯过程是二阶矩过程，其特性完全由均值和协方差决定.

所以其狭义平稳与广义平稳等价.

4. $P\{X_{n_1}=i_1, X_{n_2}=i_2, \cdots, X_{n_k}=i_k\}=\sum_{j\in S}P\{X_0=j, X_{n_1}=i_1, \cdots, X_{n_k}=i_k\}$

$=\sum_{j\in S}P\{X_{n_k}=i_k \mid X_{n_{k-1}}=i_{k-1}\}P\{X_0=j, X_{n_1}=i_1, \cdots, X_{n_{k-1}}=i_{k-1}\}$

$=\sum_{j\in S}P_{i_{k-1}i_k}^{(n_k-n_{k-1})}P\{X_0=j, X_{n_1}=i_1, \cdots, X_{n_{k-1}}=i_{k-1}\}$

$=\sum_{j\in S}P_{i_{k-1}i_k}^{(n_k-n_{k-1})}\cdot P_{i_{k-2}i_{k-1}}^{(n_{k-1}-n_{k-2})}P\{X_0=j, X_{n_1}=i_1, \cdots, X_{n_{k-2}}=i_{k-2}\}$

$\cdots$

$=\sum_{j\in S}P_{i_{k-1}i_k}^{(n_k-n_{k-1})}P_{i_{k-2}i_{k-1}}^{(n_{k-1}-n_{k-2})}\cdots P_{i_1i_2}^{(n_2-n_1)}P_{ji_1}^{(n_1)}P\{X_0=j\}$

显然，上式中各转移概率可由一步转移概率结合切-科方程求得.

故联合分布可由其初始分布和一步转移概率完全决定.

三. 1. $E[Z(t)]=E[X]\sin t+E[Y]\cos t=0$

$R_Z(t_1,t_2)=E[(X\sin t_1+Y\cos t_1)(X\sin t_2+Y\cos t_2)]=\cos(t_1-t_2)$

2. $\because E[X^2]=E[Y^2]=\frac{1}{2}$

$\therefore E[Z^2(t)]=\frac{1}{2}(\sin^2 t+\cos^2 t)$，与时间 $t$ 有关，故不是狭义平稳.

$\because E[Z(t)]=0$，$R_Z(t_1,t_2)=\cos(t_1-t_2)=\cos(\tau)$，且 $R_Z(0)=1$，$\therefore Z(t)$ 是广义平稳.

# 数 学 作 业 纸

（科目：　　）

班级：　　姓名：　　编号：　　第　　页

3. $\because m_{ZT}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}Z(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(X\sin t+Y\cos t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{Y\sin T}{T}=0=E[Z(t)]$

$\therefore$ $Z(t)$具有均值各态历经性.

四. 1. $R_X(\tau)=\mathcal{F}^{-1}[S_X(\omega)]=\frac{N_0}{\pi}\frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}\tau}{\tau}\cos\omega_0\tau$.

2. $\hat{X}(t)=X_C(t)\sin\omega_0 t+X_S(t)\cos\omega_0 t$.

3. $\therefore X_C(t)=\hat{X}(t)\sin\omega_0 t+X(t)\cos\omega_0 t$.

$\therefore R_{XC}(\tau)=R_X(\tau)\cos\omega_0\tau+\hat{R}_X(\tau)\sin\omega_0\tau=\frac{N_0}{\pi}\frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}\tau}{\tau}$.

又$\because R_{XS}(\tau)=R_{XC}(\tau)=\frac{N_0}{\pi}\frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}\tau}{\tau}$.

$\therefore S_{XS}(\omega)=\mathcal{F}[R_{XS}(\tau)]=N_0[U(\omega+\frac{\Delta\omega}{2})-U(\omega-\frac{\Delta\omega}{2})]$

五. 1. $\because Z(t)=\int_{-\infty}^{t}[X(s)-X(s-T)]ds$

$\therefore h(t)=U(t)-U(t-T)$.

$\because m_X(t)=0$. $\therefore m_Z(t)=0$.

又$\because R_X(\tau)=\delta(\tau)$,

$\therefore R_Z(\tau)=R_X(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)=[U(\tau)-U(\tau-T)]*[U(-\tau)-U(-\tau-T)]$

$$=\begin{cases}T-|\tau|, & -T\le\tau\le T\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

2. $\because Z(t)=Y(t)*U(t)$. 令 $h_2(t)=U(t)$. $\mathcal{F}[h_2(t)]=H_2(j\omega)$

$Y(t)=X(t)*[\delta(t)-\delta(t-T)]$. 令 $h_1(t)=\delta(t)-\delta(t-T)$, $\mathcal{F}[h_1(t)]=H_1(j\omega)$.

$\therefore S_Y(\omega)=S_X(\omega)\cdot|H_1(j\omega)|^2=2(1-\cos\omega T)$.

$\therefore S_{YZ}(\omega)=S_Y(\omega)\cdot H_2(-j\omega)=S_Y(\omega)\cdot[\pi\delta(\omega)-\frac{1}{j\omega}]=\frac{2(\cos\omega T-1)}{j\omega}$

3. $\because m_Z(t)=0$, $\sigma_Z^2(t)=R_Z(0)=T$, $\therefore f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\exp\{-\frac{z^2}{2T}\}$.

# 数 学 作 业 纸 （科目： ）

班级： 姓名： 编号： 第 页

十一. 1. $S_{Y_1Y_2}(\omega) = S_X(\omega)\cdot H_1(j\omega)H_2^*(j\omega)$.

2. ∵ $X(t)$ 是单位带高白噪声.

∴ $m_X(t)=0$.

∴ $C_{Y_1Y_2}(\tau)=R_{Y_1Y_2}(\tau)=\delta(\tau)*h_1(\tau)*h_2(-\tau)=h_1(\tau)*h_2(-\tau)$

$C_{Y_1}(\tau)=R_{Y_1}(\tau)=\delta(\tau)*h_1(\tau)*h_1(-\tau)=h_1(\tau)*h_1(-\tau)$

$C_{Y_2}(\tau)=R_{Y_2}(\tau)=\delta(\tau)*h_2(\tau)*h_2(-\tau)=h_2(\tau)*h_2(-\tau)$.

∴ $r=\dfrac{C_{Y_1Y_2}(\tau)}{\sqrt{C_{Y_1}(0)}\sqrt{C_{Y_2}(0)}}=\dfrac{h_1(\tau)*h_2(-\tau)}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}h_1^2(t)dt\int_{-\infty}^{+\infty}h_2^2(t)dt}}=0.5$.

十. 1. $E[N(t)]=\lambda t$.

$R_N(t_1,t_2)=\lambda^2 t_1t_2+\lambda\min\{t_1,t_2\}$.

2. 不是，∵ $E[N(t)]=\lambda t$ 与时间有关.

3. ∵ $\dfrac{\partial^2 R_N(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}=\dfrac{\partial[\lambda^2t_1+\lambda U(t_1-t_2)]}{\partial t_1}=\lambda^2+\lambda\delta(t_1-t_2)$.

∴ $\left.\dfrac{\partial^2 R_N(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}\right|_{t_1=t_2=t}$ 不存在，故 $N(t)$ 不均方可导.