1. 特勒根定理1

任何时刻，对于一个具有n个结点和b条支路的集总电路，各支路电流和电压取关联参考方向，并令$(i_1, i_2, \ldots, i_b)$、$(u_1, u_2, \ldots, u_b)$分别为b条支路的电流和电压，则对任何时间t，满足：

$$\sum_{k=1}^{b} u_k i_k = 0$$

功率守恒

表明任何一个电路的全部支路吸收的功率之和恒等于零。

定理**证明**：

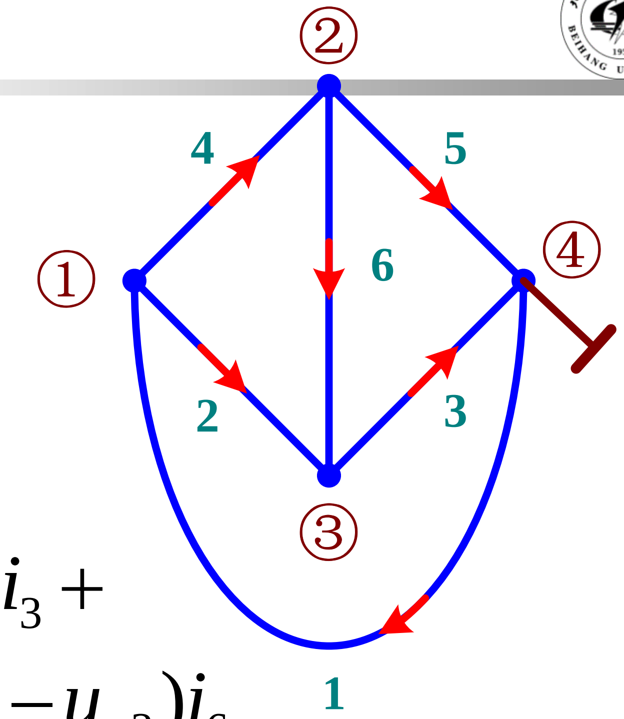
$$-i_1+i_2+i_4=0$$

不严格

KCL:

$$-i_4+i_5+i_6=0$$

$$-i_2+i_3-i_6=0$$



$$\sum_{k=1}^{6}u_k i_k=u_1 i_1+u_2 i_2+\cdots+u_6 i_6$$

$$=-u_{n1}i_1+(u_{n1}-u_{n3})i_2+u_{n3}i_3+(u_{n1}-u_{n2})i_4+u_{n2}i_5+(u_{n2}-u_{n3})i_6$$

$$=u_{n1}(-i_1+i_2+i_4)+u_{n2}(-i_4+i_5+i_6)+u_{n3}(-i_2+i_3-i_6)=0$$

支路电压用结点电压表示

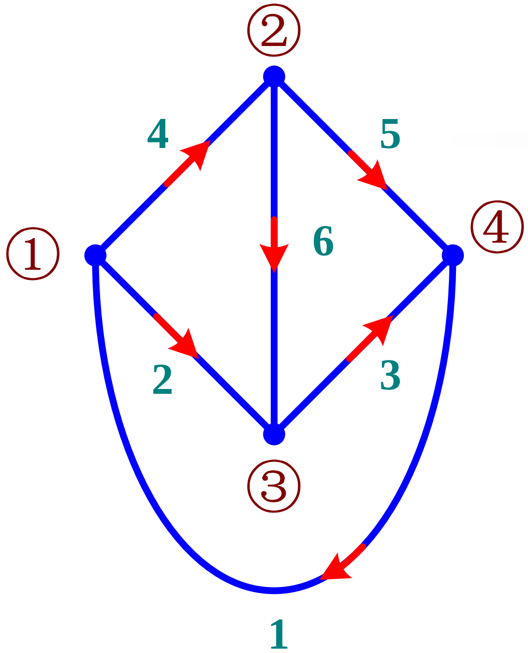
2. 特勒根定理2

任何时刻，对于两个具有n个结点和b条支路的集总电路，当它们具有相同的图，但由内容不同的支路构成。在支路电流和电压取关联参考方向下，并分别用(i_1, i_2, …, i_b)、(u_1, u_2, …, u_b)和$(\hat{i}_1, \hat{i}_2, \cdots, \hat{i}_b)$、$(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \cdots, \hat{u}_b)$ 表示两电路中b条支路的电流和电压，则在任何时间t，满足：

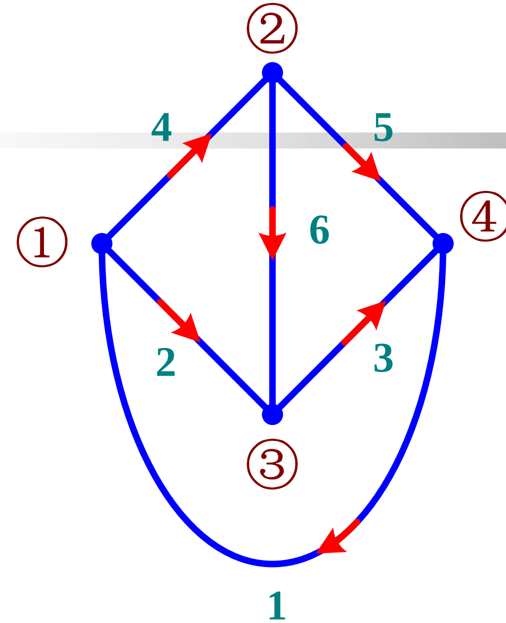
$$\sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = 0$$

拟功率定理



$$(u_k, i_k)$$



$$(\hat{u}_k, \hat{i}_k)$$

$$\sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = 0$$

拟功率定理

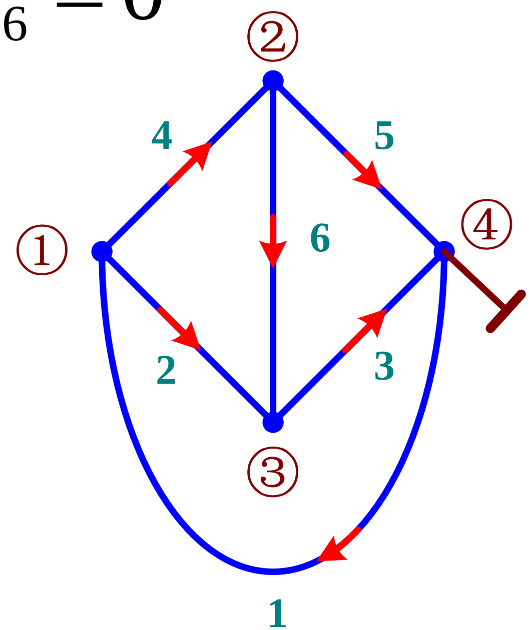
定理证明（不严格）：

$$-\hat{i}_1+\hat{i}_2+\hat{i}_4=0$$

$$-\hat{i}_4+\hat{i}_5+\hat{i}_6=0$$

$$-\hat{i}_2+\hat{i}_3-\hat{i}_6=0$$

对电路2应用KCL：



$$\sum_{k=1}^{6}u_k\hat{i}_k=u_1\hat{i}_1+u_2\hat{i}_2+\cdots+u_6\hat{i}_6$$

$$=-u_{n1}\hat{i}_1+(u_{n1}-u_{n3})\hat{i}_2+u_{n3}\hat{i}_3+(u_{n1}-u_{n2})\hat{i}_4+u_{n2}\hat{i}_5+(u_{n2}-u_{n3})\hat{i}_6$$

$$=u_{n1}(-\hat{i}_1+\hat{i}_2+\hat{i}_4)+u_{n2}(-\hat{i}_4+\hat{i}_5+\hat{i}_6)+u_{n3}(-\hat{i}_2+\hat{i}_3-\hat{i}_6)=0$$

$(\hat{u}_k,\hat{i}_k)$ (u_k,i_k)

3. 应用特勒根定理需注意：

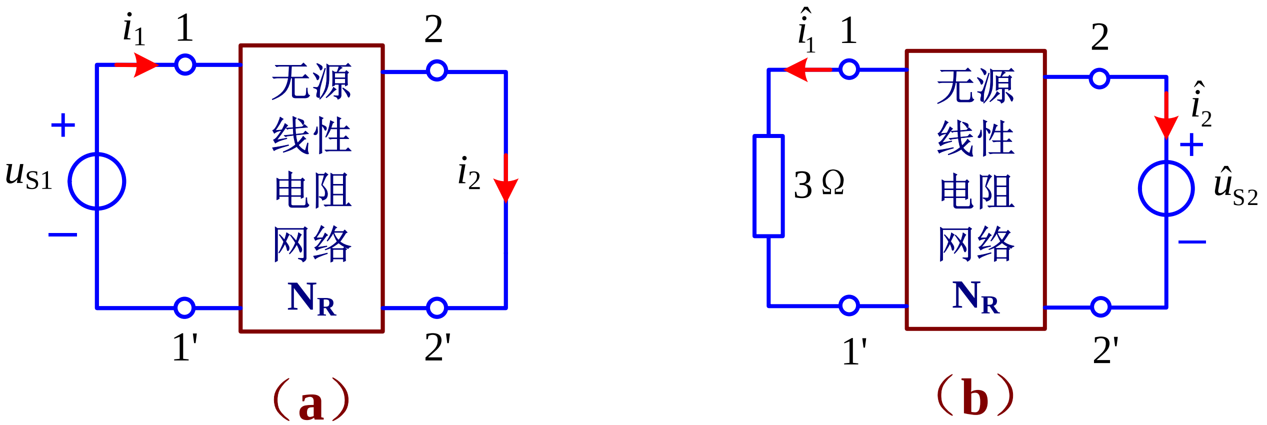
（1）电路是集总参数电路;

（2）电路中的支路电压和支路电流必须满足关联参考方向；

（否则公式中加负号）

（3）定理的正确性与元件的特征无关。

【例】$u_{S1}=20\,\mathrm{V}, i_1=10\,\mathrm{A}, i_2=2\,\mathrm{A}, \hat{i}_1=4\,\mathrm{A}, \hat{u}_{S2}=?$

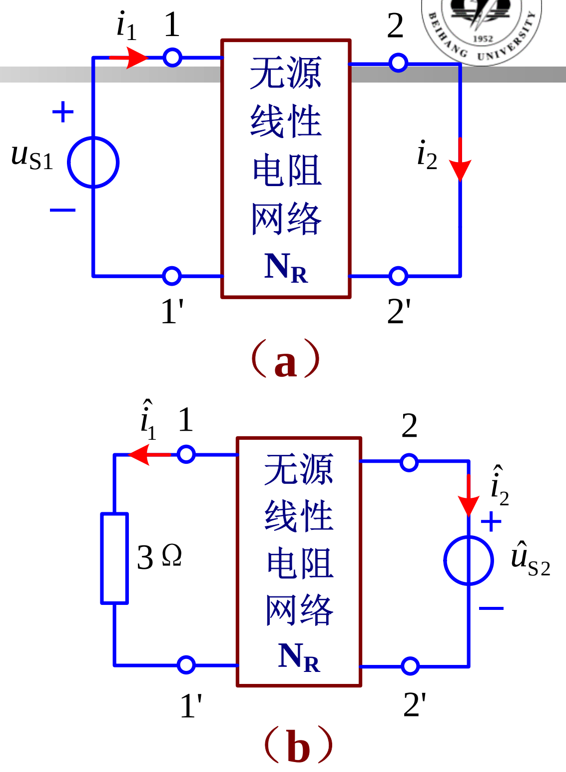


由特勒根定理2可知:

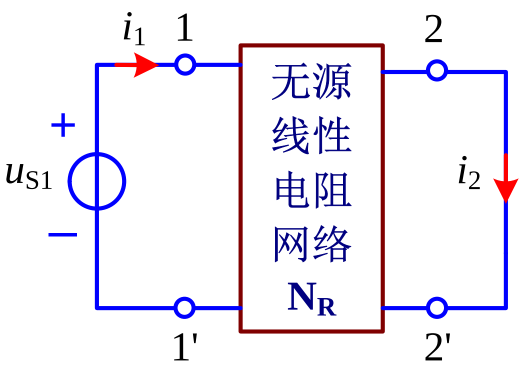
$$u_{11'}\hat{i}_{11'}+u_{22'}\hat{i}_{22'}+\sum_{k=3}^{b}R_k i_k\hat{i}_k=0$$

$$\hat{u}_{11'}i_{11'}+\hat{u}_{22'}i_{22'}+\sum_{k=3}^{b}R_k\hat{i}_k i_k=0$$

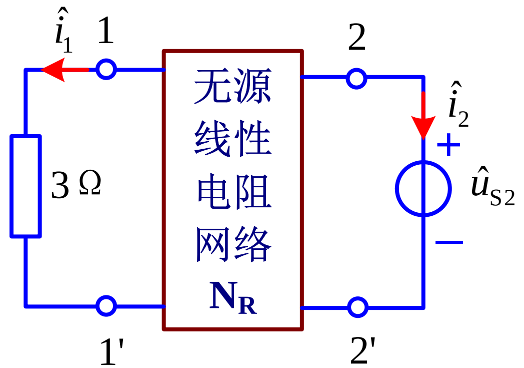
$$u_{11'}\hat{i}_{11'}+u_{22'}\hat{i}_{22'}=\hat{u}_{11'}i_{11'}+\hat{u}_{22'}i_{22'}$$



【例】 $u_{S1}=20\,\mathrm{V}, i_1=10\,\mathrm{A}, i_2=2\,\mathrm{A}, \hat{i}_1=4\,\mathrm{A}, \hat{u}_{S2}=?$



（a）



（b）

$$u_{11'}=u_{s1}=20\mathrm{V} \qquad \hat{u}_{11'}=3\times\hat{i}_1=12\mathrm{V}$$

$$i_{11'}=-i_1=-10\mathrm{A} \qquad \hat{i}_{11'}=4\mathrm{A}$$

$$u_{22'}=0\mathrm{V} \qquad \hat{u}_{22'}=\hat{u}_{s2}$$

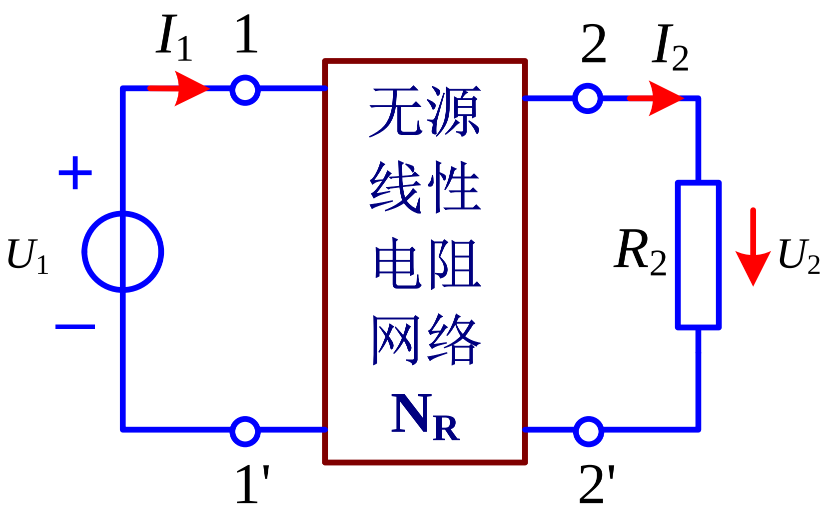
$$i_{22'}=i_2=2\mathrm{A} \qquad \hat{i}_{22'}=\hat{i}_2$$

$$u_{11'}\hat{i}_{11'}+u_{22'}\hat{i}_{22'}=\hat{u}_{11'}i_{11'}+\hat{u}_{22'}i_{22'}$$

$$20\times4+0\times\hat{i}_2=12\times(-10)+\hat{u}_{s2}\times2 \qquad \hat{u}_{S2}=100\,\mathrm{V}$$

【例】

纯电阻网络N_R，当$R_2=4\Omega$，$U_1=10\,V$时，$I_1=2\,A$，$I_2=1A$。现将$R_2=1\Omega$，$U_1=24\,V$，测得$I_1=6\,A$，求$I_2=?$



$U_{11'}=U_1=10V$　　$\hat{U}_{11'}=U_1=24V$

$I_{11'}=-I_1=-2A$　　$\hat{I}_{11'}=-I_1=-6A$

$U_{22'}=R_2I_2=4V$　　$\hat{U}_{22'}=R_2I_2=I_2$

$I_{22'}=I_2=1A$　　$\hat{I}_{22'}=I_2$

$$U_{11'}\hat{I}_{11'}+U_{22'}\hat{I}_{22'}=\hat{U}_{11'}I_{11'}+\hat{U}_{22'}I_{22'}$$

$$10\times(-6)+4I_2=24\times(-2)+I_2 \qquad I_2=4A$$

4.6 互易定理

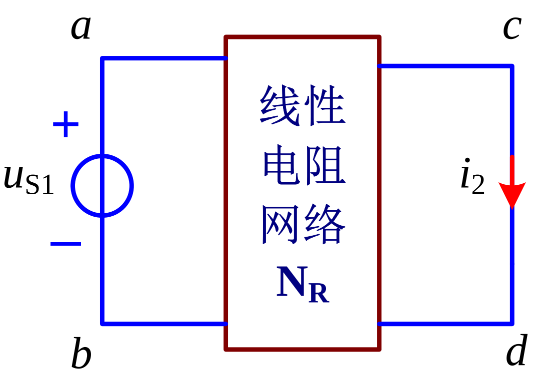
互易定理仅适用于一个仅含线性电阻，且只有一个激励的电路，在保持电路将独立电源置零后电路是同一网络的条件下，响应和激励的比值保持不变。

一个具有互易性的网络在输入端（激励）与输出端（响应）互换位置后，同一激励所产生的响应并不改变。

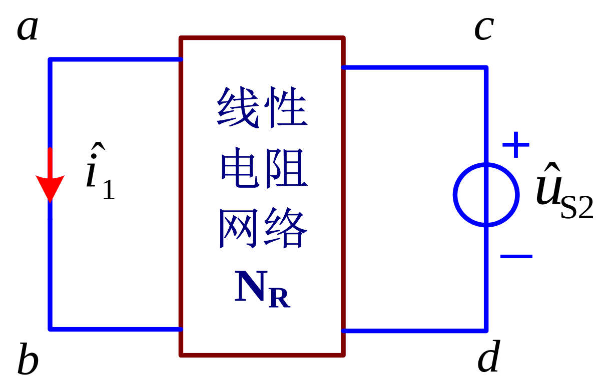
具有互易性的网络叫互易网络，互易定理是对电路的这种性质所进行的概括，它广泛地应用于网络的灵敏度分析和测量技术等方面。

1. 互易定理的第一种形式

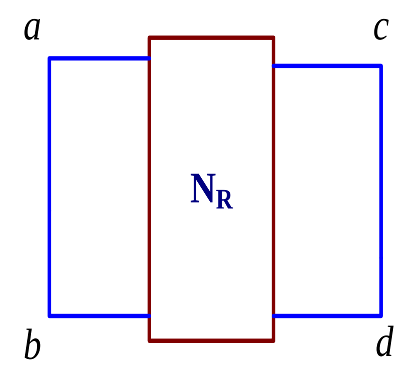
激励 ⟷ **电压源**　　**响应** ⟷ **电流(短路)**



（a）



（b）



（c）

则两个支路中电压电流有如下关系：

$$\frac{i_2}{u_{S1}} = \frac{\hat{i}_1}{\hat{u}_{S2}} \quad 或 \quad u_{S1}\hat{i}_1 = \hat{u}_{S2}\, i_2$$

$$当 \quad u_{S1} = \hat{u}_{S2} \ 时，\ \hat{i}_1 = i_2$$

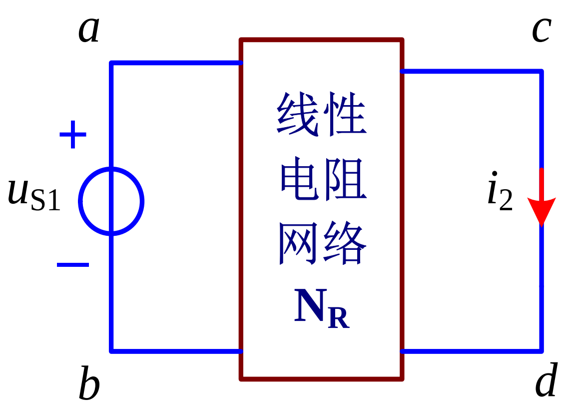
将图(a)与图(b)中支路1，2的条件代入，即:

$$u_1 = u_{S1},\ u_2 = 0,\quad \hat{u}_1 = 0,\ \hat{u}_2 = u_{S2}$$

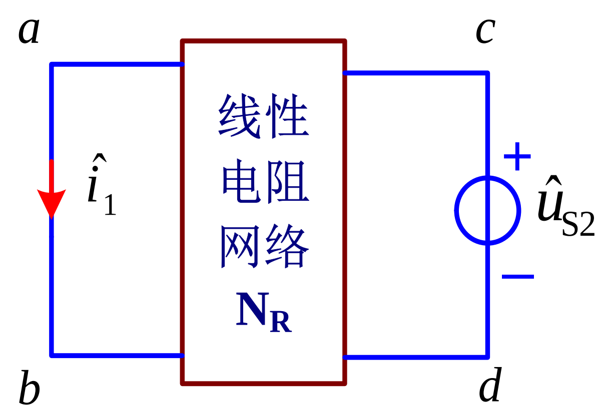
$$u_{S1}\hat{i}_1 + 0\times\hat{i}_2 = 0\times i_1 + \hat{u}_{S2}\, i_2$$

即：$$\frac{i_2}{u_{S1}} = \frac{\hat{i}_1}{\hat{u}_{S2}} \quad \text{或} \quad u_{S1}\hat{i}_1 = \hat{u}_{S2}\, i_2$$

证毕！



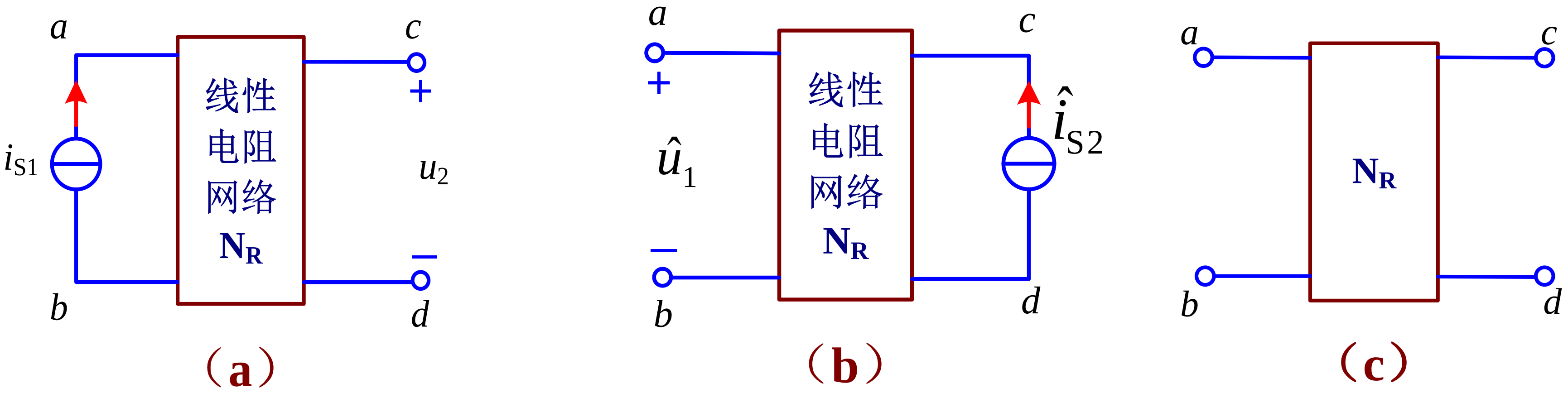
（a）



（b）

2. 互易定理的第二种形式

激励 ⟷ 电流源　　响应 ⟷ 电压(开路)



则两个支路中电压电流有如下关系：

$$\frac{u_2}{i_{S1}} = \frac{\hat{u}_1}{\hat{i}_{S2}} \quad 或 \quad \hat{u}_1 i_{S1} = u_2 \hat{i}_{S2}$$

$$当\ i_{S1} = \hat{i}_{S2}\ 时，u_2 = \hat{u}_1$$

证明:　　由特勒根定理:

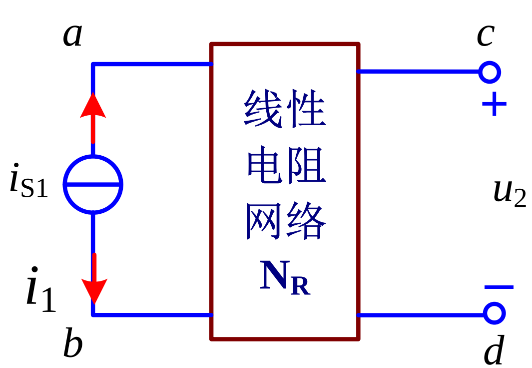
$$u_1\hat{i}_1+u_2\hat{i}_2=\hat{u}_1 i_1+\hat{u}_2 i_2$$

$$i_1=-i_{S1},\ i_2=0,\quad \hat{i}_1=0,\ \hat{i}_2=-i_{S2}$$

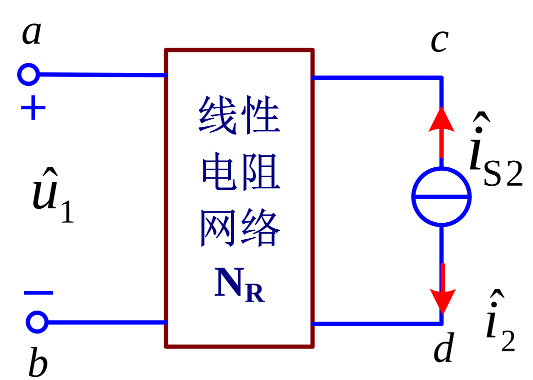
$$u_1\times 0-u_2 i_{S2}=-\hat{u}_1 i_{S1}+\hat{u}_2\times 0$$

$$u_2\hat{i}_{S2}=\hat{u}_1 i_{S1}$$

$$\frac{u_2}{i_{S1}}=\frac{\hat{u}_1}{\hat{i}_{S2}} \quad 或 \quad \hat{u}_1 i_{S1}=u_2\hat{i}_{S2}$$



（a）



（b）

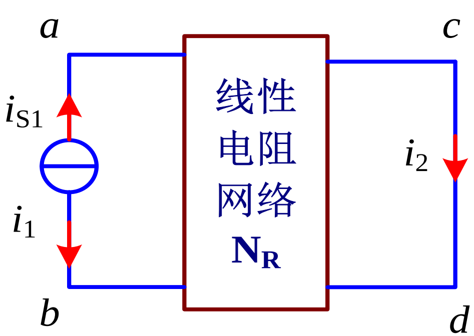
3. 互易定理的第三种形式

激励 —— 图a —— 电流源

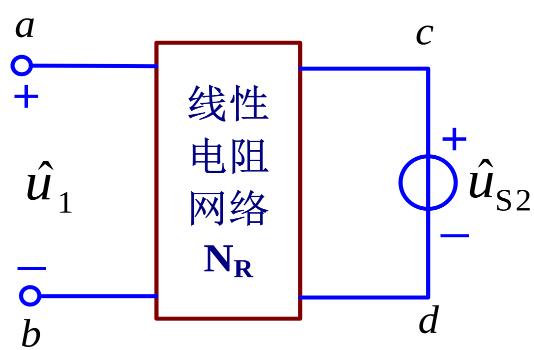
激励 —— 图b —— 电压源

响应 —— 图a —— 电流

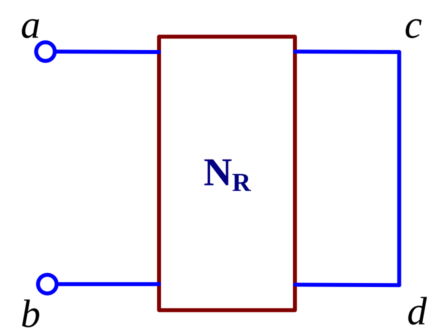
响应 —— 图b —— 电压



（a）



（b）



（c）

则两个支路中电压电流在数值上有如下关系：

$$\frac{i_2}{i_{S1}} = \frac{\hat{u}_1}{\hat{u}_{S2}} \quad 或 \quad \hat{u}_1 i_{S1} = \hat{u}_{S2} i_2$$

$$当 \ i_{S1} = \hat{u}_{S2} \ 时，i_2 = \hat{u}_1$$

证明:

由特勒根定理:

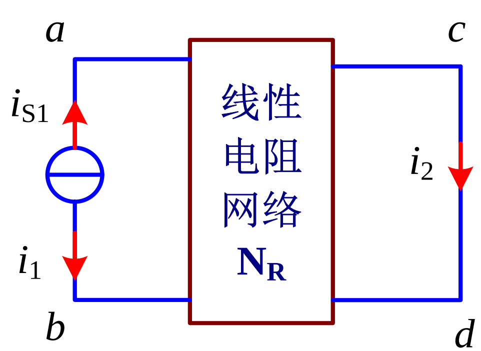
$$u_1\hat{i}_1+u_2\hat{i}_2=\hat{u}_1 i_1+\hat{u}_2 i_2$$

$$i_1=-i_{S1},\ u_2=0,\quad \hat{i}_1=0,\ \hat{u}_2=\hat{u}_{S2}$$

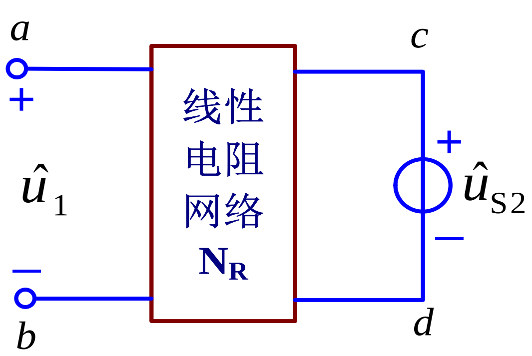
$$u_1\times 0+0\times\hat{i}_2=-\hat{u}_1 i_{S1}+\hat{u}_{S2} i_2$$

$$\hat{u}_1 i_{S1}=\hat{u}_{S2} i_2$$

$$\frac{i_2}{i_{S1}}=\frac{\hat{u}_1}{\hat{u}_{S2}}\quad \text{或}\quad \hat{u}_1 i_{S1}=\hat{u}_{S2} i_2$$



（a）



（b）

4. 互易定理

对一个仅含线性电阻的二端口电路N_R，其中一个端口加激励源，一个端口作响应端口，在只有一个激励源的情况下，当激励与响应互换位置时，同一激励所产生的响应相同。

5. 应用互易定理分析电路时应注意：

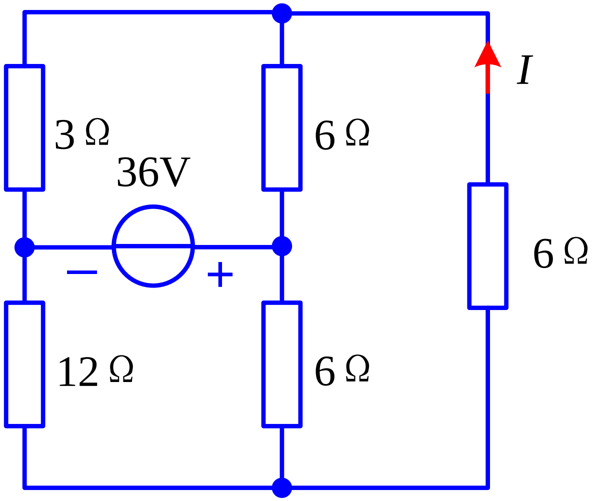
(1) 互易前后应保持网络的拓扑结构不变，仅理想电源搬移；

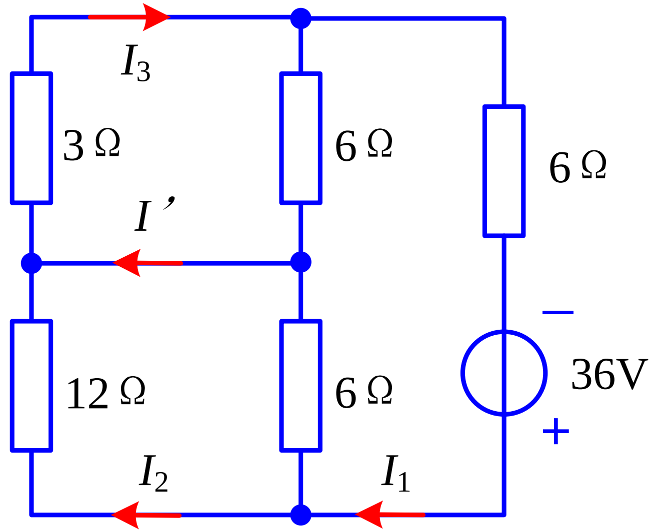
(2) 互易前后端口处的激励和响应的参考方向关系；

(3) 互易定理只适用于线性电阻网络在单一电源激励下，两个支路电压电流关系。

(4) 含有受控源的网络，互易定理一般不成立。

【例】 在图示电路中求电流I。





$$I = I'$$

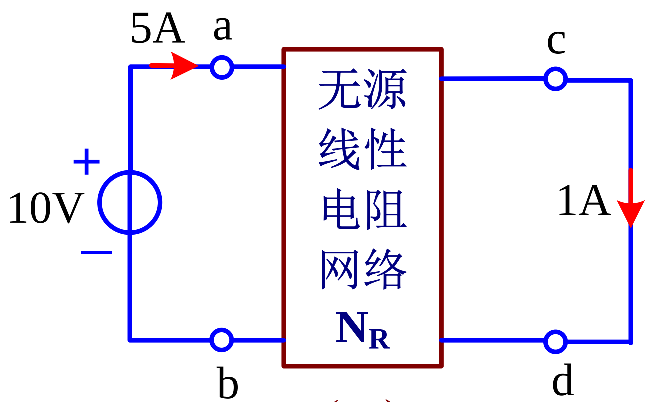
$$I_1 = \frac{36}{6 + \frac{12\times 6}{12+6} + \frac{3\times 6}{3+6}} = 3\text{A}$$

$$I_2 = \frac{6}{12+6} \times 3 = 1\text{A}$$

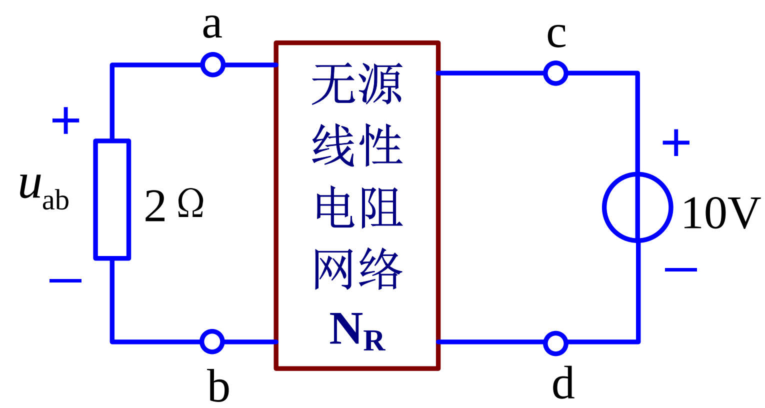
$$I_3 = \frac{6}{3+6} \times 3 = 2\text{A}$$

$$I' = I_3 - I_2 = 1\text{A}$$

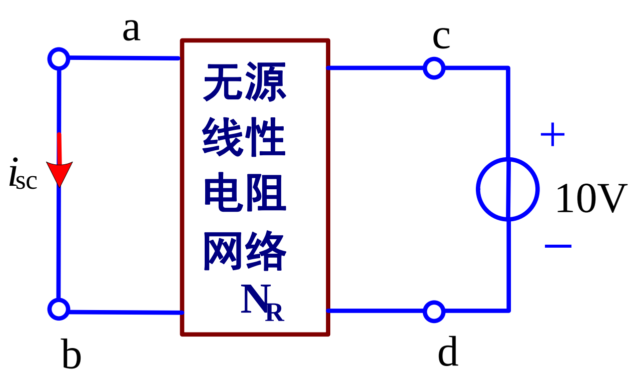
【例】 线性无源电阻网络N_R，求$u_{ab}=?$



（a）

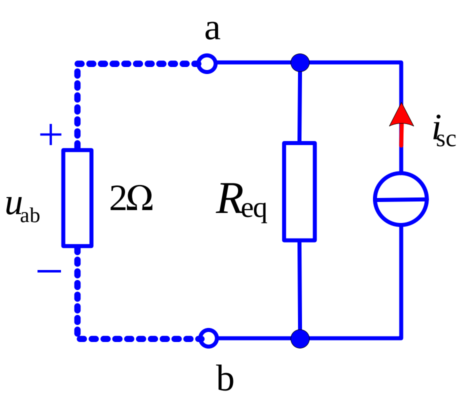


（b）



（c）

法1：用互易定理和诺顿等效定理

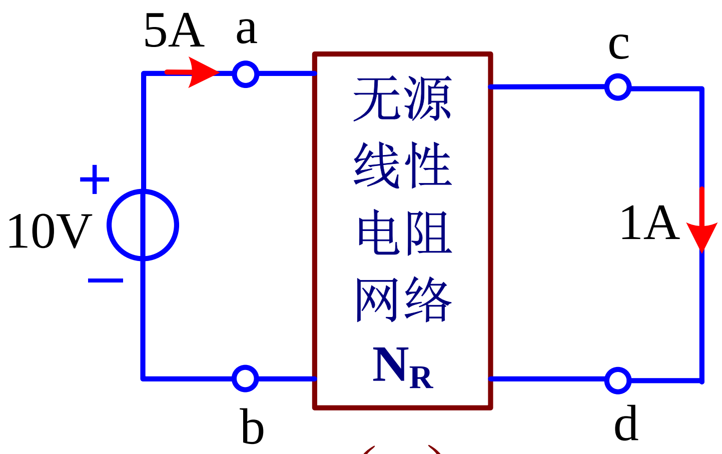


$$i_{sc}=1A$$

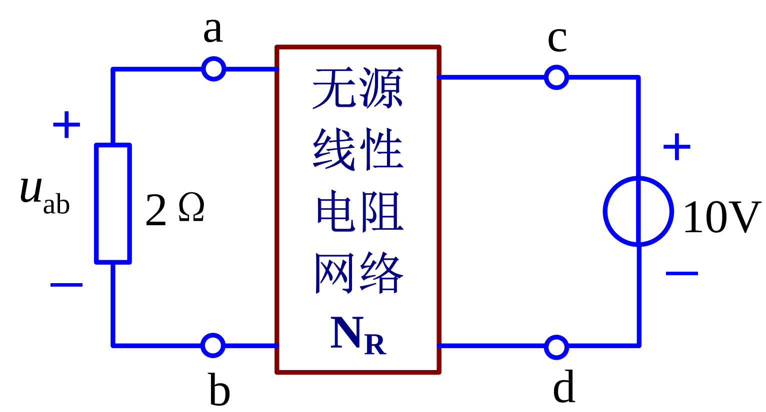
$$R_{eq}=\frac{10}{5}=2(\Omega)$$

$$\therefore u_{ab}=\frac{2\times 2}{2+2}\times 1=1(V)$$

【例】线性无源电阻网络N_R，求$u_{ab}=?$



（a）



（b）

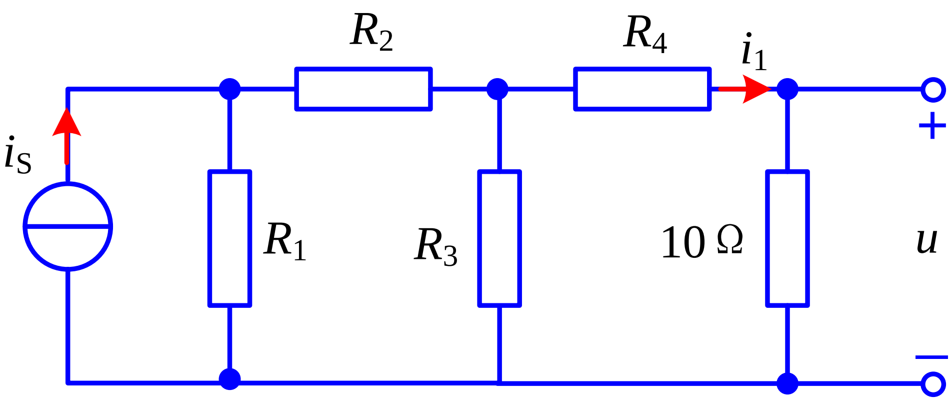
法2：用特勒根定理

$$10\times\frac{u_{ab}}{2}+0\times i'_{cd}=u_{ab}\times(-5)+10\times1$$

$$u_{ab}=1\text{V}$$

【例】

图示电路(a)中, $i_1 = 0.3 i_s$, 图示电路(b)中, $i_2 = 0.2 i_S$, 求电阻R_1

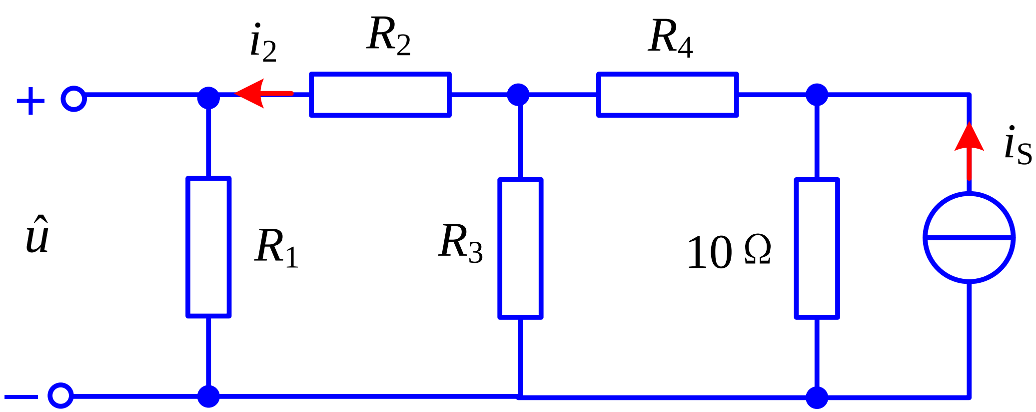


(a)

$$u = \hat{u}$$

$$u = 10 i_1 = 3 i_s$$

$$\hat{u} = R_1 i_2 = 0.2 i_s R_1$$

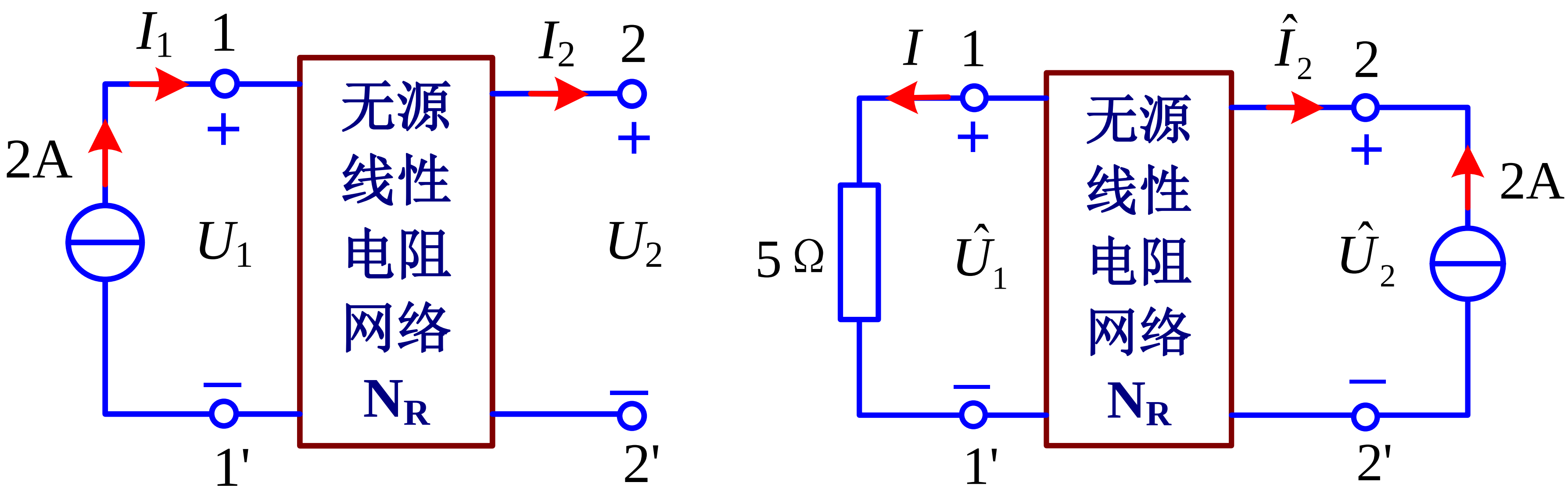


(b)

$$R_1 = 15\Omega$$

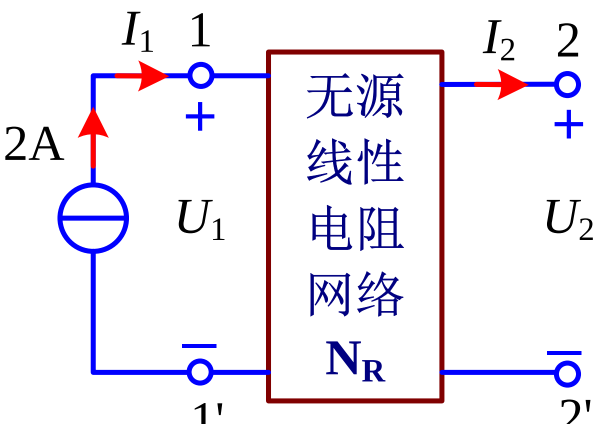
【例】

无源电阻网络N_R，当$I_1=2\,A$，$U_1=10\,V$，$U_2=5\,V$。现将变为如图（b）所示，求$I=?$

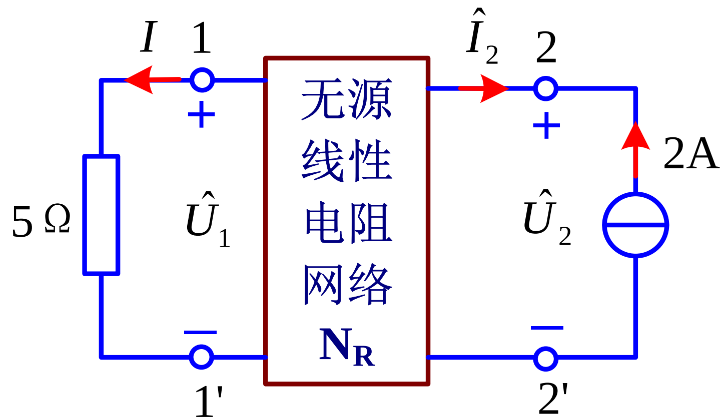


（a）（b）

【例】 无源电阻网络N_R，当$I_1=2\,\text{A}$，$U_1=10\,\text{V}$，$U_2=5\,\text{V}$。现将变为如图（b）所示，求$I=?$



（a）



（b）

法1：用特勒根定理

$$U_{11'}=U_1=10\text{V} \qquad \hat{U}_{11'}=\hat{U}_1=5I$$

$$I_{11'}=-I_1=-2\text{A} \qquad \hat{I}_{11'}=I$$

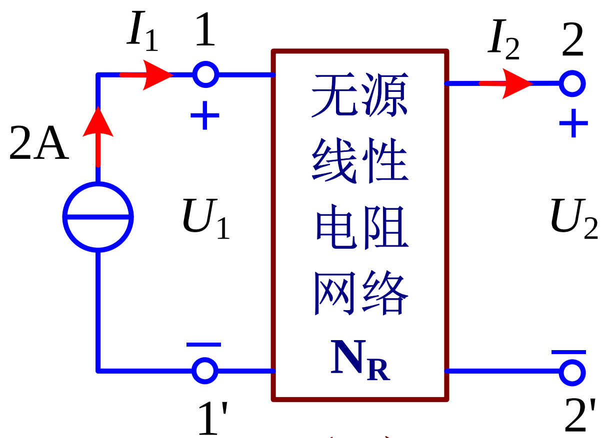
$$U_{22'}=U_2=5\text{V} \qquad \hat{U}_{22'}=\hat{U}_2$$

$$I_{22'}=I_2=0\text{A} \qquad \hat{I}_{22'}=\hat{I}_2=-2\text{A}$$

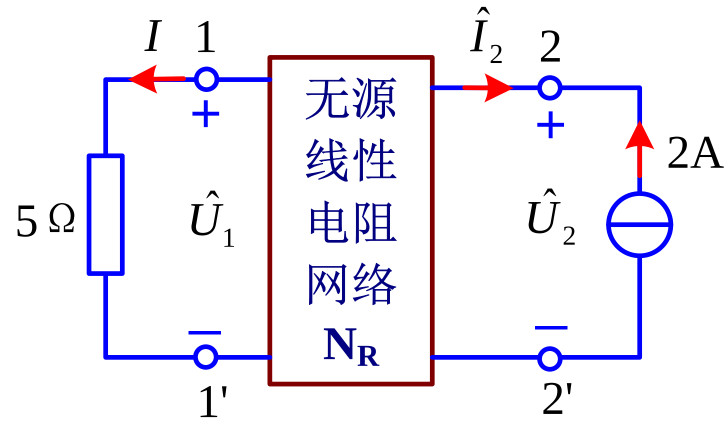
$$U_{11'}\hat{I}_{11'}+U_{22'}\hat{I}_{22'}=\hat{U}_{11'}I_{11'}+\hat{U}_{22'}I_{22'}$$

$$10I+5\times(-2)=5I\times(-2)+0$$

$$I=0.5\,\text{A}$$



（a）

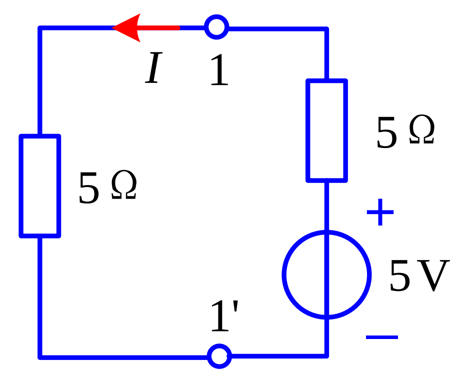


（b）

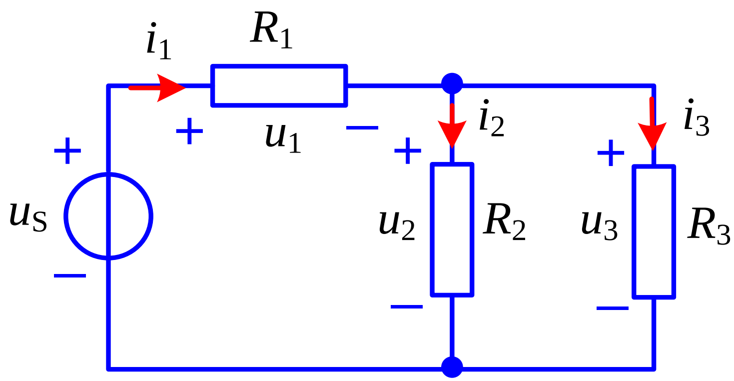
对电路(a)，从11′口看去，$R_{in}=\dfrac{U_1}{I_1}=\dfrac{10}{2}=5\Omega$。

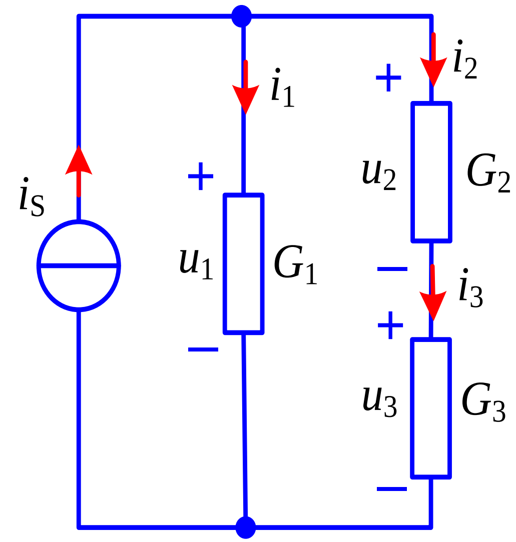
对电路(b)，将5Ω电阻断开，则由互易定理u_{oc}=5V。

$$I=\frac{5}{5+5}=0.5\text{A}$$



4.7 对偶原理





KVL $u_1 + u_2 = u_s$

KCL $i_1 + i_2 = i_S$

KCL $i_1 = i_2 + i_3$

KVL $u_1 = u_2 + u_3$

KVL $u_2 = u_3$

KCL $i_2 = i_3$

等效电阻 $R = R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$

等效电导 $G = G_1 + \dfrac{G_2 G_3}{G_2 + G_3}$

4.7 对偶原理

对偶关系式

通过互换对偶元素能彼此转换的两个关系式。

对偶电路

符合对偶关系式的两个电路。

对偶原理

将一网络关系式中各元素用对偶元素置换，对于其对偶电路所得新关系式一定成立。

4.7 对偶原理

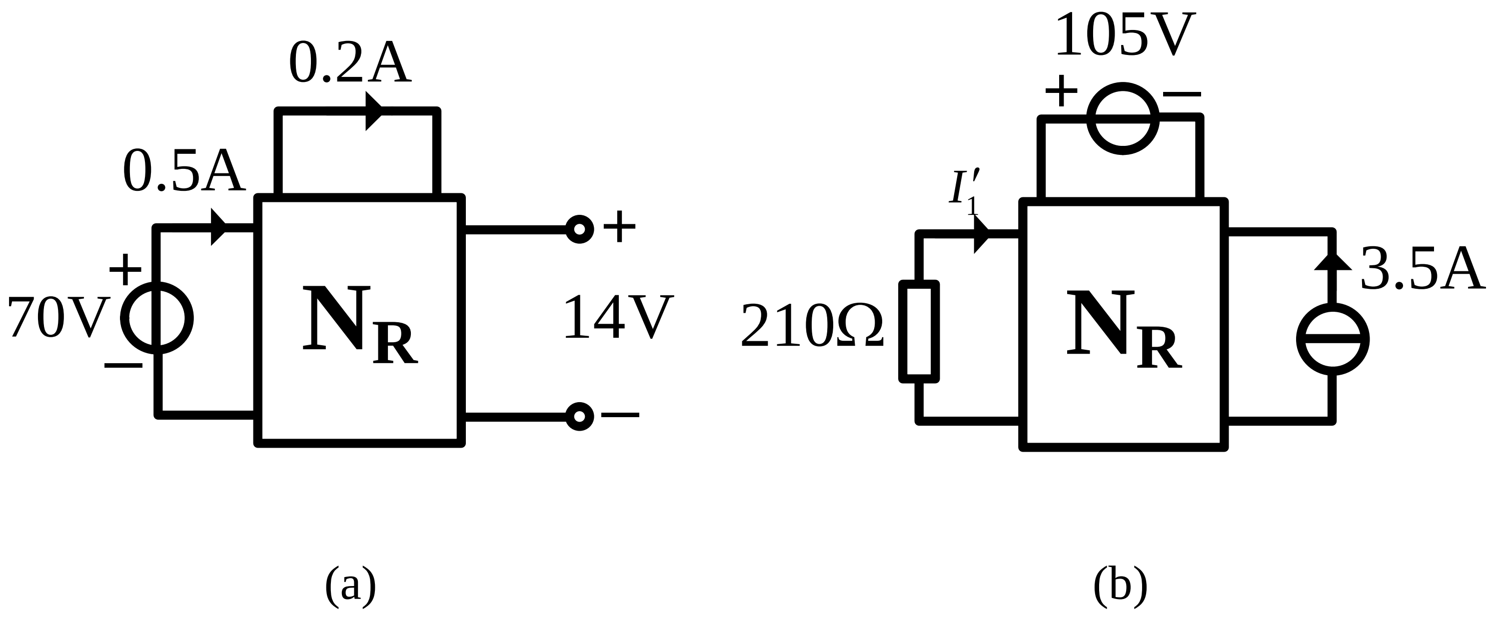
常见对偶元素

i	R	C	q	u_s	KVL
u	G	L	ψ	i_s	KCL

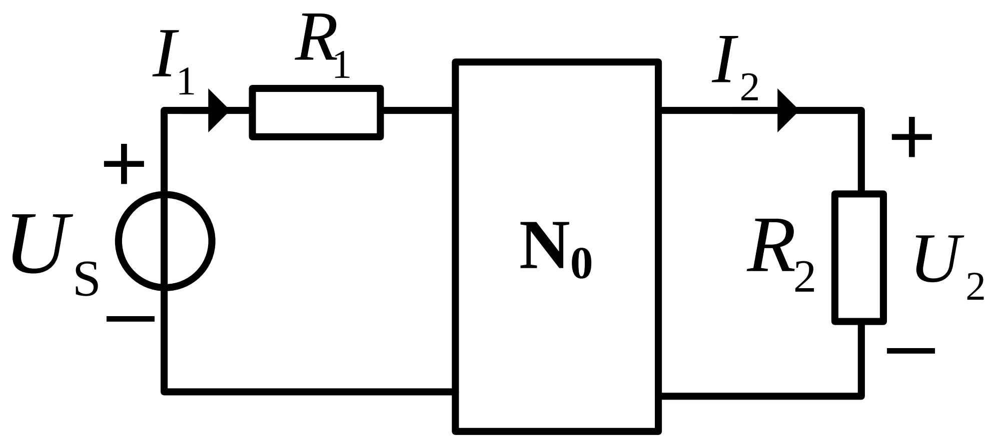
网孔　开路　串联　戴维宁定理

结点　短路　并联　诺顿定理

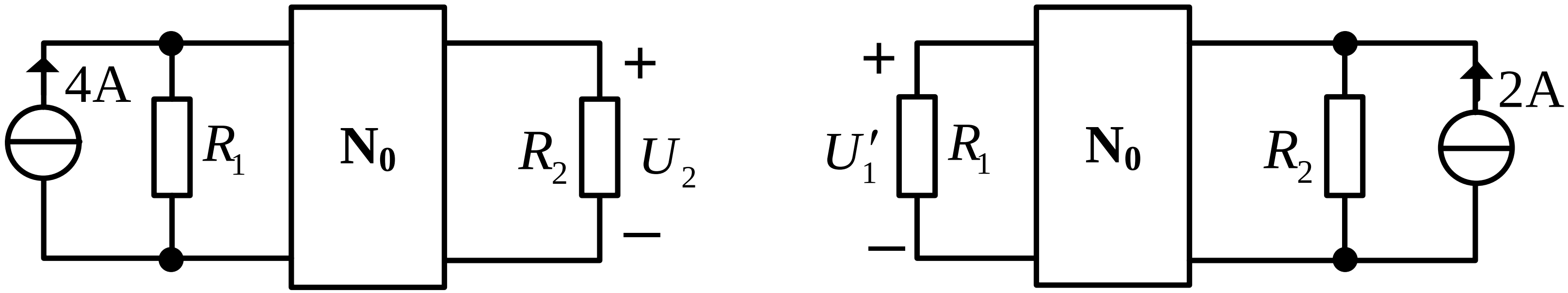
【4-11】N_R为同一线性无源纯电阻网络，两次接线如图所示，则 I_1' =?



【4-12】线性无源纯电阻网络N_0，改变 U_S、R_1和R_2进行两次测量，$U_S = 8V$，$R_1 = R_2 = 2\Omega$时，$I_1 = 2A$，$U_2 = 2V$； $U_S = 9V$，$R_1 = 1.4\ \Omega$，$R_2 = 0.8\Omega$时，$I_1 = 3A$，则U_2=?



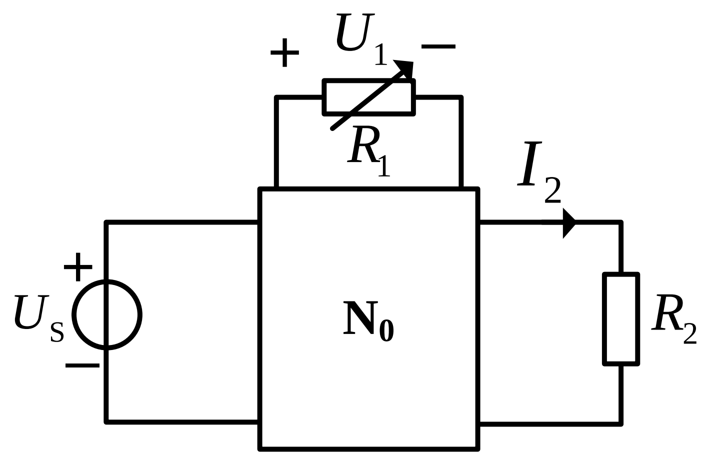
【4-13】已知N_0为线性无源纯电阻网络，在图(A)中，已知U_2=6V，求图(B)中U_1'=?



(a) (b)

作业

【4-14】N_0为无源线性电阻网络，U_S和R_1可调，R_2固定。当 U_S=8V，R_1=0时，I_2=0.2A；保持U_S不变，逐渐增大R_1值，使I_2=0.5A时，U_1=5V 。当U_S =20V，改变R_1时，使I_2=2A， 试问此时R_1端电压U_1为何值。



作业

【4-15】对图示电路进行两次测量，图(a)得 U_2=0.6U_S， U_4=0.3U_S；图(b)中 U'_S=U_S, U'_4=0.5U_S, U'_2=0.2U_S，已知R_5=10Ω，求R_1、 R_2、 R_3、 R_4之值。