《随机过程理论》（A）

2009 年 1 月 14 日

一、（20 分）设随机过程 $A_n(t), n=1,2,\ldots,N$ 相互独立且具有相同的自相关函数 $R_A(\tau)=\sigma^2\exp\{-|\tau|\}$，$\Theta_n, n=1,2,\ldots,N$ 是相互独立且服从 $[0,2\pi]$ 内均匀分布的随机变量，对于任意 n 和 m，Θ_n 和 $A_m(t)$ 相互独立，令 $X(t)=\sum_{n=1}^{N}A_n(t)\cos(\omega_0 t+\Theta_n)$，$Y(t)=\sum_{n=1}^{N}A_n(t)\sin(\omega_0 t+\Theta_n)$，其中 $\omega_0>0$ 是常数，求：

1、求随机过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$ 和功率谱密度 $S_X(\omega)$；

2、求随机过程 $X(t)$、$Y(t)$ 的互相关函数 $R_{XY}(\tau)$ 和互功率谱密度 $S_{XY}(\omega)$。

二、（15 分）设随机过程 $X(t)$ 是均值为零，功率谱密度为 $S_X(\omega)=\dfrac{N_0}{2}$ 的高斯白噪声，且有 $Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(a)h(t-a)da$，$Z(t)=Y(t-T)-Y(t+T)$，其中常数 $T>0, a>0$，且 $h(t)=\exp\{-at\}, t>0$。则：1、求互相关函数 $R_{ZX}(\tau)$ 和互谱密度 $S_{XZ}(\omega)$；2、求 $Z(t)$ 的均方值。

三、（20 分）设随机变量 U 和 V 是相互独立的高斯随机变量，均值和方差分别为 0 和 σ^2，令：$X(t)=U\cos\omega_0 t+V\sin\omega_0 t$，（$\omega_0$ 为常数），则：1、随机过程 $X(t)$ 是各态历经的吗？并说明理由;2、求随机过程 $X(t)$ 的二维联合概率密度，并问当 t_1 和 t_2 满足什么条件时，$X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 相互独立；3、求随机过程 $Y(t)=X^2(t)$ 的自相关函数和功率谱密度。

四、（15分）设 $X(t)$ 为窄带平稳随机过程。$X(t)=X_c(t)\cos\omega_0 t+X_s(t)\sin\omega_0 t$，

$\tilde{x}(t)=x(t)+j\hat{x}(t)$。$X(t)$ 的功率谱密度为 $SX(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega\pm\omega_0|<B \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，其中 ω_0, B 为常数，且

$\omega_0 << B$。则：1、求 $X_c(t)$ 的自相关函数 $R_{X_c}(\tau)$；2、求 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 的互功率谱密度 $S_{X_cX_s}(\omega)$；

3、求 $\tilde{x}(t)$ 和功率谱密度 $S_{\tilde{x}}(\omega)$。

五、（10分）正交是随机过程理论一个十分重要的概念，下面给出三个同时刻正交的例子，试说明各式的数学内涵和物理内涵。

（1）$E[\tilde{x}(t)x(t)]=0$　　（2）$E[\dot{x}(t)x(t)]=0$　　（3）$E[X_c(t)X_s(t)]=0$

六、（10分）设 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 是具有相同参数为 λ 的统计独立的泊松过程，且

$Y(t)=k_1X_1(t)+k_2X_2(t)$，则：1、问当 k_1、k_2 满足什么条件时，$Y(t)$ 为泊松过程，并求其均值和方差；2、求 $P[X_1(t)=k\,|\,X_1(t)+X_2(t)=m]$。

七、（10分）已知某齐次马尔可夫链的状态转移图如下所示，其状态空间为 $I=\{a,b,c\}$。则：

1、自状态 c 出发，至少经过几步可以转移到状态 a，为什么？

2、求 $P[x_1=c,x_2=b,x_3=a,x_4=b\,|\,x_0=a]$；

3、求平稳分布。