一、质点运动学

一、选择题

（在下列各题中，均给出了 4 个~5 个答案，其中有的只有 1 个是正确答案，有的则有几个是正确答案，请把正确答案的英文字母序号填在题后的括号内）

1. 在下列关于质点速度的表述中，不可能出现的情况是：

A．一质点具有恒定的速率，但却有变化的速度；

B．一质点向前的加速度减少了，其前进速度也随之减少；

C．一质点加速度值恒定，而其速度方向不断改变；

D．一质点具有零速度，同时具有不为零的加速度。（ B ）

[知识点] 速度 v 与加速度 $\mathbf{a}$ 的关系。

[分析与解答] 速度 v 和加速度 $\mathbf{a}$ 是矢量，其大小或方向中任一项的改变即表示速度或加速度在变化，且当速度与加速度间的方向呈锐角时，质点速率增加，呈钝角时速率减少。

因为质点作匀速运动时速率不变，但速度方向时时在变化，因此，A 有可能出现，

抛体运动（或匀速圆周运动）就是加速度值（大小）恒定，但速度方向不断改变的情形，故 C 也有可能出现。

竖直上抛运动在最高点就是速度为零，但加速度不为零的情形，故 D 也有可能出现。

向前的加速度减少了，但仍为正值，此时仍然与速度同方向，故速度仍在增大，而不可能减少，故选 B。

2. 在下列关于加速度的表述中，正确的是：

A．质点沿 x 轴运动，若加速度 $a<0$，则质点必作减速运动；

B．质点作圆周运动时，加速度方向总是指向圆心；

C．在曲线运动中，质点的加速度必定不为零；

D．质点作曲线运动时，加速度方向总是指向曲线凹的一侧；

E．若质点的加速度为恒矢量，则其运动轨迹必为直线；

F．质点作抛物运动时，其法向加速度 a_n 和切向加速度 a_τ 是不断变化的，因此，加速度 $a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}$ 也是变化的。（ C、D ）

[知识点] 加速度 $\mathbf{a}$ 及运动性质判据

[分析与解答] 因为判断作直线运动的质点作加速还是减速运动的判据是看 $\mathbf{a}$ 和 v 的方向关系，即 $\mathbf{a}$, v 同向为加速运动，$\mathbf{a}$，v 反向则作减速运动，而不是只看 $\mathbf{a}$ 的正负。当 $a<0$ 时，若 $v<0$，则质点是作反方向加速运动，故 A 错误。

平抛斜抛运动都是曲线运动，但其加速度却是恒矢量（大小、方向均不变），故 E 也错误。

作抛体运动时，虽然 $\mathbf{a}_n$ 和 $\mathbf{a}_\tau$ 是变化的，但合加速度 $\mathbf{a}$ 却是常数，等于 $\mathbf{g}$，故 D 也不成立。

在曲线运动中必向加速度 $a_n = \frac{v^2}{\rho}$，故总加速度一定不为零，所以， C 是正确的。

质点作匀速圆周运动时，加速度 **a** 的方向指向圆心，但作变速圆周运动时，由于 $\mathbf{a}_\tau$ 的存在，加速度 **a** 的方向如图 1-1(a)所示，故 B 错误。

质点作曲线运动时，由于速度的方向是变化的，则加速度的方向总是指向曲线凹的一侧，如图 1-1(b) 所示，故 D 是正确。

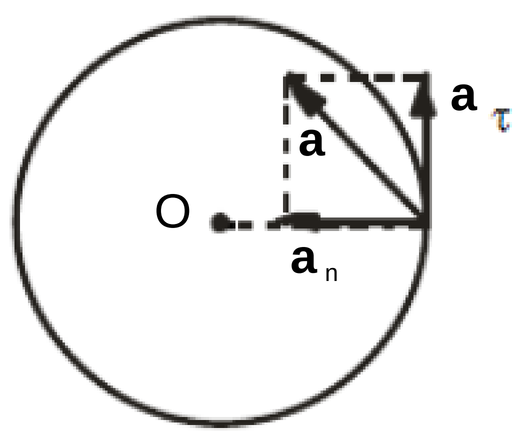


图 1-1(a)

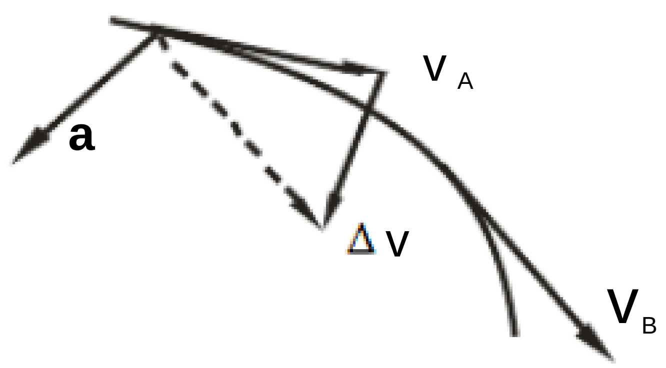


图 1-1(b)

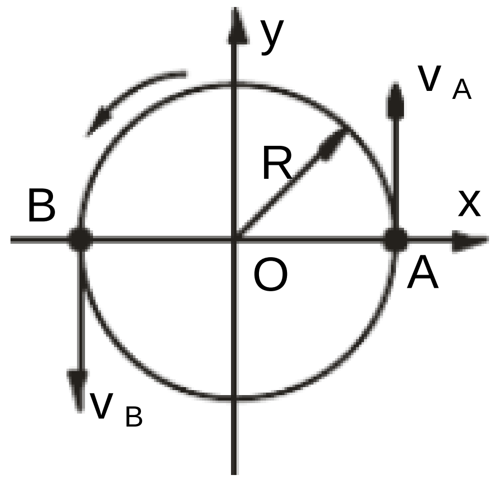


图 1-2

3. 如图 1-2 所示，质点作匀速圆周运动，其半径为 R，从 A 点出发，经半个圆周而达到 B 点。则在下列表达式中，不正确的是：

A．速度增量 $\Delta\mathbf{v}=0$，速率增量 $\Delta v=0$；

B．速度增量 $\Delta\mathbf{v}=-2v\,\mathbf{j}$，速率增量 $\Delta v=0$；

C．位移大小 $|\Delta\mathbf{r}|=2R$，路程 $s=\pi R$；

D．位移 $\Delta\mathbf{r}=-2R\,\mathbf{i}$，路程 $s=\pi R$。 （ A ）

[知识点] $\Delta\mathbf{r}$ 与 $\Delta\mathbf{v}$ 的分量表达方法， Δv 与 $\Delta\mathbf{v}$ 、 $\Delta\mathbf{r}$ 与 s 的计算

[分析与解答] 依题意，质点 $\mathbf{r}_A=R\,\mathbf{i}$， $\mathbf{r}_B=R\,\mathbf{i}$， $\mathbf{v}_A=v\,\mathbf{j}$， $\mathbf{v}_B=-v\,\mathbf{j}$，则从 A 点运动到 B 点时，速度的增量 $\Delta\mathbf{v}=\mathbf{v}_B-\mathbf{v}_A=-v\,\mathbf{j}-v\,\mathbf{j}=-2v\,\mathbf{j}\neq 0$，而速率增量 $\Delta v=v_B-v_A=v-v=0$；

位移 $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_A=-R\,\mathbf{i}-R\,\mathbf{i}=-2R\,\mathbf{i}$，位移的大小 $|\Delta\mathbf{r}|=2R$，路程 $s=\pi R$，故 A 不正确。

4. 一质点在 xOy 平面内作曲线运动， $\mathbf{r}$ 为位置矢量， s 为路程。在下列关于质点速率的表达式中，正确的是：

A. $v=\frac{dr}{dt}$； B. $v=\frac{|d\mathbf{r}|}{dt}$； C. $v=\frac{ds}{dt}$；

D. $v=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}$； E. $v=\frac{d|\mathbf{r}|}{dt}$。 （B、C、D）

[知识点] 速率与径向速率

[分析与解答] $v=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$，它的大小 $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|$ 等于瞬时速率 v ；且 $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|=\frac{|d\mathbf{r}|}{dt}=v$ ，而 $v=\frac{ds}{dt}$ 为瞬时速率的定义式； $v_x=\frac{dx}{dt}$，$v_y=\frac{dy}{dt}$ 是二维运动速度沿 x，y 轴的两个分量，且有

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$$

即为瞬时速度的大小，它等于瞬时速率。

而 $\frac{dr}{dt}$ 是径向速率，是速度在 $\mathbf{r}$ 方向的分量，它只反映了 $\mathbf{r}$ 的大小变化，$\frac{d|\mathbf{r}|}{dt}=\frac{dr}{dt}$ 。

5．如图 1-3(a)所示，物块 A 与 B 分别置于高度差为 h 的水平面上，借一跨过滑轮的细绳连接，若 A 以恒定速度 v_0 运动，则 B 在水平面上的运动为：

A．匀速运动，且 $v=v_0$ ；　　B．加速运动，且 $v>v_0$ ；

C．加速运动，且 $v<v_0$ ；　　D．减速运动。　　(B)

[知识点] 加速、减速判据，第 I 类问题

[分析与解答]

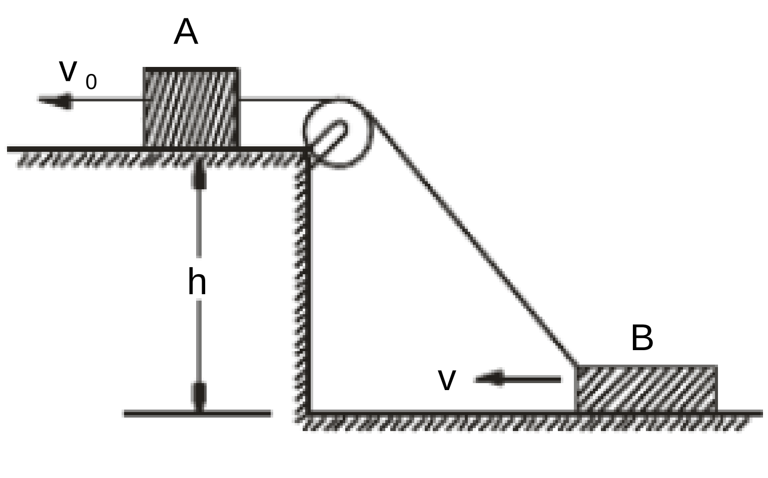


图 1-3(a)

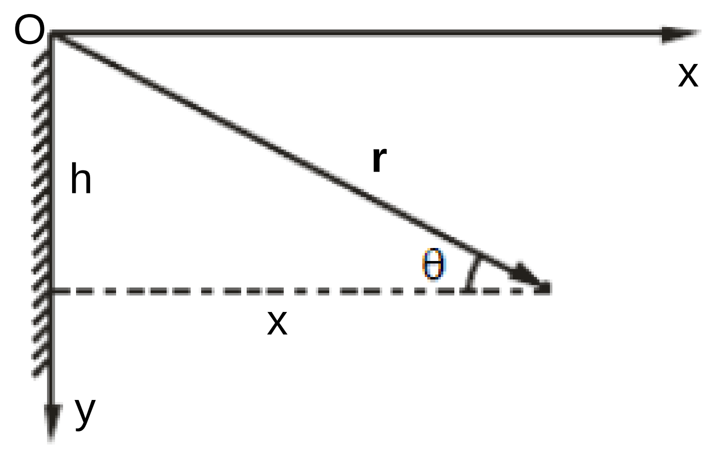


图 1-3(b)

选坐标原点 O 在滑轮处，x 轴水平向右，y 轴竖直向下，如图 1-3(b)所示。任意时刻物块 B 的位矢为 $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+h\mathbf{j}$

设物块 B 的速度为 v　　$v=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dh}{dt}\mathbf{j}=\frac{dx}{dt}\mathbf{i}=v_x\mathbf{i}$　　$\left(\frac{dh}{dt}=0,v_y=0\right)$

任意时刻物块 B 到原点的距离 x 都满足　　$x=\sqrt{r^2-h^2}$

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\sqrt{r^2-h^2}=\frac{r}{\sqrt{r^2-h^2}}\frac{dr}{dt}$$

按题意 $v_0=-\frac{dr}{dt}$ 是物块 A 的速率，因为绳长 r 随时间在缩短，故 $\frac{dr}{dt}<0$

则有

$$v_x=-\frac{r}{\sqrt{r^2-h^2}}v_0=-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0$$

$$v = -\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x} v_0 \mathbf{i}$$

物块 B 的速度方向沿 x 轴负向。物块 B 的速率为

$$v = |v| = \frac{v_0}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}} = \frac{v_0}{\cos\theta} > v_0$$

物块 B 的加速度为 $\mathbf{a} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv_x}{dt} i$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x} v_0\right)$$
$$= v_0 \frac{h^2}{x^2\sqrt{x^2+h^2}} \frac{dx}{dt} = \frac{-v_0^2 h^2}{x^3}$$

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} = -\frac{v_0^2 h^2}{x^3} \mathbf{i}$$

物块 B 的加速度方向沿 x 轴负向。 v 与 **a** 方向相同，物块 B 作变加速直线运动。

6．已知质点的运动方程为： $x = At\cos\theta + Bt^2\cos\theta$， $y = At\sin\theta + Bt^2\sin\theta$，式中 A、B、$\theta$ 均为恒量，且 $A>0$， $B>0$，则质点的运动为：

A．圆周运动； B．抛体运动； C. 椭圆运动；

D．匀加速直线运动； E. 匀减速直线运动。 （ D ）

[知识点] 轨道方程，加速、减速判据，第 I 类问题

[分析与解答] 质点的运动方程为 $\begin{cases} x = At\cos\theta + Bt^2\cos\theta \\ y = At\sin\theta + Bt^2\cos\theta \end{cases}$

由此可知 $\dfrac{y}{x} = \tan\theta$， 即 $y = (\tan\theta)x$

由于 θ =恒量，所以上述轨道方程为直线方程。

又 $\begin{cases} v_x = (A+2Bt)\cos\theta \\ v_y = (A+2Bt)\sin\theta \end{cases}$

$\begin{cases} a_x = 2B\cos\theta = \text{恒量} \\ a_y = 2B\sin\theta = \text{恒量} \end{cases}$

由于 $A>0$， $B>0$，显然 v 与 a 同号，故质点作匀加速直线运动。

7．一质点沿 x 轴运动，其运动方程为 $x = 4t^2 - 2t^3$（SI），当质点再次返回原点时，其速度和加速度分别为：

A．8m/s，16m/s^2；　　B．-8m/s，16m/s^2；

C．-8m/s，-16m/s^2；　　D．8m/s，-16m/s^2。　　（ C ）

[知识点] 第 I 类问题的数值计算

[分析与解答] 速度 $v = \frac{dx}{dt} = 8t - 6t^2$

加速度 $a = \frac{dv}{dt} = 8 - 12t$

当质点再次返回原点时，有 $x = 4t^2 - 2t^3 = 0$

得 $t = 0$（舍去）和 $t = 2s$

则此时的速度和加速度分别为

$$v = 8x^2 - 6x^2 = -8m/s$$

$$a = 8 - 12x^2 = -16m/s$$

8．已知质点的运动方程为 $x = -10 + 12t - 2t^2$（SI），则在前 5s 内质点作：

A．减速运动，路程为 36m；

B．加速运动，位移为 10m；

C．前 3s 作减速运动，后 2s 作加速运动，路程为 26m；

D．变速运动，位移的大小和路程均为 10m。　　（ C ）

[知识点] 第 I 类问题，转向点条件，加速、减速判据，路程与位移。

[分析与解答] 速度 $v = \frac{dx}{dt} = 12 - 4t$

加速度 $a = \frac{dv}{dt} = 12m/s > 0$

质点直线运动的转向点时刻应满足 $v = 12 - 4t = 0$

则得 $t = 3s$

当 $0 \leq t < 3s$ 时，$v > 0$，且 $a > 0$，质点加速运动。

此段路程为 $s_1 = x_2 - x_1 = (-10 + 12 \times 3 - 2 \times 3^2) - (-10) = 18m$

当 $3s < t \leq 5s$ 时，$v < 0$，且 $a > 0$，质点减速运动。

此段路程为 $s_2 = |x_3 - x_2|$

$$= |(-10 + 12 \times 5 - 2 \times 5^2) - (-10 + 12 \times 3 - 2 \times 3^2)| = 8m$$

则质点的总路程为 $s = s_1 + s_2 = 26m$

9．一质点沿半径 $R=1m$ 的圆轨道作圆周运动，其角位置与时间的关系为 $\theta=\frac{1}{2}t^2+1$（SI），则质点在 $t=1s$ 时，其速度和加速度的大小分别为：

A． 1m/s， $1m/s^2$；　　B． 1m/s， $2m/s^2$；

C. 1m/s， $\sqrt{2}m/s^2$；　　D． 2m/s， $\sqrt{2}m/s^2$。　　（ C ）

[知识点] 角量与线量关系。

[分析与解答] 角速度 $\omega=\frac{d\theta}{dt}=t$

角加速度 $\beta=\frac{d\omega}{dt}=1rad/s^2$

速度的大小 $v=\omega R=t\times1=t$

线向加速度 $a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{t^2}{1}=t^2$

切向加速度 $a=\frac{dv}{dt}=1m/s^2$

总加速度 $a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}=\sqrt{t^4+1}$

则当 t=1s 时，质点的速度和加速度的大小为

$$v=1m/s$$

$$a=\sqrt{1^4+1}=\sqrt{2}$$

10．A、B 两船都以 2m/s 的速率匀速行驶，且 A 船沿 x 轴正向运动， B 船沿 y 轴正向运动。则 B 船相对于 A 船的速度（以 m/s 为单位）为

A． $2\mathbf{i}+2\mathbf{j}$；　　B． $-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}$；

C. $-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}$；　　D． $2\mathbf{i}-2\mathbf{j}$。　　（ B ）

[知识点] 运动相对性，伽利略速度变换式。

[分析与解答] 取地面为静止参考系 S 系， A 船为运动参考系 S 系， B 船为运动物体。

则绝对速度为 $\mathbf{u}=2\mathbf{j}$

牵连速度 $v=2\mathbf{i}$

而 B 船相对于 A 船的相对速度为 $u'=u-v=2j-2i$

即 $u'=-2i+2j$

二、填空题

1．一质点沿 x 轴方向运动，其运动方程为 $x=10-9t+6t^2-t^3$（SI），则：

质点前 2s 的位移为 $\Delta \mathbf{r}=$ $\underline{-2\mathbf{i}}$ m；

质点速度的表达式为 $v=$ $\underline{(-9+12t-3t^3)\mathbf{i}}$ m/s；

质点沿 x 轴的最大速度值为 $v_{max}=$ $\underline{3}$ m/s。

[知识点] 第Ⅰ类问题，位移的计算。

[分析与解答] 已知运动方程为 $x=10-9t+6t^2-t^3$

$t=0$s的位矢 $r_0=10i$ m

$t=2$s的位矢 $r_2=(10-9\times2+6\times2^2-2^3)i=8i$ m

则前 2s 的位移 $\Delta r=r_2-r_0=-2i$ m

质点的速度 $v=\dfrac{dx}{dt}i=(-9+12t-3t^2)i$ m/s

质点的加速度的大小 $a=\dfrac{dv}{dt}=12-6t$

当 $\dfrac{dv}{dt}=12-6t=0$ 时，质点具有最大速度，即 t=2s 时，最大速度值为

$$v_{max}=-9+12t-3t^2=-9+12\times2-3\times2^2=3\text{m/s}$$

2. 一质点在 xOy 平面内运动，其运动方程为 $x=2t$，$y=19-2t^2$（SI）。则

质点的轨迹方程为 $y=$ $\underline{19-\dfrac{x^2}{2}}$ ；

$t=2$s 时的位矢为 $\mathbf{r}=$ $\underline{4\mathbf{i}+11\mathbf{j}}$ m；

$t=2$s 时的速度为 $v=$ $\underline{2\mathbf{i}-8\mathbf{j}}$ m/s；

前 2s 内的平均速度为 $\bar{v}=$ $\underline{2\mathbf{i}-4\mathbf{j}}$ m/s。

[知识点] 轨迹方程与运动方程，二维第Ⅰ类问题，矢量表达式。

[分析与解答] 已知质点的运动方程为

$$x=2t \quad (1)$$

$$y=19-2t^2 \quad (2)$$

由式（1）得 $t=\dfrac{x}{2}$，代入式（2）即可得

质点的轨迹方程 $y=19-\dfrac{x^2}{2}$

质点的位矢为 $r=2t\,i+(19-2t^2)j$

当 t=2s 时，质点的位矢为 $\mathbf{r} = 2\times 2\mathbf{i} + (19-2\times 2^2)\mathbf{j} = (4\mathbf{i}+11\mathbf{j})\mathrm{m}$

质点的速度为 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{i} - 4t\mathbf{j}$

当 t=2s 时，质点的速度为

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\times 2\mathbf{j} = (2\mathbf{i}-8\mathbf{j})\mathrm{m/s}$$

质点在前 2s 内的平均速度为

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0}{2}$$

$$= \left[\frac{1}{2}(2\times 2\mathbf{i}) + (19-2\times 2^2)\mathbf{j} - 19\mathbf{j}\right]$$

$$= (2\mathbf{i}-4\mathbf{j})\mathrm{m/s}$$

3. 一质点沿 x 轴正方向运动，其速度为 $v = 8+3t^2$ m/s，当 $t=8$s 时，质点位于原点左侧 52m 处，则其运动方程为 $x = \underline{t^3+8t-628}$ m；且可知当 $t=0$时，原点的初始位置为 $x_0 =$ __-628__ m，初速度为 $v_0 =$ __8__ m/s。

[知识点] 第Ⅱ类问题，初始条件。

[分析与解答] 一维质点运动 $v = \frac{dx}{dt} = 8+3t^2$ （1）

分离变量 $dx = (8+3t^2)dt$

积分，且注意 $t=8$s 时，$x=-52$m，即 $\int_{-52}^{x} dx = \int_{8}^{t}(8+3t^2)$

则 $x+52 = 8t+t^3-8\times 8-8^3$

即运动方程为 $x = t^3+8t-628$ （2）

将 $t=0$ 代入式（2），则质点的初始位置为 $x_0 = -628$m

将 $t=0$ 代入式（1），则质点的初速度为 $v_0 = 8$m/s

4. 在质点曲线运动中，切向加速度 $\mathbf{a}_\tau$ 是反映质点运动速度 __大小__ 变化的物理量；而法向加速度 $\mathbf{a}_n$ 是反映质点运动速度 __方向__ 变化的物理量。

一质点在 xOy 平面内作抛物运动，如图 1-4(a)所示，若不计空气阻力，试在图上标出 P、Q 两点的切向加速度 $\mathbf{a}_\tau$ 和法向加速度 $\mathbf{a}_n$。

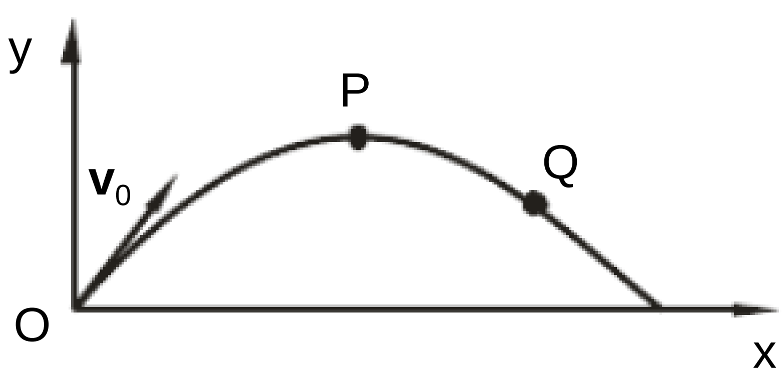


图 1-4(a)

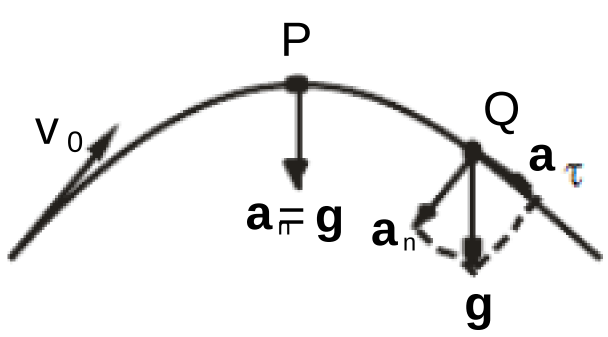


图 1-4(b)

[知识点]

切向、法向加速度。

[分析与解答] 不计空气阻力，质点作抛体运动时，只受到竖直向下的重力作用，即加速度始终向下且大小为重力加速度 g，因此最高点 P 只有法向加速度 $a_n = g$，在 Q 点既有切向加速度 a_τ，又有法向加速度 a_n，方向如图 1-4（b）所示。

5. 如图 1-5(a)所示，一炮弹作抛体运动，在轨道的 P 点处，其速率为 v，且 v 与水平面的夹角为 θ，则该时刻质点的 $\frac{dv}{dt}$ = $\underline{-g\sin\theta}$；P 点处的曲率半径 ρ = $\underline{\frac{v^2}{g\cos\theta}}$。

[知识点] 自然坐标系， a_τ、a_n。

[分析与解答] 如图 1-5(b) 所示，抛体运动的加速度就是重力加速度 g，它的切向分量为

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -g\sin\theta$$，式中负号表示切向加速度 a_τ 的方向与速度 v 方向相反。

法向加速度 $a_n = g\cos\theta = \frac{v^2}{\rho}$

则由此知 P 点处的曲率半径为 $\rho = \frac{v^2}{g\cos\theta}$

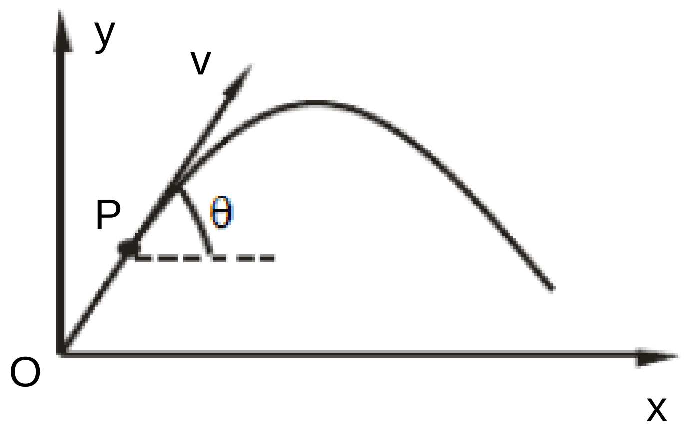


图 1-5(a)

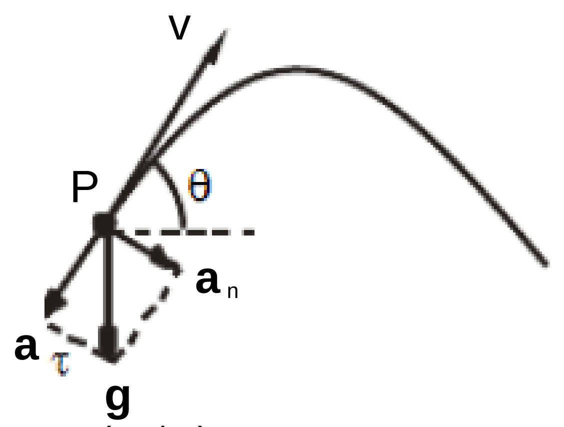


图 1-5(b)

6. 一质点沿 x 轴作直线运动，其 v～ t 曲线如图 1-6 所示。如果 t = 0 时，质点位于坐标原点，则 t = 4.5s 时，质点的位置为 $x = \frac{9}{4}$ m，质点所行的路程为 $s = \underline{\frac{61}{12}}$ m，质点的加速度为 $a = \underline{2}$ m/s^2。

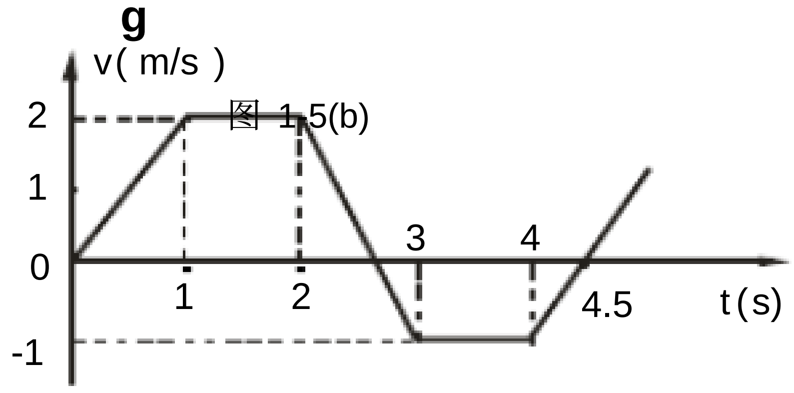


图 1-6

[知识点] 图线运用，第 II 类问题 .

[分析与解答] 在 v－t 图上，曲线任一点的斜率表明是加速度，即

$$a = \tan\theta = \frac{dv}{dt}$$

在 v－t 图中曲线所包围的面积表示的是质点运动的路程 s，处于第Ⅰ象限的为 +s，处于第Ⅳ象限的为－ s（即沿相反方向运动的路程）。

依图示可得 $v = v_0 + a(t - t_0)$

在 2s≤t＜3s 内，$a_3 = \frac{-1-2}{3-2} = -3\,m/s^2$，$v_{30} = 2\,m/s$

则速度 $v = 2 - 3(t-2) = -3t + 8$

质点的转向点 $v = -3t + 8 = 0$

$$t = \frac{8}{3}\,s$$

则从 $0\sim\frac{8}{3}$ s 内质点的路程为 $s_1 = s_{ABCD} = \frac{\left(1+\frac{8}{3}\right)\times 2}{2} = \frac{11}{3}\,m$

已知当 $t = 0$ 时，$x_0 = 0$，而 $s_1 = x_D - x_0 = \frac{11}{3}\,m$

从 $\frac{8}{3}$ s～4.5s 内，质点的路程为 $s_2 = s_{DEFG} = \frac{\left[1+\left(\frac{9}{2}-\frac{8}{3}\right)\right]\times 1}{2} = \frac{17}{12}\,m$

由于 $\frac{8}{3}$ s～4.5s 内，质点作反方向运动，则 $s_2 = x_D - x_G = \frac{17}{12}\,m$

则 t = 4.5s 时，质点的位置为 $x_G = x_D - \frac{17}{12} = \frac{11}{3} - \frac{17}{12} = \frac{9}{4}\,m$

此时质点的路程为 $s = s_1 + s_2 = \frac{11}{3} + \frac{17}{12} = \frac{61}{13}\,m$

由图求斜率得此时的加速度为 $a = \frac{1}{0.5} = 2\,m/s$

7．一汽车沿 X 轴正向行驶，其加速度与位置的关系为 $a = 1 + x$（SI），已知汽车初始时刻在 $x = 0$ 处的速度为 $v_0 = 1\,m/s$。则汽车在任一位置的速度为 $v =$ $\underline{x+1}$ m/s，任一时刻的位置为 $x =$ $\underline{e^t - 1}$ m。

[知识点] 第Ⅱ类问题，$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$ 变量代换。

[分析与解答] 由一维运动加速度定义有

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \qquad (1)$$

又由题意知 $a = 1 + x$ (2)

由式(1)和式(2)得 $v\dfrac{dv}{dx} = 1 + x$

分离变量，积分并注意初始条件，则有 $\int_1^v v\,dv = \int_0^x (1 + x)dx$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2}x^2$$

即 $v^2 = x^2 + 2x + 1$

得 $v = x + 1$（舍去负值）

而由速度定义有 $v = \dfrac{dx}{dt} = x + 1$

则分离变量，积分并注意初始条件，则 $\int_0^x \dfrac{dx}{x + 1} = \int_0^t dt$

得 $\ln(x + 1) = t$

则任一时刻的位置为 $x = e^t - 1$

8. 如图 1-7(a)所示，一辆货车的驾驶室后壁高度为 h，车厢长为 l，竖直下落的雨点速度为 u，要使车厢中的货物不致淋雨，则车的速度 v 的大小必须满足的条件是 $v \geq \dfrac{ul}{h}$ 。

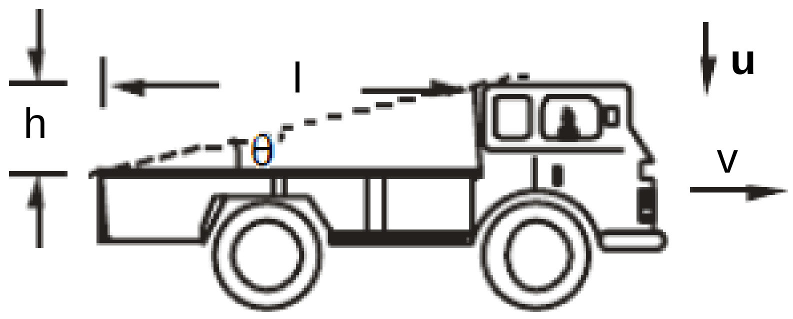


图 1-7(a)

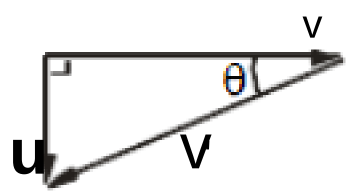


图 1-7(b)

[知识点] 运动相对性，速度叠加。

[分析与解答] 如图 1-7(a)所示，取地面为静止参考系，货车为运动参考系，雨点为运动物体，则绝对速度为 **u**，方向竖直向下，牵连速度为 v，方向水平向右，则雨点对货车的相对速度为

$$v' = u - v$$

在图 1-7(b)的速度三角形中，有 $\tan\theta = \dfrac{u}{v}$

当 θ 角小于车厢上的相应角度 θ'（如图所示）时，即 $\tan\theta \leq \tan\theta' = \dfrac{h}{l}$

亦即 $\dfrac{u}{v} \leq \dfrac{h}{l}$

即当 $v \geq \frac{ul}{h}$ 车厢上的货物不致淋雨。

9．一小孩在车站站台上以初速度 v_0 竖直向上抛出一小球，站台上的观测者 S 测得小球的运动方程为 $x=0$，$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$（SI）。此时，一列车以 $u=5m/s$ 的速度沿 x 轴正方向驶过站台，则列车上的观测者 S'（旅客）测得小球的运动方程为

$x'=$ $\underline{-5t}$ （SI），$y'=$ $\underline{v_0t-\frac{1}{2}gt^2}$ （SI）

轨迹方程为 $\underline{y'=-\frac{v_0}{5}x'-\frac{gx'^2}{50}}$ （SI）。

[知识点] 运动描述的相对性，伽利略变换式。

[分析与解答] 取站台上的观测者 S 为静止参考系，列车上的观测者 S' 为运动参考系，小球为运动物体，S' 系对 S 系的速度为 u，则由伽利略时空变换关系为

$$\begin{cases} x'=x-ut \\ y'=y \\ t'=t \end{cases} \quad (1)$$

且考虑 $x=0$，$u=5m/s$，$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$，则 S' 系测得小球运动方程为

$$\begin{cases} x'=-5t \\ y'=v_0-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (2)$$

由式(2)消去时间 t，得轨迹方程为

$$y'=-\frac{v_0}{5}x'-\frac{gx'^2}{50}$$

10．一质点从静止出发，作半径为 $R=3.0m$ 的圆周运动，其切向加速度的大小始终为 $a_\tau=3m/s^2$。当质点的总加速度 **a** 与半径成 45^0 角时，质点所经过的时间为 $t=$ $\underline{1}$ s；在上述时间内，质点所经过的路程为 $s=$ $\underline{1.5}$ m，角位移为 $\Delta\theta=$ $\underline{0.5}$ rad。

[知识点] 角量的第Ⅱ类问题，圆周运动中的 a_τ 和 a_n 角量与线量的关系

[分析与解答] 已知 $a_\tau=3.0m/s$，当 $\theta=45°$ 有

$$a_n=a_\tau=\frac{v^2}{R}=3$$

则得此时 $v=3m/s$ (1)

而 $$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 3$$

由题意知 $t = 0$，$v_0 = 0$，则 $$v = 3t \quad (2)$$

由式 (1)和式 (2)得 $$t = 1s$$

又由 $$v = \frac{ds}{dt} = a_\tau t$$

则 $$s = \frac{1}{2} a_x t^2$$

在一秒内的路程为 $$s = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = 1.5m$$

角位移为 $$\Delta\theta = \frac{s}{R} = \frac{1.5}{3} = 0.5rad$$

三、计算与证明题

1. 一雨滴从高空云层由静止竖直下落，其加速度随速度的变化关系为 $a = m - nv$ （SI），式中 m、n 为常数。试求雨滴的下落速度 v 与时间 t 的函数关系，并讨论雨滴的运动情况。（假设雨滴在下落过程中质量不变。）

[分析与解答] 选雨滴的下落方向为 y 轴正方向，雨滴起点为坐标原点。

按题意 $t = 0$ 时，$y_0 = 0, v_0 = 0$。

由 $$a = \frac{dv}{dt} = m - nv$$

分离变量并积分得 $$\int_0^v \frac{dv}{m - nv} = \int_0^v -\frac{1}{n}\frac{d(m - nv)}{m - nv} = \int_0^t dt$$

$$v = \frac{m}{n}(1 - e^{-nt})$$

结果表明，雨滴速度随时间按指数规律增长，雨滴作加速运动。

当 $t \to \infty$ 时，$v = \frac{m}{n} =$ 常量，表明雨滴将以该极限速度作匀速运动。

2. 一质点以半径 $R = 6m$ 作圆周运动，其在自然坐标系中运动方程为：

$$s = bt + \frac{1}{2}ct^2 \quad (SI)$$

式中，$b = 2.0m/s$，$c = 1.0m/s^2$。试求质点切向加速度与法向加速度大小相等之前，其所经历的时间。

[分析与解答] 由题设方程可知，质点圆周运动的速率为

$$v=\frac{ds}{dt}=b+ct$$

则其切向加速度的大小为 $a_\tau=\frac{dv}{dt}=c$

则其法向加速度的大小为 $a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{b^2+c^2t^2}{R}$

按题意有 $a_\tau=a_n$，即

$$\frac{b^2+c^2t^2}{R}=c$$

代入 $b=2.0m/s$，$c=1.0m/s^2$，$R=6m$，得

$$t=\sqrt{2}s$$

3. 一小球沿 X 轴作直线运动，其 x～t，v～t，a～t 曲线分别如图 1-8（a）（b）（c）所示。试求：

（1）小球的运动方程；

（2）分析小球在 0～3s 内的运动情况；

（3）3s 内的位移和路程。

[分析与解答]（1）由 a～t 曲线可知，$a=-8m/s^2$，表明小球做匀变速直线运动，其标准方程为：

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \quad (SI)$$

又由 v～t 和 x～t 曲线可知，当 $t=0$时，$x_0=10m$，$v_0=8m/s$。

所以，小球的运动方程为：$x=10+8t-4t^2$（SI）

（2）在 $t=0$时，$x_0=10m$，$v_0=8m/s$，$a=-8m/s^2$。此时，质点开始沿 X 轴正方向匀减速运动；

在 $t=1s$时，质点到达 X 轴正方向最远处，即 $x=14m$，但此时 $v_1=0$，$a=-8m/s^2$，表明此时刻质点瞬间静止，处于换向点；

在 1~3s 内，速度 $v<0$，$a=-8m/s^2$，表明质点沿 X 轴反方向作匀加速直线运动。

在 $t=3s$时，质点到达 $x=-2m$ 处。

（3）由 x～t 曲线上可以看出，在 0~3s 内的位移为：

$$\Delta x=x_3-x_0=-2-10=-12m$$

路程为： $s=(x_1-x_0)+|x_3-x_1|=(14-10)+|-2-12|=20\text{m}$

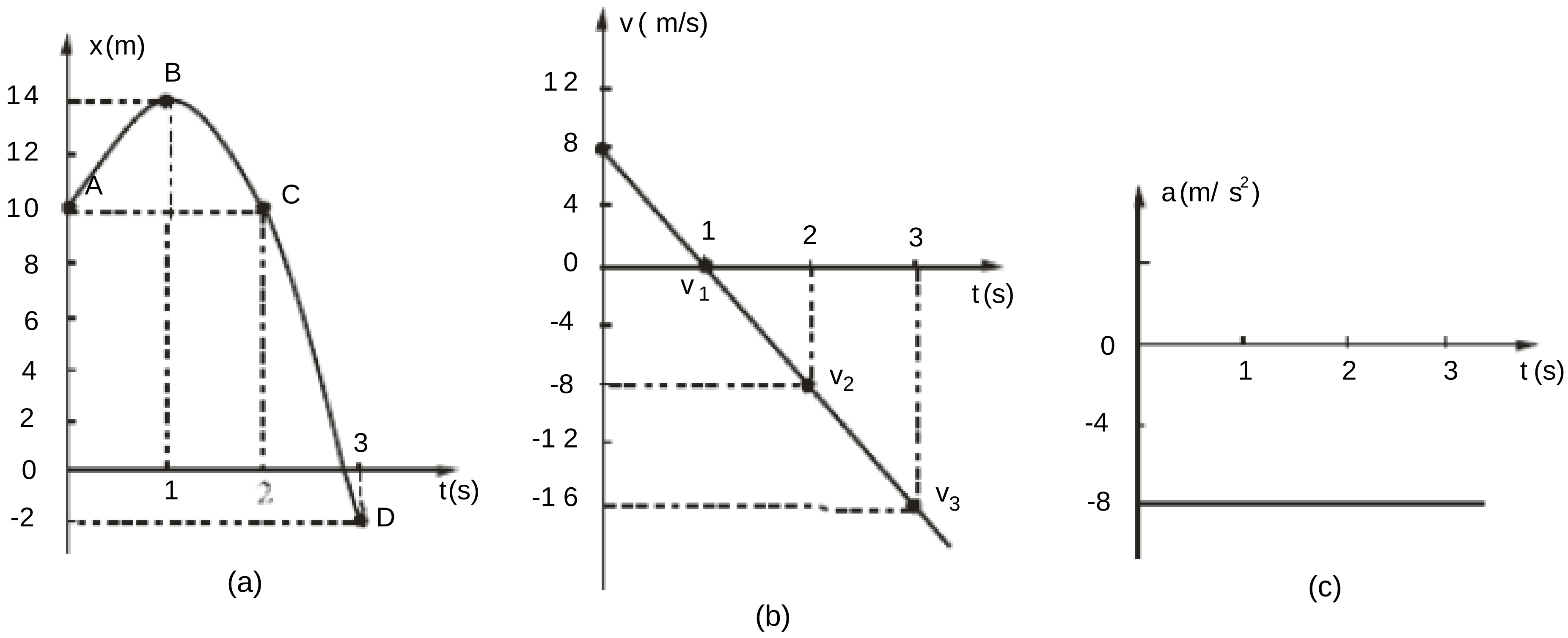


图 1-8

4．已知某行星的运动方程为 $\mathbf{r}=A\cos\omega t\,\mathbf{i}+B\sin\omega t\,\mathbf{j}$（SI），式中 A、B、$\omega$均为正的常数，且 $A>B$，$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$ 分别为 x、y 轴的单位矢量。

（1）试证：该行星的运动轨迹为椭圆；

（2）试求行星的加速度 $\mathbf{a}$；

（3）试说明：行星途径第二象限任一点 M 时（如图 1-9 所示），是加速还是减速运动？

[分析与解答]（1）由题设可知，该行星运动方程的分量式为：

$$x=A\cos\omega t,\qquad y=B\sin\omega t$$

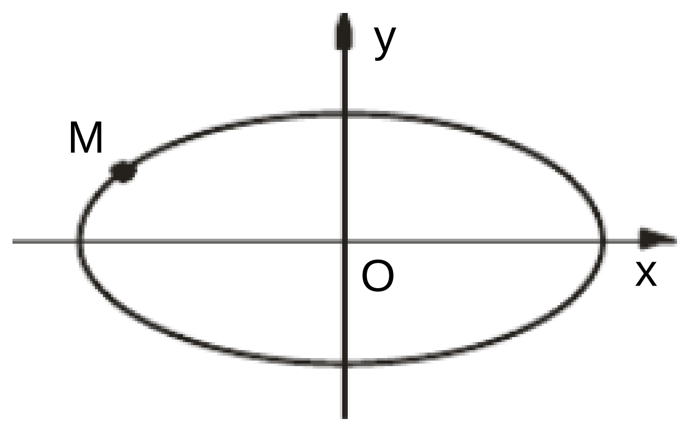


图 1-9

消去 t 得

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

表明行星是以 2A 为长轴，2B 为短轴作椭圆轨道运动。

（2）因为

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega^2\cos\omega t$$

$$a_y=\frac{d^2y}{dt^2}=-B\omega^2\sin\omega t$$

则

$$\begin{aligned}\mathbf{a}&=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}\\&=-A\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{i}-B\omega^2\sin\omega t\,\mathbf{j}\\&=-\omega^2\mathbf{r}\end{aligned}$$

即 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{r}$ 反向，表明 $\mathbf{a}$ 恒指向椭圆中心。

（3）因为 $v=\frac{dr}{dt}=-\omega A\sin\omega t\mathbf{i}+\omega B\cos\omega t\mathbf{j}$

$$\mathbf{a}=-\omega^2 A\cos\omega t\mathbf{i}-\omega^2 B\sin\omega t\mathbf{j}=-\omega^2\mathbf{r}$$

而 $$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}=(-\omega^2 A\cos\omega t\mathbf{i}-\omega^2 B\sin\omega t\mathbf{j})\cdot(-\omega A\sin\omega t\mathbf{i}+\omega B\cos\omega t\mathbf{j})$$

$$=\omega^3\sin\omega t\cos\omega t(A^2-B^2)$$

由题意知，此时行星在通过图中在第二象限的 **M** 点，有

$\sin\omega t>0$，$\cos\omega t<0$，且 $A>B$，$\omega>0$

则 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}<0$

a 与 v 夹角为钝角，表明在 **M** 点切向加速度 a_τ 的方向与速度 v 的方向相反。所以，质点在通过 **M** 点时速率会减小。

四、简答题

1．质点在 xOy 平面内运动，**r** 为位置矢量。试说明 $|\Delta\mathbf{r}|\neq\Delta r$，并画出简图。

[答]：$|\Delta\mathbf{r}|$ 是位置矢量的模，它反映了 **r** 的大小、方向两个因素的变化。而 $\Delta r=\Delta|\mathbf{r}|$ 称为径向增量，它只反映 **r** 的大小变化，如图 1-10 所示。

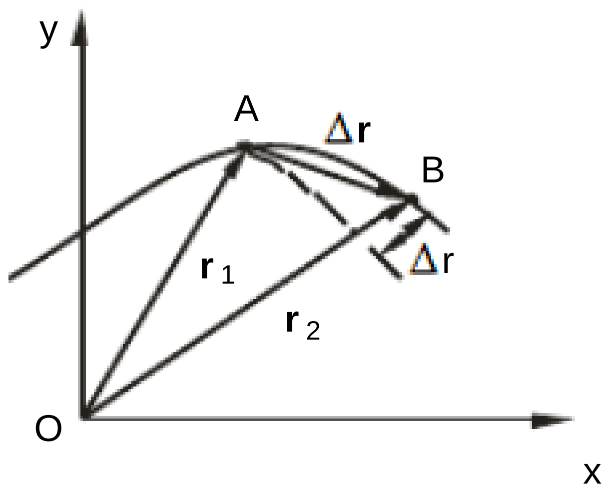


图 1-10

2. 一个作平面运动的质点，其切向加速度 a_τ 和法向加速度 a_n 均不为零，试讨论在下列条件下质点的运动情况：

（1）加速度 $\mathbf{a}=$ 恒矢量；

（2）加速度 **a** 随时间变化。

[答]：（1）a_τ、a_n 不为零，表明质点速度的大小、方向均变化，但加速度 **a** 是恒矢量，表明质点作抛体运动。

（2）若 **a** 随时间变化，则质点作一般曲线运动。若其曲率半径 ρ 等于常量，则质点作变速圆周运动。

二、牛顿运动定律

一、选择题

（在下列各题中，均给出了 4 个~5 个答案，其中有的只有 1 个是正确答案，有的则有几个是正确答案，请把正确答案的英文字母序号填在题后的括号内）

1．在下列关于力的叙述中，正确的是：

A．质点受到不为零的合力是其运动状态发生变化的原因；

B．质点所受的静摩擦力总是与其运动方向相反；

C．质点所受静摩擦力的大小总等于摩擦因数乘以正压力；

D．作用于质点的合力方向必与其运动方向相同；

E．作用于质点的合力方向必与其加速度方向一致。 （A、E）

[知识点] 力是运动状态变化的原因，最大静摩擦力及静摩擦力的方向。

[分析与解答] 质点受到不为零的合力不是质点运动的原因，而是质点运动状态变化的原因。

质点受到的静摩擦力的方向不是与运动方向相反，而是与相对运动趋势相反。

质点所受静摩擦力的大小等于外力的大小，并不等于正压力与摩擦因数的乘积。

合外力的方向不是与速度方向相同，而是与加速度方向相同。

2．在下列关于力与运动关系的叙述中，正确的是：

A．若质点所受合力的方向不变，则一定作直线运动；

B．若质点所受合力的大小不变，则一定作匀加速直线运动；

C．若质点所受合力恒定，肯定不会作曲线运动；

D．若质点从静止开始，所受合力恒定，则一定作匀加速直线运动；

E．若质点所受合力越大，则质点速度必定越大。 （D）

[知识点] 物体受力后的运动与初始条件有关。

[分析与解答] 质点的运动轨迹不仅与受力情况有关，还与初始条件有关，如质点受一恒力 **F** 作用时，若初速度为零，则质点必作匀加速运动；若初速度不为零，则质点可能作直线运动（ v_0 与 **F** 方向一致），也可能作抛体运动（ v_0 与 **F** 夹角不为零），或圆周运动（ v_0 垂直于 **F**）等。而且质点受力越大，必产生加速度越大，速度的变化就越快，但速度是增大还是减少，应视速度与加速度（即力）的方向而定，两者夹角为锐角，速度增大；夹角为钝角，速度会越来越小。

3．如图 2-1(a) 所示，质量为 m 的小球，沿半径为 R 的圆弧形光滑轨道由静止下滑，则在下滑的过程中

A．小球的加速度方向始终指向圆心；

B．轨道对小球的作用力的大小不断增加；

C．小球所受的合力大小变化，并始终指向圆心；

D．小球所受的合力不变，但速率不断增加。 （B）

[知识点] 力的分析，加速度方向，自然坐标系中“牛顿第二定律”的法向表达式。

[分析与解答] 受力分析如图 2-1(b) 所示，列自然坐标系牛顿第二定律分量式

$$F_N - mg\sin\theta = m\frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

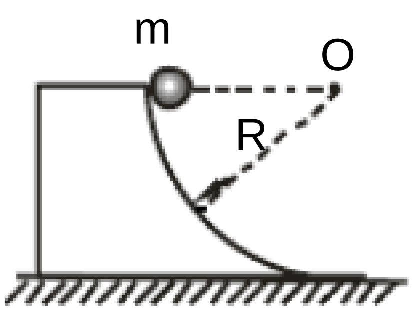


图 2-1(a)

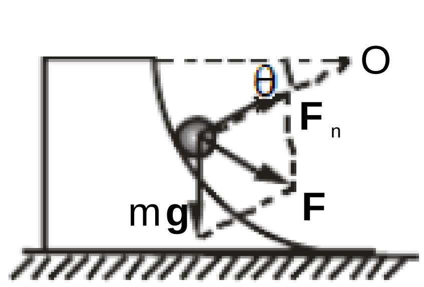


图 2-1(b)

$$mg\cos\theta = m\frac{dv}{dt} \qquad (2)$$

由(2)知，小球下滑过程中速率 v 是不断增加的。

由(1)知，轨道对小球的支撑力的大小 F_N 是不断增加的，但从图知，其方向始终指向圆心在不断变化，因此由力的合成知，合力 **F** 的大小和方向会随时间不断变化，且不会指向圆心（如图 2-1(b) 所示），而合加速度的方向与合力 **F** 一致。

4. 如图 2-2(a)所示，两个质量分别为 m_A 和 m_B 的物体 A、B，一起在水平面上沿 x 轴正向作匀减速直线运动，加速度大小为 a，A 与 B 间的静摩擦因数为 μ，则 A 作用于 B 的静摩擦力 **F** 的大小和方向分别为

A. $\mu m_B g$，与 x 轴正向相反。

B. $\mu m_B g$，与 x 轴正向相同。

C. $m_B a$，与 x 轴正向相同。

D. $m_B a$，与 x 轴正向相反。 （D）

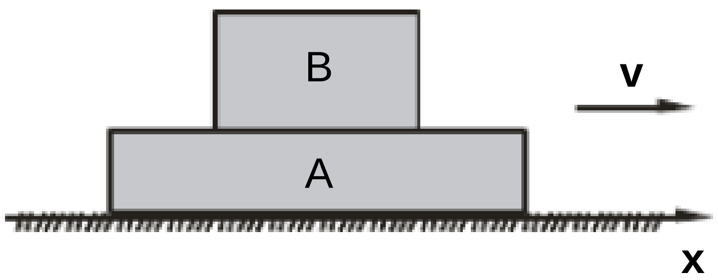


图 2-2(a)

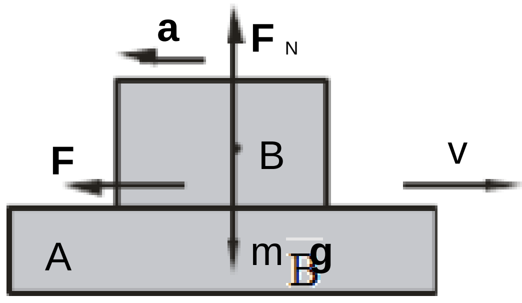


图 2-2(b)

[知识点] 静摩擦力，牛顿第二定律在直角坐标系中的分量式。

[分析与解答] 由于静摩擦力的方向与相对运动趋势相反，而物体 B 由于惯性，其有相对于 A 物体有继续向前的趋势，则 A 作用于 B 的静摩擦力 **F** 方向必与 x 轴正向相反（如图 2-2(b) 所示），且由于 A、B 物体共同作匀减速直线运动，则有如图所示加速度 **a**，而 B 在 x 方向只有 **F** 作用，则 **F** 与 **a** 方向相同，对物体 B 列牛顿第二定律在 x 方向的分量式，有

$$F = m_B a$$

5. 质量为 m 的质点沿 X 轴方向运动，其运动方程为 $x = A\cos\omega t$。式中 A、ω 均为正的常量，t 为时间变量，则该质点所受的合外力 F 为：

A. $F = \omega^2 x$； B. $F = m\omega^2 x$；

C. $F = -m\omega x$； D. $F = -m\omega^2 x$。 （D）

[知识点] 第 I 类问题。

[分析与解答] 由题设的运动方程可知，质点运动的加速度为

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos\omega t = -\omega^2 x$$

再由牛顿定律 $F = ma$，得 $F = -m\omega^2 x$

6．质量为 $m = 10\text{kg}$ 的物体在力 $\mathbf{F} = (120t + 40)\,\mathbf{i}$（SI）作用下沿 x 轴运动，$t = 0$ 时，$v_0 = 6\text{m/s}$，则 $t = 3\text{s}$ 时其速度大小为：

A．120m/s； B．66m/s；

C. 72m/s； D．126m/s。 （C）

[知识点] 第Ⅱ类问题。

[分析与解答] 由牛顿第二定律的分量式有

$$F_x = ma_x = m\frac{dv}{dt} = 120t + 40$$

分离变量，积分，并注意初始条件，则有

$$\int_6^v m\,dv = \int_0^t (120t + 40)\,dt$$

$$m(v - 6) = 60t^2 + 40t$$

将 $m = 10\text{kg}$ 代入上式，则 $v = 6t^2 + 4t + 6$

当 $t = 3\text{s}$ 时，速率为 $v_3 = 6 \times 3^2 + 4 \times 3 + 6 = 72\text{m}$

7. 质量 $m = 10\text{kg}$ 的木箱放在光滑的地面上，在水平拉力 F 的作用下由静止开始沿直线运动，其拉力随时间的变化关系如图 2-3 所示，则在 $t = 7\text{s}$ 时其速度大小为

A．12m/s； B．16.5m/s；

C. 7m/s； D．2.5m/s。 （B）

[知识点] 图线运用，第Ⅱ类问题。

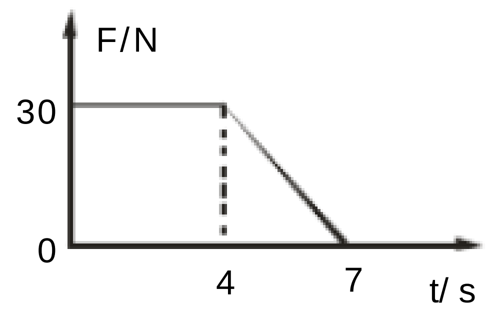


图 2-3

[分析与解答] 由图 2-3 知，当 $0 < t \le 4\text{s}$ 时，$F_1 = 30\text{N}$

当 $4\text{s} < t \le 7\text{s}$ 时，$F_2 = 30 - 10(t - 4) = 70 - 10t$

由牛顿第二定律的分量式，且 $m = 10\text{kg}$ 得

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

分离变量，积分并注意初始条件，则得 $\int_0^t F\,dt = \int_0^v m\,dv$

$$\int_0^4 F_1 dt + \int_4^t F_2 dt = 10v$$

$$\int_0^4 30dt + \int_4^t (70 - 10t)\,dt = 10v$$

由此可得 $$v=7t-\frac{1}{2}t^2-8$$

当 t=7s 时，速率为 $$v=7\times7-\frac{1}{2}\times7^2-8=16.5\text{m/s}$$

8. 如图 2-4 所示，绳子通过两个定滑轮，在两端分别挂一个质量均为 m 的完全相同的物体，初始时它们处于同一高度。如果使右边的物体在平衡位置附近来回摆动，则左边的物体的运动为

A．向上运动；

B．向下匀速运动；

C．向下加速运动；

D．保持不动；

E．时而向上，时而向下运动。 （E）

图 2-4(a) 图 2-4(b)

[知识点] 牛顿第二定律在自然坐标系中的分量式。

[分析与解答] 分析受力如图 2-4(b)，建立自然坐标系，列牛顿第二定律在自然坐标系中的分量式

$$F_T-mg\cos\theta=m\frac{v^2}{l} \qquad 得 \qquad F_T=mg\cos\theta+m\frac{v^2}{l}$$

设物体的最大摆角为 θ'，即物体在摆动过程中，绳子的张力 F_T 在 $mg\cos\theta'$ 与 $mg+m\frac{v^2}{l}$ 之间作周期性的变化，当 $F_T=mg+m\frac{v^2}{l}$ 时，$F_T>mg$，左边物体将向上作加速运动；当 $F_T=mg\cos\theta'$ 时，$T<mg$，左边物体将向下作加速运动。

二、填空题

1. 一质量为 m 的木块在水平面上作直线运动，当速度为 v_0 时仅在摩擦力作用下开始作匀减速

运动，经过距离 s 后停止，则木块加速度的大小为 $a=\dfrac{v_0^2}{2s}$；木块与水平面间的滑动摩擦因数为 $\mu=\dfrac{v_0^2}{2gs}$。

[知识点] 一维匀变速运动规律，滑动摩擦力。

[分析与解答] 对一维匀减速运动，有 $v^2=v_0^2-2as$

而由题意知经过 s 距离后，木块停止运动，即 $v=0$

则 $a=\dfrac{v_0^2}{2s}$

又木块在运动方向只受滑动摩擦力 F 作用，由牛顿第二定律知

$$F=ma=m\frac{v_0^2}{2s} \qquad (1)$$

又滑动摩擦力 $F=\mu mg \qquad (2)$

由式(1)和式(2)得 $\mu mg=m\dfrac{v_0^2}{2s}$

得滑动摩擦因数为 $\mu=\dfrac{v_0^2}{2gs}$

2. 质量为 m_1 的质点，置于长为 l、质量为 m_2 的均质细杆的延长线上， 质点与细杆近端距离为 r，选如图 2-5（a）所示坐标系，则细杆上长度为 dx 的一段与质点之间万有引力的大小为 $dF=G\dfrac{m_1\frac{m_2}{l}}{x^2}dx$，细杆段与质点之间万有引力的大小为 $F=G\dfrac{m_1m_2}{r(r+l)}$。选如图 2-5（b）所示坐标系，则细杆上长度为 dx 的一段与质点之间万有引力的大小为 $dF=G\dfrac{m_1m_2}{l(r+x)^2}dx$，细杆段与质点之间万有引力的大小为 $F=G\dfrac{m_1m_2}{r(r+l)}$。

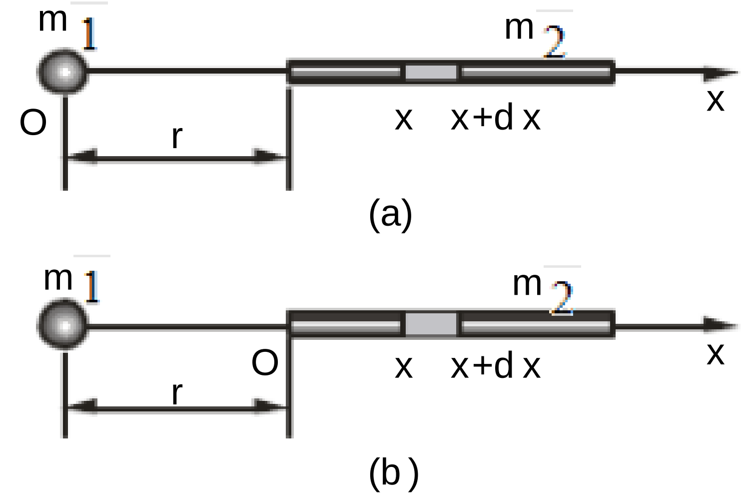


图 2-5

[知识点] 微元的选取，万有引力的计算。

[分析与解答] 由于万有引力定律只适用于两个质点，对于两个有限大且不能看作质点的物体，它们之间的万有引力应是组成此物体的各个质点与组成另一个物体的各个质点之间的所有引力的矢量和。

将细杆看作由无数段微元长度 dx 组成，微元质量为 $dm = \frac{m_2}{l} dx$，若取如图 2-5（a）所示坐标，其与质点 m_1 的万有引力大小为

$$dF = G\frac{m_1 dm}{x^2} = G\frac{m_1 \frac{m_2}{l} dx}{x^2}$$

由于细杆上所有微元与质点 m_1 的万有引力 $d\mathbf{F}$ 方向一致，则矢量和变为代数和，则细杆与质点间的万有引力为

$$F = \int dF = \int_r^{r+l} \frac{Gm_1 m_2}{lx^2} dx = \frac{Gm_1 m_2}{l}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+l}\right) = \frac{Gm_1 m_2}{r(r+l)}$$

若取如图 2-5（b）所示坐标，微元 dx 与质点 m_2 的万有引力的大小为

$$dF = G\frac{m_1 dm}{(r+x)^2} = G\frac{m_1 \frac{m_2}{l} dx}{(r+x)^2} = G\frac{m_1 m_2}{l(r+x)^2} dx$$

同理，细杆与质点间的万有引力大小为

$$F = \int dF = \int_0^l G\frac{m_1 m_2}{l(r+x)^2} dx = G\frac{m_1 m_2}{r(r+l)}$$

3. 质量为 $m = 5kg$ 的质点在 xOy 平面运动，其运动方程为 $\mathbf{r} = 6\mathbf{i} - 3t^2\mathbf{j}$（SI），则质点所受的合力 $\mathbf{F}$ 的大小为 F = <u>30</u> N，其方向为 <u>沿 y 轴负方向</u>。

[知识点] 平面运动的第 I 类问题。

[分析与解答] 已知运动方程 $\mathbf{r} = 6\mathbf{i} - 3t^2\mathbf{j}$

速度 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -6t\,\mathbf{j}$

加速度 $a = \frac{dv}{dt} = -6\,j$

则作用力 $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} = -5\times 6\,\mathbf{j} = -30\,\mathbf{j}$

其大小 F = 30N 负号表示其方向沿 y 轴负方向

4. 质量为 m 的质点在力 $F_x = c + bt$（SI）作用下，沿 x 轴正方向运动，式中 c、b 为正的常量。已知 $t = 0$，$x_0 = 0$，$v_0 = 0$。则

在任一时刻质点速率的表达式为 $v = \underline{\frac{c}{m} + \frac{b}{2m}t^2}$；

其运动方程为 $x = \underline{\frac{c}{2m}t^2 + \frac{b}{6m}t^3}$。

[知识点] 一维运动的第Ⅱ类问题。

[分析与解答] 由牛顿第二定律的分量式有 $F_x = c + bt = m\dfrac{dv}{dt}$

分离变量，积分并注意初始条件，则得 $\int_0^v m\,dv = \int_0^t (c + bt)dt$

$$mv = ct + \frac{1}{2}bt^2$$

即速率为 $v = \dfrac{c}{m}t + \dfrac{b}{2m}t^2$

又由一维运动的速率定义为 $v = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{c}{m}t + \dfrac{b}{2m}t^2$

分离变量，积分并注意初始条件，则得 $\int_0^x dx = \int_0^t \left(\dfrac{c}{m}t + \dfrac{b}{2m}t^2\right)dt$

即运动方程为 $x = \dfrac{c}{2m}t^2 + \dfrac{b}{6m}t^3$

5. 一质量为 $m = 0.25\text{kg}$ 的质点，受力 $\mathbf{F} = t\,\mathbf{i}$（SI）的作用，式中 t 为时间。$t = 0$ 时该质点以 $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{j}\,\text{m/s}$ 的速度通过坐标原点，则该质点任意时刻的位矢为 $\mathbf{r} = \underline{\dfrac{2t^3}{3}\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}}$ 。

[知识点] 平面运动的第Ⅱ类问题。

[分析与解答] 本题可用两种方法求解。

方法 1 ：由牛顿第二定律，有 $\mathbf{F} = m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = t\,\mathbf{i}$

分离变量，代入 $m = 0.25\text{kg}$，积分并注意初始条件，则 $\int_{2j}^{v} m\,dv = \int_0^t t\ j\ dt$

$$m(\mathbf{v} - 2\,\mathbf{j}) = \frac{1}{2}t^2\,\mathbf{i}$$

则速度为 $v = 2t^2 i + 2j$

又由速度的定义式有 $v = \dfrac{dr}{dt} = 2t^2 i + 2j$

分离变量，积分并注意初始条件（ $t=0$ 时 $v_0=0$），则

$$\int_0^r dr = \int_0^t (2t^2 i + 2j)dt$$

则位矢为 $r = \dfrac{2}{3}t^3 i + 2t\ j$

方法 2：依题意 $F_x = t$，$F_y = 0$，$t = 0$，$v_x = 0$，$v_y = 2\text{m/s}$，$x_0 = 0$，$y_0 = 0$

则由牛顿第二定律分量式，有 $F_x = m\dfrac{dv_x}{dt} = t$

分离变量，代入 $m = 0.25kg$，积分并注意初始条件，则 $\int_0^{v_x} m dv_x = \int_0^t t dt$

$$mv_x = \frac{1}{2}t^2$$

x 方向速度分量为 $v_x = 2t^2$

又 $v_x = \dfrac{dx}{dt} = 2t^2$

分离变量，积分并注意初始条件，则 $\int_0^x dx = \int_0^t 2t^2 dt$

$$x = \frac{2}{3}t^3$$

同理 $F_y = m\dfrac{dv_y}{dt} = 0$ 即 $m dv_y = 0$

$\int_2^{v_y} m dv_y = 0$ 即 $v_y = 2m/s$

又 $v_y = \dfrac{dy}{dt} = 2$

$\int_0^y dy = \int_0^t 2dt$ 得 $y = 2t$

则位矢为 $r = x i + y j = \dfrac{2}{3}t^3 i + 2t j$

6. 质量为 m 的物体，在水平力 $F = -kx$ 作用下沿 x 轴运动。已知在 $t = 0$ 时，$x_0 = A$，$v_0 = 0$。若令 $\dfrac{k}{m} = \omega^2$，则物体运动的速度与位置坐标的关系为 $v =$ $\underline{\omega\sqrt{A^2 - x^2}}$，其运动方程为 $x =$ $\underline{A\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})}$。

[知识点] 变力 F=F (x)的第Ⅱ类问题，$\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = v\dfrac{dv}{dx}$ 变量代换。

[分析与解答] 由牛顿第二定律有 $-kx = m\dfrac{dv}{dt} = m\dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = mv\dfrac{dv}{dx}$

分离变量 $vdv = -\dfrac{k}{m}dx = -\omega^2 x dx$

积分并注意初始条件 $\int_0^v v dv = -\omega^2\int_A^x x dx$

$$\frac{1}{2}v^2=-\omega^2\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}A^2\right)=\frac{1}{2}\omega^2(A^2-x^2)$$

$$v=\omega\sqrt{A^2-x^2}$$

又有 $$v=\frac{dx}{dt}\omega\sqrt{A^2-x^2}$$

分离变量，积分并注意初始条件，则有 $$\int_A^x\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=\int_0^t\omega dt$$

$$\arcsin\frac{x}{A}\bigg|_A^x=\omega t \quad 即 \quad \arcsin\frac{x}{A}-\frac{\pi}{2}=\omega t$$

$$\frac{x}{A}=\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

即运动方程为 $$x=A\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

7. 在光滑的水平桌面上，有一自然长度为 l_0，劲度系数为 k 的轻弹簧，其一端固定，另一端系一质量为 m 的小球。若小球在桌面上以角速度 ω 绕固定端作匀速圆周运动，则该圆周的半径 $R=\frac{kl_0}{k-m\omega^2}$，弹簧作用于质点的拉力 $F=\frac{kl_0m\omega^2}{k-m\omega^2}$。

[知识点] 牛顿第二定律的自然坐标系表达式，角量与线量关系。

[分析与解答] 小球在作圆周运动时受到弹簧拉力、向心力 F 的作用，则

$$F=m\frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

设圆周运动半径为 R，则弹簧 A 的拉力为 $$F=k(R-l_0) \qquad (2)$$

而 $$v=\omega R \qquad (3)$$

联立式(1)、式(2)和式(3)，有 $$k(R-l_0)=m\omega^2R$$

则得 $$R=\frac{kl_0}{k-m\omega^2}$$

由(2)式得弹簧的拉力为

$$F=k\left(\frac{kl_0}{k-m\omega^2}-l_0\right)=\frac{kl_0m\omega^2}{k-m\omega^2}$$

8. 直升飞机升力螺旋桨由对称的叶片组成，每一叶片的质量为 $m=136\ \text{kg}$，长度 $l=3.66\text{m}$。

当它的转数 $n = 320rev/min$ 时，则叶片根部张力的表达式为 $F_T = \frac{1}{2}m\omega^2 l$ ；其值为 2.79×10^5N 。（设叶片为均匀薄片）

[知识点] 绳索或细杆质量不能忽略时的张力计算。

[分析与解答] 叶片不同位置处的质元受到的张力不同，则在叶片上选取距固定端 x 处的微小质元 dx 为研究对象，其受力如图 2-6 所示，微元质量为 $dm = \frac{m}{l}dx$

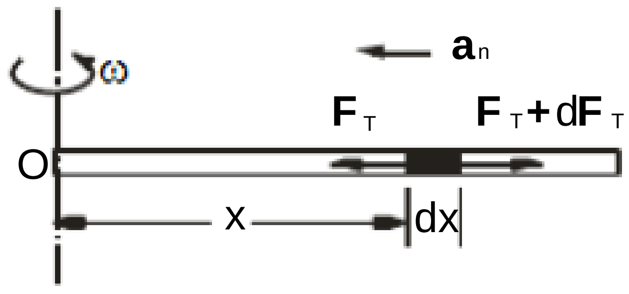


图 2-6

对微元 dm 列法向方向牛顿第二定律方程

$$F_T - (F_T + dF_T) = (dm)a_n$$

$$-dF_T = \frac{m}{l}(\omega^2 x)dx$$

积分，并利用条件 $x = l$ 时， $F_T(l) = 0$，有

$$\int_{F_T(x)}^{0} dF_T = -\frac{m}{l}\omega^2 \int_x^l x dx$$

任一位置处的张力 $F_T(x) = \frac{m}{l}\omega^2\left(\frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{2}x^2\right) = \frac{m\omega^2}{2l}(l^2 - x^2)$

叶片根部即 $x = 0$处的张力为 $F_{T0} = \frac{1}{2}m\omega^2 l$

代入已知数据 $m = 136kg$， $l = 3.66m$， $\omega = 2\pi ml = 320 \times 2\pi/60 = 33.49rad/s$，则

$$F_{T0} = 2.79 \times 10^5 N$$

三、计算与证明题

1. 质量为 m，速度为 v_0的摩托车，在关闭发动机以后沿直线滑行，它所受到的阻力 $F = -cv$，式中 c 为正常数。试求 ：

（1）关闭发动机后 t 时刻的速度；

（2）关闭发动机后 t 时间内所走的路程。

[分析与解答] （1）由牛顿定律有： $F = -cv = m\frac{dv}{dt}$

分离变量 $\frac{dv}{v} = -\frac{c}{m}dt$

积分 $\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = \int_0^t -\frac{c}{m}dt$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\frac{c}{m}t$$

关闭发动机后 t 时刻的速度 $v=v_0 e^{-\frac{c}{m}t}$

（2）由速率的定义有 $v=\frac{ds}{dt}=v_0 e^{-\frac{c}{m}t}$

$$ds=v_0 e^{-\frac{c}{m}t}dt$$

$$\int_0^s ds=\int_0^t v_0 e^{-\frac{c}{m}t}dt=-\frac{mv_0}{c}\int_0^t e^{-\frac{c}{m}t}d(-\frac{c}{m}t)$$

关闭发动机后 t 时间内所走的路程 $s=\int_0^t v_0 e^{-\frac{c}{m}t}dt=\frac{mv_0}{c}(1-e^{-\frac{c}{m}t})$

2. 为了减轻冰雹灾害，现可采用发射防雹火箭的方法，根据气象部门提供的云层高度材料，适时引爆火箭，将碘化盐催化剂溅洒在云层上消冰。设火箭（含碘化盐）的质量为 m，其以 v_0 的速度竖直发射，火箭所受阻力 $F_r=kv$，式中 k 为正常数。试求：

（1）火箭发射达到最高点所需的时间；

（2）火箭所能到达的最大高度。（假设火箭在飞行过程中质量不变）

[分析与解答]（1）设火箭向上的竖直方向为 y 轴正向。火箭在空中受重力 mg 和阻力 $F_r=kv$ 作用而减速，由牛顿定律有

$$-mg-kv=m\frac{dv}{dt}$$

分离变量并积分 $\int_0^t dt=-\int_{v_0}^0\frac{mdv}{mg+kv}=-\int_{v_0}^0\frac{m}{k}\cdot\frac{d(mg+kv)}{(mg+kv)}$

$$t=\frac{m}{k}\ln(\frac{mg+kv_0}{mg})$$

（2）同理 $-mg-kv=m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=mv\frac{dv}{dy}$

分离变量并积分，得

$$\int_0^y dy=-\int_{v_0}^0\frac{mv\,dv}{mg+kv}$$

则最大高度为

$$y=\frac{m}{k}(v_0-\frac{mg}{k}\ln\frac{mg}{mg+kv_0})$$

3. 如图 2-7 所示，具有光滑半球形凹槽的物块 A 固定在桌面上，质量为 m 的质点从凹槽的半球面（半径为 R）的上端 P 点自静止下滑，当滑至 $\theta=30^\circ$ 的 Q 点时，试求：

（1）质点在 Q 点的速率；

（2）质点在 Q 点对球面的压力。

[分析与解答]

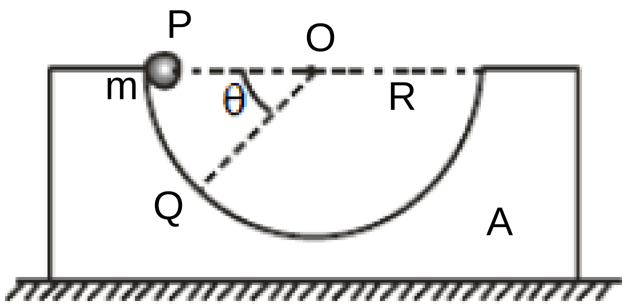


图 2-7

（1）以小球为研究对象，小球在下滑过程中受到重力 mg 和球面的支撑力 F_N。取自然坐标系，列出牛顿定律方程

法向有：

$$F_N - mg\sin\theta = m\frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

切向有：

$$mg\cos\theta = m\frac{dv}{dt} \qquad (2)$$

由于 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{dv}{d\theta} = \frac{v}{R}\frac{dv}{d\theta}$，代入（2）式，得

$$g\cos\theta = \frac{v}{R}\frac{dv}{d\theta}$$

分离变量并积分

$$\int_0^v v\,dv = \int_0^\theta gR\cos\theta\,d\theta$$

得

$$v = \sqrt{2gR\sin\theta}$$

当 $\theta = 30^\circ$，质点在 Q 点的速率为 $v = \sqrt{gR}$

（2）将 $v = \sqrt{2gR\sin\theta}$ 代入（1）式，得

$$F_N = 3mg\sin\theta$$

当 $\theta = 30^\circ$，质点在 Q 点受到的支撑力为 $F_N = \frac{3}{2}mg$

支撑力 F_N 与质点对球面的压力 F_N' 为一对作用力与反作用力，所以

$$F_N' = -F_N = -\frac{3}{2}mg$$

三、刚体定轴转动

一、选择题

（在下列各题中，均给出了 4 个~5 个答案，其中有的只有 1 个是正确答案，有的则有几个是正确答案，请把正确答案的英文字母序号填在题后的括号内）

1. 某刚体绕定轴作匀变速转动，对刚体上距转轴为 r 处的任一质元来说，在下列关于其法向加速度 a_n 和切向加速度 a_τ 的表述中，正确的是：

A. a_n、a_τ 的大小均随时间变化；

B. a_n、a_τ 的大小均保持不变；

C. a_n 的大小变化， a_τ的大小保持恒定；

D. a_n 的大小保持恒定， a_τ大小变化。 （C）

[知识点］刚体匀变速定轴转动特征，角量与线量的关系。

[分析与题解] 刚体中任一质元的法向、切向加速度分别为 $a_n = \omega^2 r$， $a_\tau = \beta r$

当 $\beta =$恒量时， $\omega = \omega_0 + \beta t$ ，显然 $a_n = \omega^2 r = (\omega_0 + \beta t)^2 r$，其大小随时间而变， $a_\tau = \beta r$ 的大小恒定不变。

2. 两个均质圆盘 A 和 B，密度分别为 ρ_A 和 ρ_B，且 $\rho_A > \rho_B$，但两圆盘的质量和厚度相同。若两盘对通过盘心且与盘面垂直的轴的转动惯量分别为 I_A 和 I_B，则

A. $I_A > I_B$； B. $I_A < I_B$；

C. $I_A = I_B$； D. 不能确定 I_A 和 I_B 的相对大小。 （B）

[知识点］转动惯量的计算。

[分析与题解] 设 A、B 两盘厚度为 d，半径分别为 R_A 和 R_B，由题意，二者质量相等，即

$$\pi R_A^2 d \rho_A = \pi R_B^2 d \rho_B$$

因为 $\rho_A > \rho_B$， 所以 $R_A^2 < R_B^2$

且转动惯量 $I = \frac{1}{2} m R^2$，则 $I_A < I_B$

3. 在下列关于刚体的表述中，不正确的是：

A．刚体作定轴转动时，其上各点的角速度相同，线速度不同；

B. 刚体定轴转动的转动定律为 $M = I\beta$，式中 M, I, β 均对同一条固定轴而言的，否则该式不成立；

C. 对给定的刚体而言，它的质量和形状是一定的，则其转动惯量也是唯一确定的；

D．刚体的转动动能等于刚体上各质元的动能之和。 （C）

[知识点］刚体定轴转动的基本概念。

[分析与题解] 刚体定轴转动时，其上各点的角速度相同，线速度 $v = \omega r$ ；刚体定轴转动中，相关物理量对固定轴而言，转动惯量不仅与质量和形状有关，而且与转轴的位置有关；刚体的转动动能就是刚体上各质点的动能之和。

4. 一个作定轴转动的刚体受到两个外力的作用，则在下列关于力矩的表述中，不正确的是：

A．若这两个力都平行于轴时，它们对轴的合力矩一定是零；

B．若这两个力都垂直于轴时，它们对轴的合力矩可能为零；

C．若这两个力的合力为零时，它们对轴的合力矩一定是零；

D．只有这两个力在转动平面 S 上的分力对转轴产生的力矩，才能改变该刚体绕转轴转动的运动状态；

E．一对作用力和反作用力对同一轴的力矩之和一定为零。（C）

[知识点] 力矩的概念。

[分析与题解] 对转轴上任一点，力矩为 $\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$。若 $\mathbf{F}$ 与轴平行，则 $\mathbf{M}$ 一定与轴垂直，即轴的力矩 $M_z=0$，两个力的合力矩一定为零。

两个力都垂直于轴时，对轴上任一点的力矩都平行于轴，若二力矩大小相等，方向相反，则合力矩一定为零。

两个力的合力为零，如果是一对力偶，则对轴的合力矩不一定为零。

力在转动平面上的力矩 $\mathbf{M}_z=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$，力矩 M_z 是改变刚体运动状态的原因。

一对作用力和反作用力，对轴的力矩大小相等，符号相反，合力矩一定为零。

5. 在下列关于转动定律的表述中，正确的是：

A．对作定轴转动的刚体而言，内力矩不会改变刚体的角加速度；

B．两个质量相等的刚体，在相同力矩的作用下，运动状态的变化情况一定相同；

C．同一刚体在不同力矩作用下，必然得到不同的角加速度；

D．作用在定轴转动刚体上的力越大，刚体转动的角加速度越大；

E．角速度的方向一定与外力矩的方向相同。（A）

[知识点] 刚体定轴转动定理。

[分析与题解] 由于内力是成对出现的，所有内力矩的总和为零，因此内力矩不会改变刚体的运动状态。

由刚体绕定轴转动定理，$M=I\beta$ 知，质量相等的刚体，若转动惯量 I 不同，既使在相同的力矩作用下，运动状态的改变也不会相同（β 不同）。而同一刚体虽力矩 M 不同，但若对不同转轴的转动惯量 I 也不同，也会得到相同的角加速度 β 的。

若外力矩 $\mathbf{M}$ 的方向和角加速度 β 的方向一致，而角加速度 β 与角速度 ω 的方向可能相同，也可能相反。

6. 如图 4-1（a）所示，一轻绳绕在具有光滑水平转轴的定滑轮上，绳下端挂一质量为 m 的物体 A，此时滑轮的角加速度为 β。若将物体 A 卸掉，而改用力 $\mathbf{F}$ 拉绳子，该力的大小 $F=mg$，力的方向向下，如图（b）所示，则此时滑轮的角加速度将：

A．变大； B．不变；

C. 变小；　　D．无法判断。　　（A）

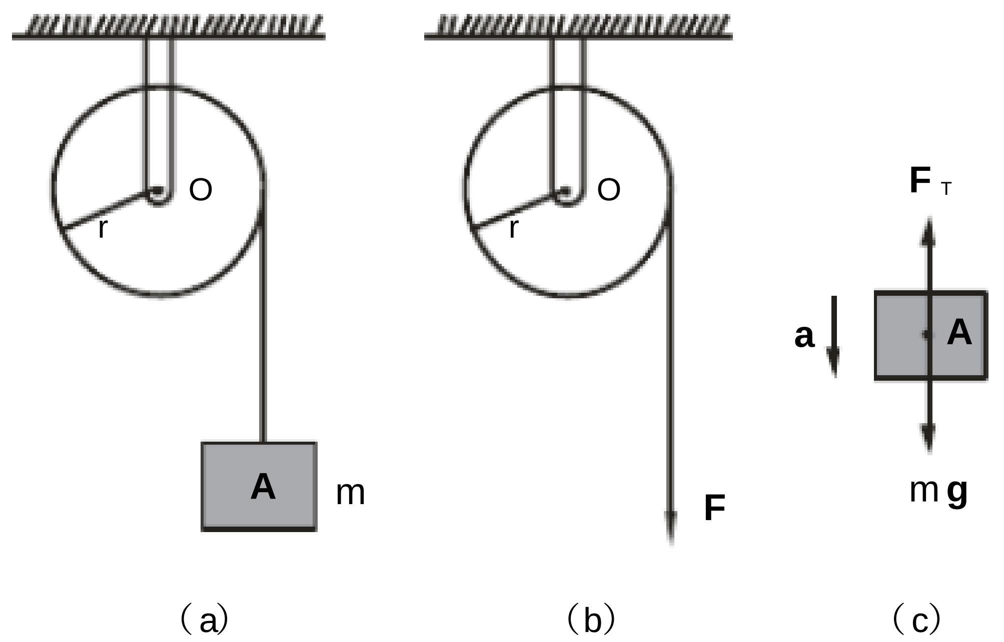


图 4-1

[知识点] 张力矩。

[分析与题解] 当绳下挂物体时，绳中张力为 F_T，设滑轮半径为 R，转动惯量为 I，物体的受力如 4-1 图 (c)所示，按牛顿运动定律有

$$mg - F_T = ma$$

滑轮的转动定律为 $F_T = I\beta_1$

又知 $a = R\beta_1$，解得 $\beta_1 = \dfrac{mgR}{mR^2 + I}$ (1)

当用 $F = mg$ 的力拉绳时，绳中张力就是 mg。

滑轮的转动定律为 $mgR = I\beta_2$，得 $\beta_2 = \dfrac{mgR}{I}$ (2)

比较式 (1)和式 (2)，显然有 $\beta_1 < \beta_2$

7. 如图 4-2(a)所示，两根长度和质量都相等的细直杆分别绕光滑的水平轴 O_1 和 O_2 转动，设它们从水平位置静止释放时的角加速度分别为 β_1 和 β_2；当它们分别转过 90° 时，端点 A、B 的速度分别为 v_A、v_B，则

A. $\beta_1 > \beta_2, v_A > v_B$；　　B. $\beta_1 = \beta_2, v_A = v_B$；

C. $\beta_1 < \beta_2, v_A < v_B$；　　D. $\beta_1 = \beta_2, v_A > v_B$；

E. $\beta_1 = \beta_2, v_A < v_B$。　　（D）

[知识点] 转动惯量 I 随轴不同，机械能守恒定律的应用。

[分析与题解] 两个细直杆的转动惯量分别为

$$I_1 = \frac{1}{3}ml^2,\qquad I_2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}ml^2$$

如图 4-2(b)，当它们转到铅直位置时，所受重力过转轴，则重力矩为

$$M_1 = M_2 = 0$$

则由 $M = I\beta$ 知，$\beta_1 = \beta_2 = 0$。

由于细杆在转动过程中，只受到重力矩作用，故转动过程机械能守恒。取转轴水平面为势能零点，则有

$$\frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = mg\frac{l}{2}$$

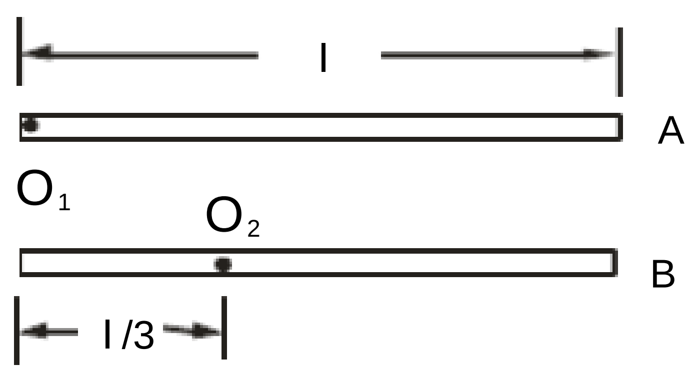


图 4-2(a)

即 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}ml^2\omega_1^2=mg\frac{l}{2}$

得 $\omega_1=\sqrt{\frac{3g}{l}}$

则 $v_A=\omega_1 l=\sqrt{3gl}$

同理 $\frac{1}{2}I_2\omega_2^2=mg\frac{l}{6}$

即 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}ml^2\omega_2^2=mg\frac{l}{6}$

$\omega_2=\sqrt{\frac{3g}{l}}$

则 $v_B=\omega_2\frac{2}{3}l=\frac{2}{3}\sqrt{3gl}$

显然 $v_A>v_B$

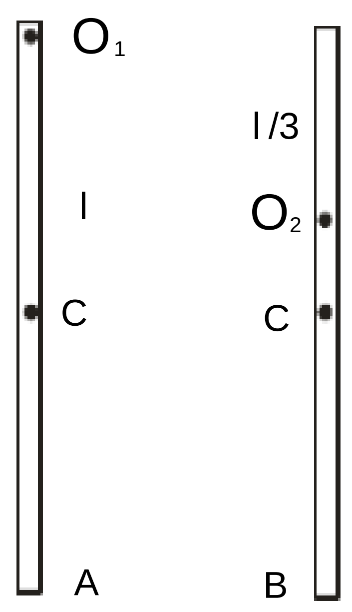


图 4-2(b)

8. 如图 4-3 所示，两飞轮 A、B 组成一摩擦啮合器。 A 通过与 B 之间的摩擦力矩带着 B 转动。则此刚体系在啮合前后：

A．角动量改变，动能也改变；

B．角动量改变，动能不变；

C. 角动量不变，动能改变；

D．角动量不变，动能也不变。 （C）

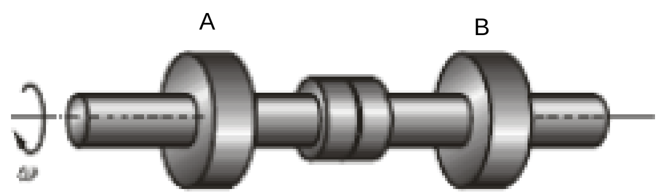


图 4-3

[知识点] 摩擦内力矩的作用 .

[分析与题解] 沿轴向作用的外力对轴不产生力矩， A、B两轮间的摩擦力为内力，故系统的角动量守恒，即 $I_A\omega=(I_A+I_B)\omega'$

由此得 $\omega'=\frac{I_A}{I_A+I_B}\omega$

$$E_k'=\frac{1}{2}(I_A+I_B)\omega'^2=\frac{1}{2}(I_A+I_B)\frac{I_A^2}{(I_A+I_B)^2}\omega^2=\frac{1}{2}\frac{I_A^2\omega^2}{I_A+I_B}=\frac{I_AE_k}{I_A+I_B}$$

可见，摩擦内力矩不改变系统的角动量，但改变动能。

9. 如图 4-4 所示，一圆盘绕通过盘心 O 且垂直于盘面的水平轴转动，轴间摩擦不计。两颗质量相同、速度大小相等、方向相反且沿同一直线运动的子弹，同时射进圆盘并留在盘内，则两子弹射入后的瞬间，圆盘和子弹系统的角动量 L 及圆盘的角速度 ω 将会：

A． L 不变， ω 增大； B． L 不变， ω 减小；

C. L 增大， ω 减小； D. L 增大， ω 增大。 （B）

[知识点] 角动量守恒。

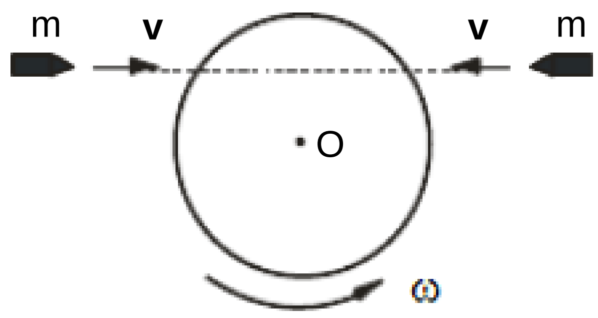


图 4-4

[分析与题解] 取子弹和圆盘为系统，在子弹射入圆盘过程中系统的角动量守恒。由于两颗子弹同时对称入射，故两子弹的初始角动量之和为零，所以有

$$I\omega_0 = (I + \Delta I)\omega$$

即

$$\omega < \omega_0$$

10. 如图 4-5 所示，有一半径为 R 的水平圆转台，可绕通过其中心的竖直固定光滑轴转动，转动惯量为 I。开始时转台以匀角速度 ω_0 转动，此时有一质量为 m 的人站在转台中心， 随后人沿半径方向向外跑去，当人到达转台边缘时，转台的角速度为

A. $\dfrac{I}{I + mR^2}\omega_0$； B. $\dfrac{I}{(I + m)R^2}\omega_0$；

C. $\dfrac{I}{mR^2}\omega_0$； D. ω_0

（A）

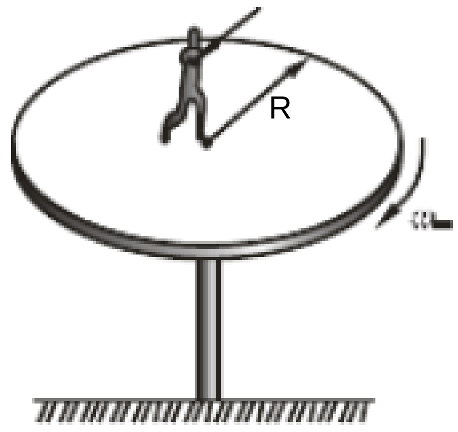


图 4-5

[知识点] 角动量守恒。

[分析与题解] 取人和转台为系统，在人沿半径方向向外跑过程中，系统的角动量守恒，则有

$$I\omega_0 = (I + I_{人})\omega$$

而人到转台边缘时， $I_{人} = mR^2$，即

$$I\omega_0 = (I + mR^2)\omega$$

则

$$\omega = \frac{I}{I + mR^2}\omega_0$$

二．填空题

1．一汽车发动机的曲轴，在 12s 内，其转速由 $n_0 = 1.2\times 10^3\ \mathrm{r/min}$ 均匀增加到 $n = 2.7\times 10^3\ \mathrm{r/min}$，则此曲轴转动的角加速度 $\beta =$ 13.1 $\mathrm{rad/s^2}$；在此时间内， 曲轴共转了 390 圈。

[知识点] 转动运动学的基本知识和运算。

[分析与解答] 本题中的曲轴作匀加速定轴转动，根据题意，曲轴的初速度为

$$\omega_0 = \frac{2\pi\times 1200}{60} = 40\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

终态运转角速度为 $\omega_2=\dfrac{2\pi\times2700}{60}=90\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

已知 $t=12\mathrm{s}$，故角加速度 β 为 $\beta=\dfrac{\omega_2-\omega_1}{\Delta t}=\dfrac{(90-40)\pi}{12-0}=\dfrac{25}{6}\pi=13.1\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$

在 12s 内曲轴的角位移为 $\Delta\theta=\theta-\theta_0=\omega_1 t+\dfrac{1}{2}\beta t^2$

$$=40\pi\times12+\frac{1}{2}\times\frac{25}{6}\pi\times(12)^2=780\pi\mathrm{rad}$$

因而曲轴在这一段时间内转过的圈数为 $N=\dfrac{780\pi}{2\pi}=390$

2. 半径为 R=1m 的飞轮，以角速度 $\omega_0=50\pi\ \mathrm{rad/s}$ 转动，受到制动后均匀减速，经 $t=50\mathrm{s}$ 后静止。则飞轮在 $t=25\mathrm{s}$ 时的角速度 ω = __78.5__ $\mathrm{rad/s}$；此时，飞轮边缘上某一点的切向加速度 a_τ= __-3.14__ $\mathrm{m/s^2}$；法向加速度 a_n = __6.16×10^3__ $\mathrm{m/s^2}$。

[知识点] 转动运动学的基本计算。

[分析与解答] 因为飞轮的运动是匀变速转动，因而其角加速度为

$$\beta=\frac{\omega-\omega_0}{\Delta t}=\frac{0-50\pi}{50}=-\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$$

飞轮在 $t=25\mathrm{s}$ 时的角速度为 $\omega_1=\omega_0+\beta t=50\pi-25\pi=25\pi=78.5\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

飞轮边缘上一点的切向加速度的大小为 $a_\tau=R\beta=-3.14\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

法向加速度为 $a_{n1}=R\omega_1^2=6.16\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

3. 刚体转动惯量的物理意义是 __刚体绕定轴转动惯性大小的量度__，它的计算公式为 $I=\int r^2 dm$，表明转动惯量的大小取决于 __刚体的总质量__、__质量分布情况__和 __转轴位置__三个因素。

[知识点] 转动惯量的概念。

4. 如图 4-6(a) 所示，一长为 l 而质量可以忽略的直杆，两端分别固定有质量为 2m 和 m 的小球，杆可绕通过其中心且与杆垂直的水平光滑固定轴在铅直平面内转动。开始时，杆与水平方向成 θ_0，并处于静止状态；释放后，杆绕 O 轴转动，则当杆转到水平位置时，该系统所受到的合外力矩的大小为 $M=$ __$\dfrac{1}{2}mgl$__，此时该系统角加速度的大小为 $\beta=$ __$\dfrac{2g}{3l}$__。

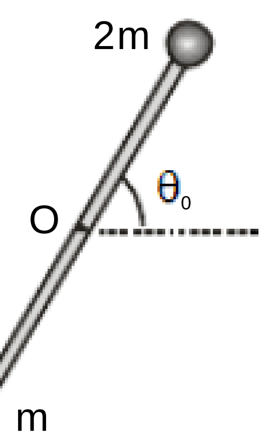


图 4-6(a)

[知识点] 力矩的计算，转动定律。

[分析与解答] 受力分析如图 4-6(b) 所示。小球 2m 和 m 的重力矩分别为

$$\mathbf{M}_1 = -2mg\frac{l}{2} = -mgl,\quad \mathbf{M}_2 = mg\frac{l}{2}$$

则系统所受合外力矩为 $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = -\frac{1}{2}mgl$

小球 2m 和 m 的转动惯量分别为

$$I_1 = 2m\left(\frac{1}{2}l\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2,\quad I_2 = m\left(\frac{1}{2}l\right)^2 = \frac{1}{4}ml^2$$

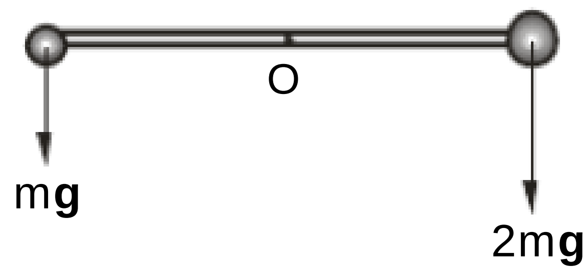


图 4-6(b)

系统的总转动惯量为 $I = I_1 + I_2 = \frac{3}{4}ml^2$

由转动定律 $\mathbf{M} = I\beta$ 有 $\beta = \frac{M}{I} = \frac{\frac{1}{2}mgl}{\frac{3}{4}ml^2} = \frac{2}{3}gl$

5. 如图 4-7 所示，长为 l，质量为 m 的均质细杆，其左端与墙用铰链 A 连接，右端用一铅直细线悬挂着，使杆处于水平静止状态，此时将细线突然烧断，则杆右端的加速度 $a = \underline{\frac{3g}{2}}\ m/s^2$。

[知识点] 转动定律的瞬时性。

[分析与解答] 当线烧断时，根据转动定律有

$$\beta = \frac{M}{I} = \frac{mg\frac{l}{2}}{\frac{1}{3}ml^2} = \frac{3}{2}gl$$

则右端的加速度为 $a = a_\tau = \beta l = \frac{3}{2}g$

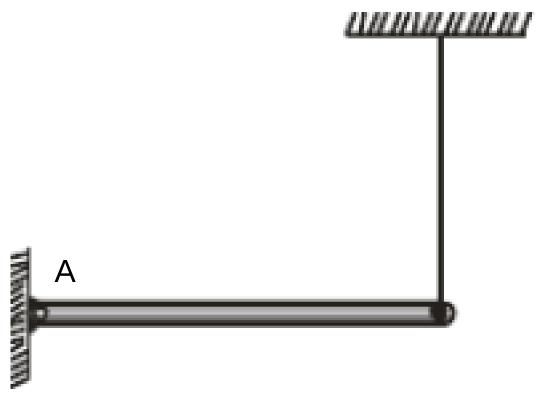


图 4-7

6. 刚体作定轴转动，其角动量的矢量表达式为 $\mathbf{L} = \underline{I\,\omega}$，角动量守恒的条件是 $\underline{M = 0}$。

[知识点] 刚体的角动量和角动量守恒条件。

7. 一定轴转动刚体的运动方程为 $\theta = 20\sin 20t$ (SI)，其其对轴的转动惯量为 $I = 100\text{kg}\cdot\text{m}^2$，则在 $t = 0$ 时，刚体的角动量为 $L = \underline{4.0\times10^4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$；刚体的转动动能 $E_k = \underline{8.0\times10^6}$ J。

[知识点] 第 I 类问题，角动量和转动动能的计算。

[分析与解答] 运动方程为 $\theta = 20\sin 20t$

角速度为 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = 400\cos 20t$

角动量为 $L = I\omega = 4\times 10^4 \cos 20t$

转动动能为 $E_k = \dfrac{1}{2} I\omega^2 = \dfrac{1}{2}\times 100\times (400\cos 20t)^2 = 8\times 10^6 \cos^2 20t$

当 $t = 0$ 时， $L_0 = 4\times 10^4\ kgm^2/s$， $E_{k0} = 8\times 10^6\ J$

8．实验测得电子自旋的角动量为 $L = 0.53\times 10^{-34}\ kg\cdot m^2/s$。若把电子看作是一个半径 $R = 1.0\times 10^{-18}\ m$、质量 $m_0 = 9.11\times 10^{-31} kg$ 的小球体，则该“电子球”表面上任一点的线速度的大小为 $v =$ <u>1.46×10^{14}</u> m/s，你认为这样构造的电子模型是 <u>不合理的</u> （填合理、不合理），原因是 <u>$v > c$</u> 。

[知识点] 理想模型的合理性。

[分析与解答] 电子处旋绕中心轴的转动惯量为

$$I = \frac{2}{5} m_0 R^2 = \frac{2}{5}\times 9.11\times 10^{-31}\times (1.0\times 10^{-18})^2 = 3.64\times 10^{-67}$$

由角动量 $L = I\omega$，得电子的自旋角速度为 $\omega = \dfrac{L}{I} = \dfrac{0.53\times 10^{-34}}{3.64\times 10^{-67}} = 1.46\times 10^{32}\ rad/s$

表面速度为 $v = \omega R = 1.46\times 10^{32}\times 1.0\times 10^{-18} = 1.46\times 10^{14}\ m/s$

因为 $v = 1.46\times 10^{14}\ m/s > c = 3\times 10^8\ m/s$，因此该电子模型不合理。

9. 一冲床的飞轮，转动惯量 $I = 25 kg\cdot m^2$，并以角速度 $\omega_0 = 10\pi\ rad/s$ 转动。在带动冲头对板材作成型冲压过程中，所需的能量全部由飞轮来提供。已知冲压一次，需作功 $A = 4.0\times 10^3 J$，则在冲压过程之末飞轮的角速度 $\omega =$ <u>25.8</u> rad/s。

[知识点] 刚体定轴转动的动能定理。

[分析与解答] 对飞轮应用动能定理，则有

$$A = \frac{1}{2} I\omega^2 - \frac{1}{2} I\omega_0^2$$

由此解得 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \dfrac{2\omega}{I}}$

在上式中代入 $\omega_0 = 10\pi\ rad/s$，$I = 25 kgm^2$，$A = -4000 J$

则 $\omega = 25.8 rad/s$

10. 一个人站在旋转平台的中央，两臂侧平举，整个系统以 $\omega_0 = 2\pi rad/s$ 的角速度旋转，转动惯量为 $I_0 = 6kg\cdot m^2$。如果将双臂回收则该系统的转动惯量变为 $I = 2.0kg\cdot m^2$，此时系统的转动动能与原来的转动动能之比为 $\frac{E_k}{E_{k0}} = $ __3__ 。

[知识点] 角动量守恒，转动动能的计算。

[分析与解答] 在双臂收回过程中，系统的角动量守恒，则

$$I_0\omega_0 = I\omega \quad 即 \quad \omega = \frac{I_0}{I}\omega_0$$

系统初始时的转动动能为 $E_{k0} = \frac{1}{2}I_0\omega_0^2 = \frac{1}{2}\times 6\times(2\pi)^2 = 12\pi^2 J$

系统末态时的转动动能为 $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\left(\frac{I_0}{I}\omega_0\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{I_0^2\omega_0^2}{I} = \frac{1}{2}\frac{6^2\times(2\pi)^2}{2} = 36\pi^2$

则 $\frac{E_k}{E_{k0}} = 3$

三、简答题

给你两个鸡蛋，一个是生的，一个是熟的，你用什么办法来判别？试分析之。

[解答] 把两个鸡蛋同时在玻璃台面上旋转，生鸡蛋的蛋清由于惯性会向蛋壳聚集，使质量分布发生变化，导致转动惯量增大，按角动量守恒 $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$，$I_2$ 增大，ω_2 必减小，于是生鸡蛋很快会停下来。

四、计算与证明题

1. 如图 4-8 所示，一机械钟的钟摆由一根均质细杆和均质圆盘组成。细杆长 4r，质量为 m；圆盘半径为 r，质量为 2m。

（1）试求：该钟摆绕端点 O、垂直于纸面的轴的转动惯量；

（2）设 $t = 0$ 时，钟摆的角速度为 ω_0，其所受的阻力矩 $M_f = -kt$（SI），k 为正的常量，试求其停摆前所经历的时间 t。

[分析与解答] （1）杆对轴的转动惯量为 $I_1 = \frac{1}{3}m(4r)^2 = \frac{16}{3}mr^2$

盘对轴的转动惯量为 $I_2 = \frac{1}{2}(2m)r^2 + 2m(5r)^2 = 51mr^2$

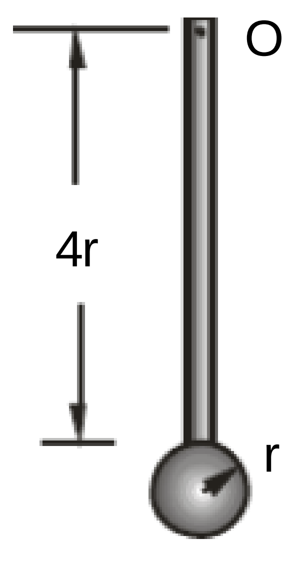


图 4-8

所以，钟摆对轴的转动惯量为 $I = I_1 + I_2 = \frac{169}{3} mr^2$

（2）由转动定律 $M_f = I\frac{d\omega}{dt} = -kt$

$$\int_0^t -ktdt = \int_{\omega}^{0} Id\omega$$

所以，停摆前所经历的时间为 $t = \sqrt{\frac{2I\omega_0}{k}}$

2. 如图 4-9 所示，一个劲度系数为 $k = 2.0N/m$ 的轻质弹簧与一轻柔绳相连接，该绳跨过一半径为 $R = 0.3m$，转动惯量为 $I = 0.5\ kg\cdot m^2$ 的定滑轮，绳的另一端悬挂一质量为 m 的物体 A。开始时，用手将物体托住，使弹簧保持原长，系统处于静止状态。试求松手后物体下落 $h = 0.4m$ 时的加速度和速度。（滑轮与轴间的摩擦可以忽略不计）。

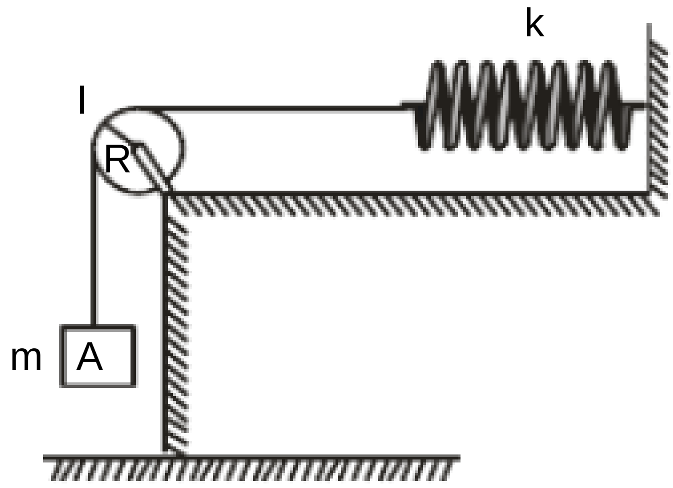


图 4-9

[分析与解答] 以弹簧、滑轮和物体 A 为研究对象，分析其受力。由题意知，物体向下运动，则分别对物体和滑轮运用牛顿运动定律和转动定律。

对物体 A 有 $mg - F_{T1} = ma$ （1）

对滑轮有 $(F_{T1} - F_{T2})R = I\beta$ （2）

对弹簧有 $F_{T2} - kx = 0$ （3）

由于绳子与滑轮无相对滑动，则有 $a = \beta R$ （4）

联立式（1）～（4）可得物体 A 运动的加速度为

$$a = \frac{mg - kx}{m + \frac{I}{R^2}}$$

代入 $x = h = 0.4m$，$k = 2.0N/m$，$R = 0.3m$，$I = 0.5\ kg\cdot m^2$，此时加速度为

$$a = 0.82m/s^2$$

又取物体、弹簧、滑轮和地球为系统，在物体下落过程中，系统机械能守恒。取物体 A 的初始位置处为重力势能零点，弹簧原长为弹性势能零点，则有

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx \quad (5)$$

滑轮转动角速度 ω 与物体 A 运动速度有 $v = R\omega$ （6）

将式（6）代入式（5）中可解得物体 A 的速度为

$$v=\sqrt{\frac{2mgx-kx^2}{m+\frac{I}{R^2}}}$$

代入 $x=h=0.4m$， $k=2.0N/m$， $R=0.3m$， $I=0.5\,kg\cdot m^2$，此时速度为

$$v=0.71m/s$$

3. 如图 4-10 所示，一质量为 m、半径为 R 的圆盘，绕通过中心且垂直盘面的轴转动，转速为 n rev/s。此时将盘轻轻地放到粗糙的水平面上，圆盘与平面间的摩擦因数为 μ。

（1）试证明圆盘所受的摩擦力矩 $M_f=\frac{2}{3}\mu mgR$；

（2）试问圆盘转过多少圈后会停下来？

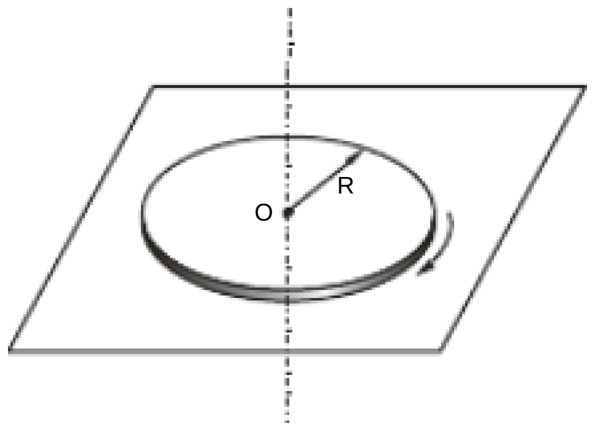


图 4-10

[分析与解答] （1）圆盘各处都受摩擦力，由于各部分离盘心距离不同，力矩也不同。为此，取半径为 r，厚为 dr 的圆环，其质量为

$$dm=2\pi\cdot dr\cdot\sigma$$

所受摩擦力矩为 $$dM_f=\mu\cdot 2\pi^2 dr\sigma\cdot g$$

则圆盘所受的摩擦力矩

$$M_f=\int dM_f=\int_0^R 2\pi\sigma gr^2dr=\frac{2}{3}\mu mgR$$

（2）按转动定律有 $$\frac{2}{3}\mu mgR=I\beta=\frac{1}{2}mR^2\beta$$

故 $$\beta=\frac{4\mu g}{3R}$$

根据 $\omega^2-\omega_0^2=2\beta\Delta\theta$，并考虑 $\omega_0=2\pi n$，$\omega=0$ 得 $$\Delta\theta=\frac{3R\pi^2n^2}{2\mu g}$$

则圆盘停下来以前转过的圈数为 $$N=\frac{\Delta\theta}{2\pi}=\frac{3\pi n^2R}{4\mu g}$$

4. 如图 4-11 所示，长为 l、质量为 m 的均质细杆，可绕过 O 点并垂直纸面的水平光滑轴在竖直平面内转动。当杆自由悬挂时，有一个速度为 v_0、质量 m_0 的子弹沿水平方向射入杆的下端点 A。试问如果恰好能使杆与子弹保持持续转动，则子弹的速度 v_0 至少应为多少？。

[分析与解答] 子弹 m_0 与细杆 m 的碰撞过程，系统角动量守恒，则有

$$m_0v_0l=I\omega_0 \qquad （1）$$

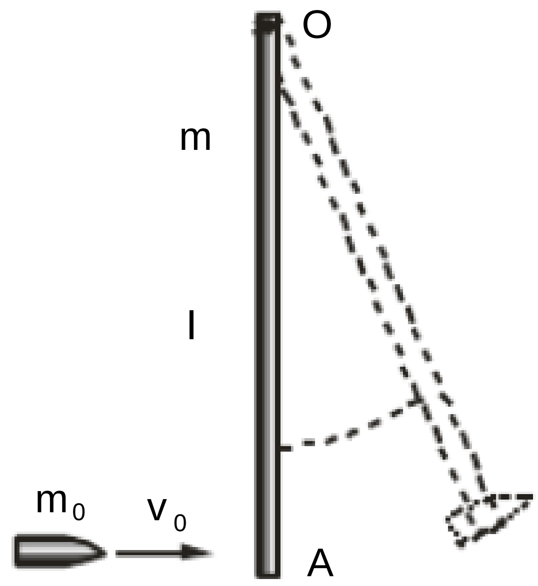


图 4-11

$$I = I_{弹} + I_{杆} = m_0 l^2 + \frac{1}{3} m l^2 \qquad (2)$$

碰后上摆过程，系统机械能守恒。取细杆下端点 A 最初所在平面为势能零点，则共同上摆之初的为

$$E_1 = \frac{1}{2} I \omega_0^2 + \frac{1}{2} mgl$$

若要使杆与子弹保持持续转动，则杆应可摆动到铅直位置（即子弹在上端），则此时的机械能为

$$E_2 = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{3}{2} mgl + 2 m_0 gl$$

由机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2} I \omega_0^2 + \frac{1}{2} mgl = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{3}{2} mgl + 2 m_0 gl \qquad (3)$$

联立式 (1)、(2)和(3)，得

$$v_0 = \frac{1}{m_0 l} \sqrt{(I\omega^2 + 2mgl + 4 m_0 gl) I}$$

如果恰好能使杆与子弹保持持续转动，此时 $\omega = 0$，则得

$$v_0 = \frac{1}{m_0 l} \sqrt{(2mgl + 4 m_0 gl) I} = \frac{1}{m_0} \sqrt{(2mgl + 4 m_0 gl)(m_0 + \frac{1}{3} m)}$$

四、狭义相对论基础

一、选择题

（在下列各题中，均给出了 4 个~6 个答案，其中有的只有 1 个是正确答案，有的则有几个是正确答案，请把正确答案的英文字母序号填在题后的括号内）

1. 狭义相对论揭示了：

A．微观粒子的运动规律； B．电磁场的运动规律；

C. 高速物体的运动规律； D. 引力场中的时空结构。 （C）

[知识点] 狭义相对论的研究对象。

2. S 系内发生的两事件 P_1 和 P_2，其时空坐标分别为 $P_1(x_1, t)$ 和 $P_2(x_2, t)$，S 系以高速 v 相对于 S 系沿 x 轴方向运动，则 S 系测得这两件事必是：

A．同时事件； B．不同地点发生的同时事件；

C. 既非同时，也非同地； D．无法确定。 （C）

[知识点] 同时性的相对性概念。

[分析与解答] 由题意知，$\Delta x = x_2 - x_1 \neq 0$，$\Delta t = t_2 - t_1 = t - t = 0$，即这两个事件在 S系是同时不同地发生的，则由洛仑兹变换式得

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \neq 0,\quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \neq 0$$

所以，S系测得这两件事必是既非同时，也非同地。

3. 两个惯性系 S和 S′，S′系沿 x（x′）轴方向以速度 v 相对于速度 S系运动。设在 S′系中某点先后发生的两个事件，用固定于该系的钟测出两事件的时间间隔为 τ_0，而用固定在 S系的钟测出这两个事件的时间间隔为 τ。又在 S′系 x′轴上放置一固有长度为 l_0的细杆，从 S系测得此杆的长度为 l，则下列正确的是：

A. $\tau < \tau_0$，$l < l_0$；　　B. $\tau < \tau_0$，$l > l_0$；

C. $\tau > \tau_0$，$l > l_0$；　　D. $\tau > \tau_0$，$l < l_0$。　　（D）

[知识点] 时间膨胀、长度收缩。

[分析与解答] 由题意知，S′系中的时间间隔 τ_0是固有时间，S系中的时间间隔 τ 是观测时间，则由 $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$ 知，$\tau > \tau_0$。

又知，S′系中的 l_0是固有长度，S系中的 l 是观测长度，则由 $l = l_0\sqrt{1 - v^2 / c^2}$ 知，$l < l_0$。

4. 位于上海浦东的“东方明珠”电视塔高 h = 468m，在以速度 v = 0.8c 竖直上升的火箭上有一观测者，他测得的电视塔高为：

A. 468m；　　B. 0；

C. 374.4m；　　D. 280.8m。　　（D）

[知识点] 长度收缩公式。

[分析与解答] 由题意知，固有高度为 h = 468m，v = 0.8c，则观测高度为

$$l = h\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 468 \times \sqrt{1 - \left(\frac{0.8c}{c}\right)^2} = 280.8\text{m}$$

5. 某地在举办世界杯足球决赛，加时赛共踢了 30min，则在以 v = 0.6c 飞行的宇宙

飞船上的乘客，观测到的该加时赛持续时间为：

A．24 min； B． 18 min；

C．50 min； D．37.5 min。 （D）

[知识点] 时间膨胀公式。

[分析与解答] 由题意知，固有时间为 $\Delta t_0 = 30\text{min}$， $v = 0.6c$，则观测时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{30}{\sqrt{1-\left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}} = 37.5\text{min}$$

6. 电子的静止质量为 m_0，当它以 $v = 0.6c$ 的速度运动时，其动质量与静质量之比为：

A． 1； B． 1.25；

C． 1.67； D． ∞。 （B）

[知识点] 质速关系。

[分析与解答] 由质速关系 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，则得

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}} = 1.25$$

7. 一个中子的静止能量 $E_0 = 900\text{MeV}$，动能 $E_k = 60\text{MeV}$，则中子的运动速度为：

A．0.30c； B． 0.35c；

C．0.40c； D．0.45c。 （B）

[知识点] 相对论动能。

[分析与解答] 相对论动能 $E_k = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)E_0$，得

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{1+E_k/E_0} = \frac{15}{16}$$

即 $v = 0.35c$

8. 把一个静止质量为 m_0 的粒子，由静止加速到 $v = 0.6c$，需做的功为：

A. $0.18m_0c^2$；　　B. $0.25m_0c^2$；

C. $0.36m_0c^2$；　　D. $1.25m_0c^2$。　　（B）

[知识点] 功能关系，相对论动能。

[分析与解答] 由功能关系知：

$$A = E_k = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}} - 1\right)m_0c^2 = 0.25m_0c^2$$

9. 某核电站年发电量为 $100\times10^9\,\text{kW}\cdot\text{h}$，相当于 $36\times10^{15}\,\text{J}$ 的能量，如果这些能量是由核材料的全部静止能量转化而来的，则需要消耗的核材料的质量为：

A. 0.4kg；　　B. 0.8kg；

C. 12×10^7 kg；　　D. $\frac{1}{12}\times10^7$ kg。　　（A）

[知识点] 质能关系。

[分析与解答] 由质能关系 $E_0 = m_0c^2$，则得

$$m_0 = \frac{E_0}{c^2} = \frac{36\times10^{15}}{(3\times10^8)^2} = 0.4\text{kg}$$

10. 在一惯性系中，两个静止质量均为 m_0 的粒子 A 和 B，分别以速度 v 沿同一直线相向运动，相碰后合在一起成为一个新粒子 C，则新粒子 C 的质量为：

A. $2m_0$；　　B. $2m_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$；

C. $\frac{m_0}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$；　　D. $\frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$。　　（D）

[知识点] 质能守恒。

[分析与解答] 由能量守恒定律知，碰撞前后系统的总能量守恒，即

$$\frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=mc^2$$

则得

$$m=\frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

二、填空题

1. 狭义相对论的两条基本原理是：

（1） 光速不变原理 ；

（2） 爱因斯坦相对性原理 。

[知识点] 狭义相对论的两条基本原理的内容。

2. 在惯性系 S中，测得一闪光信号的时空坐标是： $x = 100\text{km}$，$y = 10\text{km}$，$z = 1\text{km}$，$t = 5\times10^{-4}\text{s}$。另一惯性系 S′以 $v = 0.8c$ 相对于 S系沿 x 轴运动，则 S′系测得这一闪光信号的时空坐标为：

$x' =$ -33.3km ； $y' =$ 10 km ；

$z' =$ 1 km ； $t' =$ 3.89×10^{-4}s 。

[知识点] 洛仑兹变换式。

[分析与解答] 由洛仑兹变换的正变换式，可求得

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{100\times10^3-0.8\times3\times10^8\times5\times10^{-4}}{\sqrt{1-\left(\frac{0.8c}{c}\right)^2}}=-33.3\text{km}$$

$$y'=y=10\text{km}$$

$$z'=z=1\text{km}$$

$$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{5\times10^{-4}-\frac{0.8c}{c^2}\times100\times10^3}{\sqrt{1-\left(\frac{0.8c}{c}\right)^2}}=3.89\times10^{-4}\text{s}$$

3. S′系（O′x′y′z′）以 $v_x = 0.8c$ 相对于 S系（Oxyz）运动，当 $t = t' = 0$ 时，OO′重

合，并同时发出一个光信号，则 S系和 S′系测得此光信号的运动方程为：

S系： $\underline{x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0}$ ；

S′系： $\underline{x'^2+y'^2+z'^2-c'^2t'^2=0}$ 。

[知识点] 光速不变原理。

[分析与解答] 在 S系中，光信号在传播了 t 时间后，光传到距离 O 点为 r 的地方，此时的时空坐标为（ x,y,z,t），由于光速为 c，则此光信号的传播规律为

$$r=ct$$

式中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 S系中此光信号的运动方程为

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2 \text{或} x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$$

同理，在 S′系中，光信号在传播了 t′时间后，光传到距离 O′点为 r′的地方，此时的时空坐标为（ x′,y′,z′,t′），由于光速不变，仍为 c，则此光信号的传播规律为

$$r'=ct'$$

式中 $r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$，则 S′系中此光信号的运动方程为

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2 \text{或} x'^2+y'^2+z'^2-c'^2t'^2=0$$

4. 一颗星体以 v = 0.5c 的速度远离地球而去， 则其上发出的光子相对于地球的速度为 __c__ 。

[知识点] 光速不变原理。

5. 路旁竖立着一块边长为 10m 的正方形广告牌，一辆以 v = 0.6c 的高速列车通过此广告牌时，则车上乘客测得此广告牌的面积为 $\underline{80m^2}$ 。

[知识点] 运动方向上的长度收缩。

[分析与解答] $l_x=l\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}=10\times\sqrt{1-\left(\dfrac{0.6c}{c}\right)^2}=8m$

$$l_y=l=10m$$

广告牌的面积为 $S=l_xl_y=80m^2$

6. π^+介子是不稳定粒子，其静止时的寿命为 $2.6\times10^{-8}s$。若此粒子以 v = 0.8c 的速度离开加速器，那么实验室坐标系中测量的 π^+介子寿命为 $\underline{4.3\times10^{-8}s}$ ；π^+介子在衰变

前运动的距离为 <u>10.3m</u>；若不考虑相对论效应，π^+介子运动的距离为 <u>6.24m</u>。

[知识点] 时间膨胀，运动寿命会延长。

[分析与解答] 由题意知，π^+介子的固有寿命为 $\Delta t_0 = 2.6\times10^{-8}$s，则实验室坐标系中测量的 π^+介子寿命为运动寿命，其为

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2.6\times10^{-8}}{\sqrt{1-\left(\frac{0.8c}{c}\right)^2}} = 4.3\times10^{-8}\text{s}$$

π^+介子在衰变前运动的距离为 $d = v\Delta t = 0.8c\times4.3\times10^{-8} = 10.3\text{m}$

若不考虑相对论效应，π^+介子运动的距离为 $d_0 = v\Delta t_0 = 0.8c\times2.6\times10^{-8} = 6.24\text{m}$

7. 相对论动能 E_k = <u>$mc^2 - m_0c^2$</u>；当速度 v = <u>$\frac{\sqrt{3}}{2}c$</u> 时，粒子的动能等于其静止能量。

[知识点] 相对论动能。

[分析与解答] 由题意知有 $E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2$

则 $$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2m_0c^2$$

求解的 $$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

8. α 粒子在加速器中被加速，当其质量是静止质量的 n 倍时，则 α 粒子的运动速度 v = <u>$\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}c$</u>，其总能量为静止能量的 <u>n</u> 倍，其动能为静止能量的 <u>$n-1$</u> 倍。

[知识点] 质速关系，质能关系。

[分析与解答] 由质速关系 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，则得

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = n$$

则 α 粒子的运动速度为 $v=\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n}c$

相对论总能量为 $E=mc^2=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}c^2=nE_0$

相对论动能为 $E_k=E-E_0=nE_0-E_0=(n-1)E_0$

9. 已知电子的静止质量 $m_{0e}=0.51\text{MeV}/c^2$，当电子以 $v=0.8c$ 的速度运动时其动量 $p_e=\underline{\ 0.68\ }\ \text{MeV}/c$ 。

[知识点] 动量和能量的关系。

[分析与解答] 电子动量和能量的关系为 $p_e^2c^2=E^2-E_0^2$，则得

$$p_e^2c^2=\left(\frac{1}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}-1\right)m_{0e}^2c^4$$

即 $$p_ec=\sqrt{\frac{1}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}-1}\cdot m_{0e}c^2$$

$$=\sqrt{\frac{1}{1-\left(\dfrac{0.8c}{c}\right)^2}-1}\times 0.51\text{MeV}/c^2\times c^2=0.68\text{MeV}$$

则动量为 $p_e=0.68\text{M eV}¢$

10. 在正负电子湮没过程中，一个电子和一个正电子相碰，转化为电磁辐射。已知正、负电子的质量皆为 9.11×10^{-31} kg，设恰在湮没前两电子是静止的，则电磁辐射的总能量 E

$=\underline{\ 1.64\times10^{-13}\ }$ J。

[知识点] 质能守恒。

[分析与解答] 由能量守恒定律得

$$E=2m_0c^2=2\times9.11\times10^{-31}\times(3\times10^8)^2$$

$$=1.64\times10^{-13}\text{J}$$

三、计算题

1. 两个惯性系 S和 S′, S′系以 v = 0.6c 相对于 S系沿 x轴运动, 当 t = t′ = 0 时, OO′重合, 试求：

（1）在 S′系的 x′处发生一个物理过程， S′系中的观测者测得该过程经历的时间为 $\Delta t' = 20s$，则 S系中的观测者测得该过程所经历的时间 Δt 为多少？

（2）若 S′系上有一根长为 $l' = 2m$ 的细杆沿 x′轴放置，则 S系测得此杆的长度为多少？

（3） 若 S′系上有质量为 2kg 的物体，则 S′系和 S系测得其总能量 E′和 E 各为多少？

[分析与解答]（1） $\Delta t' = 20s$ 为固有时间，则 S 系中的观测者测得的观测时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{20}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}} = 25s$$

（2） $l' = 2m$ 为固有长度，则 S系测得的观测长度为

$$l = l'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 2\times\sqrt{1 - \left(\frac{0.6c}{c}\right)^2} = 1.6m$$

（3）静止质量为 $m_0 = 2kg$，则

$$S'系：\ E' = E_0 = m_0c^2 = 2\times(3\times10^8)^2 = 1.8\times10^{17}\,J$$

$$S系：\ E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1.8\times10^{17}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}} = 2.25\times10^{17}\,J$$

2. 两个惯性系 S和 S′， S′系以 v = 0.6c 相对于 S系沿 x 轴运动，在 S系中相距 100km 的 x_1 和 x_2 处同时发生了两事件。试问：

（1）在 S′系看来，两事件是否是同时发生的？

（2） S′系测得这两事件相距多远？

[分析与解答]（1）由洛伦兹变换得

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0 - \frac{0.6c\times10^5}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}} = -2.5\times10^{-4}s \neq 0$$

表明在 S′系看来，这两事件不是同时发生的。

（2）由洛伦兹变换得

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{100\times10^3 - 0}{\sqrt{1-\left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}} = 1.25\times10^5\ \mathrm{m}$$

表明在 S′系中观测到这两事件的空间间隔为 125km。

3. 一个放射性原子核以 $v = 0.5c$ 的速度沿 x 轴方向相对于实验室运动。

（1）当核发生衰变时，以相对于核为 0.9c 的速度沿其运动方向发射出一个电子，试求该电子相对于实验室的速度；

（2）若衰变时，发射的是一个光子，试求光子相对于实验室的速度。

[分析与解答]（1）设实验室为 S 系，原子核为 S′系，S′系相对于 S 系的速度为 $v = 0.5c$。电子为“事件 ”，它对 S′系的速度为 $u_x' = 0.9c$，则电子相对于 S 系的速度为

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1+\frac{v}{c^2}u'_x} = \frac{0.9c + 0.5c}{1+\frac{0.5c}{c^2}\times0.9c} = 0.966c$$

（2）若发射的是光子，同理，$u_x' = c$，则光子相对于 S 系的速度为

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1+\frac{v}{c^2}u'_x} = \frac{c + 0.5c}{1+\frac{0.5c}{c^2}\times c} = c$$

4. 一动能为 0.50MeV 的电子垂直磁场 **B** 运动，其运动轨迹为半径 $r = 2\mathrm{cm}$ 的圆周。试求该磁场的磁感强度 **B** 的大小。（已知 $1\mathrm{MeV} = 1.6\times10^{-13}\mathrm{J}$，$e = 1.6\times10^{-19}\mathrm{C}$）

[分析与解答] 电子在洛伦兹力作用下作圆周运动，有

$$evB = m\frac{v^2}{r}$$

则

$$B = \frac{mv}{er} = \frac{p}{er} \qquad (1)$$

式中，p 为电子的相对论动量，由

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2$$

及

$$E = E_0 + E_k$$

得 $$p=\frac{\sqrt{E^2-E_0^2}}{c}=\frac{\sqrt{E_k^2+2E_kE_0}}{c} \qquad (2)$$

将式(2)代入式(1)，且由题意知，$E_k=0.50\text{MeV}$，$E_0=0.51\text{MeV}$，则得磁场的大小为

$$B=\frac{\sqrt{E_k^2+2E_kE_0}}{erc}$$

$$=\frac{\sqrt{0.5^2+2\times0.50\times0.51}\times1.6\times10^{-13}}{1.6\times10^{-19}\times0.02\times3\times10^8}=0.145\text{T}$$

五、气体动理论

一、选择题

（在下列各题中，均给出了 4 个~5 个答案，其中有的只有 1 个是正确答案，有的则有几个是正确答案，请把正确答案的英文字母序号填在题后的括号内）

1. 两种摩尔质量不同的理想气体，它们的压强、温度相同，体积不同，则下列表述中正确的是：

A. 单位体积内的分子数相同；

B. 单位体积中气体的质量相同；

C. 单位体积内气体的内能相同；

D. 单位体积内气体分子的总平均平动动能相同。 （A、D）

[知识点] 理想气体状态方程 $p=nkT$ 及内能公式 $E=\frac{i}{2}RT$。

[分析与解答] 根据理想气体状态方程 $p=nkT$，当气体的压强与温度相同时，单位体积内的分子数 n 相同。

由理想气体状态方程 $pV=\frac{m}{M}RT$，得 $\frac{m}{V}=\frac{pM}{RT}$，即当气体压强与温度相同，但摩尔质量不同时，单位体积中气体的质量不相同。

又由理想气体内能公式 $E=\frac{m}{M}\frac{i}{2}RT$，结合状态方程，得 $E=\frac{i}{2}pV$，则有 $\frac{E}{V}=\frac{i}{2}p$，可见当压强相同的两种理想气体的自由度相同（即为同结构分子）时，单位体积内气体的内能才会相同。

理想气体分子的平均平动动能 $\overline{\varepsilon_k}=\frac{3}{2}kT$，则有 $\overline{E_k}=n\overline{\varepsilon_k}=\frac{3}{2}p$，则当气体的压强相

同时，单位体积内的气体分子的总平均平动动能相同。

2. 以 a 代表气体分子的方均根速率， ρ 表示气体的质量体密度。则由气体动理论可知，理想气体的压强 p 为：

A. $p=\rho a^2$； B. $p=\frac{1}{3}\rho a$； C. $p=\frac{1}{3}\rho a^2$； D. $p=\frac{1}{3}\frac{a^2}{\rho}$。 （C）

[知识点] $pV=\frac{m}{M}RT$， $\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$

[分析与解答] 由方均根速率的定义和题意有

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}=a \qquad (1)$$

由理想气体状态方程 $$pV=\frac{m}{M}RT \qquad (2)$$

由题意 $$\rho=\frac{m}{V} \qquad (3)$$

联立以上三式，则有 $$p=3\rho a^2$$

3. 对处于平衡状态下的一定量某种理想气体， 在关于内能的下述表述中， 正确的是：

A. 内能是所有分子平均平动动能的总和；

B. 气体处于一定状态，就相应有一定的内能；

C. 当理想气体状态改变时，内能一定随着变化；

D. 不同的理想气体， 只要温度相同， 其内能也相同。 （B）

[知识点] 内能的概念及内能公式。

[分析与解答] 内能就是反映理想气体宏观状态的一个重要的状态参数， 气体处于一定状态，就相应有一定的内能；理想气体的内能是所有分子的各类动能（包括平动动能、转动动能）的总和。

由理想气体的内能公式 $E=\frac{m}{M}\frac{i}{2}RT$，对一定量的理想气体，只有自由度 i 和温度 T 相同的理想气体， 其内能才相同；对自由度一定的理想气体， 内能只是温度的单值函数，若只是压强 p、体积 V 的状态变化，而温度 T 不变，内能同样也不会变化。

4. 对于麦克斯韦速率分布中最概然速率 v_p 的正确理解是：

A. v_p 是大部分气体分子具有的速率；

B. v_p 是速率分布函数 $f(v)$ 的最大值；

C. v_p 是气体分子可能具有的最大速率；

D. v_p 附近单位速率间隔内分子出现的概率最大。（D）

[知识点] 最概然速率 v_p 的物理意义。

[分析与解答] 最概然速率的物理意义为“在一定温度下，在 v_p 附近单位速率间隔内分子出现的概率最大”，而“分子速率分布函数 $f(v)$ 取极大值时所对应的速率就是 v_p”。

气体分子可能具有的速率范围为 0～∞，只是如果把速率范围分成许多相等的小区间，则分布在 v_p 所在区间的分子概率最大，而分子速率分布中最大速率应是无穷大。

5. 在麦克斯韦速率分布中，v_p 为气体分子的最概然速率，n_p 表示在 v_p 附近单位速率间隔内的气体分子数，设麦克斯韦速率分布曲线下的面积为 S。若气体的温度降低，则

A. v_p 变小，n_p 不变，S 变大；　　B. v_p，n_p，S 均变小；

C. v_p 变小，n_p 变大，S 不变；　　D. v_p，n_p 均变大，S 不变。（C）

[知识点] 速率分布曲线。

[分析与解答] $v_p = \sqrt{\dfrac{3RT}{M}}$，$n_p = \dfrac{dN}{dv} = Nf(v_p)$

$$S = \int_0^\infty f(v)dv = 1$$

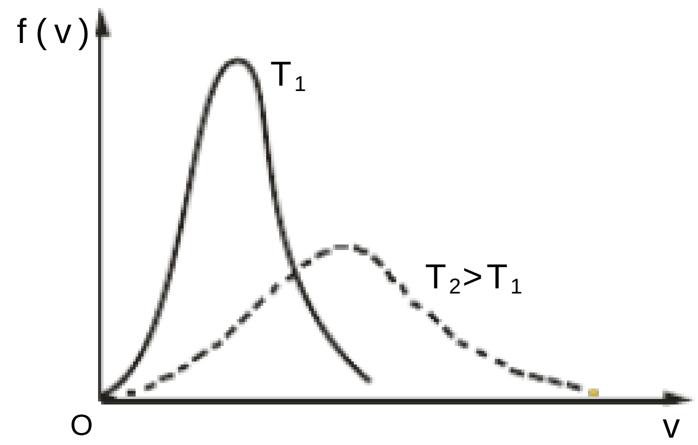


图 10-1

按照麦克斯韦分布函数的归一化条件，麦克斯韦速率分布曲线下的总面积不变。当气体的温度 T 下降时，气体分子的最概然速率减小；由于曲线下的总面积 S 不变，分布曲线在宽度减小的同时，高度会增大，即此时，$f(v_p)$ 必升高（由图 10-1 也可看出），则 n_p 也会变大。

6. 一定量某理想气体贮于容器中，温度为 T，气体分子的质量为 m，则根据理想气体的分子模型和统计假设，分子速率在 x 轴方向的分量二次方的平均值 $\overline{v_x^2}$ 为：

A. $\overline{v_x^2} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m}}$；　　B. $\overline{v_x^2} = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{3kT}{m}}$；

C. $\overline{v_x^2} = \dfrac{3kT}{m}$；　　D. $\overline{v_x^2} = \dfrac{kT}{m}$。（D）

[知识点] 理想气体的统计假设。

[分析与解答] 由理想气体的统计假设，有 $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$

又因为 $$\overline{v_x^2}+\overline{v_y^2}+\overline{v_z^2}=\overline{v^2}$$

所以 $$\overline{v_x^2}=\overline{v_y^2}=\overline{v_z^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2} \qquad (1)$$

又由分子的平均平动动能的定义

$$\overline{\varepsilon_k}=\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3}{2}kT \qquad (2)$$

联立式（1）和式（2），则有

$$\overline{v_x^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3kT}{m}=\frac{kT}{m}$$

7. 某理想气体在平衡态（温度为 T）下的分子速率分布曲线如图 10-2 所示，图中 A、B 两部分面积相等，则图中 v_0 的正确判断为：

A. 平均速率 $\bar{v}=v_0$；

B. 最概然速率 $v_p=v_0$；

C. 方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}=v_0$；

D. 速率大于 v_0 和小于 v_0 的分子数各占总分子数的一半。（D）

[知识点] 速率分布曲线的理解。

[分析与解答] 曲率分布曲线下的总面积

$$S=\int_0^\infty f(v)dv=1$$

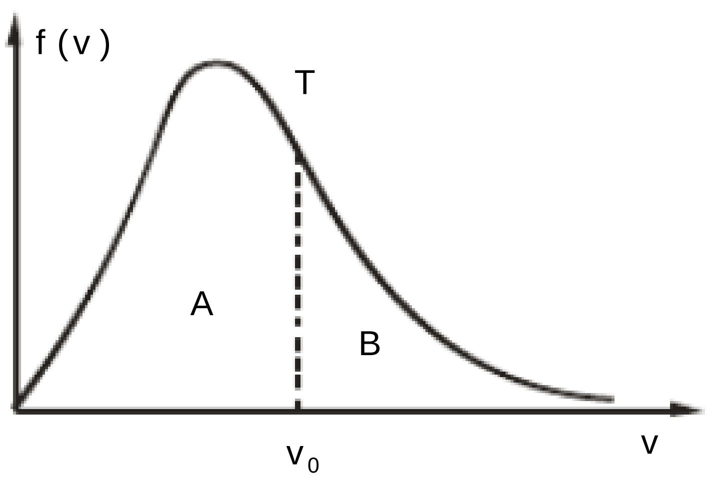


图 10-2

由题意知 $$S_A=S_B=\frac{1}{2}$$

而 $$S_A=\int_0^{v_0} f(v)dv=\frac{\Delta N_1}{N}=\frac{1}{2}$$

$$\Delta N_1=\frac{1}{2}N$$

即速率小于 v_0 的分子数占总分子数的一半。

$$S_B=\int_{v_0}^\infty f(v)dv=\frac{\Delta N_2}{N}=\frac{1}{2}$$

$$\Delta N_2=\frac{1}{2}N$$

即速率大于 v_0 的分子数占总分子数的一半。

8. 在麦克斯韦速率分布律中，$f(v)$ 为速率分布函数，则速率 $v<v_p$ 的分子平均速率的表达式为：

A. $\bar{v}=\int_v^{v_p} f(v)dv$；　　B. $\bar{v}=\int_v^{v_p} vf(v)dv$；

C. $\bar{v}=\frac{1}{2}v_p$；　　D. $\bar{v}=\dfrac{\int_0^{v_p} vf(v)dv}{\int_0^{v_p} f(v)dv}$。　　（D）

[知识点] $\bar{v}$ 表达方法及相关积分式的意义。

[分析与解答] 速率 $v<v_p$ 的分子的平均速率表达式为

$$\bar{v}=\frac{\int_0^{v_p} vdN}{\int_0^{v_p} dN}=\frac{\int_0^{v_p} vNf(v)dv}{\int_0^{v_p} Nf(v)dv}=\frac{\int_0^{v_p} vf(v)dv}{\int_0^{v_p} f(v)dv}$$

式中 $\int_0^{v_p} vdN$ 表示 $v<v_p$ 的分子的速率总和，$\int_0^{v_p} dN$ 表示 $v<v_p$ 的分子数的总和。

9. 两个容积相同的容器中，分别装有 He 气和 H_2 气，若它们的压强相同，则它们的内能关系为：

A. $E_{He}=E_{H_2}$；　　B. $E_{He}>E_{H_2}$；

C. $E_{He}<E_{H_2}$；　　D. 无法确定。　　（C）

[知识点] $pV=\frac{m}{M}RT$ 和 $E=\frac{i}{2}\frac{m}{M}RT$

[分析与解答] 由理想气体的状态方程 $pV=\frac{m}{M}RT$ 与理想气体的内能公式 $E=\frac{i}{2}\frac{m}{M}RT$，可将内能表示为

$$E=\frac{i}{2}pV$$

He 气和 H_2 气容积相等，压强相同，它们的内能仅由自由度数 i 决定，He 气体是单原子分子 $i=3$，H_2 气是双原子分子 $i=5$，则 $E_{He}<E_{H_2}$。

10. 容积固定的容器中，储有一定量某理想气体，当温度逐渐升高时，设分子的有效直径保持不变，则分子的平均自由程 $\bar{\lambda}$ 和平均碰撞频率 $\bar{Z}$ 的变化为：

A. $\bar{\lambda}$、$\bar{Z}$ 均增大；　　B. $\bar{\lambda}$、$\bar{Z}$ 均减小；

C. $\bar{\lambda}$、$\bar{Z}$ 均不变；　　D. $\bar{\lambda}$ 不变，$\bar{Z}$ 增大。　　（D）

[知识点] 平均自由能和平均碰撞频率。

[分析与解答] 分子的平均自由程 $\bar{\lambda}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$，d 为分子直径，n 为分子数密度。

分子的平均碰撞频率 $\bar{Z}$ 与平均自由程 $\bar{\lambda}$ 的关系为 $\bar{Z}=\dfrac{\bar{v}}{\bar{\lambda}}$

式中 $\bar{v}$ 为分子的平均速率，$\bar{v}=\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$。

根据题意，体积 V 不变，一定量的理想气体即气体质量 m 不变，单位体积中的分子数即分子数密度 n 不变，分子的平均自由程 $\bar{\lambda}$ 不变。当温度升高时，分子的平均速率 $\bar{v}$ 增大，导致 $\bar{Z}$ 增大。

二、填空题

1. 一定量某理想气体处在平衡状态时，其状态可用 <u>压强 p，温度 T 和体积 V</u>3 个宏观状态量来表述。三者的关系（即状态方程）为 <u>$pV=\dfrac{m}{M}RT$</u>。

[知识点] 状态量与状态方程。

2. 理想气体压强的微观（统计）意义是：大<u>量分子热运动、连续不断碰撞器壁的宏观表现</u>；压强公式可表示为 $p=\underline{\dfrac{2}{3}n\bar{\varepsilon}_k}$。

温度是：<u>大量分子平均平动动能 $\bar{\varepsilon}_k$</u>的量度，其关系式为 <u>$\bar{\varepsilon}_k=\dfrac{3}{2}kT$</u>。

[知识点] 压强 p 和温度 T 的微观意义。

3. 下列各式所表达的意义是：

$\dfrac{3}{2}kT$ 为<u>分子的平均平动动能</u>；

$\dfrac{1}{2}kT$ 为<u>每个自由度上分配的平均动能</u>；

$\dfrac{i}{2}kT$ 为<u>自由度为 i 的分子的平均动能</u>；

$\dfrac{i}{2}RT$ 为<u>1mol 自由度为 i 的分子的理想气体的内能</u>；

$\dfrac{m}{M}\dfrac{i}{2}RT$ 为<u>$\nu=\dfrac{m}{M}$</u>摩尔<u>自由度为 i 的分子的理想气体的内能</u>。

[知识点] 各种能量的概念及表示

4. 下面左侧列出了 5 个与气体分子的速率分布函数 $f(v)$ 有关的表达式，右侧是其五种解释。请用连线的方法把对应关系表示出来。

$\int_0^{\infty} vf(v)dv$	分子的平均平动动能
$\int_{v_1}^{v_2} Nvf(v)dv$	分子的数密度
$\int_0^{\infty} \frac{1}{2}mv^2 f(v)dv$	在 v_1～v_2 间隔内分子的速率之和
$\int_0^{\infty} nf(v)dv$	分子的平均速率
$\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv$	在 v_1～v_2 间隔内的分子数

[知识点] 分布函数及相关表达式的意义。

[分析与解答] 根据 $dN = Nf(v)dv$ 将所列表达式变换后再说明其物理意义。

$$\int_0^{\infty} vf(v)dv = \frac{\int_0^{\infty} v\,dN}{N} = \bar{v}$$ 分子的平均速率

$$\int_{v_1}^{v_2} Nvf(v)dv = \int_{v_1}^{v_2} v\,dN$$ 在 v_1～v_2 间隔内分子的速率之和

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2}mv^2 f(v)dv = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{2}mv^2 dN}{N} = \frac{1}{2}m\overline{v^2}$$ 分子的平均平动动能

$$\int_0^{\infty} nf(v)dv = \int_0^{\infty} \frac{n\,dN}{N} = n$$ 分子的数密度

$$\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv = \int_{v_1}^{v_2} dN = \Delta N$$ 在 v_1～v_2 间隔内的分子数

5. 一容器内贮有氧气，其压强 $p = 1.01\times10^5$ Pa，温度 $t = 27$℃，其分子数密度 $n =$ $\underline{2.44\times10^{25}/m^3}$；若在同样的温度下，把容器抽成 $p' = 1.01\times10^{-13}$ Pa的真空（这是当前可获得的极限真空度），则此时的分子数密度为 $n' = \underline{2.44\times10^7/m^3}$。

[知识点] $p = nkT$ 应用及数值计算。

[分析与解答] 由理想气体状态方程 $p = nkT$ 知

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1.01\times10^5}{1.38\times10^{-23}\times300} = 2.44\times10^{25}/m^3$$

当 $p' = 1.01\times10^{-13}$ Pa，则此时分子数密度为

$$n' = \frac{p'}{kT} = \frac{1.01\times10^{-13}}{1.38\times10^{-23}\times300} = 2.44\times10^{7}/m^{3}$$

6. 由于热核反应，氢核聚变为氦核。在太阳中心氢核和氦核的质量百分比约为 35% 和 65%，太阳中心处的温度约为 1.5×10^{7}K，密度为 1.5×10^{5}kg/m^3，则氢核的压强 $p_H = \underline{6.54\times10^{15}}$ Pa；氦核的压强 $p_{He} = \underline{3.04\times10^{15}}$ Pa；太阳中心的总压强 $p = \underline{9.58\times10^{15}}$ Pa。

[知识点] 状态方程的应用，道尔顿定律。

[分析与解答] 由状态方程 $pV = \frac{m}{M}RT$，得 $p = \frac{\rho RT}{M}$

对氢核有

$$p_H = \frac{\rho_H RT}{M_H} = \frac{1.5\times10^{5}\times0.35\times8.31\times1.5\times10^{7}}{1\times10^{-3}} = 6.54\times10^{15}\,\text{Pa}$$

对氦核有

$$p_{He} = \frac{\rho_{He} RT}{M_{He}} = \frac{1.5\times10^{5}\times0.65\times8.31\times1.5\times10^{7}}{4\times10^{-3}} = 3.04\times10^{15}\,\text{Pa}$$

由道尔顿定律，总压强为

$$p = p_H + p_{He} = 9.58\times10^{15}\,\text{Pa}$$

7. 2mol 氢气（双原子分子）在 0℃时的分子平均平动动能 $\overline{\varepsilon_k} = \underline{5.65\times10^{-21}}$ J；平均总动能 $\overline{E_k} = \underline{9.42\times10^{-21}}$ J；内能 $E = \underline{11.34\times10^{3}}$ J。

若将温度升高 1℃时，其内能增量 $\Delta E = \underline{41.6}$ J。

[知识点] 平均平动动能、平均动能及内能的数值计算。

[分析与解答] H_2 是双原子分子气体，$i = 5$。

平均平动动能为 $$\overline{\varepsilon_k} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}\times1.38\times10^{-23}\times273 = 5.65\times10^{-21}\,\text{J}$$

平均总动能 $$\overline{E_k} = \frac{5}{2}kT = \frac{5}{2}\times1.38\times10^{-23}\times273 = 9.42\times10^{-21}\,\text{J}$$

内能 $$E = \frac{i}{2}\nu RT = \frac{5}{2}\times2\times8.31\times273 = 11.34\times10^{3}\,\text{J}$$

当温度升高 1℃时，其内能增量为

$$\Delta E = \frac{i}{2}\nu R\Delta T = \frac{5}{2}\times2\times8.31\times1 = 41.6\,\text{J}$$

8. 当温度 $T = \underline{1.61\times10^5}$ K 时，氧气分子的方均根速率等于其离开地球表面的逃逸速度 11.2km/s。

[知识点] 方均根速率的计算。

[分析与解答] 分子的方均根速率为 $\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$，当氧气分子的方均根速率等于其离开地球表面的逃逸速率时，即

$$\sqrt{\frac{3RT}{M_{O_2}}}=11.2\times10^3$$

可解得 $$T=\frac{(11.2\times10^3)^2\times M_{O_2}}{3R}=\frac{(11.2\times10^3)^2\times32\times10^{-3}}{3\times8.31}=1.61\times10^5\text{ K}$$

9. 同一温度下的氢气和氧气的速率分布曲线如图 10-3 所示，其中曲线①为 $\underline{\text{氧}}$ 气的速率分布曲线；$\underline{\text{氢}}$ 气的最概然速率较大；从图中可知，曲线①气体的最概然速率为 $v_p=1000\text{m/s}$，则其方均根速率为 $\underline{\sqrt{\overline{v^2}}=1.22\times10^3\text{m/s}}$，而曲线②气体的最概然速率为 $\underline{v_{pH_2}=4000\text{m/s}}$。

[知识点] $v_p=\sqrt{\frac{2RT}{M}}$ 与 $\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$ 的关系。

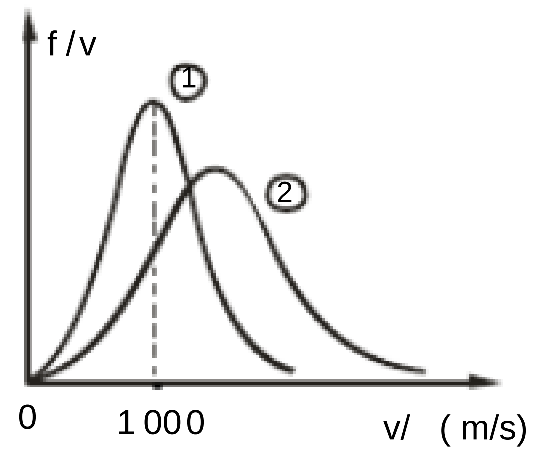


图 10-3

[分析与解答] 气体分子速率分布曲线上最大值对应的速率是最概然速率 v_p，$v_p=\sqrt{\frac{2RT}{M}}$，即 v_p 反比于 M，当温度一定时，摩尔质量 M 大的气体分子的最概然速率最小，摩尔质量 M 小的气体分子的最概然速率大。所以氢气的最概然速率较大，而 $v_p=1000\text{m/s}$ 的速率分布曲线①为氧气的。

则对氧气，最概然速率 $v_{pO_2}=1000\text{m/s}$，而 $v_{pO_2}=\sqrt{\frac{2RT}{M_{O_2}}}$

则得 $$T=\frac{v_{pO_2}^2\cdot M_{O_2}}{2R}$$

其方均根速率

$$\sqrt{\overline{v_{O_2}^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M_{O_2}}}=\sqrt{\frac{3}{2}}v_{pO_2}=\sqrt{\frac{3}{2}}\times1000=1.22\times10^3\text{m/s}$$

对氢气，其最概然速率为

$$v_{pH_2}=\sqrt{\frac{2RT}{M_{H_2}}}=\sqrt{\frac{M_{O_2}}{M_{H_2}}}v_{pO_2}=\sqrt{\frac{32}{2}}\times 1000=4000\,m/s$$

10. 根据玻耳兹曼分布律，当温度 T 恒定时，处于一定速度区间的坐标区间的分子数与因子 $\underline{e^{-\frac{E}{kT}}}$ 成正比，总能量 E 愈高的状态，分子占有该状态的概率就 __越小__ ，因此，从统计观点看，分子总是优先占据 __低能量__ 状态。

[知识点] 玻耳兹曼能量分布规律。

三、简答题

试用统计观点说明：一定量的理想气体，当体积不变时，若温度升高，则压强将增大。

[解答] T 升高，大量分子的平均平动动能增大，即 $\sqrt{\overline{v^2}}$ 增大，$\bar{v}$ 也增大，虽然 n 不变，但分子碰撞器壁的次数会增加，每次碰撞的冲量也增大，故压强 p 会增大。

四、计算与证明题

1. 在容积为 $V=2\times10^{-3}m^3$ 的容器内，盛有 $m=0.01kg$ 的氧气，其压强为 $p=9.07\times10^4Pa$。试求：

（1）氧气分子的方均根速率；

（2）单位体积内的分子数；

（3）氧气分子的平均动能；

（4）氧气分子的平均自由程和连续两次碰撞的平均时间间隔（已知氧分子的有效直径为 $2.9\times10^{-10}m$）。

[分析与解答] （1）由理想气体的状态方程 $pV=\frac{m}{M}RT$ 可得

$$T=\frac{MpV}{mR}=\frac{32\times10^{-3}\times9.07\times10^4\times2\times10^{-3}}{10\times10^{-3}\times8.31}=69.9K$$

所以，氧气分子的方均根速率为

$$\sqrt{\overline{v^2}}=1.73\sqrt{\frac{RT}{M}}=1.73\times\sqrt{\frac{8.31\times69.9}{32\times10^{-3}}}=233\,m/s$$

（2）由理想气体的状态方程 $p=nkT$ 可得

$$n=\frac{p}{kT}=\frac{9.07\times10^4}{1.38\times10^{-23}\times69.9}=9.40\times10^{25}/m^3$$

（3）氧气为双原子分子，$i=5$，则其平均动能为

$$\overline{E_k}=\frac{i}{2}kT=\frac{5}{2}\times1.38\times10^{-23}\times69.9=2.41\times10^{-21}J$$

（4）分子的平均自由程为

$$\overline{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\pi\times 9.40\times 10^{25}\times(2.9\times 10^{-10})^2}=2.85\times 10^{-8}\mathrm{m}$$

平均碰撞频率为

$$\overline{Z}=\sqrt{2}\pi d^2 n\overline{v}=\sqrt{2}\pi d^2 n\cdot\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}=7.55\times 10^{9}/\mathrm{s}$$

连续两次碰撞的平均时间间隔为

$$\Delta t=\frac{\overline{\lambda}}{\overline{v}}=\frac{1}{\overline{Z}}=0.132\mathrm{ps}$$

2. 在容积为 V 的容器中，盛有质量 $m_1\neq m_2$ 的两种单原子理想气体，它们的摩尔质量分别为 M_1 和 M_2，处于平衡态时（温度为 T），它们的内能均为 E。试证明：此混合气体的压强 $p=\dfrac{4E}{3V}$.

[证明] 单原子理想气体，$i=3$。由题设条件，内能为

$$E=\frac{m_1}{M_1}\frac{3}{2}RT=\frac{m_2}{M_2}\frac{3}{2}RT$$

即
$$\frac{m_1}{M_1}RT=\frac{m_2}{M_2}RT=\frac{2}{3}E$$

而由理想气体状态方程得 $p_1=\dfrac{m_1}{M_1}\dfrac{RT}{V}$， $p_2=\dfrac{m_2}{M_2}\dfrac{RT}{V}$

按道尔顿定律有
$$p=p_1+p_2=2\times\frac{\frac{2}{3}E}{V}=\frac{4E}{3V}$$

证毕。

3. 有 N 个气体分子，其速率分布函数为

$f(v)=a$，$(0\le v\le v_0)$

$f(v)=0$，$(v<0,\ v>v_0)$

式中 v_0 为已知常数，a 为待求常数，试求：

（1）作 $f(v)\sim v$ 分布曲线，并确定分布函数中的常数 a；

（2）速率大于 $\dfrac{v_0}{2}$ 和小于 $\dfrac{v_0}{2}$ 的气体分子数；

（3）分子的平均速率 $\overline{v}$。

[分析解答]（1）$f(v)\sim v$ 分布曲线如图 10-4 所示。

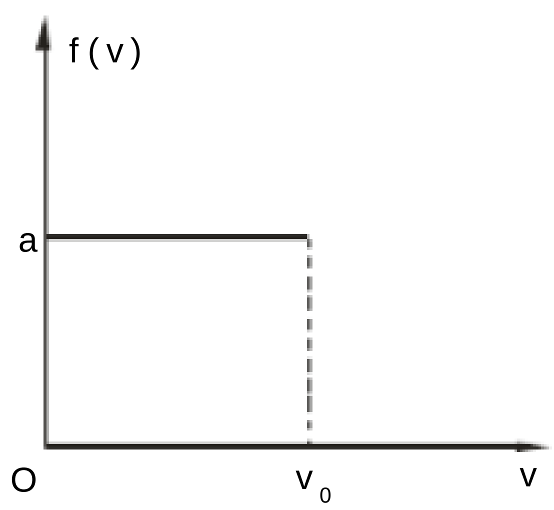


图 10-4

由归一化条件有

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = \int_0^{v_0} f(v)dv$$

$$= \int_0^{v_0} adv = av_0 = 1$$

所以， $a = \dfrac{1}{v_0}$

（2） $v > \dfrac{v_0}{2}$的气体分子数为

$$\Delta N_1 = \int_{\frac{v_0}{2}}^{\infty} dN = \int_{\frac{v_0}{2}}^{\infty} Nf(v)dv = \int_{\frac{v_0}{2}}^{v_0} Nadv = \frac{1}{2}N$$

$v < \dfrac{v_0}{2}$的气体分子数为 $\Delta N_2 = N - \Delta N_1 = N - \dfrac{1}{2}N = \dfrac{1}{2}N$

（3）由统计平均值的定义可得平均速率为

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} vf(v)dv = \int_0^{v_0} vadv = \frac{v_0}{2}$$

4．火星的逃逸速度为 5.0×10^3 m/s，其表面温度为 240K；木星的逃逸速度为 6.0×10^4 m/s，其表面温度为 130K。由此说明，为什么火星表面大气中 96%是 CO_2，而 H_2 极少；而木星表面大气中 76%是 H_2，其余为 He？（提示：计算相关气体的方均根速率加以分析。CO_2 的摩尔质量为 $M_{CO_2} = 44\times10^{-3}$ kg/mol，H_2 的摩尔质量为 $M_{H_2} = 2\times10^{-3}$ kg/mol，He 的摩尔质量为 $M_{He} = 4\times10^{-3}$ kg/mol）

[分析与解答] 在火星上，CO_2 与 H_2 的方均根速率分别为：

$$(\sqrt{\overline{v^2}})_{CO_2} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{CO_2}}} = \sqrt{\frac{3\times8.31\times240}{44\times10^{-3}}} = 3.69\times10^2 \text{ m/s}$$

$$(\sqrt{\overline{v^2}})_{H_2} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{H_2}}} = \sqrt{\frac{3\times8.31\times240}{2\times10^{-3}}} = 1.73\times10^3 \text{ m/s}$$

CO_2 的运动速率要远远小于火星的逃逸速度 5.0×10^3 m/s，而 H_2 的运动速率更接近火星的逃逸速度 5.0×10^3 m/s，表明在火星上，H_2 更容易逃逸。

而在木星上，H_2 与 He 的方均根速率分别为

$$(\sqrt{\overline{v^2}})_{H_2} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{H_2}}} = \sqrt{\frac{3\times8.31\times130}{2\times10^{-3}}} = 1.27\times10^3 \text{ m/s} \ll 6\times10^4 \text{ m/s}$$

$$(\sqrt{\overline{v^2}})_{He} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{He}}} = \sqrt{\frac{3\times8.31\times130}{4\times10^{-3}}} = 9.0\times10^2 \text{ m/s} \ll 6\times10^4 \text{ m/s}$$

表明在木星上 H_2 和 He 都不易逃逸。

六、热力学

一、选择题

（在下列各题中，均给出了 4 个~6 个答案，其中有的只有 1 个是正确答案，有的则有几个是正确答案，请把正确答案的英文字母序号填在题后的括号内）

1. 在下列说法中，正确的是：

A．物体的温度愈高，则热量愈多；

B．物体在一定状态时，具有一定的热量；

C．物体的温度愈高，则其内能愈大；

D．物体的内能愈大，则具有的热量愈多。（C）

[知识点] 内能和热量的概念。

[分析与解答] 内能是物体内部所有分子的热运动动能和分子间相互作用势能的总和，是系统状态（或温度）的单值函数，系统的温度愈高，其内能愈大。

热量是由于系统与外界温度不同而进行的传热过程中所传递的能量的多少，同样温差情况下，不同的传热过程其热量不同，热量是过程量，不是状态的函数。

作功与传热可以改变系统的内能，若系统状态不变（内能也不变），就无需作功与传热，功与热量不会出现。

2. 在下列表述中，正确的是：

A．系统由外界吸热时，内能必然增加，温度升高；

B．由于热量 Q 和功 A 都是过程量，因此，在任何变化过程中，（Q＋A）不仅与系统的始末状态有关，而且与具体过程有关；

C．无摩擦的准静态过程中间经历的每一状态一定是平衡状态；

D．在等体过程中，系统的内能增量为 $\Delta E=\frac{m}{M}C_{V,m}\Delta T$；在等压过程中，系统的内能增量为 $\Delta E=\frac{m}{M}C_{p,m}\Delta T$。（C）

[知识点] 热量、作功和内能的概念。

[分析与解答] 根据热力学第一定律 $Q=A+\Delta E$，系统由外界吸热时，可以将吸收的热量全部对外作功，内能不变，等温过程就是这种情况。

系统所吸收的热量和外界对系统做功的总和为系统内能的增量，内能的增量仅与系统始末状态有关，而与过程无关。

准静态过程就是在过程进行中的每一个状态都无限地接近平衡态的过程。由于准静态过程是无限缓慢的，无摩擦的（即无能量耗散），则各中间态都是平衡态。

无论何种过程，只要温度增量 ΔT 相同，内能增量均为 $\Delta E=\frac{i}{2}\frac{m}{M}R\Delta T=\frac{m}{M}C_{V_1m}R\Delta T$，与过程无关。

3. 一定量某理想气体，分别从同一状态开始经历等压、等体、等温过程。若气体在上述过程中吸收的热量相同，则气体对外做功最多的过程是：

A．等体过程； B. 等温过程；

C. 等压过程； D. 不能确定。 （B）

[知识点] 热力学第一定律在等值过程中的应用。

[分析与解答] 设在等压、等体和等温过程吸收的热量为 Q_0，则

等压过程 $$Q_0=\nu C_{p_1m}\Delta T=\nu\frac{i+2}{2}R\Delta T$$

$$A_p=p\Delta V=\nu R\Delta T=\frac{Q_0}{\frac{i+2}{2}}<Q_0$$

等体过程 $A_Q=0$，吸收的热量全部用于增加的内能

等温过程 $A_T=0$，吸收的热量全部用于对外做功

由热力学第一定律 $Q=A+\Delta E$ 知，等压过程，气体吸收来的热量既要对外做功，又要使内能增加；等体过程，气体不对外做功，吸收的热量全部用于增加内能；等温过程，气体吸收的热量全部用于对外做功。因此，当吸收的热量相同时，等温过程对外做功最多。

4. 如图 11-1 所示，一定量理想气体从体积 V_1 膨胀到 V_2，ab 为等压过程，ac 为等温过程，ad 为绝热过程，则吸热最多的是：

A．ab 过程； B. ac 过程；

C. ad 过程； D. 不能确定。 （A）

[知识点] 热力学第一定律的应用。

[分析与解答] 由热力学第一定律 $Q=A+\Delta E$ 知

在 ab 等压过程中，$A_p=S_{abV_1V_2}$，$\Delta E_{ab}>0$

$$Q_p>A_p=S_{a\,b_1V_2}$$

在 ac 等温过程中，$A_T=S_{acV_1V_2}$，$\Delta E=0$

$$Q_T=A_T=S_{a\,c_1V_2}$$

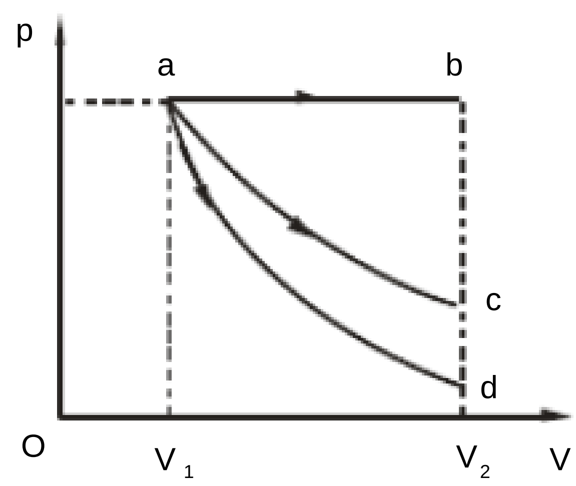


图 11-1

在 ad 绝热过程中，$Q=0$

由图知，$S_{abV_1V_2} > S_{acV_1V_2}$，即 $Q_p > Q_T > 0$，则 ab 过程吸热最多。

5. 某理想气体状态变化时，内能随压强的变化关系如图 11-2 中的直线 ab 所示，则 a 到 b 的变化过程一定是：

A．等压过程；　　B．等体过程；

C．等温过程；　　D．绝热过程。（B）

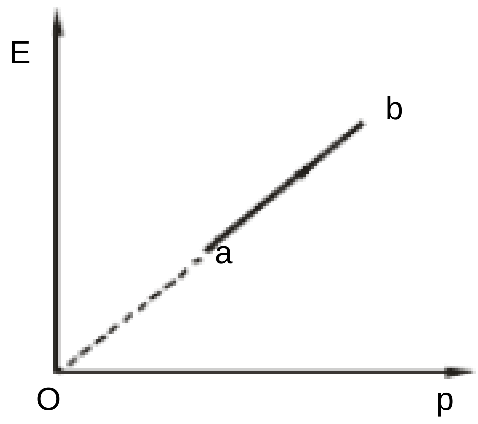


图 11-2

[知识点] E-p 图分析。

[分析与解答] 理想气体的内能为

$$E=\frac{m}{M}\frac{i}{2}RT=\frac{i}{2}pV$$

只有当 $V=$ 恒量时，E 和 p 才成线性关系，故 ab 过程为等体过程。

6. 如图 11-3 所示，理想气体卡诺循环过程中两条绝热线下面的面积分别为 S_1 和 S_2，则

A．$S_1 > S_2$；　　B．$S_1 < S_2$；

C．$S_1 = S_2$；　　D．无法确定。（C）

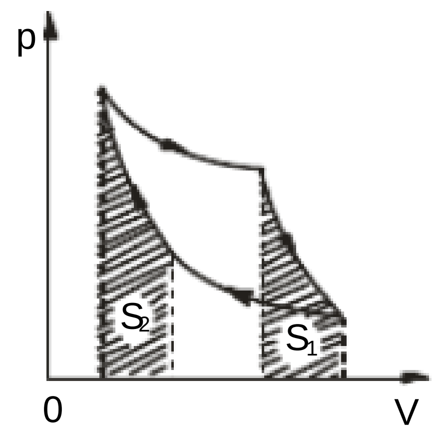


图 11-3

[知识点] 卡诺循环概念，热力学第一定律在绝热过程中的应用。

[分析与解答] 如图 11-3 所示，理想气体卡诺循环过程中两条绝热线下面的面积 S_1 表示绝热膨胀过程系统对外界所作的功，S_2 表示绝热压缩过程外界对系统所作的功。

绝热膨胀过程，$Q=0$，系统对外界所作的功等于系统内能的减少。

$$A=-\Delta E=\frac{m}{M}\frac{i}{2}R(T_2-T_1)<0$$

绝热压缩过程，$Q=0$，外界对系统所做的功等于系统内能的增加。

$$-A=\Delta E=\frac{m}{M}\frac{i}{2}R(T_2-T_1)>0$$

比较可知，绝热膨胀过程系统对外界做功与绝热压缩过程外界对系统做功数值相等，则

$$S_1=S_2$$

7. 某理想气体分别进行了如图 11-4 所示的两个卡诺循环 Ⅰ (abcda) 和 Ⅱ ($a'b'c'd'a'$)，已知两低温热源的温度相等，且两循环曲线所围面积相等，设循环 Ⅰ 的效率为 η，从高温热源吸热 Q，循环 Ⅱ 的效率为 η'，从高温热源吸热 Q'。则

A. $\eta<\eta'$，$Q<Q'$；　　B. $\eta>\eta'$，$Q<Q'$；

C． $\eta<\eta'$，$Q>Q'$；　　D. $\eta>\eta'$，$Q>Q'$。　　（C）

[知识点] $\eta_{卡}=1-\dfrac{T_2}{T_1}=\dfrac{A}{Q_1}$。

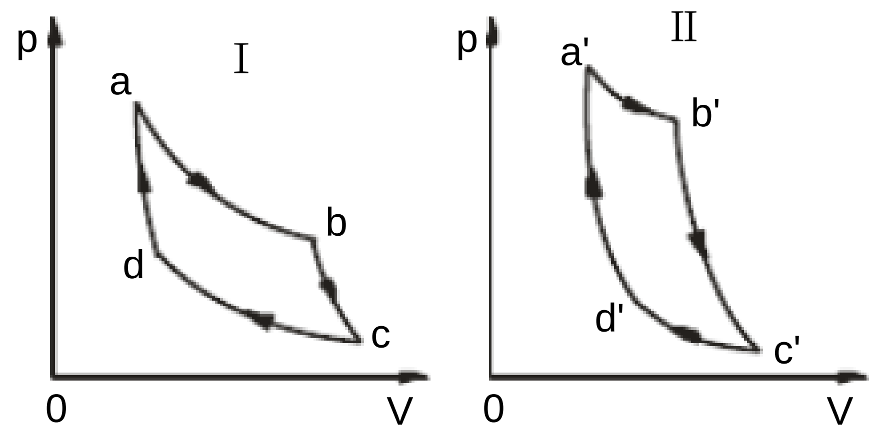


图 11-4

[分析与解答] 两循环曲线所围面积相等，表示两循环过程对外做的净功相等。

两个卡诺循环的效率为

$$\eta=1-\frac{T_2}{T_1},\qquad \eta'=1-\frac{T_2'}{T_1'}$$

由于 $T_2=T_2'$，$T_1<T_1'$，则 $\eta<\eta'$。

再根据热机效率的定义有　$\eta=\dfrac{A}{Q_{吸}}$，$\eta'=\dfrac{A'}{Q_{吸}'}$

由于两循环过程对外做的净功相等　$A=A'$，$\eta'>\eta$，则 $Q'<Q$。

8. 在热力学系统中，若高温热源的温度为低温热源温度的 n 倍，以理想气体为工作物质的卡诺机工作于上述高、低温热源之间，则从高温热源吸收的热量与向低温热源放出的热量之比为：

A. $\dfrac{n+1}{n}$；　B. $\dfrac{n-1}{n}$；　C. n；　D. $n-1$。　　（C）

[知识点] $\eta=1-\dfrac{Q_2}{Q_1}=1-\dfrac{T_2}{T_1}$。

[分析与解答] 对于卡诺循环有　$\eta=1-\dfrac{Q_2}{Q_1}=1-\dfrac{T_2}{T_1}$

若　$T_1=nT_2$，$\eta=1-\dfrac{1}{n}=1-\dfrac{Q_2}{Q_1}$

则从高温热源吸收的热量 Q_1 与向低温热源放出的热量 Q_2 之比为

$$\frac{Q_1}{Q_2}=n$$

9. 在下列有关热力学过程进行的方向和条件的表述中，正确的是：

A. 功可以全部转化为热量，但热量不能全部转化为功；

B. 热量可以从高温物体传到低温物体，但不能从低温物体传到高温物体；

C. 对封闭系统来讲，自发过程总是按系统熵值增加的方向进行；

D. 对封闭系统来讲，其内部发生的过程，总是由概率小的宏观态向概率大的宏观态进行；

E. 不可逆过程就是不能向相反方向进行的过程；

F. 一切自发过程都是不可逆的。 （C、D、F）

[知识点] 热力学第二定律的概念。

[分析与解答] 热力学第二定律指出了热传导过程和热功转换过程的不可逆性，表述中强调的是“热量不能自动地从低温传到高温”和“热量不可能完全变为有用功而不产生其他影响”，例如等温膨胀，热可以完全转变为功。

自然界中自发的热力学过程都是不可逆过程；不可逆过程可以反向进行，但系统与外界无法复原；不可逆过程是一个由热力学概率小的状态向热力学概率大的状态转变的过程；孤立系统中的一切自发宏观过程总是沿着熵增大的方向进行。

10. 某理想气体的初始温度为 T，初始体积为 V。气体取 3 个可逆过程构成一循环：绝热膨胀到 2V；等体过程到温度 T；等温压缩到初始体积 V，如图 11-5 所示，则下列叙述中正确的是：

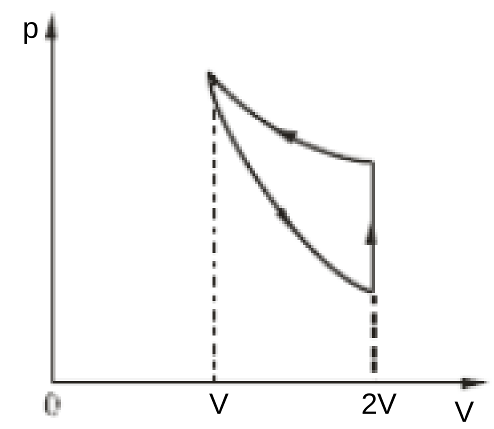


图 11-5

A．在每个过程中，气体的熵不变；

B．在每个过程中，外界的熵不变；

C. 在每个过程中，气体和外界的熵的和不变；

D．整个循环中，气体的熵增加。 （C）

[知识点] 熵增加原理的理解。

[分析与解答] 由题意知，图中的 3 个过程为可逆过程，即该循环也是可逆过程。由熵增加原理知，孤立系统中的可逆过程，其熵不变。则把气体和外界构成孤立体系，在以上 3 个可逆过程中，气体和外界的熵的和不变。

在图 11-5 中，理想气体可逆等温压缩时，气体 $\Delta S < 0$，而外界 $\Delta S > 0$；在整个循环中，气体 $\Delta S = 0$。

二、填空题

1. 试说明下列热力学规律的物理意义是：

热力学第零定律： <u>为定义温度概念提供了实验基础</u>；

热力学第一定律： <u>包括热量在内的普遍能量守恒与转化定律</u>；

热力学第二定律： <u>指明了热力学过程的方向性和条件</u>；

热力学第三定律：<u>　　　　　　　　指出 0K 是低温极限　　　　　　　　　　　　　　　　</u>；

[知识点] 热力学定律的意义。

2. 一系统由如图 11-6 所示的 a 状态沿 acb 路径到达 b 状态，有 335J 的热量传入系统，而系统对外作功 126J。

（1）若系统沿 adb 路径由 a 到 b，对外作功 42J，则传入系统的热量 Q＝<u>　251　</u> J。

（2）若系统由 b 状态沿曲线 bea 返回 a 状态，外界对系统作功为 84J，则系统吸收热量 Q＝<u>　－293　</u> J。

[知识点] 热力学第一定律的应用与计算

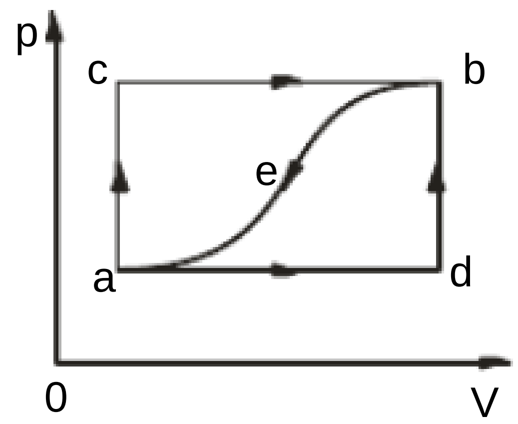


图 11-6

[分析与解答] （1）由热力学第一定律，得 acb 过程内能的增量为

$$\Delta E_{ab} = Q_{acb} - A_{acb} = 335 - 126 = 209\,J$$

adb 过程，系统的 ΔE 不变，则传入系统的热量为

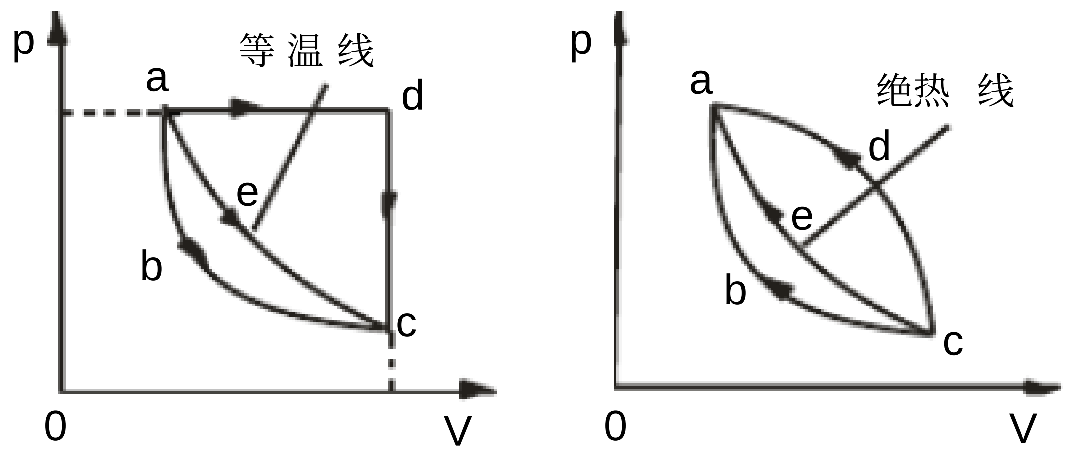
$$Q_{adb} = \Delta E_{ab} + A_{adb} = 209 + 42 = 251J$$

（2）系统由 b 沿 bea 返回 a 时，温度降低，内能减少，则 $\Delta E_{ba} = -\Delta E_{ab} = -209\,J$，而已知 $A_{bea} = -84J$，则系统吸收的热量为

$$Q_{bea} = \Delta E_{ba} + A_{bea} = -209 - 84 = -293J$$

3. 某理想气体分别经历了如图 11-7(a)和图 11-7(b)中的各过程，试判断在各过程中系统的内能增量 ΔE，作功 A 和传递热量 Q 的正负（用符号＋，－， 0 表示），并填于下表中：

过　　　程		ΔE	A	Q
图（a）	a→d	＋	＋	＋
	d→c	—	0	—
	a→e→c	0	＋	＋
	a→b→c	0	＋	＋
图（b）	c→e→a	＋	—	0
	c→b→a	＋	—	＋
	c→d→a	＋	—	—



(a) (b)

图 11-7

[知识点] ΔE、A、Q 符号分析与过程分析。

[分析与解答] 图 11-7(a)中的 $a\to d$ 过程，等压膨胀过程，$T_a<T_d$，$\Delta T>0$，$\Delta E>0$；$V_d>V_a$，$\Delta V>0$，$A>0$；$Q=\Delta E+A$，$Q>0$。

图 11-7(a)中的 $d\to c$ 过程，等体减压过程，$A=0$；$\Delta T=0$，$\Delta E<0$；$Q=\Delta E+A=\Delta E$，$Q<0$。

图 11-7(a)中的 $a\to e\to c$ 过程，等温膨胀过程，$\Delta T=0$，$\Delta E=0$；$\Delta V>0$，$A>0$；$Q=\Delta E+A=A$，$Q>0$。

图 11-7(a)中的 $a\to b\to c$ 过程，由于 $T_a=T_c$，$\Delta T=0$，$\Delta E=0$；$V_c>V_a$，$\Delta V>0$，$A>0$；$Q=\Delta E+A=A$，$Q>0$。

图 11-7(b)中的 $c\to e\to a$ 过程，绝热压缩过程，$Q=0$；$V_a<V_c$，$\Delta V<0$，$A_{cea}=-S_{cea}<0$；$\Delta E_{绝热}=Q-A_{cea}=S_{cea}>0$。

图 11-7(b)中的 $c\to b\to a$ 过程，$\Delta E=\Delta E_{绝热}>0$；$V_a<V_c$，$\Delta V<0$，$A_{cba}=-S_{cba}<0$；$Q=\Delta E+A_{cba}=S_{cea}-S_{cba}>0$。

图 11-7(b)中的 $c\to d\to a$ 过程，$\Delta E=\Delta E_{绝热}>0$；$V_a<V_c$，$\Delta V<0$，$A_{cda}=-S_{cda}<0$；$Q=\Delta E+A_{cda}=S_{cea}-S_{cda}<0$。

4. 一气缸内贮有 10mol 的某单原子分子理想气体，在压缩过程中，外力作功 209J，气体温度升高 1K。则该气体内能增量为 $\Delta E=$__125__ J，吸收的热量为 $Q=$__-84__ J。

[知识点] $\Delta E=\nu C_{V,m}\Delta T$，热力学第一定律的应用。

[分析与解答] 单原子分子气体，$i=3$，$C_{V,m}=\dfrac{3}{2}R$

理想气体内能增量为 $\Delta E=\nu C_{V,m}\Delta T=10\times\dfrac{3}{2}R\times1=125$

吸收的热量为　$Q=\Delta E+A=125-209=-84\,J$

5. 一定量的氧气经历绝热膨胀过程，初态的压强和体积分别为 p_1 和 V_1，内能为 E_1。末态的压强和体积分别为 p_2 和 V_2，内能为 E_2。若 $p_1=2p_2$，则 $\frac{V_2}{V_1}=$ $\underline{2^{5/7}=1.64}$，$\frac{E_2}{E_1}=$ $\underline{2^{-2/7}=0.82}$。

[知识点] 绝热过程方程，热力学第一定律在绝热过程中的应用。

[分析与解答] 氧气为双原子分子气体，$i=5$，$C_{V,m}=\frac{5}{2}R$，$\gamma=\frac{i+2}{i}=\frac{7}{5}$

由绝热过程方程得　$p_1V_1^{\gamma}=p_2V_2^{\gamma}$

有
$$\frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=\left(\frac{2p_2}{p_2}\right)^{\frac{5}{7}}=2^{\frac{5}{7}}=1.64$$

氧气的内能为
$$E=\nu C_{V,m}T=\nu\frac{5}{2}RT=\frac{5}{2}pV$$

则
$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{p_2V_2}{p_1V_1}=\frac{p_2}{p_1}\cdot\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{5}{7}-1}=\left(\frac{2p_2}{p_2}\right)^{-\frac{2}{7}}=2^{-\frac{2}{7}}=0.82$$

6. 一定量某理想气体，分别进行了两次等体变化，温度均从 T_a 升至 T_b，其中 $p-T$ 曲线如图 11-8 所示。则两次变化中的热量大小为 Q_1 $\underline{=}$ Q_2；体积大小为 V_1 $\underline{<}$ V_2。（填 <、 > 或 =）

[知识点] $p-T$ 曲线分析，热力学第一定律在等体过程中的应用。

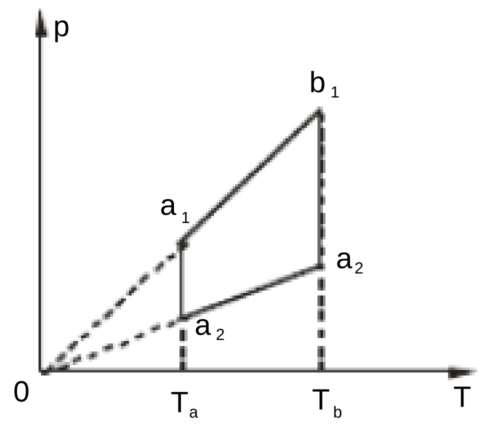


图 11-8

[分析与解答] 等体过程中吸收的热量为
$$Q=\frac{m}{M}C_{V,m}\Delta T=\nu\frac{i}{2}R(T_b-T_a)$$

则两次变化中的热量　$Q_1=Q_2=\nu\frac{i}{2}R(T_b-T_a)$

由理想气体状态方程 $pV=\frac{m}{M}RT$ 知，对一定量理想气体，当温度一定时，体积 V 与压强 p 成反比。从图 11-8 可知，$p_1>p_2$，则 $V_1<V_2$。

7. 循环过程的特征是 $\underline{\Delta E=0}$。

现有一卡诺热机，其从 373K 的高温热源吸热，向 273K 的低温热源放热，则该热机的效率 $\eta=$ $\underline{26.8\%}$；若该热机从高温热源吸收 1000J 热量，则该热机所做的功 $A=$ $\underline{268}$ J，放出的热量 $Q_2=$ $\underline{732}$ J。

[知识点] 卡诺循环效率 $\eta_{卡}=1-\frac{T_2}{T_1}=\frac{A}{Q_1}$ 的计算。

[分析与解答] 对卡诺热机，其循环效率为

$$\eta_{卡}=1-\frac{T_2}{T_1}=1-\frac{273}{373}=26.8\%$$

循环效率又可表示为 $\eta=\frac{A}{Q_1}=\eta_{卡}$

则该热机所做的功为 $A=Q_1\eta_{卡}=1000\times 26.8\%=268J$

放出的热量为 $Q_2=Q_1-A=1000-268=732J$

8. 1mol 氮气的初温为 $T_1=300K$，经绝热压缩后，温度升为 $T_2=396K$，则在压缩过程中，外界对氮气所作的功 $A=$ __1994__ J，而氮气的熵变 $\Delta S=$ __0__。

[知识点] 热力学第一定律在绝热过程中的应用，熵变 ΔS 的计算。

[分析与解答] 氮气为双原子分子气体，$i=5$，$C_{V,m}=\frac{5}{2}R$

在绝热过程，氮气所作的功为

$$A'=-\Delta E=-\nu C_{V,m}(T_2-T_1)=-1\times\frac{5}{2}\times 8.31(396-300)=-1994J$$

则外界对氮气所作的功为 $A=-A'=1994J$

在绝热压缩过程中，$dQ=0$，则在此过程中氮气的熵增加为

$$\Delta S=\int_1^2\frac{dQ}{T}=0$$

三、计算与证明题

1. 一定量某单原子分子理想气体，在等压情况下加热，求吸收的热量中有百分之几消耗在对外作功上？

[分析与解答] 单原子分子气体 $i=3$，$C_{V,m}=\frac{3}{2}R$

由热力学第一定律 $Q=A+\Delta E$ 知，等压过程中

系统对外作功为 $A=\nu R\Delta T$

吸收的热量为 $Q=\nu C_{p,m}\Delta T=\nu R\Delta T+\nu C_{V,m}\Delta T$

则 $\frac{A}{Q}=\frac{\nu R\Delta T}{\nu R\Delta T+\nu C_{V,m}\Delta T}=\frac{R}{R+C_{V,m}}=40\%$

2. 设有质量 $m=8.0\times10^{-3}kg$ 的氧气，体积 $V_1=0.41\times10^{-3}m^3$，温度 $T_1=300K$，现使其分别经过绝热过程和等温过程，体积膨胀至 $V_2=4.10\times10^{-3}m^3$。试比较这两个过程中

氧气对外所做的功，并画出 p-V 简图。

[分析与解答] 氧气为双原子分子气体，$i=5$，$C_{V,m}=\frac{5}{2}R$，$\gamma=\frac{i+2}{i}=1.4$

（1）由绝热方程 $V_1^{\gamma-1}T_1=V_2^{\gamma-1}T_2$，得

$$T_2=T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}=300\times\left(\frac{1}{10}\right)^{1.4-1}=119K$$

故 $A_Q=-\Delta E=-\frac{m}{M}C_{V,m}(T_2-T_1)$

$$=\frac{8.0\times10^{-3}}{32\times10^{-3}}\times\frac{5}{2}\times8.31\times(300-119)=940J$$

（2）在等温过程中，有

$$A_T=\frac{m}{M}RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$=\frac{8.0\times10^{-3}}{32\times10^{-3}}\times8.31\times300\times\ln10=1435J$$

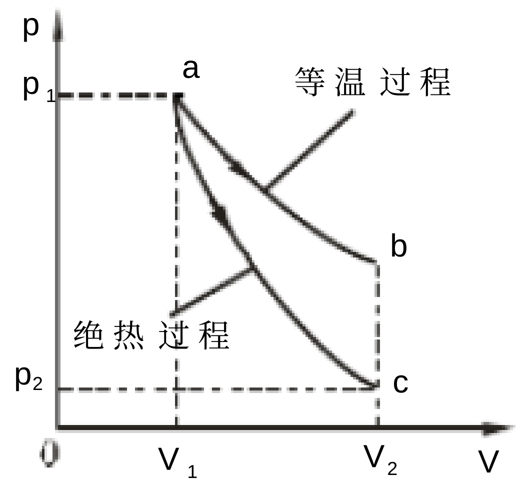


图 11-9

可见，$A_T>A_Q$。氧气两个过程的 p-V 简图如图 11-9 所示，由图中可见等温过程曲线下面的面积大于绝热过程的面积，也可知 $A_T>A_Q$。

3. 1mol 氮气进行如图 11-10 所示的 dabcd 循环，ab、cd 为等压过程，bc、da 为等体过程。已知 $p_0=1.0\times10^5\,Pa$，$V_0=1.0\times10^{-3}\,m^3$，且 $p=2p_0$，$V=2V_0$。试计算：

（1）在整个循环过程中，氮气所做净功；

（2）该循环的效率。

[分析与解答] 氮气为双原子分子气体，$i=5$

$$C_{V,m}=\frac{5}{2}R,\quad C_{p,m}=\frac{7}{2}R$$

（1）由理想气体作功的图示意义，在循环中气体作功为

$$A=S_{dabcd}=(p-p_0)\times(V-V_0)=p_0V_0$$

$$=1.0\times10^5\times1.0\times10^{-3}=100J$$

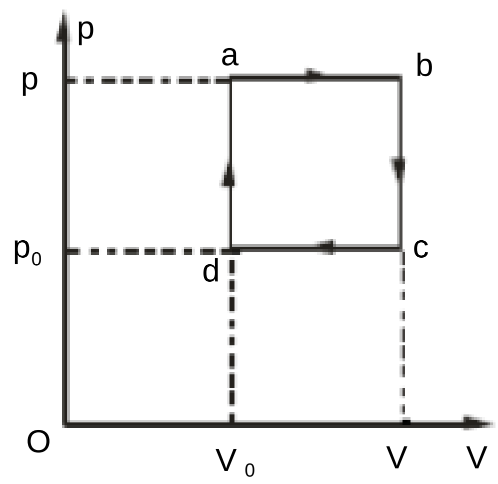


图 11-10

（2）在循环中，da 等体过程及 ab 等压过程气体吸热，则

$$Q_吸=Q_{da}+Q_{ab}=C_{V,m}(T_a-T_d)+C_{p,m}(T_b-T_a)$$

因为 $T_a=\frac{p_aV_a}{R}=\frac{2p_0V_0}{R}$，$T_b=\frac{p_bV_b}{R}=\frac{4p_0V_0}{R}$，$T_d=\frac{p_dV_d}{R}=\frac{p_0V_0}{R}$

代入前式得 $Q_吸=\frac{5}{2}R\times(\frac{2p_0V_0}{R}-\frac{p_0V_0}{R})+\frac{7}{2}R\times(\frac{4p_0V_0}{R}-\frac{2p_0V_0}{R})$

$$=\frac{19}{2}p_0V_0=950\text{J}$$

则循环的效率为 $\eta=\frac{A}{Q_{吸}}=\frac{p_0V_0}{\frac{19}{2}p_0V_0}=10.5\%$

4. 一台家用电冰箱，工作时耗电功率为 150W，在平均室温为 32 °C 的炎热夏季，要保持冷冻室的温度为 −8 °C，试问每分钟可从冷冻室吸取的最大热量是多少？向室内放出的热量是多少？（假设该电冰箱以卡诺循环方式工作。）

[分析与解答] 已知该电冰箱是以卡诺循环方式工作，卡诺致冷机的循环是理想循环。

由题意知，$T_1=305\text{K}$，$T_2=265\text{K}$，则冰箱的致冷系数最大可达

$$\omega_{卡}=\frac{T_2}{T_1-T_2}=\frac{265}{305-265}=6.63$$

又 $\omega_{卡}=\frac{Q_2}{A}$，电冰箱每分钟做功为

$$A=Pt=150\times60=9.00\times10^3\text{J}$$

所以，每分钟可从冷藏室中吸取的最大热量是

$$Q_2=\omega_{卡}A=6.63\times9\times10^3=5.97\times10^4\text{J}$$

此时，每分钟向室内放出的热量为

$$Q_1=Q_2+A=6.87\times10^4\text{J}$$

可见，在夏季放置冰箱的房间内的气温，要比其他房间的气温高。

四、问答题

1. 试写出理想气体等体摩尔热容 $C_{V,m}$ 和等压摩尔热容 $C_{p,m}$ 的表达式。并说明为什么 $C_{p,m}>C_{V,m}$？

[分析与解答] 等体摩尔热容为 $C_{V,m}=\frac{i}{2}R$，等压摩尔热容为 $C_{p,m}=\frac{i+2}{2}R$。

在等压膨胀过程中，系统吸收的 Q_p 一部分用于增加内能，一部分用于对外作功；而在等体过程中，吸收的热量 Q_V 全部用于增加内能。可见，在 ΔT 相同时，$Q_p>Q_V$，则 $C_{p,m}>C_{V,m}$。

2. 试说明为什么一条等温线与一条绝热线不能有两个交点。

[分析与解答] 用反证法说明。

假设一条等温线 1-4-2 与一条绝热线 1-3-2 相交于 I、2 两点，如图 11-11所示。这样就构成了一循环过程

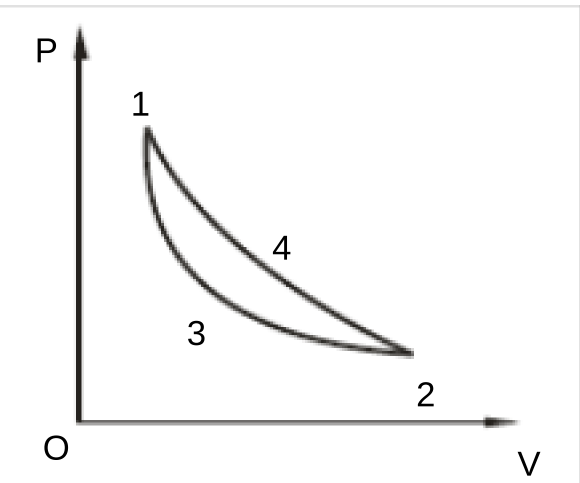


图 11-11

1-4-2-3-1，而这一循环只有一个热源 T，并能对外作功，而不产生其它变化。这种单一热源的热机是违背热力学第二定律开尔文表述的。因此假设不成立，即一条等温线与一条绝热线不可能有两个交点。

七、简谐运动

一、选择题

（在下列各题中，均给出了 4 个~5 个答案，其中有的只有 1 个是正确答案，有的则有几个是正确答案，请把正确答案的英文字母序号填在题后的括号内）

1. 在关于简谐运动的下列说法中，正确的是：

A．质点受到回复力（恒指向平衡位置的力）的作用，则该质点一定作简谐运动；

B．一小球在半径很大的光滑凹球面上来回滑动，如果它滑过的弧线相对凹球面的半径很短，则小球作简谐运动；

C. 物体在某一位置附近来回往复的运动是简谐运动；

D．若一物理量 Q 随时间的变化满足微分方程 $\frac{d^2Q}{dt^2}+\omega^2Q=0$，则此物理量 Q 作简谐运动（$\omega$ 是由振动系统本身的性质决定的常量）；

E. 篮球运动员运球过程中，篮球作简谐运动。（B、D）

[知识点] 简谐运动的概念。

[分析与解题] 因为一质点作简谐运动必须受到一个恒指向平衡位置，且与位移成正比的弹性力（或准弹性力）的作用。

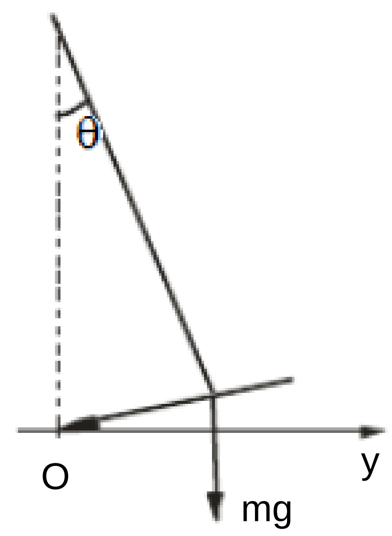


图 12-1

如图 12-1 所示，根据牛顿第二定律，小球在运动时受到 $F_\tau=-mg\sin\theta$ 回复力的作用，依题意，$\sin\theta\approx\tan\theta=\frac{y}{R}$（式中 R 为凹球面半径），即回复力为 $F_\tau=-\frac{mg}{R}y$，满足简谐运动动力学判据。

简谐运动不仅是来回往复运动，而且应满足位移随时间是按正弦（或余弦）规律变化的。

简谐运动的运动学特征是 $\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0$，所以，物理量 Q 的微分方程 $\frac{d^2Q}{dt^2}+\omega^2Q=0$ 满足简谐运动运动学判据。

篮球运动员运球过程中，篮球除在拍打和地面反弹有瞬间碰撞力外，只受到始终向下的重力作用，不满足简谐运动动力学判据。

2. 一个沿 y 轴作简谐运动的弹簧振子，振幅为 A，周期为 T，其运动方程用余弦函数表示。下面左侧是振子的初始状态，右侧列出了一些初相位值，试用连线的方法确定它们的对应关系：

A．过 $y=\frac{A}{2}$ 处向 y 轴正方向运动　　　　A′. 初相位为 $-\frac{3}{4}\pi$

B．过 $y=-\frac{A}{\sqrt{2}}$ 处向 y 轴正方向运动　　　　B′. 初相位为 $\pm\pi$

C．过平衡位置处向 y 轴正方向运动　　　　C′. 初相位为 $-\frac{1}{3}\pi$

D．过 $y_0=-A$　　　　D′. 初相位为 $-\frac{1}{2}\pi$

[知识点] 旋转矢量法求初相位。

[分析与解题] 由题意可画出各种条件下的旋转矢量，如图 12-2 所示。

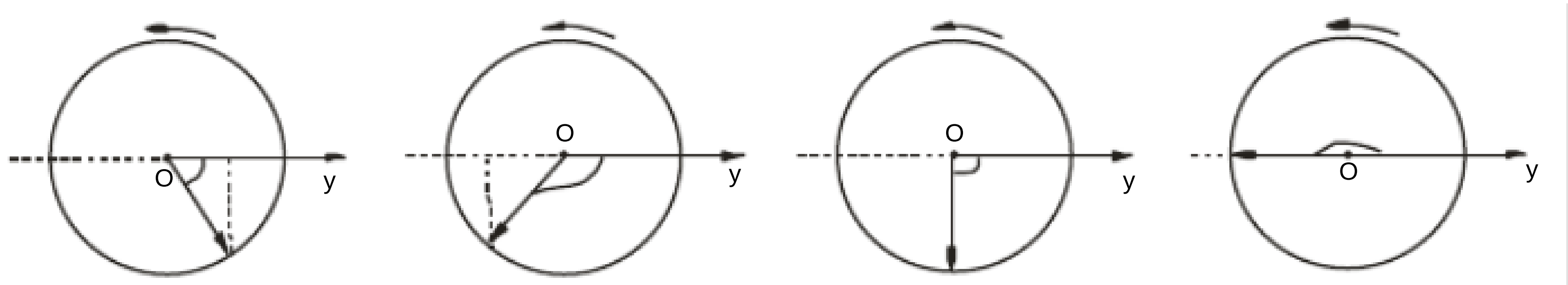


图 12-2

3. 一质点作简谐运动，其振动速度与时间的 v—t 曲线如图 12-3(a) 所示，若质点的振动规律用余弦函数描述，则其振动方程中初相位应为：

A．$+\frac{\pi}{6}$；　　B．$+\frac{5\pi}{6}$；　　C．$-\frac{5\pi}{6}$；

D．$-\frac{\pi}{6}$；　　E．$-\frac{2\pi}{3}$。　　　　（C）

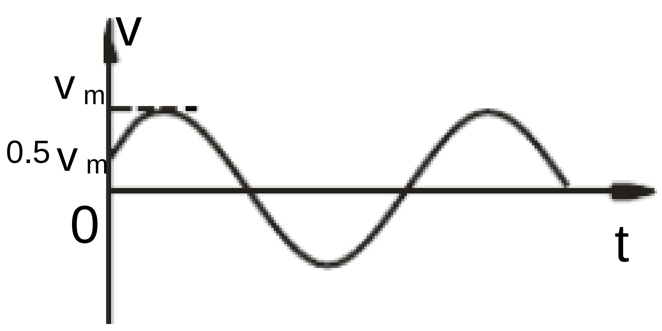


图 12-3(a)

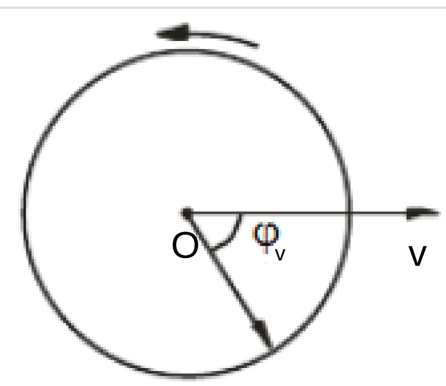


图 12-3(b)

[知识点] 速度的旋转矢

量，速度与位移的相位关系。

[分析与解题] 由如图 12-3(a)所示 v—t 曲线可知， $t=0$ 时， $v_0=0.5v_m$ 且 v 在增大， 从 v 的旋转矢量图 12-3(b)所示，得速度初相位为 $\varphi_v=-\dfrac{\pi}{3}$

又知速度相位比位移相位超前 $\dfrac{\pi}{2}$，即 $\varphi_v=\varphi_0+\dfrac{\pi}{2}$

则位移的初相位 $\varphi_0=-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{5\pi}{6}$

4. 如图 12-4 所示的弹簧振子， 当振动到最大位移处恰有一质量为 m_0 的烂泥小球从正上方落到质量为 m 的物块上，并与物块粘在一起运动。则下述结论中正确的是：

A．振幅变小，周期变小；

B．振幅变小，周期不变；

C．振幅不变，周期变大；

D．振幅不变， 周期变小； （C）

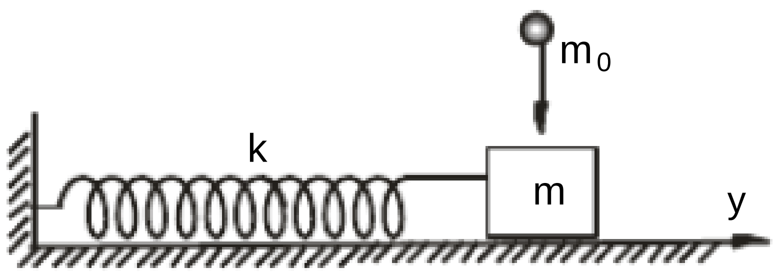


图 12-4

[知识点] 简谐运动振幅 A 和周期 T 的影响因素。

[分析与解题] 当振子正好在最大位移处时，烂泥小球落在物块上，根据动量守恒定律，在 y 方向有 $mv=(m+m_0)v'=0$

所以，小球不会影响振子在 y 方向上的状态，即不会影响振幅变化，有 $A'=A$。

由于周期是由振动系统自身性质所确定的，即 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

烂泥小球落在物块前后，振子的质量由 m 变化为（ $m+m_0$），因此相应的周期将发生变化，即

泥球落下前： $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

泥球落下后： $T'=2\pi\sqrt{\dfrac{m+m_0}{k}}>T$

5. 有两个沿 y 轴作简谐振动的质点， 其频率、振幅皆相同， 当第一个质点自平衡位置向负方向运动时， 第二个质点在 $y=-\dfrac{A}{2}$ 处（A 为振幅）也向负方向运动。则两者的相位差 $\varphi_2-\varphi_1$ 为：

A. $\frac{\pi}{2}$;　　B. $\frac{2\pi}{3}$;　　C. $\frac{\pi}{6}$;　　D. $\frac{5\pi}{6}$。　　(C)

[知识点] 旋转矢量求初相位，相位差的计算。

[分析与解题] 由题意作如图 12-5 所示旋转矢量，可得：第一个质点的相位为 $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$时，第二个质点的相位应为 $\varphi_2=\frac{2\pi}{3}$，则相位差为

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$$

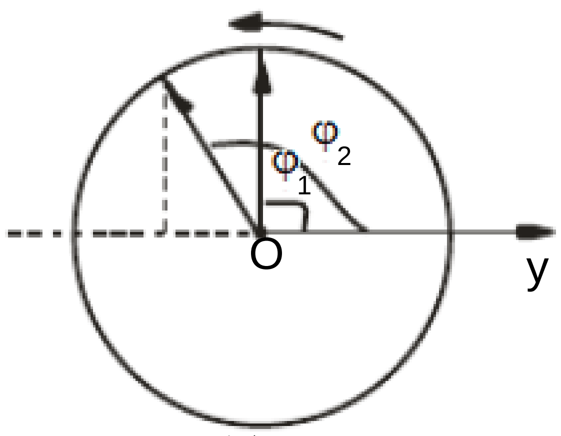


图 12-5

点周由 y 轴时，

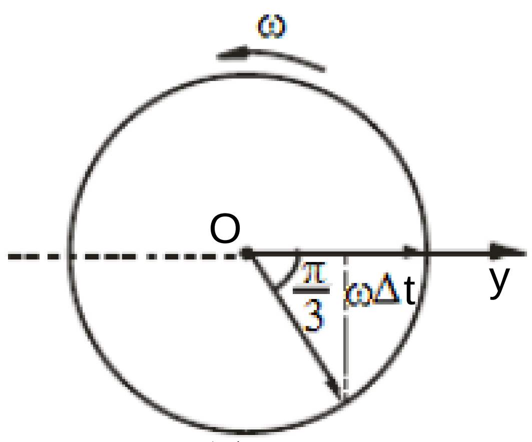


图 12-6

6. 一质作简谐运动，期为 T，当它平衡位置向正方向运动从二分之一最大位移处到最大位移处所需时间为：

A. $\frac{T}{4}$;　　B. $\frac{T}{12}$;　　C. $\frac{T}{6}$;　　D. $\frac{T}{8}$。　　(C)

[知识点] 旋转矢量求初相位，旋转矢量与简谐振动的对应关系。

[分析与解题] 由题意作如图 12-6 所示旋转矢量，可得：当质点由平衡位置向 y 轴正方向运动时，在 $\frac{1}{2}A$处的相位为 $\varphi_1=-\frac{\pi}{3}$，在 A 处的相位为 $\varphi_2=0$，则得

$$\omega\Delta t=\frac{\pi}{3}$$

所需要的时间为 $\Delta t=\frac{\pi}{3\omega}=\frac{\pi}{3\times\frac{2\pi}{T}}=\frac{T}{6}$

7. 一质点作简谐运动，其振动方程为 $y=A\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$，则该物体在 $t=0$ 时刻与 $t=\frac{T}{8}$（T 为振动周期）时刻的动能之比为：

A. 1:4;　　B. 1:2;　　C. 1:1;　　D. 2:1。　　(D)

[知识点] 简谐振动的速度与简谐振动的动能。

[分析与解题] 已知振动方程为 $y = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$，则振动速度方程为

$$v = \frac{dy}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$t = 0$时，$v_0 = -\omega A$，$E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$

$t = \frac{T}{8}$时，$v_1 = -\omega A\sin(\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{8} + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega A$，$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{4}kA^2$

则动能之比为 $\frac{E_0}{E_1} = \frac{2}{1}$

8. 一振动系统的振动曲线如图 12-7所示，则其振动方程为：

A. $y = 6\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2})$；

B. $y = 6\cos(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2})$；

C. $y = 6\cos(2\pi t + \frac{\pi}{2})$；

D. $y = 6\cos(2\pi t - \frac{\pi}{2})$。

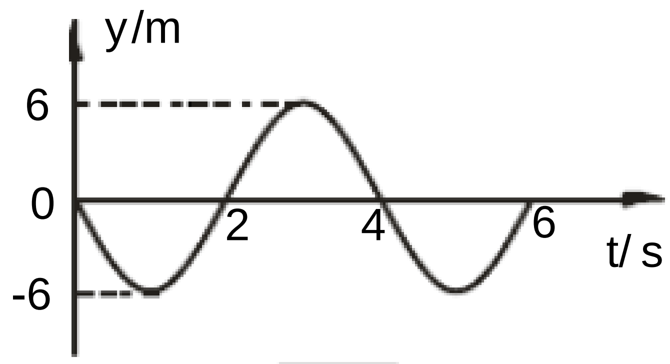


图 12-7

（A）

[知识点] 由 y—t 曲线建立振动方程。

[分析与解题] 从图 12-7 所示曲线得 $A = 6m$，$T = 4s$，$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$

还可知，当 $t = 0$ 时，$y_0 = 0$，$v_0 < 0$，则由

$$y_0 = A\cos\varphi = 0 \text{ 和 } v_0 = -\omega A\sin\varphi < 0$$

得初相位为 $\varphi = \frac{\pi}{2}$

则振动方程为 $y = 6\cos\frac{\pi}{2}(t + \frac{\pi}{2})$

9. 弹簧振子在光滑水平面上作简谐运动。 在半个周期内，速度的平均值、速率的平均值和弹性力所作的功分别为：

A． 0， 0， 0； B． 0， $\frac{\omega A}{\pi}$， 0；

C． 0， $\frac{\omega A}{\pi}$， kA^2； D． 0， $\frac{2\omega A}{\pi}$， $\frac{1}{2}kA^2$。 （B）

[知识点] 速度的平均值、速率的平均值和变力作功的计算。

[分析与解题] 设弹簧振子简谐运动方程为 $y = A\cos(\omega t + \varphi)$

则任意时刻 t 的速度为 $v = \frac{dy}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$

在半个周期内，速度的平均值为

$$\bar{v} = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} v\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} -\omega A\sin(\omega t + \varphi)dt$$

$$= -\frac{2A}{T}\int_0^{\pi}\sin(\omega t + \varphi)d(\omega t)$$

在半个周期内，速率的平均值为

$$\bar{v} = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2}|v|dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}|\omega A\sin(\omega t + \varphi)|dt$$

$$= \frac{2A}{T}\int_0^{\pi}|\sin(\omega t + \varphi)|d(\omega t)$$

利用动能定理可得，弹性力所作的功

$$A = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m[-\omega A\sin(\omega t + \varphi)]^2 - \frac{1}{2}m[-\omega A\sin(\omega t + \varphi + \pi)]^2 = 0$$

10. 一质点同时参与了两个方向同频率的简谐运动，其振动方程分别为：

$$y_1 = 5\times 10^{-2}\cos(4t + \frac{\pi}{3}) \quad (SI)$$

$$y_2 = 3\times 10^{-2}\sin(4t - \frac{\pi}{6}) \quad (SI)$$

则其合振动方程为：

A． $y = 8\times 10^{-2}\cos(4t + \frac{\pi}{3})$ （SI）

B． $y = 8\times 10^{-2}\cos(4t - \frac{\pi}{6})$ （SI）

C． $y = 2\times 10^{-2}\cos(4t + \frac{\pi}{3})$ （SI）

D. $y = 2\times 10^{-2}\cos(4t - \frac{\pi}{6})$ （SI） （C）

[知识点] 简谐振动的合成，加强、减弱条件。

[分析与解题] 质点的同方向同频率的两个简谐运动方程分别为

$$y_1 = 5\times 10^{-2}\cos(4t + \frac{\pi}{3})$$

$$y_2 = 3\times 10^{-2}\sin(4t - \frac{\pi}{6}) = 3\times 10^{-2}\cos(4t - \frac{2\pi}{3})$$

合振动仍为简谐振动，其频率仍为分振动的频率 $\omega = 4$。

两个简谐振动的相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -\pi$$

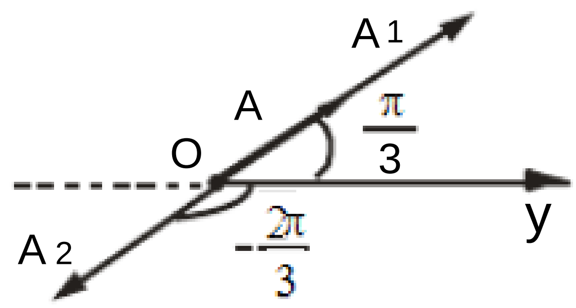


图 12-8

满足相干减弱条件，则合振幅为

$$A = A_1 - A_2 = 2\times 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

可由图 12-8 的旋转矢量得合振动的初相位为

$$\varphi = \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$$

则合振动方程为 $y = 2\times 10^{-2}\cos(4t + \frac{\pi}{3})$ （SI）

11. 如图 12-9(a)所示为两个简谐运动的 y—t 曲线，将这两个简谐运动叠加，则合成的余弦振动的初相位为：

A. 0； B. $\frac{3}{2}\pi$；

C. π； D. $\frac{1}{2}\pi$。 （C）

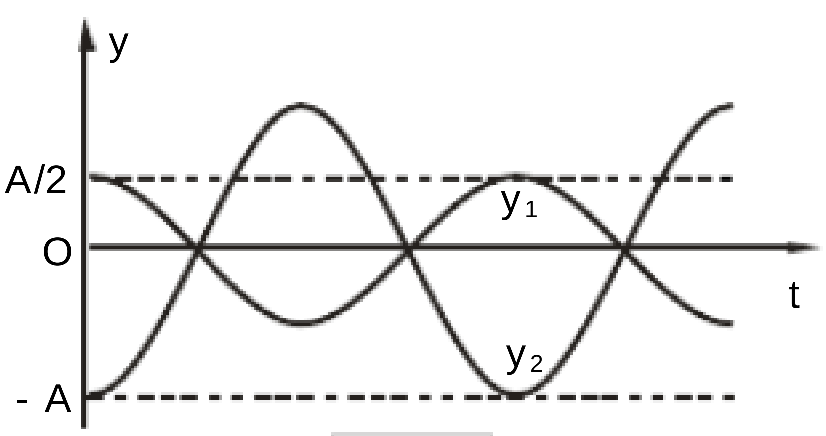


图 12-9(a)

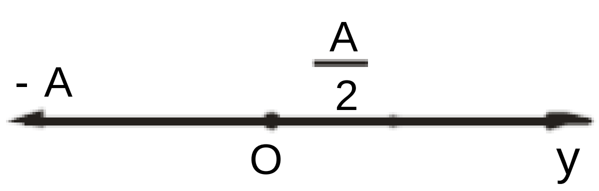


图 12-9(b)

[知识点] 简谐振动的合成，加强、减弱条件。

[分析与解题] 由图 12-9(a)振动曲线可知，y_1简谐运动 $A_1 = \frac{A}{2}$，初相位为 $\varphi_1 = 0$；

y_2简谐运动 $A_2 = A$，初相位为 $\varphi_2 = \pi$；

矢量图如图 12-9(b)所示，知两简谐运动反相，且 $A_2 = 2A_1$，则合振动的初相位与 y_2 初相位一致，即 $\varphi = \pi$。

12. 如果一振动系统既受到欠阻尼作用，还受到周期性外力的作用，当位移振幅达到最大时，周期性外力的频率 ν 和振动系统的固有频率 ν_0 相接近，且为：

A. $\nu/\nu_0 > 1$； B. $\nu/\nu_0 < 1$；

C. $\nu/\nu_0 = 1$； D. 前三者都有可能。 （B）

而速度振幅达到最大时，有：

A. $\nu/\nu_0 > 1$； B. $\nu/\nu_0 < 1$；

C. $\nu/\nu_0 = 1$； D. 前三者都有可能。 （C）

[知识点] 受迫振动的共振现象。

[分析与解题] 受迫振动的振幅最大时，周期性外力的频率 ν 和振动系统的固有频率 ν_0 相接近，且周期性外力的角频率为

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} < \omega_0 \text{（}\beta\text{为阻尼因数）}$$

速度振幅达到最大时，即系统发生速度共振时，$\omega = \omega_0$。

二、填空题

1. 一竖直悬挂着的弹簧振子，自然平衡时，弹簧的伸长量为 y_0，则此弹簧振子作自由振动的周期为 $T = \underline{2\pi\sqrt{\dfrac{y_0}{g}}}$。

[知识点] 简谐运动周期 T 的影响因素。

[分析与解题] 竖直悬挂弹簧振子自然平衡时，振子受力有

$$mg = ky_0$$

由于周期是由振动系统自身性质所确定的，即 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{y_0}{g}}$

2. 如图 12-10 所示，垂直悬挂的弹簧振子由两根轻弹簧串接，则系统的振动周期 T

$= 2\pi\sqrt{\dfrac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$；若物体 m 由平衡位置向下位移 y，则系统势能增量为 $\Delta E_p = \dfrac{k_1k_2y^2}{2(k_1+k_2)}$。

[知识点] 弹簧的串接特点，简谐运动周期 T 的计算。

[分析与解题] 两根轻弹簧串接的系统可用一个等效弹簧振子来描述。设该等效弹簧振子伸长 Δy，由于受力相同，而 k_1、k_2 不同，则两弹簧的伸长量 Δy_1 和 Δy_2 就不相同，且

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 \qquad (1)$$

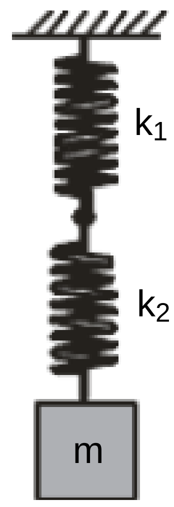


图 12-10

设两弹簧受力为 F，则

$$F = k\Delta y,\quad F = k_1\Delta y_1,\quad F = k_2\Delta y_2 \qquad (2)$$

将式(2)代入式(1)，得 $\dfrac{F}{k} = \dfrac{F}{k_1} + \dfrac{F}{k_2}$

则等效弹簧振子的劲度系数 k 应为 $k = \dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$

所以，等效弹簧振子的振动周期为 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$

3. 两个简谐振动的曲线如图 12-11所示，两个振动的频率之比 $\nu_1:\nu_2 =$ _2:1_；加速度的最大值之比 $a_{1m}:a_{2m} =$ _4:1_；初始速度之比 $v_{10}:v_{20} =$ _2:1_。

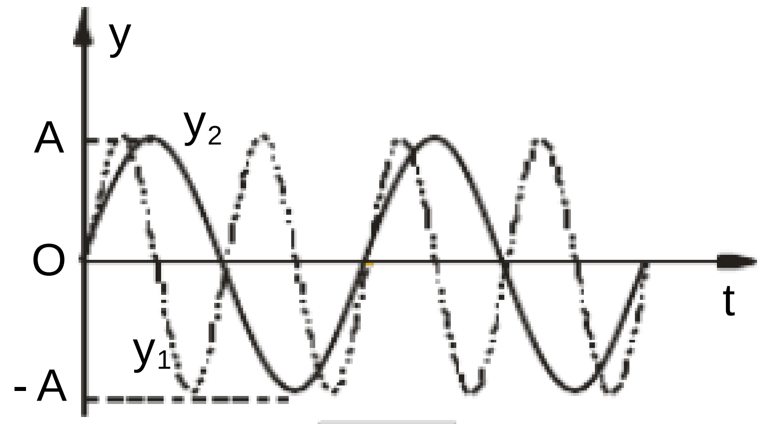


图 12-11

[知识点] 通过 y—t 图线求周期 T、振幅 A、初相位 φ。

[分析与解题] 由图 12-11 可知，$A_1 = A_2 = A$，$T_2 = 2T_1$，$\varphi_1 = \varphi_2 = -\dfrac{\pi}{2}$

两个振动的频率之比为 $\dfrac{\nu_1}{\nu_2} = \dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{2}{1}$

加速度的最大值之比为 $\dfrac{a_{1m}}{a_{2m}} = \dfrac{A_1\omega_1^2}{A_2\omega_2^2} = \dfrac{\nu_1^2}{\nu_2^2} = \dfrac{4}{1}$

初始速度之比为 $$\frac{v_{10}}{v_{20}}=\frac{-\omega_1 A_1 \sin(\frac{\pi}{2})}{-\omega_2 A_2 \sin(\frac{\pi}{2})}=\frac{\nu_1}{\nu_2}=\frac{2}{1}$$

4. 一简谐运动的振动方程用余弦函数表示，其 y—t 曲线如图 12-12(a)所示，则此简谐振动的三个特征量为：

$A=$ <u>10</u> cm； $\omega=\underline{\frac{\pi}{6}}$ rad/s； $\varphi=\underline{\frac{\pi}{3}}$ rad。

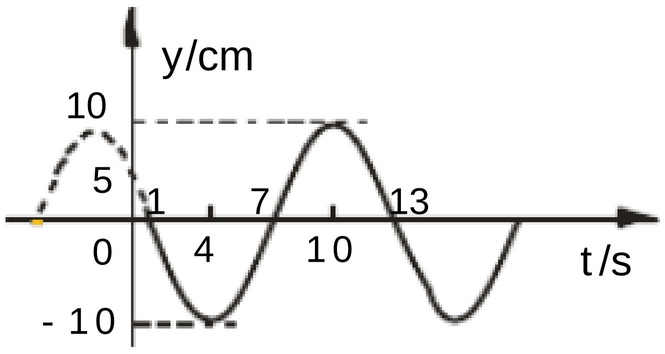


图 12-12(a)

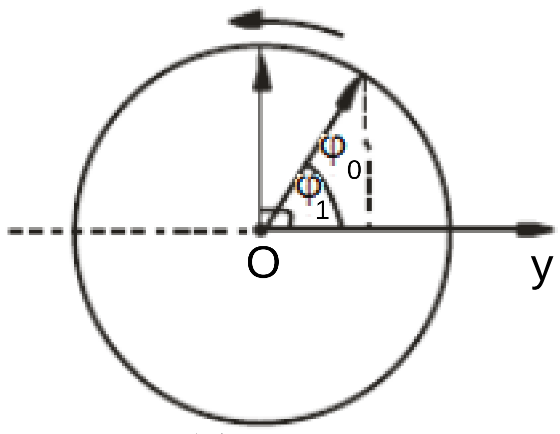


图 12-12(b)

[知识点]通过 y—t 图线求周期 T、振幅 A、初相位 φ。

[分析与解题] 由图 12-12 可知，$A=10\text{cm}$

当 $t_0=0$ 时，$y_0=5\text{cm}$，$v_0<0$，可由如图 12-12(b)所示旋转矢量图得 $\varphi_0=\frac{\pi}{3}$

当 $t_1=1\text{s}$ 时，$y_1=0$，$v_0<0$，可由如图 12-12(b)所示旋转矢量图得 $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$

而 $$\varphi_1=\omega t_1+\varphi_0=\omega\times 1+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$$

则 $$\omega=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$$

5. 一质点作简谐运动，角频率为 ω，振幅为 A。当 $t=0$ 时，质点位于 $y_0=\frac{A}{2}$ 处，且向 y 正方向运动，则其运动方程为：

$y=\underline{A\cos(\omega t-\frac{\pi}{3})}$；

质点的速度 v 也作同频率的简谐运动，若仍以余弦函数表示，则速度 v 的初相位为 $\varphi_v=\underline{\frac{\pi}{6}}$，速度的最大值为 $v_m=\underline{\omega A}$。

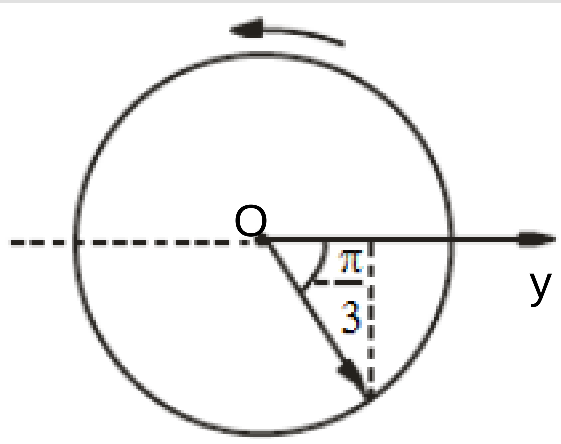


图 12-13

[知识点] 初相位 φ 的求法，位移初相位与速度初相位的关系。

[分析与解题] 由题意知，当 $t=0$ 时，$y_0=\frac{A}{2}$，且 $v_0>0$，则有

$$y_0=\frac{A}{2}=A\cos\varphi \qquad 得 \quad \varphi=\pm\frac{\pi}{3}$$

又由 $v_0=-\omega A\sin\varphi>0$，知 $\sin\varphi<0$

则得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$

或由如图 12-13 所示旋转矢量图也可得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$

则运动方程为 $y=A\cos(\omega t-\frac{\pi}{3})$

又由于速度的初相位比位移初相位超前 $\frac{\pi}{2}$，即有

速度的初相位为 $\varphi_v=\varphi+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$

速度的最大值为 $v_m=\omega A$

6. 一水平弹簧振子作简谐运动，振幅 $A=2$ cm，速度的最大值为 $v_m=3$ cm/s，当 $t=0$ 时，小球有负的速度最大值，则

速度方程为 $v=$ $\underline{3\cos(\frac{3}{2}t+\pi)}$ cm/s；

运动方程为 $y=$ $\underline{2\cos(\frac{3}{2}t+\frac{\pi}{2})}$ cm。

[知识点] 速度初相位的求法，由速度方程求运动方程。

[分析与解题] 设速度方程为 $v=v_m\cos(\omega t+\varphi_v)$，已知 $A=2$ cm，而速度的最大值为 $v_m=\omega A=3\text{cm/s}$，则有 $\omega=\frac{v_m}{A}=\frac{3}{2}\text{rad/s}$

又已知当 $t=0$ 时，$v_0=-\omega A$，有 $v_0=-\omega A=\omega A\cos\varphi_v$

求解上式，可得 $\varphi_v=\pi$

也可由题意画出 $t=0$ 时速度的旋转矢量，如图 12-14 所示。

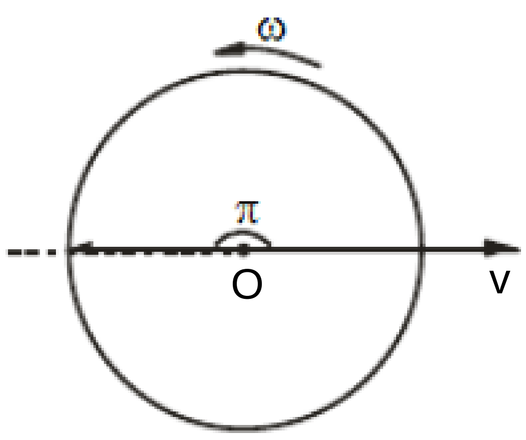


图 12-14

则得速度的初相位为 $\varphi_v = \pi$

所以，速度方程为 $v = 3\cos(\frac{3}{2}t + \pi)\ cm/s$

又由于有 $\varphi_v = \varphi + \frac{\pi}{2}$，即位移的初相位为 $\varphi = \varphi_v - \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

所以，运动方程为 $y = 2\cos\frac{3}{2}(t + \frac{\pi}{2})\ \ cm$

7. 如图 12-15 所示，一弹簧振子置于光滑水平面上，静止于弹簧原处，振子质量为 m。现有一质量为 m_0 的子弹以速度 v_0 射入其中，并一起作简谐运动。如以此时刻作为计时起点，则初相位 $\varphi =$ $\underline{\frac{\pi}{2}}$；振幅 $A = \underline{\frac{m_0 v_0}{\sqrt{k(m_0 + m)}}}$。

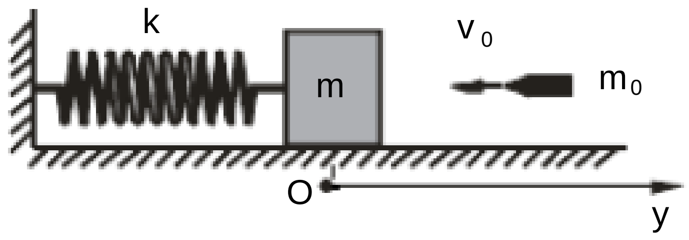


图 12-15

[知识点] 由初始条件，用解析法求初相位和振幅。

[分析与解题] 由于子弹与振子的碰撞满足动量守恒定律，则有

$$m_0 v_0 = (m_0 + m)v_0'，\quad 即 \quad v_0' = \frac{m_0}{m_0 + m} v_0$$

式中 v_0' 为系统作简谐运动在 $t = 0$ 时的初速度，也是系统速度最大值的负值，即 $v_0' = -v_m'$。

设速度方程为 $v' = v_m' \cos(\omega t + \varphi_v)$，则有 $v_0' = -v_m' = v_m' \cos\varphi_v$

得 $\varphi_v = \pi$

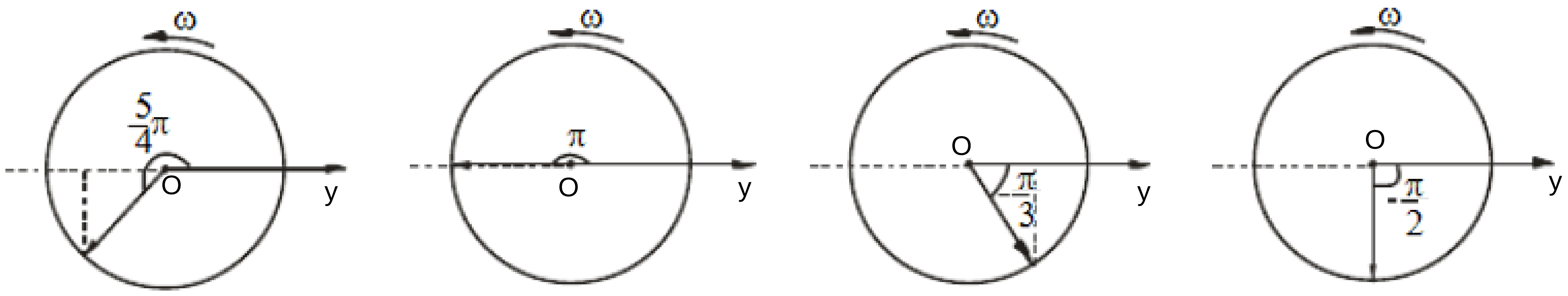
则位移的初相位为 $\varphi = \varphi_v - \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

由于系统作简谐运动时满足机械能守恒定律，则有

$$\frac{1}{2}(m_0 + m)v_0'^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

系统的振幅 $A = \sqrt{\frac{m_0 + m}{k}} v_0' = \sqrt{\frac{m_0 + m}{k}} \cdot \frac{m_0}{m_0 + m} v_0 = \frac{m_0 v_0}{\sqrt{k(m_0 + m)}}$

8. 作简谐运动的质点，t 时刻的相位分别为（a）$\frac{5}{4}\pi$；（b）$\pm\pi$；（c）$-\frac{\pi}{3}$；（d）



（a）（b）（c）（d）

图 12-16

$-\frac{\pi}{2}$。试在图 12-16 中画出对应的旋转矢量图。

[知识点] 旋转矢量图的画法。

[分析与解题]各条件下的旋转矢量图如图 12-16 所示。

9. 两个质点平行于同一直线并排作同频率、同振幅的简谐运动。在振动过程中，每当它们经过振幅一半的地方时相遇，而运动方向相反。则它们的相位差为 $\Delta\varphi=$ $\underline{\frac{2}{3}\pi}$ ；若将这两个分振动合成，则合振幅为 $A'=$ $\underline{A}$ ；并在图 12-17(a)上用旋转矢量表示此相位差和合振幅。

[知识点] 简谐运动的合成。加强、减弱条件。

[分析与解题]设这两个简谐运动方程分别为

$$y_1=A\cos(\omega t+\varphi_1),\quad y_2=A\cos(\omega t+\varphi_2)$$

由题意知，当 $y_1=\frac{A}{2}$ 时，也有 $y_2=\frac{A}{2}$，但运动方向相反。

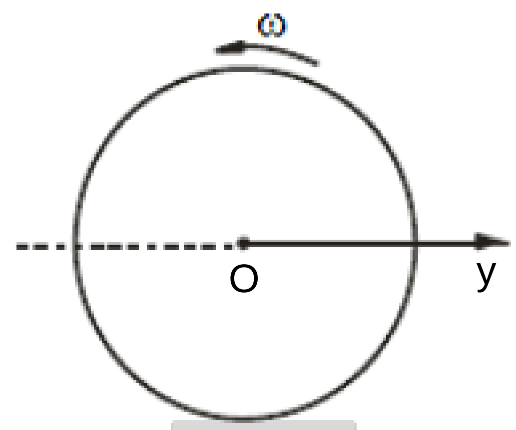


图 12-17(a)

即 $\omega t+\varphi_1=\frac{\pi}{3}$时，应有 $\omega t+\varphi_2=-\frac{\pi}{3}$

则相位差为 $\Delta\varphi=|\varphi_2-\varphi_1|=\frac{2}{3}\pi$

合振幅为 $A'=\sqrt{A^2+A^2+2A^2\cos\frac{2}{3}\pi}=A$

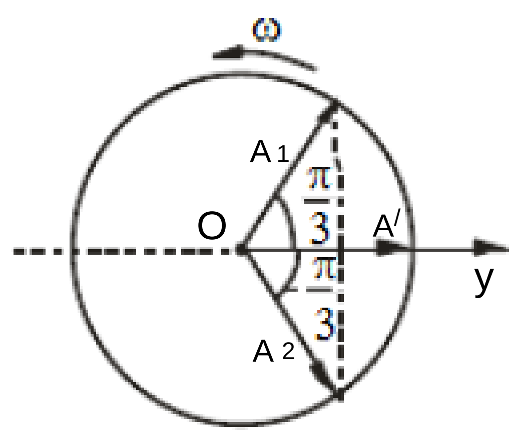


图 12-17(b)

用旋转矢量表示的相位差和合振幅如图 12-17(b)所示。

10. 为测定某音叉 A 的频率，另选两个频率接近且已知的音叉 B 和 C，音叉 B 的频率为 400Hz，C 的频率为 397Hz。当音叉 A 与 B 同时振动时，每秒听到声音加强 2 次，当音叉 A 与 C 同时振动时，每秒听到声音加强 1 次，则音叉 A 的频率为 $\nu_A =$ __398__ Hz。

[知识点] 拍现象，拍频的计算。

[分析与解题] 由拍频公式 $\nu = |\nu_2 - \nu_1|$

有 $$2 = |400 - \nu_A|,\quad 1 = |397 - \nu_A|$$

可得 $\nu_A = 398\text{Hz}$

三、计算与证明题

1. 质量为 m 的质点沿 y 轴作简谐运动，其振动方程为 $y = 0.06\cos(5t - \frac{\pi}{2})\text{m}$。试求：

（1）质点在起始位置时所受的力；

（2）$t = \pi$ s 时的位移、速度和加速度；

（3）质点运动到什么位置时，其动能与势能相等？

（4）质点从平衡位置处移动到动能与势能相等位置处所需要的最短时间？

[分析与解答] 由 $y = 0.06\cos(5t - \frac{\pi}{2})$ 得

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) = -0.3\sin(5t - \frac{\pi}{2})$$

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -1.5\cos(5t - \frac{\pi}{2})$$

（1） $F_0 = ma_0 = -1.5m\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$

（2） 当 $t = \pi$ s 时， $y_1 = 0.06\cos(5\pi - \frac{\pi}{2}) = 0$

$$v_1 = -0.3\sin(5\pi - \frac{\pi}{2}) = -0.3\text{m/s} = v_m$$

$$a_1 = -\omega^2 y_1 = 0$$

（3）当 $E_k = E_p$，有 $\frac{1}{2}ky_2^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}kA^2$，则

当 $y_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$ 时，动能与势能相等。

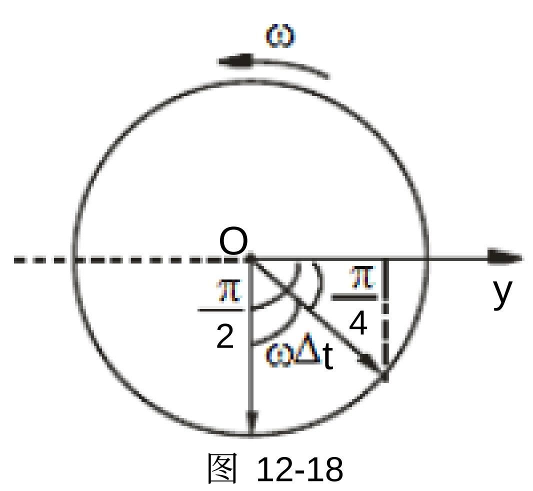


图 12-18

（4）由题意画旋转矢量图如图 12-18 所示，则得

$$\omega \Delta t = \frac{\pi}{4}$$

所需要的最短时间为 $\Delta t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{20} s$

2. 已知某简谐运动的振动曲线如图 12-19 所示，试求：

（1）简谐运动方程；

（2） $t = \frac{3}{2}$ s 时的相位；

（3）12s 内振子的位移和路程。

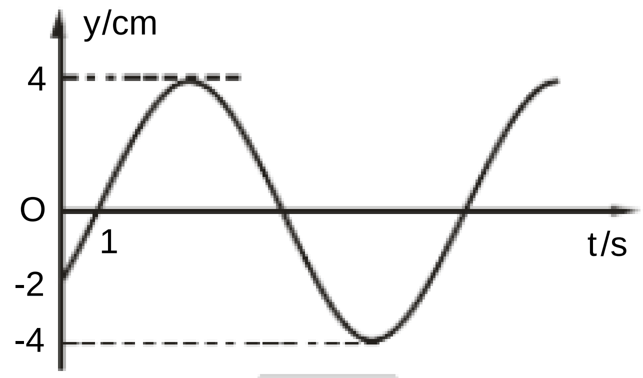


图 12-19

[分析与解答] （1）由曲线知， $A = 4$ cm

$t_0 = 0$ 时， $y_0 = -2$cm， 向 y 轴正方向运动

则初相位为 $\varphi = \frac{4\pi}{3}$

$t_1 = 1$s 时， $y_1 = 0$， 向 y 轴正方向运动

则此时相位为 $\Phi_1 = \frac{3\pi}{2}$

而 $\Phi_1 = \omega t_1 + \varphi = 1 \times \omega + \frac{4}{3}\pi = \frac{3}{2}\pi$

则 $\omega = \frac{\pi}{6}$， $T = \frac{2\pi}{\omega} = 12s$

简谐运动方程为 $y = 0.04\cos(\frac{\pi}{6}t + \frac{4\pi}{3})m$

（2） $t = \frac{3}{2}$s 时， $\omega t + \varphi = \frac{\pi}{6} \times \frac{3}{2} + \frac{4\pi}{3} = \frac{19}{12}\pi$

（3）由于 $T = 12s$，故 $t = 12s$ 时振子回到初始位置 y_0

故位移 $\Delta y = 0$

路程 $s = 4A = 16cm$

3. 已知三个同方向、同频率的简谐运动的运动方程分别为：

$$y_1 = 0.04\cos(2\pi t + \pi)\ m$$

$$y_2 = 0.03\cos(2\pi t + \frac{\pi}{2}) \quad m$$

$$y_3 = 0.02\cos(2\pi t + \varphi_3) \quad m$$

试求：(1) $(y_1 + y_2)$的合振动的振动方程；

(2) φ_3为多少时，$(y_1 + y_3)$的合振幅最大？其值为多少？

(3) φ_3为多少时，$(y_2 + y_3)$的合振幅最小？其值为多少？

[分析与解答]（1）y_1与y_2的合振动也是简谐振动，其角频率为 $\omega = 2\pi$

两分振动的相位差为 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$

则合振动的振幅为 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} = 0.05m$

合振动的初相位为 $\tan\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = -\frac{3}{4}$

由两旋转矢量的合成图（如图 12-20）可知，所求的初相位φ_0应在第二象限，则

$$\varphi_0 = \frac{4}{5}\pi$$

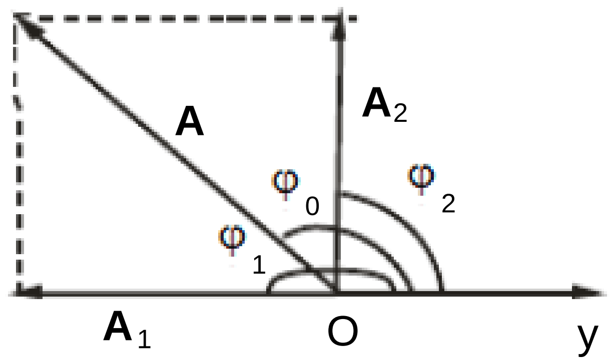


图 12-20

故所求的振动方程为

$$y = 0.05\cos(2\pi t + \frac{4\pi}{5})m$$

（2）$\Delta\varphi = \varphi_3 - \varphi_1 = \pm 2k\pi\ (k = 0,1,2\cdots)$ 时，y_1与y_3的合振动的振幅最大。

则 $\varphi_3 = \pm 2k\pi + \varphi_1 = \pm 2k\pi + \pi = (\pm 2k + 1)\pi, k = 0,1,2\cdots$

合振动的振幅为 $A = A_1 + A_3 = 0.06m$

（3）$\Delta\varphi = \varphi_3 - \varphi_2 = \pm(2k+1)\pi\ (k = 0,1,2\cdots)$ 时，y_2与y_3的合振动的振幅最小。

则 $\varphi_3 = \pm(2k+1)\pi + \varphi_2 = \pm(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$，$k = 0,1,2\cdots$

合振动的振幅为 $A = A_2 - A_3 = 0.01m$

4. 如图 12-21所示，一定滑轮的半径为 R，转动惯量为 I，其上挎有一细绳，绳的一端系有一质量为 m 的物体，另一端与一固定的轻弹簧相连，弹簧的劲度系数为 k，绳与滑轮间无相对

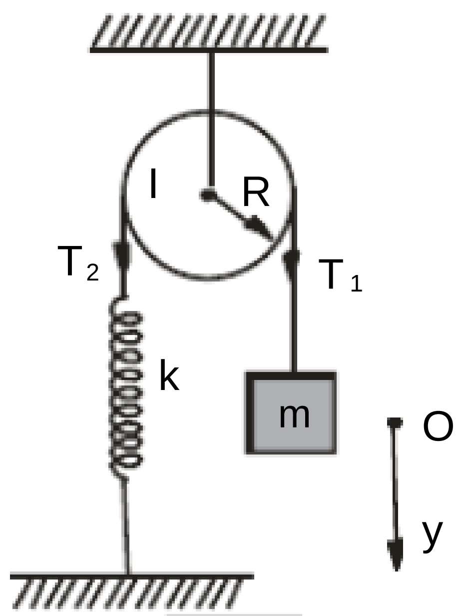


图 12-21

滑动，也不计滑轮与轴间的摩擦。现将物体从平衡位置向下拉一微小距离后轻轻释放。

（1）试证明系统的运动为简谐运动；

（2）试求其角频率 ω和周期 T；

[分析与解答]（1）取物体平衡位置 O 为坐标原点， y 轴正方向向下，

有 $$mg = ky_0 \qquad (1)$$

当物体移动 y，有 $$mg - T_1 = m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad (2)$$

$$(T_1 - T_2)R = I\beta = \frac{I}{R}\frac{d^2y}{dt^2} \qquad (3)$$

$$T_2 = ky_0 + ky \qquad (4)$$

联立式（1）~式（4），求解得 $$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{\frac{I}{R^2} + m}y = 0$$

令 $\omega^2 = \dfrac{k}{\frac{I}{R^2} + m}$，则 $$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

表明系统的运动是简谐运动。

（2）系统的角频率为 $$\omega = \sqrt{\frac{k}{\frac{I}{R^2} + m}} = \sqrt{\frac{kR^2}{I + mR^2}}$$

系统的周期为 $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I + mR^2}{kR^2}}$$

四、问答题

简述弹簧振子作简谐运动的特征。

[解答] 运动学特征： $y = A\cos(\omega t + \varphi)$，表明弹簧振子位移随时间 t 按余弦（或正弦）规律变化。

动力学特征： $F = -ky$，表明弹簧振子所受的合外力与位移成正比而反向。

能量特征： $$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t$$

$$E_p = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2\omega t$$

表明 E_p、E_k 均随时间 t 作周期变化，且二者相互转化，但总机械能守恒，即

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2$$

八、波动

一、选择题

（在下列各题中，均给出了 4 个~5 个答案，其中有的只有 1 个是正确答案，有的则有几个是正确答案，请把正确答案的英文字母序号填在题后的括号内）

1. 在下列关于机械波的表述中，不正确的是：

A. 机械波实际上就是在波的传播方向上，介质中各质元的集体受迫振动；

B. 在波的传播方向上，相位差为 2π 的两质元之间的距离称为波长；

C. 振动状态在介质中传播时，波线上各质元均可视为新的子波波源；

D. 波的振幅、频率、相位与波源相同；

E. 波线上离波源越远的质元，相位越落后。 （D）

[知识点] 机械波的概念。

[分析与题解] 平面简谐波在弹性介质中传播，介质中各质元都做受迫振动，各质元均可视为新的子波波源，因此，各质元的振幅、频率与波源是相同的，但各质元的相位是沿传播方向逐点落后的。

2. 平面简谐波波函数的一般表达式为 $y = A\cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi]$，则下列说法中不正确的是：

A. $\frac{\omega x}{u}$ 表示波线上任一质元落后于原点处质元的相位，或者说是波线上相距为 x 的两质元的相位差；

B. $\frac{x}{u}$ 表示波从 $x = 0$ 传到 x 处所需时间；

C. $(-\frac{x}{u})$ 中的负号表示相位落后；$(+\frac{x}{u})$ 中的正号表示相位超前；

D. $\frac{\partial y}{\partial t}$ 是任一时刻波线上任一质元的振动速度 v，它并不等于波速 u；

E. $\frac{\partial y}{\partial t}$ 表示波速 u，它与介质的性质有关。 （E）

[知识点] 波动方程中各物理量的意义。

[分析与题解] $\frac{\partial y}{\partial t}$ 表示波动某一质元的振动速度 v，它并不等于波速 u。一般来说 $\frac{\partial y}{\partial t}$ 是时间的函数并且与质元位置 x 有关，而波速 u 只与介质的性质有关。

3. 在下列关于波的能量的表述中，正确的是：

A．波的能量 $E=E_k+E_p=\frac{1}{2}kA^2$；

B. 机械波在介质中传播时，任一质元的 E_k 和 E_P 均随时间 t 变化，但相位相差 $\frac{\pi}{2}$；

C. 由于 E_k 和 E_P 同时为零，又同时达到最大值，表明能量守恒定律在波动中不成立；

D. E_k 和 E_P 同相位，表明波的传播是能量传播的过程。 （D）

[知识点] 波的能量特征。

[分析与题解] 波在介质中传播时，各质元的动能和势能都随时间变化，且两者同相位，其总能量随时间变化，说明能量在传播。

能量守恒定律是自然界普遍适用的物理规律，波动中各质元的机械能不守恒，是因为前后质元作用给该质元的弹性力要做功，这也说明了波的传播是能量传播的过程。

4. 一列平面余弦波，在 $t=0$ 时波动曲线如图 13-1(a)所示，则 P 点和 Q 点的振动初相位分别为：

A. $-\frac{\pi}{2}$， $\frac{\pi}{2}$； B. $\frac{\pi}{2}$， $-\frac{\pi}{2}$；

C. 0， 0； D. $\frac{\pi}{2}$， $\frac{3\pi}{2}$ 。 （A）

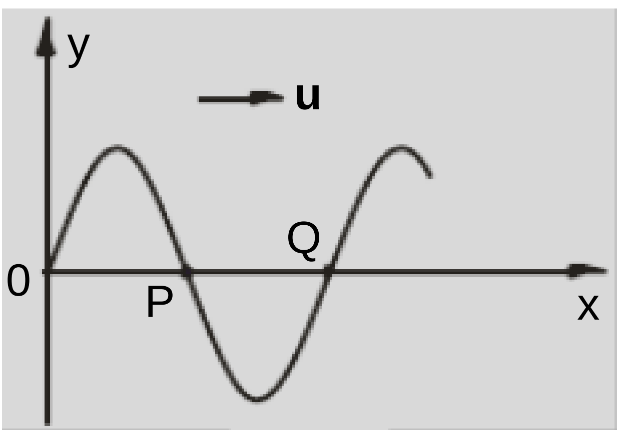


图 13-1(a)

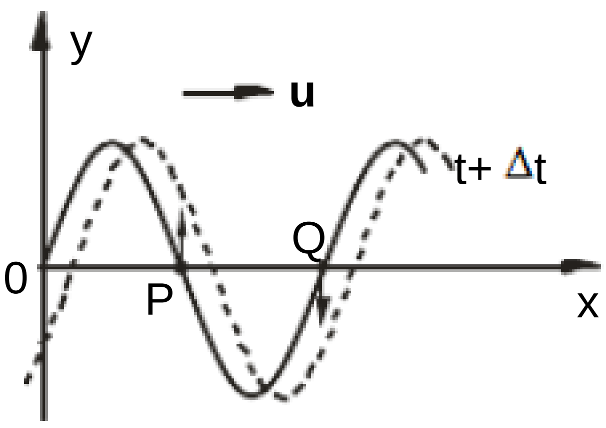


图 13-1(b)

[知识点] 波线上任一点振动方向的判断。

[分析与题解] 依平面余弦波行波的特性， $t+\Delta t$ 时刻的波形如图 13-1(b)所示。可知 $t=0$ 时刻， P 点向 y 轴正方向运动，且 $y_0=0$，则 P 点此时振动的初相位 $\varphi_{P0}=-\frac{\pi}{2}$；Q 点与 P 点相距半个波长，则 Q 点与 P 点必反向，则 Q 点此时振动的初相位 $\varphi_{Q0}=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$。

5. 一列平面余弦波 t 时刻的波形如图 13-2所示，则该时刻能量为最大值的介质质元的位置是：（B）

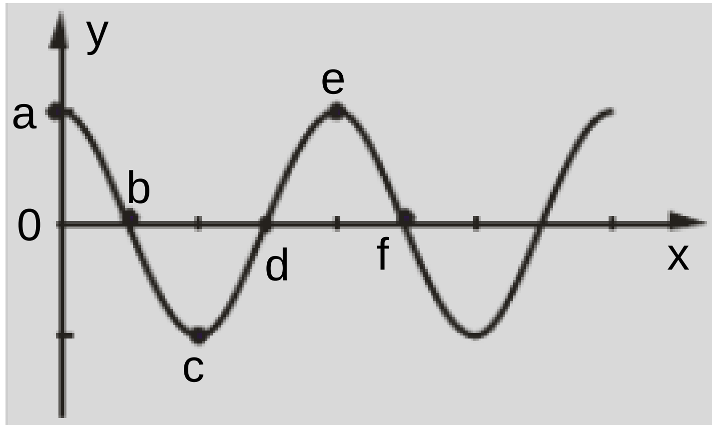


图 13-2

A． a, c, e ； B． b, d, f ；

C． a, e ； D． c。

[知识点] 平面简谐波能量特征，最大能量位置判断。

[分析与题解] 波动中质元的动能、势能与总能量同相变化， 且在平衡位置处动能、势能与总能量最大，在位移最大处动能、势能与总能量最小。

由题意得：b、d、f 在平衡位置处，且向 x 轴正或负方向运动； a、c、e 处在位移最大处。因此，则该时刻能量为最大值的介质质元的位置是 b、d、f。

6. 一频率为 500Hz 的平面简谐波， 波速为 360m / s，则同一波线上相位差为 $\frac{\pi}{3}$两点间距离为：

A． 0.24m； B． 0.48m；

C． 0.36m； D． 0.12m。 （D）

[知识点] 波线上两点间相位差公式 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}d$ 。

[分析与题解] 已知 $\nu = 500Hz$， $u = 360m/s$，则波长为

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{360}{500} = 0.72m$$

由波线上相隔距离为 d 的两点间相位差公式 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}d$，得

$$d = \frac{\lambda}{2\pi}\Delta\varphi = \frac{0.72}{2\pi} \times \frac{\pi}{3} = 0.12m$$

7. 已知一波动在 t = 0.5s 的波形如图 13-3(a)所示，波速为 10m / s，若此时 P 点处介质质元的振动动能在逐渐增大，则波动方程为：

A． $y = 10\cos[\pi(t + \frac{x}{10})]cm$

B． $y = 10\cos[\pi(t + \frac{x}{10}) + \pi]\mathrm{cm}$ ；

C． $y = 10\cos[\pi(t - \frac{x}{10})]\mathrm{cm}$ ；

D． $y = 10\cos[\pi(t - \frac{x}{10}) + \pi]\mathrm{cm}$ 。 （B）

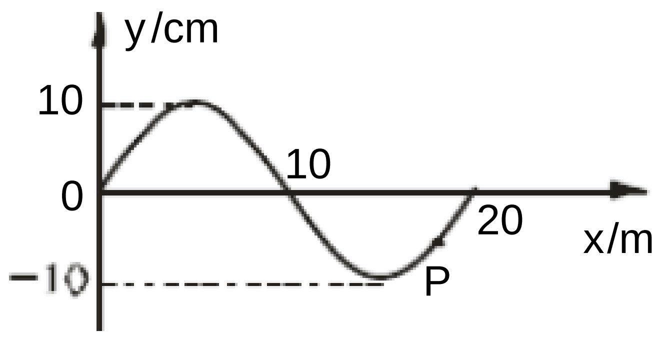


图 13-3(a)

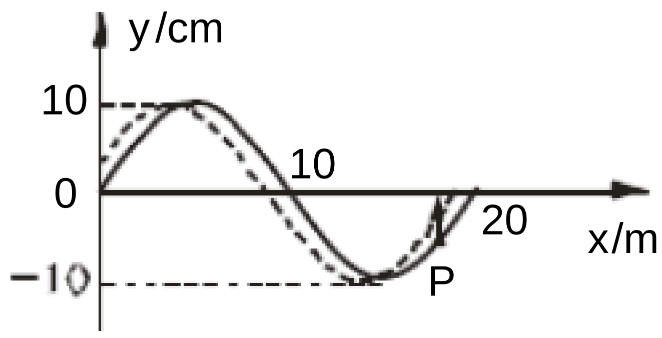


图 13-3(b)

[知识点] 由波形曲线求波动方程。

[分析与题解] 已知 $u = 10\mathrm{m/s}$，由图 13-3(a)的波形曲线知

$$A = 10\mathrm{cm}, \quad \lambda = 20\mathrm{m}, \quad \omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{u}{\lambda} = 2\pi\frac{10}{20} = \pi \ \mathrm{rad/s}$$

且此时 P 点质元的动能在增大，应向平衡位置靠近，则下一时刻的波形曲线如图 13-3(b)中虚线所示。

由行波特性知此波沿 x 轴负方向传播，进而得出当 $t = 0.5\mathrm{s}$ 时坐标原点（$x = 0$）的质元在平衡位置且向 y 轴的正方向运动。

即 $$\omega t + \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

所以 $$\varphi = \frac{3\pi}{2} - \omega t = \frac{3\pi}{2} - \pi \times 0.5 = \pi$$

波动方程为 $$y = 10\cos[\pi(t + \frac{x}{10}) + \pi]\ \mathrm{cm}$$

8. 在下列关于波的干涉的表述中，正确的是：

A．两列波在空间相遇，叠加的结果形成干涉；

B．两列相干波干涉的结果，使介质中各质元不是“加强”，就是“减弱”（即极大或极小）；

C．干涉加强意味着合振幅 A 有极大值，干涉减弱意味着合振幅 A 有极小值；

D．干涉加强点意味着该质元的 y 不随时间变化，始终处于极大值位置；

E．两列相干波形成干涉，某时刻介质中 P 点处的质元距平衡位置为 y，且（$A_{min} < y < A_{max}$），表明 P 点一定既不是加强点，也不是减弱点。 （C）

[知识点] 波的干涉的概念。

[分析与题解] 要形成干涉必须是满足相干条件的两列波叠加而成， 而不满足相干条件的两列波叠加后不能形成干涉。

干涉加强或减弱是指合振幅取极大值或极小值的情况，而干涉中还有合振幅介于两者之间（即不是“加强”也不是“减弱”）的情况存在。

干涉加强点的振幅为极大值 $A = A_1 + A_2$，但该点仍在做简谐振动，其位移随时间在 -A 与+A 之间不变化。

由 $y > A_{min}$ 只能说明 P 点不是减弱点，但由 $y < A_{max}$ 不能说明 P 点不是加强点。

9. 一列火车驶过火车站时，站台上的观察者测得火车汽笛声的频率由 1200Hz 变为 1000Hz，空气中的声速为 330m / s，则火车的速度为：

A. 30m / s； B. 55m / s；

C. 66m / s； D. 90m / s。 （A）

[知识点] 多普勒效应。

[分析与题解] 已知空气中的声速 $u = 330m/s$，设火车汽笛声源的频率为 ν，火车的速度为 v_s，则当火车驶向站台时，观察者测得火车汽笛声的声波频率为

$$\nu_1' = \frac{u}{u - v_s}\nu = \frac{330}{330 - v_s}\nu = 1200 \qquad (1)$$

则当火车驶离站台时，观察者测得火车汽笛声的声波频率为

$$\nu_2' = \frac{u}{u + v_s}\nu = \frac{330}{330 + v_s}\nu = 1000 \qquad (2)$$

联立式(1)和式(2)，可得火车的速度为 $v_s = 30m / s$

10. 在下列关于电磁波的表述中，正确的是：

A. 电磁波在传播过程中， **E**、**H** 的振动方向相互垂直，频率相同；

B. 振幅满足 $\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$ 的关系；

C. 电磁波在真空中的波速 $u = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$；

D. 电磁波是纵波。 （A、B、C）

[知识点] 电磁波的性质。

[分析与题解] 电磁波是横波。

二、填空题

1. 一平面简谐波的波动方程为 $y = 0.2\cos 2\pi\left(\frac{t}{0.02} - \frac{x}{0.05}\right)$ m，则这列波的角频率为 $\omega =$ __100π rad/s__，波速 $u =$ __2.5 m/s__，其沿 __x 轴正__ 方向传播。

[知识点] 根据波动方程求描述波动的特征量。

[分析与题解] 波动方程的标准式为

$$y = A\cos\left(\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi\right) = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$$

经比较，可得出：$A = 0.2\text{m}$，$T = 0.02\text{s}$，$\lambda = 0.05\text{m}$，$\varphi = 0$。

则角频率为 $$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.02} = 100\pi \text{ rad/s}$$

波速为 $$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.05}{0.02} = 2.5\text{m/s}$$

由波动方程中的 $(-\frac{x}{0.05})$ 项，可判断该平面简谐波是沿 x 轴正方向传播的。

2. 波源位于 $x = -1$m 处，其振动方程为 $y = 0.5\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ m，此波源产生的波无吸收地分别向 x 轴正、负方向传播，波速 $u = 2$ m/s，则向 x 轴正向传播的波动方程为 $y_1 =$ __$0.5\cos\left(2\pi t - \pi x - \frac{2\pi}{3}\right)$ m__，则向 x 轴负向传播的波动方程为 $y_2 =$ __$0.5\cos\left(2\pi t + \pi x + \frac{4\pi}{3}\right)$ m__。

[知识点] 沿 x 轴正、负方向传播的波动方程的建立。

[分析与题解] 沿 x 轴正方向传播的波动方程为 $y = A\cos\left(\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_1\right)$

将 $x = -1\text{m}$ 代入上式并与给定的该点的振动方程为 $y = 0.5\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ m 相比较，有

$$-\frac{\omega x}{u} + \varphi_1 = \frac{\pi}{3} \qquad 且\ \omega = 2\pi \text{ rad/s}$$

即 $$\varphi_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\omega x}{u} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi \times (-1)}{2} = -\frac{2\pi}{3}$$

则沿 x 轴正方向传播的波动方程为 $y=0.05\cos\left(2\pi t(-\frac{x}{2})-\frac{2}{3}\pi\right)m$

同理，沿 x 轴负方向传播的波动方程为 $y=A\cos\left(\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi_2\right)$

则有 $\varphi_2=\frac{\pi}{3}-\frac{\omega x}{u}=\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi\times(-1)}{2}=\frac{4\pi}{3}$

则沿 x 轴负方向传播的波动方程为 $y=0.05\cos\left(2\pi t(+\frac{x}{2})+\frac{4}{3}\pi\right)m$

3. 一沿 x 轴正方向传播的平面简谐波，波速为 $u=10$ m/s，频率为 $\nu=5$Hz，振幅 $A=0.02$m。$t=0$ 时，位于坐标原点处的质元的位移为 $y_0=0.01$m，速度 $\frac{dy}{dt}>0$，则此列波的波动方程为 $y=$ $\underline{0.02\cos\left(10\pi t-\pi x-\frac{\pi}{3}\right)m}$；位于 $x_1=4$m 和 $x_2=4.1$m 处两质元的相位差 $\phi=$ $\underline{0.1\pi}$。

[知识点] 波动方程的建立，波线上两质元间相位差公式 $\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}d$。

[分析与题解] $\omega=2\pi\nu=10\pi$rad/s，$\lambda=\frac{u}{\nu}=2$m

由 $y_0=0.01$m 且 $A=0.02$m，有 $y_0=0.02\cos\varphi=0.01$

即 $\cos\varphi=\frac{1}{2}$，$\varphi=\pm\frac{\pi}{3}$

由题意已知 $t=0$ 时，$y_0>0$，且 $\frac{dy}{dt}>0$，得初相位 φ 应在第四象限，则

$$\varphi=-\frac{\pi}{3}$$

则沿 x 轴正方向传播的波动方程为

$$y=0.02\cos\left(10\pi(t-\frac{x}{10})-\frac{\pi}{3}\right)=0.02\cos\left(10\pi t-\pi x-\frac{\pi}{3}\right)m$$

两质元的相位差为 $\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}d=\frac{2\pi}{\lambda}(x_2-x_1)=\frac{2\pi}{2}\times(4.1-4.0)=0.1\pi$

4. 一列波在 $t=0$ 时的波动曲线如图 13-4(a)所示，则可知：

波长 $\lambda=$ $\underline{0.5m}$；

O 点的振动方程为 $y_0 =$ $\underline{0.05\cos\left(40\pi t - \dfrac{\pi}{2}\right)\text{m}}$

波动方程为 $y =$ $\underline{0.05\cos\left(40\pi\left(t + \dfrac{x}{10}\right) - \dfrac{\pi}{2}\right)\text{m}}$

相位差为 $\Delta\phi = 0.8\pi$ 的两质元相距为 $\Delta x =$ $\underline{0.2\text{m}}$ 。

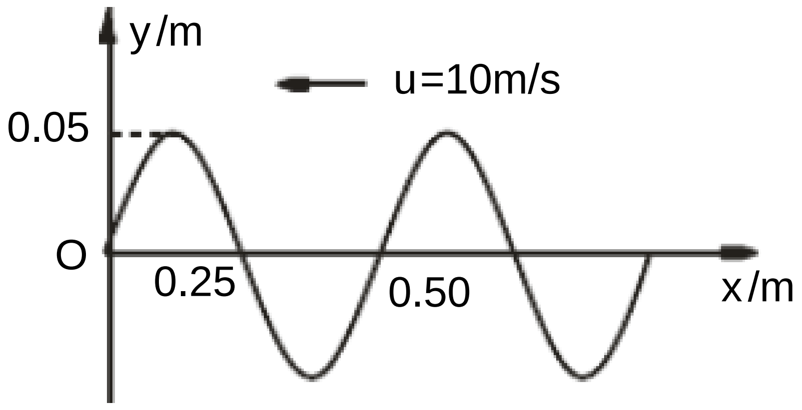


图 13-4(a)

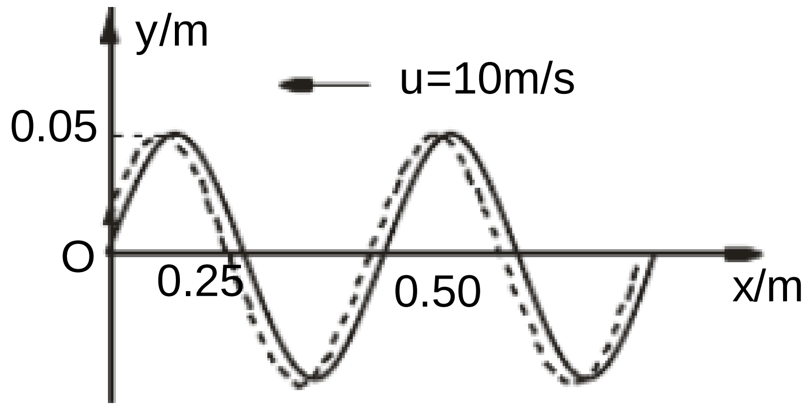


图 13-4(b)

[知识点] 由波动曲线建立波动方程，波线上两质元间相位差公式 $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda}d$ 。

[分析与题解] 由波形曲线知， $\lambda = 0.5\text{m}$， $A = 0.05\text{m}$， $\omega = 2\pi\dfrac{u}{\lambda} = 2\pi\dfrac{10}{0.5} = 40\pi\,\text{rad/s}$

对坐标原点的质元，当 $t = 0$ 时， $y_0 = 0$，则有

$$y_0 = 0.05\cos\varphi = 0$$

即 $\cos\varphi = 0$， $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$

由于波动曲线沿 x 轴负方向传播，则下一时刻的波形曲线如图 13-4(b)所示，则此时 $\dfrac{dy}{dt} > 0$，得初相位 φ 应在第四象限，则

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

O 点的振动方程为 $y_O = 0.05\cos\left(40\pi t - \dfrac{\pi}{2}\right)\text{m}$

波动方程为 $y = 0.05\cos\left(40\pi\left(t + \dfrac{x}{10}\right) - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0.05\cos\left(40\pi t + 4\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right)\text{m}$

两质元相距为 $\Delta x = \dfrac{\lambda}{2\pi}\Delta\varphi = \dfrac{0.5}{2\pi}\times 0.8\pi = 0.2\text{ m}$

5. 一列波由波疏介质向波密介质传播， 在两介质的分界面上反射， 则反射波的相位将 <u>会发生 π相位的突变（相当于发生了半个波长的变化）</u> ，这个现象称为 <u>半波损</u>

失。

[知识点] 半波损失的概念。

6. 已知驻波方程为 $y=0.04\cos 20x\cos 800t$（SI），则形成该驻波的两列行波的振幅 A = 0.02 m，波速 u = 40 m/s，相邻两波节的距离为 $\Delta x=\frac{\pi}{20}$ m。

[知识点] 根据驻波方程求描述驻波的特征量。

[分析与题解] 驻波方程的标准式为

$$y=2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cdot\cos\omega t$$

经比较，可得出：$A=0.02\text{m}$，$\lambda=\frac{2\pi}{20}=\frac{\pi}{10}\text{m}$，$\omega=800\text{rad/s}$

则 $$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{400}{\pi}\text{Hz},\quad u=\lambda\nu=40\text{m/s}$$

相邻两波节的距离为 $$\Delta x=\frac{\lambda}{2}=\frac{\pi}{20}\text{m}$$

7. 一列平面波简谐波，频率为 ν，波长为 λ，由波疏介质向波密介质传播，并在两介质分界面上 E 点反射回来，已知 O 点处质元的运动方程为 $y_0=A\cos\left(2\pi\nu t+\frac{\pi}{2}\right)$（SI），OE = L（如图 13-5 所示），则

入射波的波动方程为 $y_{入}=$ $A\cos\left(2\pi\nu t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\frac{\pi}{2}\right)$；

反射波的波动方程为 $y_{反}=$ $A\cos\left(2\pi\nu t-\frac{2\pi}{\lambda}(2L-x)+\frac{3\pi}{2}\right)$。

[知识点] 波动方程的建立，半波损失。

[分析与题解] 取如图所示坐标正方向，已知坐标原点 O 点处质元的振动方程为

$$y_0=A\cos\left(2\pi\nu t+\frac{\pi}{2}\right)$$

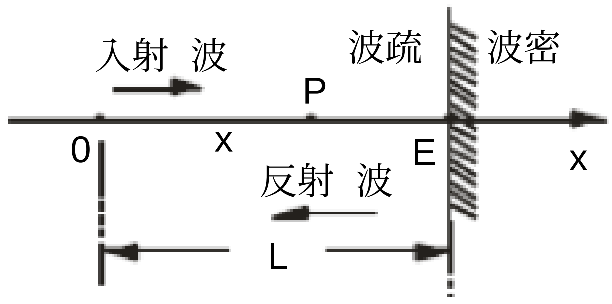


图 13-5

则入射波的波动方程为

$$y_{入}=A\cos\left(2\pi\nu t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{\pi}{2}\right)$$

入射波传到 E 点的振动方程为 $$y_{入E}=A\cos\left(2\pi\nu t-\frac{2\pi}{\lambda}L+\frac{\pi}{2}\right)$$

在 E 点反射由于是由波疏介质向波密介质分界面上的反射，是有半波损失（即 π相位的突变）的，所以反射波从 E 点反射后 E 点的振动方程为

$$y_{反E}=A\cos\left(2\pi\nu t-\frac{2\pi}{\lambda}L+\frac{\pi}{2}+\pi\right)$$

在波线上（x 轴）任设一 P 点，其位置坐标为 x，则反射波从 E 点传播到 P 点的距离为（$L-x$），P 点的相位比 E 点落后 $\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(L-x)$。

则反射波传到 P 点的振动方程为

$$y_{反P}=A\cos\left(2\pi\nu t-\frac{2\pi}{\lambda}L+\frac{\pi}{2}+\pi-\frac{2\pi}{\lambda}(L-x)\right)$$

$$=A\cos\left(2\pi\nu t-\frac{2\pi}{\lambda}(2L-x)+\frac{3\pi}{2}\right)$$

波线上任一点的振动方程就是沿该波线传播的波的波动方程。所以，反射波的波动方程为

$$y_{反}=A\cos\left(2\pi\nu t-\frac{2\pi}{\lambda}(2L-x)+\frac{3\pi}{2}\right)=A\cos\left(2\pi\nu t-\frac{4\pi L}{\lambda}+\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{\pi}{2}\right)$$

8. 一列平面波简谐波在介质中传播，波速 $u=1.0\times10^{3}\,m/s$，振幅为 $A=1.0\times10^{-4}\,m$，频率为 $\nu=1.0\times10^{3}Hz$，介质密度为 $\rho=8.0\times10^{2}\,kg/m^{3}$，则该波的能流密度为 $I=$ <u>$1.58\times10^{5}\,W/m^{3}$</u>；在 60s 内垂直通过面积为 $S=4.0\times10^{-4}\,m^{2}$的总能量为 $W=$ <u>3.79×10^{3}</u>J。

[知识点] 波的能流密度（波强）的计算。

[分析与题解] 该波的能流密度（波强）为

$$I=\frac{1}{2}\rho uA^{2}\omega^{2}=\frac{1}{2}\rho uA^{2}(2\pi\nu)^{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times8.0\times10^{2}\times1.0\times10^{3}\times(1.0\times10^{-4})^{2}\times(2\pi\times1.0\times10^{3})^{2}$$

$$=1.58\times10^{5}\,W/m^{2}$$

总能量为 $W=IS\Delta t=1.58\times10^{5}\times4.0\times10^{-4}\times60=3.79\times10^{3}J$

9. 一个功率为 W 的波源位于 O 点，以 O 为圆心作两个同心球面，它们的半径分别

为 r_1 和 r_2，则通过这两个球面的能流密度之比为 $\underline{I_1 : I_2 = r_2^2 : r_1^2}$；若在两个球面上分别取面积 ΔS_1 和 ΔS_2，则通过它们的平均能流分别为 $\underline{\overline{P}_1 = \dfrac{W}{4\pi r_1^2}\Delta S_1}$ 和 $\underline{\overline{P}_2 = \dfrac{W}{4\pi r_2^2}\Delta S_2}$ 。

[知识点] 波的能流密度（波强）和平均能流的计算。

[分析与题解] 以波源为球心，r_1 和 r_2 为的半径的球面处波的强度分别为

$$I_1 = \frac{W}{S_{1球面}} = \frac{W}{4\pi r_1^2}, \qquad I_2 = \frac{W}{S_{2球面}} = \frac{W}{4\pi r_2^2}$$

则通过这两个球面的能流密度之比为 $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{r_2^2}{r_1^2}$

由波的能流密度 $I = \dfrac{\overline{P}}{S}$，得平均能流为 $\overline{P} = IS$。

则通过球面上的面积 ΔS_1 和 ΔS_2 的平均能流分别为

$$\overline{P}_1 = I_1 \Delta S_1 = \frac{W}{4\pi r_1^2}\Delta S_1, \qquad \overline{P}_2 = I_2 \Delta S_2 = \frac{W}{4\pi r_2^2}\Delta S_2$$

10. 多普勒效应指的是：<u>波源与观测者相对于介质有相对运动时，观测者测得的频率要发生变化的现象</u> 。

现有一声源 S，其振动频率为 2040Hz，以速度 $v = 0.25$ m/s 向一反射面接近，如图 13-6 所示，观察者 B 处测得直接由声源 S 传播过来的波的频率为 $\nu_1 =$ <u>2038.5Hz</u>；测得由反射面反射回来的波的频率为 $\nu_2 =$ <u>2041.5Hz</u>（声速取 $u = 340$ m/s）。

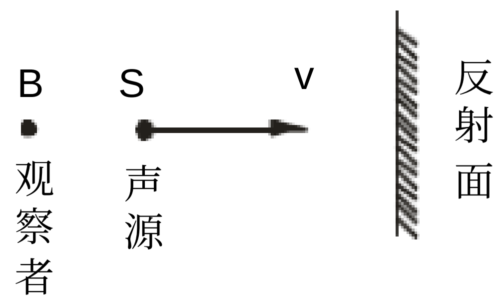


图 13-6

[知识点] 多普勒效应。

[分析与题解] 已知声速 $u = 340\text{m/s}$，波源运动 $v = 0.25\text{m/s}$

直接由声源 S 传播过来的波的频率为

$$\nu_1 = \frac{u}{u+v}\nu_0 = \frac{340}{340+0.25}\times 2040 = 2038.5\text{Hz}$$

反射面反射回来的波的频率为

$$\nu_2 = \frac{u}{u-v}\nu_0 = \frac{340}{340-0.25}\times 2040 = 2041.5\text{Hz}$$

三、计算与证明题

1. 利用波的干涉原理制成的发动机排气噪声的消声器，如图 13-7 所示。排气噪声的声波到达 A 点时，分成直管和弯管两个声通道，到达 B 点时，两列声波因干涉而相消。若噪声频率 $\nu=300\text{Hz}$，声速 $u=340\text{m/s}$，则图 13-7 中直管与弯管的长度差（声波的波程差）至少应为多少？

[分析与解答] 根据两列声波相位差与波程差的关系，并考虑 $\varphi_1=\varphi_2$ 和相干相消条件，有

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi(r_2-r_1)}{\lambda}=(2k+1)\pi$$

$$(k=0,\pm1,\pm2\cdots,)$$

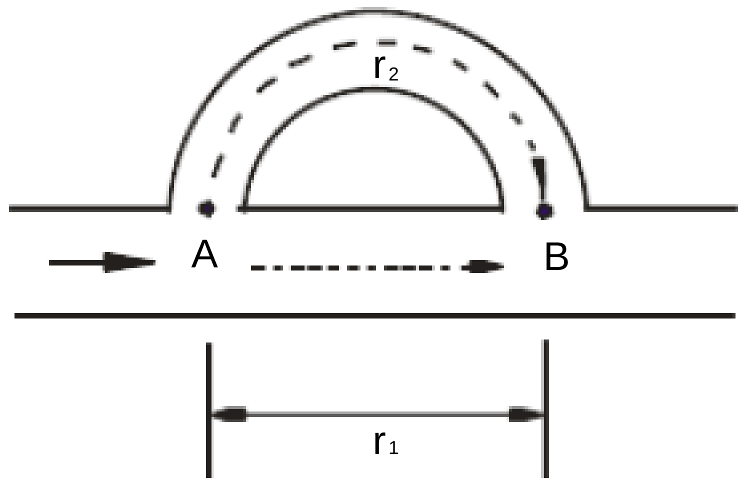


图 13-7

则波程差为 $\Delta r=r_2-r_1=\dfrac{\lambda}{2}(2k+1)$

令式中 $k=0$，则 Δr 至少应为

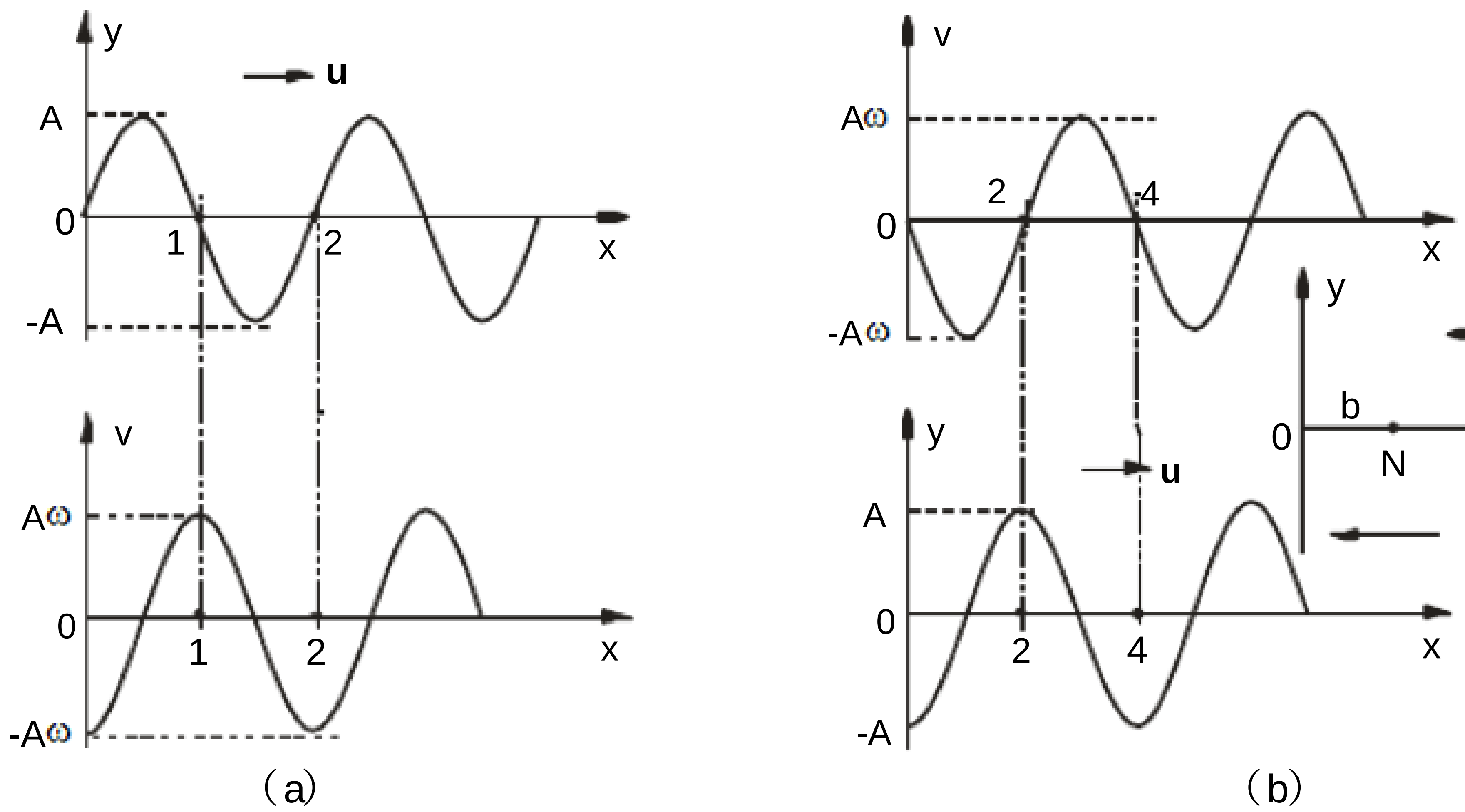
$$\Delta r=\frac{\lambda}{2}=\frac{u}{2\nu}=\frac{340}{2\times300}=0.57\text{m}$$

2. 一列角频率为 ω的平面简谐波，速度为 u，沿 x 轴正方向传播。

（1）已知 t = 0 时波动曲线（如图 13-8(a)所示），试画出该时刻 x 轴上各质元的振动速度 v 与坐标 x 的关系曲线。

（2）如图 11-8(b)所示为 t 时刻波线上各质元的 v — x 曲线，试画出该时刻的波形图。

[分析与解答] 利用 y 与 v 的相位关系得 t = 0 时 v —x 的关系曲线，t 时刻的波形图如图所示。



（a） （b）

图 13-8

3. 如图 13-9 所示，

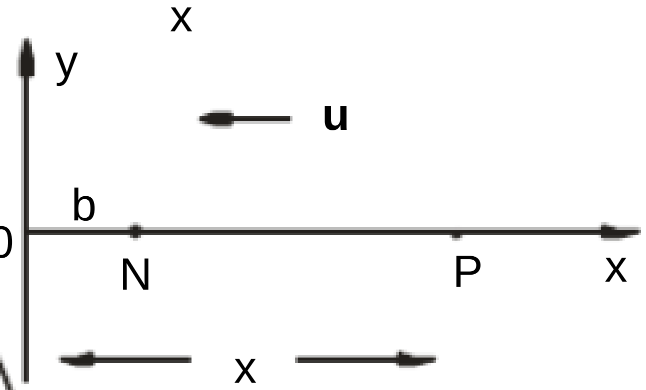


图 13-9

一列平面简谐波 $A=0.05m$，频率 $\nu=100Hz$，波速 $u=4m/s$，沿 x 负方向传播。当 $t=0$ 时，距 O 点为 $b=0.1m$ 的 N 点处质元过平衡位置，且向正方向运动。试求：

（1）N 点处的质元的运动方程；

（2）波线上任一点 P 处质元的运动方程；

（3）当 $t=1s$ 时，$x=1m$ 处质元的相位。

[分析与解答]（1） $A=0.05m$，$\omega=2\pi\nu=200\pi\ rad/s$

按题设条件，在 $t=0$ 时，N 点处质元 $y_{N0}=0$，且 $v_{N0}>0$，则 N 点处质元的初相位为

$$\varphi=-\frac{\pi}{2}$$

则 N 点的运动方程为 $$y_N=0.05\cos(200\pi t-\frac{\pi}{2})m$$

（2）由于波沿 x 负向传播，故 P 点的相位超前 N 点 $\frac{\omega(x-b)}{u}$

则任一点 P 的运动方程为
$$\begin{aligned}y&=0.05\cos[200\pi t+\frac{\omega(x-b)}{u}-\frac{\pi}{2}]\\&=0.05\cos[200\pi t+\frac{200\pi(x-0.1)}{4}-\frac{\pi}{2}]\\&=0.05\cos[200\pi t+50\pi x-\frac{11\pi}{2}]m\end{aligned}$$

（3）$x=1m$ 时，此处质元的振动方程为

$$y'=0.05\cos[200\pi t+50\pi-\frac{11\pi}{2}]$$

$t=1s$，则该处质元相位为： $\omega t+\varphi=\frac{489\pi}{2}=244.5\pi$

4. 如图 13-10 所示，S_1 和 S_2 是波长均为 λ 的两个相干波的波源，相距 $\frac{\lambda}{4}$，振幅均为 A_0，且 S_1 的相位较 S_2 超前了 $\frac{\pi}{2}$。若两列波在 S_1 和 S_2 连线方向上的各点的强度相同，不随距离变化，且两波的强度都为 I_0。试求：

（1）S_1 和 S_2 连线上，在 S_1 左侧各点的合成波的强度为多少？

（2）S_1 和 S_2 连线上，在 S_2 右侧各点的合成波

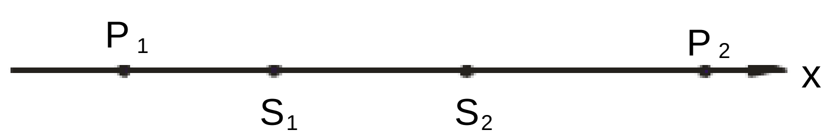


图 13-10

的强度为多少？

[分析与解答]（1）按题意，在 S_1 左侧任选一点 P_1，设 $\overline{P_1S_1}=r_1=x$，则 $\overline{P_1S_2}=r_2=x+\dfrac{\lambda}{4}$，

且知 $$\varphi_2-\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$$

故 S_1 和 S_2 到 P_1 的相位差为

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}(x+\frac{\lambda}{4}-x)=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\pi$$

满足干涉减弱条件 $\Delta\varphi=(2k+1)\pi$，合振幅为 $A=0$

故 S_1 左侧任一点 P_1 的合成波的强度为 $I_1=0$

表明 S_1 左侧无波传播。

（2）同理，在 S_2 右侧任选一点 P_2，知 S_1 和 S_2 到 P_2 的相位差为

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}(x-x-\frac{\lambda}{4})=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=0$$

满足干涉加强条件 $\Delta\varphi=2k\pi$，合振幅为 $A=2A_0$

则 S_2 右侧任一点 P_2 各点的合成波的强度 $I_2\propto A^2=4A_0^2$

5. 设入射波方程为 $y_1=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})]$，在弦上传播并在 $x=0$ 处反射，反射点为自由点，如图 13-11 所示。试求：

（1）反射波的波动方程；

（2）合成波动方程；

（3）波腹和波节的位置。

[分析与解答]（1）由题设条件可知，y_1 沿 x 轴负方向传播，在 $x=0$ 处反射，且反射点为自由端，即无相位突变的半波损失，则反射波方程为

$$y_2=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})]$$

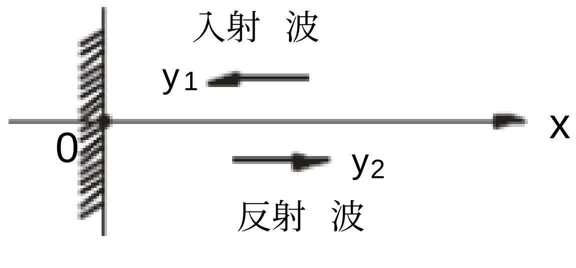


图 13-11

（2）合成波的方程为

$$y=y_1+y_2=2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)=A'\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

（3）由 $A'=2A\cos\dfrac{2\pi x}{\lambda}$，得

波腹处：$\left|\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|=1$，即 $\frac{2\pi x}{\lambda}=k\pi$，则

$$x=k\frac{\lambda}{2} \qquad (k=0,+1,+2,\cdots)$$

波节处：$\left|\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|=0$ ， 即 $\frac{2\pi x}{\lambda}=(2k+1)\pi$，则

$$x=(2k+1)\frac{\lambda}{4} \qquad (k=0,+1,+2,\cdots)$$

四、论述题

试以“ 行波与驻波 ”为题，练习写一篇物理小论文。

[提示] 行波与驻波两者本质的区别如下：

形成机理：行波是由简谐振动在弹性介质中的传播所形成，而驻波是由两列振幅相同的相干波在同一直线上沿相反的方向传播叠加的结果。

能量特征：行波伴随着能量的传播，驻波能量被限制在小区段中，并不传播。

相位特征：行波波线上各质元振动的相位不同；驻波相邻波节间的质元相位相反。

振幅特征：行波在波线各点均作振幅相等的简谐振动，波形在传播；驻波在波线上各点作振幅不同的简谐振动，波形被驻定。