线性代数考试题及答案

2．已知 $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，若 $P^mAP^n=A$，则以下选项中正确的是 （　　）

a. $m=5$，$n=4$；　　b. $m=5$，$n=5$；　　c. $m=4$，$n=5$；　　d. $m=4$，$n=4$。

3．n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\ (3\le s\le n)$ 线性无关的充要条件是 （　　）

a．存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots k_s$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$；

b．$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关；

c．$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示；

d．$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 中存在一个向量，它不能用其余向量线性表示。

4．设 A，B 是正定矩阵，则以下矩阵中，一定是正定矩阵为（其中 k_1,k_2 为任意常数） （　　）

a. A^*+B^*；　　b. A^*-B^*；　　c. A^*B^*；　　d. $k_1A^*+k_2B^*$。

5．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&a&2\\2&2&a\\a&2&2\end{pmatrix}$，伴随矩阵 $A^*\neq 0$，且 $A^*x=0$ 有非零解，则 （　　）

a. $a=2$；　　b. $a=2$ 或 $a=4$；　　c. $a=4$；　　d. $a\neq 2$ 且 $a\neq 4$。

6．设 α，β 是非齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=b$ 的两个不同的解，则以下选项中一定是 A 对应特征值 λ 的特征向量为 （　　）

a. $\alpha+\beta$；　　b. $\alpha-\beta$；　　c. α；　　d. β。

二 填空题（每题 3 分，共 18 分）

7．设行列式 $D=\begin{vmatrix}0&1&0\\2&0&0\\0&0&3\end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 是 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_{ij}=$________。

8．设 A 是实对称可逆矩阵，则将 $f=X^TAX$ 化为 $f=Y^TA^{-1}Y$ 的线性变换为____________________。

9．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&x\\-3&-3&5\end{pmatrix}$ 有特征值 6，2，2，且 A 能相似于对角阵，则 x＝__________________。

10．已知 $\alpha\neq 0$ 是 n 维实列向量，矩阵 $A=E-k\alpha\alpha^T$，k 为非零常数，则 A 为正交矩阵的充分必要

条件为 $k=$________________。

11. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\\a_1^2&a_2^2&a_3^2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，其中 a_i 互不相同，$i=1,2,3$，

则线性方程组 $A^Tx=b$ 的解是_________________。

12．若实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2\lambda x_1x_2+2x_2^2+4x_3^2$ 为正定二次型,

则 λ 的取值范围为 _________________。

三 **计算题**（每题 8 分，共 48 分）

13．计算 n 阶行列式： $D=\begin{vmatrix}x_1&x_2&\cdots&x_{n-1}&x_n+y\\x_1&x_2&\cdots&x_{n-1}+y&x_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_1&x_2+y&\cdots&x_{n-1}&x_n\\x_1+y&x_2&\cdots&x_{n-1}&x_n\end{vmatrix}$。

14．已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\quad = 1 \\ x_1 \qquad\quad - x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = b \end{cases}$，

（1）试问：常数 a, b 取何值时，方程组有无穷多解、唯一解、无解？

（2）当方程组有无穷多解时，求出其通解。

15．设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，已知线性方程组 $Ax = \beta$ 有解但不唯一。试求：

（1）a 的值；　（2）正交矩阵 Q, 使得 $Q^T AQ$ 为对角矩阵。

16．设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$。求矩阵 B。

17．已知线性空间 R^3 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 P，且

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};\ P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

试求：(1) 基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$；(2) 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下有相同坐标的全体向量。

18．设 A 为三阶实对称矩阵，且满足 $A^2+A-2E=0$ 已知 A 对应特征值 $\lambda=1$ 的特征向量有

$\alpha_1=\left(0,1,0\right)^T$，$\alpha_2=\left(1,0,1\right)^T$。 试求：矩阵 A，A^n。其中 n 为自然数。

四 证明题（每题 8 分，共 16 分）

19．设 A 为 n 阶矩阵，已知秩 $r(A)=r(A^2)$。试证：

(1) 线性方程组 $Ax=0$，$A^2x=0$ 同解；　　　(2) $r(A)=r(A^3)$。

20．设α_1，α_2，α_3是n维非零实向量，$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$，$k_1$，$k_2$为使得$\beta \neq 0$的任意常数。

以下结论若正确，请证明；若不正确，请举出反例。

(1) 若α_3与α_1正交，且α_3与α_2也正交，则α_3与β正交。

(2) 若α_3与α_1线性无关，且α_3与α_2也线性无关，则α_3与β线性无关。

参 考 答 案（线代）

一 选择题　b d c a d b

二 填空题　7. －11；　8. $X = A^{-1}Y$；　9. $x = -2$；

10．$k = \dfrac{2}{|\alpha|^2}$；　11．$(1 \quad 0 \quad 0)^T$；　12. $\lambda \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$。

三 计算题

13．$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} y^{n-1}(y + \sum_{i=1}^{n} x_i)$。

14．（1）$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$

$a = 2,\ b = 1$ 无穷多解；$a \neq 2$ 唯一解；$a = 2,\ b \neq 1$ 无解　（4分）

（2）$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \in R$ （8 分）

15. 解：（1）方程组 $AX = \beta$ 有解但不唯一，所以 $r(A) = r(\overline{A}) < 3$，故 $a = -2$。 （2 分）

（2） 特征值为 $\lambda_1 = 3$，$\lambda_2 = -3$，$\lambda_3 = 0$。 （4 分）

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad Q^T AQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$ （8 分）

16. 由 $|A^*| = |A|^{n-1}$，有 $|A|^3 = 8$，得 $|A| = 2$。 （2 分）

用 A^*，A 左右乘方程的两端，得 $(2E - A^*)B = 6E$ （4 分）

$$B = 6(2E - A^*)^{-1} = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ （8 分）

17.（1）设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$，则 $B = AP$，故

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}，\beta_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}，\beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}；$$ （2 分）

（2）设所求向量的坐标为 x，则 $Ax = APx$，即 $A(P - E)x = 0$，

因为 A 为可逆矩阵，得 $(P - E)x = 0$ ，由 （4 分）

$$(P - E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $x = k(1, -1, 1)^T$， （6 分）

故 $\alpha = k(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) = k(2, 1, 3)^T$ （8 分）

18. $(A - E)(A + 2E) = 0$，特征值 $\lambda = 1$、1、－2， （2 分）

$\lambda = -2$，特征向量 $\alpha = (1, 0, -1)^T$， （4 分）

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ （6 分）

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-2)^n & 0 & 1-(-2)^n \\ 0 & 2 & 0 \\ 1-(-2)^n & 0 & 1+(-2)^n \end{pmatrix}$$ （8 分）

四 证明题

19．证：(1) 因为 $A^2x = A(Ax) = 0$，所以 $Ax = 0$ 的解都是 $A^2x = 0$ 的解，又 $r(A) = r(A^2)$，

故它们的解空间相同，因此它们同解。

(2) $A^3x = A(A^2x) = 0$，所以 $A^2x = 0$ 的解都是 $A^3x = 0$ 的解。反之，

若存在 $\alpha \neq 0$，使 $A^3\alpha = 0$，但 $A^2\alpha \neq 0$。则由

$A^3x = A^2(Ax) = 0$，知 $A\alpha$ 是 $A^2x = 0$ 的解；$A(A\alpha) = A^2\alpha \neq 0$，知 $A\alpha$ 不是 $Ax = 0$ 的解。

与(1)的结论矛盾。故 $A^2x = 0$，$A^3x = 0$ 同解，$r(A^2) = r(A^3)$。故 $r(A) = r(A^2) = r(A^3)$。

20．证：(1) 因为 $(\alpha_3, \beta) = k_1(\alpha_3, \alpha_1) + k_2(\alpha_3, \alpha_2) = 0$，所以成立。

(2) 不成立。如 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha_3$。