同济大学课程考核试卷 2007 — 2008 学年第二学期参考答案

命题教师签名：　　　　　　　　审核教师签名：

课号：　　　　　课名：线性代数　　　　　　考试考查：

此卷选为：期中考试( )、期终考试( )、重考( )试卷

年级_____专业___________________学号_________姓名____________任课教师_____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

（注意：本试卷共　大题，　大张，满分 100 分．考试时间为　分钟。要求写出解题过程，否则不予计分）

一、(24 分）填空与选择题

1、设 A 是 m 阶方阵，B 是 n 阶方阵，且 $|A|=a,|B|=b,C=\begin{pmatrix}E & A\\ B & 0\end{pmatrix}$,则 $|C|=$ $\underline{(-1)^{m\times n}ab}$

2、设 $A, B, A+B$，均为可逆矩阵，则矩阵 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆，则其逆矩阵为　（ A ）

(A) $B(A+B)^{-1}A$；　(B) $A^{-1}\left(A+B\right)^{-1}B^{-1}$；

(C) $\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{T}$；　(D) $\left(A^{T}+B^{T}\right)^{-1}$.

3、若 A 是 5 阶方阵，且 $|A|=4$,则 $\left|(\frac{1}{4}A)^{-1}-\frac{1}{2}A^{*}\right|=$（ C ）

（A）1/2；　（B）1/4；　（C）8；　（D）以上答案均不正确。

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，

则下列向量组中不再是 $Ax=0$ 的基础解系的为（ C ）

(A) $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$；(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1,\alpha_4-\alpha_1$；

(C $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1,\alpha_4+\alpha_1$；　(D) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1,\alpha_4+\alpha_1$；

5、若 3 阶方阵 A 的特征值为 $-1, 0, 2$．则与方阵 $B=A^3-A+2E$ 相似的对角矩阵为 $\underline{\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 8\end{pmatrix}}$.

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，$\alpha=\alpha_1+k\alpha_2-\alpha_3$，则 α 是 $Ax=b$ 的解的充分必要条件为 $k=$___1___，α 是齐次线性方程组 $Ax=O$ 的解的充分必要条件为 $k=$___0___.

7. 设 A, B 为 n 阶方阵，且秩相等，即 $r(A)=r(B)$，则有（ D ）.

(A) $r(A-B)=0$；　(B) $r(A+B)=2r(A)$；

(C) $r(A,B)=2r(A)$；　(D) $r(A,B)\le r(A)+r(B)$.

8．已知实二次型为正定二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2ax_1x_2+2x_2x_3$，则实常数 a 的取值范围为

$\underline{-\frac{\sqrt{14}}{2}<a<\frac{\sqrt{14}}{2}}$

二、(10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$，已知多项式 $g(x)=x^3-2x^2-1$，求行列式 $|g(A)|$.

解：$|A-\lambda E|=-(\lambda-1)^2(\lambda-4)$，则 A 有特征值 1，1，4，(4 分)

从而 $g(A)$ 有特征值 $g(1),g(1),g(4)$（3 分）

则 $|g(A)|=g(1)^2g(4)=124$。(3 分)

三、(8 分）设 A 和 B 都是 3 阶方阵，E 为单位阵，$AB+E=A^2+B$

其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，　求 B。

解：由 $AB+E=A^2+B$ 得 $(A-E)B=A^2-E=(A-E)(A+E)$，(2 分)

可计算 $|A-E|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}=1$，即 $A-E$ 为可逆阵，(3 分)

从而 $B=A+E=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ (3 分)

四、(10 分）已知向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-3\\n\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\5\\m\end{pmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ 有相同的秩，

并且 β_3 可由 α_1,α_2 线性表示，求 m,n 的值。

解：由 β_3 可由 α_1,α_2 线性表示知 $r(\beta_3,\alpha_1,\alpha_2)=r(\alpha_1,\alpha_2)=2,$

则 $|\beta_3,\alpha_1,\alpha_2|=12-2m=0$，即 $m=6$。（5 分）

由 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2)=2$，从而 $|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix}1 & -3 & 3\\ 0 & n & 5\\ 1 & 0 & 6\end{vmatrix}=3n-15=0$，即 $n=5$。(5 分)

五、（10 分）已知线性方程组$\begin{cases} x_1 - ax_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + ax_3 = 2 \\ 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$

问：a 取何值时方程组有无穷多解，并用其对应的齐次线性方程组的基础解系表示其通解.

解：由$\begin{pmatrix} 1 & -a & -2 & -1 \\ 1 & -1 & a & 2 \\ 5 & -5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -a & -2 & 1 \\ 0 & a-1 & a+2 & 3 \\ 0 & 0 & -4-5a & -9 \end{pmatrix}$知

当 $a \neq 1$ 且 $a \neq -\dfrac{4}{5}$ 时，方程组的系数矩阵 A 与增广矩阵 B 有 $r(A) = r(B) = 3$， 此时方程组有唯一解。

当 $a = -\dfrac{4}{5}$ 时，$r(A) \neq r(B)$。 方程组无解。

当 $a = 1$ 时，$r(A) = r(B) = 2$， 方程组有无穷多解。（5 分）

此时 $B \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$， 对方程组 $Ax = 0$，解得一基础解系为 $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，

令 $x_2 = 0$，可解得此方程组的一个特解 $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$， 从而此方程的通解为 $x = k\xi + \eta$.（5 分）

六、（12 分）设三阶实对称矩阵 A 的秩为 2，$\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 是 A 的二重特征值，若 $\alpha_1 = (1,1,0)^T, \alpha_2 = (2,1,-1)^T$，都是 A 的属于特征值 6 的特征向量。 求 A 及它的另一个特征值与特征向量。

解：由 A 的秩为 2，则 $|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$，即 $\lambda_3 = 0$。设 α_3 为 A 的属于特征值 0 的特征向量， 则 α_3 为 $Bx = 0$ 的非零解，其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，解的 $x = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，取 $k = 1$ 得 A 的属于特征值 0 的特征向量 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，（6 分）

则 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (6\alpha_1, 6\alpha_2, 0\alpha_3)$， 因 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为可逆阵，则

$A = (6\alpha_1, 6\alpha_2, 0\alpha_3)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$（6 分）

七、（12 分）设 A 为 n 阶方阵．满足 $A^2 - 2A - 3E = O$

(1) 证明：$r(A+E) + r(A-3E) = n$

(2) 证明，矩阵 A 能相似于对角矩阵．并求出它的相似对角矩阵.

证：（1）. 由 $A^2 - 2A - 3E = (A-3E)(A+E) = O$ 有 $r(A+E) + r(A-3E) \leq n$，另一方面

$r(A+E) + r(A-3E) = r(A+E) + r(3E-A) \geq r(4E) = n$， 由此得 $r(A+E) + r(A-3E) = n$（6 分）

（2）. 由 $(A-3E)(A+E) = O$，知 A 的特征值只能是 3 或-1,

若 3 是 A 的特征值, 则有 $A+E$ 中的非零列向量为 A 属于特征值 3 的特征向量,

若-1 是 A 的特征值, 则有 $A-3E$ 中的非零列向量为 A 属于特征值-1 的特征向量,

由 $r(A+E) + r(A-3E) = n$ 知 A 的所有线性无关的特征向量数恰为 n，即 A 相似于对角阵．设 3 为 A 的 k 重特征值, 则-1 为 A 的 $n-k$ 重特征值．则 A 相似于对角线上有 k 个 3， $n-k$ 个-1 的对角阵． （6 分）

八、（14 分）设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 P， 使 P^TAP 为对角形矩阵.

解:解方程 $|A - \lambda E| = 0$ 得特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 9$，（4 分）

解方程组 $Ax = 0$ 得 A 属于 0 的特征向量 $p_1 = (-2,0,1)^T, p_2 = (2,1,0)$， 正交化单位化后得 $q_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(-2,0,1)^T, q_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{15}(2,5,4)^T$.

解方程组 $(A-9E)x = 0$ 得 A 属于 0 的特征向量 $p_3 = (1,-2,2)^T$，单位化后得 $q_3 = \dfrac{1}{3}(1,-2,2)^T$.（6 分）

则正交阵 $P = (q_1, q_2, q_3)$ 使 P^TAP 为对角形矩阵 $diag(0,0,9)$.（4 分）