

蜂考速成课

《线性代数》

版权声明：

内容来自蜂考原创，讲义笔记和相关图文均有著作权，视频课程已申请版权，登记号：陕作登字-2018-I-00001958，根据《中华人民共和国著作权法》、《中华人民共和国著作权法实施条例》、《信息网络传播权保护条例》等有关规定，如有侵权，将根据法律法规提及诉讼。

课时一 行列式（一）

考点	重要程度	分值	常见题型
1) 逆序数	★★★★	0-3	选择、填空
2) 行列式性质及计算	必考	6-15	大题

1、逆序数

题 1：排列 2 3 6 1 4 5 的逆序数为_____

解：排列：2 3 6 1 4 5

逆序：0 0 0 3 1 1

逆序数： $t = 0 + 0 + 0 + 3 + 1 + 1 = 5$

题 2：在五阶行列式中，项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号应取_____

解：行排列：1 3 5 4 2，逆序数 $t_1 = 0 + 0 + 0 + 1 + 3 = 4$

列排列：2 1 4 3 5，逆序数 $t_2 = 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 2$

$t = t_1 + t_2 = 4 + 2 = 6$ 为偶，故应取正号

2、行列式性质及计算

① 互换行（列），变号

$$\text{例：} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

② 提公因子

$$\text{例：} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

③ 倍加

$$\text{例：} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + 2a_{11} & a_{22} + 2a_{12} & a_{23} + 2a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

④ 拆分

$$\text{例：} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + d_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + d_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$



⑤对应成比例，值为零

$$\text{例: } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ 例: } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

题 1: 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$\text{解: } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 2 \times 2 = -3$$

题 2: 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

上三角行列式公式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } D &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 - 2 \times 1 & 1 - (-1) \times 2 & 0 - 1 \times 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times (-1) = -3 \end{aligned}$$

题 3: 计算 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{解: } D &\xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 + 4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4 \div 5} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4 + 1/2 r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= 10 \times 1 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 40 \end{aligned}$$



题 4: 计算 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

解: $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-r_1}} 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$

题 5: 箭型 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

解: $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1-c_2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1-c_3} \begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1-c_4} \begin{vmatrix} -8 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$
 $= -8 \times 2 \times 3 \times 4 = -192$

课时一 练习题

1. 排列 3 6 2 5 1 4 的逆序数为_____
2. 四阶行列式 $a_{13} \ a_{32} \ a_{24} \ a_{41}$ 的符号为
3. 三阶方阵 A 按列分块为 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 且 $|A| = 5$, 又设 $|B| = (\alpha_1 + 2\alpha_2, 3\alpha_1 + 4\alpha_3, \alpha_2)$, 则 $|B| =$
4. 计算下列行列式的值

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ (3) $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$ (4) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & & & \\ 1 & & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & n \end{vmatrix}$



课时二 行列式（二）

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 行列式展开	★★★★★	4-6	填空，大题
2. 范德蒙行列式	★★★★	0-6	大题

1、行列式展开

1) 余子式记作 M_{ij} ：去掉 a_{ij} 所在的行与列

代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

题 1. $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, 求 $M_{11}, M_{23}, A_{11}, A_{23}$

解： $M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - 1 \times 1 = 7$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 3 \times 3 = -8$

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 7$

$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 8$

题 2：用行列式展开计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

解：按第一行展开

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 - 6 + 15 = 8$$

若按第二列展开： $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2A_{12} + A_{22} + 3A_{32} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8$

题 3. $D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

求 ① $3A_{31} - 5A_{32} + 2A_{33} + A_{34}$

② $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$

③ $M_{11} + M_{21} + M_{31} + M_{41}$



定理：某行(列)元素与另一行(列)的代数余子式乘积之和等于0

解：① $3A_{31} - 5A_{32} + 2A_{33} + A_{34} = 0$

② $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} = 1 \times A_{11} + 1 \times A_{12} + 1 \times A_{13} + 1 \times A_{14}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_1]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 + r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & -3 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_2 \div 2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & -6 & -3 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 \div 2} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & -6 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 3r_2]{r_4 + 3r_2} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times 1 \times 2 \times (-1) \times 1 = 4$$

③ $M_{11} + M_{21} + M_{31} + M_{41} = (-1)^{1+1} A_{11} + (-1)^{2+1} A_{21} + (-1)^{3+1} A_{31} + (-1)^{4+1} A_{41}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 + r_1]{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & 8 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & 1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - \frac{9}{4}r_2]{r_3 + 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 7 \end{vmatrix} = 0$$

2、范德蒙行列式

题 1. 求 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ 的值

解： $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$



题 2: 求 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}$ 的值

解: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} = (4-3)(4-2)(4-1)(3-2)(3-1)(2-1) = 1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 1 = 12$

课时二 练习题

1. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$, 求 $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$

2. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 的值, 并计算 $-2M_{21} + M_{31} - 3M_{41}$

3. 求 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$ 的值



课时三 矩阵

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 矩阵的三则运算	必考	3~8	填空、大题
2. 转置矩阵、伴随矩阵 单位矩阵、逆矩阵	★★★	6~8	选择、填空、大题
3. 矩阵的行列式计算	必考	3~5	选择、填空

1、矩阵的三则运算

	行列式	矩阵
形式	$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
区别	1) 行列式是一个数，矩阵是一个表 2) 行列式是 $n \times n$ 阶，矩阵是 $n \times m$ 阶（ n 和 m 可以不相等也可以相等） 3) $\lambda A $ 是把行列式某行（列）乘以 λ ； λA 是把矩阵里每个元素都乘以 λ 4) 行列式加减是数的运算；矩阵的加减只能是同型矩阵，对应元素的加减 5) 矩阵如果是方阵（ $n=m$ ）的时，有行列式值	

题 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 求 $A+B, 2A$

矩阵的加减

1. 同型矩阵（同行同列的矩阵）
2. 对应元素相加减

解： $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 2+1 & 3+1 \\ 1+1 & 1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 & 1 \times 2 & 1 \times 2 \\ 1 \times 2 & 2 \times 2 & 3 \times 2 \\ 1 \times 2 & 1 \times 2 & 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

矩阵的数乘

每个元素均要乘以 k

$2|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 \times 2 & 2 \times 2 & 3 \times 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

行列式的数乘

某行或者某列乘以 k



题 2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, 求 AB , BA

前行乘后列

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times s} = C_{m \times s}$$

解: $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 & 2 \times 3 + 1 \times (-1) + 0 \times (-3) \\ 1 \times 1 + (-1) \times 0 + 3 \times 1 & 1 \times 3 + (-1) \times (-1) + 3 \times (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 3 \times 1 & 1 \times 1 + 3 \times (-1) & 1 \times 0 + 3 \times 3 \\ 0 \times 2 + (-1) \times 1 & 0 \times 1 + (-1) \times (-1) & 0 \times 0 + (-1) \times 3 \\ 1 \times 2 + (-3) \times 1 & 1 \times 1 + (-3) \times (-1) & 1 \times 0 + (-3) \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 9 \\ -1 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA \quad (A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2 \quad A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$$

2. 转置矩阵、伴随矩阵、单位矩阵、逆矩阵

1) 转置矩阵 A^T 。(行变列, 列变行。)

题: 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求, $\alpha^T \beta, \alpha \beta^T$

例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\alpha^T \beta = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times 1 = 4$$

$$\alpha \beta^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 \times 1 & 1 \times 0 & 1 \times 1 \\ 2 \times 1 & 2 \times 0 & 2 \times 1 \\ 3 \times 1 & 3 \times 0 & 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^T \beta \neq \alpha \beta^T$$

2) 伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$

3) 单位矩阵 E : 二阶 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 三阶 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $|E| = 1$ $EA = AE = A$

4) 逆矩阵 A^{-1} : $AB = BA = E$ 则 B 为 A 得逆矩阵, 记 $B = A^{-1}$; 即: $AA^{-1} = E$

公式: $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$, 可逆得充要条件 $|A| \neq 0$



3. 矩阵的行列式计算

1) 转置矩阵性质: A^T

$$\textcircled{1} (AB)^T = B^T A^T \quad \textcircled{2} (A^T)^T = A \quad \textcircled{3} (kA)^T = kA^T \quad \textcircled{4} (A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

2) 伴随矩阵性质: A^*

$$\textcircled{1} |A^*| = |A|^{n-1} \quad \textcircled{2} (AB)^* = B^* A^* \quad \textcircled{3} A^* = |A| A^{-1} \quad (A \text{ 可逆}) \quad \textcircled{4} (kA)^* = k^{n-1} A^*$$

3) 逆矩阵性质: A^{-1}

$$\textcircled{1} (A^{-1})^{-1} = A \quad \textcircled{2} (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} \quad \textcircled{3} (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \quad \textcircled{4} (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

4) 矩阵的行列式 (A 为方阵)

$$\textcircled{1} |A^T| = |A| \quad \textcircled{2} |kA| = k^n |A| \quad \textcircled{3} |AB| = |A||B| \quad \textcircled{4} |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

题 1. 设 A 为三阶矩阵, 已知 $|A| = 2$. 求 $|3A|$, $|A^{-1}|$, $|A^*|$

$$\text{解: } |3A| = 3^3 |A| = 27 \times 2 = 54 \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2} \quad |A^*| = |A|^{3-1} = 2^2 = 4$$

题 2. 设 A, B 都是 n 阶矩阵, 且 $|A| = 3, |B| = 2$, 则 $\left| \frac{1}{3} A^* B^{-1} \right|$

$$\text{解: } \left| \frac{1}{3} A^* B^{-1} \right| = \left| \frac{1}{3} A^* \right| |B^{-1}| = \left(\frac{1}{3} \right)^n |A^*| |B^{-1}| = \left(\frac{1}{3} \right)^n \cdot |A|^{n-1} \cdot \frac{1}{|B|} = \left(\frac{1}{3} \right)^n \cdot 3^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

题 3. 设 A 为 n 阶矩阵, 且 $|A| = 2$, 则 $\left| \left(-\frac{1}{4} A \right)^{-1} + A^* \right|$

$$\text{解: } \left| \left(-\frac{1}{4} A \right)^{-1} + A^* \right| = |-4A^{-1} + |A|A^{-1}| = |-4A^{-1} + 2A^{-1}| = |-2A^{-1}| = (-2)^n \cdot \frac{1}{|A|} = (-2)^n \cdot \frac{1}{2} = (-1)^n \cdot 2^{n-1}$$

课时三 练习题

$$1. \text{ 设 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 求 } AB - BA$$

$$2. \text{ 设 } A, B \text{ 均为 } n \text{ 阶矩阵, } |A| = 2, |B| = 3, \text{ 则 } |2A^* B^{-1}| =$$

$$3. \text{ 设 } A \text{ 为 } n \text{ 阶矩阵, } A^* \text{ 是 } A \text{ 的伴随矩阵, 则 } ||A|A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4. \text{ 若 } A, B \text{ 是两个三阶矩阵, 且 } |A| = -1, |B| = 2, \text{ 求 } |2(A^T B^{-1})^2|$$



课时四 初等行变换

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 初等行变换	必考	不单独考	大题
2. 求逆矩阵		6-10	
3. 矩阵的秩	★★★	3-6	选择、填空

1、初等行变换

①换行 ②倍乘 ③倍加

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -12 & 2 \\ 3 & -1 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -2 \\ 3 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_4 - 2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & -4 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & -12 & 2 \\ 0 & -4 & 12 & 4 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{r_3 + r_2 \\ r_4 - r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & -4 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 \div (-4) \\ r_3 \div 6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 + r_3 \\ r_2 + r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

阶梯形

- ①若有全零行，则全零行位于最下方
- ②每个阶梯首项为主元，主元依次往右
- ③阶梯形不唯一

最简形

- ①主元为 1
- ②主元所在列的其他元素都为 0
- ③最简形是唯一

2、求逆矩阵

题 1. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

$$\begin{aligned}
 \text{解: } (A:E) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & : & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & : & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & : & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 + \frac{1}{3}r_3 \\ r_2 + \frac{2}{3}r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & : & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -3 & : & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_2 \\ -\frac{1}{3}r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = (E:A^{-1})
 \end{aligned}$$



微信扫一扫

2 小时速成课程

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

题 2. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

$$\text{解: } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

口诀:

主对调, 次反号, 除以值

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

题 3. 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 且 $AX = A + 2X$, 求 X

$$\text{解: } AX = A + 2X \Rightarrow AX - 2X = A \Rightarrow (A - 2E)X = A$$

$$(A - 2E : A) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 - 4r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -12 & -9 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} r_1 + r_2 \\ -r_3 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} r_1 - r_3 \\ r_2 - r_3 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9 \end{array} \right) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

3、矩阵的秩

题 1: 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 求 A 的秩

$$\text{解: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{即 } R(A) = 2$$



题 2：设三阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ ，试求矩阵 A 的秩

$$\text{解： } A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & x-1 & -(x-1) \\ 0 & -(x-1) & 1-x^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & x-1 & -(x-1) \\ 0 & 0 & -(x+2)(x-1) \end{pmatrix}$$

① 当 $x \neq 1$ 且 $x \neq -2$ 时 $R(A) = 3$ ；

② 当 $x = -2$ 时， $R(A) = 2$ ；

③ 当 $x = 1$ 时， $R(A) = 1$ ；

秩的性质

① $A_{m \times n}$ ， $R(A) \leq \min\{m, n\}$

② A 为方阵， $R(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$ ， $R(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0$

③ $R(A^T) = R(A) = R(kA)$ ，($k \neq 0$)

④ $R(AB) \leq R(A)$ ， $R(AB) \leq R(B)$

课时四 练习题

1. 将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 8 & 3 \\ 2 & -3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ 化为最简形

2. 若 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ， $4X = B + 2AX$ ，求 X

3. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \mu \end{pmatrix}$ ，已知 $R(A) = 2$ ，求 λ 与 μ 的值

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 且 $AB - E = A + B$ ，求 B



课时五 向量

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 向量组	必考	6~15	大题
2. 线性相关			

1. 向量组

 $a = (1, 1)^T$ 二维向量 $b = (1, 2, 3)^T$ 三维向量 $c = (2, 0, 1, 4)^T$ 四维向量 $a_1 = (1, 2, -1)^T$ $a_2 = (3, 2, 0)^T$ $a_3 = (3, 6, 8)^T$

$$A = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

题 1. $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T, \alpha_3 = (-1, 0, 1)^T, \beta = (0, 5, -9)^T$ ，用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 β ？

解：设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \beta$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} k_1 \times 1 + k_2 \times 0 + k_3 \times (-1) = 0 \\ k_1 \times 0 + k_2 \times 1 + k_3 \times 0 = 5 \\ k_1 \times 0 + k_2 \times 0 + k_3 \times 1 = -9 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} k_1 = -9 \\ k_2 = 5 \\ k_3 = -9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \beta = -9\alpha_1 + 5\alpha_2 - 9\alpha_3$$

2. 线性相关

① 存在一组不全为 0 的数 k_1, k_2, \dots, k_m ，使 $k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_ma_m = 0$ ，则称向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关，否则线性无关

② 若 $R(a_1, a_2, \dots, a_m) < m$ ，则向量线性相关；若 $R(a_1, a_2, \dots, a_m) = m$ ，则向量线性无关

③ 极大无关组

例：三维坐标中 $a_1 = (1, 0, 0)^T, a_2 = (0, 1, 0)^T, a_3 = (0, 0, 1)^T$

任给一个三维向量 $a_4 = (2, 3, 6)^T$ 都可以用 a_1, a_2, a_3 表示 $a_4 = 2a_1 + 3a_2 + 6a_3$

所以任意一组三维向量中 $a_1, a_2, a_3 \dots a_m$ 的一个极大无关组是 a_1, a_2, a_3



题 1. 已知 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 2, 2)^T, \alpha_3 = (1, 2, 4)^T$ ，判断 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是否线性相关

$$\text{解: } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - \frac{3}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A) = 2, \quad \because R(A) = 2 < \text{向量个数} \therefore \text{线性相关}$

题 2. 求向量组 $\alpha_1 = (-2, 1, 0, 3)^T, \alpha_2 = (1, -3, 2, 4)^T, \alpha_3 = (3, 0, 2, -1)^T, \alpha_4 = (2, -2, 4, 6)^T$ 的秩及一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示。

$$\text{解: } A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 13 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 13 & -1 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

① $R(A) = 3$

② 极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

③ $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

$$\text{例: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

秩 $R(A) = 2$

极大无关组: a_1, a_2

$$a_3 = 3a_1 + 2a_2 \quad a_4 = 4a_1 + a_2$$

$$\text{例: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

秩 $R(A) = 3$

极大无关组: a_1, a_2, a_4

$$a_3 = 2a_1 + 2a_2 + 0 \cdot a_4$$

$$a_5 = 4a_1 + 3a_2 - 8a_4$$



题 3. 设 $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_2 + a_3, b_3 = a_3 + a_1$ ，且向量 a_1, a_2, a_3 线性无关，证明 b_1, b_2, b_3 线性无关

证明：设存在一组不全为 0 的 k_1, k_2, k_3

$$\text{使 } k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3 = 0$$

$$k_1(a_1 + a_2) + k_2(a_2 + a_3) + k_3(a_3 + a_1) = 0$$

$$(k_1 + k_3)a_1 + (k_1 + k_2)a_2 + (k_2 + k_3)a_3 = 0$$

因为 a_1, a_2, a_3 线性无关

$$\text{故 } \begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases} \quad \text{矛盾}$$

故 b_1, b_2, b_3 线性无关

课时五 练习题

1. $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 0, 1)^T, \alpha_3 = (0, 1, 0)^T, \beta = (2, 2, 1)^T$ ，用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 β

2. 已知 $\alpha_1 = (1, 1, 2, 2)^T, \alpha_2 = (1, 2, 1, 3)^T, \alpha_3 = (1, -2, 4, 0)^T, \alpha_4 = (1, 0, 3, 1)^T$ ，判断 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是否线性相关

3. 设有向量组， $\alpha_1 = (1, 2, -1, -2)^T, \alpha_2 = (2, 5, -3, -3)^T, \alpha_3 = (-1, -1, 1, 2)^T, \alpha_4 = (-4, -3, 2, 1)^T,$

$\alpha_5 = (6, 11, -9, -9)^T$ 求此向量组的秩及一个极大无关组，将其余向量用此极大无关组线性表示。



课时六 解方程组

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 齐次线性方程组	必考	6~12	大题
2. 非齐次线性方程组			

1. 齐次线性方程组 $Ax = 0$

题 1. 求下面齐次方程组得通解。

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

判定：系数矩阵 A 。

$R(A) = n$ 只有零解

$R(A) < n$ 无穷多解且有 $n - R(A)$ 个解向量

解：写出系数矩阵 A ，并进行初等行变换，直至转化为最简形矩阵。

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & -3 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$R(A) = 2 < 4$ 方程组有无穷多解，且有 $4 - 2 = 2$ 个解向量

$$\text{由: } \begin{cases} x_1 - 2x_2 - \frac{1}{5}x_4 = 0 \\ x_3 - \frac{2}{5}x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_3 = \frac{2}{5}x_4 \end{cases}$$

$$x_2 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_3 = 0 \quad \text{得解向量: } \eta_1 = (2, 1, 0, 0)^T$$

$$x_2 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{5}, x_3 = \frac{2}{5} \quad \text{得解向量: } \eta_2 = \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{2}{5}, 1\right)^T$$

所以齐次方程通解为： $x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 = k_1(2, 1, 0, 0)^T + k_2\left(\frac{1}{5}, 0, \frac{2}{5}, 1\right)^T$ ($k_1, k_2 \in R$)



2. 非齐次线性方程组 $Ax = \beta$

题 2. 非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 = -1 \end{cases}$ ，问方程组是否有无穷解，如有，用其导出组基础解系表示同解。

解：写出增广矩阵 $(A: \beta)$ ，并进行初等行变换。

$$(A: \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & : & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & : & 4 \\ 4 & 3 & -1 & -1 & : & 6 \\ 1 & 2 & -4 & -4 & : & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & : & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & : & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & : & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & : & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & : & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & : & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & : & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & : & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}$$

判定：增广矩阵 $(A: \beta)$

$R(A) = R(A: \beta) = n$ 方程组有唯一解

$R(A) = R(A: \beta) < n$ 方程组有无穷解

$R(A) \neq R(A: \beta)$ 方程组无解

$R(A) = 2, R(A: \beta) = 2, \therefore R(A) = R(A: \beta) = 2 < 4$ 所以方程组有无穷解。

① 齐次通解（如题 1）

由上得 $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 3x_3 + 3x_4 \end{cases}$

非其次方程通解 X

$X = (\text{齐次通解} + \text{非齐次特解})$

令： $x_3 = 1, x_4 = 0$ 得 $x_2 = 3, x_1 = -2$ ，解向量 $\eta_1 = (-2, 3, 1, 0)^T$

令： $x_3 = 0, x_4 = 1$ 得 $x_2 = 3, x_1 = -2$ ，解向量 $\eta_2 = (-2, 3, 0, 1)^T$

所以：齐次 $Ax = 0$ 通解为 $x = k_1(-2, 3, 1, 0)^T + k_2(-2, 3, 0, 1)^T$

② 非齐次特解

由上得 $x = (3, -2, 0, 0)^T$

所以：非齐次方程通解 $X = k_1(-2, 3, 1, 0)^T + k_2(-2, 3, 0, 1)^T + (3, -2, 0, 0)^T$ ($k_1, k_2 \in R$)



题 3. 设线性方程组 $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$ 问 λ 取何值时次方程组 (1) 有唯一解, (2) 无解, (3)

有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解。

解: 对增广矩阵 $(A:\beta)$ 作初等行变换把它变成行阶梯形矩阵, 有

$$\begin{aligned} (A:\rho) &= \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & : & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & : & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & : & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & : & \lambda \\ 1 & 1+\lambda & 1 & : & 3 \\ 1+\lambda & 1 & 1 & : & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & : & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & : & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda(2+\lambda) & : & -\lambda(1+\lambda) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & : & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & : & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & : & (1-\lambda)(3+\lambda) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(1) 有唯一解 $R(A) = R(A:\beta) = 3$ 则 $-\lambda(3+\lambda) \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$

(2) 无解 $R(A) \neq R(A:\beta) \quad \begin{cases} -\lambda(3+\lambda) = 0 \\ (1-\lambda)(3+\lambda) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 0$

(3) 有无穷多解 $R(A) = R(A:\beta) < 3 \quad \begin{cases} -\lambda(3+\lambda) = 0 \\ (1-\lambda)(3+\lambda) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -3$

当 $\lambda = -3$ 时, $(A:\beta) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & : & -3 \\ 0 & -3 & 3 & : & 6 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & : & -1 \\ 0 & 1 & -1 & : & -2 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}$

齐通: $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 令 $x_3 = 1$, 则 $x_1 = 1, x_2 = 1$ 得解向量: $x = (1, 1, 1)^T$

非特: 由上可得: $x = (-1, -2, 0)^T$

所以非齐次方程通解 $X = k(1, 1, 1)^T + (-1, -2, 0)^T \quad (k \in R)$



课时六 练习题

1. 解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

2. 解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$$

3. 已知线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = b \end{cases}$$
 问, a, b 当取何值时, 方程组无解? 有解? 再有解

时求出其通解。



课时七 特征值

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 求特征值, 特征向量	必考	6~15	大题
2. 相似对角化			
3. 正交相似对角化			
4. 特征值的性质	★★★★	3~6	选择、填空

1、求特征值、特征向量

题 1. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值

$$\text{解: } |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 8 - 6\lambda + \lambda^2 = (4-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$

题 2. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量

$$\text{解: } |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$$

故特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$$\text{当 } \lambda_1 = 1 \text{ 时, 解 } (A - E)x = 0 \quad A - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \quad \text{令 } x_3 = 1, \text{ 得解向量 } a_1 = (0, 1, 1)^T, \text{ 则 } \lambda_1 = 1 \text{ 对应的全部特征向量为 } k_1(0, 1, 1)^T (k_1 \neq 0)$$

$$\text{当 } \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \text{ 时, 解 } (A - 2E)x = 0 \quad A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{得 } x_1 = x_3 \text{ 令 } x_2 = 1, x_3 = 0 \quad \text{得解向量: } a_2 = (0, 1, 0)^T$$

$$\text{令 } x_2 = 0, x_3 = 1 \quad \text{得解向量: } a_3 = (1, 0, 1)^T$$

则 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 对应的全部特征向量为 $k_2(0, 1, 0)^T + k_3(1, 0, 1)^T$ (k_2, k_3 不全为零)

特征值、特征向量求解步骤:

1. 求特征值 λ_i

2. 求 $(A - \lambda_i E)x = 0$ 基础解系



2、相似对角化

题 1. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 P , 使 $P^{-1}AP$ 对角化

解: ①特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$$\text{② } a_1 = (0, 1, 1)^T \quad a_2 = (0, 1, 0)^T \quad a_3 = (1, 0, 1)^T$$

$$\text{③ } P = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{使 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

解题方法:

①求特征值 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m$

②求基础解系 $a_1, a_2 \cdots a_m$

③ $P = (a_1, a_2 \cdots a_m)$

$$\text{使 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

题 2: 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 判断 A 能否对角化? 若能, 求相似变换矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 对角化

$$\text{解: } |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(4-\lambda) = 0 \quad \text{得特征值 } \lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$$\text{当 } \lambda_1 = 4 \text{ 时, 解 } (A - \lambda E)x = 0 \quad A - 4E = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

令 $x_3 = 3$ 得解向量 $a_1 = (1, 0, 3)^T$

$$\text{当 } \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \text{ 时, 解 } (A - E)x = 0 \quad A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = -x_3$$

令 $x_1 = 1, x_3 = 0$ 得解向量 $a_2 = (1, 0, 0)^T$

令 $x_1 = 0, x_3 = 1$ 得解向量 $a_3 = (0, -1, 1)^T$

因为矩阵有三个线性无关的特征向量, 所以 A 能相似对角化

$$P = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

判断能否对角化:

n 个特征值对应应有 n 个特征向量, 就可以对角化

(注: 解向量是全部特征向量的一个, 所以就认为是特征向量)



3、正交相似对角化

题 1: 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 求一个正交矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角矩阵

解: 由 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0$ 特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -2$

对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 解 $(A - E)X = 0$, 由 $A - E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得基础解系 $a_1 = (-1, 1, 0)^T \quad a_2 = (1, 0, 1)^T$

对应 $\lambda_3 = -2$, 解 $(A + 2E)X = 0$, 由 $A + 2E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得基础解系 $a_3 = (-1, -1, 1)^T$

正交化:

$$b_1 = a_1 = (-1, 1, 0)^T$$

$$b_2 = a_2 - \frac{[a_2, b_1]}{[b_1, b_1]} \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)^T$$

$$b_3 = a_3 = (-1, -1, 1)^T \quad (a_3 \text{ 和 } a_1, a_2 \text{ 已经正交, 不用再正交化})$$

单位化:

$$e_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, \quad e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T, \quad e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$$

将 e_1, e_2, e_3 构成正交矩阵

$$P = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\text{有 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

1. 正交: 两个向量垂直, 即乘积为 0

2. 不同特征值对应的特征向量 (基础解系) 一定是正交的, 所以只需要对重根对应的特征向量 (基础解系) 进行正交化

3. 正交化使用的公式:

施密特正交化: $a_1 \quad a_2$

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - \frac{[a_2, b_1]}{[b_1, b_1]} b_1$$

$$\text{单位化: } e = \frac{b}{\|b\|}$$



4、特征值的性质

① $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

② $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$

③若 A 的特征值为 λ ，则

矩阵	kA	A^2	$aA + bE$	A^m	A^{-1}	A^*
特征值	$k\lambda$	λ^2	$a\lambda + b$	λ^m	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{ A }{\lambda}$

题 1、已知 A 的三个特征值为 1, 2, 3, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$

解： $|A| = 1 \times 2 \times 3 = 6$

题 2、设三阶方阵 A 的特征值为 1, -2, 3, 则 $|A^2 + A - E| = \underline{\hspace{2cm}}$

解： $A^2 + A - E \rightarrow \lambda^2 + \lambda - 1$

$\lambda = 1$ 时 $\lambda^2 + \lambda - 1 = 1$

$\lambda = -2$ 时 $\lambda^2 + \lambda - 1 = 1 \Rightarrow A^2 + A - E$ 的特征值为 1, 1, 11

$\lambda = 3$ 时 $\lambda^2 + \lambda - 1 = 11$

故 $|A^2 + A - E| = 1 \times 1 \times 11 = 11$

课时七 练习题

1、已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ ①求特征值、特征向量 ②判断 A 能否对角化，若可对角化，

求可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵

2、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ 求一个正交矩阵 P ，使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角矩阵

2、已知 A 的特征值为 1, -1, 2, 求 $|A^{-1} + 2A - E| = \underline{\hspace{2cm}}$



课时八 二次型

考点	重要程度	分值	常见题型
3) 二次型	★★	0-3	大题
4) 求正交变换, 化标准型	必考	8-10	
5) 顺序主子式	★★★★	3-6	填空

1、二次型

题 1: 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$ 写出二次型矩阵 A

解: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

题 2. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 + 6x_2x_3$ 写出二次型矩阵 A

解: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

2、求正交变换, 化标准型

题: 求一个正交变换 $x = py$, 把二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 化为标准型, 是否

正定?

解: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

由 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0$ 特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -2$

对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 解 $(A - E)X = 0$, 由 $A - E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得基础解系 $a_1 = (-1, 1, 0)^T \quad a_2 = (1, 0, 1)^T$

对应 $\lambda_3 = -2$, 解 $(A + 2E)X = 0$, 由 $A + 2E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得基础解系 $a_3 = (-1, -1, 1)^T$

正交化:



$$b_1 = a_1 = (-1, 1, 0)^T$$

$$b_2 = a_2 - \frac{[a_2, b_1]}{[b_1, b_1]} \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = a_3 = (-1, -1, 1)^T \quad (a_3 \text{ 和 } a_1, a_2 \text{ 已经正交, 不用再正交化})$$

单位化:

$$e_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, \quad e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T, \quad e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$$

$$\text{将 } e_1, e_2, e_3 \text{ 构成正交矩阵 } P = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

使得二次型换成标准型: $f = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$ 不是正定

3、顺序主子式

题 4: 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 是否正定

$$\text{解: 写出二次型矩阵 } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|2| = 2 > 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad \therefore \text{二次型 } f \text{ 正定}$$

题 5: 设 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$ 是正定二次型, 则 t 满足_____

$$\text{解: 写出二次型矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{即 } -2 < t < 2 \quad \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{即 } -2t^2 + 4 > 0 \quad \Rightarrow -\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$$

$$\therefore -\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$$



课时八 练习题

1. 写出二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_2x_3$ 对应的矩阵 A
2. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ ，求一个正交变换 $x = Py$ ，化为标准型，并判断是否正定。
3. 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ 的标准型与规范型
4. 设 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 为正定二次型，则 a 的值_____

