1. 写出非限定情况下麦克斯韦方程组的微分形式，并简要说明其物理意义。

2. 答非限定情况下麦克斯韦方程组的微分形式为 $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\nabla\cdot\vec{B}=0,\nabla\cdot\vec{D}=\rho$，(3分)（表明了电磁场和它们的源之间的全部关系除了真实电流外，变化的电场（位移电流）也是磁场的源；除电荷外，变化的磁场也是电场的源。

1. 写出时变电磁场在 1 为理想导体与 2 为理想介质分界面时的边界条件。

2. 时变场的一般边界条件 $D_{2n}=\sigma$、$E_{2t}=0$、$H_{2t}=J_s$、$B_{2n}=0$。(或矢量式 $\vec{n}\cdot\vec{D}_2=\sigma$、$\vec{n}\times\vec{E}_2=0$、$\vec{n}\times\vec{H}_2=\vec{J}_s$、$\vec{n}\cdot\vec{B}_2=0$)

1. 写出矢量位、动态矢量位与动态标量位的表达式，并简要说明库仑规范与洛仑兹规范的意义。

2. 答矢量位 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A},\nabla\cdot\vec{A}=0$；动态矢量位 $\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ 或 $\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$。库仑规范与洛仑兹规范的作用都是限制 $\vec{A}$ 的散度，从而使 $\vec{A}$ 的取值具有唯一性；库仑规范用在静态场，洛仑兹规范用在时变场。

1. 简述穿过闭合曲面的通量及其物理定义

2. $\phi=\oiint_s\vec{A}\cdot d\vec{s}$ 是矢量 A 穿过闭合曲面 S 的通量或发散量。若 $\Phi>0$，流出 S 面的通量大于流入的通量，即通量由 S 面内向外扩散，说明 S 面内有正源若 $\Phi<0$，则流入 S 面的通量大于流出的通量，即通量向 S 面内汇集，说明 S 面内有负源。若 $\Phi=0$，则流入 S 面的通量等于流出的通量，说明 S 面内无源。

1. 证明位置矢量 $\vec{r}=\vec{e}_x x+\vec{e}_y y+\vec{e}_z z$ 的散度，并由此说明矢量场的散度与坐标的选择无关。

2. 证明在直角坐标系里计算 $\nabla\cdot\vec{r}(\vec{r})$，则有

$$\nabla\cdot\vec{r}(\vec{r})=\left(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(\vec{e}_x x+\vec{e}_y y+\vec{e}_z z)$$

$$=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$$

若在球坐标系里计算，则

$$\nabla\cdot\vec{r}(\vec{r})=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 r)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^3)=3$$ 由此说明了矢量场的散度与坐标的选择无关。

1. 在直角坐标系证明 $\nabla\cdot\nabla\times\vec{A}=0$

2.

$$\nabla\cdot\nabla\times\vec{A}$$

$$=(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z})\cdot[\vec{e}_x(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_x}{\partial z})+\vec{e}_y(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})+\vec{e}_z(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})=0$$

1. 简述亥姆霍兹定理并举例说明。
2. 亥姆霍兹定理研究一个矢量场，必须研究它的散度和旋度，才能确定该矢量场的性质。 例静电场

$\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s}=\sum q_0$ $\quad \nabla\cdot\vec{D}=\rho_0$ 有源

$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$ $\quad \nabla\times\vec{E}=0$ 无旋

1. 已知 $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$，证明 $\nabla R=-\nabla' R=\frac{\vec{R}}{R}=\vec{e}_R$。
2. 证明

$$\nabla R=\vec{e}_x\frac{\partial R}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial R}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial R}{\partial z}=\vec{e}_x\frac{x-x'}{R}+\vec{e}_y\frac{y-y'}{R}+\vec{e}_z\frac{z-z'}{R}$$

$$\nabla' R=\cdots\cdots=-\nabla R$$

1. 试写出一般电流连续性方程的积分与微分形式，恒定电流的呢？
2. 一般电流 $\oint \vec{J}\cdot d\vec{S}=-dq/dt$, $\nabla\cdot\vec{J}=-\partial\rho/\partial t$ ；

恒定电流 $\oint \vec{J}\cdot d\vec{S}=0$, $\nabla\cdot\vec{J}=0$

1. 电偶极子在匀强电场中会受作怎样的运动？在非匀强电场中呢？
2. 电偶极子在匀强电场中受一个力矩作用，发生转动；非匀强电场中，不仅受一个

力矩作用，发生转动，还要受力的作用，使 电偶极子中心 发生平动，移向电场强的方向。

1. 试写出静电场基本方程的积分与微分形式 。
2. 答静电场基本方程的

积分形式 $\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$，$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$

微分形式 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$, $\nabla\times\vec{E}=0$

1. 试写出静电场基本方程的微分形式，并说明其物理意义。

2. 静电场基本方程微分形式 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho,\nabla\times\vec{E}=0$，说明激发静电场的源是空间电荷的分布（或是激发静电场的源是是电荷的分布）。

1. 试说明导体处于静电平衡时特性。

2. 答导体处于静电平衡时特性有

①导体内 $\vec{E}=0$；

②导体是等位体（导体表面是等位面）；

③导体内无电荷，电荷分布在导体的表面(孤立导体，曲率)；

④导体表面附近电场强度垂直于表面，且 $\vec{E}=\sigma\vec{n}/\varepsilon_0$。

1. 试写出两种介质分界面静电场的边界条件。

2. 答在界面上 D的法向量连续 $D_{1n}=D_{2n}$ 或（$\vec{n}_1\cdot\vec{D}_2=\vec{n}_1\cdot\vec{D}_2$）；E的切向分量连续 $E_{1t}=E_{2t}$ 或（$\vec{n}_1\times\vec{E}_1=\vec{n}_1\times\vec{E}_2$）

1. 试写出 1 为理想导体，二为理想介质分界面静电场的边界条件。

2. 在界面上 D的法向量 $D_{2n}=\sigma$ 或（$\vec{n}_1\cdot\vec{D}_2=\sigma$）；E的切向分量 $E_{2t}=0$ 或（$\vec{n}_1\times\vec{E}_2=0$）

1. 试写出电位函数ϕ表示的两种介质分界面静电场的边界条件。

2. 答电位函数ϕ表示的两种介质分界面静电场的边界条件为 $\phi_1=\phi_2$，$\varepsilon_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n}=\varepsilon_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n}$

1. 试推导静电场的泊松方程。

2. 解由 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$，其中 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\vec{E}=-\nabla\phi$，

$\therefore\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot\varepsilon\vec{E}$ ε 为常数

$\therefore\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$ 泊松方程

1. 简述唯一性定理，并说明其物理意义

2. 对于某一空间区域 V，边界面为 s，ϕ 满足

$$\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon}\quad\text{或}\quad\nabla^2\phi=0,$$

给定 $\rho(\vec{r})$、$\phi|_s$ 或 $\frac{\partial\phi}{\partial s}|_s$ （对导体给定 q）

则解是唯一的。只要满足唯一性定理中的条件，解是唯一的，可以用能想到的最简便的方法求解（直接求解法、镜像法、分离变量法……），还可以由经验先写出试探解，只要满足给定的边界条件，也不满足唯一性定理中的条件无解或有多解。

1. 试写出恒定电场的边界条件。

2. 答恒定电场的边界条件为 $\vec{n}\cdot(\vec{J}_1-\vec{J}_2)=0$，$\vec{n}\cdot(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=0$

1. 分离变量法的基本步骤有哪些?

2. 答具体步骤是 1、先假定待求的位函数由两个或三个各自仅含有一个坐标变量的乘积所组成。2、把假定的函数代入拉氏方程，使原来的偏微分方程转换为两个或三个常微分方程。解这些方程，并利用给定的边界条件决定其中待定常数和函数后，最终即可解得待求的位函数。

1. 叙述什么是镜像法？其关键和理论依据各是什么？

2. 答镜像法是用等效的镜像电荷代替原来场问题的边界，其关键是确定镜像电荷的大小和位置，理论依据是唯一性定理。

7、 试题关键字恒定磁场的基本方程

1. 试写出真空中恒定磁场的基本方程的积分与微分形式，并说明其物理意义。

2. 答真空中恒定磁场的基本方程的积分与微分形式分别为

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0, \quad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I \quad \nabla\times\vec{H}=\vec{J}$$

说明恒定磁场是一个无散有旋场，电流是激发恒定磁场的源。

1. 试写出恒定磁场的边界条件，并说明其物理意义。

2. 答: 恒定磁场的边界条件为: $\vec{n}\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\vec{J}_s$，$\vec{n}\times(\vec{B}_1-\vec{B}_2)=0$，说明磁场在不同的边界条件下磁场强度的切向分量是不连续的，但是磁感应强强度的法向分量是连续。

1. 一个很薄的无限大导电带电面，电荷面密度为 σ。证明垂直于平面的 z 轴上 $z=z_0$ 处的电场强度 E 中，有一半是有平面上半径为 $\sqrt{3}z_0$ 的圆内的电荷产生的。

2. 证明半径为 r、电荷线密度为 $\rho_l=\sigma dr$ 的带电细圆环在 z 轴上 $z=z_0$ 处的电场强度为

$$d\mathbf{E}=\mathbf{e}_z\frac{r\sigma z_0 dr}{2\varepsilon_0(r^2+z_0^2)^{3/2}}$$

故整个导电带电面在 z 轴上 $z=z_0$ 处的电场强度为

$$\mathbf{E}=\mathbf{e}_z\int_0^{\infty}\frac{r\sigma z_0 dr}{2\varepsilon_0(r^2+z_0^2)^{3/2}}=-\mathbf{e}_z\frac{\sigma z_0}{2\varepsilon_0}\frac{1}{(r^2+z_0^2)^{1/2}}\Bigg|_0^{\infty}=\mathbf{e}_z\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

而半径为 $\sqrt{3}z_0$ 的圆内的电荷产生在 z 轴上 $z=z_0$ 处的电场强度为

$$\mathbf{E}'=\mathbf{e}_z\int_0^{\sqrt{3}z_0}\frac{r\sigma z_0\,dr}{2\varepsilon_0(r^2+z_0^2)^{3/2}}=-\mathbf{e}_z\frac{\sigma z_0}{2\varepsilon_0}\frac{1}{(r^2+z_0^2)^{1/2}}\Bigg|_0^{\sqrt{3}z_0}=\mathbf{e}_z\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}=\frac{1}{2}\mathbf{E}$$

1. 由矢量位的表示式

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R}d\tau'$$

证明磁感应强度的积分公式

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times\mathbf{R}}{R^3}d\tau'$$

并证明 $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$

2. 答

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})=\nabla\times\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R}d\tau'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\nabla\times\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R}d\tau'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times\nabla\left(\frac{1}{R}\right)d\tau'$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times\left(-\frac{\mathbf{R}}{R^3}\right)d\tau'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times\mathbf{R}}{R^3}d\tau'$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=\nabla\cdot[\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})]=0$$

1. 由麦克斯韦方程组出发，导出点电荷的电场强度公式和泊松方程。

2. 解　点电荷 q 产生的电场满足麦克斯韦方程

$$\nabla\times\mathbf{E}=0\text{ 和 }\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$$

由 $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$ 得

$$\int_\tau\nabla\cdot\mathbf{D}\,d\tau=\int_\tau\rho\,d\tau$$

据散度定理，上式即为

$$\oint_S\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=q$$

利用球对称性，得

$$\mathbf{D}=\mathbf{e}_r\frac{q}{4\pi r^2}$$

故得点电荷的电场表示式

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

由于 $\nabla\times \mathbf{E} = 0$，可取 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$，则得

$$\nabla\times \mathbf{D} = \varepsilon\nabla\cdot\mathbf{E} = -\varepsilon\nabla\cdot\nabla\varphi = -\varepsilon\nabla^2\varphi = \rho$$

即得泊松方程

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

1. 写出在空气和 $\mu = \infty$ 的理想磁介质之间分界面上的边界条件。
2. 解　空气和理想导体分界面的边界条件为

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E} = 0$$
$$\mathbf{n}\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_s$$

根据电磁对偶原理，采用以下对偶形式

$$\mathbf{E}\to\mathbf{H},\ \mathbf{H}\to -\mathbf{E},\ \mathbf{J}_s\to\mathbf{J}_{ms}$$

即可得到空气和理想磁介质分界面上的边界条件

$$\mathbf{n}\times\mathbf{H} = 0$$
$$\mathbf{n}\times\mathbf{E} = -\mathbf{J}_{ms}$$

式中，$\mathbf{J}_{ms}$为表面磁流密度。

1. 写出麦克斯韦方程组（在静止媒质中）的积分形式与微分形式。

2.

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_s (\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S} \qquad \nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_s \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\oiint_s \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\oiint_s \vec{D}\cdot d\vec{S} = q \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

1. 试写媒质 1 为理想介质 2 为理想导体分界面时变场的边界条件。

2. 答边界条件为

$E_{1t}=E_{2t}=0$ 或 $\vec{n}\times\vec{E}_1=0$

$\vec{H}_{1t}=\vec{J}_s$ 或 $\vec{n}\times\vec{H}_1=\vec{J}_s$

$B_{1n}=B_{2n}=0$ 或 $\vec{n}\cdot\vec{B}_1=0$

$D_{1n}=\rho_s$ 或 $\vec{n}\cdot\vec{D}_1=\rho_s$

1. 试写出理想介质在无源区的麦克斯韦方程组的复数形式。

2. 答

$\nabla\times\vec{H}=j\omega\varepsilon\vec{E}$

$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}$

$\nabla\cdot\vec{B}=0$

$\nabla\cdot\vec{D}=0$

1. 试写出波的极化方式的分类，并说明它们各自有什么样的特点。

2. 答波的极化方式的分为圆极化，直线极化，椭圆极化三种。

圆极化的特点 $E_{xm}=E_{ym}$ ，且 E_{xm}, E_{ym} 的相位差为 $\pm\frac{\pi}{2}$ ，

直线极化的特点 E_{xm}, E_{ym} 的相位差为相位相差 $0, \pi$ ，

椭圆极化的特点 $E_{xm}\neq E_{ym}$ ，且 E_{xm}, E_{ym} 的相位差为 $\pm\frac{\pi}{2}$ 或 $0, \pi$ ，

1. 能流密度矢量（坡印廷矢量）$\vec{S}$ 是怎样定义的？坡印廷定理是怎样描述的？

2. 答能流密度矢量（坡印廷矢量）$\vec{S}$ 定义为单位时间内穿过与能量流动方向垂直的单位截面的能量。坡印廷定理的表达式为 $-\oint_S(\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{S}=\frac{d}{dt}(W_e+W_m)+P_\tau$ 或

$-\oint_S (\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt}\int_\tau (\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2) d\tau + \int_\tau \gamma E^2 d\tau$，反映了电磁场中能量的守恒和转换关系。

1. 试简要说明导电媒质中的电磁波具有什么样的性质？（设媒质无限大）
2. 答导电媒质中的电磁波性质有电场和磁场垂直；振幅沿传播方向衰减 ；

电场和磁场不同相；以平面波形式传播。

2. 时变场的一般边界条件 $D_{1n} - D_{2n} = \sigma$ 、 $E_{1t} = E_{2t}$ 、 $H_{1t} - H_{2t} = J_s$、 $B_{1n} = B_{2n}$ 。 (写成矢量式

$\vec{n}\cdot(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma$ 、 $\vec{n}\times(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$、 $\vec{n}\times(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$、 $\vec{n}\cdot(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$ 一样给 5 分)

1. 写出非限定情况下麦克斯韦方程组的微分形式，并简要说明其物理意义。
2. 答非限定情况下麦克斯韦方程组的微分形式为 $\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \nabla\cdot\vec{B} = 0, \nabla\cdot\vec{D} = \rho$

（表明了电磁场和它们的源之间的全部关系除了真实电流外，变化的电场（位移电流）也是磁场的源；除电

荷外，变化的磁场也是电场的源。

1. 写出时变电磁场在 1 为理想导体与 2 为理想介质分界面时的边界条件
2. 时变场的一般边界条件 $D_{2n} = \sigma$ 、 $E_{2t} = 0$、 $H_{2t} = J_s$、 $B_{2n} = 0$ 。 (写成矢量式 $\vec{n}\cdot\vec{D}_2 = \sigma$ 、

$\vec{n}\times\vec{E}_2 = 0$、 $\vec{n}\times\vec{H}_2 = \vec{J}_s$、 $\vec{n}\cdot\vec{B}_2 = 0$ 一样给 5 分)

1. 写出矢量位、动态矢量位与动态标量位的表达式，并简要说明库仑规范与洛仑兹规范的意义。

2.．答矢量位 $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}, \nabla\cdot\vec{A} = 0$；动态矢量位 $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ 或 $\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi$ 。库仑规范与洛仑兹

规范的作用都是限制 $\vec{A}$ 的散度，从而使 $\vec{A}$ 的取值具有唯一性；库仑规范用在静态场，洛仑兹规范用在时变

场。

1. 描述天线特性的参数有哪些？

2. 答描述天线的特性能数有辐射场强、方向性及它的辐射功率和效率。

1. 天线辐射的远区场有什么特点？

2. 答天线的远区场的电场与磁场都是与 1/r 成正比，并且它们同相，它们在空间相互垂直，其比值即为媒质的本征阻抗，有能量向外辐射。

1. 真空中有一导体球 A，内有两个介质为空气的球形空腔 B 和 C。其中心处分别放置点电荷 Q_1 和 Q_2，试求空间的电场分布。

2. 对于 A 球内除 B、C 空腔以外的地区，由导体的性质可知其内场强为零。对 A 球之外，由于在 A 球表面均匀分布 Q_1+Q_2 的电荷，所以 A 球以外区域

$$E=\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

（方向均沿球的径向）

对于 A 内的 B、C 空腔内，由于导体的屏蔽作用则

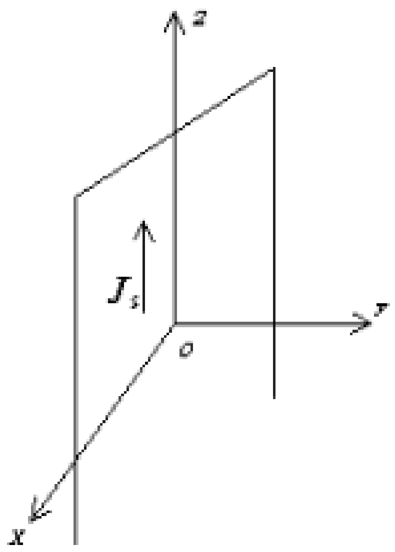
$$E_B=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$$

（r_1 为 B 内的点到 B 球心的距离）

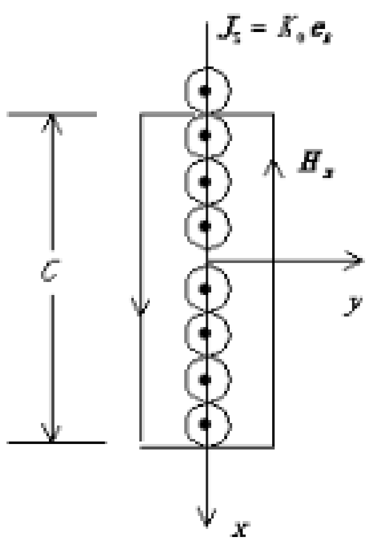
$$E_C=\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$$

（r_2 为 C 内的点到 C 球心的距离）

1. 如图所示，有一线密度 $J_S=K_0\boldsymbol{e}_z$ 的无限大电流薄片置于 $y=0$ 平面上，周围媒质为空气。试求场中各点的磁感应强度。



2. 根据安培环路定律，在面电流两侧作一对称的环路。则



由

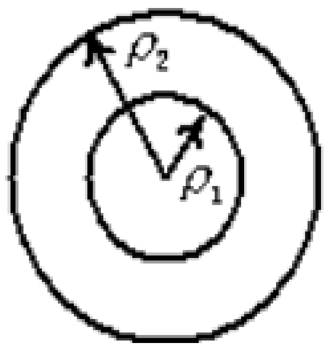
$$\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=I$$

$$2H_x C=K_0 C$$

$$H_x=\frac{1}{2}K_0$$

$$B_x=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 K_0}{2}(-\boldsymbol{e}_x) & y>0\\ \dfrac{\mu_0 K_0}{2}(\boldsymbol{e}_x) & y<0\end{cases}$$

1. 已知同轴电缆的内外半径分别为ρ_1 和ρ_2，其间媒质的磁导率 为μ_0，且电缆长度 $L>>\rho_2$， 忽略端部效应， 求电缆单位长度的外自感。



2. 设电缆带有电流I

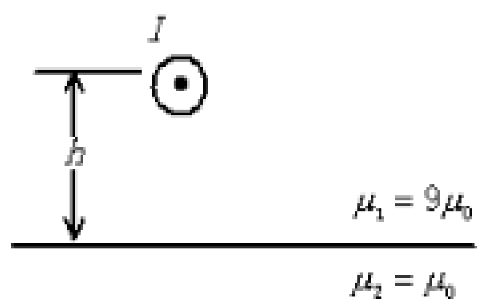
则

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\rho \qquad \rho_1\leqslant\rho\leqslant\rho_2$$

$$\psi_m=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\mathrm{d}\rho=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$L=\frac{\psi_m}{I}=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

1. 在附图所示媒质中，有一载流为I的长直导线，导线到媒质分界面的距离为h。 试求载流导线单位长度受到 的作用力。



2. 镜像电流

$$I'=\frac{\mu_0-9\mu_0}{\mu_0+9\mu_0}I=-\frac{4}{5}I$$

镜像电流在导线处产生的$\boldsymbol{B}$值为

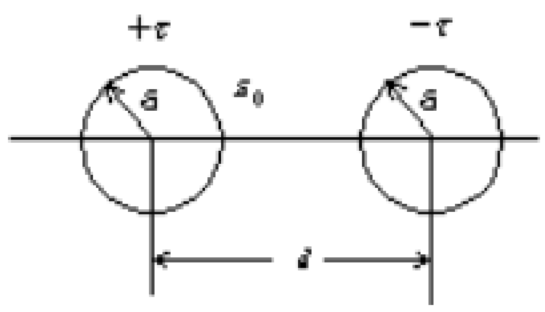
$$B=\frac{I'9\mu_0}{2\pi\cdot 2h}$$

单位长度导线受到的作用力

$$F = IB = -1.8\frac{\mu_0 I^2}{\pi h}$$

力的方向使导线远离媒质的交界面。

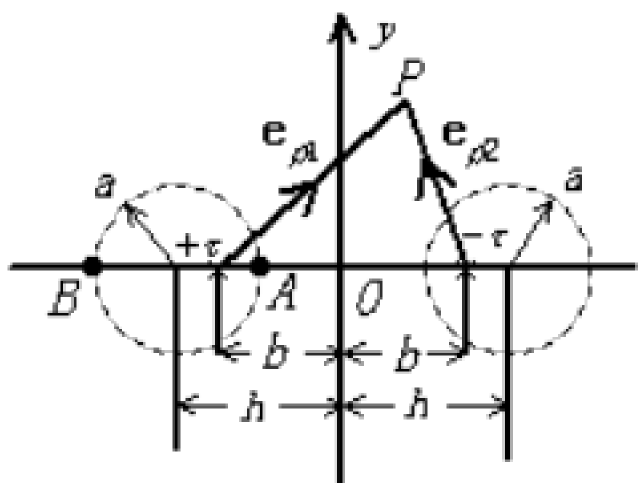
1.　图示空气中有两根半径均为 a, 其轴线间距离为 d $(d>2a)$ 的平行长直圆柱导体，设它们单位长度上所带的电荷量分别为$+\tau$和$-\tau$，若忽略端部的边缘效应，试求



(1)　圆柱导体外任意点 p 的电场强度$\boldsymbol{E}$的电位φ的表达式；

(2)　圆柱导体面上的电荷面密度σ_{max}与σ_{min}值。

2.



(1) $b=\sqrt{h^2-a^2}$, $h=\dfrac{d}{2}$

$$\boldsymbol{E}_p=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho_1}\boldsymbol{e}_{\rho_1}-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho_2}\boldsymbol{e}_{\rho_2}$$

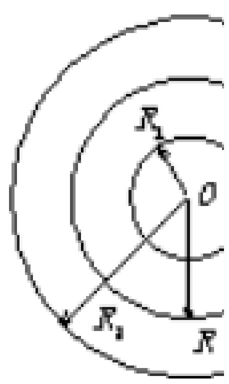
以 y 轴为电位参考点，则

$$\varphi_p=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$(2)\ \sigma_{max}=D_{max}=\varepsilon_0E_{max}=\varepsilon_0E_A=\frac{\tau}{2\pi}\left[\frac{1}{b-h+a}+\frac{1}{b+h-a}\right]$$

$$\sigma_{min}=D_{min}=\varepsilon_0E_{min}=\varepsilon_0E_B=\frac{\tau}{2\pi}\left[\frac{1}{a+h-b}-\frac{1}{b+h+a}\right]$$

1. 图示球形电容器的内导体半径$R_1=1\text{cm}$，外导体内径$R_2=6\text{cm}$，其间充有



两种电介质ε_1与ε_2， 它们的分界面的半径为$R=3\text{cm}$。 已知ε_1与ε_2的相对介电常数分别为

$\varepsilon_{r1}=2,\quad \varepsilon_{r2}=1$。 求此球形电容器的电 容$C$。$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9\times10^9$

2.

解

$$\boldsymbol{D}=\frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (1<r<3)$$

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (3<r<6)$$

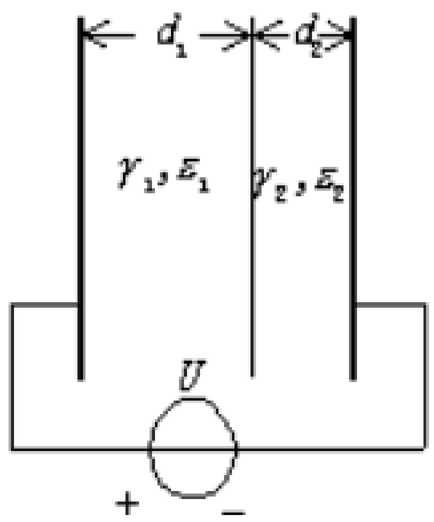
$$U=\int_1^3 E_1\,\mathrm{d}r+\int_3^6 E_2\,\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{Q\cdot10^2}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{1}\right)-\frac{Q\cdot10^2}{4\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{Q\cdot10^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{9\times10^{11}}{2}Q$$

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{2}{9}\times10^{-11}\text{F}$$

1. 一平板电容器有两层介质，极板面积为25cm^2，一层电介质厚度$d_1=0.5\text{cm}$，电导率$\gamma_1=10^{-10}\ \text{S/m}$，相对介电常数$\varepsilon_{r1}=7$，另一层电介质厚度$d_2=1\text{cm}$，电导率$\gamma_2=10^{-15}\ \text{S/m}$。 相对介电常数$\varepsilon_{r2}=4$， 当电容器加有电压$1000\ \text{V}$时， 求



(1) 电介质中的电流 ；

(2) 两电介质分界面上积累的电荷 ；

(3) 电容器消耗的功率 。

2.

(1)

$$\because\begin{cases}E_1d_1+E_2d_2=U\\ \gamma_1E_1=\gamma_2E_2\end{cases}$$

$$\therefore E_1=\frac{U\gamma_2}{d_1\gamma_2+d_2\gamma_1}\quad ;\quad E_2=\frac{U\gamma_1}{d_1\gamma_2+d_2\gamma_1}$$

$$J=J_1=J_2=\frac{U\gamma_1\gamma_2}{d_1\gamma_2+d_2\gamma_1}$$

$$\therefore\ I=JS=\frac{U\gamma_1\gamma_2S}{d_2\gamma_1+d_1\gamma_2}\approx 25\times10^{-14}\ \text{A}$$

(2)

$$\sigma=(\varepsilon_2E_2-\varepsilon_1E_1)=\frac{U}{d_2\gamma_1+d_1\gamma_2}(\varepsilon_1\gamma_2-\varepsilon_2\gamma_1)$$

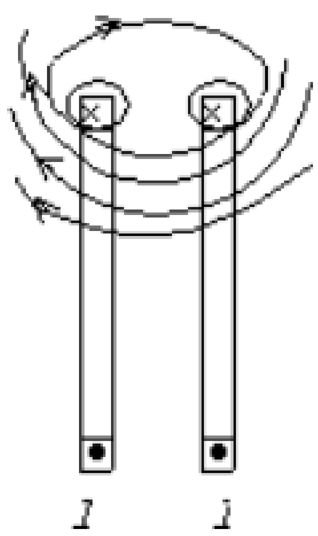
$$\therefore Q=\sigma S\approx 8.85\times10^{-9}\ \text{C/m}^2$$

(3)

$$\because R=\frac{U}{I}=\frac{d_2\gamma_1+d_1\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2S}$$

$$\therefore P=\frac{U^2}{R}=25\times10^{-11}\ \text{W}$$

1. 有两平行放置的线圈，载有相同方向的电流，请定性画出场 中的磁感应强度分布 ($\boldsymbol{B}$ 线) 。



2. $\boldsymbol{B}$ 线上、下对称。

1. 已知真空中二均匀平面波的电场强度分别为: $\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{e}_xE_0e^{j\beta z}$ 和 $\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{e}_y jE_0e^{j\beta z}$ 求合 成波电场强度的瞬时表示式及极化方式。

2.

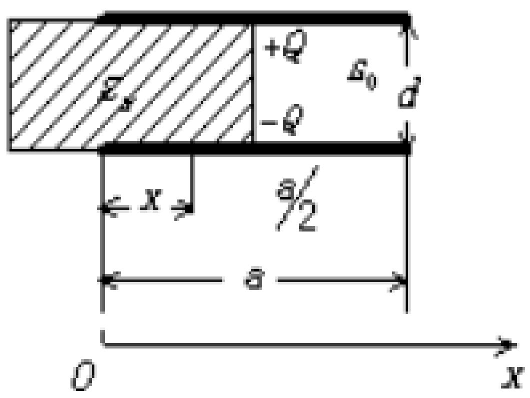
$$\because\beta=\frac{\omega}{c}$$

$$\therefore\ \omega=\beta c$$

得 $$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{e}_x E_0 \cos(\beta ct + \beta z) - \boldsymbol{e}_y E_0 \sin(\beta ct + \beta z)$$

合成波为右旋圆极化波。

1. 图示一平行板空气电容器， 其两极板均为边长为 a 的 正方形， 板间距离为 d， 两板分别带有电荷量 $+Q$ 与 $-Q$，现将厚度 为 d、相对介电常数为 ε_r， 边长为 a 的正方形电介质插入平行板电容器内至 $\frac{a}{2}$ 处，试问该电介质要受多大的电场力？ 方向如何？



2. (1) 解 当电介质插入到平行板电容器内 a/2 处， 则其电容可看成两个电容器的并联

$$C_1 = \frac{\varepsilon x a}{d}, \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 (a - x) a}{d}$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{a\varepsilon_0}{d}(\varepsilon_r x + a - x) = \frac{a\varepsilon_0}{d}[(\varepsilon_r - 1)x + a]$$

静电能量

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2 d}{2a\varepsilon_0[(\varepsilon_r - 1)x + a]}$$

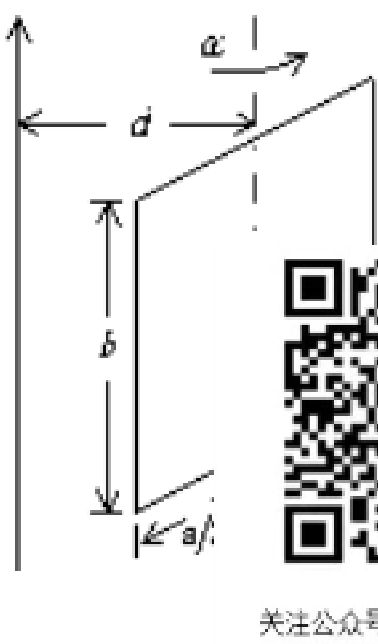
$$F_x = -\frac{\partial W_e}{\partial x}\Big|_{Q=C} = \frac{Q^2 \cdot d}{2a\varepsilon_0} \cdot \left\{\frac{(\varepsilon_r - 1)}{[(\varepsilon_r - 1)x + a]^2}\right\}$$

当 $x = \frac{a}{2}$ 时，

$$F_x = \frac{2Q^2 d(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_0 a^3 (\varepsilon_r + 1)^2} > 0$$

其方向为 a/2 增加的方向，且垂直于介质端面。

1. 长直导线中载有电流 I，其近旁有一矩形线框，尺寸与相互 位置如图所示。设 $t = 0$ 时，线框与直导线共面 $t > 0$ 时，线框以均匀角速度 ω 绕平行于直导线的对称轴旋转，求线框中的感应电动势。



2. 长直载流导线产生的磁场强度

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\varphi$$

t 时刻穿过线框的磁通

$$\Phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$=\frac{\mu_0 Ib}{4\pi}\ln\frac{d^2+(\frac{a}{2})^2+ad\cos\omega t}{d^2+(\frac{a}{2})^2-ad\cos\omega t}$$

感应电动势

$$e=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\mu_0 Iabd\omega}{2\pi}\frac{[(\frac{a}{2})^2+d^2]\sin\omega t}{[(\frac{a}{2})^2+d^2]^2-(ad\cos\omega t)^2}$$

参考方向 $t=0$ 时为顺时针方向。

1. 无源的真空中，已知时变电磁场磁场强度的瞬时矢量为

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_z 0.1\cos(15\pi y)\sin(6\pi\times10^9 t-\beta x)\ \mathrm{A/m}$$

试求(1) β 的值；(2) 电场强度瞬时矢量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 和复矢量(即相量) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$。

2. （1）

$$\nabla^2\boldsymbol{H}=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})\boldsymbol{H}=-[\beta^2+(15\pi)^2]\boldsymbol{H}$$

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=-(6\pi\times10^9)^2\boldsymbol{H}$$

由
$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0$$

得
$$(15\pi)^2 + \beta^2 = \frac{(6\pi\times10^9)^2}{(3\times10^8)^2}$$

故得

$$\beta_x = 5\sqrt{7}\pi \quad \text{rad/s}$$

(2)

$$\boldsymbol{E}(r,t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \nabla\times\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\varepsilon_0}\int (\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial y})\times\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}t$$
$$= \boldsymbol{e}_x 9\pi\sin(15\pi y)\cos(6\pi\times10^9 t - 5\sqrt{7}\pi x)$$
$$+\boldsymbol{e}_y 3\sqrt{7}\pi\cos(15\pi y)\sin(6\pi\times10^9 t - 5\sqrt{7}\pi x)\ \ \mathrm{V/m}$$
$$\boldsymbol{E}(r) = \boldsymbol{e}_x 9\pi\sin(15\pi y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5\sqrt{7}\pi x} - \boldsymbol{e}_y 3\sqrt{7}\pi\mathrm{j}\cos(15\pi y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5\sqrt{7}\pi x}$$

1. 证明任一沿 $\boldsymbol{e}_z$ 传播的线极化波可分解为两个振幅相等，旋转方向相反的圆极化波的叠加。

2. 证明 设线极化波

$$\boldsymbol{E}(z) = \boldsymbol{e}_x E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$
$$= \boldsymbol{E}_1(z) + \boldsymbol{E}_2(z)$$

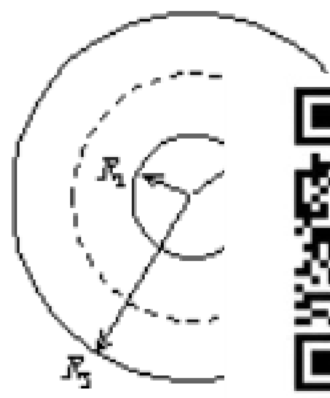
其中：

$$\boldsymbol{E}_1(z) = \frac{E_0}{2}(\boldsymbol{e}_x - \mathrm{j}\boldsymbol{e}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

$$\boldsymbol{E}_2(z) = \frac{E_0}{2}(\boldsymbol{e}_x + \mathrm{j}\boldsymbol{e}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

$\boldsymbol{E}_1(z)$ 和 $\boldsymbol{E}_2(z)$ 分别是振幅为 $\frac{E_0}{2}$ 的右旋和左旋圆极化波。

1. 图示由两个半径分别为 R_1 和 R_3 的同心导体球壳组成的球形 电容器，在球壳间以半径 $r = R_2$ 为分界面的内、外填有两种不同的介质， 其 介电常数分别为



$\varepsilon_1=\varepsilon_{r1}\varepsilon_0$和 $\varepsilon_2=\varepsilon_{r2}\varepsilon_0$，试证明此球形电容器的电容

为
$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_{r1}R_1}-\frac{1}{\varepsilon_{r2}R_3}+\frac{1}{R_2}(\frac{1}{\varepsilon_{r2}}-\frac{1}{\varepsilon_{r1}})}$$

2. 证明设内导体壳外表面所带的电荷量为 Q 则

$$\boldsymbol{D}=\frac{Q}{4\pi r}\boldsymbol{e}_y,\quad \boldsymbol{E}_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\boldsymbol{e}_y,\qquad R_1<r<R_2$$

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\boldsymbol{e}_y,\qquad R_2<r<R_3$$

两导体球壳间的电压为

$$U=\int_{R_1}^{R_2}E_1\mathrm{d}r+\int_{R_2}^{R_3}E_2\mathrm{d}r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3})$$

$$\therefore C=\frac{Q}{U}=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_{y1}R_1}-\frac{1}{\varepsilon_{y2}R_3}+\frac{1}{R_2}(\frac{1}{\varepsilon_{y2}}-\frac{1}{\varepsilon_{y1}})}$$

(证毕)

1. 已知$\boldsymbol{J}=(10y^2z\boldsymbol{e}_x-2x^2y\boldsymbol{e}_y+2x^2z\boldsymbol{e}_z)\ \mathrm{A/m^2}$求

(1) 穿过面积 $x=3$,$2\le y\le 3$, $3.8\le z\le 5.2$ 在$\boldsymbol{e}_x$方向的总电流

(2) 在上述面积中心处电流密度的模；

(3) 在上述面上J_x的平均值 。

2.

(1)

$$I=\int\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_x=\int_2^3\int_{3.8}^{5.2}10y^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_2^3 5y^2(5.2^2-3.8^2)\mathrm{d}y=\frac{5}{2}\times 12.6(3^3-2^3)$$

$$=399\ \mathrm{A}$$

(2) 面积中心， $y=2.5$ ， $z=4.5$

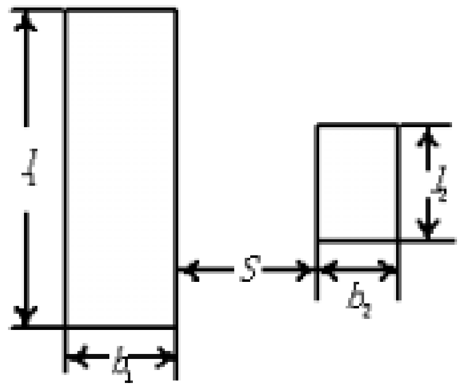
$$\therefore \boldsymbol{J} = 281.25\boldsymbol{e}_x - 45\boldsymbol{e}_y + 81\boldsymbol{e}_z$$

$$\therefore |J| = \sqrt{281.25^2 + 45^2 + 81^2} = 296.121\ \mathrm{A/m^2}$$

(3) J_x 的平均值

$$= \frac{I}{(5.2-3.8)(3-2)} = \frac{399}{1.4} \approx 285\ \mathrm{A/m^2}$$

1. 两个互相平行的矩形线圈处在同一平面内， 尺寸如图所示， 其中$b_1 << l_1$，$l_1 >> l_2$。略去端部效应，试求两线 圈间的互感。

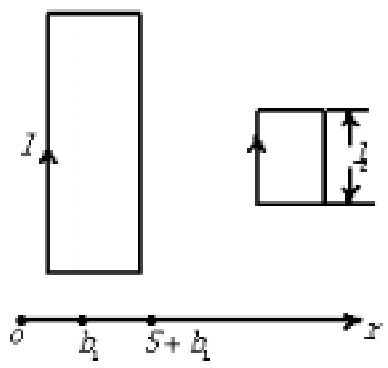


2. 设线框1 带有电流I，线框的回路方向为顺时针。线框1 产生的$\boldsymbol{B}$ 为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(r-b_1)}$$

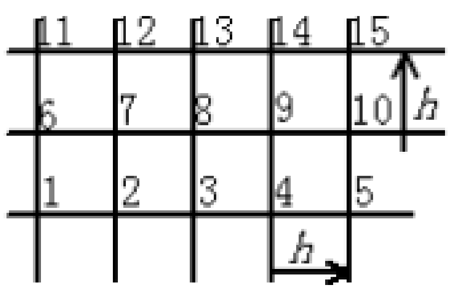
$$\psi_m = \Phi_m = \int_{S+b_1}^{S+b_1+b_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r-b_1}\right) l_2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} l_2 \left(\ln\frac{S+b_1+b_2}{S+b_1} - \ln\frac{S+b_2}{S}\right)$$



$$M = \frac{\Psi_m}{I} = \frac{\mu_0 l_2}{2\pi} \ln\frac{(S+b_1+b_2)S}{(S+b_1)(S+b_2)}$$

1. 用有限差分法计算场域中电位，试列出图示正方形网格中内点7 的拉普拉斯方程的差分格式和内点9 的泊松方程的差分格式。

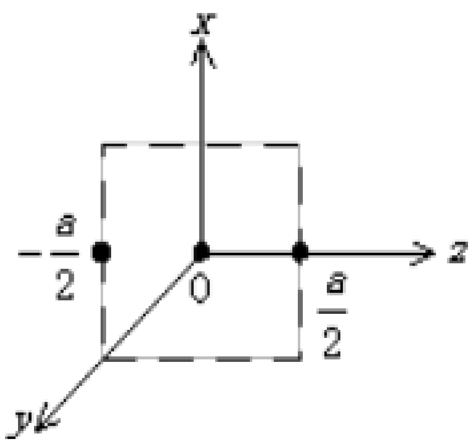


2.

$$\varphi_7 = \frac{1}{4}(\varphi_2 + \varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{12})$$

$$-4\varphi_9+\varphi_4+\varphi_8+\varphi_{10}+\varphi_{14}=h^2(-\frac{\rho_9}{\varepsilon})$$

1. 已知$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x E_m\cos(\omega t-\beta z)$，今将边长为$a$的方形线框放置在坐标原点处，如图，当此线框的法线分别沿$\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$ 和$\boldsymbol{e}_z$方向时，求框中的感应电动势。



2. (1) 线框的法线沿$\boldsymbol{e}_x$时由

$$e_{in}=\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

得

$$e_{in}=0$$

(2) 线 框 的 法 线 沿$\boldsymbol{e}_y$ 时

$$e_{in}=\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-aE_m\cos[\omega t-\beta(-\frac{a}{2})]+aE_m\cos(\omega t-\beta\frac{a}{2})$$

$$=aE_m\left[-\cos(wt+\beta\frac{a}{2})+\cos(wt-\beta\frac{a}{2})\right]$$

线框的法线沿$\boldsymbol{e}_z$时

$$e_{in}=0$$

1. 无源真空中，已知时变电磁场的磁场强度 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r};t)$ 为；

$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r};t)=\boldsymbol{e}_x A_1\sin(4x)\cos(\omega t-\beta y)+\boldsymbol{e}_z A_2\cos(4x)\sin(\omega t-\beta y)$ A/m， 其中A_1、A_2为常数，求位移电流密度 $\boldsymbol{J}_d$。

2. 因为 $\boldsymbol{J}=0$

由

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

得

$$\boldsymbol{J}_d=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\nabla\times\boldsymbol{H}$$

$$= \begin{bmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 \sin(4x)\cos(\omega t-\beta y) & 0 & A_2 \cos(4x)\sin(\omega t-\beta y) \end{bmatrix}$$

$$= -e_x A_2 \beta \cos(4x)\cos(\omega t-\beta y) + e_y 4A_2 \sin(4x)\sin(\omega t-\beta y)$$
$$- e_z A_1 \beta \sin(4x)\sin(\omega t-\beta y) \ \mathrm{A/m^2}$$

1. 利用直角坐标系证明 $\nabla\times(f\vec{G}) = f\nabla\times\vec{G} + (\nabla f)\times\vec{G}$

2. 证明左边$=\nabla\cdot(f\vec{A}) = \nabla\cdot(fA_x\vec{e}_x + fA_y\vec{e}_y + fA_z\vec{e}_z)$ $\left(= \frac{\partial(fA_x)\vec{e}_x}{\partial x} + \frac{\partial(fA_y)\vec{e}_y}{\partial y} + \frac{\partial(fA_z)\vec{e}_z}{\partial z}\right.$

$$= f\frac{\partial(A_x)\vec{e}_x}{\partial x} + A_x\frac{\partial(f)\vec{e}_x}{\partial x} + f\frac{\partial(A_y)\vec{e}_y}{\partial y} + A_y\frac{\partial(f)\vec{e}_y}{\partial y}$$
$$+ f\frac{\partial(A_z)\vec{e}_z}{\partial z} + A_z\frac{\partial(f)\vec{e}_z}{\partial z}$$
$$= \left[f\frac{\partial(A_x)\vec{e}_x}{\partial x} + f\frac{\partial(A_y)\vec{e}_y}{\partial y} + f\frac{\partial(A_z)\vec{e}_z}{\partial z}\right] + \left[A_x\frac{\partial(f)\vec{e}_x}{\partial x}\right.$$
$$\left.A_y\frac{\partial(f)\vec{e}_y}{\partial y} + A_y\frac{\partial(f)\vec{e}_y}{\partial y}\right]$$

=右边

$$= f\nabla\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\nabla f$$

1. 求无限长直线电流的矢量位 $\bar{A}$ 和磁感应强度 $\bar{B}$。

2. 解直线电流元产生的矢量位为

$$d\vec{A} = \vec{e}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\frac{dz'}{[r^2+(z-z')^2]^{1/2}}\right\}$$

积分得

$$\vec{A}=\vec{e}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\left\{\frac{dz'}{[r^2+(z-z')^2]^{1/2}}\right\}$$

$$=\vec{e}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln[(z'-z)+\sqrt{(z'-z)^2+r^2}]\Big|_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}$$

$$=\vec{e}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left\{\frac{(\frac{l}{2}-z)+[(\frac{l}{2}-z)^2+r^2]^{1/2}}{-(\frac{l}{2}+z)+[(\frac{l}{2}+z)^2+r^2]^{1/2}}\right\}$$

$$=\vec{e}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{l}{r}$$

当 $l\to\infty, A\to\infty$．附加一个常数矢量 $\vec{C}=\vec{e}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{r_0}{l}$

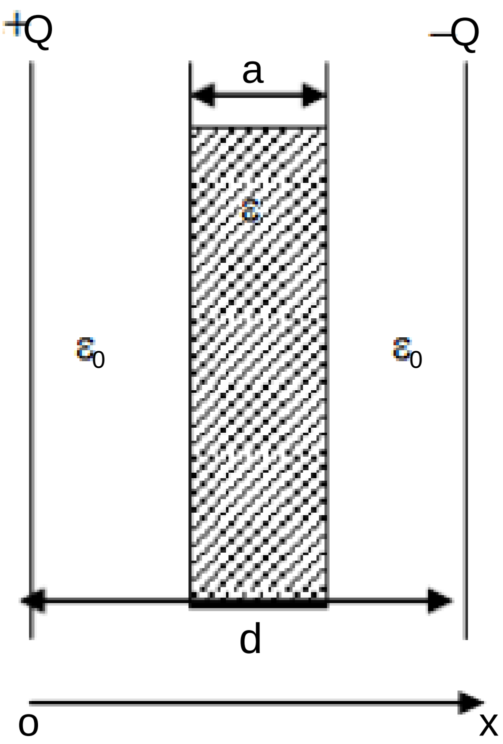
则 $\vec{A}=\vec{e}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{l}{r}+\vec{e}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{r_0}{l}=\vec{e}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\frac{r_0}{r}$

则由 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=-\vec{e}_\varphi\frac{\partial \vec{A}_z}{\partial r}=\vec{e}_\varphi\frac{\mu_0 I}{4\pi r}$

1. 图示极板面积为 S、间距为 d 的平行板空气电容器内，平行地放入一块面积为 S、厚度为 a、介电常数为 ε 的介质板。 设左右两极板上的电荷量分别为 +Q 与 −Q 。若忽略端部的边缘效应，试求

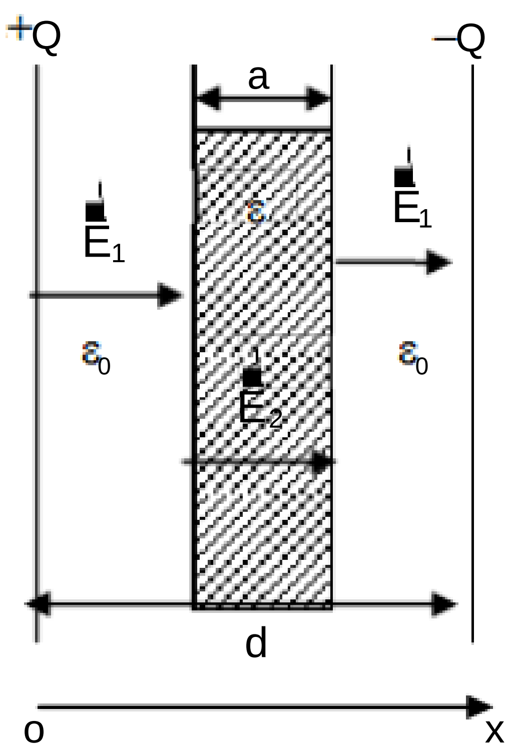
(1) 此电容器内电位移与电场强度的分布；

(2) 电容器的电容及储存的静电能量。



2. 解 1） $\vec{D}_1=\vec{D}_2=\frac{Q}{S}\vec{e}_x$

$\vec{E}_1=\frac{\vec{D}_1}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{S\varepsilon_0}\vec{e}_x$， $\vec{E}_2=\frac{\vec{D}_2}{\varepsilon}=\frac{Q}{S\varepsilon}\vec{e}_x$



2) $C_1=\frac{Q}{U}=\frac{Q}{E_1(d-a)}=\frac{S\varepsilon_0}{d-a}$

$C_2=\frac{Q}{U_2}=\frac{Q}{E_2 a}=\frac{S\varepsilon}{a}$

$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{S\varepsilon\varepsilon_0}{\varepsilon_0 a+\varepsilon(d-a)}$$

$$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 a+\varepsilon(d-a)}{S\varepsilon\varepsilon_0}Q^2$$

1. 在自由空间传播的均匀平面波的电场强度复矢量为

$$\bar{E}=\bar{a}_x\times10^{-4}e^{-j20\pi z}+\bar{a}_y\times10^{-4}e^{-j(20\pi z-\frac{\pi}{2})}(v/m)$$

求（1）平面波的传播方向；

（2）频率；

（3）波的极化方式；

（4）磁场强度；

（5）电磁波的平均坡印廷矢量 $\bar{S}_{av}$。

2. 解（1）平面波的传播方向为＋z 方向

（2）频率为 $f=k_0\dfrac{c}{2\pi}=3\times10^9\text{Hz}$

（3）波的极化方式因为 $E_{xm}=E_{ym}=10^{-4}$, $\varphi_x-\varphi_y=0-\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{2}$，故为左旋圆极化.

（4）磁场强度

$$\vec{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\vec{a}_z\times\vec{E}=\frac{1}{\eta_0}(\vec{a}_z\times\vec{a}_x10^{-4}+j\vec{a}_z\times\vec{a}_y10^{-4})e^{-j20\pi z}$$

$$=\frac{1}{\eta_0}(\vec{a}_y10^{-4}-j\vec{a}_x10^{-4})e^{-j20\pi z}$$

（5）平均功率坡印廷矢量

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}\times\vec{H}^*] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[(\vec{a}_x 10^{-4} + j\vec{a}_y 10^{-4})e^{-j20\pi z}$$

$$\times\frac{1}{\eta_0}(\vec{a}_y 10^{-4} - j\vec{a}_x 10^{-4})e^{j20\pi z}$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{(10^{-4})^2}{\eta_0}+\frac{(10^{-4})^2}{\eta_0}]\vec{a}_z$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{120\pi}[2\times 10^{-8}]\vec{a}_z$$

$$=0.265\times 10^{-10}\vec{a}_z(W/m^2)$$

1. 利用直角坐标，证明 $\nabla\cdot(f\bar{A}) = f\nabla\cdot\bar{A} + \bar{A}\cdot\nabla f$

2. 证明左边= $\nabla\cdot(f\vec{A}) = \nabla\cdot(fA_x\vec{e}_x + fA_y\vec{e}_y + fA_z\vec{e}_z)$

$$=\frac{\partial(fA_x)\vec{e}_x}{\partial x}+\frac{\partial(fA_y)\vec{e}_y}{\partial y}+\frac{\partial(fA_z)\vec{e}_z}{\partial z}$$

$$= f\frac{\partial(A_x)\vec{e}_x}{\partial x} + A_x\frac{\partial(f)\vec{e}_x}{\partial x} + f\frac{\partial(A_y)\vec{e}_y}{\partial y} + A_y\frac{\partial(f)\vec{e}_y}{\partial y}$$

$$+f\frac{\partial(A_z)\vec{e}_z}{\partial z} + A_z\frac{\partial(f)\vec{e}_z}{\partial z}$$

$$=[f\frac{\partial(A_x)\vec{e}_x}{\partial x} + f\frac{\partial(A_y)\vec{e}_y}{\partial y} + f\frac{\partial(A_z)\vec{e}_z}{\partial z}] + [A_x\frac{\partial(f)\vec{e}_x}{\partial x}$$

$$A_y\frac{\partial(f)\vec{e}_y}{\partial y} + A_y\frac{\partial(f)\vec{e}_y}{\partial y}]$$

$$= f\nabla\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\nabla f$$

=右边

1. 1　求矢量 $\vec{A} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y x^2 + \vec{e}_z y^2 z$ 沿 xy 平面上的一个边长为 2 的正方形回路的线积分，此正方形的两边分别与 x 轴和 y 轴相重合。再求 $\nabla\times\vec{A}$ 对此回路所包围的曲面积分，验证斯托克斯定理。

2.　解

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int_0^2 x\,dx - \int_0^2 x\,dx + \int_0^2 2^2\,dy - \int_0^2 0\,dy = 8$$

又

$$\nabla\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x&\mathbf{e}_y&\mathbf{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ x&x^2&y^2z\end{vmatrix}=\mathbf{e}_x 2yz+\mathbf{e}_z 2x$$

所以

$$\int_S\nabla\times\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\int_0^2\int_0^2(\mathbf{e}_x 2yz+\mathbf{e}_z 2x)\cdot\mathbf{e}_z\,dx\,dy=8$$

故有

$$\oint_C\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=8=\int_S\nabla\times\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

1. 同轴线内外半径分别为 a 和 b，填充的介质 $\gamma\neq 0$，具有漏电现象，同轴线外加电压 U，求

（1）漏电介质内的 φ；

（2）漏电介质内的 $\bar{E}$、$\bar{J}$；

（3）单位长度上的漏电电导。

2. 解（1）电位所满足的拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)=0$$

由边界条件 $r=a,\ \varphi=U;\ r=b,\ \varphi=0$ 所得解为

$$\varphi(r)=\left[\frac{U}{\ln\frac{b}{a}}\right]\ln\frac{b}{r}$$

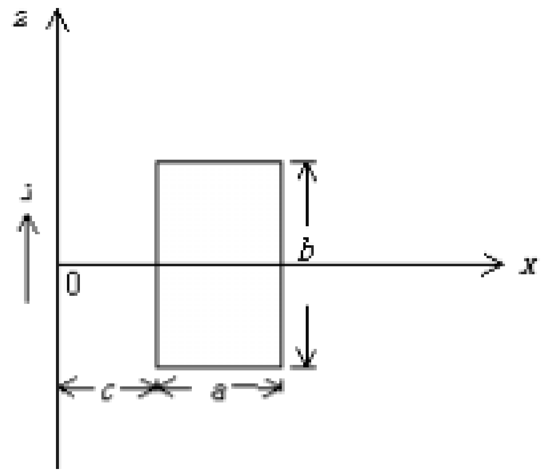
（2）电场强度变量为 $\vec{E}(r)=-\vec{e}_r\dfrac{d\varphi}{dr}=\dfrac{U}{r\ln\frac{b}{a}}\vec{e}_r$，

则漏电媒质的电流密度为 $\vec{J}=\gamma\vec{E}(r)=\dfrac{\gamma U}{r\ln\frac{b}{a}}\vec{e}_r$

（3）单位长度的漏电流为 $I_0=2\pi r\cdot\dfrac{\gamma U}{r\ln\frac{b}{a}}=\dfrac{2\pi\gamma U}{\ln\frac{b}{a}}\vec{e}_r$

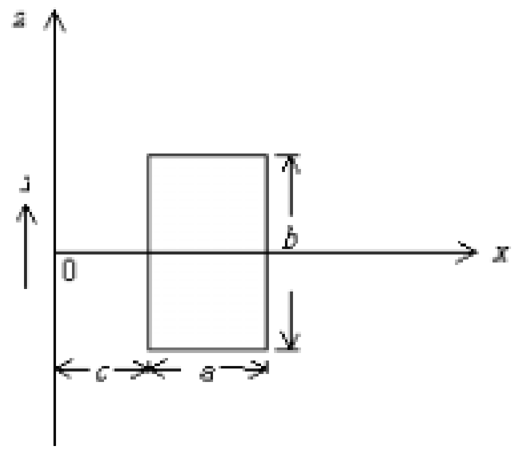
单位长度的漏电导为$G_0=\dfrac{I_0}{U}=\dfrac{2\pi\gamma}{\ln\dfrac{b}{a}}$

1. 如图 所示，长直导线中载有电流 $i=I_m\cos\omega t$，一 矩形导线框位于其近旁，其两边与直线平行并且共面，求导线框中的感应电动势。



2. 解载流导线产生的磁场强度的大小为

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$



穿过线框的磁通量

$$\phi=\int_c^{c+a}\vec{B}\cdot d\vec{S}$$
$$=\int_c^{c+a}\frac{\mu_0 i}{2\pi r}b\,dr$$
$$=\frac{\mu_0 bI_m\cos\omega t}{2\pi}\ln\frac{c+a}{c}$$

线框中的感应电动势

$$\varepsilon=-\frac{d\phi}{dt}$$
$$=\frac{\mu_0 bI_m\omega\sin\omega t}{2\pi}\ln\frac{c+a}{c}$$

参考方向为顺时针方向。

1. 空气中传播的均匀平面波电场为 $\vec{E}=\vec{e}_x E_0 e^{-jkz}$，已知电磁波沿 z 轴传播，频率为 f。求

(1)磁场 $\vec{H}$；

(2)波长 λ；

(3)能流密度 $\vec{S}$ 和平均能流密度 $\vec{S}_{av}$；

(4)能量密度W。

2. 解

（1） $\vec{H} = \dfrac{1}{\eta}\vec{e}_z \times \vec{e}_x E_0 e^{-jkz}$

$$= \vec{e}_y \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0 e^{-jkz}$$

（2） $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{1}{f\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

（3） $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \vec{e}_x E_0 e^{-jkz} \times \vec{e}_y E_0 e^{-jkz}$

$$= \vec{e}_z \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 e^{-2jkz}$$

$$= \vec{e}_z \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \cos^2(2\pi ft - kz)$$

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \vec{e}_z \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2$$

（4） $W = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \dfrac{1}{2}\mu_0 H^2$

1. 平行板电容器的长、宽分别为a和b，极板间距离为d。电容器的一半厚度($0 \llcorner d/2$)用介电常数为ε的电介质填充,

（1）板上外加电压U_0，求板上的自由电荷面密度、束缚电荷；

（2）若已知板上的自由电荷总量为Q，求此时极板间电压和束缚电荷；

（3）求电容器的电容量。

2. （1） 设介质中的电场为 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_z E$，空气中的电场为 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_z E_0$。由 $D = D_0$，有

$$\varepsilon E = \varepsilon_0 E_0$$

又由于

$$E\frac{d}{2}+E_0\frac{d}{2}=-U_0$$

由以上两式解得

$$E=-\frac{2\varepsilon_0 U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$$

$$E_0=-\frac{2\varepsilon U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$$

故下极板的自由电荷面密度为

$$\sigma_{下}=\varepsilon E=-\frac{2\varepsilon_0\varepsilon U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$$

上极板的自由电荷面密度为

$$\sigma_{上}=-\varepsilon_0 E_0=\frac{2\varepsilon_0\varepsilon U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$$

电介质中的极化强度

$$\mathbf{P}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\mathbf{E}=-\mathbf{e}_z\frac{2\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$$

故下表面上的束缚电荷面密度为

$$\sigma_{p下}=-\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{P}=\frac{2\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$$

上表面上的束缚电荷面密度为

$$\sigma_{p上}=\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{P}=-\frac{2\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$$

（2）由

$$\sigma=\frac{Q}{ab}=\frac{2\varepsilon_0\varepsilon U}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$$

得到

$$U=\frac{(\varepsilon+\varepsilon_0)dQ}{2\varepsilon_0\varepsilon ab}$$

故

$$\sigma_{p下} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)Q}{\varepsilon ab}$$

（3）电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon ab}{(\varepsilon + \varepsilon_0)d}$$

1. 频率为100MHz 的正弦均匀平面波在各向同性的均匀理想介质中沿（+z）方向传播，介质的特性参数为 $\varepsilon_r = 4$、$\mu_r = 1$，$\gamma = 0$。设电场沿 x 方向，即 $\vec{E} = \vec{e}_x E_x$；当 $t = 0$，$z = \frac{1}{8}$ m 时，电场等于其振幅值 10^{-4} V / m 。试求

（1） $\vec{H}(z,t)$ 和 $\vec{E}(z,t)$；

（2） 波的传播速度；

（3） 平均波印廷矢量。

2. 解以余弦形式写出电场强度表示式

$$\vec{E}(z,t) = \vec{e}_x E_x(z,t)$$
$$= \vec{e}_x E_m \cos(\omega t - kz + \psi_{xE})$$

把数据代入 $E_m = 10^{-4}$ V / m

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi f\sqrt{4\mu_0\varepsilon_0} = \frac{4\pi}{3}\ \text{rad / m}$$

$$\psi_{xE} = kz = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{\pi}{6}\ \text{rad}$$

则

$$\vec{E}(z,t) = \vec{e}_x 10^{-4}\cos(2\pi\times10^8 t - \frac{4\pi}{3}z + \frac{\pi}{6})\ \text{V / m}$$

$$\vec{H}(z,t) = \vec{e}_y H_y = \vec{e}_y\frac{E_x}{\eta} = \vec{e}_y\frac{1}{\sqrt{\mu/\varepsilon}}10^{-4}\cos(2\pi\times10^8 t - \frac{4\pi}{3}z + \frac{\pi}{6})$$

$$= \vec{e}_y\frac{1}{60\pi}10^{-4}\cos(2\pi\times10^8 t - \frac{4\pi}{3}z + \frac{\pi}{6})\ \text{A / m}$$

（2）波的传播速度

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=\frac{3\times10^8}{2}=1.5\times10^8\,m/s$$

（3）平均坡印廷矢量为 $S_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}\times\vec{H}^*]$

$$S_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{e}_x10^{-4}e^{-j(\frac{4\pi}{3}z-\frac{\pi}{6})}\times\vec{e}_y\frac{10^{-4}}{60\pi}e^{j(\frac{4\pi}{3}z-\frac{\pi}{6})}]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{e}_z\frac{(10^{-4})^2}{60\pi}]$$

$$=\vec{e}_z\frac{10^{-8}}{120\pi}W/m^2$$

1. 在由 $r=5$、$z=0$ 和 $z=4$ 围成的圆柱形区域，对矢量 $\mathbf{A}=\mathbf{e}_r r^2+\mathbf{e}_z 2z$ 验证散度定理。

2. 解 在圆柱坐标系中

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rr^2)+\frac{\partial}{\partial z}(2z)=3r+2$$

所以

$$\int_\tau\nabla\cdot\mathbf{A}\,d\tau=\int_0^4 dz\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^5(3r+2)r\,dr=1200\pi$$

又

$$\oint_S\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\oint_S(\mathbf{e}_r r^2+\mathbf{e}_z 2z)\cdot(\mathbf{e}_r\,dS_r+\mathbf{e}_\phi dS_\phi+\mathbf{e}_z\,dS_z)$$

$$=\int_0^4\int_0^{2\pi}5^2\times5d\phi\,dz+\int_0^5\int_0^{2\pi}2\times4r\,dr\,d\phi=1200\pi$$

故有

$$\int_\tau\nabla\cdot\mathbf{A}\,d\tau=1200\pi=\oint_S\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

1. 求（1）矢量 $\mathbf{A}=\mathbf{e}_x x^2+\mathbf{e}_y x^2y^2+\mathbf{e}_z 24x^2y^2z^3$ 的散度；(2) 求 $\nabla\cdot\mathbf{A}$ 对中心在原点的一个单位立方体的积分；(3) 求 $\mathbf{A}$ 对此立方体表面的积分，验证散度定理。

2.

解 （1）

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\partial(x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(x^2y^2)}{\partial y}+\frac{\partial(24x^2y^2z^3)}{\partial z}=2x+2x^2y+72x^2y^2z^2$$

（2）$\nabla\cdot\mathbf{A}$ 对中心在原点的一个单位立方体的积分为

$$\int_\tau \nabla\cdot\mathbf{A}\,d\tau=\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}(2x+2x^2y+72x^2y^2z^2)\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{24}$$

（3） **A** 对此立方体表面的积分

$$\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 dy\,dz-\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 dy\,dz$$

$$+\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}2x^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 dx\,dz-\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}2x^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 dx\,dz$$

$$+\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}24x^2y^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 dx\,dy-\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}24x^2y^2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 dx\,dy$$

$$=\frac{1}{24}$$

故有

$$\int_\tau \nabla\cdot\mathbf{A}\,d\tau=\frac{1}{24}=\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

1. 计算矢量 **r** 对一个球心在原点、半径为 a 的球表面的积分，并求 $\nabla\cdot\mathbf{r}$ 对球体积的积分。
2. 解

$$\oint_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S}=\oint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_r\,dS=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}a a^2\sin\theta\,d\theta=4\pi a^3$$

又在球坐标系中

$$\nabla\cdot\mathbf{r}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 r)=3$$

所以

$$\int_\tau \nabla\cdot\mathbf{r}\,d\tau=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}3r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi=4\pi a^3$$

1. 求矢量 $\mathbf{A}=\mathbf{e}_x x+\mathbf{e}_y x^2+\mathbf{e}_z y^2 z$ 沿 xy 平面上的一个边长为 2 的正方形回路的线积分，此正方形的两边分别与 x 轴和 y 轴相重合。再求 $\nabla\times\mathbf{A}$ 对此回路所包围的曲面积分，验证斯托克斯定理。

2.

解
$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=\int_0^2 x\,dx-\int_0^2 x\,dx+\int_0^2 2^2\,dy-\int_0^2 0\,dy=8$$

又

$$\nabla\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & x^2 & y^2 z\end{vmatrix}=\mathbf{e}_x 2yz+\mathbf{e}_z 2x$$

所以

$$\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\int_0^2\int_0^2(\mathbf{e}_x 2yz+\mathbf{e}_z 2x)\cdot\mathbf{e}_z\,dx\,dy=8$$

故有

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=8=\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

1. 证明（1）$\nabla\cdot\mathbf{R}=3$；(2) $\nabla\times\mathbf{R}=0$；(3) $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})=\mathbf{A}$。其中 $\mathbf{R}=\mathbf{e}_x x+\mathbf{e}_y y+\mathbf{e}_z z$， $\mathbf{A}$ 为一常矢量。

2. 解 （1）

$$\nabla\cdot\mathbf{R}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$$

(2)
$$\nabla\times\mathbf{R}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & y\end{vmatrix}=0$$

（3）设 $\mathbf{A}=\mathbf{e}_x A_x+\mathbf{e}_y A_y+\mathbf{e}_z A_z$

则

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{R} = A_x x + A_y y + A_z z$$

故

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}) = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x}(A_x x + A_y y + A_z z) + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y}(A_x x + A_y y + A_z z)$$

$$+\mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}(A_x x + A_y y + A_z z)$$

$$= \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z = \mathbf{A}$$

1. 两点电荷 $q_1 = 8C$ 位于 z 轴上 $z = 4$ 处，$q_2 = -4C$ 位于 y 轴上 $y = 4$ 处，求 $(4,0,0)$ 处的电场强度。
2. 解 电荷 q_1 在 $(4,0,0)$ 处产生的电场为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1'|^3} = \frac{2}{\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{e}_x 4 - \mathbf{e}_z 4}{(4\sqrt{2})^3}$$

电荷 q_2 在 $(4,0,0)$ 处产生的电场为

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2'|^3} = -\frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{e}_x 4 - \mathbf{e}_y 4}{(4\sqrt{2})^3}$$

故 $(4,0,0)$ 处的电场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z 2}{32\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}$$

1. 两平行无限长直线电流 I_1 和 I_2，相距为 d，求每根导线单位长度受到的安培力 $\mathbf{F}_m$。
2. 解 无限长直线电流 I_1 产生的磁场为

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

直线电流 I_2 每单位长度受到的安培力为

$$\mathbf{F}_{m12} = \int_0^1 I_2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_1 \, dz = -\mathbf{e}_{12}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

式中 $\mathbf{e}_{12}$ 是由电流 I_1 指向电流 I_2 的单位矢量。

同理可得，直线电流 I_1 每单位长度受到的安培力为

$$\mathbf{F}_{m21} = -\mathbf{F}_{m12} = \mathbf{e}_{12}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

1. 一个半径为 a 的导体球带电荷量为 Q，当球体以均匀角速度 ω 绕一个直径旋转，求球心处的磁感应强度 $\mathbf{B}$。

2. 解　球面上的电荷面密度为

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

当球体以均匀角速度 ω 绕一个直径旋转时，球面上位置矢量 $\mathbf{r} = \mathbf{e}_r a$ 点处的电流面密度为

$$\mathbf{J}_S = \sigma\mathbf{v} = \sigma\,\omega\times\mathbf{r} = \sigma\,\mathbf{e}_z\omega\times\mathbf{e}_r a$$

$$= \mathbf{e}_\phi\omega\sigma\, a\sin\theta = \mathbf{e}_\phi\frac{\omega Q}{4\pi a}\sin\theta$$

将球面划分为无数个宽度为 $dl = a\,d\theta$ 的细圆环，则球面上任一个宽度为 $dl = a\,d\theta$ 细圆环的电流为

$$dI = J_S\,dl = \frac{\omega Q}{4\pi}\sin\theta\,d\theta$$

细圆环的半径为 $b = a\sin\theta$，圆环平面到球心的距离 $d = a|\cos\theta|$，利用电流圆环的轴线上的磁场公式，则该细圆环电流在球心处产生的磁场为

$$d\mathbf{B} = \mathbf{e}_z\frac{\mu_0 b^2\,dI}{2(b^2+d^2)^{3/2}} = \mathbf{e}_z\frac{\mu_0\omega Q a^2\sin^3\theta\,d\theta}{8\pi(a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)^{3/2}}$$

$$= \mathbf{e}_z\frac{\mu_0\omega Q\sin^3\theta\,d\theta}{8\pi a}$$

故整个球面电流在球心处产生的磁场为

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_z\int_0^{\pi}\frac{\mu_0\omega Q\sin^3\theta}{8\pi a}d\theta = \mathbf{e}_z\frac{\mu_0\omega Q}{6\pi a}$$

1. 半径为 a 的球体中充满密度 $\rho(r)$ 的体电荷，已知电位移分布为

$$D_r = \begin{cases} r^3 + Ar^2 & (r \le a) \\ \dfrac{a^5 + Aa^4}{r^2} & (r \ge a) \end{cases}$$

其中 A 为常数，试求电荷密度 $\rho(r)$。

2. 解　由 $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$，有

$$\rho(r)=\nabla\cdot\mathbf{D}=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2D_r)$$

故在 $r<a$ 区域

$$\rho(r)=\varepsilon_0\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}[r^2(r^3+Ar^2)]=\varepsilon_0(5r^2+4Ar)$$

在 $r>a$ 区域

$$\rho(r)=\varepsilon_0\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}[r^2\frac{(a^5+Aa^4)}{r^2}]=0$$

1. 一个半径为 a 薄导体球壳内表面涂覆了一薄层绝缘膜，球内充满总电荷量为 Q 为的体电荷，球壳上又另充有电荷量 Q。已知球内部的电场为 $\mathbf{E}=\mathbf{e}_r(r/a)^4$，设球内介质为真空。计算（1） 球内的电荷分布；（2）球壳外表面的电荷面密度。

2. 解 （1） 由高斯定理的微分形式可求得球内的电荷体密度为

$$\rho=\varepsilon_0\nabla\cdot\mathbf{E}=\varepsilon_0[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2E)]=\varepsilon_0[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{r^4}{a^4})]=6\varepsilon_0\frac{r^3}{a^4}$$

（2）球体内的总电量 Q 为

$$Q=\int_\tau\rho d\tau=\int_0^a 6\varepsilon_0\frac{r^3}{a^4}4\pi r^2dr=4\pi\varepsilon_0a^2$$

球内电荷不仅在球壳内表面上感应电荷 $-Q$，而且在球壳外表面上还要感应电荷 Q，所以球壳外表面上的总电荷为 2Q，故球壳外表面上的电荷面密度为

$$\sigma=\frac{2Q}{4\pi a^2}=2\varepsilon_0$$

1. 中心位于原点，边长为 L 的电介质立方体的极化强度矢量为

$$\mathbf{P}=P_0(\mathbf{e}_xx+\mathbf{e}_yy+\mathbf{e}_zz)。$$

（1）计算面束缚电荷密度和体束缚电荷密度；（2）证明总的束缚电荷为零。

2. 解 （1） $\rho_P = -\nabla\cdot\mathbf{P} = 3P_0$

$$\sigma_P(x=\frac{L}{2}) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{P}\big|_{x=L/2} = \mathbf{e}_x\cdot\mathbf{P}\big|_{x=L/2} = \frac{L}{2}P_0$$

$$\sigma_P(x=-\frac{L}{2}) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{P}\big|_{x=-L/2} = -\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{P}\big|_{x=-L/2} = \frac{L}{2}P_0$$

同理

$$\sigma_P(y=\frac{L}{2}) = \sigma_P(y=-\frac{L}{2}) = \sigma_P(z=\frac{L}{2}) = \sigma_P(z=-\frac{L}{2}) = \frac{L}{2}P_0$$

（2） $$q_P = \int_\tau \rho_P \, d\tau + \oint_S \sigma_P \, dS = -3P_0L^3 + 6L^2 \times \frac{L}{2}P_0 = 0$$

1. 一半径为 R_0 的介质球，介电常数为 $\varepsilon_r\varepsilon_0$，其内均匀分布自由电荷 ρ，证明中心点的电位为

$$\frac{2\varepsilon_r+1}{2\varepsilon_r}(\frac{\rho}{3\varepsilon_0})R_0^2$$

2. 解 由

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = q$$

可得到

$$4\pi r^2 D_1 = \frac{4\pi r^3}{3}\rho \quad (r < R_0)$$

$$4\pi r^2 D_2 = \frac{4\pi R_0^3}{3}\rho \quad (r > R_0)$$

即

$$D_1 = \frac{\rho r}{3}, \ E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_r\varepsilon_0} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_r\varepsilon_0} \quad (r < R_0)$$

$$D_2 = \frac{\rho R_0^3}{3r^2}, \ E_2 = \frac{D_1}{\varepsilon_0} = \frac{\rho R_0^3}{3\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R_0)$$

故中心点的电位为

$$\varphi(0)=\int_0^{R_0}E_1dr+\int_{R_0}^{\infty}E_2dr=\int_0^{R_0}\frac{\rho r}{3\varepsilon_r\varepsilon_0}dr+\int_{R_0}^{\infty}\frac{\rho R_0^3}{3\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$=\frac{\rho R_0^2}{6\varepsilon_r\varepsilon_0}+\frac{\rho R_0^2}{3\varepsilon_0}=\frac{2\varepsilon_r+1}{2\varepsilon_r}\left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)R_0^2$$

1. 一个半径为 R 的介质球，介电常数为 ε，球内的极化强度 $\mathbf{P}=\mathbf{e}_r K/r$，其中 K 为一常数。(1) 计算束缚电荷体密度和面密度；(2) 计算自由电荷密度；(3) 计算球内、外的电场和电位分布。

2. 解 (1) 介质球内的束缚电荷体密度为

$$\rho_p=-\nabla\cdot\mathbf{P}=-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{K}{r}\right)=-\frac{K}{r^2}$$

在 $r=R$ 的球面上，束缚电荷面密度为

$$\sigma_p=\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}\big|_{r=R}=\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{P}\big|_{r=R}=\frac{K}{R}$$

(2) 由于 $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$，所以

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\varepsilon_0\nabla\cdot\mathbf{E}+\nabla\cdot\mathbf{P}=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\nabla\cdot\mathbf{D}+\nabla\cdot\mathbf{P}$$

即

$$\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\nabla\cdot\mathbf{D}=\nabla\cdot\mathbf{P}$$

由此可得到介质球内的自由电荷体密度为

$$\rho=\nabla\cdot\mathbf{D}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\varepsilon_0}\nabla\cdot\mathbf{P}=-\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\varepsilon_0}\rho_p=\frac{\varepsilon K}{(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}$$

总的自由电荷量

$$q=\int_\tau\rho d\tau=\frac{\varepsilon K}{\varepsilon-\varepsilon_0}\int_0^R\frac{1}{r^2}4\pi r^2dr=\frac{4\pi\varepsilon RK}{\varepsilon-\varepsilon_0}$$

(3) 介质球内、外的电场强度分别为

$$\mathbf{E}_1=\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon-\varepsilon_0}=\mathbf{e}_r\frac{K}{(\varepsilon-\varepsilon_0)r}\quad(r<R)$$

$$\mathbf{E}_2=\mathbf{e}_r\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\mathbf{e}_r\frac{\varepsilon RK}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}\qquad (r>R)$$

介质球内、外的电位分别为

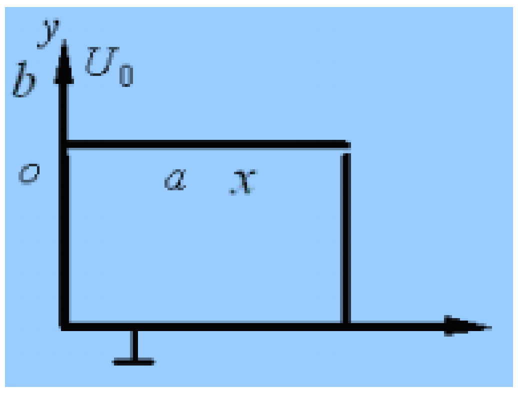
$$\varphi_1=\int_r^{\infty}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\int_r^{R}E_1dr+\int_R^{\infty}E_2dr$$

$$=\int_r^{R}\frac{K}{(\varepsilon-\varepsilon_0)r}dr+\int_R^{\infty}\frac{\varepsilon RK}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}dr$$

$$=\frac{K}{\varepsilon-\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}+\frac{\varepsilon K}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}\qquad (r\le R)$$

$$\varphi_2=\int_r^{\infty}E_2dr=\int_r^{\infty}\frac{\varepsilon RK}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}dr=\frac{\varepsilon RK}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)r}\qquad (r\ge R)$$

1. 如图所示为一长方形截面的导体槽，槽可视为无限长，其上有一块与槽相绝缘的盖板，槽的电位为零，上边盖板的电位为U_0，求槽内的电位函数。



2. 解 根据题意，电位$\varphi(x,y)$满足的边界条件为

① $\varphi(0,y)=\varphi(a,y)=0$

② $\varphi(x,0)=0$

③ $\varphi(x,b)=U_0$

根据条件①和②，电位$\varphi(x,y)$的通解应取为

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

由条件③，有

$$U_0=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

两边同乘以$\sin(n\pi x/a)$，并从0到a对x积分，得到

$$A_n = \frac{2U_0}{a\sinh(n\pi b/a)}\int_0^a \sin(\frac{n\pi x}{a})dx$$

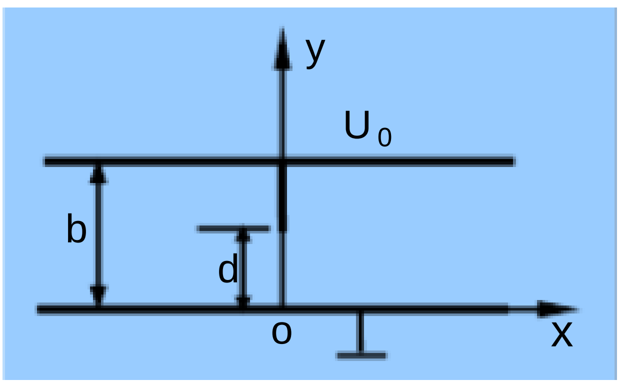
$$= \frac{2U_0}{n\pi\sinh(n\pi b/a)}(1-\cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4U_0}{n\pi\sinh(n\pi b/a)}, & n=1,3,5,\cdots \\ 0, & n=2,4,6,\cdots \end{cases}$$

故得到槽内的电位分布

$$\varphi(x,y) = \frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{1}{n\sinh(n\pi b/a)}\sinh(\frac{n\pi y}{a})\sin(\frac{n\pi x}{a})$$

1. 两平行无限大导体平面，距离为 b，其间有一极薄的导体片由 $y=d$ 到 $y=b$ $(-\infty < z < \infty)$。上板和薄片保持电位 U_0，下板保持零电位，求板间电位的解。设在薄片平面上，从 $y=0$ 到 $y=d$，电位线性变化，$\varphi(0,y)=U_0 y/d$。



4.2

2. 解　应用叠加原理，设板间的电位为

$$\varphi(x,y) = \varphi_1(x,y) + \varphi_2(x,y)$$

其中，$\varphi_1(x,y)$ 为不存在薄片的平行无限大导体平面间（电压为 U_0）的电位，即 $\varphi_1(x,y)=U_0 y/b$；$\varphi_2(x,y)$ 是两个电位为零的平行导体板间有导体薄片时的电位，其边界条件为

① $\varphi_2(x,0) = \varphi_2(x,b) = 0$

② $\varphi_2(x,y) = 0 \quad (|x| \to \infty)$

③ $$\varphi_2(0,y) = \varphi(0,y) - \varphi_1(0,y) = \begin{cases} \dfrac{U_0}{d}y - \dfrac{U_0}{b}y & (0 \le y \le d) \\ U_0 - \dfrac{U_0}{b}y & (d \le y \le b) \end{cases}$$

根据条件①和②，可设 $\varphi_2(x,y)$ 的通解为

$$\varphi_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi y}{b})e^{-\frac{n\pi}{b}|x|}$$

由条件③有

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \begin{cases} \dfrac{U_0}{d} y - \dfrac{U_0}{b} y & (0 \le y \le d) \\ U_0 - \dfrac{U_0}{b} y & (d \le y \le b) \end{cases}$$

两边同乘以 $\sin(n\pi y/b)$ ，并从 0 到 b 对 y 积分，得到

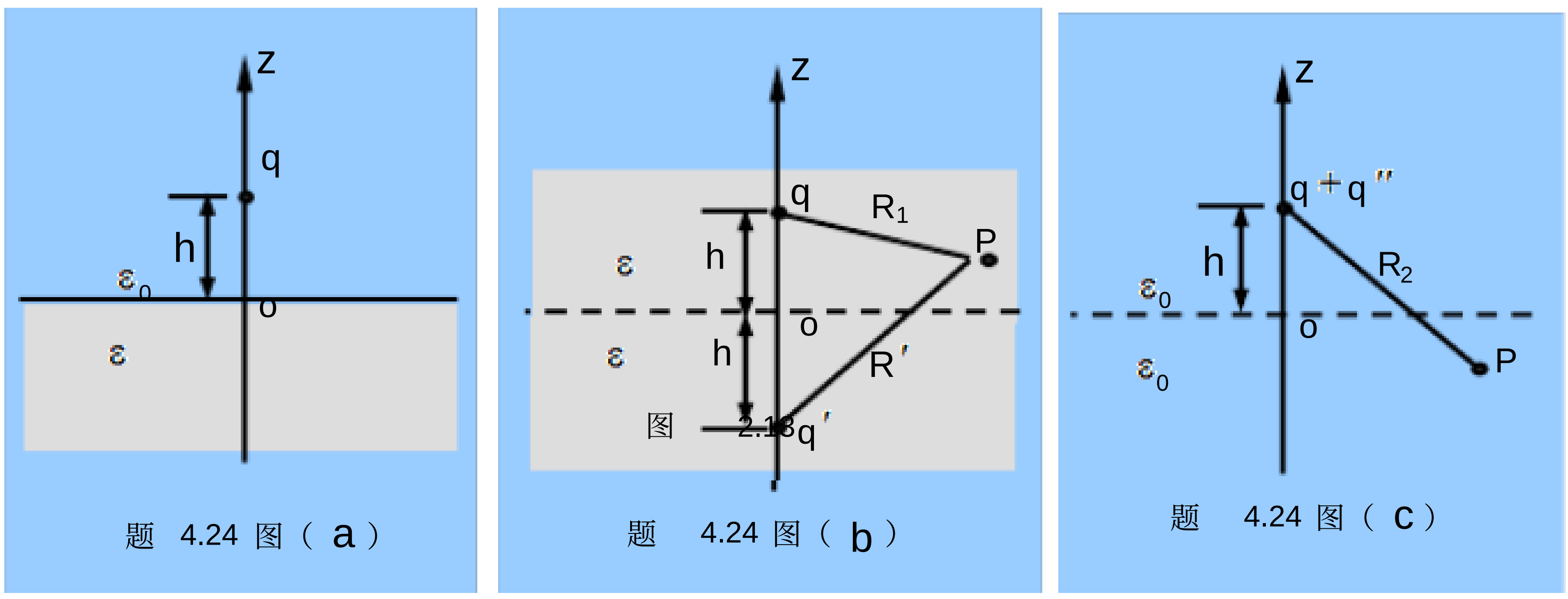
$$A_n = \frac{2U_0}{b}\int_0^d \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right) y \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy + \frac{2U_0}{b}\int_d^b \left(1 - \frac{y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

$$= \frac{2U_0}{(n\pi)^2}\frac{b}{d}\sin\left(\frac{n\pi d}{b}\right)$$

故得到

$$\varphi(x, y) = \frac{U_0}{b} y + \frac{2bU_0}{d\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi d}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\frac{n\pi}{b}|x|}$$

1. 如题（a）图所示，在 $z < 0$ 的下半空间是介电常数为 ε 的介质，上半空间为空气，距离介质平面距为 h 处有一点电荷 q。求（1） $z > 0$ 和 $z < 0$ 的两个半空间内的电位；（2）介质表面上的极化电荷密度，并证明表面上极化电荷总电量等于镜像电荷 q'。



题 4.24 图（a） 题 4.24 图（b） 题 4.24 图（c）

2. 解 （1）在点电荷 q 的电场作用下，介质分界面上出现极化电荷，利用镜像电荷替代介质分界面上的极化电荷。根据镜像法可知，镜像电荷分布为（如题图（b）、（c）所示）

$$q' = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} q, \quad \text{位于} \quad z = -h$$

$$q'' = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} q, \quad \text{位于} \quad z = h$$

上半空间内的电位由点电荷q和镜像电荷q′共同产生，即

$$\varphi_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R'}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}}-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+(z+h)^2}}\right\}$$

下半空间内的电位由点电荷q和镜像电荷q″共同产生，即

$$\varphi_2=\frac{q+q''}{4\pi\varepsilon R_2}=\frac{q}{2\pi(\varepsilon+\varepsilon_0)}\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}}$$

（2）由于分界面上无自由电荷分布，故极化电荷面密度为

$$\sigma_p=\mathbf{n}\bullet(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2)\big|_{z=0}=\varepsilon_0(E_{1z}-E_{2z})\big|_{z=0}$$

$$=\varepsilon_0\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0}=-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)hq}{2\pi(\varepsilon+\varepsilon_0)(r^2+h^2)^{3/2}}$$

极化电荷总电量为

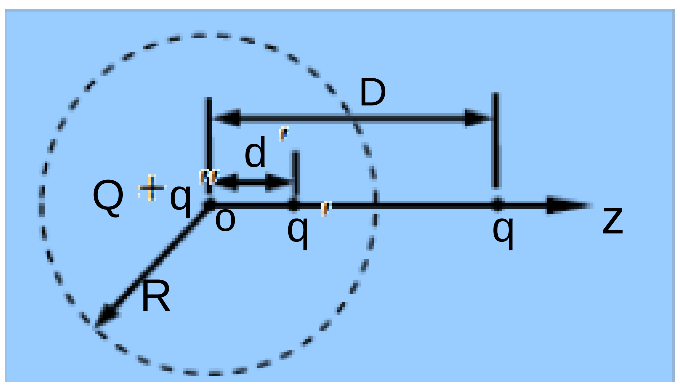
$$q_P=\int_S\sigma_P dS=\int_0^\infty\sigma_P 2\pi r dr=-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)hq}{\varepsilon+\varepsilon_0}\int_0^\infty\frac{r}{(r^2+h^2)^{3/2}}dr$$

$$=-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)q}{\varepsilon+\varepsilon_0}=q'$$

1. 一个半径为R的导体球带有电荷量为Q，在球体外距离球心为D处有一个点电荷q。(1) 求点电荷q与导体球之间的静电力；(2) 证明当q与Q同号，且

$$\frac{Q}{q}<\frac{RD^3}{(D^2-R^2)^2}-\frac{R}{D}$$

成立时，F 表现为吸引力。



2. 解 （1）导体球上除带有电荷量Q之外，点电荷q还要在导体球上感应出等量异号的两种不同电荷。根据镜像法，像电荷q′和q″的大小和位置分别为（如题图所示）

$$q' = -\frac{R}{D}q, \quad d' = \frac{R^2}{D}$$

$$q'' = -q' = \frac{R}{D}q, \quad d'' = 0$$

导体球自身所带的电荷Q 则与位于球心的点电荷Q 等效。故点电荷q 受到的静电力为

$$F = F_{q'\to q} + F_{q''\to q} + F_{Q\to q}$$
$$= \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0(D-d')^2} + \frac{q(D+q'')}{4\pi\varepsilon_0 D^2}$$

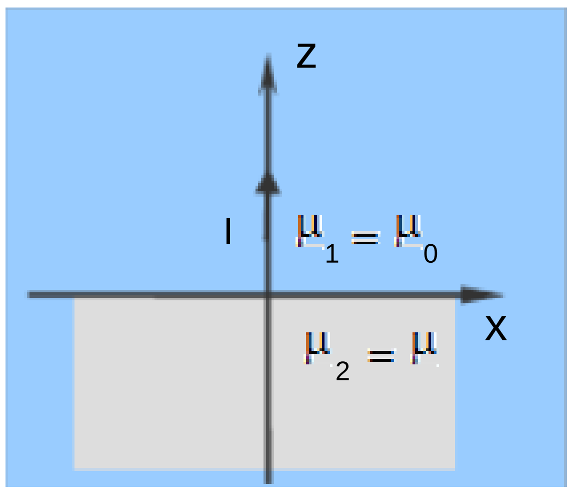
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q+(R/D)q}{D^2} - \frac{Rq}{D\left[D-(R/D)^2\right]^2}\right\}$$

（2）当q 与Q 同号，且F 表现为吸引力，即$F<0$时，则应有

$$\frac{Q+(R/D)q}{D^2} - \frac{Rq}{D\left[D-(R/D)^2\right]^2} < 0$$

由此可得出

$$\frac{Q}{q} < \frac{RD^3}{(D^2-R^2)^2} - \frac{R}{D}$$



1. 如题 5.8 所示图，无限长直线电流 I 垂直于磁导率分别为μ_1和μ_2的两种磁介质的分界面，试求（1）两种磁介质中的磁感应强度$\mathbf{B}_1$和$\mathbf{B}_2$；(2）磁化电流分布。

2. 解 （1）由安培环路定理，可得

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi\frac{I}{2\pi r}$$

所以得到

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0\mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu\mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi\frac{\mu I}{2\pi r}$$

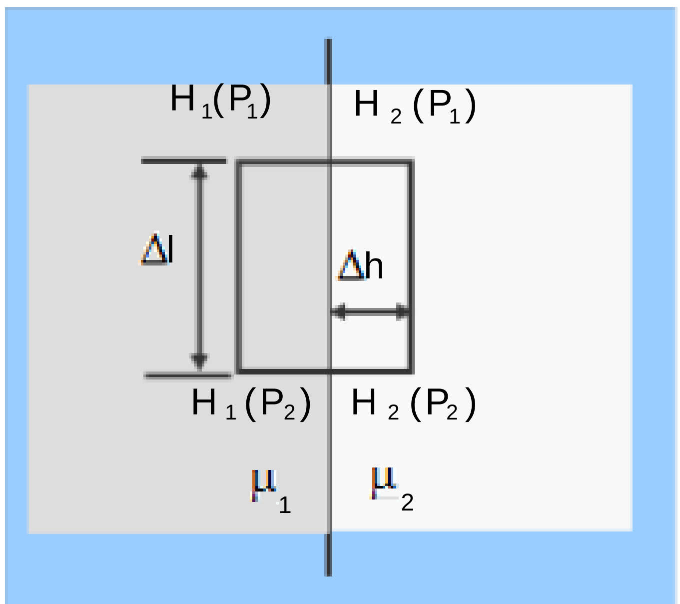
（2）磁介质在的磁化强度

$$\mathbf{M}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_2-\mathbf{H}=\mathbf{e}_\phi\frac{(\mu-\mu_0)I}{2\pi\mu_0 r}$$

则磁化电流体密度

$$\mathbf{J}_m=\nabla\times\mathbf{M}=\mathbf{e}_z\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rM_\phi)=\mathbf{e}_z\frac{(\mu-\mu_0)I}{2\pi\mu_0}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{1}{r})=0$$

在 $r=0$ 处，$\mathbf{B}_2$ 具有奇异性，所以在磁介质中 $r=0$ 处存在磁化线电流 I_m。以 z 轴为中心、r 为半径作一个圆形回路 C，由安培环路定理，有



题 5.9 图

$$I+I_m=\frac{1}{\mu_0}\oint_C\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}=\frac{\mu I}{\mu_0}$$

故得到

$$I_m=(\frac{\mu}{\mu_0}-1)I$$

在磁介质的表面上，磁化电流面密度为

$$\mathbf{J}_{mS}=\mathbf{M}\ ?\ \mathbf{e}_z\big|_{z=0}\quad \mathbf{e}_r\frac{(\mu-\mu_0)I}{2\pi\mu_0 r}$$

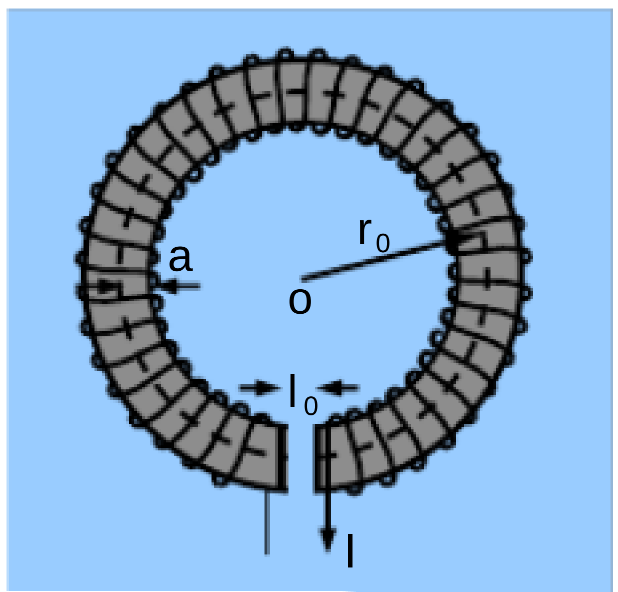
1. 如题图所示，一环形螺线管的平均半径 $r_0=15$ cm，其圆形截面的半径 $a=2$ cm，铁芯的相对磁导率 $\mu_r=1400$，环上绕 $N=1000$ 匝线圈，通过电流 $I=0.7$ A。

（1）计算螺旋管的电感；

（2）在铁芯上开一个 $l_0=0.1$cm 的空气隙，再计算电感。（假设开口后铁芯的 μ_r 不变）

（3）求空气隙和铁芯内的磁场能量的比值。

2. 解 （1）由于 $a\ll r_0$，可认为圆形截面上的磁场是均匀的，且等于截面的中心处的磁场。由安培环路定律，可得螺线管内的磁场为



.2 图

$$H=\frac{NI}{2\pi r_0}$$

与螺线管铰链的磁链为

$$\Psi=NS\mu H=\frac{\mu a^2N^2I}{2r_0}$$

故螺线管的电感为

$$L=\frac{\Psi}{I}=\frac{\mu a^2N^2}{2r_0}$$

$$=\frac{1400\times4\pi\times10^{-7}\times0.02^2\times1000^2}{2\times0.15}$$

$$=2.346\ \ \mathrm{H}$$

（2）当铁芯上开有小空气隙时，由于可隙很小，可忽略边缘效应，则在空气隙与铁芯的分界面上，磁场只有法向分量。根据边界条件，有 $B_0=B_\mu=B$，但空气隙中的磁场强度 H_0 与铁芯中的磁场强度 H_μ 不同。根据安培环路定律，有

$$H_0l_0+H_\mu(2\pi r_0-l_0)=NI$$

又由于 $B_0=\mu_0H_0$、$B_\mu=\mu_0\mu_rH_\mu$ 及 $B_0=B_\mu=B$，于是可得

$$B=\frac{\mu_0\mu_rNI}{\mu_rl_0+(2\pi r_0-l_0)}$$

所以螺线管内的磁链为

$$\Psi=NSB=\frac{\pi\mu_0\mu_ra^2N^2I}{\mu_rl_0+(2\pi r_0-l_0)}$$

故螺线管的电感为

$$L=\frac{\Psi}{I}=\frac{\pi\mu_0\mu_ra^2N^2}{\mu_rl_0+(2\pi r_0-l_0)}$$

$$=\frac{4\pi^2\times10^{-7}\times1400\times0.02^2\times1000^2}{1400\times0.001+2\times\pi\times0.15-0.001}=0.944\ \ \mathrm{H}$$

（3）空气隙中的磁场能量为

$$W_{m0}=\frac{1}{2}\mu_0H_0^2Sl_0$$

铁芯中的磁场能量为

$$W_{m\mu}=\frac{1}{2}\mu_0\mu_rH_\mu^2S(2\pi r_0-l_0)$$

故

$$\frac{W_{m0}}{W_{m\mu}}=\frac{\mu_r l_0}{2\pi r_0-l_0}=\frac{1400\times 0.001}{2\pi\times 0.15-0.001}=1.487$$

1. 一根半径为a的长圆柱形介质棒放入均匀磁场 $\mathbf{B}=\mathbf{e}_z B_0$ 中与 z轴平行。设棒以角速度 ω 绕轴作等速旋转，求介质内的极化强度、体积内和表面上单位长度的极化电荷。

2. 解　介质棒内距轴线距离为 r 处的感应电场为

$$\mathbf{E}=\mathbf{v}\times\mathbf{B}=\mathbf{e}_\phi r\omega\times\mathbf{e}_z\mathbf{B}_0=\mathbf{e}_r r\omega B_0$$

故介质棒内的极化强度为

$$\mathbf{P}=X_e\varepsilon_0\mathbf{E}=\mathbf{e}_r(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 r\omega B_0=\mathbf{e}_r(\varepsilon-\varepsilon_0)r\omega B_0$$

极化电荷体密度为

$$\rho_P=-\nabla\cdot\mathbf{P}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP)=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2\omega B_0$$
$$=-2(\varepsilon-\varepsilon_0)\omega B_0$$

极化电荷面密度为

$$\sigma_P=\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{e}_r(\varepsilon-\varepsilon_0)r\omega\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{e}_r\big|_{r=a}=(\varepsilon-\varepsilon_0)a\omega B_0$$

则介质体积内和表面上同单位长度的极化电荷分别为

$$Q_P=\pi a^2\times 1\times\rho_P=-2\pi a^2(\varepsilon-\varepsilon_0)\omega B_0$$
$$Q_{PS}=2\pi a\times 1\times\sigma_P=2\pi a^2(\varepsilon-\varepsilon_0)\omega B_0$$

1. 一圆柱形电容器，内导体半径为 a，外导体内半径为 b，长为 l。设外加电压为 $U_0\sin\omega t$，试计算电容器极板间的总位移电流，证明它等于电容器的传导电流。

2. 解　当外加电压的频率不是很高时，圆柱形电容器两极板间的电场分布与外加直流电压时的电场分布可视为相同（准静态电场），即

$$\mathbf{E}=\mathbf{e}_r\frac{U_0\sin\omega t}{r\ln(b/a)}$$

故电容器两极板间的位移电流密度为

$$\mathbf{J}_d=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\mathbf{e}_r\varepsilon\omega\frac{U_0\cos\omega t}{r\ln(b/a)}$$

则

$$i_d=\int_S\mathbf{J}_d\cdot d\mathbf{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^{l}\frac{\varepsilon\omega U_0\cos\omega t}{r\ln(b/a)}\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_r r d\phi dz$$

$$=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(b/a)}\omega U_0\cos\omega t=C\omega U_0\cos\omega t$$

式中，$C=\dfrac{2\pi\varepsilon l}{\ln(b/a)}$ 是长为 l 的圆柱形电容器的电容。

流过电容器的传导电流为

$$i_c=C\frac{dU}{dt}=C\omega U_0\cos\omega t$$

可见

$$i_d=i_c$$

1. 已知在空气中 $\mathbf{E}=\mathbf{e}_y 0.1\sin 10\pi x\cos(6\pi\times10^9 t-\beta z)$，求 **H** 和 β。

(提示将 **E** 代入直角坐标中的波方程，可求得 β。)

2. 解　电场 **E** 应满足波动方程

$$\nabla^2\mathbf{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0$$

将已知的 $\mathbf{E}=\mathbf{e}_y E_y$ 代入方程，得

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}=0$$

式中

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}=-0.1(10\pi)^2\sin 10\pi x\cos(6\pi\times10^9 t-\beta z)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}=0.1\sin 10\pi x[-\beta^2\cos(6\pi\times10^9 t-\beta z)]$$

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}=0.1\mu_0\varepsilon_0\sin 10\pi x[-(6\pi\times10^9)^2\cos(6\pi\times10^9 t-\beta z)]$$

故得

$$-(10\pi)^2-\beta^2+\mu_0\varepsilon_0(6\pi\times10^9)^2=0$$

则

$$\beta=\pi\sqrt{300}=54.41\text{rad/m}$$

由

$$\nabla\times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

得

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0}\nabla\times \mathbf{E} = -\frac{1}{\mu_0}[-\mathbf{e}_x \frac{\partial E_y}{\partial z} + \mathbf{e}_z \frac{\partial E_y}{\partial x}]$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}[-\mathbf{e}_x 0.1\beta \sin 10\pi x \sin(6\pi\times 10^9 t - \beta z)$$

$$+\mathbf{e}_z 0.1\times 10\pi \cos 10\pi x \cos(6\pi\times 10^9 t - \beta z)]$$

将上式对时间 t 积分，得

$$H = -\frac{1}{\mu_0\times 6\pi\times 10^9}[\mathbf{e}_x 0.1\beta \sin 10\pi x \cos(6\pi\times 10^9 t - \beta z]$$

$$+\mathbf{e}_z \pi \cos 10\pi x \sin(6\pi\times 10^9 t - \beta z)$$

$$= -\mathbf{e}_x 2.3\times 10^{-4} \sin 10\pi x \cos(6\pi\times 10^9 t - 54.41z)$$

$$-\mathbf{e}_z 1.33\times 10^{-4} \cos 10\pi x \sin(6\pi\times 10^9 t - 54.41z)\text{A/m}$$

1. 在自由空间中，已知电场 $\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{e}_y 10^3 \sin(\omega t - \beta z)$ V/m，试求磁场强度 $\mathbf{H}(z,t)$。

2. 解　以余弦为基准，重新写出已知的电场表示式

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{e}_y 10^3 \cos(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2})\ \text{V/m}$$

这是一个沿+z 方向传播的均匀平面波的电场，其初相角为 -90°。与之相伴的磁场为

$$\mathbf{H}(z,t) = \frac{1}{\eta_0}\mathbf{e}_z\times \mathbf{E}(z,t) = \frac{1}{\eta_0}\mathbf{e}_z\times \mathbf{e}_y 10^3 \cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\mathbf{e}_x \frac{10^3}{120\pi}\cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2}\right) = -\mathbf{e}_x 2.65\sin(\omega t - \beta z)\ \text{A/m}$$

1. 均匀平面波的磁场强度 **H** 的振幅为 $\frac{1}{3\pi}$ A/m，以相位常数 30rad/m在空气中沿 $-\mathbf{e}_z$ 方向传播。当 t=0 和 z=0 时，若 **H** 的取向为 $-\mathbf{e}_y$，试写出 **E** 和 **H** 的表示式，并求出波的频率和波长。

2. 解　以余弦为基准，按题意先写出磁场表示式

$$\mathbf{H} = -\mathbf{e}_y \frac{1}{3\pi}\cos(\omega t + \beta z)\ \text{A/m}$$

与之相伴的电场为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \eta_0[\mathbf{H} \times (-\mathbf{e}_z)] = 120\pi[-\mathbf{e}_y \frac{1}{3\pi}\cos(\omega t + \beta z) \times (-\mathbf{e}_z)] \\ &= \mathbf{e}_x 40\cos(\omega t + \beta z)\ \text{V/m} \end{aligned}$$

由 $\beta = 30\text{rad/m}$ 得波长 λ 和频率 f 分别为

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 0.21\text{m}$$

$$f = \frac{v_p}{\lambda} = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times 10^8}{0.21}\text{Hz} = 1.43\times 10^9\ \text{Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 1.43\times 10^9\ \text{rad/s} = 9\times 10^9\ \text{rad/s}$$

则磁场和电场分别为

$$\mathbf{H} = -\mathbf{e}_y \frac{1}{3\pi}\cos(9\times 10^9 t + 30z)\ \text{A/m}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 40\cos(9\times 10^9 t + 30z)\text{V /m}$$

1. 海水的电导率 $\gamma = 4\text{S/m}$，相对介电常数 $\varepsilon_r = 81$。求频率为 10kHz、100kHz、1MHz、10MHz、100MHz、1GHz 的电磁波在海水中的波长、衰减系数和波阻抗。

2. 解　先判定海水在各频率下的属性

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} = \frac{\gamma}{2\pi f \varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{4}{2\pi f \times 81\varepsilon_0} = \frac{8.8\times 10^8}{f}$$

可见，当 $f \le 10^7\text{Hz}$ 时，满足 $\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \gg 1$，海水可视为良导体。此时

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\pi f \mu_0 \gamma}$$

$$\eta_c \approx (1+j)\sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\gamma}}$$

f=10kHz时

$$\alpha = \sqrt{\pi \times 10\times 10^3 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4} = 0.126\pi = 0.396\ \text{Np/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0.126\pi} = 15.87\,\text{m}$$

$$\eta_c = (1+j)\sqrt{\frac{\pi \times 10\times 10^3 \times 4\pi \times 10^{-7}}{4}}\Omega = 0.099(1+j)\Omega$$

f=100kHz时

$$\alpha = \sqrt{\pi \times 100 \times 10^{3} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4} = 1.26\pi \ \text{Np/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{1.26\pi} = 5\,\text{m}$$

$$\eta_c = (1+j)\sqrt{\frac{\pi \times 100 \times 10^{3} \times 4\pi \times 10^{-7}}{4}} = 0.314(1+j)\Omega$$

f=1MHz 时

$$\alpha = \sqrt{\pi \times 10^{6} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4} = 3.96\text{Np/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{3.96\pi} = 1.587\text{m}$$

$$\eta_c = (1+j)\sqrt{\frac{\pi \times 10^{6} \times 4\pi \times 10^{-7}}{4}} = 0.99(1+j)\Omega$$

f=10MHz 时

$$\alpha = \sqrt{\pi \times 10 \times 10^{6} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4} = 12.6\text{Np/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{12.6} = 0.5\text{m}$$

$$\eta_c = (1+j)\sqrt{\frac{\pi \times 10 \times 10^{6} \times 4\pi \times 10^{-7}}{4}} = 3.14(1+j)\Omega$$

当 f=100MHz 以上时，$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \gg 1$ 不再满足，海水属一般有损耗媒质。此时，

$$\alpha = 2\pi f\sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{2\pi f\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)^2}-1\right]}$$

$$\beta = 2\pi f\sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{2\pi f\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)^2}+1\right]}$$

$$\eta_0 = \frac{\sqrt{\mu_0/(\varepsilon_r\varepsilon_0)}}{\sqrt{1-j\,\gamma/(2\pi f\varepsilon_r\varepsilon_0)}}$$

f=100MHz时

$$\alpha = 37.57\text{Np/m}$$

$$\beta = 42.1\text{rad/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 0.149\text{m}$$

$$\eta_c = \frac{42}{\sqrt{1-j8.9}}\Omega = 14.05e^{j41.8^\circ}\Omega$$

f=1GHz时

$$\alpha = 69.12\text{Np/m}$$

$$\beta = 203.58\text{rad/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 0.03\text{m}$$

$$\eta_0 = \frac{42}{\sqrt{1 - j0.89}}\Omega = 36.5e^{j20.8^\circ}\Omega$$

1. 有一线极化的均匀平面波在海水($\varepsilon_r = 80, \mu_r = 1, \gamma = 4S/m$)中沿+y 方向传播，其磁场强度在 y=0 处为

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_x 0.1\sin(10^{10}\pi t - \pi/3)A/m$$

（1）求衰减常数、相位常数、本征阻抗、相速、波长及透入深度；（2）求出 **H** 的振幅为 0.01A/m时的位置；（3）写出 **E**(y,t)和 **H**(y,t)的表示式。

2. 解 （1） $\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} = \frac{4}{10^{10}\pi \times 80\varepsilon_0} = \frac{4\times 36\pi}{10^{10}\pi \times 80 \times 10^{-9}} = 0.18$

可见，在角频率 $\omega = 10^{10}\pi$ 时，海水为一般有损耗媒质，故

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon})^2} - 1\right]}$$

$$= 10^{10}\pi\sqrt{\frac{80\mu_0\varepsilon_0}{2}[\sqrt{1+0.18^2} - 1]} = 83.9\ \text{Np/m}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon})^2} + 1\right]}$$

$$= 10^{10}\pi\sqrt{\frac{80\mu_0\varepsilon_0}{2}[\sqrt{1+0.18^2} + 1]} \approx 300\pi\ \text{rad/m}$$

$$\eta_c = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{1 - j\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{80\varepsilon_0}}}{\sqrt{1 - j0.18}}$$

$$= \frac{42.15}{1.008e^{-j0.028\pi}} = 41.82e^{j0.028\pi}\Omega$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{10^{10}\pi}{300\pi} = 0.333\times 10^8\text{m/s}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{300\pi} = 6.67\times 10^{-3}\text{m}$$

$$\delta_c = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{83.9} = 11.92\times 10^{-3}\text{m}$$

（2）由 $0.01 = 0.1e^{-\alpha y}$ 即 $e^{-\alpha y} = 0.1$ 得

$$y=\frac{1}{\alpha}\ln 10=\frac{1}{83.9}\times 2.303\text{m}=27.4\times 10^{-3}\text{m}$$

(3) $$\mathbf{H}(y,t)=\mathbf{e}_x 0.1e^{-83.9y}\sin(10^{10}\pi t-300\pi y-\frac{\pi}{3})\text{A/m}$$

其复数形式为

$$\mathbf{H}(y)=\mathbf{e}_x 0.1e^{-83.9y}e^{-j300\pi y}e^{-j\frac{\pi}{3}}\text{A/m}$$

故电场的复数表示式为

$$\mathbf{E}(y)=\eta_c\mathbf{H}(y)\times\mathbf{e}_y=41.82e^{j0.028\pi}\times 0.1e^{-83.9y}\times e^{-j(300\pi y+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})}\mathbf{e}_x\times\mathbf{e}_y$$
$$=\mathbf{e}_z 4.182e^{-83.9y}e^{-j(300\pi y+\frac{\pi}{3}-0.028\pi+\frac{\pi}{2})}\quad\text{V/m}$$

则

$$\mathbf{E}(y,t)=\text{Re}[\mathbf{E}(y)e^{j\omega t}]$$
$$=\mathbf{e}_z 4.182e^{-83.9y}\sin(10^{10}\pi t-300\pi y-\frac{\pi}{3}+0.028\pi)\text{V/m}$$

1. 为了在垂直于赫兹偶极子轴线的方向上，距离偶极子 100km处得到电场强度的有效值大于 $100\mu\text{V/m}$，赫兹偶极子必须至少辐射多大功率？

2. 解 赫兹偶极子的辐射场为

$$E_\theta=j\frac{Idl}{2\lambda r}\frac{k}{\omega\varepsilon}e^{-jkr}\sin\theta$$

当 $\theta=90^0$，电场强度达到最大值为

$$\left|E_{90^0}\right|=\frac{Idl}{2\lambda r}\frac{k}{\omega\varepsilon}=\eta\frac{Idl}{2\lambda r}$$

于是

$$\frac{Idl}{\lambda}=\frac{2r\left|E_{90^0}\right|}{\eta}$$

将 $r=1\times 10^5\text{m},\left|E_{90^0}\right|\geq\sqrt{2}\times 10^{-4}\text{V/m}$ 代入上式，得