一、填空题（ 30 分，3 分 / 空）

1. XOY 平面是两种电介质的分界面，分界面上方电位移矢量为 $\bar{D}_1 = 25\varepsilon_0\bar{e}_x + 50\varepsilon_0\bar{e}_y + 25\varepsilon_0\bar{e}_z$ C/m^2，相对介电常数为 2，分界面下方相对介电常数为 5，则分界面下方 z 方向电场强度为 __________，分界面下方 z 方向的电位移矢量为 ______________。

2. 静电场中电场强度 $\bar{E} = 2\bar{e}_x + 3\bar{e}_y + 4\bar{e}_z$，则电位 φ 沿 $\bar{l} = \frac{1}{3}\bar{e}_x + \frac{2}{3}\bar{e}_y + \frac{2}{3}\bar{e}_z$ 的方向导数为 ________________，点 A（1，2，3）和 B（2，2，3）之间的电位差 U_{AB} = ________________。

3. 两个电容器 C_1 和 C_2 各充以电荷 Q_1 和 Q_2，且两电容器电压不相等，移去电源后将两电容器并联，总的电容器储存能量为 __________，并联前后能量是否变化 __________。

4. 一无限长矩形接地导体槽，在导体槽中心位置有一电位为 U 的无限长圆柱导体，如图 1 所示。由于对称性，矩形槽与圆柱导体所围区域内电场分布的计算可归结为图中边界 Γ_1、Γ_2、Γ_3、Γ_4 和 Γ_5 所围区域 Ω 内的电场计算。则在边界 _____________ 上满足第一类边界条件，在边界 _____________ 上满足第二类边界条件。

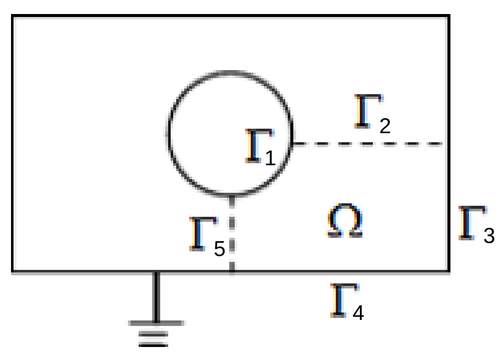

图 1

5. 导体球壳内半径为 a，外半径为 b，球壳外距球心 d 处有一点电荷 q，若导体球壳接地，则球壳内表面的感应电荷总量为 ____________，球壳外表面的感应电荷总量为 ____________。

二、计算题

1. 如图 2 所示，内、外两个半径分别为 a、b 的同心球面电极组成的电容器，极板间绝缘介质的介电常数为 ε，内、外电极上的电荷分别为± Q，试求：

（1）绝缘介质中的电场强度；（5 分）

（2）电容器储存的静电场能量；（5 分）

（3）内电极单位面积受到的膨胀力和外电极单位面积受到的收缩力。（10 分）

2. 如图 3 所示，真空中一点电荷 q 置于金属球壳内，距球心距离为 b，球壳半径为 a，球壳电位为 U_0，写出球内任一点的电位表达式。（10 分）

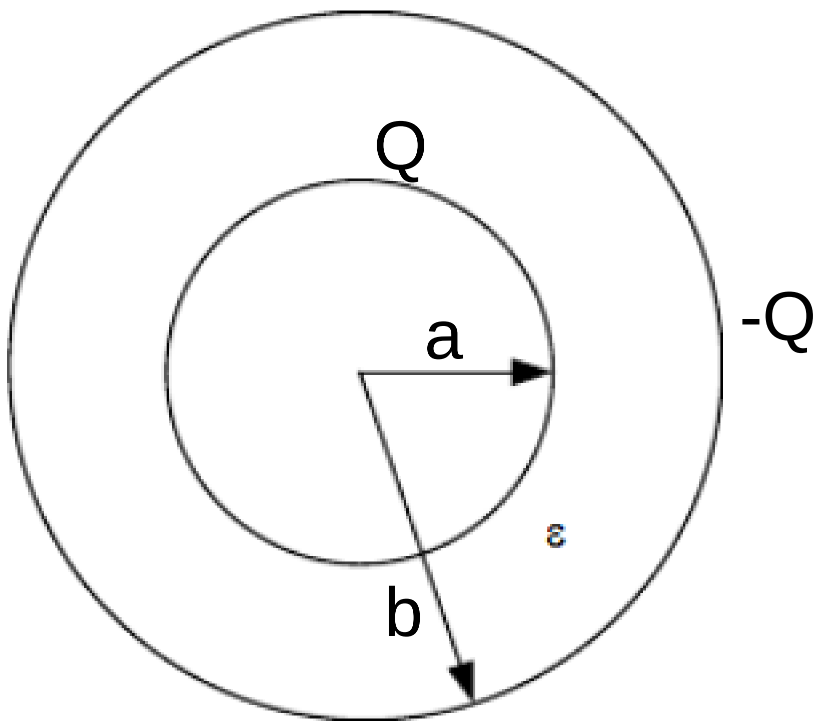

图 2

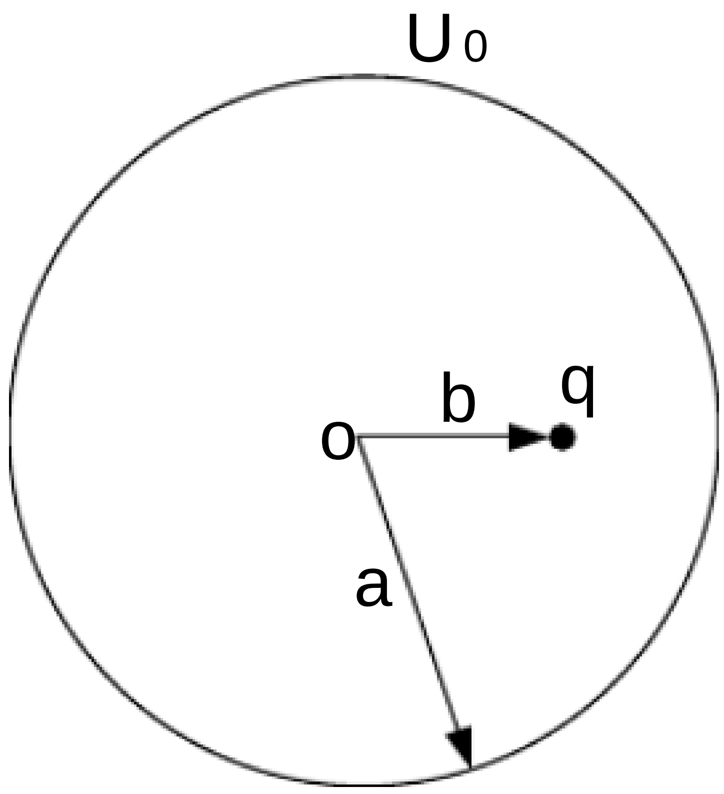

图 3

3. 如图 4所示平板电容器，内含两层介质，介质的介电常数和电导率分别为 ε_1、γ_1 和 ε_2、γ_2，极板面积为 S，介质的厚度均为 d 。在电容器上施加电压 U_0，忽略极板的边缘效应。试求：

（1）两层介质承受的电压 U_1、U_2 ；（5分）

（2）介质分界面上的自由电荷面密度；（5分）

（3）按照图中的坐标轴，写出恒定电流场电位函数 φ 的边值问题（包括泛定方程、边界条件和分界面条件）。（10 分）

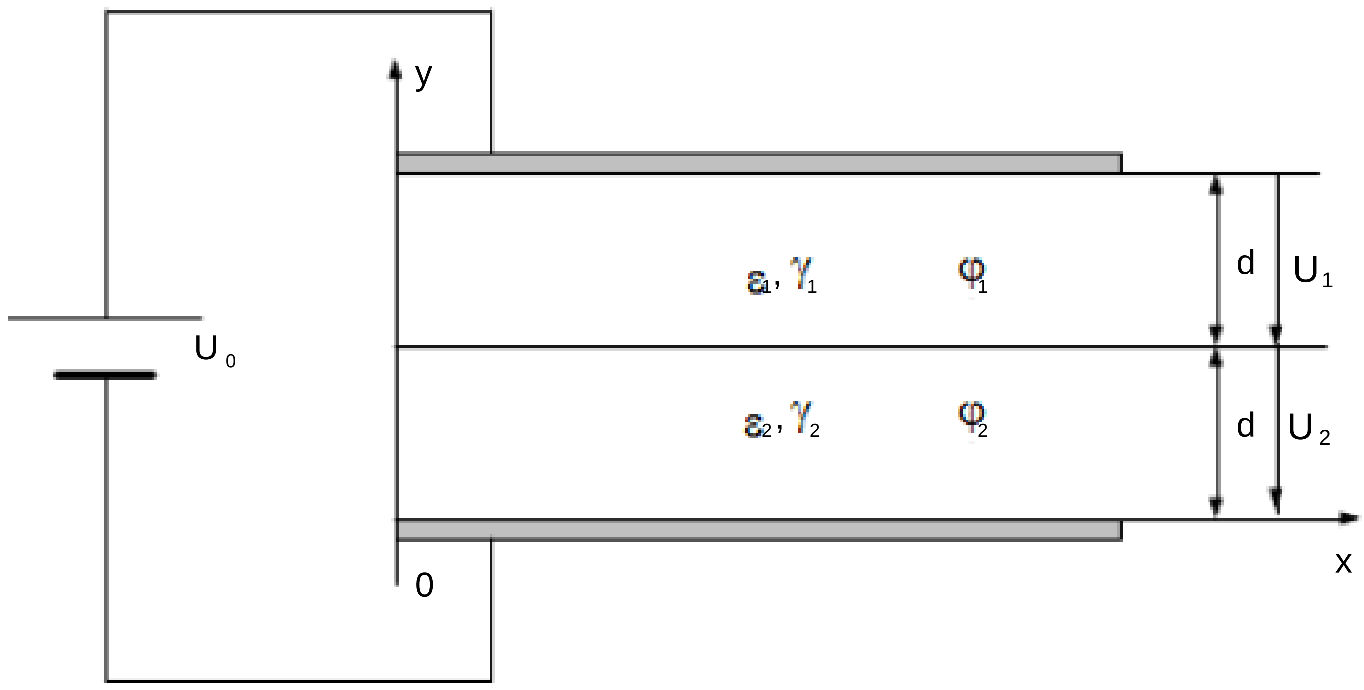

图4

4. 如图5（a）所示，设金属板电荷量为 q_1，极板面积为 S，介质为空气，忽略金属板的边缘效应，试求各个区域的电场强度。如图 5（b）所示，金属板电荷量分别为 q_1、q_2……. q_n，极板面积均为 S，试求各个区域的电场强度。（20分）

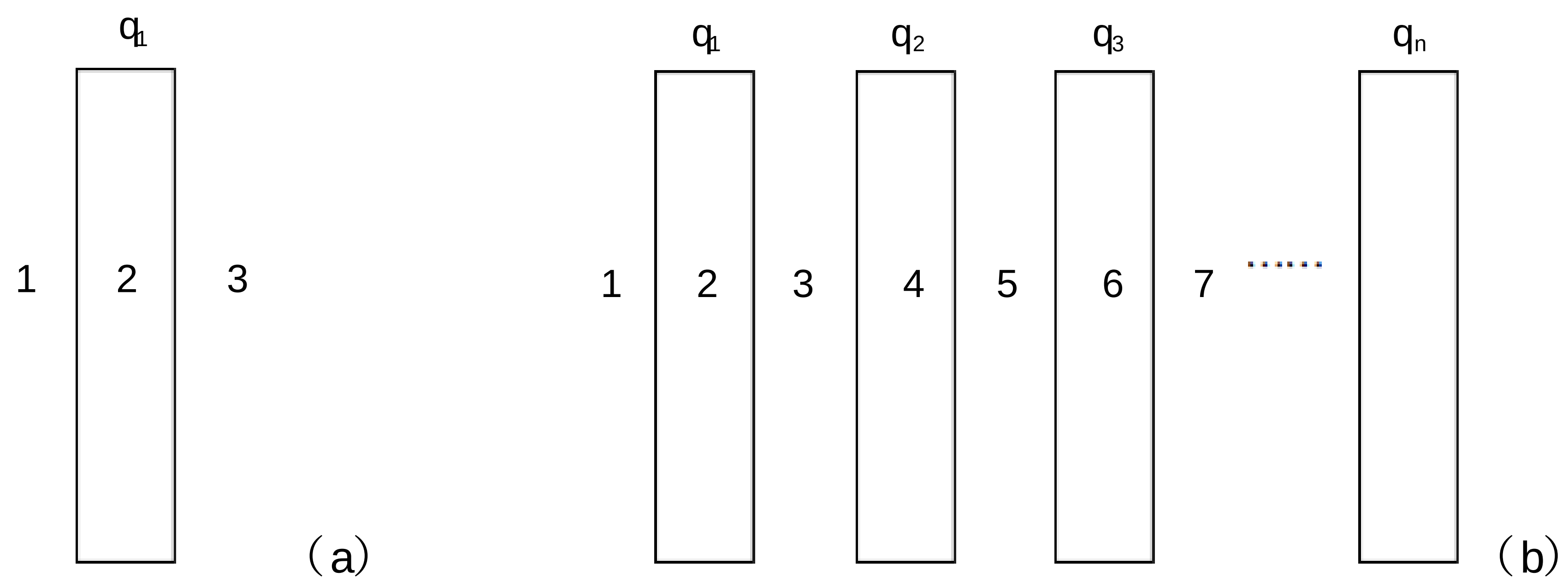

图 5

三、工程电磁场课程建议（附加分 10 分）

填空题：

1. $5\vec{e}_z V/m$　　$25\varepsilon_0 \vec{e}_z C/m^2$

2. $-\dfrac{16}{3}$　　2

3. $\dfrac{(Q_1+Q_2)^2}{2(C_1+C_2)}$　　变化（变小）

4. $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4$　　Γ_2, Γ_5

5. 0　　$-\dfrac{b}{d}q$

计算题

1. (1)因场分布的对称性，取半径为 r 的球面作为高斯面，有

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r \qquad (a \le r \le b)$$

(2) 电容器储存能量 $W_e = \dfrac{1}{2}UQ$

$$U = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

(3)沿半径方向在所求电极处截取一段电位移管，则单位面积上的电场力为 $F = \dfrac{1}{2}DE = \dfrac{1}{2}\varepsilon E^2$，因此：

内电极：$\vec{F} = \dfrac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon a^4}\vec{e}_r$（方向为半径增大的方向）

外电极：$\vec{F} = -\dfrac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon b^4}\vec{e}_r$（方向为半径减小的方向）

2. 对于导体球，电荷均匀分布在导体球面，导体为等势体，设导体球零电位时，镜像电荷为 $-q'$，其中，$q' = \dfrac{a}{b}q$，最终，球内任

一点的电位由三部分激发，即点电荷、镜像电荷以及导体球表面

均匀分布的电荷，因此球内任意一点的电位为 $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \dfrac{\frac{a}{b}q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + U_0$

（r_1, r_2分别为点电荷与镜像电荷到场点的距离）

3. (1) $\gamma_1 E_1 = \gamma_2 E_2$　$E_1 d + E_2 d = U_0$　解得

$$E_1 = \frac{\gamma_2 U_0}{(\gamma_1 + \gamma_2)d}, E_2 = \frac{\gamma_1 U_0}{(\gamma_1 + \gamma_2)d}$$

各层介质间的电压分别为

$$U_1 = E_1 d = \frac{\gamma_2 U_0}{(\gamma_1 + \gamma_2)} \qquad U_2 = E_2 d = \frac{\gamma_1 U_0}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

(2) 介质分界面的自由电荷面密度为

$$\sigma = D_2 - D_1 = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_2 \gamma_1 - \varepsilon_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + \gamma_2)d} U_0$$

(3) 电位函数的边值问题：

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_1 = 0 & d < y < 2d \\ \nabla^2 \varphi_2 = 0 & 0 < y < d \\ \varphi_1 = U_0 & y = 2d \\ \varphi_2 = 0 & y = 0 \\ \varphi_1 = \varphi_2 & y = d \end{cases}$$

4. 取标号增大的方向为 x方向

(1) 导体内部场强处处为零；作穿过第二区域的高斯面，由于对

称性，可知 $\bar{E}_1, \bar{E}_3$大小相等方向相反，$\oint_s \bar{E} \cdot d\bar{S} = E_3 \Delta S + E_1 \Delta S = 2E\Delta S = \dfrac{2\sigma_1 \Delta S}{\varepsilon_0}$

其中，$\sigma_1 = \dfrac{q_1}{2S}$，代入上式有：

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = -\dfrac{q_1}{2\varepsilon_0 S}\vec{e}_x \\ \vec{E}_2 = \vec{0} \\ \vec{E}_3 = \dfrac{q_1}{2\varepsilon_0 S}\vec{e}_x \end{cases}$$

(2) 导体内部场强处处为零， 单个导体两侧的电荷密度不再对称分布，但是，相邻导体靠近两侧的电荷密度大小相等，符号相反，尽管这样放置后， 单个导体的电荷分布发生变化， 但是总的电荷量是守恒的。穿过所有导体做高斯面，有

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E_1\Delta S + E_{2n+1}\Delta S = \frac{\Delta S\sum_{i=1}^{n} q_i}{S\varepsilon_0} \qquad (1)$$

以第一个导体为例，导体内部场强为零，即

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_1 - \vec{E}_{2n+1} = \vec{0} \qquad (2)$$

联立上面两式便可求解 $\vec{E}_1, \vec{E}_{2n+1}$

对于第 $2i+1$ 区域，前 i 个导体表面电荷产生的场沿标号增大方向，剩余导体产生的场沿相反方向，设第 i 个导体左右两侧的电荷密度分别为 σ_i', σ_i''，则有 $q_i = (\sigma_i' + \sigma_i'')S$，且 $\sigma_i'' = -\sigma_{i+1}'$，便可解得各电荷面密度，根据叠加原理 $\vec{E}_{2i+1} = \sigma_i''\vec{e}_x$，最终：

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = -\dfrac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{2\varepsilon_0 S}\vec{e}_x, \quad \vec{E}_{2n+1} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{2\varepsilon_0 S}\vec{e}_x \\ \vec{E}_{2i} = \vec{0} \quad (i = 1,2\ldots,n) \\ \vec{E}_{2i+1} = \dfrac{\sum_{k=1}^{i} q_k - \sum_{k=i+1}^{n} q_k}{2\varepsilon_0 S}\vec{e}_x \quad (i = 1,2\ldots,n) \end{cases}$$