第一学期期末高等数学试卷

一、解答下列各题

(本大题共 16 小题，总计 80 分)

1、(本小题 5 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-12x+16}{2x^3-9x^2+12x-4}$

2、(本小题 5 分)

求 $\int\dfrac{x}{(1+x^2)^2}dx.$

3、(本小题 5 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\cdot\arcsin\dfrac{1}{x}$

4、(本小题 5 分)

求 $\int\dfrac{x}{1-x}dx.$

5、(本小题 5 分)

求 $\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt.$

6、(本小题 5 分)

求 $\int\cot^6 x\cdot\csc^4 x\,dx.$

7、(本小题 5 分)

求 $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}dx.$

8、(本小题 5 分)

设 $\begin{cases}x=e^t\cos t^2\\ y=e^{2t}\sin t\end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

9、(本小题 5 分)

求 $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx.$

10、(本小题 5 分)

求函数 $y=4+2x-x^2$ 的单调区间

11、(本小题 5 分)

求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{8+\sin^2 x}dx.$

12、(本小题 5 分)

设 $x(t)=e^{-kt}(3\cos\omega t+4\sin\omega t)$, 求 $dx.$

13、(本小题 5 分)

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^2+\ln y^2=x^6$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

14、(本小题 5 分)

求函数 $y=2e^x+e^{-x}$ 的极值

15、(本小题 5 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2+(2x+1)^2+(3x+1)^2+\cdots+(10x+1)^2}{(10x-1)(11x-1)}$

16、(本小题 5 分)

求 $\int\dfrac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}dx.$

二、解答下列各题

(本大题共 2 小题，总计 14 分)

1、(本小题 7 分)

某农场需建一个面积为 512平方米的矩形的晒谷场，一边可用原来的石条围沿，另三边需砌新石条围沿，问晒谷场的长和宽各为多少时，才能使材料最省.

2、(本小题 7 分)

求由曲线 $y=\frac{x^2}{2}$ 和 $y=\frac{x^3}{8}$ 所围成的平面图形绕 ox轴旋转所得的旋转体的体积.

三、解答下列各题

(本大题 6 分)

设 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$，证明 $f'(x)=0$ 有且仅有三个实根.

一学期期末高数考试 (答案)

一、解答下列各题

(本大题共 16 小题，总计 77 分)

1、(本小题 3 分)

$$\text{解:原式}=\lim_{x\to2}\frac{3x^2-12}{6x^2-18x+12}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{6x}{12x-18}$$

$$=2$$

2、(本小题 3 分)

$$\int\frac{x}{(1+x^2)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}+c.$$

3、(本小题 3 分)

$$\text{因为 }|\arctan x|<\frac{\pi}{2}\text{ 而 }\lim_{x\to\infty}\arcsin\frac{1}{x}=0$$

$$\text{故 }\lim_{x\to\infty}\arctan x\cdot\arcsin\frac{1}{x}=0$$

4、(本小题 3 分)

$$\int\frac{x}{1-x}dx$$

$$=-\int\frac{1-x-1}{1-x}dx$$

$$=-\int dx+\int\frac{dx}{1-x}$$

$$=-x-\ln|1-x|+c.$$

5、(本小题 3 分)

$$\text{原式}=2x\sqrt{1+x^4}$$

6、(本小题 4 分)

$$\int\cot^6x\cdot\csc^4x\,dx$$

$$=-\int\cot^6x(1+\cot^2x)d(\cot x)$$

$$= -\frac{1}{7}\cot^7 x - \frac{1}{9}\cot^9 x + c.$$

7、(本小题 4 分)

原式 $= -\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \cos\frac{1}{x}\, d(\frac{1}{x})$

$= -\sin\frac{1}{x}\Big|_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}$

$= -1$

8、(本小题 4 分)

解：$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2t}(2\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t^2 - 2t\sin t^2)}$

$= \frac{e^t(2\sin t + \cos t)}{(\cos t^2 - 2t\sin t^2)}$

9、(本小题 4 分)

令 $\sqrt{1+x} = u$

原式 $= 2\int_1^2 (u^4 - u^2)du$

$= 2(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3})\Big|_1^2$

$= \frac{116}{15}$

10、(本小题 5 分)

函数定义域 $(-\infty, +\infty)$

$y' = 2 - 2x = 2(1-x)$

当 $x = 1$, $y' = 0$

当 $x < 1$, $y' > 0$ 函数单调增区间为 $(-\infty, 1]$

当 $x > 1$, $y' < 0$ 函数的单调减区间为 $[1, +\infty)$

11、(本小题 5 分)

原式 $= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\cos x}{9 - \cos^2 x}$

$= -\frac{1}{6}\ln\frac{3+\cos x}{3-\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{6}\ln 2$

12、(本小题 6 分)

$dx = x'(t)dt$

$= e^{-kt}\left[(4\omega - 3k)\cos\omega t - (4k + 3\omega)\sin\omega t\right]dt$

13、(本小题 6 分)

$2yy' + \frac{2y'}{y} = 6x^5$

$y' = \frac{3yx^5}{y^2 + 1}$

14、(本小题 6 分)

定义域 $(-\infty, +\infty)$, 且连续

$y' = 2e^{-x}(e^{2x} - \frac{1}{2})$

驻点：$x=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$

由于$y''=2e^{x}+e^{-x}>0$

故函数有极小值 ,, $y(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2})=2\sqrt{2}$

15、(本小题 8 分)

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})^2+(2+\frac{1}{x})^2+(3+\frac{1}{x})^2+\cdots+(10+\frac{1}{x})^2}{(10-\frac{1}{x})(11-\frac{1}{x})}$$

$$=\frac{10\times11\times21}{6\times10\times11}$$

$$=\frac{7}{2}$$

16、(本小题 10 分)

$$解:\int\frac{\cos2x}{1+\sin x\cos x}dx=\int\frac{\cos2x}{1+\frac{1}{2}\sin2x}dx$$

$$=\int\frac{d(\frac{1}{2}\sin2x+1)}{1+\frac{1}{2}\sin2x}$$

$$=\ln\left|1+\frac{1}{2}\sin2x\right|+c$$

二、解答下列各题

(本大题共 2 小题，总计 13 分)

1、(本小题 5 分)

设晒谷场宽为 x,则长为 $\frac{512}{x}$ 米,新砌石条围沿的总长为

$L=2x+\frac{512}{x}\qquad(x>0)$

$L'=2-\frac{512}{x^2}$　　唯一驻点　　$x=16$

$L''=\frac{1024}{x^3}>0$　　即 $x=16$为极小值点

故晒谷场宽为 16米,长为 $\frac{512}{16}=32$米时,可使新砌石条围沿所用材料最省

2、(本小题 8 分)

解: $\frac{x^2}{2}=\frac{x^3}{8},8x^2=2x^3\quad x_1=0,x_1=4.$

$$V_x=\pi\int_0^4\left[(\frac{x^2}{2})^2-(\frac{x^3}{8})^2\right]dx=\pi\int_0^4(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{64})dx$$

$$=\pi(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{7}x^7)\Big|_0^4$$

$$=\pi4^4(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})=\frac{512}{35}\pi$$

三、解答下列各题

(本 大 题 10 分)

证明: $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续,可导,从而在$[0,3]$;连续,可导.

又 $f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=0$

则分别在 $[0,1],[1,2],[2,3]$ 上对 $f(x)$ 应用罗尔定理得，至少存在

$\xi_1\in(0,1),\xi_2\in(1,2),\xi_3\in(2,3)$ 使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$

即 $f'(x)=0$ 至少有三个实根，又 $f'(x)=0$, 是三次方程，它至多有三个实根，

由上述 $f'(x)$ 有且仅有三个实根

参考答案

一。填空题（每小题 **3** 分，本题共 **15** 分）

1、e^6 2、$k=1$． 3、$\dfrac{x}{1+x}$ 4、$y=1$ 5、$f(x)=2\cos 2x$

二．单项选择题（每小题 **3** 分，本题共 **15** 分）

1、D 2、B 3、C 4、B 5、A

三．计算题（本题共 **56** 分，每小题 **7** 分）

1.解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x(\sqrt{4+x}+2)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 2x(\sqrt{4+x}+2)}=\dfrac{1}{8}$

2.解：$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\dfrac{1}{2}$

3、解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_1^{\cos x}e^{-t^2}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin xe^{-\cos^2 x}}{2x}=-\dfrac{1}{2e}$

4、解：$y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}})\quad=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

5、解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{2t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{-\dfrac{1}{2t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{4t^3}$$

6、解：$\int\dfrac{1}{x^2}\sin(\dfrac{2}{x}+3)dx=-\dfrac{1}{2}\int\sin(\dfrac{2}{x}+3)d(\dfrac{2}{3}+3)=\dfrac{1}{2}\cos(\dfrac{2}{x}+3)+C$

7、解：$\int e^x\cos x dx=\int\cos x de^x$

$$= e^x\cos x + \int e^x \sin x dx \ = e^x \cos x + \int \sin x de^x$$

$$= e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$= e^x(\sin x + \cos x) + C$$

8、解： $\int_0^2 f(x-1)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \cdots$

$$= \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+e^x} + \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

$$= \int_{-1}^0 (1-\frac{e^x}{1+e^x})dx + \ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$= 1 - \ln(1+e^x)\Big|_{-1}^0 + \ln 2$$

$$= 1 + \ln(1+e^{-1}) = \ln(1+e)$$

四. 应用题（本题 **7** 分）

解：曲线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 的交点为（ 1，1），

于是曲线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 所围成图形的面积 A 为

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = [\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^2]_0^1 = \frac{1}{3}$$

A 绕 y 轴旋转所产生的旋转体的体积为：

$$V = \pi \int_0^1 \left((\sqrt{y})^2 - y^4\right)dy = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{10}\pi$$

五、证明题（本题 **7** 分）

证明： 设 $F(x) = f(x) - x$，

显然 $F(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续，在 $(\frac{1}{2},1)$ 内可导，

且 $F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} > 0$， $F(1) = -1 < 0$.

由零点定理知存在 $x_1 \in [\frac{1}{2},1]$，使 $F(x_1) = 0$.

由 $F(0) = 0$，在 $[0, x_1]$ 上应用罗尔 定理知，至少存在一点

$\xi \in (0, x_1) \subset (0,1)$，使 $F'(\xi) = f'(\xi) - 1 = 0$，即 $f'(\xi) = 1$ ⋯