同济大学课程考核试卷（A 卷）
2006—2007 学年第一学期

命题教师签名：　　　　　　　　　　审核教师签名：

课号：122010　　课名：线性代数 B　　考试考查：考试

此卷选为：期中考试( )、期终考试(√)、重考( )试卷

年级____专业________________学号________姓名__________任课教师__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

（注意：本试卷共七大题，三大张，满分 100 分．考试时间为 120 分钟．要求写出解题过程，否则不予计分）

一、填空题（27 分）

1、矩阵 $A=\begin{pmatrix}2006 & 2007 & 2008\\ 2009 & 2010 & 2011\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 中元素2009 的代数余子式为________________.

2、设 4 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)$，$B=(\alpha_1+3\alpha_3,\ 2\alpha_2+4\alpha_4,\ \alpha_4,\ \alpha_3)$．如果 $|A|=2$，则 $|B|=$____ .

3、如果向量 β 可由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，并且表法唯一，则向量组 A 的秩 $R_A=$_____________.

4、设向量 $\alpha^T=(a,\ 1,\ 2,\ 3)$ 和 $\beta^T=(1,\ 1,\ -2,\ 3)$ 正交，则 a 的值为_________.

5、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2bx_2x_3$ 的矩阵为 $A=$______________________.

6、如果矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & 1\\ \lambda & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 相似，则 $\lambda=$_________.

7、设3阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，则其伴随矩阵 A^* 的特征值为 ________.

8、设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，下列说法正确的是______________ .

（A）存在某个向量 $\alpha_k(1<k\le m)$ 可由其前面的向量线性表示；

（B）存在某个向量 $\alpha_k(1\le k\le m)$ 可其余向量线性表示；

（C）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中每一个向量都可其余向量线性表示；

（D）一定存在一个向量不能由其余向量线性表示.

9、设 f 为有限维向量空间 V 上的线性变换，A,B 为 f 在 V 的不同基下的矩阵，则下列说法不正确的是__________.

（A）A,B 有相同的特征值；（B）A,B 有相同的行列式；（C）A,B 有相同的特征向量；（D）A,B 相似.

二、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$，并且矩阵 B 满足 $AB=A+B$，试求矩阵 B.

三、（12 分）设 $\alpha_1^T=(1,0,2,1)$, $\alpha_2^T=(1,2,0,1)$, $\alpha_3^T=(2,1,3,0)$, $\alpha_4^T=(2,5,-1,4)$, $\alpha_5^T=(1,-1,3,-1)$，试求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩及一个最大线性无关组，并用该最大线性无关组表示向量组中的其余向量.

四、（16 分）讨论λ取何值时，线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1\end{cases}$（1）有唯一解？（2）有无穷多解？（3）无解？并在有无穷多解时，用对应的齐次线性方程组的基础解系表示其通解.

五、（15 分）设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，试求一个正交矩阵 P，使得 $P^T AP$ 为对角矩阵，并写出该对角矩阵.

六、(12 分) 设 $P[x]_2$ 为所有次数不超过 2 的实系数多项式构成的向量空间，易知微分运算 D 是 $P[x]_2$ 上的线性变换.（1）试写出 D 在 $P[x]_2$ 的基 $p_1 = 1, p_2 = 2x+1, p_3 = 3x^2+2x+1$ 下的矩阵；（2）问是否存在 $P[x]_2$ 的基，使得 D 在该基下的矩阵为对角矩阵？若是，请写出该基以及 D 在该基下的矩阵；若否，请详细说明理由.

七、(8 分)设n阶矩阵A的每列元素之和都为常数a,m为正整数,试证明A^m的每列元素之和也是一个常数,并求该常数.