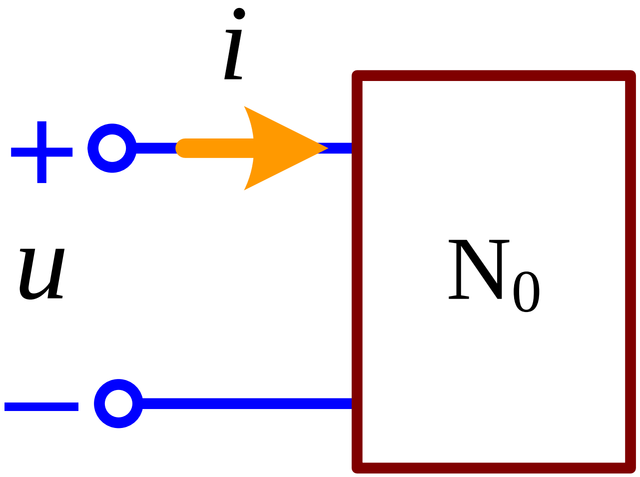
9.4 正弦稳态电路的功率

$$u=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\psi_u),\qquad i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)$$



瞬时功率?

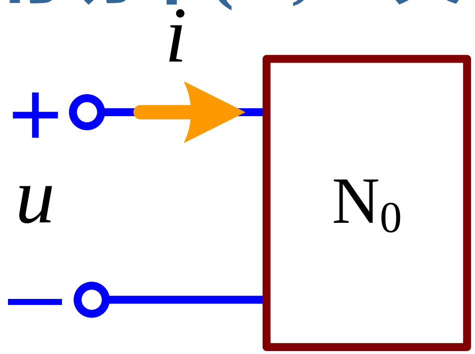
平均功率?

无功功率?

视在功率?

复功率?

吸收的功率(u, i 关联)



$$u(t)=\sqrt{2}U\cos\left(\omega t+\Psi_u\right)$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi_i)$$

$$\varphi=\Psi_u-\Psi_i$$

1. 瞬时功率

第一种分解方法;

$$p(t)=ui=\underline{UI\cos\varphi}+\underline{UI\cos(2\omega t+\Psi_u+\Psi_i)}$$

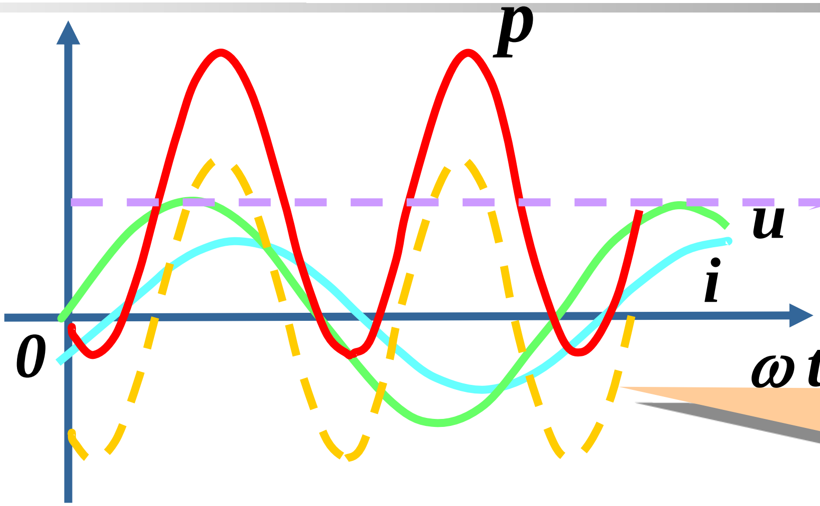
恒定值，与时间无关，由电路结构和参数确定

与时间有关，按照正弦规律变化，频率是激励的2倍。

$$p(t)=\underline{UI\cos\varphi\left[1+\cos 2(\omega t+\Psi_u)\right]}+\underline{UI\sin\varphi\sin\left[2\left(\omega t+\Psi_u\right)\right]}$$

第二种分解方法。

第一种分解方法： $p(t)=\boxed{UI\cos\varphi}+UI\cos(2\omega t+\Psi_u+\Psi_i)$

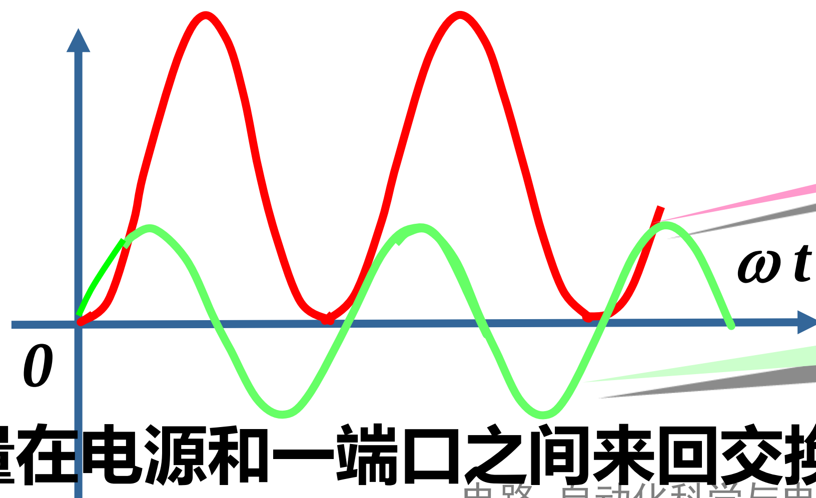


$UI\cos\varphi$ **恒定分量。**

$UI\cos(2\omega t+\Psi_u+\Psi_i)$ **为正弦分量。**

第二种分解方法：

$$p(t)=UI\cos\varphi\left[1+\cos 2(\omega t+\Psi_u)\right]+UI\sin\varphi\sin\left[2\left(\omega t+\Psi_u\right)\right]$$



不可逆分量

可逆分量

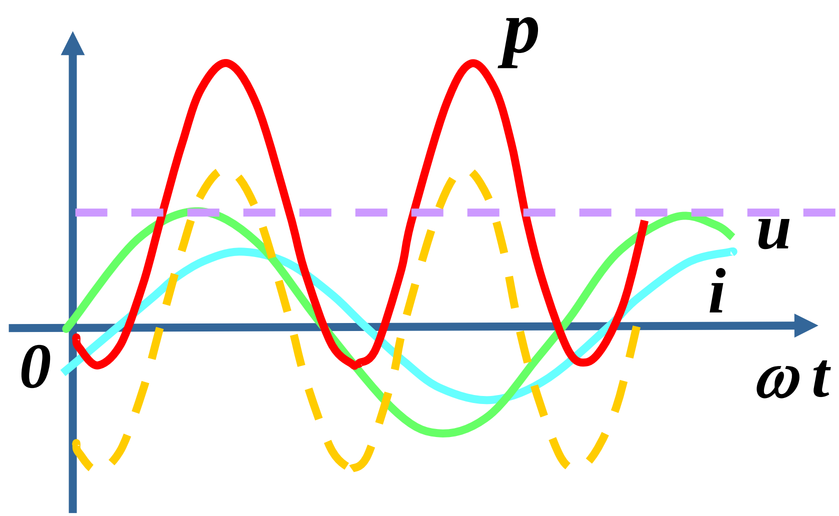
- **能量在电源和一端口之间来回交换。**

u，i符号相同，p为正值，电路从外部得到功率

u，i符号相反， p为负值，电路向外部输出功率

说明：由于存在储能元件外部电路和二端网络之间有着能量交换的现象

瞬时功率变化频率是激励的两倍；



瞬时功率守恒

2.平均功率P

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t$$ ⇒ 有功功率 / 电阻消耗的功率。

在正弦稳态情况下

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T[UI\cos\varphi+UI\cos(2\omega t+\Psi_u+\Psi_i)]\mathrm{d}t$$

$$\boxed{P=UI\cos\varphi}$$

单位：W（瓦）

$\lambda=\cos\varphi$：功率因数　　$0\le|\lambda|\le 1$

$\varphi=\psi_u-\psi_i$：**功率因数角。取决于电路的结构和参数。对无源网络，为其等效阻抗的阻抗角。**

- $X>0$, $\varphi>0$，**感性；**
- $X<0$, $\varphi<0$，**容性。**

- $\lambda=1$，**纯电阻**
- $\lambda=0$，**纯电抗**

9.4 正弦稳态电路的功率

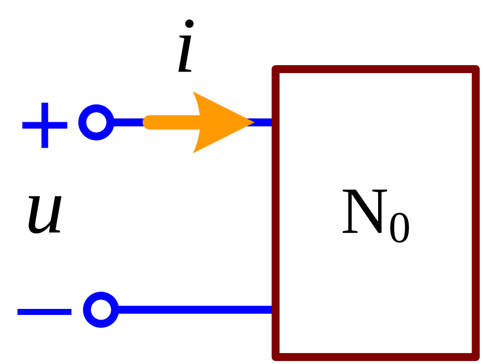
无源一端口网络的有功功率 $P = UI\cos\varphi$

设 $Z = R_{\text{eq}} + \text{j}X_{\text{eq}}$

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = |Z|\angle\varphi = \frac{U}{I}\angle\varphi$$

有功功率为等效阻抗中等效电阻的消耗功率！

$$P = I^2|Z|\cos\varphi = \frac{U^2}{|Z|}\cos\varphi = I^2 R_{\text{eq}}$$



有功功率守恒 $P = \sum P_k$

电路中总的有功功率为各元件的有功功率之和！

也是等效阻抗中电阻的消耗功率！

3. 无功功率 Q

$$p(t)=UI\cos\varphi[1+\cos 2(\omega t+\Psi_u)]+\boxed{UI\sin\varphi}\sin[2(\omega t+\Psi_u)]$$

$$Q \overset{\text{def}}{=} UI\sin\varphi$$

单位：var (乏)。

与外电路交换功率的大小，即能量交换速度的大小。由储能元件*LC*的性质决定。

$\varphi>0$，感性电路，$Q>0$，表示网络吸收无功功率；

$\varphi<0$，容性电路，$Q<0$，表示网络发出无功功率。

$$Q=I^2|Z|\sin\varphi=\frac{U^2}{|Z|}\sin\varphi=I^2X_{\text{eq}}$$

无功功率为等效阻抗中等效电抗的功率！

无功功率守恒 $Q=\sum Q_k$

电路中总的无功功率为各元件的无功功率之和！

4. 视在功率S

$$S \stackrel{\text{def}}{=} UI$$

单位：V·A (伏安)。

反映电气设备的容量。

视在功率不守恒

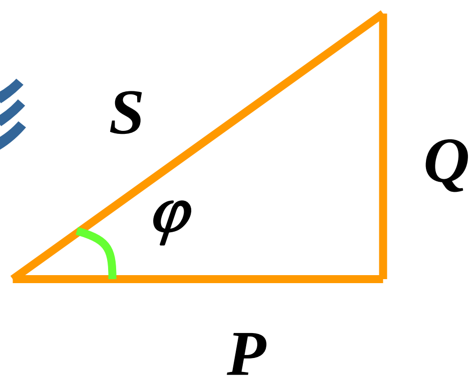
有功，无功，视在功率的关系：

有功功率： $P=UI\cos\varphi$　　单位：W

无功功率： $Q=UI\sin\varphi$　　单位：var

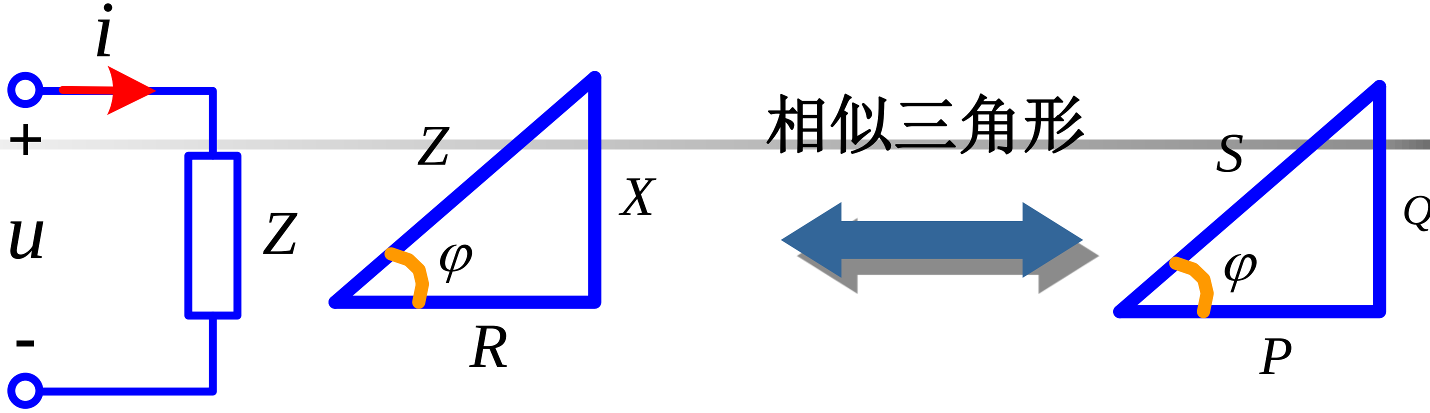
视在功率： $S=UI$　　单位：V·A

功率三角形



$$S=\sqrt{P^2+Q^2}$$

任意阻抗



R、L、C元件的有功功率和无功功率

元件	P	Q	φ
R	$UI=I^2R=\dfrac{U^2}{R}$	0	0
L	0	$UI=I^2X_L$	$\dfrac{\pi}{2}$
C	0	$-UI=I^2X_C$	$-\dfrac{\pi}{2}$

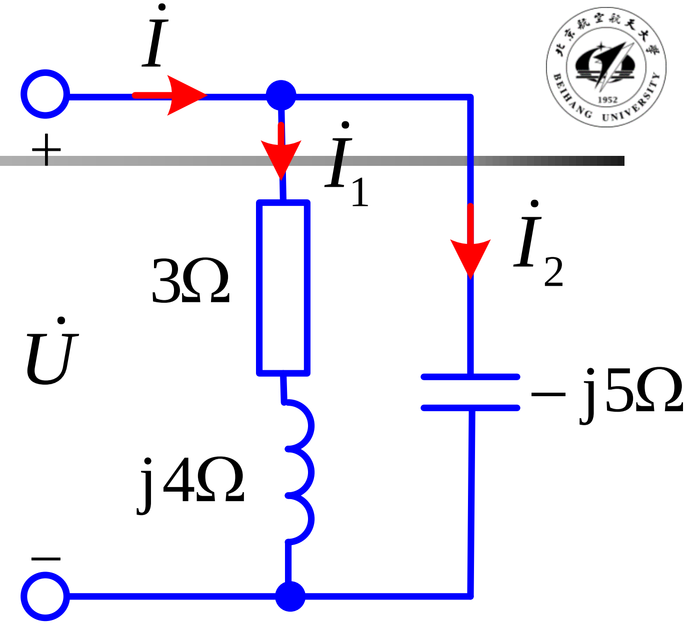
【例】 **已知:** $\dot{U}=100\angle 0°\text{V}$

$$\dot{I}=12.65\angle 18.5°\text{A}$$

$$\dot{I}_1=20\angle -53.1°\text{A}$$

$$\dot{I}_2=20\angle 90°\text{A}$$

求：二端网络的 $P, S,\ \cos\varphi$



解 **求有功功率**

法1: $P=UI\cos(\varphi_u-\varphi_i)$

$$=100\times 12.65\cos(-18.5°)$$

$$=1200\text{W}$$

法2:

$$P = I_1^{\ 2}R = 20^2 \times 3 = 1200\text{W}$$

法3:

$$P = UI_1\cos(\varphi_u - \varphi_{i1})$$

$$= 100 \times 20\cos 53.1°$$

$$= 1200\text{W}$$

求视在功率、$\cos\varphi$

$$S = UI = 1265\text{V}\bullet\text{A}$$

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{1200}{1265} = 0.949$$

$$\dot{U} = 100\angle 0°\text{V}$$

$$\dot{I} = 12.65\angle 18.5°\text{A}$$

$$\dot{I}_1 = 20\angle -53.1°\text{A}$$

$$\dot{I}_2 = 20\angle 90°\text{A}$$

5. 提高功率因数的意义和方法

意义： • **充分利用电源设备的容量**

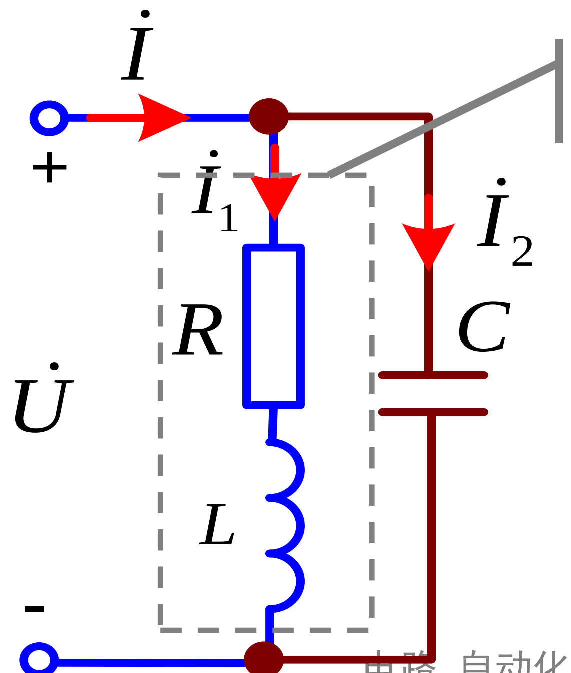
• **减少电能损耗和电压损耗，提高输电效率。**

•若**S**（电源容量一定），λ提高则**P**增大；

•若电压一定、需要的**P** 不变， λ提高则端电流**I**减小，导线成本降低；

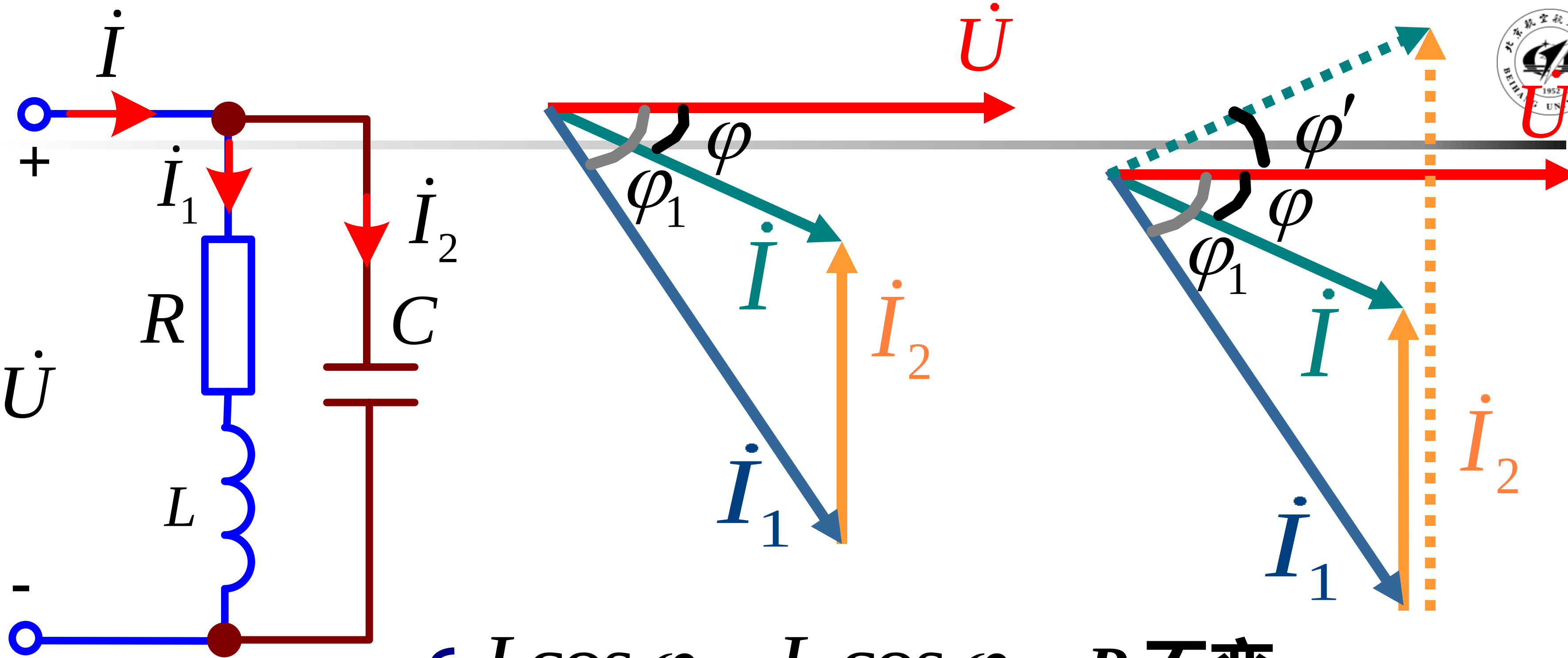
经济性提高

方法：



感性负载

并联电容



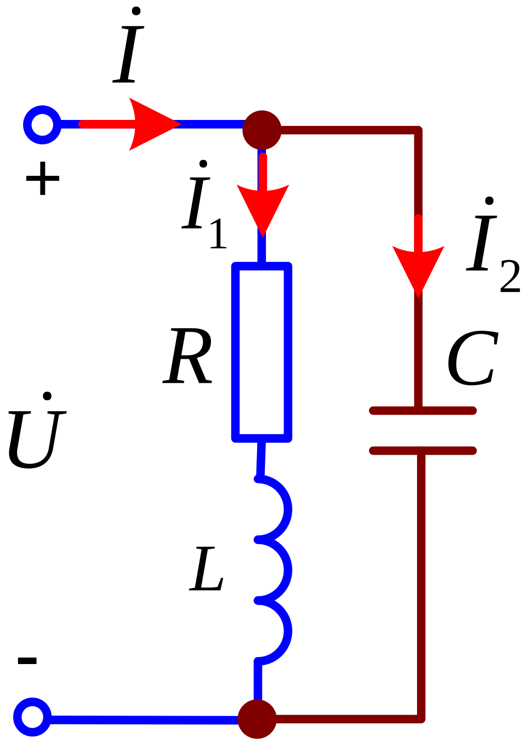
$$\begin{cases} I\cos\varphi = I_1\cos\varphi_1 & P\text{不变} \\ I\sin\varphi < I_1\sin\varphi_1 & Q\text{减小，}I\text{减小。} \end{cases}$$

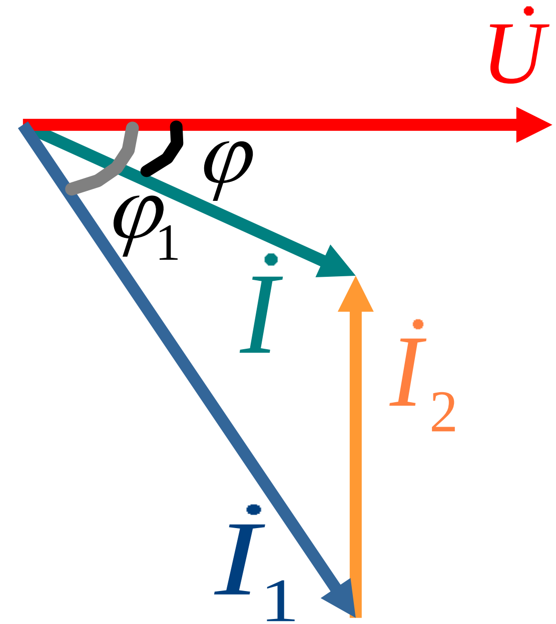
补偿容量不同

- **欠**　**功率因数提高到0.9～0.95。**
- **全**　**电容设备投资增加,经济效果不明显**
- **过**　**电路变为容性**

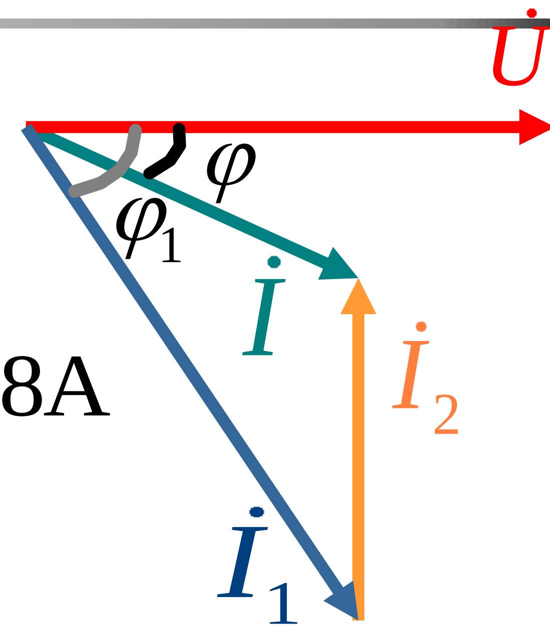
【例】 在f=50Hz, U=380V的电路中,一感性负载吸收的功率P=20kW，功率因数$\cos\varphi_1$=0.6 若要使功率因数提高到0.9,求并联电容值。

解





$$I_1 = \frac{P}{U\cos\varphi_1} = \frac{20\times10^3}{380\times0.6} = 87.72\text{A}$$



$$I\cos\varphi = I_1\cos\varphi_1$$

$$I = \frac{I_1\cos\varphi_1}{\cos\varphi} = \frac{87.72\times0.6}{0.9} = 58.48\text{A}$$

$$\cos\varphi_1 = 0.6 \qquad \varphi_1 = 53.13^\circ$$

$$\cos\varphi = 0.9 \qquad \varphi = 25.84^\circ$$

$$I_2 = I_1\sin\varphi_1 - I\sin\varphi = 87.72\sin53.13^\circ - 58.48\sin25.84^\circ$$

$$= 44.69\text{A}$$

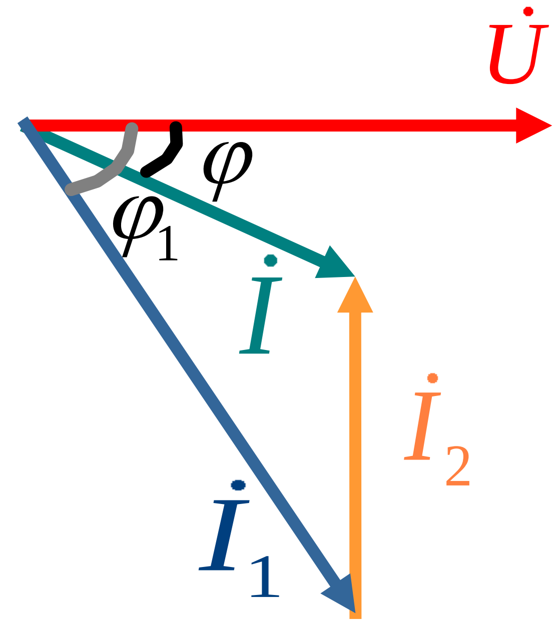
$$C = \frac{I_2}{\omega U} = \frac{I_2}{2\pi fU} = \frac{44.69}{2\pi\times50\times380} = 375\mu\text{F}$$

由功率因数、功率因数角确定并联电容：

$$I_2 = I_1 \sin\varphi_1 - I\sin\varphi$$

将 $I = \dfrac{P}{U\cos\varphi}$，$I_1 = \dfrac{P}{U\cos\varphi_1}$ 代入得

$$I_2 = \omega CU = \frac{P}{U}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi)$$

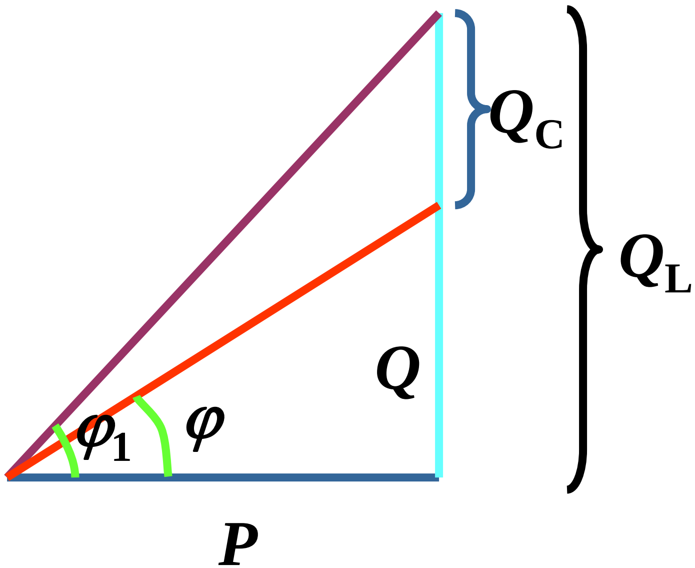


$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi)}$$

思考：（1）是否并联电容越大，功率因数越高?

（2）能否用串联电容的方法来提高功率因数$\cos\varphi$？

用功率三角形确定并联电容：



$$Q_C = -P(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi)$$

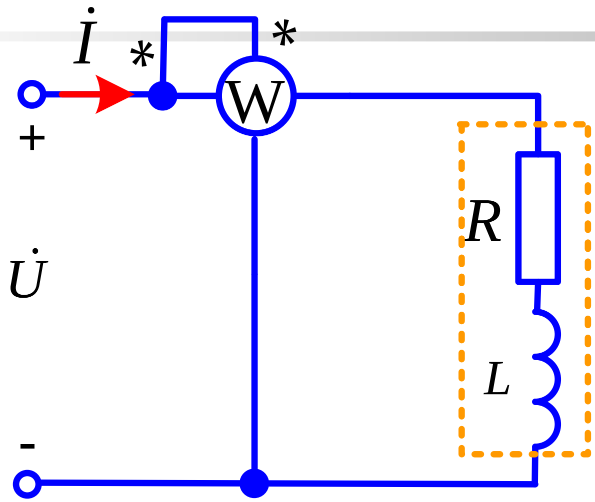
$$Q_C = -\omega C U^2$$

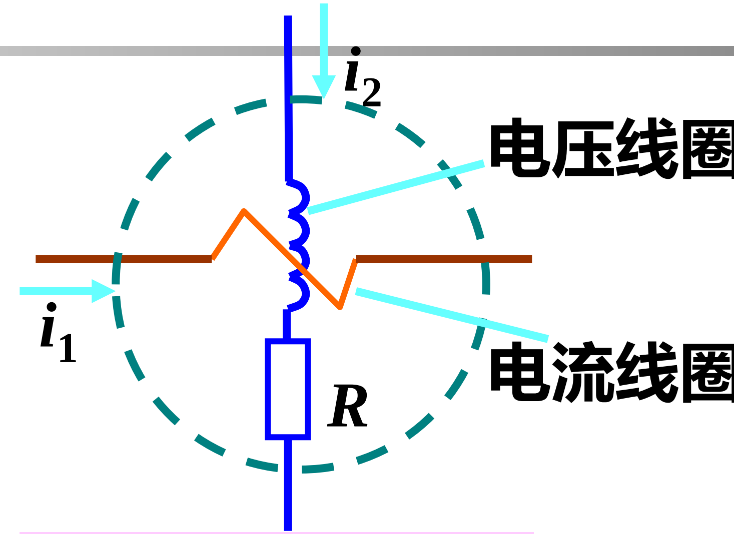
$$\therefore \quad C = \frac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi)$$

电源向负载输送的有功不变；

无功减少，减少的无功就由电容“产生”来补偿，使感性负载吸收的无功不变，而功率因数得到改善。

6. 交流电路功率的测量





功率表：测量平均功率*P*。

$$P = UI\cos\varphi$$

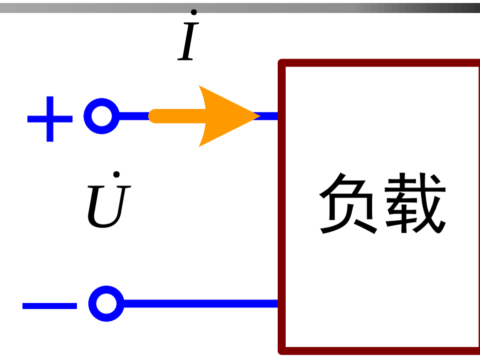
(1) 同名端：在关联方向下，电流i从电流线圈“*”号端流入，电压*u*正端接电压线圈“*”号端，此时*P*表示负载吸收的功率。

(2) 量程：测量时，*P*、*U*、*I* 均不能超量程。

9.5 复功率

1. 复功率

定义： $\bar{S}=\dot{U}\dot{I}^*$ **单位：V·A**



$$\bar{S}=UI\angle(\Psi_u-\Psi_i)=UI\angle\varphi=S\angle\varphi$$

$$=UI\cos\varphi+\mathrm{j}UI\sin\varphi=P+\mathrm{j}Q$$

复功率也可表示为：

$$\bar{S}=\dot{U}\dot{I}^*=Z\dot{I}\cdot\dot{I}^*=ZI^2=(R+\mathrm{j}X)I^2=RI^2+\mathrm{j}XI^2$$

or $$\bar{S}=\dot{U}\dot{I}^*=\dot{U}(\dot{U}Y)^*=\dot{U}\dot{U}^*Y^*=U^2Y^*$$

2. 结 论

（1）$\bar{S}$是复数，而不是相量，它不对应任意正弦量；

（2）$\bar{S}$把P、Q、S 联系在一起它的实部是平均功率，虚部是无功功率，模是视在功率；

（3）复功率满足守恒定理：在正弦稳态下，任一电路的所有支路吸收的复功率之和为零。即

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{b} P_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{b} Q_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{b}(P_k + \mathrm{j}Q_k) = \sum_{k=1}^{b}\bar{S}_k = 0}$$

复功率守恒,但是不等于视在功率守恒。

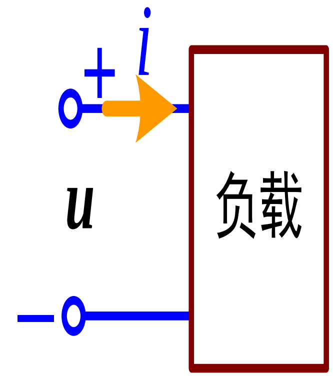
$$\because U \neq U_1 + U_2$$

$$\therefore S \neq S_1 + S_2$$

【例】已知：$u(t) = 100\sqrt{2}\cos(314t + 30^0)\text{V}$,

$$i(t) = 50\sqrt{2}\cos(314t + 60^0)\text{A}$$

求：$\bar{S}$、P、Q。



解: $\dot{U} = 100\angle 30°(V), \dot{I} = 50\angle 60°(A)$

$$\bar{S} = \dot{U}\dot{I}^* = 100\angle 30° \times 50\angle -60° = 5000\angle -30°(VA)$$

$$\text{P=Re}(\bar{S}) = 5000\cos(-30°) = 4330(W)$$

$$\text{Q=Im}(\bar{S}) = 5000\sin(-30°) = -2500(Var)$$

正弦稳态电路的功率

瞬时功率	$p(t)=u(t)i(t)$	[W]	守恒
平均功率	$P=UI\cos\varphi$	[W]	守恒
无功功率	$Q=UI\sin\varphi$	[Var]	守恒
视在功率	$S=UI$	[VA]	不守恒
复功率	$\overline{S}=P+jQ$	[VA]	守恒

作业

【9-9】

【9-10】