高等数学下册知识点

第六章 空间解析几何与向量代数

（一）向量及其线性运算

1、 单位向量，零向量，向量平行；

2、 线性运算：加减法、数乘；

3、 向量的坐标分解式；

4、 利用坐标做向量的运算：设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，

则 $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$，$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$；（重点）

5、 向量的模、方向角、投影：

1） 向量的模：$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；

2） 两点间的距离公式：$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

3） 方向角：非零向量与三个坐标轴的正向的夹角 α,β,γ

4） 方向余弦：$\cos\alpha=\dfrac{x}{|\vec{r}|}$，$\cos\beta=\dfrac{y}{|\vec{r}|}$，$\cos\gamma=\dfrac{z}{|\vec{r}|}$ （重点）

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

5） 投影：$\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$，其中 φ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{u}$ 的夹角。

（二）数量积，向量积（重点）

1、 数量积：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

1） $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ 2） $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

2、 向量积：$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$

大小：$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，方向：$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 符合右手规则

1）$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$　　2）$\vec{a}//\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

运算律：反交换律 $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$

（三）曲面及其方程

1、 旋转曲面：

yoz 面上曲线 $C: f(y,z)=0$，（非重点）

（重点）绕 y 轴旋转一周：$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$

（重点）绕 z 轴旋转一周：$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

2、 柱面：

$F(x,y)=0$ 表示母线平行于 z 轴，准线为 $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 的柱面

（四）空间曲线及其方程

1、 一般方程：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

2、 参数方程：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$，如螺旋线：$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=bt \end{cases}$

3、 空间曲线在坐标面上的投影

$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，消去 z，得到曲线在面 xoy 上的投影 $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

（五）平面及其方程（重点）

1、 点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

法向量：$\vec{n}=(A,B,C)$，过点 (x_0,y_0,z_0)

2、 一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0$

截距式方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

3、 两平面的夹角：$\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$\Pi_1\perp\Pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

$\Pi_1 // \Pi_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

4、 点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

（六）空间直线及其方程（重点）

1、 一般式方程：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

2、 对称式（点向式）方程：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

方向向量：$\vec{s}=(m,n,p)$，过点 (x_0,y_0,z_0)

3、 参数式方程：$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

4、 两直线的夹角：$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$，$\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$，

$$\cos\varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \quad m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

$$L_1 // L_2 \Leftrightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

5、 直线与平面的夹角：直线与它在平面上的投影的夹角，

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

$$L // \Pi \Leftrightarrow \quad Am + Bn + Cp = 0$$

$$L \perp \Pi \Leftrightarrow \quad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

第七章 多元函数微分法及其应用

（一）基本概念

1、 多元函数：$z = f(x, y)$ 的定义域（重点）

2、 极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$

3、 连续：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

4、 偏导数定义

5、 计算偏导数以及二阶偏导数（重点）

6、 方向导数：（重点：记住公式）

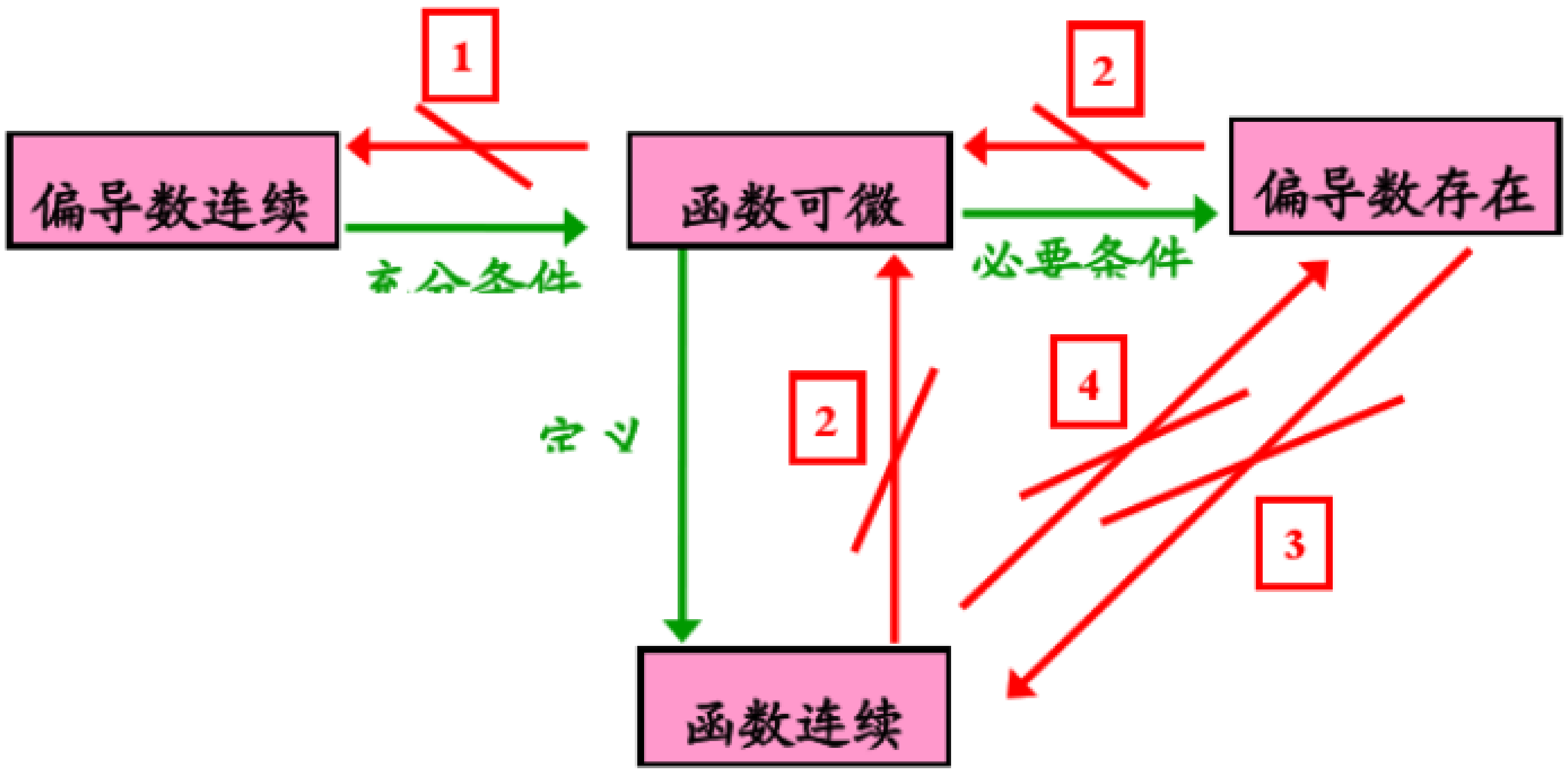
$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$ 其中 α,β 为 l 的方向角。

7、 **梯度：** $z=f(x,y)$，则 $\operatorname{grad}f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}$。**（重点）**

8、 **掌握计算全微分：** 设 $z=f(x,y)$，则 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ **（重点）**

（二）性质

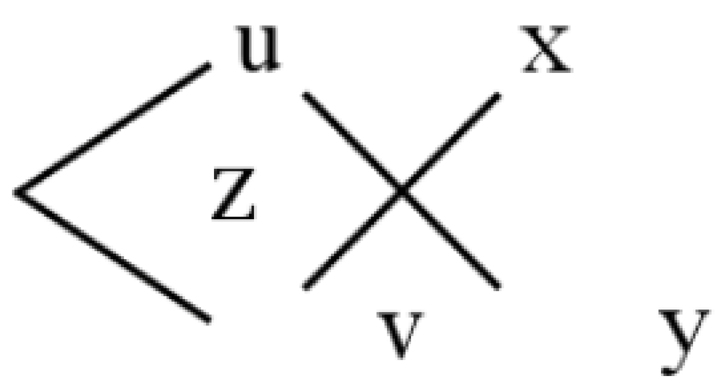
1、 **函数可微，偏导连续，偏导存在，函数连续等概念之间的关系：（重点）**



2、 **微分法**

1） **定义：**

2） **复合函数求导：链式法则（重点）**



例：若 $z=f(u,v),u=u(x,y),v=v(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

3） **隐函数求导（重点）**

由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定 $z=z(x,y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 等。

方法：第一步．构造函数 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(x,y,z)$，

第二步．求 F_x F_y F_z，求 F'_x，F'_y，F'_z 时，均视 x，y，z 为地位平等的自变量。

即求 F'_x 时，视 y， z 为常数，其余类似。

第三步. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

（三）应用

1、 极值

1） 无条件极值：求函数 $z=f(x,y)$ 的极值（重点）

解方程组 $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$ **求出所有驻点，对于每一个驻点 (x_0,y_0)，令**

$A=f_{xx}(x_0,y_0)$， $B=f_{xy}(x_0,y_0)$， $C=f_{yy}(x_0,y_0)$，

① **若** $AC-B^2>0$， $A>0$，**函数有极小值，**

若 $AC-B^2>0$， $A<0$，**函数有极大值；**

② **若** $AC-B^2<0$，**函数没有极值；**

③ **若** $AC-B^2=0$，**不定。**

2） 条件极值：求函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值（重点）

令： $L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ ——— **Lagrange 函数**

解方程组 $\begin{cases} L_x=0 \\ L_y=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$

2、 几何应用

1） 曲线的切线与法平面

曲线 $\Gamma:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$，**则 Γ 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$（对应参数为 t_0 ）处的**

切线方程为： $\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$

法平面方程为： $x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

2） 曲面的切平面与法线（重点）

曲面 $\Sigma: F(x,y,z)=0$**，则** Σ **上一点** $M(x_0,y_0,z_0)$ **处的切平面方程求法：**

第一步．构造函数 $F=F(x,y,z)$，

第二步．求 F_x F_y F_z，求 F_x'，F_y'，F_z' 时，均视 x，y，z 为地位平等的自变量。

即求 F_x' 时，视 y，z 为常数，其余类似。

第三步．切平面的法向量 $n=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$

第四步：切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为： $\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

曲面 $\Sigma: z=f(x,y)$**，则** Σ **上一点** $M(x_0,y_0,z_0)$ **处的切平面方程求法：**

第一步．构造函数 $F=z-f(x,y)$，

第二步．求 F_x F_y F_z，求 F_x'，F_y'，F_z' 时，均视 x，y，z 为地位平等的自变量。

即求 F_x' 时，视 y，z 为常数，其余类似。

第三步．切平面的法向量 $n=(-f_x(x_0,y_0),-f_y(x_0,y_0),1)$

第四步：切平面方程为

$$-f_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+(z-z_0)=0$$

法线方程为： $\dfrac{x-x_0}{-f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{-f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{1}$

第八章 重积分

（一）二重积分

1、 性质

2、 几何意义：曲顶柱体的体积。

3、 二重积分计算（重点）:

1） 直角坐标

X-型：

$$D=\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{matrix}\right\},\quad \iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy$$

Y-型：

$$D=\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}\phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\\ c\le y\le d\end{matrix}\right\},\quad \iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$$

2） 极坐标

$$D=\left\{(\rho,\theta)\middle|\begin{matrix}\rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)\\ \alpha\le\theta\le\beta\end{matrix}\right\}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

3） 交换积分次序（重点）

第九章 曲线积分与曲面积分

（一）对弧长的曲线积分

1、 定义的理解

2、 性质：

1） $\int_L[\alpha f(x,y)+\beta(x,y)]ds=\alpha\int_L f(x,y)ds+\beta\int_L g(x,y)ds.$

2） $\int_L f(x,y)ds=\int_{L_1} f(x,y)ds+\int_{L_2} f(x,y)ds.\qquad (L=L_1+L_2).$

3）在L上，若 $f(x,y)\le g(x,y)$，则 $\int_L f(x,y)ds\le\int_L g(x,y)ds.$

4）$\int_L ds = l$ （l 为曲线弧 L 的长度）（重点）

3、计算:（重点）

设 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} (\alpha \le t \le \beta)$,

则 $\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\phi(t),\psi(t)]\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$ ，$(\alpha<\beta)$

（二）对坐标的曲线积分

1、定义（理解）: $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

2、性质:

用 L^- 表示 L 的反向弧，则 $\int_{L^-} \vec{F}(x,y)\cdot \overrightarrow{dr} = -\int_L \vec{F}(x,y)\cdot \overrightarrow{dr}$ （重点）

3、计算:（重点）

设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有向光滑弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} (t:\alpha \to \beta),$$

则 $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \{P[\phi(t),\psi(t)]\phi'(t) + Q[\phi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$

4、两类曲线积分之间的关系:

设平面有向曲线弧为 $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$L$ 上点 (x,y) 处的切向量的方向角为:

α,β，$\cos\alpha = \dfrac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$，$\cos\beta = \dfrac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$，

则 $\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds$.

（三）格林公式（重点）

1、格林公式：设区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有连续一阶偏导数，则有 $\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_L Pdx+Qdy$

2、G 为一个单连通区域，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 G 上具有连续一阶偏导数，则有如下四个等价命题：

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ $\Leftrightarrow$ 曲线积分 $\int\limits_L Pdx+Qdy$ 在 G 内与路径无关

$\Leftrightarrow$ 曲线积分 $\oint\limits_L Pdx+Qdy=0$

$\Leftrightarrow$ $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在 G 内为某一个函数 $u(x,y)$ 的全微分

第十章　无穷级数

（一）常数项级数

1、 定义：

1）无穷级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$

部分和：$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$，

正项级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$u_n\geq 0$

交错级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$，$u_n\geq 0$

2）级数收敛：若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ 存在，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，否则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

3）条件收敛：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收敛；（重点）

绝对收敛：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为绝对收敛（重点）

2、 性质（重点）:

1） 改变有限项不影响级数的收敛性;

2） 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 收敛;（重点）

3） 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则任意加括号后仍然收敛;

4） 必要条件：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.（注意：不是充分条件！）（重点）

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \not\Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛（重点）

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Longrightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散（重点）

3、 审敛法

正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$u_n \geq 0$

1） 定义：$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 存在;（重点）

2） $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow \{S_n\}$ 有界;

3） 比较审敛法（重点）: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数，且 $u_n \leq v_n \quad (n = 1,2,3,\cdots)$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

4） 比较法的推论（重点）: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数，若存在正整数 m，当 $n > m$ 时，$u_n \leq kv_n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若存在正整数 m，当 $n > m$ 时，$u_n \geq kv_n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

5）比较法的极限形式：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 为正项级数，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l \quad (0\le l<+\infty)$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}>0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=+\infty$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

6）比值法：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$，则当 $l<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；则当 $l>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；当 $l=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛也可能发散.（重点）

7）根值法：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$，则当 $l<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；则当 $l>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；当 $l=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛也可能发散.（重点）

8）极限审敛法：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，若 $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot u_n>0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot u_n=+\infty$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；若存在 $p>1$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}n^p\cdot u_n=l \quad (0\le l<+\infty)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

交错级数：

莱布尼茨审敛法：交错级数：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$，$u_n\ge 0$ 满足：$u_{n+1}\le u_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛。（重点）

任意项级数：

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。（重点）

常见典型级数（重点）：几何级数：$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n \begin{cases} 收敛, & |q|<1 \\ 发散, & |q|\ge 1 \end{cases}$

p -级数：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} 收敛, & p>1 \\ 发散, & p \le 1 \end{cases}$

（二）函数项级数

1、 定义：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，收敛域，收敛半径，和函数；

2、 幂级数：标准形式 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, (a_n \neq 0)$ （重点）

收敛半径的求法：$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

3、 非标准形式（重点）：转换为正项级数后用比值法或者柯西法（根值法），直接求出收敛区间和收敛域

当 $R=0$，级数仅仅在 $x=0$ 收敛,当 $R=+\infty$，收敛区间 $(-\infty,+\infty)$,当 $0<R<+\infty$,收敛区间 $(-R,R)$。

对有缺项的幂级数（指缺无限多项），则直接取其后项与前项之比的绝对值取极限.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = 1,$$

然后根据确定收敛半径 R 及收敛区间 $(-R,R)$。

(2) 讨论 $(-R,R)$ 的端点 $x=-R$ 及 $x=R$ 处级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛性，并写出收敛域(收敛区间加收敛的端点)。

4、 利用逐项积分和逐项求导求级数的和函数（重点）

5、 函数展开为幂级数：间接展开法（重点）

1） $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty,+\infty)$；（重点）

2） $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in (-\infty,+\infty)$；（重点）

3）$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty)$；（重点）

4）$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n},\quad x\in(-1,\ 1)$；（重点）

5）$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{n},\quad x\in(-1,\ 1)$（重点）

6）$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n+1}x^{n+1},\quad x\in(-1,\ 1]$（重点）

7）$\frac{1}{1+x^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n},\quad x\in(-1,\ 1)$（重点）

8）$(1+x)^{m}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^{n},\quad x\in(-1,\ 1)$

第十一章　微分方程

（1）理解微分方程、阶、解、通解、初始条件和特解等概念。

（2）掌握可分离变量方程（重点）

第一步：分离变量，将方程变形为标准形式：$g(y)dy=f(x)dx$

第二步：两端积分 $\int g(y)dy=\int f(x)dx$

（3）掌握一阶线性微分方程（重点）、

第一步：将方程变形为标准一阶线性方程：$y'+p(x)y=q(x)$

第二步：利用公式通解

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$$

（4）会齐次方程通解的解法（重点）。

（5）会伯努力方程通解的解法（重点）