2008 年复变试题共五页

一．选择题（每题 3 分，共 27 分）

1. 下列函数中，在有限复平面上解析的函数是（　　）

（A）$x^2-y^2+(2xy-y^2)i$　（B）x^2+y^2i

（C）$2xy+i(y^2-x^2+2x)$　（D）$x^3-3xy^2+3x^2yi-y^3i$

2 设 C 是从 i 到 $\frac{i}{2}$ 的直线段，则积分 $\int_C e^{\pi z}dz=$（　　）

（A）$\frac{1}{\pi}$　（B）$-\frac{1}{\pi}$　（C）$-\frac{1}{\pi}(1+i)$　（D）$\frac{1}{\pi}(1+i)$

3．设 C 为曲线 C_1：从－1 到 1 的下半单位圆周和曲线 C_2：从 1 到－1 的直线构成的封闭曲线，则 $\int_C (\bar{z}-1)dz=$（　　）

（A）$i\pi$（B）$-i\pi$（C）0（D）π

4.设函数 $zctgz$ 的泰勒展开式为 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\frac{\pi}{2})^n$，那么幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\frac{\pi}{2})^n$ 的收敛半径 R＝（　　）

（A）$+\infty$（B）1（C）$\frac{\pi}{2}$（D）π

5.设 $f(z)=x^2-y^2-x+i(2xy-y^2)$，则 $f'(1+\frac{i}{2})=$（　　）

（A）$1-i$（B）$1+i$（C）$1-\frac{1}{2}i$（D）$1+\frac{1}{2}i$

6.下列命题中，正确的是（　　）

（A）设 v_1,v_2 在区域 D 内均为 u 的共轭调和函数，则必有 $v_1=v_2$

（B）解析函数的实部是虚部的共轭调和函数

（C）设 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，则 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 为 D 内的调和函数

（D）以调和函数为实部与虚部的函数是解析函数

7.设 $z=0$ 为函数 $\frac{1-e^z}{z-\sin z}$ 的 m 级极点，那么 $m=$（　　）

（A）5（B）4（C）3（D）2

8.设函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $L[f\{t\}]=F(s)$，则 $L[\int_0^{3t} f(t)dt]=$（　　）

（A）$\frac{1}{3s}F(\frac{s}{3})$（B）$\frac{1}{s}F(\frac{s}{3})$（C）$\frac{1}{3s}F(s)$（D）$\frac{1}{s}F(s)$

9.设函数 $f(t)$ 的傅立叶变换为 $\boldsymbol{F[f(t)]=F(\omega)}$，则函数 $(t-2)f(-2t)$ 的傅立叶变换为

(　　)

（A）$-\frac{i}{4}F'(-\frac{\omega}{2})-F(-\frac{\omega}{2})$（B）$\frac{i}{4}F'(-\frac{\omega}{2})-F(-\frac{\omega}{2})$

（C）$-\frac{i}{2}F'(-\frac{\omega}{2})-F(-\frac{\omega}{2})$　（D）$\frac{i}{2}F'(-\frac{\omega}{2})-F(-\frac{\omega}{2})$

二．填空题（每题 4 分，共 4 0 分）

1.已知 $z=(\frac{2i}{-1+i})(\frac{1-i}{1+i})^5$，则 $z^6=$ ____________________

2.复数 i^{1+i} 的主值为 ____________________

3．解析函数 $f(z)=u+iv$ 的实部 $u=x^3-3xy^2$，则 $f(z)=$ ____________________．

4.积分 $\int_{|z|=1}\frac{1}{z+2}dz=$ ____________________,由此计算 $\int_0^{2\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=$ ____________________

5.设 $f(z)=\int_{|\zeta|=1}\frac{\cos\zeta}{(\zeta-z)^3}d\zeta$, 其中 $|z|\neq 1$，则 $f'(\frac{\pi}{6})=$ ____________________

$f'''(2)=$ ____________________

6.$\int_{|z|=3}\frac{1}{z^2(z+1)}dz=$ ____________________

7.函数 $\frac{e^z}{1-z}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式（至少写到含 z^3 的项）为 ____________________

8.在扩充复平面上函数 $f(z)=\frac{\sin z}{z^4}$ 的孤立奇点为（写出类型） ____________________

在孤立奇点处留数为 ____________________

9.已知 $F(s)=\frac{e^{-\frac{\pi}{3}s}}{s^2+1}$，则 $F(s)$ 的拉普拉斯逆变换为 ____________________

10 设 $F(\omega)=\frac{2}{\omega^2+1}$，则 $F(\omega)$ 的傅立叶逆变换为 ____________________

三．（10 分）将函数 $f(z)=\frac{1}{(z-i)z^2}$ 在适当的圆环域内展开成含 $z-i$ 的幂的洛朗级数。

四.（9 分）计算函数 $f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-1\\ -1, & -1<t<0\\ 1, & 0<t<1\\ 0, & 1<t<+\infty\end{cases}$ 的傅立叶变换，并计算广义积分

$\int_0^{+\infty}\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega}\sin\omega t\,d\omega$ 的值。

五.（8 分）用拉普拉斯变换及其逆变换求解微分方程组 $\begin{cases}x'(t)+y''(t)=\delta(t-1)\\ 2x(t)+y'''(t)=2u(t-1)\end{cases}$ 满足初始条件 $\begin{cases}x(0)=y(0)=0\\ y'(0)=y''(0)=0\end{cases}$ 的解。

六．（6 分）如果 $|z|<1$ 内 $f(z)$ 解析且 $|f(z)|\le\frac{1}{1-|z|}$，证明

$$|f^{(n)}(0)|\le 2^{n+1}n!\quad (n=1,2,\cdots)$$

答案

一．选择题

1.D　2.D　3.A　4.C　5.B　6.C　7,D　8.B　9.A

二．填空

1. $-8i$　2. $e^{\frac{\pi}{2}i-\frac{\pi}{2}}$　　3. $z^3+ci,\quad c\in R$

4. 0，0　　　5. $\frac{\pi}{2}i,\quad 0$

6. 0　　　　7. $1+z+z^2+z^3+\cdots$

8. $z=0$（三级极点），　$z=\infty$ 本性奇点　；$\mathrm{Res}[f(z),0]=-\frac{1}{6},\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{6}$

9. $\sin(t-\frac{\pi}{3})u(t-\frac{\pi}{3})$

10. $e^{-|t|}$

三．解：$f(z)=\frac{1}{(z-i)z^2}$ 奇点为 $z=i,.z=0$。

（1）$0<|z-i|<1$

$$f(z)=\frac{1}{(z-i)}\bullet\frac{1}{z^2},$$

$$\frac{1}{z^2}=(-\frac{1}{z})'=-(\frac{1}{z-i+i})'=-(\frac{1}{i(1+\frac{z-i}{i})})'=i(\frac{1}{1-(z-i)i})'$$

$$=i(\sum_{n=0}^{\infty}(z-i)^n i^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}i^{n+1}n(z-i)^{n-1}$$

所以 $f(z)=\frac{1}{z-i}\sum_{n=1}^{\infty}i^{n+1}n(z-i)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}i^{n+1}n(z-i)^{n-2}$

（2）$|z-i|>1$，$f(z)=\frac{1}{(z-i)}\bullet\frac{1}{z^2}$

$$\frac{1}{z^2}=(-\frac{1}{z})'=-(\frac{1}{z-i+i})'=-(\frac{1}{(z-i)}\frac{1}{1+\frac{i}{z-i}})'=-(\frac{1}{(z-i)}\bullet\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{i^n}{(z-i)^n})'$$

$$=-(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{(z-i)^{n+1}})'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n(n+1)(z-i)^n}{(z-i)^{2n+2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-i)^n}{(z-i)^{n+2}}$$

$$\boldsymbol{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-i)^n}{(z-i)^{n+3}}}$$

四．解： $F[f(t)]=\int_{-1}^{0}-e^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{1}e^{-i\omega t}dt=\frac{2}{i\omega}-\frac{2\cos\omega}{i\omega}$

$$\therefore f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{2}{i\omega}-\frac{2\cos\omega}{i\omega})e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{i\omega}(1-\cos\omega)(\cos\omega t+i\sin\omega t)d\omega$$

$$=\frac{-i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1-\cos\omega)\cos\omega t+i(1-\cos\omega)\sin\omega t}{\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega t-i(1-\cos\omega)\cos\omega t}{\omega}d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega t}{\omega}d\omega$$

所以 $\int_{0}^{+\infty}\frac{2(1-\cos\omega)\sin\omega t}{\omega}d\omega=\pi f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-1,\ t=0,\ 1<t<\infty\\ -\frac{\pi}{2}, & t=-1\\ -\pi, & -1<t<0\\ \pi, & 0<t<1\\ \frac{\pi}{2}, & t=1\end{cases}$

五．解：设 $L[x(t)]=X(s),L[y(t)]=Y(s)$, 取 laplace 变换得

$$\begin{cases}sX(s)-x(0)+s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=e^{-s}\\ 2X(s)+s^3Y(s)-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)=\frac{2}{s}e^{-s}\end{cases}$$

将 初 始 条 件 代 入 得

$$\begin{cases}sX(s)+s^2Y(s)=e^{-s}\\ 2X(s)+s^3Y(s)=\frac{2}{s}e^{-s}\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 2X(s)+2sY(s)=\dfrac{2e^{-s}}{s} \\ 2X(s)+s^3Y(s)=\dfrac{2}{s}e^{-s} \end{cases},$$

$$(s^3-2s)Y(s)=0, \therefore Y(s)=0;$$

$$sX(s)=e^{-s} \ \therefore X(s)=\frac{e^{-s}}{s};$$

$$\therefore \begin{cases} x(t)=u(t-1) \\ y(t)=0 \end{cases}$$

六．证明：

$$|f^n(0)|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| \le \frac{n!}{2\pi}\oint_C \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}ds \le \frac{n!}{2\pi}\oint_C \frac{1}{1-|z|}\frac{1}{|z|^{n+1}}ds$$

$$=\frac{n!}{2\pi}\frac{1}{(1-r)r^{n+1}}\oint_C ds=\frac{n!}{2\pi}\frac{1}{(1-r)r^{n+1}}2\pi r=\frac{n!}{(1-r)r^n}=\frac{1}{1-r}\left(\frac{1}{r}\right)^n n!$$

令 $r=\dfrac{1}{2}$，即得 $|f^n(0)|\le 2^{n+1}n!$