# 《概率论》试卷 1

*1*

专业______________学号_________姓名_________任课教师____________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

**（注意：除填空题外，其余题目要求写出解题过程．本试卷共二大张，五大题，满分 100 分）**

**备用数据：**$\Phi(1)=0.8413$

一、填空（51 分）

1、 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{9}$，则事件 $A$、$B$、$C$ 都发生的概率为__0__；事件 $A$、$B$、$C$ 全不发生的概率为__$\frac{17}{36}$__；事件 $A$ 不发生且 $B$、$C$ 都发生的概率为__$\frac{1}{9}$__；在事件 $B$ 不发生的条件下 $C$ 发生的概率为__$\frac{5}{27}$__.

2、 在一次试验中，事件 $A$ 发生的概率为 $p$，现进行 $n$ 次重复独立试验，则 $A$ 至少发生一次的概率为__$1-(1-p)^n$__；事件 $A$ 至多发生一次的概率为__$(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$__.

3、 一批产品共有 10 个正品和 2 个次品，任意抽取两次，每次抽一个，抽出后不再放回，则第二次抽出的是次品的概率为__$\frac{1}{6}$\_\_，在第二次抽出的是次品的条件下，第一次抽出的是正品的概率为\_\_$\frac{10}{11}$__.

4、 在区间 $(0,\ 1)$ 中随机地取两个数，则事件"两数之和小于 $\frac{6}{5}$"的概率为__$\frac{17}{25}$__.

5、 设随机变量 $X$ 服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$，$(\sigma>0)$，且关于 $y$ 的一元二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$，则 $\mu=$__4__.

6、 设 $(X,\ Y)$ 服从二维正态分布 $N(1,\ 1,\ 4,\ 4,\ \rho)$，则 $E(X^2)=$__5__；当 $X$ 与 $Y$ 独立时，$\rho=$__0__.

7、 已知随机变量 $X$ 的密度函数为 $f_X(x)$，令 $Y=-2X$，则 $Y$ 的函数密度 $f_Y(y)=$__$\dfrac{f_X\left(-\frac{x}{2}\right)}{2}$__.

8、 设随机变量 $X$ 服从参数为 1 的指数分布，则数学期望 $E\left(X^2+X\,\mathrm{e}^{-2X}\right)=$__$\frac{9}{19}$__.

9、 设二维随机变量 $(X,\ Y)$ 的联合分布律为

| $X$ \ $Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/6 | 1/3 | 0 |
| 2 | 1/4 | 1/6 | 1/12 |

$F(x,\ y)$ 为 $(X,\ Y)$ 的联合分布函数，则 $F(1.5,\ 1.5)=$__1/2__，$X$ 的边缘分布律为

| $X$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| Pr | 1/2 | 1/2 |

，$X^2+1$ 的分布律为

| $X^2+1$ | 2 | 5 |
|---|---|---|
| Pr | 1/2 | 1/2 |

.

二、（14 分）设随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1+x & -1<x\le 0\\ 1-x & 0\le x<1\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$，

记随机变量 $Y=\begin{cases}0, & X<0\\ 1, & X\ge 0\end{cases}$，$Z=\begin{cases}0, & X<1/2\\ 1, & X\ge 1/2\end{cases}$，试求：

$X$ 的分布函数 $F_X(x)$；　(2) $(Y,\ Z)$ 的联合分布律；　(3) $D(Y+Z)$.

解：

(1) $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$　　$F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ 1/2(x+1)^2 & -1<x\le 0\\ 1/2(1+2x-x^2) & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x\end{cases}$

(2)

| $Y$ \ $Z$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $p_{11}$ | $p_{12}$ |
| 1 | $p_{21}$ | $p_{22}$ |

$p_{11}=P(Y=0,Z=0)=P(X<0,X<1/2)=P(X<0)=1/2$

$p_{12}=P(Y=0,Z=1)=P(X<0,X>1/2)=0$

$p_{21}=P(Y=1,Z=0)=P(X\ge 0,X<1/2)=P(0\le X<1/2)=F(1/2)-F(0)=3/8$

$p_{22}=P(Y=1,Z=1)=P(X\ge 0,X\ge 1/2)=P(X\ge 1/2)=1-F(1/2)=1/8$

故可得（Y, Z）的联合分布律为：

| $Y$ \ $Z$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1/2 | 0 |
| 1 | 3/8 | 1/8 |

(3) $D(Y+Z)=D(Y)+D(Z)-2\operatorname{cov}(Y,Z)$

$=1/2*(1-1/2)+1/2*(1-1/2)-2\left[E(YZ)-E(Y)E(Z)\right]$

$=1/2-2\left[1/8-1/2*1/2\right]=3/4$

三、（16 分）设平面区域$D$由曲线$y=1/x$及直线$y=0$，$x=1$，$x=e^2$所围成，二维随机变量$(X, Y)$在区域$D$上服从均匀分布，

(1) 试求$(X, Y)$的联合密度函数；

(2) 试求$X$的边缘密度函数$f_X(x)$；$Y$的边缘密度函数$f_Y(y)$；

(3) 试问$X$与$Y$是否独立？ (4) 试求$P(XY>1/3)$.

解：

(1) $S_D=\int_1^{e^2}dx\int_0^{1/x}dy=2$ 从而 $f(x,y)=\begin{cases}1/2 & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$

(2) 当 $1<x<e^2$ $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{1/x}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2x}$ 从而 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x} & 1<x<e^2\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$

当 $0<y\le 1/e^2$ $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_1^{e^2}1/2dx=\frac{1}{2}(e^2-1)$

当 $1/e^2<y<1$ $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_1^{1/y}1/2dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}-1\right)$ 从而 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(e^2-1) & 0<y\le\frac{1}{e^2}\\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}-1\right) & \frac{1}{e^2}<y<1\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$

(3) 因为 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$ 所以，X与Y不独立

(4) $P(XY>\frac{1}{3})=\int_1^{e^2}dx\int_{1/3x}^{1/x}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{3}\ln x\Big|_1^{e^2}=\frac{2}{3}$

四、（9 分）一台设备由二大部件构成，在设备运转中这二大部件需要调整的概率分别为0.1、0.2，假设各部件是否需要调整相互独立，以$X$表示同时需要调整的部件数，试求$X$的期望与方差.

解： X的分布律为：

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| Pr | $p_0$ | $p_1$ | $p_2$ |

即：

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| Pr | 0.72 | 0.26 | 0.02 |

$p_0=p(X=0)=0.9*0.8=0.72$ $p_1=p(X=1)=0.1*0.8+0.9*0.2=0.26$ $p_2=p(X=2)=0.1*0.2=0.02$

$E(X)=0*0.72+1*0.26+2*0.02=0.3$ $E(X^2)=0^2*0.72+1^2*0.26+2^2*0.02=0.34$

所以：$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=0.34-0.3^2=0.25$

五、（10 分）设$X_1,\cdots,X_n$是一独立同分布的随机变量序列，且$X_i$服从参数为$\lambda$的泊松分布，$\lambda>0$，记$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，试求

(1) $\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|\overline{X}-\lambda\right|<\sqrt{\lambda}\right)$； (2) $\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|\overline{X}-\lambda\right|<\sqrt{\frac{\lambda}{n}}\right)$.

解：

(1) $P(\left|\bar{X}-\lambda\right|<\sqrt{\lambda})\ge 1-\frac{D(\bar{X})}{\sqrt{\lambda}^2}=1-\frac{\lambda}{n}\cdot\frac{1}{\lambda}=\frac{n-1}{n}\to 1$ $\lim_{n\to\infty}P(\left|\bar{X}-\lambda\right|<\sqrt{\lambda})=1$

(2) $\lim_{n\to\infty}P(\left|\bar{X}-\lambda\right|<\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{n}})=\lim_{n\to\infty}P(\frac{\sqrt{n}\left|\bar{X}-\lambda\right|}{\sqrt{\lambda}}<1)=\Phi(1)-\Phi(-1)$

$=2\Phi(1)-1=2*0.8413-1=0.6827$

# 《概率论》试卷 2

专业__________ 学号____________ 姓名___________ 任课教师___________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

**（注意：要求写出解题过程，备用数据在卷末。本试卷共三大张，八大题，满分 100 分）**

一． （12 分）从 0, 1, 2,· · ; 9 这十个数字中任意选出三个不同的数字，记事件 $A=\{$三个数字中不含 0 和 5$\}$，$B=\{$三个数字中不含 0 或 5$\}$，试求：

(1) $P(A)$，$P(B)$； (2) $P(AB)$； (3) $P(B|\bar{A})$.

解：(1) $P(A)=\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15}$ $P(B)=1-P($三个数字中含0和5$)$ $=1-\dfrac{C_8^1}{C_{10}^3}=\dfrac{14}{15}$

(2) $P(AB)=P(A)=\dfrac{7}{15}$

(3) $P(B|\bar{A})=\dfrac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}=\dfrac{P(B)-P(BA)}{1-P(A)}=\dfrac{14/15-7/15}{1-7/15}=\dfrac{7}{8}$

二．（10 分）玻璃杯成箱出售，每箱 8 只，假设各箱含 0，1 只残次品的概率相应为 0.8，0.2，一顾客欲购一箱玻璃杯，在购买时，售货员随意取一箱，而顾客随机地察看 2 只，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回，试求顾客买下该箱产品的概率.

解：设事件 A 为箱中无残次品，事件 B 为顾客随机察看 2 只无残次品，由全概率公式可得

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})=0.8*1+0.2*\frac{C_1^1C_7^1}{C_8^2}=0.85$$

答：顾客买下该箱产品的概率为 0.85。

三．（14 分）设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其余}\end{cases}$，

对 $X$ 独立地重复观察 3 次，用 $Y$ 表示观察值大于 $\dfrac{\pi}{6}$ 的次数，试求：

(1) $Y$ 的分布律； (2) $Y$ 的分布函数 $F_Y(y)$； (3) $E(Y^2)$.

解：(1) Y 的分布律：

$P(X>\dfrac{\pi}{6})=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}\cos x dx=\dfrac{1}{2}\sin x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{4}=0.25$，从而 $Y\sim B(3,0.25)$

| Y | 0 | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 概率 | $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ | $3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2$ | $3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1$ | $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ |

(2) Y 的分布函数：

$$F(y)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 27/64 & 0\le x<1 \\ 54/64 & 1\le x<2 \\ 63/64 & 2\le x<3 \\ 1 & 3\le x \end{cases}$$

(3) $E(Y^2)=D(Y)+\left(E(Y)\right)^2=3*0.25*0.75+(3*0.25)^2=1.125$

四．（12 分）设随机变量 $X$ 的概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-x^2+2x-1}{2}}$，$-\infty<x<+\infty$，记随机变量 $Y=(X-1)^2$，试求：

(1) $Y$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$；

(2) $\mathrm{E}(Y)$.

解：(1) Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$：

当 $y$ >0 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(\left(X-1\right)^2\le y\right)=P(1-\sqrt{y}\le X\le 1+\sqrt{y})$，所以 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)=\left(F_Y(y)\right)'=f(1+\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}+f(1-\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\cdot e^{-\frac{y}{2}}$，综合可得：

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\cdot e^{-\frac{y}{2}} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$$

(2) $E(Y)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\cdot e^{-\frac{y}{2}}dy=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{\sqrt{y}^2}{2}}d\sqrt{y}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}$

五.（16 分）抛一枚均匀硬币两次，规定硬币的两面中一面为正面，另一面为反面，记 $X_i=\begin{cases}1, & 第 i 次出现正面;\\ 0, & 第 i 次出现反面.\end{cases}$ $i=1,\ 2$，令 $Y=X_1+X_2$，

(1) 试求 $(X_1,\ Y)$ 的联合分布律；　　(2) 试求关于 $X_1$，关于 $Y$ 的边缘分布律；

(3) 问 $X_1$ 与 $Y$ 是否相关？为什么？　　(4) 试求 $P(2X_1 \le Y)$.

解：(1) $(X_1,Y)$ 的联合分布律：

| X1 \ Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/4 | 1/4 | 0 |
| 1 | 0 | 1/4 | 1/4 |

表中数据计算如下：

P((X1,Y)=(0,1))=P(X1=0,X2=1)=P(X1=0)P(X2=1)=1/2*(1-1/2)=1/4，其余类推；

(2) X1 和 Y 的边缘分布律分别如下：

| $X_1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 概率 | 1/2 | 1/2 |

| $Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 概率 | 1/4 | 1/2 | 1/4 |

(3) $X_1$ 与 Y 相关，因为 $E(X_1Y)=1*1*1/4+1*2*1/4=3/4$，而 $E(X_1)=1/2$，$E(Y)=1$，

显然，$E(X_1Y)\ne E(X_1)\cdot E(Y)$；

(4) $P(2X_1 \le y)=P(X_1=0,Y=0)+P(X_1=0,Y=1)+P(X_1=0,Y=2)+P(X_1=1,Y=2)=3/4$

六.（16 分）设二维随机变量 $(X,\ Y)$ 在边长为 $\sqrt{2}$ cm 的正方形内服从均匀分布，该正方形之对角线为坐标轴，试求：

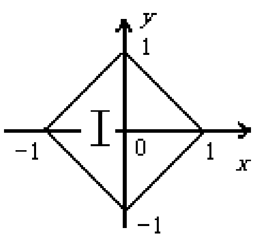
(1) $(X,\ Y)$ 的联合密度函数；

(2) 试求关于 $X$，关于 $Y$ 的边缘密度函数 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；

(3) 问 $X$ 与 $Y$ 是否独立；

(4) 试求 $P(|X| \le Y)$.

解：(1) $(X_1,Y)$ 的联合密度函数：

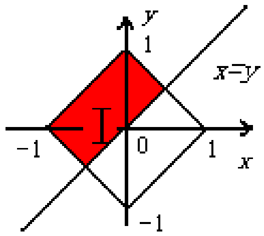


$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x,y)\in I\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$$

(2) 因为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$，从而可得：$f_X(x)=\begin{cases}1+x & -1<x<0\\ 1-x & 0\le x<1\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$，同理可得：

$$f_Y(y)=\begin{cases}1+y & -1<y<0\\ 1-y & 0\le y<1\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$$

(3) 由上显然可知：$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立；

(4) 

显然，红色部分就是 $|X|\le Y$ 的部分，所以 $P(|X|\le Y)=1/2$

七.（10 分）设 $X$ 服从参数为 4 的泊松分布，$Y$ 服从参数为 2 的指数分布，且 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$，试求：

(1) $E(XY)$；

(2) $D(X+Y)$.

解：(1) $E(X)=D(X)=4$，$E(Y)=1/2$，$D(Y)=(1/2)^2=1/4$，$\rho_{XY}=\frac{E(XY)-E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$

所以有 $E(XY)=\rho_{XY}\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}+E(X)\cdot E(Y)=\frac{1}{2}*2*\frac{1}{2}+4*\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$

(2) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)-2\rho_{XY}\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}=4+\frac{1}{4}-2*\frac{1}{2}*2*\frac{1}{2}=3\frac{1}{4}$

八.（10 分）某保险公司多年的统计资料表明，在索赔户中被盗索赔户占 20%，以 $X$ 表示在随机抽查的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数，试求被盗索赔户不少于 16 户且不多于 28 户的概率（用中心极限定理解题）.

解：$X\sim B(100,0.2)$，所求概率为

$$P(16\le X\le 28)\approx P\left(\frac{16-100*0.2}{\sqrt{100*0.2*0.8}}\le\frac{X-100*0.2}{\sqrt{100*0.2*0.8}}\le\frac{28-100*0.2}{\sqrt{100*0.2*0.8}}\right)$$

$$= \ =\Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)+\Phi(1)-1$$

答：被盗索赔户不少于 16 户且不多于 28 户的概率为 $\Phi(2)+\Phi(1)-1$。

# 《概率统计》试卷 1

专业________________ 学号________________ 姓名________________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

**（本试卷共三大张，八大题，满分 100 分）**

备用数据：$\chi^2_{0.90}(9)=14.684$，$\chi^2_{0.10}(9)=4.168$，$t_{0.90}(8)=1.3968$，$\Phi(1)=0.8413$，

$\Phi(2)=0.9772$，$t_{0.95}(9)=1.8331$，$t_{0.95}(8)=1.8595$，$\chi^2_{0.95}(8)=15.507$，

$\chi^2_{0.05}(8)=2.733$，$e^{-1}\approx 0.37$

一．（10 分）已知随机变量 $X$ 服从参数为 1 的泊松分布，即 $X$ 有概率函数 $P(X=k)=\dfrac{e^{-1}}{k!}$ $(k=0,1,\cdots)$，并记事件 $A=\{X\geq 2\}$，$B=\{X<1\}$，求 $P(A\cup B)$，$P(A-B)$，$P(B|\overline{A})$.

解：$P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\overline{B})=1-P(X=1)=1-e^{-1}$，

$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(X\geq 2)-0=1-P(X\leq 1)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-2e^{-1}$

$$P(B|\overline{A})=\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\frac{P(X=0)-0}{P(X=0)+P(X=1)}=\frac{e^{-1}}{2e^{-1}}=\frac{1}{2}$$

二．（10 分）对以往数据分析结果表明，当机器运转正常时，产品的合格率为 90%；而当机器发生故障时，其合格率为 30%，机器开动时，机器运转正常的概率为 75%，试求已知某日首件产品是合格品时，机器运转正常的概率．

解：设事件 A 为机器运转正常，事件 B 为合格品。已知：$P(B|A)=0.9$，$P(B|\overline{A})=0.3$，$P(A)=0.75$

所求概率为 $P(A|B)$：

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\frac{0.75*0.9}{0.75*0.9+0.25*0.3}=0.9$$

答：已知某日首件产品是合格品时，机器运转正常的概率为 0.9。

三．（12 分）设 $(X,Y)$ 为二维离散型随机变量，$X$，$Y$ 的边缘概率函数分别为

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 概率 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

| $Y$ | $-1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| 概率 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

且 $P(XY=0)=1$，

(1) 求 $(X,Y)$ 的联合概率函数；　　(2) 试问：$X$，$Y$ 是否相互独立？为什么？

(3) 试问：$X$、$Y$ 是否不相关，为什么？

解：(1)因为 $P(XY=0)=1$，所以 $P(XY\neq 0)=0$，从而可知，$P(X=1,Y=-1)=0$，$P(X=1,Y=1)=0$，又因为 $P(X=1)=1/3$，而 $P(X=1)=P(X=1,Y=-1)+P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)$，所以 $P(X=1,Y=0)=1/3$。类似可得其余几个概率，从而得（X，Y）的联合概率函数如下：

| X \ Y | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/4 | 1/6 | 1/4 |
| 1 | 0 | 1/3 | 0 |

（2）X 与 Y 不独立，这是因为 $P(X=1)=1/3$，$P(Y=-1)=1/4$，但是 $P(X=1,Y=-1)=0$，即 $P(X=1,Y=-1)\neq P(X=1)P(Y=-1)$；

（3）X 与 Y 不相关，这是因为 $E(X)=1/3$，$E(Y)=-1*(1/4)+0*(1/2)+1*(1/4)=0$，而 $E(XY)=0$，从而有 $E(XY)=E(X)E(Y)$。

四.（14 分）设 $(X, Y)$ 的联合密度函数为 $f(x, y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,\ 且\ y>0\\ 0, & 其余\end{cases}$

试求：(1) $P(X<1, Y>2)$；　　(2) $P(X+Y<1)$.

解：因为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-x}\cdot 2e^{-2y} & x>0,y>0\\ 0 & 其余\end{cases}$，显然 $X\sim E(1)$，$Y\sim E(2)$，从而可得：

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 独立。

(1) $P(X<1,Y>2)=P(X<1)P(Y>2)=(1-e^{-1})(1-e^{-2})$

(2) $P(X+Y<1)=\int_0^1 e^{-x}dx\int_0^{1-x}2e^{-2y}dy=\int_0^1 e^{-x}(1-e^{-2(1-x)})dx=1-2e^{-1}+e^{-2}$

五.（12 分）假设一条生产流水线在一天内发生故障的概率为 0.1，流水线发生故障时全天停止工作，若一周 5 个工作日中无故障这条流水线可产生利润 20 万元，一周内发生一次故障时，仍可获利润 6 万元，发生二次或二次以上故障就要亏损 2 万元，求一周内这条流水线所产生利润的期望值.

解：设 X 为一周内发生故障的次数，则由题意可知：$X\sim B(5,0.1)$，设 Y 代表这条流水线所产生的利润，则 Y 的取值为：

$Y=\begin{cases}20 & X=0\\ 6 & X=1\\ -2 & X\geq 2\end{cases}$，其相应的分布律为：

| Y | 20 | 6 | -2 |
|---|---|---|---|
| Pr | $0.9^5$ | $5*0.1*0.9^4$ | $1-1.4*0.9^4$ |

从而可得 Y 的期望值：

$E(Y)=20*0.9^5+6*0.5*0.9^4-2*(1-1.4*0.9^4)=13.62$

答：一周内这条流水线所产生的利润的期望值为 13.62 万元。

六.（12 分）假设生产线上组装每件成品所花费的时间服从指数分布．统计资料表明：该生产线每件成品的平均组装时间为 10 分钟．假设各件产品的组装时间相互独立．试求在 15 小时至 20 小时之间在该生产线组装完成 100 件成品的概率．（要求用中心极限定理）

解：设 X 代表组装每件成品所花费的时间，则 $X \sim E(k)$，因为 $E(X)=\frac{1}{k}=\frac{10}{60}$，所以 $k=6$，

即 $X \sim E(6)$。设 $X_i$ 为 100 件成品中第 $i$ 件，则所求概率为

$$P(15 \le \sum_{i=1}^{100} X_i \le 20) \approx P\left(\frac{15-100*\frac{1}{6}}{\sqrt{100*\frac{1}{6^2}}} \le \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100*\frac{1}{6}}{\sqrt{100*\frac{1}{6^2}}} \le \frac{20-100*\frac{1}{6}}{\sqrt{100*\frac{1}{6^2}}}\right) = \Phi(2)-\Phi(-1)$$

$$=\Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)+\Phi(1)-1=0.9772+0.8413-1=0.8185$$

答：15 小时至 20 小时之间在该生产线组装完成 100 件成品的概率为 0.8185。

七．（16 分）设 $(X_1, \cdots, X_n)$ 是取自总体 $X$ 的一个样本，$X$ 服从区间 $[\theta, 1]$ 上的均匀分布，其中 $\theta$ 未知，$\theta < 1$，

(1) 求 $\theta$ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$；

(2) 求 $\theta$ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_2$；

(3) 试问：由(2)中求得的 $\theta$ 的估计量 $\hat{\theta}_2$ 是否为 $\theta$ 的无偏估计？若不是，试将 $\hat{\theta}_2$ 修正成 $\theta$ 的一个无偏估计.

解：(1) $E(X)=\frac{\theta+1}{2}$，由 $E(X)=\bar{X}$ 可得：$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}-1$；

(2) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1-\theta}\right)=\frac{1}{(1-\theta)^n}$，所以可得 $\hat{\theta}_2 = X(1)$

(3) 此 $\hat{\theta}_2$ 不是 $\theta$ 的无偏估计。首先，$X_1$ 的密度函数为：

$$f_{X_1}(x)=\begin{cases} \frac{1}{1-\theta} & \theta < x < 1 \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$，其相应的分布函数为：$$F_{X_1}(x)=\begin{cases} 0 & x<\theta \\ \frac{x-\theta}{1-\theta} & \theta \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x \end{cases}$$，

$X(1)$ 的分布函数和密度函数分别为：

$$F_{X(1)}(t)=\begin{cases} 0 & t<\theta \\ 1-\left(\frac{1-t}{1-\theta}\right)^n & \theta \le t < 1 \\ 1 & 1 \le t \end{cases}，\quad f_{X(1)}(t)=\begin{cases} \frac{n(1-t)^{n-1}}{(1-\theta)^n} & \theta < t < 1 \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$

$$E(\hat{\theta}_2)=E(X(1))=E(\min(X_1,\cdots,X_n))=\int_\theta^1 t\frac{n(1-t)^{n-1}}{(1-\theta)^n}dt=\frac{n\theta+1}{n+1}\neq\theta，$$

取 $\hat{\theta}_3=\frac{(n+1)X(1)-1}{n}$，则 $\hat{\theta}_3$ 为 $\theta$ 的无偏估计。

八. （14 分）已知某种食品的袋重（单位：千克）服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，其中 $\mu$ 与 $\sigma^2$ 均未知，$-\infty < \mu < \infty$，$\sigma^2 > 0$，现抽取 9 袋食品进行称重，得数据 $x_1, x_2, \cdots, x_9$，由此算出 $\sum_{i=1}^{9} x_i = 24$，$\sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 72$，试分别求未知参数 $\mu$ 和 $\sigma$ 的双侧 90%置信区间.

解：设 $X_i$ 为第 i 袋食品的袋重，则 $X_1,\cdots,X_9 \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu,\sigma^2)$。由题中数据可得：$\overline{x} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$，

$s^{*2} = \frac{1}{8}\left(72 - 9*(\frac{8}{3})^2\right) = 1$，$t_{0.95}(8) = 1.8595$，$\chi^2_{0.95}(8) = 15.507$，$\chi^2_{0.05}(8) = 2.733$.

参数 $\mu$ 的置信区间为：$(\overline{x} - \frac{s^*}{\sqrt{9}} t_{0.95}(8), \overline{x} + \frac{s^*}{\sqrt{9}} t_{0.95}(8))$，即：(7.38，8.62)．

参数 $\sigma^2$ 的置信区间为：$(\frac{(9-1)s^{*2}}{\chi^2_{0.95}(8)}, \frac{(9-1)s^{*2}}{\chi^2_{0.05}(8)})$，即：(0.516，2.927)

从而有 $\sigma$ 的置信区间为：$(\sqrt{\frac{(9-1)s^{*2}}{\chi^2_{0.95}(8)}}, \sqrt{\frac{(9-1)s^{*2}}{\chi^2_{0.05}(8)}})$，即：(0.718，1.711)

# 《概率统计》试卷 2

专业________ 学号________ 姓名________ 任课教师________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

（**注意：要求写出解题过程．本试卷共三大张，五大题，满分 100 分**）

**备用数据：**$\Phi(1)=0.8413$，$t_{0.90}(3)=1.6377$，$t_{0.95}(3)=2.3534$

一、填空（50 分）

1、 设 $A$、$B$ 为两个随机事件，$P(A)=0.6$，$P(B)=0.4$．若 $A$、$B$ 互不相容，

则 $P(A-B)$=__0.6__，$P(A\cup B)$=__1__，$P(\overline{A}|\overline{B})$=__0__；

若 $A$、$B$ 有包含关系，则 $P(A-B)$=__0.2__，$P(A\cup B)$=__0.6__，$P(\overline{A}|\overline{B})$=__2/3__．

2、 学生甲和朋友约定：在三门完全不同的课程考试中，他只要有一门考试取得 95 分以上就开香槟酒庆祝．若甲在这三门课程考试中得 95 分以上的概率分别为 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$，则他们开香槟酒庆祝的概率为__0.75__．

3、 一只袋中装有 5 只白球和 4 只黑球，现不放回地随机取出三只球，每次取一只，共取三次，则这三只球依次为黑球、白球、黑球的概率为__5/42__，取出的第二个球为黑球的概率为__4/9__．若已知第二次取到黑球，则第一次取到黑球的概率为__3/8__．

4、 设 $(X, Y)$ 服从区域 $G$ 上的均匀分布，其中 $G=\{(x, y): 0<y<1, |x|<y\}$，

则 $(X, Y)$ 的联合密度函数 $f(x, y)$=__$\begin{cases}1 & (x,y)\in G\\ 0 & 其余\end{cases}$__，$X$ 的边缘密度函数

$f_X(x)$=__$\begin{cases}1-|x| & -1<x<1\\ 0 & 其余\end{cases}$__，$Y$ 的边缘密度函数 $f_Y(y)$=__$\begin{cases}2y & 0<y<1\\ 0 & 其余\end{cases}$__．

5、 设 $X_1$、$X_2$、$X_3$、$X_4$ 独立同分布，$X_1\sim N(\mu, 1)$，$\overline{X}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}X_i$，则 $X_1-\overline{X}$

与 $X_2-\overline{X}$ 的协方差 $\mathrm{cov}(X_1-\overline{X}, X_2-\overline{X})$=__$-\frac{1}{4}$__，$X_1-\overline{X}$ 与 $X_2-\overline{X}$ 的相

关系数 $\rho_{X_1-\overline{X}, X_2-\overline{X}}$= __$-\frac{1}{3}$__．

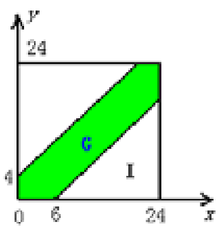
6、 设 $X_1$、$X_2$、$X_3$、$X_4$、$X_5$ 是独立同分布的随机变量，$X_1 \sim N(0,\ 1)$，记 $Y = C_1(X_1 + X_2 + X_3)^2 + C_2(X_4 + X_5)^2$，其中 $C_1$、$C_2$ 为常数，那么，当 $C_1$= 1/3 ，$C_2$= 1/2 时，$Y$ 服从自由度为 2 的 $\chi^2$ 分布.

7、 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的随机变量 $n \ge 2$，$X_1 \sim R(0,\ 2)$，记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$，$A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$，则 $E(\overline{X})$= 1 ，$D(\overline{X})$= $\frac{1}{3n}$ ，$E(S^2)$= $\frac{1}{3}$ ，$E(A_2)$= $1\frac{1}{3}$ .

8、 设 $x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4$ 是取自正态总体 $N(\mu,\ \sigma^2)$ 的样本观测值，其中 $\mu$、$\sigma^2$ 未知，$-\infty < \mu < \infty$，$\sigma^2 > 0$，已知 $\sum_{i=1}^{4} x_i = 24$，$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 147$，那么 $\sigma^2$ 的极大似然估计值为 $\frac{3}{4}$ ，$\mu$ 的双侧 90%置信区间为 (4.8233, 7.1767) .

二、(10 分)某镇的码头只能容纳一艘船，现预知某日将独立地来到两艘船，且在 24 小时内各时刻来到的可能性相同. 如果它们需要停靠的时间分别为 4 小时和 6 小时，试求二艘船中至少有一艘船在停靠时必须等待的概率.

解：设 X 为甲船到达时间，其停靠时间为 4 小时，Y 为乙船到达时间，其停靠时间为 6 小时，则可知：$0 < X \le 24$，$0 < Y \le 24$，乙船先到，甲船需要等待的条件为：$Y - X \le 4$，甲船先到，乙船需要等待的条件为：$X - Y \le 6$，所以 $(X, Y)$ 服从 I 上的均匀分布，二艘船至少有一艘船在停靠时必须等待的范围为 G，所以此概率为 $S_G / S_I = 1 - \frac{1/2*(20*20+18*18)}{24*24} = 0.3715$。



三、（14 分）设随机变量 $(X,\ Y)$ 的联合概率函数为

| $X \backslash Y$ | $-1$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $\frac{5}{20}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{10}$ |
| $2$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{1}{20}$ |

记 $U = \max(X,\ Y)$，$V = \min(X,\ Y)$，$Z = XY$，求

(1) $Z$ 的概率函数；　　　　(2) $(U,\ V)$ 的联合概率函数；

(3) 已知事件 $\{U = 2\}$ 发生时 $V$ 的条件概率函数.

解：(1) Z 的概率函数为：

| Z | -2 | -1 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Pr | 9/20 | 2/20 | 5/20 | 3/20 | 1/20 |

（2）P(U=2,V=-1)=P(max(X,Y)=2,min(X,Y)=-1)=P(X=2,Y=-1)+P(X=-1,Y=2)=9/20，类似可得(U,V)的联合概率函数为：

| U \ V | -1 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| -1 | 5/20 | 0 | 0 |
| 1 | 1/10 | 0 | 0 |
| 2 | 9/20 | 3/20 | 1/20 |

（3）P(V=-1|U=2)=P(V=-1,U=2)/P(U=2)=3/13，其余类似可得。

已知事件{U=2}发生时 V 的条件概率函数为：

| V | -1 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| Pr | 9/13 | 3/13 | 1/13 |

四、（10 分）设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立，且 $X \sim N(-1,\ 7)$、$Y \sim N(3,\ 1)$，

记 $Z = 3X + Y$，$W = e^Z$，求

(1) 随机变量 $Z$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$；

(2) 随机变量 $W$ 的概率密度函数 $f_W(w)$.

解：(1) 因为随机变量 X 与 Y 相互独立，所以 Z 服从正态分布。E(Z)=3E(X)+E(Y)=0，D(Z)=9D(X)+D(Y)=64，所以，Z 服从正态分布 N(0,64)。随机变量 Z 的概率密度函数为：

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 8} e^{-\frac{z^2}{128}}, -\infty < z < +\infty$$

(2) 当 $w>0$，$F_W(w) = P(W \le w) = P(e^Z \le w) = P(Z \le \ln w) = \int_{-\infty}^{\ln w} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 8} e^{-\frac{z^2}{128}} dz$

两边求导，可得：$f_W(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 8w}e^{-\frac{\ln w^2}{128}}$，综合可得：$f_W(w)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 8w}e^{-\frac{\ln w^2}{128}} & w>0\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$

五、(16 分)设 $X_1$，$X_2$，···，$X_n$ 是取自总体 $X$ 的样本，$X$ 服从泊松分布 $P(\lambda)$，$\lambda>0$，$\lambda$ 未知，

(1) 求 $\lambda$ 和 $\theta=E(X^2)$ 的极大似然估计量 $\hat{\lambda}$ 和 $\hat{\theta}$；

(2) 问：$\theta=E(X^2)$ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}$ 是 $\theta$ 的无偏估计吗？

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\overline{X}-\lambda\right|<\sqrt{\frac{\lambda}{n}}\right)$，其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$．

解：(1) $L(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}X_i}}{X_1!\cdots X_n!}e^{-n\lambda}$ $\quad \ln L(\lambda)=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\ln\lambda-\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i!-n\lambda$

求导 $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{\hat{\lambda}}-n=0$，从而可得：$\hat{\lambda}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{n}=\overline{X}$。

$\theta=E(X^2)=D(X)+(E(X))^2=\lambda+\lambda^2$，所以 $\hat{\theta}=\hat{\lambda}+\hat{\lambda}^2=\overline{X}+\overline{X}^2$

(2) $\theta$ 的极大似然估计 $\hat{\theta}$ 不是 $\theta$ 的无偏估计，这是因为

$$E\left(\hat{\theta}\right)=E\left(\overline{X}\right)+E\left(\overline{X}^2\right)=E\left(\overline{X}\right)+D\left(\overline{X}\right)+\left(E(\overline{X})\right)^2=\lambda+\frac{\lambda}{n}+\lambda^2\neq\theta$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}P(\left|\overline{X}-\lambda\right|<\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{n}})=\lim\limits_{n\to\infty}P(\frac{\sqrt{n}\left|\overline{X}-\lambda\right|}{\sqrt{\lambda}}<1)=\Phi(1)-\Phi(-1)$

$=2\Phi(1)-1=2*0.8413-1=0.6827$