第 4 章　向量组的线性相关性

1. 向量和向量组

1.1. 线性方程组 $Ax = b$ 的向量组合形式

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

解上述方程组 $=\!=\!=$ 寻找三个向量的 线性组合, 使之等于某个向量.

一般地，设 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 则方程 $Ax = b$ 可写为

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b.$$

1.2. n 维向量：n 元有序数组

两类

(i) 行向量

(ii) 列向量

($Ax = b$ 的解 x 也称为 解向量)

1.3. 向量组：若干个同型 (同维同类) 向量组成的集合.

(a) 矩阵 $A_{m\times n}$ 可以看成 m 个行向量构成的向量组,
也可以看成 n 个列向量构成的向量组.

(b) $Ax = b$ 的所有解向量构成一个向量组，可能有无限个.

(c) 所有的 n 维 (实) 向量构成一个向量组，记为 $\mathbb{R}^n$.

1.4. 向量的 (线性) 运算：就是矩阵的加法和数乘.

1.5. 本章目的：

(i) 将线性方程组的矩阵理论翻译成向量理论;

(ii) 发展向量理论;

(iii) 利用向量语言来表达线性方程组的解.

2. 向量的线性组合

2.1. 向量组 $\mathcal{A}=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 的一个 **线性组合**:
是一个向量，一般形式为

$$x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k,\quad x_i\in\mathbb{R}.$$

(i) $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 称为这个线性组合的系数;
(ii) $0a_1+0a_2+\cdots+0a_k$ 称为平凡线性组合;
(iii) 系数不同的线性组合可能是同一个向量.

2.2. 设矩阵 $A_{m\times n}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 则 $Ax=b$ 有解
$\Longleftrightarrow$ 存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使得 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n=b$
$\Longleftrightarrow$ 向量 b 可以表示为 $\mathcal{A}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的一个线性组合
$\overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow}$向量 b 能由 $\mathcal{A}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$**线性表示**(线性表出).$(b\hookrightarrow\mathcal{A})$

2.3. **定理**. 向量 b 能由 $\mathcal{A}=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 线性表示
$\Longleftrightarrow R(a_1,a_2,\cdots,a_k)=R(a_1,a_2,\cdots,a_k,b)$.

2.4. **例**. 设 $\alpha_1=(0,1,2,3)^T,\alpha_2=(2,2,3,1)^T$,
$\alpha_3=(-1,2,1,2)^T,\beta=(2,1,-1,x)^T$.
问 x 取何值时， β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？
解:
β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示 $\Longleftrightarrow R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)$

$$\begin{pmatrix}0&2&-1&2\\1&2&2&1\\2&3&1&-1\\3&1&2&x\end{pmatrix}\xrightarrow{row}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&3&3\\0&0&7&4\\0&0&0&7x+40\end{pmatrix}$$

当 $7x+40=0$ 时， $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=3$.

2.5. **组组关系**
(i) 向量组 $\mathcal{B}$ 可由向量组 $\mathcal{A}$ 线性表示：记为 $\mathcal{B}\hookrightarrow\mathcal{A}$;
(ii) 向量组 $\mathcal{B}$ 与向量组 $\mathcal{A}$ 等价：记为 $\mathcal{B}\leftrightarrow\mathcal{A}$

2.6. **定理**. 设矩阵 $A_{m\times n}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),B_{m\times s}=(b_1,b_2,\cdots,b_s)$, 则
$R(A)=R(A,B)$
$\Longleftrightarrow$ 矩阵方程 $AX=B$ 有解
$\Longleftrightarrow$ 存在 $X=(x_{ij})$

使得 $x_{1j}a_1 + x_{2j}a_2 + \cdots + x_{nj}a_n = b_j, \quad j = \overline{1, s}.$

$\Longleftrightarrow$ 任意向量 b_j 能由 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 线性表示.

$\Longleftrightarrow$ $\{b_1, b_2, \cdots, b_s\} \hookrightarrow \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

2.7. **推论**.

(i) $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A} \Longrightarrow R(B) \le R(A)$;

(ii) $\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{A} \Longleftrightarrow R(A) = R(A, B) = R(B)$.

2.8. **线性表示的各种说法**

向量组 $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$ 能由 $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 线性表示

$\Longleftrightarrow$ 存在矩阵 K, 使得 $B = AK$

$\Longleftrightarrow$ $AX = B$ 有解

$\Longleftrightarrow$ $R(A) = R(A, B)$

2.9 **例**：判断 $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}, \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{A}$

(Step 1) 对 (A, B) 进行初等行变换，同时得到 $R(A), R(A, B)$

若 $R(A) = R(A, B)$, 则 $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$;

(Step 2) 再算 $R(B)$, 若 $R(B) = R(A) = R(A, B)$, 则 $\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{A}$.

3. 向量组的线性相关性

3.1. 线性表示不一定唯一.

若

$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ma_m = b$

$\bar{x}_1a_1 + \bar{x}_2a_2 + \cdots + \bar{x}_ma_m = b$

则

$(x_1 - \bar{x}_1)a_1 + (x_2 - \bar{x}_2)a_2 + \cdots + (x_m - \bar{x}_m)a_m = \theta.$

线性表示是否唯一，关键在于向量组有几种组合能表示零向量.

3.2. **线性相关**：设向量组 $\mathcal{A} = \{a_1, \cdots, a_m\}$,

若存在 不全为零 的实数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使得

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_ma_m = \theta,$$

则称向量组 $\mathcal{A}$ 线性相关.

3.3. **线性无关**：向量组 $\mathcal{A}$ 不是线性相关的，即不存在 θ 的非平凡表示.

换言之，任意 θ 的线性表示必为平凡的，即

$$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m=\theta \Longrightarrow k_1=k_2=\cdots=k_m=0.$$

3.4. **性质**.

(1) 若 $b\hookrightarrow\mathcal{A}$, 且 $\mathcal{A}$ 线性无关，则 b 的表示方式唯一.

(2) 若 $\mathcal{A}$ 线性相关，则其中必有一个向量可以用其余向量来线性表示.

(3) 若向量组中含 θ, 则必然线性相关.

(4) 若向量组中含两个相同的向量，则必然线性相关.

3.5. **按定义证明线性相关**：找不全为零的系数.

按定义证明线性无关：

假设 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m=\theta$,

想尽办法去证明 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$.

例. 设 $\{a_1,a_2,a_3\}$ 线性无关，证明：

$b_1=a_1+a_2, b_2=a_2+a_3, b_3=a_3+a_1$ 线性无关.

证明：

设 $k_1b_1+k_2b_2+k_3b_3=0$, 则

$(k_1+k_3)a_1+(k_1+k_2)a_2+(k_2+k_3)a_3=0$.

因为 $\{a_1,a_2,a_3\}$ 线性无关，所以

$k_1+k_3=k_1+k_2=k_2+k_3=0$,

于是 $k_1=k_2=k_3=0$.

因此 b_1,b_2,b_3 线性无关.

3.6. **线性相关性判定定理**：

(i) 向量组 $\mathcal{A}=\{a_1,\cdots,a_n\}$线性相关

$$\Longleftrightarrow (a_1,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0 \text{ 有非零解}.$$

$\Longleftrightarrow R(a_1,a_2,\cdots,a_n)<n$ (秩 $<$ 向量个数)

(ii) 向量组 $\mathcal{A}=\{a_1,\cdots,a_n\}$线性无关

$$\Longleftrightarrow (a_1,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0 \text{ 只有零解}.$$

$\Longleftrightarrow R(a_1,a_2,\cdots,a_n)=n$ (秩 $=$ 向量个数，列满秩)

前例. $(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = AK$

a_1, a_2, a_3 线性无关 $\Longrightarrow R(A) = 3$

$|K| \neq 0 \Longrightarrow K$ 可逆 $\Longrightarrow R(A) = R(AK) = R(B) = 3$

因此 b_1, b_2, b_3 线性无关.

3.7. **推论**：若 $\mathcal{A}$ 中 向量个数 > 向量维数，则 $\mathcal{A}$ 必然 线性相关.

(个数越多，越可能相关；维数越高，越可能无关.)

证明：

$R(A) \leq A$ 的行数 = 向量维数 < 向量个数 $= A$ 的列数.

3.8. **定理**：**(向量个数 = 向量维数，相关性的判定)**

设 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是方阵，则

$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 线性无关 $\Longleftrightarrow R(A) = n \Longleftrightarrow |A| \neq 0$.

3.9. **定理**：**(个数的增减与相关性)**

(i) 线性相关组的扩充还是线性相关组

$\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 相关 $\Longrightarrow \{a_1, a_2, \cdots, a_m, a_{m+1}, \cdots, a_{m+p}\}$ 相关;

(ii) 线性无关组的一部分还是线性无关组

$\{a_1, a_2, \cdots, a_m, a_{m+1}, \cdots, a_{m+p}\}$ 无关 $\Longrightarrow \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 无关.

证明：

$R(a_1, a_2, \cdots, a_m, a_{m+1}, \cdots, a_{m+p})$

$\leq R(a_1, a_2, \cdots, a_m) + R(a_{m+1}, \cdots, a_{m+p})$

$\leq R(a_1, a_2, \cdots, a_m) + p$

3.10. **定理**：若 $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 线性无关，

$\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \cdots, a_m, b\}$ 线性相关，则 $b \hookrightarrow \mathcal{A}$ (且表示唯一).

证明：

3.11. 判定线性无关的方法总结.

(1) 定义

(2) 齐次方程组 $Ax = 0$ 只有零解

(3) 秩 = 个数

(4) 行列式 $\neq 0$

3.12. **例.** 设 $B_{m\times r} = A_{m\times s}K_{s\times r}$，其中 A 的列向量组线性无关.

求证：B 的列向量组线性无关 $\Longleftrightarrow R(K) = r$.

证明：
B 的列向量组线性无关 $\Longleftrightarrow Bx=0$ 只有零解
$\Longleftrightarrow (AK)x=A(Kx)=0$ 只有零解.

A 的列向量组线性无关 $\Longrightarrow A$ 列满秩,
因此
$A(Kx)=0$ 只有零解 $\Longleftrightarrow Kx=0$ 只有零解
$\Longleftrightarrow K$ 的列向量组线性无关 $\Longleftrightarrow R(K)=r$.

3.13. **例.** 设向量组 a_1,a_2,a_3 线性相关，向量组 a_2,a_3,a_4 线性无关，证明：
(1) $a_1 \hookrightarrow \{a_2,a_3\}$;
(2) $a_4 \not\hookrightarrow \{a_1,a_2,a_3\}$.
证明：
(1) $R(a_1,a_2,a_3)<3$, $R(a_2,a_3,a_4)=3$.
$R(a_2,a_3)=2$,
$R(a_1,a_2,a_3)\geq R(a_2,a_3)=2$.
(2) $R(a_1,a_2,a_3)=2$,
$R(a_1,a_2,a_3,a_4)\geq R(a_2,a_3,a_4)=3$.

4. 向量组的秩

4.1. 有限时可用矩阵来定义，无限时怎么办？

4.2. **最大 (线性) 无关组**：若 $\mathcal{A}$ 的一个子组 $\mathcal{A}_0=\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$ 满足
(i) $\mathcal{A}_0$ 线性无关,
(ii) $\forall a\in\mathcal{A}$, $\{a_1,a_2,\cdots,a_r,a\}$ 线性相关,
则称 $\mathcal{A}_0$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个最大无关组.

4.3. **定理：（等价描述）**
设
(ii)$'$ $\forall a\in\mathcal{A}, a\hookrightarrow\mathcal{A}_0$; (与 $\mathcal{A}$ 等价的无关子组)
(ii)$''$ $\mathcal{A}$ 中任意 $(r+1)$ 个向量必线性相关. (个数最大的无关子组)
则有
(i)+(ii)$\Longleftrightarrow$(i)+(ii)$'$ $\Longleftrightarrow$(i)+(ii)$''$.
证明：

显然有 (i)+(ii)$\Longleftrightarrow$(i)+(ii)$'$ $\Longleftarrow$(i)+(ii)$''$.
下证 (i)+(ii)$'$ $\Longrightarrow$(i)+(ii)$''$.
设 $\mathcal{B}=\{b_1,b_2,\cdots,b_{r+1}\}$, 则

$$b_i \hookrightarrow \mathcal{A}_0 \Longrightarrow \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}_0 \Longrightarrow R(B) \leq R(\mathcal{A}_0) = r < r+1$$

所以， $\mathcal{B}$ 线性相关.

4.4. **最大无关组的存在性**. (有限维情形)
(i) 任一线性无关子组可扩充为一个最大无关组.
(ii) 含有非零向量的向量组必有最大无关组.

4.5. **命题**. $\mathcal{A}$ 的任意两个最大无关组一定等价, 并且它们所含向量个数一样.

4.6. **向量组的秩**. $R_{\mathcal{A}}=\mathcal{A}$ 的最大无关组里向量的个数.

4.7. **定理**. 矩阵列向量组的秩 (列秩)= 矩阵的秩 = 矩阵行向量组的秩 (行秩).
证明:
只证第一个，另一个转置即可.

设 $R(A)=r$, 要证 $R_{\mathcal{A}}=r$.
A 中可以找到一个 r 阶非零子式, 该非零子式所在的 r 个列构成矩阵 A_0.
下证 A_0 的列向量组是 $\mathcal{A}$ 的一个最大无关组.

(i) A_0 有一个 r 阶非零子式,

$$r \leq R(A_0) \leq R(A) = r.$$

线性无关判定定理 $\Longrightarrow$ A_0 的列向量组线性无关.

(ii)$''$ A 的任意 $(r+1)$ 列构成的矩阵 B,

$$R(B) \leq R(A) = r < r+1$$

线性相关判定定理 $\Longrightarrow$ B 的列向量组线性相关.

4.8. **推论**. $\mathcal{A}$ 的一个无关组 $\mathcal{A}_0$ 是最大无关组的充要条件是

$$R_{\mathcal{A}} = R_{\mathcal{A}_0} = R(A_0).$$

4.9. 利用最大无关组，化无限为有限，
可以将有限向量组的秩定理推广到无限向量组.

定理:

(a) $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A} \Longleftrightarrow R_{\mathcal{A}} = R_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}$.

(b) $\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{A} \Longleftrightarrow R_{\mathcal{A}} = R_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} = R_{\mathcal{B}}$.

(c) 若 $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$, 则 $R_{\mathcal{B}} \leq R_{\mathcal{A}}$.

证明:

(a) 设 $\mathcal{B}$ 的一个最大无关组为 $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{A}$ 的一个最大无关组为 $\mathcal{A}_0$, 则

$$\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{B}_0, \quad \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{A}_0, \quad \mathcal{A}\cup\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{A}_0\cup\mathcal{B}_0.$$

$$\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}_0 \hookrightarrow \mathcal{A}_0 \Longleftrightarrow R_{\mathcal{A}_0} = R_{\mathcal{A}_0\cup\mathcal{B}_0} \Longleftrightarrow R_{\mathcal{A}} = R_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}.$$

(b)

(c)

4.10. 向量组的秩与最大无关组的求法.

设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$, 求 A 的 列向量组 的秩，及一个最大无关组.

解:

(Step 1) 进行初等 行变换, 化 A 为行阶梯.

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到 $R(A) = 3$.

(Step 2) 找到首元列 1,2,4; 在原矩阵 A 中找到相应的列 1,2,4. 则

$$(a_1, a_2, a_4) \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $R(a_1, a_2, a_4) = 3$, 进而 $\{a_1, a_2, a_4\}$ 是一个最大无关组.

5. 向量空间

5.1. 向量空间 V：关于向量加法和数乘封闭的向量组.
(一种特殊的向量组)(对任意线性组合封闭)

5.2. 验证 V 是向量空间只要验证两条:
(i) 对于任意 $a, b \in V$, 证明 $a + b \in V$;
(ii) 对于任意 $a \in V, \lambda \in \mathbb{R}$, 证明 $\lambda a \in V$.

5.3. 向量空间举例.
(i) $V = \{0_{n\times 1}\}$;
(ii) $V = \mathbb{R}^n$;
(iii) $V = \mathrm{span}\{a_1, \cdots, a_m\} = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m : \lambda_i \in \mathbb{R}\}$.

5.4. 基 (basis)，维数 (dimension)
(i) 基= 最大无关组;　　不唯一
(ii) 维数= 秩.　　记为 $\dim V$
(iii) 零空间没有基，维数 =0.

5.5. **定理：(向量空间结构定理)**
若 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是向量空间 V 的一组基，则

$$V = \{a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m : \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

即 V 由基的全体线性组合构成.
称 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 为向量 a 在基 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 的 坐标.

5.6. 基变换，坐标变换，过渡矩阵.

6. 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 解的结构

6.1. **性质:** $Ax = 0$ 的解集 S 是一个向量空间.
证明：两条.　$A(x + y) = Ax + Ay = 0,\ A(\lambda x) = \lambda(Ax) = 0.$

6.2. $Ax = 0$ 的一个 基础解系 = 解空间 S 的一组 基
(i) 知道基就知道全部;
(ii) 知道基础解系，所有解就是基础解系的线性组合.

6.3. **齐次方程解的结构定理**：

设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系，
则齐次方程 $Ax=0$ 的通解为

$$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_k\xi_k, \quad c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}.$$

6.4. **基础解系的正统求法**：解一遍方程.........

设 $R(A)=r$, 为方便起见，不妨假设 A 是如下形式的行最简形

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$:= c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}.$$

于是， $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 就是 $Ax=0$ 的一个基础解系.

三步验证：

(i)**子组**：$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 都是解； (取特殊的 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$)

(ii) **无关组**：$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性无关； (看它们的下半截)

(iii) **最大组**：$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 可以表示任意其他解. (看通解表达式)

6.5. **定理： (齐次方程解空间的维数)**

n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间 S 的维数

$$\dim S = R_S = n - r = n - R(A).$$

(常用该定理反过来求矩阵的秩)

6.6. **例 (第三章秩性质 8)**：若 $A_{m\times n}B_{n\times l} = O_{m\times l}$, 则 $R(A)+R(B) \le n$.

证明：设 $B=(b_1, b_2, \cdots, b_l)$, 则每个 b_i 都是方程 $Ax=0$ 的解.

记 $Ax=0$ 的解空间为 S, 有 $\mathcal{B}\subset S$

$$R(B)=R_{\mathcal{B}}\le R_S=\dim S=n-R(A).$$

6.7. **例**. 设 A 是 n 阶方阵，求证 $R(A^n)=R(A^{n+1})$.

证明:

设 $A^n x=0$ 和 $A^{n+1}x=0$ 的解空间分别为 S_n 和 S_{n+1}.

要证 $\dim S_n=\dim S_{n+1}$.

可证 $S_n=S_{n+1}$ ，即两方程组同解.

显然有 $S_n\subset S_{n+1}$.

要证 $S_{n+1}\subset S_n$, 即证 $A^{n+1}x=0\Longrightarrow A^n x=0$.

反证法.

假设 $A^n x\neq 0$, 下证 $x,Ax,A^2x,\cdots,A^n x$ 线性无关.

设 $k_0x+k_1Ax+k_2A^2x+\cdots+k_nA^nx=0$

两边乘上 A^n ，得 $k_0A^nx=0\Longrightarrow k_0=0$

两边乘上 A^{n-1}, 得 $k_1A^nx=0\Longrightarrow k_1=0$

依次得到 $k_0=k_1=\cdots=k_n=0$,

$x,Ax,A^2x,\cdots,A^nx$ 线性无关.

但这是 $n+1$ 个 n 维向量，必然线性相关，矛盾.

因此必有 $S_{n+1}\subset S_n$.

6.8. **基础解系求法二**:

设 4 元线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩 $R(A)=3$.

已知有三个解向量 η_1,η_2,η_3 满足

$$\eta_1=(2,3,4,5)^T,\ \ \eta_2+\eta_3=(1,2,3,4)^T.$$

求方程 $Ax=0$ 的一个基础解系.

解:

(Step 1) 判定 $Ax=0$ 解空间 S 的维数,

  $\dim S=n-r=4-3=1$.

  因此基础解系只含一个向量，找一个便可.

(Step 2) 凑一个解 ξ 出来.

  $A\eta_1=A\eta_2=A\eta_3=b$, 要得到 $A\xi=0$

  可取 $\xi=2\eta_1-\eta_2-\eta_3$.

7. 非齐次线性方程组 $Ax=b(\neq 0)$ 解的结构

7.1. $Ax=b$ 的解集 S不再是解空间，无基础解系.

7.2. **性质**：设 η_1,η_2 都是 $Ax=b$ 的解，则 $\eta_1-\eta_2$ 是 $Ax=0$ 的解.

7.3. **性质**：设 η^* 是 $Ax=b$ 的解，ξ 是 $Ax=0$ 的解, 则 $\eta^*+\xi$ 是 $Ax=b$ 的解.

7.4. **非齐次方程解的结构定理**：
设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系， η^* 是 $Ax=b$ 的一个解.
则非齐次方程 $Ax=b$ 的通解为

$$x=\eta^*+c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_k\xi_k,\quad c_1,\cdots,c_k\in\mathbb{R}.$$

其中 $k=n-R(A)$.
即 非齐次通解 = 非齐次特解 + 齐次通解.

7.5. **例续**. 设 4 元线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩 $R(A)=3$.
已知有三个解向量 η_1,η_2,η_3 满足

$$\eta_1=(2,3,4,5)^T,\ \eta_2+\eta_3=(1,2,3,4)^T.$$

求方程 $Ax=b$ 的通解.
解：
(Step 1) 求 $Ax=0$ 的基础解系，参见 6.8.
(Step 2) 求 $Ax=b$ 的一个特解. 此例为已知条件， η_1 便是一个特解.
(Step 3) 写通解，非齐次通解 = 非齐次特解 + 齐次通解.

$$x=\eta_1+c_1\xi=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix},\quad c_1\in\mathbb{R}.$$

7.6. **定理**：若 n 元非齐次线性方程 $Ax=b$ 有解, 则其解集 S 的秩

$$R_S=n-R(A)+1=n-r+1.$$

注：这里不是维数，是秩.
证明：
因为有解, 设其中一个解为 η^*. 再设 $Ax=0$ 的一个基础解系为 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$.
根据解的结构定理，知

$$S\hookrightarrow\{\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}\}.$$

可惜 $\xi_i \notin S$, 改造一下

$$S \hookrightarrow \{\eta^*,\ \eta^*+\xi_1,\ \eta^*+\xi_2, \cdots,\ \eta^*+\xi_{n-r}\} \subset S.$$

如果又能证明 $\{\eta^*,\ \eta^*+\xi_1,\ \eta^*+\xi_2, \cdots,\ \eta^*+\xi_{n-r}\}$ 线性无关,
则 $R_S = n-r+1$.
若

$$k_0\eta^* + k_1(\eta^*+\xi_1) + \cdots + k_{n-r}(\eta^*+\xi_{n-r}) = \theta$$

即

$$(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})\eta^* + k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = \theta$$

两边作用上 A, 得

$$(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})A\eta^* + k_1A\xi_1 + \cdots + k_{n-r}A\xi_{n-r} = \theta$$

$$(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})b = \theta$$

因 $b \neq \theta$, 故 $k_0+k_1+\cdots+k_{n-r} = 0$. 于是，有

$$k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0.$$

由于 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}\}$ 线性无关，因此 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$,
进而 $k_0 = 0$. 所以 $\{\eta^*,\ \eta^*+\xi_1,\ \eta^*+\xi_2, \cdots,\ \eta^*+\xi_{n-r}\}$ 线性无关.

8. 第四章习题课

8.3. 已知 $R(a_1,a_2,a_3)=2, R(a_2,a_3,a_4)=3$， 证明

(1) a_1 能由 a_2,a_3 线性表示;

(2) a_4 不能由 a_1,a_2,a_3 线性表示.

证明:

(1)

$R(a_1,a_2,a_3)=2 \Longrightarrow a_1,a_2,a_3$线性相关

$R(a_2,a_3,a_4)=3 \Longrightarrow a_2,a_3,a_4$ 线性无关 $\Longrightarrow a_2,a_3$线性无关

因此 a_1 能由 a_2,a_3 线性表示.

(2)

$R(a_1,a_2,a_3,a_4) \geq R(a_2,a_3,a_4)=3>2=R(a_1,a_2,a_3)$,

a_4 不能由 a_1,a_2,a_3 线性表示.

8.5. 参数 a 取何值时，向量组线性相关？

$a_1=(a,1,1)^T, a_2=(1,a,-1)^T, a_3=(1,-1,a)^T$

解:

线性相关 $\Longleftrightarrow R(a_1,a_2,a_3)<3$

(a) 用初等行变换，讨论含参数矩阵的秩.

(b) 本题是低阶方阵，可以求行列式

$R(a_1,a_2,a_3)<3 \Longleftrightarrow |a_1,a_2,a_3|=0 \Longleftrightarrow a=2,-1$

8.6. 设 a_1,a_2 线性无关， a_1+b, a_2+b 线性相关,

求向量 b 用 a_1,a_2 线性表达的表达式.

解:

a_1+b, a_2+b 线性相关,

$\Longrightarrow \lambda_1(a_1+b)+\lambda_2(a_2+b)=0$

$\Longrightarrow (\lambda_1+\lambda_2)b=-\lambda_1 a_1-\lambda_2 a_2$

a_1,a_2 线性无关 $\Longrightarrow (\lambda_1+\lambda_2)\neq 0$

因此 $b=-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}a_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}a_2$

即

$b=\lambda a_1-(\lambda+1)a_2, \lambda\in\mathbb{R}$.

8.9. 设 $b_1=a_1+a_2, b_2=a_2+a_3, b_3=a_3+a_4, b_4=a_4+a_1$,

证明： b_1,b_2,b_3,b_4 线性相关.

证明:

(a) $b_1+b_3=b_2+b_4$.

(b) $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1, a_2, a_3, a_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$|K| = 1 + (-1)^{n+1} = 0$ (按第一行展开)

$R(B) = R(AK) \leq R(K) < 4 \Longrightarrow b_1, b_2, b_3, b_4$ 线性相关.

$(*)$ 当 n 是奇数时， K 满秩， $R(B) = R(A)$,

$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 相关性与 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 一致.

8.10. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关，令

$b_1 = a_1$

$b_2 = a_1 + a_2$

$\vdots$

$b_r = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$.

证明： $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 线性无关.

证明:

(a) 用定义

设 $k_1 b_1 + k_2 b_2 + \cdots + k_r b_r = 0$,

则 $(k_1 + \cdots + k_r)a_1 + (k_2 + \cdots + k_r)a_2 + \cdots + k_r a_r = 0$

因此 $(k_1 + \cdots + k_r) = (k_2 + \cdots + k_r) = \cdots = k_r = 0$

即 $k_1 = k_r = \cdots = k_r = 0$.

(b) 用秩

$$(b_1, b_2, \cdots, b_r) = (a_1, a_2, \cdots, a_r)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|K| = 1, K$ 可逆，因此

$R(B) = R(A) = r \Longrightarrow b_1, b_2, \cdots, b_r$ 线性无关.

8.13. 设向量组 $\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的秩是 2,

求 a, b.

解:

(a) 初等变换求秩法. 如果还要求最大无关组，强烈建议只用行变换.

本题只求秩，可以行列都用，方便. 但是，最后还是要化成行阶梯形.

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 2 \\ 3 & b & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{row} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 & 2 \\ 3 & b & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{column} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & 3 & 3 & b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & b-6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-a & b-5 \end{pmatrix}$$

所以 $a = 2, b = 5$.

(b) 最大无关组法.

$R_{\mathcal{A}} = 2$, 因此任意 3 个向量是线性相关的.

$$R(a_1, a_3, a_4) < 3, R(a_2, a_3, a_4) < 3$$

$$|a_1, a_3, a_4| = 0, |a_2, a_3, a_4| = 0.$$

(c) 最高阶非零子式法.

$R(A) = 2$, 因此 A 的任意 3 阶子式均为零.

$$|a_1, a_3, a_4| = 0, |a_2, a_3, a_4| = 0.$$

8.14. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是一组 n 维向量,

已知 n 维单位坐标向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 能由它们线性表示,

证明 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性无关.

证明:

$n \geq R(a_1, a_2, \cdots, a_n) \geq R(e_1, e_2, \cdots, e_n) = R(E_n) = n$

由线性无关判定定理知 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性无关.

8.15. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是一组 n 维向量,

证明: $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性无关

$\Longleftrightarrow$ 任一 n 维向量都可以用它们来线性表示.

证明:

“$\Longleftarrow$” 见 8.14.

“$\Longrightarrow$”

(a) 线性方程法.

$\mathcal{A}$ 无关 $\Longrightarrow A$ 可逆

$\Longrightarrow$ 对任一向量 a, 方程 $Ax = a$ 有唯一解,

即任一 n 维向量都可以用它们来线性表示.

(b) 无关相关法.

$n+1$ 个 n 维向量必然线性相关，因此

$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, a\}$ 相关.

又 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 无关,

所以 a 可以用 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 来线性表示.

8.16. 向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性相关， $a_1\neq 0$,

证明：存在 k ，使得 $a_k\hookrightarrow\{a_1,a_2,\cdots,a_{k-1}\}$.

证明:

(a) 构造法. 相关性定义.

$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m=0$

若 $k_m\neq 0$, 取 $k=m$

若 $k_m=0, k_{m-1}\neq 0$, 取 $k=m-1$

$\cdots\cdots\cdots$

若 $k_m=k_{m-1}=\cdots=k_3=0, k_2\neq 0$, 取 $k=2$

若 $k_m=k_{m-1}=\cdots=k_2=0$, 则 $k_1a_1=0$, $k_1=0$.(不会落魄至此)

(b) 反证法.

若每个 k, 都有 $a_k\not\hookrightarrow\{a_1,a_2,\cdots,a_{k-1}\}$.

$1=R(a_1)$

$<R(a_1,a_2)$

$<R(a_1,a_2,a_3)$

$\cdots\cdots\cdots$

$<R(a_1,a_2,\cdots a_m)\leq m-1$,

1 到 $m-1$ 之间存在 m 个不同的整数，完蛋.

8.18. 设 $\left\{\begin{array}{lllll}\beta_1= & & \alpha_2 & +\alpha_3 & +\cdots+\alpha_n\\ \beta_2= & \alpha_1 & & +\alpha_3 & +\cdots+\alpha_n\\ \beta_3= & \alpha_1 & +\alpha_2 & & +\cdots+\alpha_n\\ \cdots & \cdots & & & \\ \beta_n= & \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & +\cdots+\alpha_{n-1}\end{array}\right.$,

证明 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\leftrightarrow\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$.

证明:

已经知道 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}\hookrightarrow\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$,

再解出另一半即可.

(a) 硬解. 不难.

(b) $B=AK$, 证明 K 可逆即可.

即证行列式 $|K|\neq 0$.

K 很面善，第一章 5.2 或者第一章课后习题 8(2).

8.19. 已知 3 阶矩阵 A 与 3 维列向量 x 满足 $A^3x=3Ax-A^2x$,

且向量组 x,Ax,A^2x 线性无关：

(1) 记 $P=(x,Ax,A^2x)$, 求 X 使得 $AP=PX$;

(2) 求 $|A|$.

解:

(1) x, Ax, A^2x 线性无关 $\Longrightarrow P$ 可逆，若存在必唯一.

$AP=(Ax, A^2x, A^3x)=(Ax, A^2x, 3Ax-A^2x)$

$$=(x, Ax, A^2x)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $|P|\neq 0 \Longrightarrow |A|=|X|=0$.

8.21. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, 求一个 4×2 矩阵 B,

使得 $AB=O, R(B)=2$.

解:

设 $B=(b_1, b_2), \quad b_1, b_2\in\mathbb{R}^4$.

(1)$AB=O \Longleftrightarrow Ab_1=Ab_2=0$.

即 b_1, b_2 是方程 $Ax=0$ 的解.

(2)$R(B)=2 \Longleftrightarrow b_1, b_2$ 线性无关.

因此，要找 B 就是在 $Ax=0$ 的解空间中

找 2 个线性无关的解向量，把它们拼成 B 即可.

$(*)$ 一般地，如果不要求 $R(B)=2$, 只要求解 $AB=O$, 先

用基础解系表示 $Ax=0$ 的通解 $x=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_k\xi_k$.

则矩阵方程的通解为

$$B=\Big(c_{11}\xi_1+\cdots+c_{1k}\xi_k,\quad c_{21}\xi_1+\cdots+c_{2k}\xi_k\Big),\quad c_{ij}\in\mathbb{R}.$$

更一般地， $A_{s\times n}B_{n\times m}=O$ 的通解为

$$B=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r})\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1,n-r} & c_{2,n-r} & \cdots & c_{m,n-r} \end{pmatrix},\quad c_{ij}\in\mathbb{R}.$$

即 $B_{n\times m}=\big(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}\big)C$, 其中 $C\in\mathcal{M}_{n-r,m}$.

注意， $R(B)=R(C)$.

8.24. 设 $A^2=A$, 证明 $R(A)+R(A-E)=n$.

证明:

(1) $R(A)+R(A-E)=R(A)+R(E-A)$
$$\geq R(A+E-A)=R(E)=n$$
(2)$A(A-E)=O \Longrightarrow R(A)+R(A+E)\leq n.$

8.25. $R(A)=n-1$, 求证 $R(A^*)=1$.

证明:

$R(A)=n-1 \Longrightarrow |A|=0$

$AA^*=|A|E=O \Longrightarrow R(A)+R(A^*)\leq n$

$R(A^*)\leq 1$

又 A 的一个 $n-1$ 阶子式非零,

即存在一个代数余子式非零,

因此 $A^*\neq O, R(A^*)\geq 1$.

从而 $R(A^*)=1$.

8.28. 设向量组 $a_1=(\alpha,2,10)^T, a_2=(-2,1,5)^T$,

$a_3=(-1,1,4)^T, b=(1,\beta,-1)^T$. 问 α,β 为何值时

(1) $b \not\hookrightarrow \{a_1,a_2,a_3\}$;

(2) $b \hookrightarrow \{a_1,a_2,a_3\}$ 且表示唯一;

(3) $b \hookrightarrow \{a_1,a_2,a_3\}$ 且表示不唯一.

解:

本质上是带参数方程组解的判定.

(1)$\Longleftrightarrow Ax=b$ 无解 $\Longleftrightarrow R(A)<R(A,b)$

(2)$\Longleftrightarrow Ax=b$ 有唯一解 $\Longleftrightarrow R(A)=R(A,b)=3$

(3)$\Longleftrightarrow Ax=b$ 有无限解 $\Longleftrightarrow R(A)=R(A,b)<3$

8.29. 设 $a=(a_1,a_2,a_3)^T, b=(b_1,b_2,b_3)^T, c=(c_1,c_2,c_3)^T$

证明三直线 $\begin{cases} l_1: & a_1x+b_1y+c_1=0 \\ l_2: & a_2x+b_2y+c_2=0, \quad (a_i^2+b_i^2\neq 0, i=1,2,3) \\ l_3: & a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$

相交于一点的充要条件为: $\{a,b\}$ 线性无关, $\{a,b,c\}$ 线性相关.

证明:

关于 x,y 的方程有且仅有一个解

$\Longleftrightarrow R(a,b)=R(a,b,-c)=2$

$\Longleftrightarrow\{a,b\}$ 线性无关, $\{a,b,c\}$ 线性相关.

8.30. 设矩阵 $A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$, 其中 $\{a_2,a_3,a_4\}$ 线性无关,

$a_1=2a_2-a_3$. 令 $b=a_1+a_2+a_3+a_4$, 求 $Ax=b$ 的通解.

解:

(1) $\{a_2, a_3, a_4\}$ 线性无关 $\Longrightarrow R(a_2, a_3, a_4) = 3$.

$a_1 = 2a_2 - a_3 \Longrightarrow a_1 \hookrightarrow \{a_2, a_3, a_4\}$

$\Longrightarrow R(a_1, a_2, a_3, a_4) = R(a_2, a_3, a_4) = 3$

$\Longrightarrow$ $Ax = 0$ 的解空间维数 是 $n - R(A) = 1$.

(2) $a_1 = 2a_2 - a_3 \Longrightarrow$ $\xi = (1, -2, 1, 0)^T$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系.

(3) $b = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \Longrightarrow$ $\eta^* = (1, 1, 1, 1)^T$ 是 $Ax = b$ 的一个特解.

(4) 所以 $Ax = b$ 的通解 是 $x = \eta^* + c\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$.

8.33. 设 $R(A) = r$, 且 $\eta_1, \cdots, \eta_{n-r+1}$ 是非齐次方程 $Ax = b$

的 $(n - r + 1)$ 个线性无关的解，求证 $Ax = b$ 的通解为

$x = c_1\eta_1 + \cdots + c_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$, 其中 $c_1 + \cdots + c_{n-r+1} = 1$.

证明：

由 7.6 知 $Ax = b$ 的解集 S 的秩 $R_S = n - r + 1$,

因此 $\eta_1, \cdots, \eta_{n-r+1}$ 是 S 的一个最大无关组.

于是任意解均可用它们表示，即

$x = c_1\eta_1 + \cdots + c_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$.

两边乘上 A, 得

$b = (c_1 + \cdots + c_{n-r+1})b$

$b \neq 0 \Longrightarrow c_1 + \cdots + c_{n-r+1} = 1$.

8.40. 设 $V_a = \mathrm{span}\{a_1, \cdots, a_k\}$, $V_b = \mathrm{span}\{b_1, \cdots, b_m\}$,

证明： $V_a = V_b \Longleftrightarrow \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$.

证明：

$V_a = \{x_1a_1 + \cdots + x_ka_k : x_i \in \mathbb{R}\}$

$V_b = \{y_1b_1 + \cdots + y_mb_m : y_i \in \mathbb{R}\}$

$V_a \subset V_b \Longleftrightarrow a_i \hookrightarrow \mathcal{B}$

$V_b \subset V_a \Longleftrightarrow b_i \hookrightarrow \mathcal{A}$

8.41. 设 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s\}$ 是 $Ax = 0$ 的一组基础解系．设

$$\left(\xi_1', \xi_2', \cdots, \xi_s'\right) = \left(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s\right)K,$$

证明： $\{\xi_1', \xi_2', \cdots, \xi_s'\}$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系 $\Longleftrightarrow K$ 可逆.

证明：

“$\Longleftarrow$”

K 可逆 $\Longrightarrow \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s\} \leftrightarrow \{\xi_1', \xi_2', \cdots, \xi_s'\}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} R(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_s') = R(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s) = s \\ \text{任意解可以由}\{\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_s'\}\text{来线性表示} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \{\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_s'\}$ 是解空间的最大无关组，是基础解系.

"$\Longrightarrow$"

$\{\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_s'\}$ 是 $Ax=0$ 的基础解系

$$\Longrightarrow \begin{Bmatrix} \text{线性无关} \Longrightarrow R(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_s') = s \\ \text{是解} \Longrightarrow (\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_s') = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s)K \end{Bmatrix}$$

$\Longrightarrow R\big((\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s)K\big) = s$

$\Longrightarrow R(K) = s$ (因为 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s)$ 列满秩)

$\Longrightarrow K$ 可逆.

8.42. 设 α 为 n 维列向量，且 $\alpha^T\alpha = 1$, 令 $A = E - \alpha\alpha^T$.

若 $R(A) = n-1$, 求 $Ax = 0$ 的通解.

解：$x = c_1\alpha,\quad c_1 \in \mathbb{R}$.

8.43. 设 n 阶矩阵 A 的秩为 $n-1$, 求 $Ax = 0$ 的通解.

解：

$\dim S = 1 \Longrightarrow$ 基础解系只含一个向量

因此，只要找到一个非零解，就能写出通解.

在哪里？ $AA^* = |A|E = O$.

因为 $R(A^*) = 1, A^* \neq O$,

所以 A^* 有非零列向量,

如 $\alpha_j^* = (A_{j1}, A_{j2}, \cdots, A_{jn})^T$.

则 $A\alpha_j^* = 0$, 通解为 $x = c_1\alpha_j^*,\ c_1 \in \mathbb{R}$.

8.44. 设 n 阶矩阵 A 满足 $R(A^*) \geq 1$, n 维列向量 $b \neq 0$.

求证： $Ax = b$ 有无限解 $\Longleftrightarrow A^*b = 0$.

证明：

"$\Longrightarrow$"

$R(A) = R(A,b) < n \Longrightarrow |A| = 0$

$\Longrightarrow A^*b = A^*Ax = |A|Ex = 0$.

"$\Longleftarrow$"

$A^*b = 0 \Longrightarrow A^*x = 0$ 有非零解

$\Longrightarrow R(A^*) < n \Longrightarrow R(A^*) = 1$

$$\Longrightarrow \begin{cases} R(A) = n-1 \\ A^*x = 0\text{的解空间维数} = n-1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow A$ 的列向量组的最大无关组

是 $A^*x=0$ 的基础解系. $(A^*A=O)$

$\Longrightarrow b\hookrightarrow\mathcal{A}$ (b 是解)

$\Longrightarrow R(A)=R(A,b)=n-1$

8.45. 设 A 为 $n\times m$ 矩阵，作集合

$$V=\{b:Ax=b\text{有解}\}$$

证明 V 是向量空间，并求其维数.

证明:

(a) 定义

$b_1,b_2\in V\Longrightarrow Ax_1=b_1,Ax_2=b_2$

$A(x_1+x_2)=(b_1+b_2),\quad A(\lambda x_1)=\lambda b_1$

即 $Ax=b_1+b_2$ 和 $Ax=\lambda b_1$ 都有解,

$b_1+b_2\in V,\lambda b_1\in V$.

(b) 基

$V=\{b:b\hookrightarrow\mathcal{A}\}=\{\text{所有}\mathcal{A}\text{的线性组合}\}$

$\quad=\mathrm{span}\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$.

因此 V 是线性空间,

且 $\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 的最大无关组是 V 的一组基.

因此 $\dim V=R(A)$.