第一章　静电场

习题(1－1)

1－1－1　真空中有一密度为2π nC/m的无限长电荷沿 y 轴放置，另有密度分别为 0.1 nC/m² 和 －0.1 nC/m² 的无限大带电平面分别位于 $z=3$ m 和 $z=-4$ m 处。试求 P 点(1,7,2)的电场强度 $\boldsymbol{E}$。

解　$z=3$ m 和 $z=-4$ m 的带电平面产生的电场为

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{cases}-\dfrac{0.1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z & (-4<z<3)\\ 0 & (z<-4 \text{ 或 } z>3)\end{cases}$$

沿 y 轴放置的线电荷产生的电场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_2&=\frac{2\pi}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\boldsymbol{e}_x+\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\boldsymbol{e}_z\right)\\&=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{(x^2+z^2)}(x\boldsymbol{e}_x+z\boldsymbol{e}_z)\quad \text{nV/m}\end{aligned}$$

所以，P 点(1,7,2)的电场强度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\\&=-\frac{0.1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z+\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{1+4}(\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_z)\\&=22.59\boldsymbol{e}_x+33.88\boldsymbol{e}_z\quad \text{V/m}\end{aligned}$$

应用叠加原理计算电场强度时，要注意是矢量的叠加。

1－1－3　已知电位函数 $\varphi=\dfrac{10}{x+y^2+z^3}$，试求 $\boldsymbol{E}$，并计算在(0,0,2)及(5,3,2)点处的 $\boldsymbol{E}$ 值。

解　
$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=-\nabla\varphi=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\\&=\frac{10}{(x+y^2+z^3)^2}(\boldsymbol{e}_x+2y\boldsymbol{e}_y+3z^2\boldsymbol{e}_z)\end{aligned}$$

代入数据，得

$$\boldsymbol{E}(0,0,2)=(0.156\boldsymbol{e}_x+1.875\boldsymbol{e}_z)\quad \text{V/m}$$

$$\boldsymbol{E}(5,3,2)=(0.021\boldsymbol{e}_x+0.124\boldsymbol{e}_y+0.248\boldsymbol{e}_z)\quad \text{V/m}$$

1－2－2　求下列情况下，真空中带电面之间的电压：

(1) 相距为 a 的两无限大平行板，电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$；

(2) 无限长同轴圆柱面，半径分别为 a 和 $b(b>a)$，每单位长度上电荷：内柱为 τ 而外柱为 $-\tau$；

(3) 半径分别为 R_1 和 R_2 的两同心球面($R_2>R_1$)，带有均匀分布的面积电荷，内外球面电荷总量分别为 q 和 $-q$。

解　(1) 因两无限大平行板间电场强度为

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

所以，电压

$$U=Ea=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a$$

(2) 因两圆柱面间的电场强度为

$$E=E_\rho=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}$$

所以，电压

$$U=\int_a^b\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathrm{d}\rho=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

(3) 因两球面间的电场强度为

$$E=E_r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}$$

所以，电压

$$U=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

1-2-3 高压同轴线的最佳尺寸设计——一高压同轴圆柱电缆，外导体的内半径为 2 cm，内外导体间电介质的击穿场强为 200 kV/cm。内导体的半径为 a，其值可以自由选定，但有一最佳值。因为若 a 太大，内外导体的间隙就变得很小，以致在给定的电压下，最大的 E 会超过电介质的击穿场强。另一方面，由于 E 的最大值 E_m 总是在内导体表面上，当 a 很小时，其表面的 E 必定很大。试问 a 为何值时，该电缆能承受最大电压？并求此最大电压值。

解 设内外导体的半径分别为 a 和 b。显然，最大场强出现在 $\rho=a$ 处。由高斯定律，求得介质中的电场为

$$E=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon\rho}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon a}\frac{a}{\rho}=E_m\frac{a}{\rho}$$

内外导体间的电压为

$$U=\int_a^bE_m\frac{a}{\rho}\mathrm{d}\rho=aE_m\ln\frac{b}{a}$$

可见 U 随 a 而变化，但不是一单调函数，必存在一极值。为求此极值，必有

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}a}=0$$

由此，得

$$\ln\frac{b}{a}-1=0$$

即

$$a=\frac{b}{\mathrm{e}}$$

因此，取 $a=\dfrac{b}{\mathrm{e}}$ 时，该电缆能承受最大电压

$$U_{\mathrm{m}}=\frac{b}{\mathrm{e}}E_{\mathrm{m}}\ln\frac{b}{b/\mathrm{e}}=\frac{b}{\mathrm{e}}E_{\mathrm{m}}$$

代入数据 $b=2\ \mathrm{cm}, E_{\mathrm{m}}=20\,000\ \mathrm{kV/m}$，得

$$a=\frac{2}{\mathrm{e}}=0.736\quad \mathrm{cm}$$

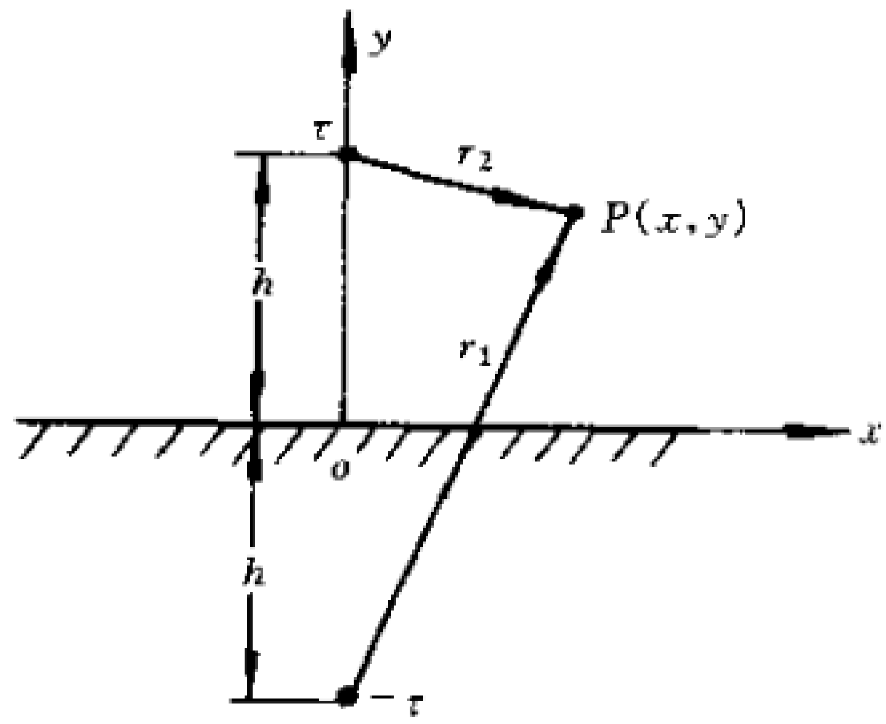
$$U_{\mathrm{m}}=\frac{2\times10^{-2}}{\mathrm{e}}\times20\,000=147\quad \mathrm{kV}$$

1-7-2 河面上方 h 处，有一输电线经过（导线半径 $R<<h$），其电荷线密度为 τ，河水的介电常数为 $80\varepsilon_0$。求镜像电荷的值。

解 应用两介质分界平面的镜像公式，有

$$\tau'=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\tau=\frac{\varepsilon_0-80\varepsilon_0}{\varepsilon_0+80\varepsilon_0}\tau=-0.96\tau$$

$$\tau''=\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\tau=\frac{2\times80\varepsilon_0}{\varepsilon_0+80\varepsilon_0}\tau=1.97\tau$$



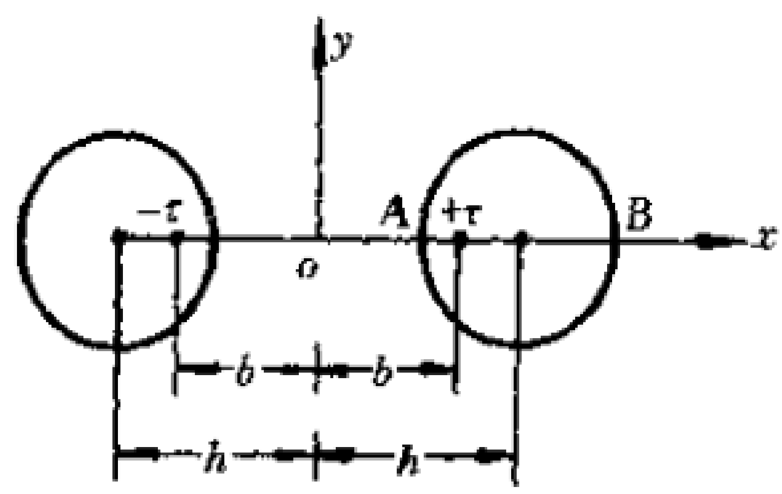
题 1-7-1 图

1-7-3 在无限大接地导体平面两侧各有一点电荷 q_1 和 q_2，与导体平面的距离均为 d，求空间的电位分

1-7-5 两根平行圆柱导体，半径均为 2 cm，相距 12 cm，设加以 1 000 V 电压，求两圆柱体表面上相距最近的点和最远的点的电荷面密度。

解 用电轴法求解，首先确定电轴的位置

$$b=\sqrt{h^2-a^2}=\sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2-2^2}=4\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$$



题 1-7-5 图

如题 1-7-5 图所示，此时空间任意点的电

位为

$$\varphi=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

式中 r_2 为 $-\tau$ 至所求点的距离，r_1 为 $+\tau$ 至所求点的距离，设 $+\tau$ 圆柱的电位为 φ_1，带 $-\tau$ 圆柱的电位为 φ_2，则

$$V_0=\varphi_1-\varphi_2=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b+(h-a)}{b-(h-a)}-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b-(h-a)}{b+(h-a)}$$

$$=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\times 2\ln\frac{b+(h-a)}{b-(h-a)}$$

所以，圆柱单位长度上的电荷 τ 与两柱间的电压关系为

$$\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}=\frac{V_0}{2\ln\dfrac{b+(h-a)}{b-(h-a)}}=\frac{1\,000}{2\ln\dfrac{4\sqrt{2}+(6-2)}{4\sqrt{2}-(6-2)}}=283.65$$

点 A 处，场强和电荷面密度最大

$$\sigma_{\max}=\varepsilon_0E_{\max}=\varepsilon_0\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b-(h-a)}+\frac{1}{b+(h-a)}\right)$$

$$=0.177\,5\times10^{-6}\quad \mathrm{C/m^2}$$

点 B 处，场强和电荷面密度最小

$$\sigma_{\min}=\varepsilon_0E_{\min}=\varepsilon_0\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a+(h-b)}-\frac{1}{a+(h+b)}\right)$$

$$=0.088\,7\times10^{-6}\quad \mathrm{C/m^2}$$

1-8-1 两个小球半径均为1 cm，相距为 20 cm，位于空气中。

(1) 若已知 φ_1,φ_2，求 q_1,q_2；

(2) 若已知 φ_1,q_2，求 q_1,φ_2；

(3) 欲使小球 1 带电荷 $q_1=10^{-8}$ C，小球 2 不带电荷，问该用什么方法？

解 两小球和大地构成了 3 导体系统，假设大地离两小球很远且取它为 0 号导体，则有各小球的电位 φ_1,φ_2 和电荷 q_1,q_2 之间的下列关系式：

$$\begin{cases}\varphi_1=\alpha_{11}q_1+\alpha_{12}q_2\\ \varphi_2=\alpha_{21}q_1+\alpha_{22}q_2\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\alpha_{11}=\left.\dfrac{\varphi_1}{q_1}\right|_{q_2=0}$，$\alpha_{12}=\left.\dfrac{\varphi_1}{q_2}\right|_{q_1=0}$。且对于现在的问题，有

$$\alpha_{22}=\alpha_{11}\quad 和\quad \alpha_{21}=\alpha_{12}$$

容易确定出

$$\alpha_{11}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{1}{4\pi\times 8.85\times 10^{-12}\times 1\times 10^{-2}}=9\times 10^{11}$$

$$\alpha_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}=\frac{1}{4\pi\times 8.85\times 10^{-12}\times 20\times 10^{-2}}=4.5\times 10^{10}$$

方程组(1)也可表示成另一种形式

$$\begin{cases} q_1=\beta_{11}\varphi_1+\beta_{12}\varphi_2 \\ q_2=\beta_{21}\varphi_1+\beta_{22}\varphi_2 \end{cases} \tag{2}$$

其中

$$\beta_{11}=\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}}=1.113\,85\times 10^{-12}$$

$$\beta_{22}=\beta_{11}=1.113\,85\times 10^{-12}$$

$$\beta_{12}=\frac{-\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}}=-5.569\,47\times 10^{-14}$$

$$\beta_{21}=\beta_{12}=-5.569\,47\times 10^{-14}$$

因此,代入方程式(2),有

$$\begin{cases} q_1=1.113\,85\times 10^{-12}\varphi_1-5.569\,47\times 10^{-14}\varphi_2 \\ q_2=-5.569\,47\times 10^{-14}\varphi_1+1.113\,85\times 10^{-12}\varphi_2 \end{cases} \tag{3}$$

这样:

(1) 若已知 φ_1,φ_2,就可由方程(3)求 q_1,q_2;

(2) 若已知 φ_1,q_2,也可由方程(3)求得 q_1 和 φ_2 分别为

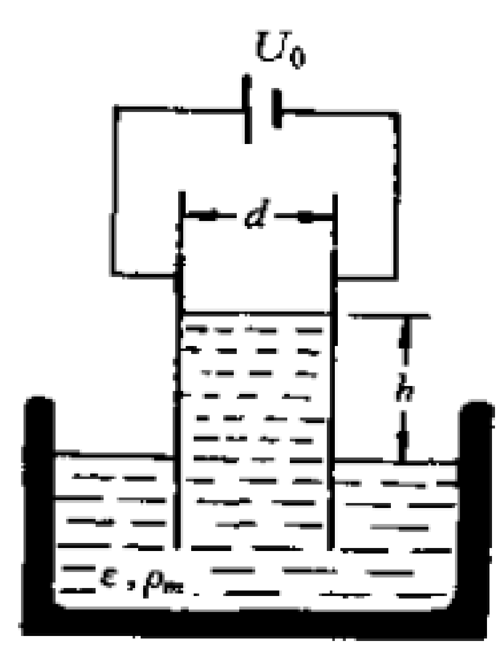
$$\varphi_2=\frac{1}{1.113\,85\times 10^{-12}}q_2+\frac{5.569\,47\times 10^{-14}}{1.113\,85\times 10^{-12}}\varphi_1$$

$$q_1=1.113\,85\times 10^{-12}\varphi_1-\frac{5.569\,47\times 10^{-14}}{1.113\,85\times 10^{-12}}q_2-\frac{5.569\,47^2\times 10^{-28}}{1.113\,85\times 10^{-12}}\varphi_1$$

(3) 若欲使小球 1 带电荷 $q_1=10^{-8}$ C,小球 2 不带电荷。这时,由方程(1)看出,应使

$$\varphi_2=\alpha_{21}q_1=4.5\times 10^{10}\times 10^{-8}\approx 450\quad \text{V}$$

1-9-5 板间距离为 d,电压为 U_0 的两平行电极,浸于介电常数为 ε 的液态介质中,如题 1-9-5 图所示。已知介质液体的质量密度是 ρ_m,问两极板间的液体将升高多少?



题 1-9-5 图

解 选取坐标系如图中所示。设液体上升的高度为 h,电容器极板的宽度为 l,长度为 S,则它的电容为

$$C(h)=\frac{\varepsilon hS}{d}+\frac{\varepsilon_0(l-h)S}{d}$$

所以,电容器中的静电能量为

$$W_e=\frac{1}{2}C(h)U_0^2=\frac{SU_0^2}{2d}[\varepsilon_0 l+(\varepsilon-\varepsilon_0)h]$$

液体所受的电场力为

$$f=\frac{\partial W_e}{\partial h}=\frac{U_0^2}{2}\ \frac{S}{d}(\varepsilon-\varepsilon_0)$$

这个力应与水平面上的液体的重量相平衡，即

$$\frac{U_0^2S(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2d}=\rho_m gdSh$$

所以，得液体上升的高度为

$$h=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)U_0^2}{2\rho_m gd^2}$$

思考题

1-1 试回答下列各问题：

(1)等位面上的电位处处一样，因此面上各处的电场强度的数值也一样。这句话对吗？试举例说明。

(2)某处电位 $\varphi=0$，因此那里的电场 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi=-\nabla 0=0$。对吗？

(3)甲处电位是 10 000 V，乙处电位是 10 V 故甲处的电场强度大于乙处的电场强度。对吗？

答 此三问的内容基本一致，均是不正确的。静电场中电场强度是电位函数的梯度，即电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是电位函数 φ 沿最大减小率方向的空间变化率。φ 的数值大小与 $\boldsymbol{E}$ 的大小无关，因此甲处电位虽是 10 000 V，大于乙处的电位，但并不等于甲处的电场强度大于乙处的电场强度。在等位面上的电位均相等，只能说明沿等位面切线方向，电位的变化率等于零，因此等位面上任一点的电场强度沿该面切线方向的分量等于零，即 $E_t=0$。而电位函数沿等位面法线方向的变化率并不一定等于零，即 E_n 不一定为零，且数值也不一定相等。即使等位面上 $\varphi=0$，该面上任一点沿等位面法线方向电位函数的变化率也不一定等于零。例如：静电场中导体表面为等位面，但导体表面上电场强度 $\boldsymbol{E}$ 垂直于导体表面，大小与导体表面各点的曲率半径有关，曲率半径越小的地方电荷面密度越大，电场强度的数值也越大。

1-2 电力线是不是点电荷在电场中的运动轨迹(设此点电荷除电场力外不受其它力的作用)？

答 电力线仅表示该线上任一点的切线方向与该点电场强度方向一致，即表示出点电荷在此处的受力方向，但并不能表示出点电荷在该点的运动方向，故电力线不是点电荷在电场中的运动轨迹。

1-4 下例说法是否正确？如不正确，请举一反例加以论述。

(1)场强相等的区域，电位亦处处相等。

(2)电位相等处，场强也相等。

(3)场强大处，电位一定高。

(4)电场为零处，电位一定为零。

(5)电位为零处，场强一定等于零。

答 根据电场强度和电位的关系 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$ 可知：

(1)不正确。因 $\boldsymbol{E}$ 相等的区域，φ 必为空间坐标的函数。如充电的平行板电容器内场强相等，但其内部电位却是变化的。

(2)不正确。因 φ 相等处，不等于$\nabla\varphi$ 相等。如不规则带电导体表面上各点电位均相等，但表面上各点处的场强并不相等。

(3)不正确。因 $\boldsymbol{E}$ 大的地方，只表明 φ 的梯度大，而不是 φ 值高。如上例中导体尖端处场强大，但表面上各处电位相等并不一定高，电位值与参考点所选位置有关。

(4)不正确。因 $\boldsymbol{E}=0$，说明$\nabla\varphi=0$，即 $\varphi=C$。如高电压带电导体球，其内部电场等于零，但该球内任一点的电位却不为零，而为某一常数。

(5)不正确。因 $\varphi=0$ 处，不一定$\nabla\varphi=0$ 所以 $\boldsymbol{E}$ 不一定为零。如充电平行板电容器中，一个极板接地电位为零，但该极板相对另一极板的表面上电场强度不为零。

2-1-1 直径为2 mm的导线，如果流过它的电流是20 A，且电流密度均匀，导体的电导率为$\frac{1}{\pi}\times10^8$ S/m。求导线内部的电场强度。

解 因为电流密度是均匀分布，故

$$J=\frac{I}{S}=\frac{20}{\pi\times(0.001)^2}=\frac{20}{\pi}\times10^6\quad(\text{A/m})$$

$$E=\frac{J}{\gamma}=0.2\quad\text{V/m}$$

2-1-2 已知$\boldsymbol{J}=10y^2z\boldsymbol{e}_x-2x^2y\boldsymbol{e}_y+2x^2z\boldsymbol{e}_z$ A/m。求穿过$x=3$ m处，$2\text{ m}\leqslant y\leqslant 3\text{ m}$，$3.8\text{ m}\leqslant Z\leqslant 5.2\text{ m}$面积上在$\boldsymbol{e}_x$方向的总电流$I$。

解 因为$I=\int_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$

所以$I=\int_S\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_2^3\int_{3.8}^{5.2}10y^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z=39.9\quad\text{A}$

2-1-3 平行板电容器板间距离为d，其中媒质的电导率为γ，两板接有电流为I的电流源，测得媒质的功率损耗为P。如将板间距离扩为$2d$，其间仍充满电导率为γ的媒质，则此电容器的功率损耗是多少？

解 电容器内电流密度分布均匀，则

$$J=\frac{I}{S}$$

其中S为平行板的面积。由于使用同一电流源，故两种情况下，电流密度满足

$$J_1=J_2=J=\frac{I}{S}$$

平板电容器内媒质中的电场强度

$$E_1=E_2=\frac{J}{\gamma}$$

又因为导电媒质内的功率密度$p=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$

所以
$$p_1=p_2=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{J^2}{\gamma}$$

则电容器的功率损耗分别为

$$P_1=p_1Sd=P\qquad P_2=p_2S2d=2p_1Sd=2P$$

2-4-1 金属球形电极A和平板电极B的周围电介质为空气时，已知其电容为C。当将该系统周围的空气全部换为电导率为γ的均匀导电媒质，且在两极间加直流电压U_0时，求电极间导电媒质损耗的功率是多少？

解 由于恒定电场与静电场在一定条件下可以比拟，分析题意可知两系统的几何形状、边界条件情况相同，则

$$\frac{C}{G}=\frac{\varepsilon}{\gamma}$$

$$G=\frac{\gamma}{\varepsilon}C$$

$$P=GU_0^2=\frac{\gamma}{\varepsilon}CU_0^2$$

2-4-2 半径为a的长直圆柱导体放在无限大导体平板上方，圆柱轴线距平板的距离为h，空间 电导率远远大于γ，求圆柱和平 该系统的电

容)。

解 若导体之间充满介电常数为 ε 的电介质,先求此系统的电容。

设圆柱对导体平面的电压为 U。利用镜像法,在平板导体另一侧作出它的镜像,如题 2-4-2 图所示。再利用电轴法,其电轴位置

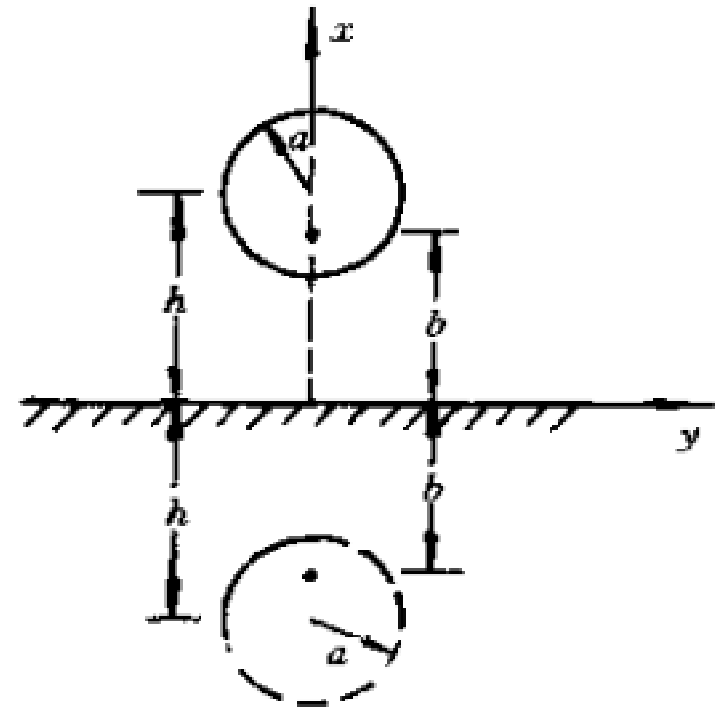
$$b=\sqrt{h^2-a^2}$$

由此可得圆柱电压

$$U=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b+h-a}{b-h+a}$$

单位长度的电容

$$C_0=\frac{\tau}{U}=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{b+h-a}{b-h+a}}$$



题 2-4-2 图

由于导体之间充满电导率为 γ 的导电媒质,利用恒定电场与静电场的静电比拟,可得

$$G_0=\frac{\gamma}{\varepsilon}C_0=\frac{2\pi\gamma}{\ln\dfrac{b+h-a}{b-h+a}}$$

$$R_0=\frac{1}{G_0}=\frac{\ln\dfrac{b+h-a}{b-h+a}}{2\pi\gamma}$$

2-5-2 一半径为0.5 m的导体球当作接地电极深埋地下,土壤的电导率 $\gamma=10^{-2}$ S/m,求此接地体的接地电阻。

解 由于深埋地下,可以忽略地面的影响。设接地器通有电流 I,则

$$\boldsymbol{J}=\frac{I}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{J}}{\gamma}=\frac{I}{4\pi\gamma r^2}\boldsymbol{e}_r$$

$$U=\int_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{0.5}^{\infty}\frac{I}{4\pi\gamma r^2}\mathrm{d}r$$

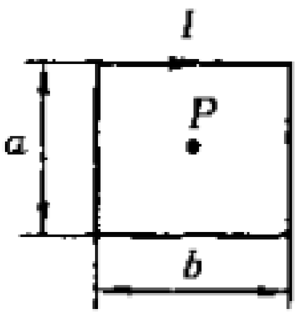
$$=\frac{I}{4\pi\gamma\times 0.5}$$

$$R=\frac{U}{I}=\frac{1}{4\pi\times 10^{-2}\times 0.5}=15.92\quad(\Omega)$$

3-1-1　分别求出题 3-1-1 图所示各种形状的线电流在真空中的 P 点所产生的磁感应强度。

解　(1) 由题 3-1-1 图(a),根据真空中载电流 I 的长为 $2l$ 的长直细导线,在其中垂面上任一点产生的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\left[\frac{2l}{\sqrt{\rho^2+l^2}}\right]\boldsymbol{e}_\phi$$



(a)

题 3-1-1 图(a)

可将边长分别为 a, b 的矩形边视为长为 $2l$ 的直导线,利用叠加定理求出矩形中心点 P 处的磁感应强度。

利用右手螺旋法则,可判断出各边在 P 点产生的磁感应强度的方向是垂直纸面向里,设此方向为 $\boldsymbol{e}_z$ 方向,则 P 点的磁感应强度为

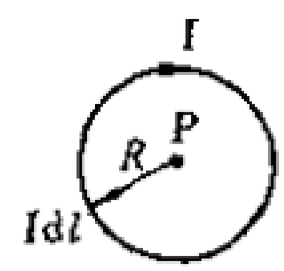
$$\boldsymbol{B}=\left\{2\times\frac{\mu_0 I}{4\pi\left(\frac{a}{2}\right)}\left[\frac{b}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}}\right]+2\times\frac{\mu_0 I}{4\pi\left(\frac{b}{2}\right)}\left[\frac{a}{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}\right]\right\}\boldsymbol{e}_z$$

$$=\left\{\frac{\mu_0 I}{\pi a}\frac{b}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}}+\frac{\mu_0 I}{\pi b}\frac{a}{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}\right\}\boldsymbol{e}_z$$

$$=\frac{2\mu_0 I}{\pi ab}(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_z$$

解　(2) 如题 3-1-1 图(b)所示,选择元电流 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$,在 P 点产生的磁感应强度的方向沿垂直纸面向里,大小为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{R^2}$$



(b)

利用叠加定理

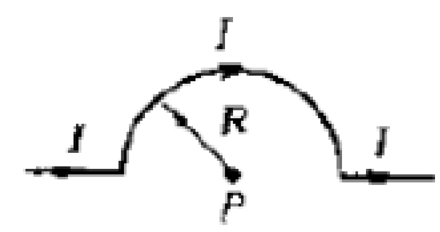
$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_l\frac{I\mathrm{d}l}{R^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{I}{R^2}R\mathrm{d}\phi=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

题 3-1-1 图(b)

考虑垂直纸面向里的方向为 $\boldsymbol{e}_z$ 方向,则

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} e_z$$

解 (3) 如题 3-1-1 图(c)所示，该题可视为两个半无限长直线和一个半圆环在 P 点产生磁感应强度的叠加。由于半无限长直导线的延长线通过 P 点，故两个半直线到 P 点的垂直距离为零，所以它们在 P 点产生的磁感应强度为零。因此，P 点的磁感应强度只是半圆环电流在 P 点产生的磁感应强度。利用上题的结果可知

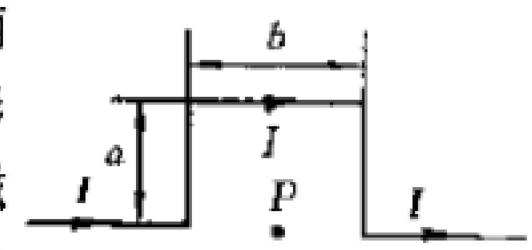


(c)

题 3-1-1 图(c)

$$B = \frac{\mu_0 I}{4R} e_z$$

解 (4) 如题 3-1-1 图(d)所示。与上题相同，两个半无限长导线在 P 点产生的磁感应强度为零。矩形线框产生的磁感应强度可视为三条边在 P 点产生的磁感应强度之和。其中两条边长为 a 的边产生的磁感应强度可视为边长为 $2l$ 的半直线在 P 点产生的磁感应强度，方向均沿垂直纸面向里的方向，设此方向为 e_z 的方向，则此矩形线框在 P 点产生的磁感应强度为



(d)

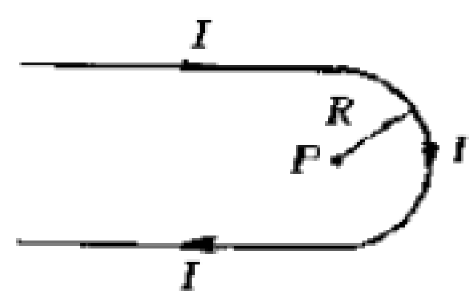
题 3-1-1 图(d)

$$B = \left[2 \times \frac{\mu_0 I}{4\pi\left(\frac{b}{2}\right)} \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2}} + \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \frac{b}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}\right] e_z$$

$$= \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{4a}{b} + \frac{b}{a}\right) \frac{1}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}\right] e_z$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi ab}\left[a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} e_z$$

解 (5) 如题 3-1-1 图(e)所示，可视为两个半无限长直载流导线和一个半圆环线电流在 P 点产生的磁感应强度的叠加。磁感应强度的方向按右螺旋法则是垂直纸面向里的方向，设此方向为 e_z 方向，则 P 点处的磁感应强度为



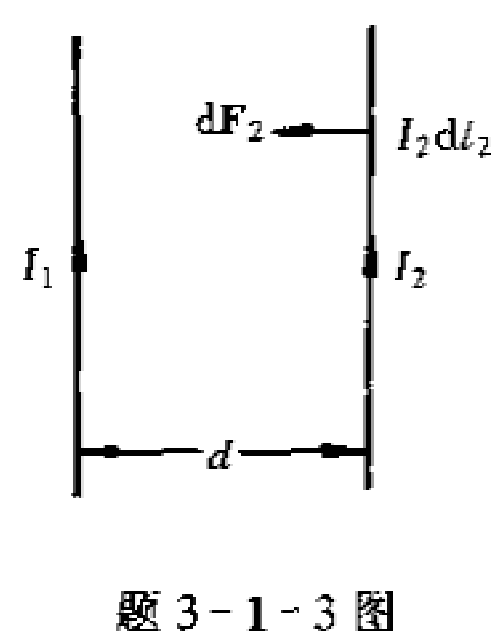
(e)

题 3-1-1 图(e)

$$B = \left[2 \times \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R}\right] e_z = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right) e_z$$

3-1-3 两平行放置无限长直导线分别通有电流 I_1 和 I_2，它们之间的距离为 d，分别求两导线单位长度上所受的磁场力。

解 由毕奥-沙伐定律可知，无限长直导线周围的磁感应强度为



题 3-1-3 图

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} e_\phi$$

由此可知，I_2 线电流所在的位置处，I_1 线电流所产生的

恒定磁场磁感应强度为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \boldsymbol{e}_\phi$$

在 I_2 线电流上选电流元 $I_2 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$，它受到 I_1 线电流在该处的磁场作用力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2 = I_2 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \mathrm{d}} \boldsymbol{e}_\phi$$

根据右手螺旋法则，$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2$ 的方向如题 3-1-3 图所示，是吸引力，其大小为 $\mathrm{d}F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\mathrm{d}l_2$。故线电流 I_2 上单位长度所受到的磁场力

$$F_2 = \int_0^1 \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\mathrm{d}l_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

同理，线电流 I_1 上单位长度受到电流 I_2 的磁场作用力为

3-2-1 一半径为 a 的长直圆柱形导体，被一同样长度的同轴圆筒导体所包围，圆筒半径为 b，圆柱导体与圆筒载有相反方向的电流 I。求圆筒内外的磁感应强度（导体和圆筒内外导磁媒质的磁导率均为 μ_0）。

解 由对称性分析，电流所产生的磁场是轴对称的磁场。选择以圆柱导体轴线为中心的圆形回路作为安培环路，则

$$\oint_l \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I' \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant a$$

其中 $I' = \frac{I}{\pi a^2}\pi\rho^2 = \frac{\rho^2}{a^2}I$。代入上式可得

$$2\pi\rho B = \frac{\mu_0 \rho^2}{a^2} I$$

$$B = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}$$

方向沿圆形环路的切线方向。当 $a \leqslant \rho \leqslant b$ 时

$$\oint_l \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi$$

当 $b \leqslant \rho$ 时，

$$\oint_l \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

$$B = 0$$

3-2-2 有一半径为 a 的长直圆柱形导体，通有电流密度 $\boldsymbol{J} = J_0 \frac{\rho}{a}\boldsymbol{e}_z$ 的恒定电流，其中 z 轴就是圆柱导体的轴线。试求导体内外的磁场强度 $\boldsymbol{H}$。

解 由对称性分析，电流产生的磁场为对称的平行平面场，可用安培环路定理求解。选择以 z 轴为中心的圆形安培环路，则当 $0 \leqslant \rho \leqslant a$ 时

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^\rho J_0 \frac{2\pi\rho^2}{a}\mathrm{d}\rho = \frac{2\pi J_0}{3a}\rho^3$$

$$H = \frac{J_0\rho^2}{3a}$$

方向沿圆环回路的切线方向，即 $\boldsymbol{e}_\phi$ 方向。故

$$\boldsymbol{H} = \frac{J_0\rho^2}{3a}\boldsymbol{e}_\phi$$

当 $a \leqslant \rho$ 时

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_0^a = \frac{2\pi J_0}{a}\rho^2 \mathrm{d}\rho = \frac{2\pi J_0 a^2}{3}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{J_0 a^2}{3\rho}\boldsymbol{e}_\phi$$

3-3-1 下列矢量中哪些可能是磁感应强度 $\boldsymbol{B}$？如果是，请求相应的电流密度 $\boldsymbol{J}$。

(1) $\boldsymbol{F} = K(x\boldsymbol{e}_y - y\boldsymbol{e}_x)$　　　(2) $\boldsymbol{F} = (x\boldsymbol{e}_x - y\boldsymbol{e}_y)$

(3) $\boldsymbol{F} = K\rho\boldsymbol{e}_\rho$　　　(4) $\boldsymbol{F} = Kr\boldsymbol{e}_\phi$

解 由恒定磁场的基本方程，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 一定要满足

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

因此，此方程可作为判断一个矢量是否磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的条件。

(1) $\boldsymbol{F} = K(x\boldsymbol{e}_y - y\boldsymbol{e}_x)$时

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = K\left[\frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y}\right] = 0$$

$\boldsymbol{F}$ 可以作为磁感应矢量，相应的电流密度 $\boldsymbol{J}$ 为

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$= \frac{K}{\mu_0}\left[\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right]\boldsymbol{e}_z = 2\frac{K}{\mu_0}\boldsymbol{e}_z$$

(2) $\boldsymbol{F}=(x\boldsymbol{e}_x-y\boldsymbol{e}_y)$时

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\left[\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial(-y)}{\partial y}\right]=0$$

$\boldsymbol{F}$ 可以作为磁感应矢量，相应的电流密度 $\boldsymbol{J}$ 为

$$\boldsymbol{J}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{F}=\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{\partial(-y)}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right]\boldsymbol{e}_z=0$$

(3) $\boldsymbol{F}=k\rho\boldsymbol{e}_\rho$ 时

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho k\rho)=2K\neq 0$$

故 $\boldsymbol{F}$ 不能为磁感应强度矢量。

(4) $\boldsymbol{F}=Kr\boldsymbol{e}_\phi$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{F}&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}\\&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(kr)=0\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{F}$ 可以作为磁感应矢量，相应的电流密度 $\boldsymbol{J}$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}&=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{F}=\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\phi\sin\theta)\boldsymbol{e}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_\phi)\boldsymbol{e}_\theta\right]\\&=\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(kr\sin\theta)\boldsymbol{e}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(kr^2)\boldsymbol{e}_\theta\right]\\&=\frac{k}{\mu_0}\cot\theta\boldsymbol{e}_r-2\frac{k}{\mu_0}\boldsymbol{e}_\theta\end{aligned}$$

3-3-2 在 $\mu_1=1\,500\mu_0$ 和 $\mu_2=\mu_0$ 两种导磁媒质分界面一侧的磁感应强度 $B_1=1.5$ T，与法线方向的夹角为 35°，求分界面另一侧的磁感应强度 B_2 的大小及它与法线方向的夹角 θ_2。

解 利用分界面上的衔接条件和折射定律可得

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}=1\,500$$

$$\tan\theta_2=\tan\theta_1/1\,500=0.000\,466\,8$$

$$\theta_2=0.026\,7°\approx 0$$

$$B_{2n}=B_{1n}=B_1\cos\theta_1=1.5\times0.819=1.23\quad\text{T}$$

$$B_{2t}=\mu_0H_{2t}=\mu_0H_{1t}=\frac{\mu_0}{\mu}B_{1t}\approx 0$$

3-4-1 在某一场域内，如果磁矢位 $\mathbf{A}=5x^3\boldsymbol{e}_x$，试求电流密度 $\boldsymbol{J}$ 的分布。

解 $\because\ \nabla^2\mathbf{A}=-\mu\boldsymbol{J}$

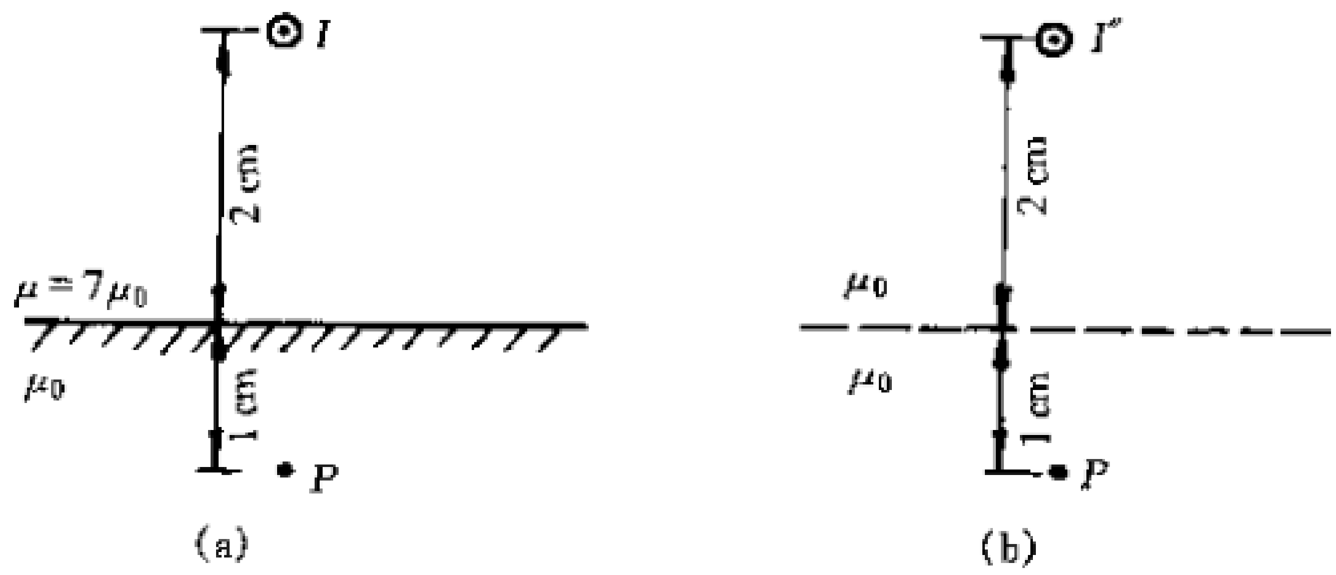
采用直角坐标系，得

$$\nabla^2\mathbf{A}_x=-\mu\boldsymbol{J}_x$$

$$J_x=-\frac{1}{\mu}\nabla^2\mathbf{A}_x=-\frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial^2A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2A_x}{\partial z^2}\right]=-\frac{30}{\mu}x$$

$$\boldsymbol{J}=J_x\boldsymbol{e}_x=-\frac{30}{\mu}x\boldsymbol{e}_x$$

3-6-1 在磁导率 $\mu=7\mu_0$ 的无限大导磁媒质中，有一载流为 10 A 的长直细导线距媒质分界面 2 cm 处，试求媒质分界面另一侧（空气）中距分界面 1 cm 处 P 点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。



题 3-6-1 图

解 利用恒定磁场中的镜像法，有效区域为空气，则可假设将媒质分界面去掉，上下空间的均为空气（$\mu=\mu_0$）。在原导磁媒质所在上半空间内，引入镜像电流

$$I''=\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}I$$

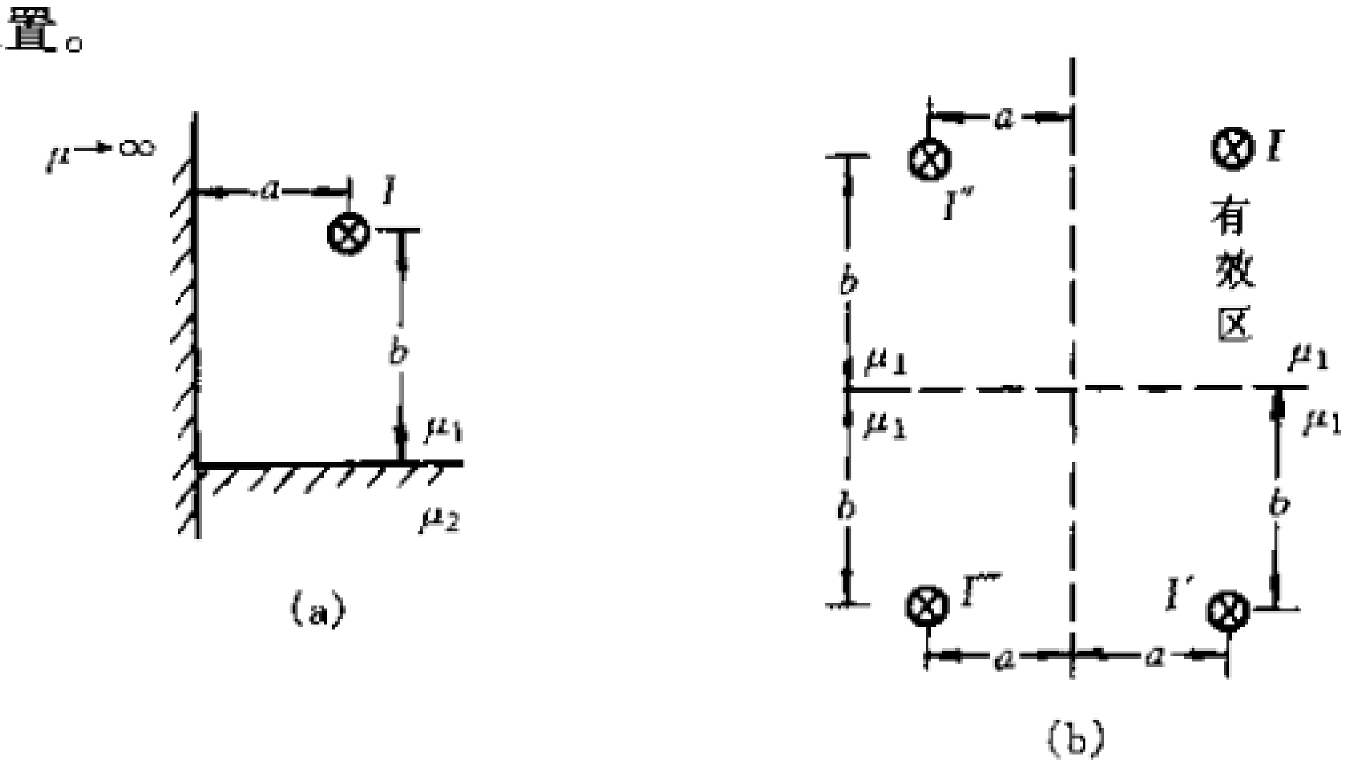
位于原电流所在处，则 P 点的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I''}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi$$

方向沿以电流所在处为中心的圆的切向方向。其大小为

$$B=\frac{4\pi\times10^{-7}\times\dfrac{14}{8}I}{2\pi\times0.03}=11.67\times10^{-5}\quad \mathrm{T}$$

3-6-2 如题 3-6-2 图(a)所示，求电流 I 所在区域为有效区时，镜像电流的大小与位置。



题 3-6-2 图

解 镜像电流的大小与位置均如题 3-6-2 图(b)所示。镜像电流的参考方向设与原电流 I 的方向一致。其大小分别为

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I$$

$$I'' = I$$

$$I''' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I$$

3-7-3 如题 3-7-3 图所示。求真空中：

(1) 沿 Z 轴放置的无限长线电流和匝数为 1 000 的矩形回路之间的互感；

(2) 如矩形回路及其长度所标尺寸的单位不是米而是厘米，再重新求其互感。

解 设无限长直线电流为 I，则在 N 匝矩形回路内产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$$

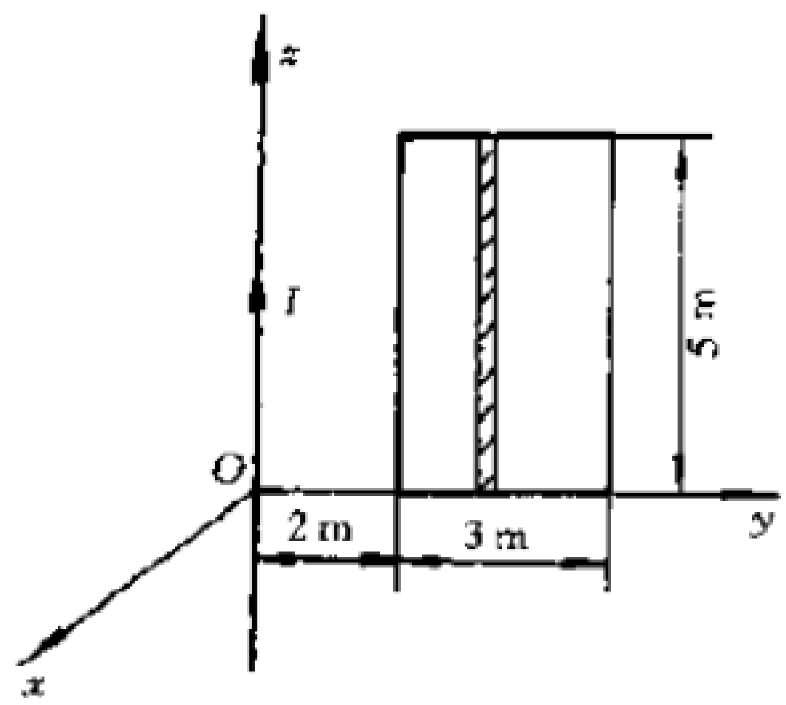
在 $2 \leqslant y \leqslant 5$ 的范围内，距电流 I y 处选一个 $dS = 5dy$ 的小面元，穿过小面元的磁通为

$$d\phi_m = \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \times 5dy$$

该磁通与电流交链的磁通链为

$$d\psi_m = N d\phi_m = \frac{\mu_0 N I}{2\pi y} \times 5dy$$

$$\psi_m = \int_2^5 \frac{\mu_0 N I}{2\pi y} \times 5dy = \frac{5\mu_0 N I}{2\pi} \ln \frac{5}{2}$$



题 3-7-3 图

无限长线电流和匝数为 1 000 的矩形回路之间的互感为

$$M = \frac{\psi_m}{I} = 0.916 \quad \text{mH}$$

当图中所标尺寸为厘米时，上式可得

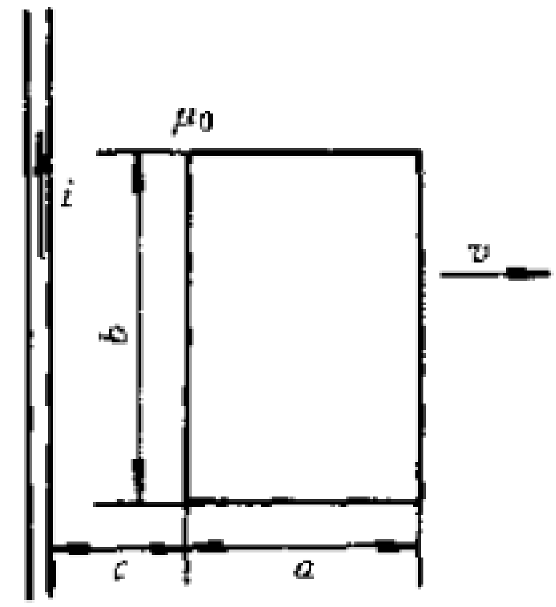
$$M = \frac{0.05 \times \mu_0 N}{2\pi} \ln \frac{0.05}{0.02} = 9.16 \quad \mu\text{H}$$

习题(4－1)

4－1－1 长直导线载有电流 $i=I_m\sin wt$，在其附近有一矩形线框，如题4－1－1图所示。求线框中的感应电动势。

解 应用安培环路定律，可以解得导线周围任一点的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 i}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi=\frac{\mu_0 I_m\sin\omega t}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi$$



题4－1－1图

穿过以速度 v 运动的矩形线框的磁链为

$$\psi_m=\int_s\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_{c+vt}^{c+a+vt}\frac{\mu_0 I_m\sin\omega t}{2\pi\rho}b\,d\rho$$

$$=\frac{\mu_0 I_m b}{2\pi}\sin\omega t\ln\frac{c+a+vt}{c+vt}$$

线框的感应电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{d\psi_m}{dt}=-\frac{\mu_0 I_m b}{2\pi}\times\left[w\cos\omega t\ln\frac{c+a+vt}{c+vt}-\frac{av}{(c+vt)(c+a+vt)}\sin\omega t\right]$$

4－1－2 设电场强度 $E(t)=E_m\cos\omega t$ V/m，$w=10^3$ rad/s。计算下列各种媒质中的传导电流密度和位移电流密度幅值的比值：

(1) 铜 $\gamma=5.8\times10^7$ S/m，$\varepsilon_r=1$；

(2) 蒸馏水 $\gamma=2\times10^{-4}$ S/m，$\varepsilon_r=80$；

(3) 聚苯乙烯 $\gamma=10^{-16}$ S/m，$\varepsilon_r=2.53$

解 传导电流密度 J_C 和位移电流密度 J_D 分别由以下公式求得

$$J_C=\gamma E=\gamma E_m\cos\omega t$$

$$J_D=\frac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}=-\varepsilon wE_m\sin\omega t$$

幅值的比值为

$$K=\frac{J_C}{J_D}=\frac{\gamma E_m}{\varepsilon\omega E_m}=\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}$$

将已知条件代入上式，可得各种媒质的 K 值：

铜 $K=\dfrac{5.8\times10^7}{8.854\times10^{-12}\times1\,000}=6.55\times10^{15}$

蒸馏水 $K=\dfrac{2\times10^{-4}}{80\times8.85\times10^{-12}\times1\,000}=2.83\times10^2$

聚苯乙烯 $K=\dfrac{10^{-16}}{2.53\times8.85\times10^{-12}\times1\,000}=4.47\times10^{-9}$

由此可知，当频率较低时，γ 较大的媒质中可以忽略位移电流，γ 很小的媒质中以位移电流为主，如聚苯乙烯。