

静力学基础

静力学是研究物体平衡一般规律的科学。这里所研究的平衡是指物体在某一惯性参考系下处于静止状态。物体的静止状态是物体运动的特殊形式。根据牛顿定律可知，物体运动状态的变化取决于作用在物体上的力。那么在什么条件下物体可以保持平衡，是一个值得研究并有广泛应用背景的课题，这也是静力学的主要研究内容。本章包括物体的受力分析、力系的简化、刚体平衡的基本概念和基本理论。这些内容不仅是研究物体平衡条件的重要基础，也是研究动力学问题的基础知识。

一、力学模型

在实际问题中，力学的研究对象（物体）往往是十分复杂的，因此在研究问题时，需要抓住那些带有本质性的主要因素，而略去影响不大的次要因素，引入一些理想化的模型来代替实际的物体，这个理想化的模型就是力学模型。理论力学中的力学模型有质点、质点系、刚体和刚体系。

质点：具有质量而其几何尺寸可忽略不计的物体。

质点系：由若干个质点组成的系统。

刚体：是一种特殊的质点系，该质点系中任意两点间的距离保持不变。

刚体系：由若干个刚体组成的系统。

对于同一个研究对象，由于研究问题的侧重点不同，其力学模型也会有所不同。例如：在研究太空飞行器的力学问题的过程中，当分析飞行器的运行轨道问题时，可以把飞行器用质点模型来代替；当研分析飞行器在空间轨道上的对接问题时，就必须考虑飞行器的几何尺寸和方位等因素，可以把飞行器用刚体模型来代替。当研究飞行器的

姿态控制时，由于飞行器由多个部件组成，不仅要考虑它们的几何尺寸，还要考虑各部件间的相对运动，因此飞行器的力学模型就是质点系、刚体系或质点系与刚体系的组合体。

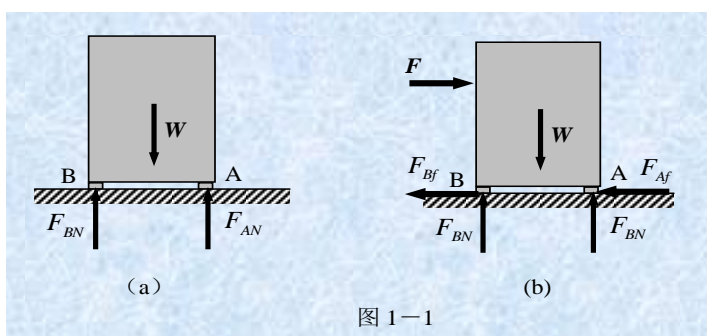
二、基本定义

力是物体间相互的机械作用，从物体的运动状态和物体的形状上看，力对物体的作用效应可分为下面两种。

外效应：力使物体的运动状态发生改变。

内效应：力使物体的形状发生变化（变形）。

对于刚体来说，力的作用效应不涉及内效应。刚体上某个力的作用，可能使刚体的运动状态发生变化，也可能引起刚体上其它力的变化。



例如一重为 W 的箱子放在粗糙的水平地面上（如图 1-1a 所示），人用力水平推箱子，当推力 F 为零时，箱子静止，只受重力 W 和地面支撑力 F_{AN}, F_{BN} 的作用。当推力由小逐步增大时，箱子可能还保持静止状态，但地面作用在箱子上的力就不仅仅是支撑力，还要有摩擦力 F_{Af}, F_{Bf} 的作用（如图 1-1b）。随着推力的逐步增大，箱子的运动状态就会发生变化，箱子可能平行移动，也可能绕 A 点转动，或既有移动又有转动。

静力学就是要研究物体在若干个力作用下的平衡条件。为此，需要描述作用于物体上力的类型和有关物理量的定义等。

力系：作用在物体上若干个力组成的集合，记为 $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n\}$ 。

力偶：一种特殊的力系，该力系只有两个力构成 $\{\mathbf{F}, \mathbf{F}'\}$ ，其中 $\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$ （大小相等，方向相反），且两个力的作用线不重合。有时力偶也用符号 \mathbf{M} 表示，如图 1-2 所示。

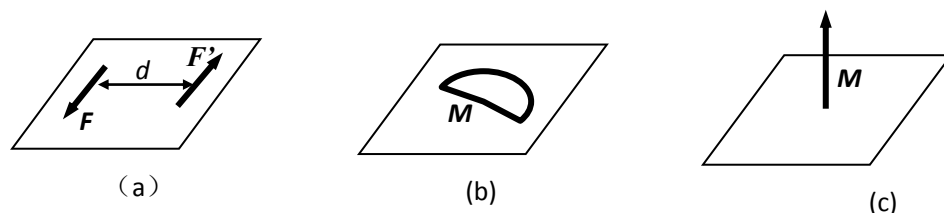


图 1-2

等效力系：若力系 $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n\}$ 和力系 $\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_m\}$ 对同一刚体产生相同的作用效果（运动、约束力等），称这两个力系是等效力系，记为 $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n\} \Leftrightarrow \{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_m\}$ 。

平衡力系：不产生任何作用效果的力系。

例如一个刚体上没有力的作用并且在惯性系下处于静止，那么这个刚体将永远保持静止状态；若这个刚体在某个力系作用下仍然保持静止，这样的力系就是平衡力系。由于平衡力系作用的效果与没有任何力作用的效果相同，所以平衡力系也称为**零力系**。通常平衡力系表示成 $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n\} = \{0\}$ 。

合力：与一个力系等效的力称为该力系的合力。记为 $\{\mathbf{F}_R\} \Leftrightarrow \{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n\}$

如力 \mathbf{F}_R 是力系 $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n\}$ 的合力，则力 $\mathbf{F}_i (i=1, \dots, n)$ 称为 \mathbf{F}_R 的分力。将一个力系用其合力来代替的过程称为力的合成，将合力代换成几个分力的过程称为力的分解。

矢量矩：设 \mathbf{A} 是一个矢量， \mathbf{r} 是由参考点 O 到矢量 \mathbf{A} 始端的矢径（如图 1-3a 所示），矢量 \mathbf{A} 对 O 点的矩定义为：

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_O(\mathbf{A}) = \mathbf{r} \times \mathbf{A}$$

(1-1)



由上式可以看出，矢量矩也是一个矢量。应用矢量矩的概念，如果把矢量 \mathbf{A} 置换成力的矢量 \mathbf{F} ， \mathbf{r} 是由 O 点到力的作用点的矢径（如图 1-3b 所示），就可以得到力对 O 点之矩的定义。

力 对 O 点 的 矩：

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}。$$

设 $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n\}$ 是作用在某一刚体上的力系，力系的主矢和对 O 点的主矩定义成：

$$\text{主矢：} \quad \mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i, \quad \text{主矩：} \quad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

一般情况，力系对不同点的主矩是不相同的，设 \mathbf{M}_A 和 \mathbf{M}_B 分别是力系对任意两点 A 、 B 的主矩，若用 \mathbf{r}_{BA} 表示从 B 点到 A 点的矢径，根据主矢和主矩的定义，利用矢量运算可以推导出的下列关系：

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}_R$$

(1-2)

当力系给定后，力系的主矢是一个不变量，称为**第一不变量**。力系对某一点的主矩随着取矩点的不同而变化，并有关系式 (1-2)，将该式两边点积力系的主矢 \mathbf{F}_R 可得

$$\mathbf{M}_B \cdot \mathbf{F}_R = \mathbf{M}_A \cdot \mathbf{F}_R + (\mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}_R) \cdot \mathbf{F}_R = \mathbf{M}_A \cdot \mathbf{F}_R$$

由于 A 、 B 是任意两点，这说明力系对任意一点的主矩与力系主矢的点积是一个不变量，这个量称为**第二不变量**。

力偶 $\{\mathbf{F}, \mathbf{F}'\}$ 是一种特殊的力系（如图 1-2 所示），这个力系的主矢 $\mathbf{F}_R \equiv \mathbf{0}$ ，由（1-2）式可知，力偶对任意点的主矩都是相同的。因此我们把力偶对任意一点的主矩称为**力偶矩**，力偶矩的矢量运算可根据力系对某点 O 的主矩定义得到：

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}' = \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F} \quad (1-3)$$

三、 静力学公理

静力学公理是从实践中得到的，是静力学的基础。根据这些公理并利用数学工具可以推导出力系的平衡条件。

公理一（二力平衡原理）刚体在二个力作用下平衡的充分必要条件是此二力大小相等，方向相反，作用线重合。该原理还可表示成 $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\} = \{\mathbf{0}\}$ 。

对于刚体，二力平衡原理总是成立的，但对于非刚体（变形体或某些刚体系）则不一定成立。例如图 1-4a 所示的系统，在 A、B 两点作用有等值、反向、共线的两个力，当这两个力的大小均为 $F = F_0 \sin \omega t$ （其中 F_0, ω 为常值）时，此时系统是不平衡的，因为即使系统的初始状态是静止的，那么在这两个力的作用下，系统的运动状态会发生变化。如果把弹簧换为刚性连杆（图 1-4b），则系统可视为一个刚体。在这两个力的作用下，系统的运动状态不会发生变化（若初始静止，在这个力系的作用下还将保持静止）。

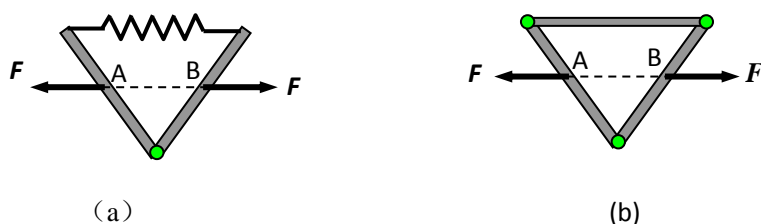


图 1-4

公理二（加减平衡力系原理）在作用于刚体上的任意力系中，加

上或减去任何平衡力系，都不改变原力系对刚体的作用效应。该原理可表示成：

$$\text{若 } \{P_1, P_2, \dots, P_m\} \Leftrightarrow \{0\}, \quad \text{则} \\ \{F_1, F_2, \dots, F_n\} \Leftrightarrow \{F_1, F_2, \dots, F_n, P_1, P_2, \dots, P_m\}$$

公理三（力的平行四边形合成法则）作用在物体上某一点的两个力可以用作用在该点的一个合力来代替，此合力的大小和方向可由这两个力为邻边所构成的平行四边形的对角线来确定。

公理四（作用与反作用定律）任何两个物体间的相互作用力总是同时存在，并且等值、反向、共线，分别作用在两个物体上。

公理四实际上就是牛顿第三定律，该定律与参考系的选取无关，也就是说，对于惯性参考系和非惯性参考系，公理四都是成立的。

公理五（刚化原理）变形体在某一力系作用下处于平衡时，如将该变形体刚化为刚体，则平衡状态保持不变。

图 1-4a 所示系统，如果在两个力作用下处于平衡，那么若使弹簧刚度系数 $k \rightarrow +\infty$ ，也就是将弹簧换成刚性杆（如图 1-4b 所示），系统仍然可以保持平衡。但反之不成立。公理五说明，刚体的平衡条件，只是变形体平衡的必要条件，而不是充分条件。

上述 5 个公理中，有些对刚体是成立的，有些对物体是成立的，对物体成立的公理对刚体一定成立，反之则不然。

四、约束与约束力

工程中的一些物体可在空间自由运动，这些物体称为自由体，例如空中的飞机、卫星等。另一些物体其运动受到某些限制，这些物体称为非自由体，如跑道上的飞机、公路上的汽车、铁道上的火车等。

约束：限制物体运动的条件。

构成约束的物体称为约束体，约束体对物体的作用力称为约束力。

那些大小和方向与约束无关的力称为主动力。

工程中常见的约束有柔索类约束、光滑面约束、各种铰链约束、二力杆约束和固定端约束等。不同类型的约束，对物体运动的限制条件则不同，所产生的约束力的方向也有所不同，如绳索产生的约束力是沿着绳索的方向，且只能受拉力；二力构件产生的约束力的方向是沿二力构件上两个力的作用点的连线，既可以受拉力也可以受压力；除滑动铰链支座外，铰链的约束力的方向是不能确定的；固定端的约束力实际上是一个分布力（可简化成一个力和一个力偶）。掌握各种类型约束的特点，画出研究对象的受力图，是研究力学问题（包括静力学和动力学）的必要基础。值得注意的是，约束力（或力偶）是根据约束类型的特点画的，除绳索和光滑面约束外，仅根据约束类型的特点，无法确定约束力（或力偶）的具体方向，更不能确定其大小，只有利用平衡原理或平衡条件才能最终确定它们的大小和方向。

五、 静力学定理

在此，我们把由静力学中的定义和公理（或定律）推出的一些结论称为定理。

定理 1 作用在刚体上的力沿其作用线移动到任一点，不改变其作用效应。

这个定理实际上是公理一和公理二的推论。对于物体，力的作用效应与力的三要素（大小、方向和作用点）有关。根据定理 1 可知，作用在刚体上的力，其三要素是力的大小、方向和作用线，力对刚体的作用效应则与这三个要素有关。对同一个刚体而言，力的三个要素不同，力的作用效应也就不同。力可以用矢量 \mathbf{F} 表示为

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad F = \|\mathbf{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}$$

其中 F_x, F_y, F_z 为力在 x, y, z 轴上的投影, F 或 $\|F\|$ 表示力矢量的模, α, β, γ 为力矢量与三个坐标轴的夹角。因此, 力这个矢量的模可以表示其大小, 矢量的方向可以用来表示力的方向 (指向), 但不能确定作用线的位置, 还应该用另它一个量来确定力的作用线。

力矢量 F 和力对 O 点之矩 $M_O(F)$ 是力对刚体作用效应的度量。给定了矢量 F , 就能确定力的大小和指向, 再给定刚体在空间的位置和取矩点 O 的位置后, 根据矢量 $M_O(F)$ 就可以确定力的作用线 (无论力的作用点是作用线上的哪一点, 力对 O 点的矩都是不变的, 如图 1-5 所示)。

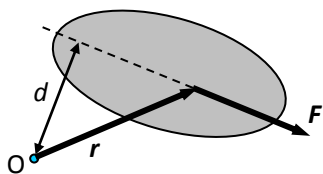


图 1-5

定理 2 (合力矩定理) 设作用在刚体上的力系 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ 存在合力 F_R , 则有:

$$M_O(F_R) = \sum_{i=1}^n M_O(F_i)$$

定理 3 (力对点之矩与力对轴之矩的关系定理) 力对某一轴的矩等于力对这一轴上任一点之矩在该轴上的投影。

在数学上有这样的定理, 即某一矢量对任意轴的矩等于该矢量对这一轴上任一点之矩在该轴上的投影。定理 3 只是这个定理在力学中的一个应用, 同样在研究动量矩时, 也会有类似的应用。

定理 4 (力的平移定理) 作用于刚体上任意一点的力可平移到刚体上其它任何一点, 若不改变对刚体的作用效应, 必须增加一个附加

力偶，其力偶矩等于原力对新作用点的矩。

定理 5 (力系等效定理) 作用于刚体上的两个力系 $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n\}$ 和 $\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_m\}$ 等效的条件是：

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{P}_j, \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) = \sum_{j=1}^m \mathbf{M}_O(\mathbf{P}_j)$$

该定理可根据牛顿定律和有关力系等效的定义推导出来。实际上该定理是力系等效的基本定理，定理 1 和定理 4 都可由该定理推导出来。由定理 5 还可以推导出力偶的等效条件，由于力偶是一个特殊的力系，它的主矢恒等于零，而且对任意一点的主矩也相同，因此可由定理 5 推出力偶等效的条件。

定理 6 (力偶等效条件) 作用于刚体上的两个力偶等效的条件是它们的力偶矩相等。

由这个定理可以得到力偶的下列性质。

力偶的性质：

性质一 力偶不能与一个力等效（即力偶无合力），因此也不能与一个力平衡。

性质二 力偶可在其作用面内转动，或平移到另一平行面上，而不改变对刚体的作用

效应（如图 1-6a、b 所示）。

性质三 若改变力偶中的力和力偶臂的大小，而不改变力偶的转向和力偶矩的大小，

则力偶对刚体的作用效应不会改变（如图 1-6c 所示，其中 $Fd = F_1d_1$ ）。

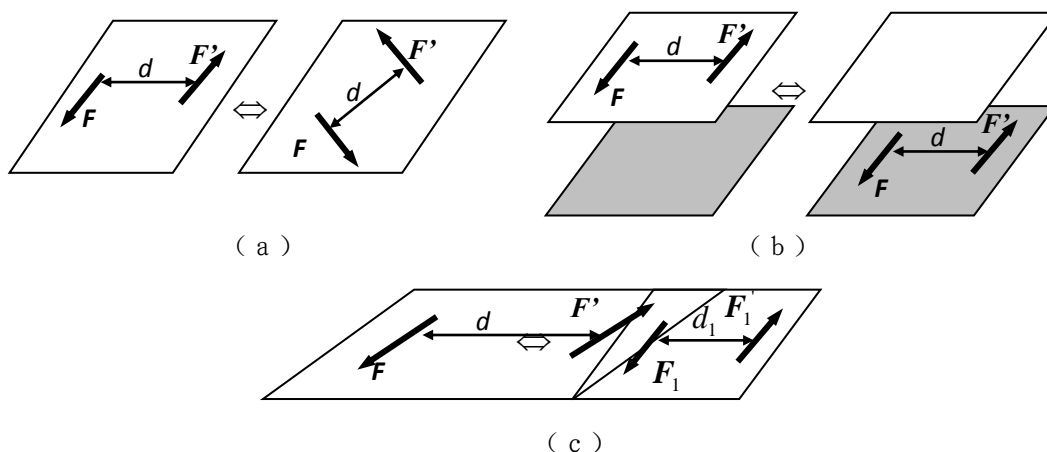


图 1-6

定理 7（三力平衡定理）作用于刚体上的三个力若平衡，则这三个力的作用线必共面，或是平行，

或是相交于一点。

由该定理可推出这样的结论：作用于刚体上共面的三个力若平衡，如果它们不平行，则必汇交于一点。

六、力系的简化

作用在刚体上力系 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ 向某一点 A 简化实际上是确定一个与原力系等效的简化力系，这个简化力系一般由一个作用线通过简化点 A 的力和一个力偶构成，这个力的大小和指向由原力系的主矢 F_R 确定，而这个力偶的力偶矩由原力系对 A 点的主矩 M_A 来确定，将该简化力系记为 $\{F_R, M_A\}$ 。同理原力系 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ 也可以向另一个简化点 B 简化，得到另一个简化力系是 $\{F_R, M_B\}$ 。这两个简化力系均是由一个力和一个力偶构成，这两个简化力系中的力（不包括力偶）的大小和指向都是相同的，只是作用线不同，一个过简化点 A ，另一个过简化点 B ，在一般情况下，两个简化力系中的力偶 M_A 和 M_B 的力偶矩是不同的，但它们满足关系式（1-2）。

力系 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ 简化的最后结果有以下四种情况：

(1) 力系简化为一合力偶

若 $\mathbf{F}_R = 0, \mathbf{M}_O \neq 0$ ，则力系等价于一个力偶，其力偶矩等于该力系对简化点 O 的主矩。

(2) 力系简化为一合力

若 $\mathbf{F}_R \neq 0, \mathbf{M}_O = 0$ ，则该力系等价于一个力，力的大小和方向由力系的主矢确定，力的作用线过 O 点。

若 $\mathbf{F}_R \neq 0, \mathbf{M}_O \neq 0, \mathbf{F}_R \perp \mathbf{M}_O$ ，则该力系等价于一个力，力的大小和方向由力系的主矢确定，力的作用线不过 O 点，而过 O' 点（ O' 点如何确定请读者自己思考）。

(3) 力系简化为力螺旋

若 $\mathbf{F}_R \neq 0, \mathbf{M}_O \neq 0$ ，且 $\mathbf{F}_R, \mathbf{M}_O$ 互不垂直，则力系等价于一个力螺旋。

(4) 力系平衡

若 $\mathbf{F}_R = 0, \mathbf{M}_O = 0$ ，则力系等价于一个零力系（平衡力系）。

由此可知力系是平衡力系的充分必要条件是：力系的主矢和对某一点的主矩均为零。

同理，根据定理 6 和平衡力系的定义，也可以得到上述力系的平衡条件。

刚体的定点运动与一般运动

刚体的定点运动与一般运动属于刚体的三维运动，在本章首先研究其运动学，然后在研究其动力学

一、定点运动刚体的运动学

刚体的定点运动：刚体在运动时，如果其或其延展体上有一点不动，则称这种运动为刚体的定点运动。

(1) 刚体定点运动的运动方程。确定定点运动刚体在空间的位置可用欧拉 (Euler) 角表示, 它们分别是进动角 ψ , 章动角 θ , 自转角 φ 。刚体定点运动的运动方程为

$$\psi=f_1(t), \theta=f_2(t), \varphi=f_3(t) \quad (12-1)$$

(2) 刚体定点运动的角速度和角加速度。定点运动刚体的角速度可表示成

$$\omega=\dot{\psi}+\dot{\theta}+\dot{\varphi} \quad (12$$

—2)

刚体角速度 ω 矢量平行于瞬时转轴。定点运动刚体的角加速度定义为:

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}$$

(12—3)

一般情况下角速度矢量 ω 的大小和方向都随时间变化, 因此角加速度矢量 α 和角速度矢量 ω 不平行。

(3) 定点运动刚体上各点的速度和加速度。定点运动刚体上任意点 M 的速度可表示成

$$v=\omega \times r$$

(12—4)

其中: r 为由定点 O 引向点 M 的矢径。定点运动刚体上任意点 M 的加速度可表示成

$$a=\alpha \times r+\omega \times v \quad (12$$

—5)

上式中等号右端第一项 $a_R=\alpha \times r$ 定义为转动加速度, 第二项 $a_N=\omega \times v$ 定义为向轴加速度。

(4) 刚体定点运动的位移定理: 定点运动刚体的任何有限位移, 可以绕过定点的某一轴经过一次转动而实现。

二、定点运动刚体的动力学

(1) 定点运动刚体的动量矩。定点运动刚体对固定点 O 的动量矩定义为:

$$L_O=\int_M r \times v dm=\int_M r \times(\omega \times r) dm \quad (12-6)$$

其中: r, v 分别为刚体上的质量微团 dm 的矢径和速度, ω 为刚体的角速度。当随体参考系的三个轴 ox', oy', oz' 为惯量主轴时, 上式可表示成

$$L_O=J_x \omega_x i'+J_y \omega_y j'+J_z \omega_z k' \quad (12-7)$$

(2) 定点刚体的欧拉动力学方程。应用动量矩定理可得到定点运动刚体的欧拉动力学方程

$$\left. \begin{aligned} J_{x'}\dot{\omega}_{x'} + (J_{z'} - J_{y'})\omega_{y'}\omega_{z'} &= M_{x'} \\ J_{y'}\dot{\omega}_{y'} + (J_{x'} - J_{z'})\omega_{z'}\omega_{x'} &= M_{y'} \\ J_{z'}\dot{\omega}_{z'} + (J_{y'} - J_{x'})\omega_{x'}\omega_{y'} &= M_{z'} \end{aligned} \right\} \quad (12-8)$$

(3) 陀螺近似理论。绕质量对称轴高速旋转的定点运动刚体成为陀螺。若陀螺绕的自旋角速度为 ω ，进动角速度为 Ω ， J_z 为陀螺对质量对称轴的转动惯量，则陀螺的动力学方程为

$$\Omega \times J_z \omega = M_o \quad (12-9)$$

—9)

其中 M_o 是作用在陀螺上的力对 O 点之矩的矢量和。

三、刚体的一般运动

(1) 刚体一般运动的运动学。确定一般运动刚体在空间的位置，需要确定刚体上任意一点 O' (基点) 的坐标 $x_{O'}, y_{O'}, z_{O'}$ 和刚体相对基点作定点运动的三个欧拉角 ψ, θ, φ 。一般运动刚体的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} x_{O'} &= f_1(t), y_{O'} = f_2(t), z_{O'} = f_3(t) \\ \psi &= f_4(t), \theta = f_5(t), \varphi = f_6(t) \end{aligned} \right\} \quad (12-10)$$

(2) 一般运动刚体上任意一点的速度和加速度。一般运动刚体上任意一点 M 的速度可表示成

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (12-11)$$

11)

其中 $\mathbf{v}_{O'}$ 为基点 O' 的速度， \mathbf{r}' 为由 O' 引向 M 点的矢径， $\boldsymbol{\omega}$ 为刚体的角速度。一般运动刚体上任意一点 M 的加速度可表示成

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_M \quad (12-12)$$

其中 $\mathbf{a}_{O'}$ 为基点 O' 的加速度。

(3) 刚体一般运动的运动微分方程。刚体一般运动的运动微分方程可由质心运动定理和相对质心的动量矩定理得到。

静力学理论的应用

应用静力学的基本理论与方法研究物体系统的平衡是本章的基本内容，其中包括：刚体系统的平衡问题；桁架的平衡问题，考虑摩擦时物体的平衡问题等。

一、 静定与静不定问题

在研究刚体或刚体系统的平衡问题中，如果未知量（包括：约束力，平衡位置等）的数目等于系统独立的平衡方程的数目时，所有未知量均可由平衡方程唯一地求解出来，这样的问题称为**静定问题**；如果未知量的数目大于系统独立的平衡方程的数目时，未知量不能由平衡方程唯一地求解出来（有时只能求出部分未知量），这样的问题称为**静不定问题**。

从数学角度来看，判断系统的静定与静不定问题，是根据系统未知量的数目与独立平衡方程数目的关系来确定。从力学角度来看，静不定问题，一般是系统存在某种多余的约束。例如图 3-1 所示系统是静定的，因为铰链 A、B 处的约束力（三个未知量）可由三个独立的平衡方程完全确定；而图 3-2 所示系统是静不定的，因为在水平方向存在多余的约束，A、B 处的约束力为四个未知量，独立的平衡方程只有三个，不能唯一地求出所有的未知量，但可以求出部分未知量，如可以求出约束力在铅垂方向的两个分量，而在水平方向的两个分量不能唯一地确定。

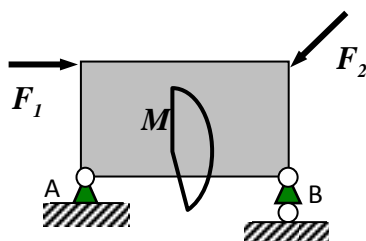


图 3—1

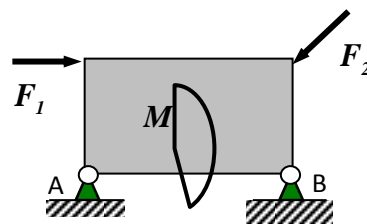


图 3—2

二、 刚体系统的平衡问题

在一般情况下，对于静定的刚体系统，其独立的平衡方程数目等于系统中每个刚体的独立平衡方程数目之和，由这组平衡方程可求得刚体系统中所有未知量，但求解联立的代数方程组，计

算量较大，通常利用计算机进行数值求解。在理论力学的课程学习中，则侧重强调基本理论与基本方法的理解与掌握。在求解刚体系统的平衡问题时，突出强调灵活恰当地选取研究对象，对研究对象进行受力分析，建立平衡方程，并尽量避免求解联立方程，最好一个方程求解一个未知量。

三、 平面桁架的平衡问题

桁架是特殊的刚体系统，其特点是构成桁架的各个部件均抽象成二力杆。求解杆件内力或约束力时的思想方法与求解刚体系统平衡问题的相同，只是在分析过程中要利用二力杆的特点。

求解桁架平衡问题的基本方法有：

- (1) 节点法：以桁架的节点为研究对象，通过求解平衡方程，确定杆件内力的方法。
- (2) 截面法：将桁架沿某一面截出一部分作为研究对象，应用平衡方程求解杆的内力的方法。

四、 考虑摩擦时的平衡问题

1、滑动摩擦

两个相接触的物体有相对滑动或滑动趋势时，在接触处有阻碍其滑动的力，这种力称为滑动摩擦力。

滑动摩擦的分类及其特点：

- (1) 物体处于静止但有滑动趋势时，存在静滑动摩擦力 F 。

摩擦力的方向：与相对滑动趋势的方向相反。

摩擦力的大小： $0 \leq F \leq F_{\max}$ ，由平衡方程确定。最大静摩擦力的大小由库仑定律确定，即： $F_{\max} = f_s F_N$ ，其中 f_s 为静滑动摩擦因数（可由手册查出）， F_N 为法向约束力的大小。当摩擦力达到最大值时，摩擦点即将产生滑动，这种状态称为临界状

态

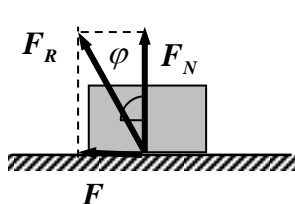
(2) 当物体滑动时, 存在动滑动摩擦力 F' 。

摩擦力的方向: 与相对滑动的方向相反。

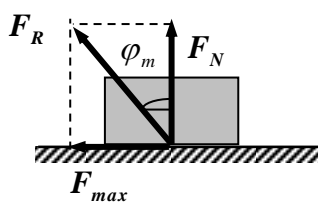
摩擦力的大小: $F' = fF_N$, 其中 f 为动滑动摩擦因数, F_N 为法向约束力的大小。

2、摩擦角与摩擦自锁

将约束面对物体的全反力 $F_R (F_R = F + F_N)$ 的作用线与法向约束力作用线的夹角记为 φ , 如图 3-3a 所示; 达到临界状态时的全反力 $F_R (F_R = F_{\max} + F_N)$ 的作用线与法向约束力作用线的夹角记为 φ_m , 称为摩擦角, 如图 3-3b 所示, 并有关系式 $\tan \varphi_m = f_s$ 。



(a)



(b)

图 3-3

由前述可知, 全反力的作用线总在摩擦角以内。当作用在物体上主动力的作用线也在摩擦角的范围内时, 无论主动力的大小如何变化, 物体总保持平衡而不滑动, 这种现象称为摩擦自锁。摩擦自锁条件是 $\varphi \leq \varphi_m$ 。

3、滚动摩阻

当两个相接触的物体有相对滚动或滚动趋势时, 在接触处除了有摩擦力外, 还存在滚动摩擦力偶 M , 这个力偶称为滚阻力偶。

(1) 物体处于静止但有滚动趋势时, 存在滚阻力偶 M 。

滚阻力偶的转向：与滚动趋势的转向相反。

滚阻力偶矩的大小： $0 \leq M \leq M_{\max}$ ，由平衡方程确定。最大滚阻力偶矩的大小由关系式 $M_{\max} = \delta F_N$ 确定，其中 δ 为滚阻系数（可由手册查出）， F_N 为法向约束力的大小。当滚阻力偶达到最大值时，物体即将滚动，这种状态也称为**临界状态**。

(2) 当物体滚动时，存在滚阻力偶 M 。

滚阻力偶的转向：与滚动转向相反。

滚阻力偶矩的大小：近似地由关系式 $M_{\max} = \delta F_N$ 确定。

虚位移原理

虚位移原理提供了静力学问题的一种全新的解法，它还是分析力学的基础。

虚位移原理是设计用来消除平衡方程中的约束力，主要是用来求解平衡系统的主动力之间的关系或平衡位置。另外，通过解除约束，将内力或约束力转化为主动力，则虚位移原理也可用来求解内力和约束力，而且这比以前的列平衡方程的常规方法更有效。

一、力的功

元功：力在微小位移上所做的功称为元功。其数学表达式为： $\delta W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt$ 或 $\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ，其中 \mathbf{v} 和 $d\mathbf{r}$ 分别为力 \mathbf{F} 作用点的速度和微小位移。

变力在曲线路径上做的功可以用曲线积分计算。

等效力系做功定理：等效力系在刚体的位移上所做的功相等。

即：若 $\{F_1, \dots, F_n\} = \{P_1, \dots, P_m\}$ ，则 $\sum_{i=1}^n W(F_i) = \sum_{j=1}^m W(P_j)$ 。

在计算力的功时，为计算方便，可以利用上述定理。

例如：图 4-1(a) 所示鼓轮上缠绕有柔索，在力 F （大小和方向不变）作用下在地面上纯滚动。计算在轮心沿直线移动 S 距离过程中力 F 所做的功。

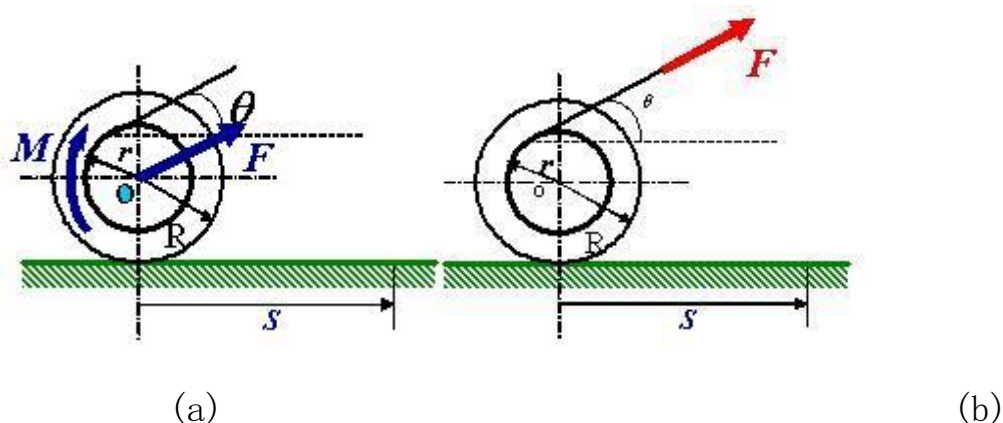


图 4-1

由于力 F 的作用点的位移不易计算，我们可将 F 平移到轮心，同时附加一力偶 M （其力偶矩的大小为 $M = Fr$ ，如图 4-1b 所示）以保持力系等效，即 $\{F\} = \{F, M\}$ 。新的力系 $\{F, M\}$ 在轮心沿直线移动 S 距离过程中所作的功较易计算：

$$W = FS \cos \theta + M\varphi,$$

其中： φ 为圆盘轮心移动 S 距离时，圆盘转动的角度，即 $\varphi = \frac{S}{R}$ ，于是

上式可写成

$$W = FS \cos \theta + Fr \cdot \frac{S}{R}$$

它等于在轮心沿直线位移 S 距离过程中力 F 所做的功。

二、约束及其分类

约束：对质点或质点系运动所加的限制。如某质点被限制在固定

曲面上运动,则该质点就是受到了约束。

约束体对被约束体的运动是通过力的作用(称为约束力)来加以限制的,但是约束与受力是应区别对待的两个不同概念,这可以通过下面的例子来区分。

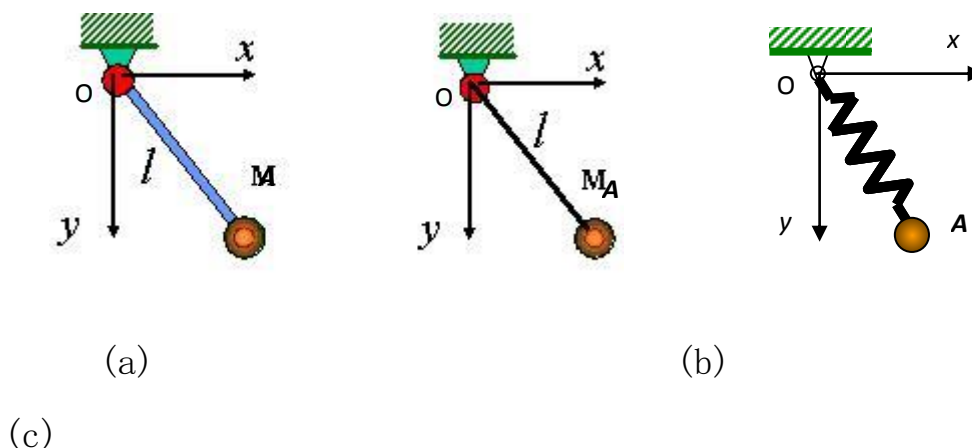


图 4-2

对图 4-2 中所示的系统:

在(a)中,质点 A 被固定在刚性杆上并球铰链连接接在固定点 o 。显然质点 A 受到了约束,因为质点 A 的运动被限制在一个固定球面上(球面中心在 o 点,半径为杆长 l),它的运动受到了限制。

在(b)中,将刚杆换成了一条不可伸长的柔索,则质点 A 仍然受到了约束,因为质点 A 被限制在一个固定球面内运动(这是一个单面约束,约束方程用不等式表示),它不能运动到球面之外。

在(c)中,刚杆又换成了弹簧,则质点 A 就变成了一个自由质点。尽管它受弹簧力的作用,但它的运动没有受到限制,理论上它可以运动到空间中任何一个位置,所以图(c)中的质点 A 没受到约束。

总而言之,受约束质点必然受力,但受力不等于受约束。

三、约束的分类

约束如按系统的实际结构进行分类,也就是从物理方面来进行分

类，就有了柔索类、铰链类、光滑面支撑类、固定端类等。另外，约束的理想与非理想之分，也是从物理方面来分类的。

约束如按约束方程的形式，也就是从数学方面来进行分类，我们就有单面与双面之分、定常与非定常之分、几何(完整)与非完整之分。

四、自由度与广义坐标

自由度：自由度是确定质点系的空间位置所需的独立参数的个数。

对于一个具有 n 个质点的自由质点系，可用各点的空间坐标来确定它的空间位置，所以它的自由度是 $3n$ 。如果给该质点系再加上 k 个独立的双面几何约束：

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, i = 1, \dots, k$$

则由于通过该方程组可将其中的 k 个坐标表示成另外 $3n-k$ 个坐标参数(独立)的函数，所以该受约束质点系的自由度为 $3n-k$ 。

对于图 4-2(a)所示的质点，如果 o 处是球铰，它的约束方程(质点到球铰 o 的距离为杆长)的个数是 1，所以该系统的自由度是 $3-1=2$ 。如果将 o 换成柱铰，则约束方程则为

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - l^2 &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

有两个约束方程，则系统的自由度就是 $3-2=1$ 。

对于图 4-1(b)所示的质点，由于这是一个单面约束，当柔索未拉直时，质点的运动未受到限制，确定质点 A 的位置仍需要它的三个空间坐标，所以它的自由度是 3；当柔索处于拉直状态时，质点的运动受到限制，可列写一个等式约束方程，所以其自由度是 2。

对于图 4-1(c)所示的质点，由于弹簧不构成约束，所以自由度是 3。

对于刚体系统，了解各种运动状况下的刚体所具有的自由度对于判定系统的自由度是有帮助的，下面列出各种运动的刚体所具有的自

由度。

空间运动的自由刚体： 6

空间平动的刚体： 3

定点转动的刚体： 3

平面运动的刚体： 3

定轴转动的刚体： 1

对于刚体系统，也可以用位置参数减去独立(双面)约束方程个数的方法判定自由度。下面以例示之。

如图 4-3 所示的平面运动机构，两轮被限制在水平直线上作纯滚动，杆 AC 与杆 BC 之间以(柱)铰链连接，杆与轮之间也用(柱)铰链连接。确定系统的自由度。

分析：该系统由两根杆和两个轮组成，计有 4 个平面运动刚体，每个平面运动刚体需 3 个位置参数，该机构共需 $4 \times 3 = 12$ 个参数描述其位置。但是这 12 个位置参数又受以下约束：

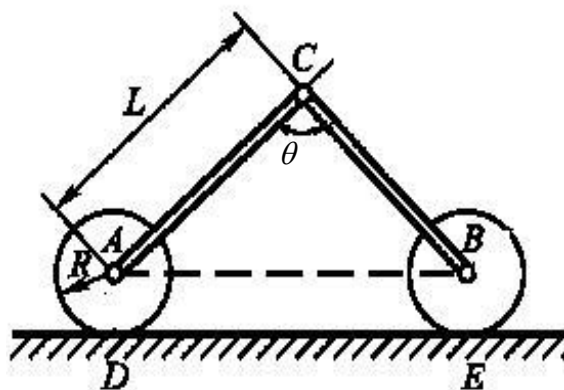


图 4-3

杆 AC 与杆 BC 的 C 点位置坐标重叠：可列 2 个几何约束方程(x 坐标与 y 坐标)；

杆 AC 与轮 A 的轮心 A 点位置坐标重叠：可列 2 个几何约束方程(x 坐

标与 y 坐标);

杆 BC 与轮 B 的轮心 B 点位置坐标重叠: 可列 2 个几何约束方程 (x 坐标与 y 坐标);

轮 A 作纯滚动: 可列 1 个可积的运动约束 (相当于 1 个几何约束) 方程;

轮 B 作纯滚动: 可列 1 个可积的运动约束 (相当于 1 个几何约束) 方程;

轮 A 中心 A 作直线运动: 可列 1 个几何约束方程;

轮 B 中心 B 作直线运动: 可列 1 个几何约束方程。

这样一来, 系统约束方程的个数为 10, 则整个系统的自由度为:
 $12-10=2$ 。

也可以这样来判定: 通过观察, AC 杆与 BC 杆间的夹角 θ 可决定系统的形状, 一旦 θ 确定, 则轮 A 的中心坐标 x_A 可决定系统的位置及两轮的转角, 故描述该系统的位置独立参数可取 (x_A, θ) , 所以这是一个 2 自由度系统。

广义坐标: 确定系统位置或形状的独立参数。

系统的自由度是唯一的, 但确定位置或形状的独立参数却有多种取法, 故广义坐标的取法不唯一, 但是广义坐标的个数是确定的。当系统受到完整约束时, 广义坐标的个数等于系统的自由度数。

例如在上面的例子中, 可以取 (x_A, θ) 为广义坐标, 或取 (x_B, θ) 为广义坐标, 也可以取两轮的轮心的水平位置坐标 (x_A, x_B) 为广义坐标, 因为它们都是独立参数。但不能取轮心 A 的坐标和轮 A 的转角 (x_A, φ_A) 为广义坐标, 因为这两者不独立。

位形空间: 广义坐标构成的空间称为位形空间, 也称构形空间。位形空间中的点描述了质点系的位置或形状。取质点系的广义坐标为 q_1, \dots, q_k , 则 (q_1, \dots, q_k) 就是位形空间。

五、虚位移与虚功

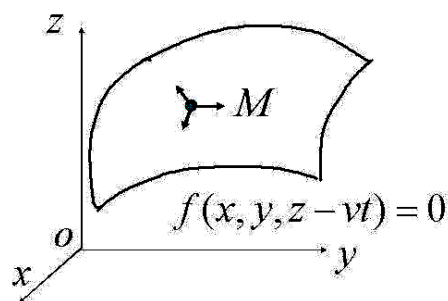
虚位移：在给定瞬时，质点或质点系为约束容许的任何无限小位移。

在静力学中，考虑的是完整、双面、定常约束，但在动力学中，尽管运动中的质点系大都也是受定常约束，但也可能受非定常约束（即约束方程中显含时间 t ）。

对于定常约束，有无“给定瞬时”没有区别，但对于非定常约束，“给定瞬时”意味着什么呢？我们以下面的例子来阐明这个概念。

对于一个限制在固定曲面上 $f(x, y, z)=0$ 上的质点 M ，它的虚位移是在 M 点的切面上任意方向的无限小位移，而 M 的无限小实位移会和某个方向上的虚位移重合。

如果该曲面在运动，不妨设在 z 方向以速度 v 平动： $f(x, y, z-vt)=0$ 。这种情况下，“给定瞬时”的虚位移就是在给定时刻，曲面所在位置 M 点的切面上任意方向的无限小位移。相当于将正在运动的曲面在该瞬时“定格”，然后考虑该“固定曲面”所容许的无限小位移（如图 4-4）。在数学上，意味着时间 δt 的变分为零： $\delta t=0$ 。对于定常约束，无限小实位移同某一方向的虚位移重合，但对非定常约束，无限小实位移不同任何虚位移重合。



t 时刻曲面所处位置

图 4-4

虚功：虚功是力在质点系的虚位移上所做的功。

虚功是一个假想的功，按定义，虚位移是微小位移，所以虚功属于元功。

理想约束：约束力虚功之和等于零的约束。理论力学中常见的理想约束有：

- 光滑(固定或移动)支撑面约束和滚动铰链支座；
- 光滑固定铰链支座和轴承；
- 连接物体的光滑铰链；
- 无重刚杆；
- 连接两物体的不可伸长的柔索；
- 不计滚动摩擦阻力时，刚体在(固定或移动)曲面上的无滑动的滚动。

虚位移原理：具有定常、双面、完整、理想约束的质点系，其平衡的充要条件是，对于系统的任何一个虚位移，作用于质点系上的所有主动力所做的虚功之和等于零。

虚位移原理写成数学表达式：

$$\delta W = \sum \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (4-1)$$

其中 $\delta \mathbf{r}_i$ 是主动力 \mathbf{F}_i 的作用点的虚位移。由此建立的方程也可称为平衡方程。

对于一个受约束的质点系，各 $\delta \mathbf{r}_i$ 并不是独立的。所以在实际应用中必须补充一组虚位移的约束方程。所以，虚位移原理就将求平衡问题转化为求虚位移的关系问题。

仔细审视一下虚位移原理，请注意其中加点的“任意”二字。在对多自由度系统实际应用虚位移原理时，可以选取几个特殊的虚位移，令主动力做的虚功之和为零，以建立平衡方程。如果所选取的虚位移是线性无关的，则得到的平衡方程就是独立的。

对于多自由度系统，用虚位移原理建立的平衡方程的个数等于系统的自由度。

六、求解虚位移之间的关系

如果质点系的约束方程具有形式

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, i = 1, \dots, k$$

则各质点的虚位移之间满足如下关系：

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \delta y_j + \frac{\partial f_i}{\partial z_j} \delta z_j \right) = 0, i = 1, \dots, k$$

对于理论力学中常见的刚体系统，刚体的约束条件是：对于刚体上的任何两点，有：

$$\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^2 = \text{常量},$$

即：刚体上任意两点间的距离保持为常量。上式还可表示成：

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \bullet (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \text{常量}$$

对于上式两边取变分，则有： $2(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \bullet (\delta \mathbf{r}_i - \delta \mathbf{r}_j) = 0$

即：

$$\delta \mathbf{r}_i \bullet (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \delta \mathbf{r}_j \bullet (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

由此，我们得到一个重要结论：**刚体上任意两点的虚位移在它们的连线上的投影相等**。这是刚体系统常用的一个虚位移关系（也称**投影定理**）。

根据上述投影定理可以得到下面两个推论：

推论 1：对于可作平面运动的刚体（此时刚体视为平面图形），若已知在给定瞬时其上 A、B 两点虚位移垂线相交于 P 点（如图 4—5a 所示），则在该瞬时，刚体上的 P 点的虚位移为零。

推论 2：对于可作平面运动的刚体（此时刚体视为平面图形），若已知在给定瞬时其上 A、B 两点虚位移的垂线相互平行且不相交（如图

4—5b 所示), 则在该瞬时, 刚体上所有点的虚位移都相同。

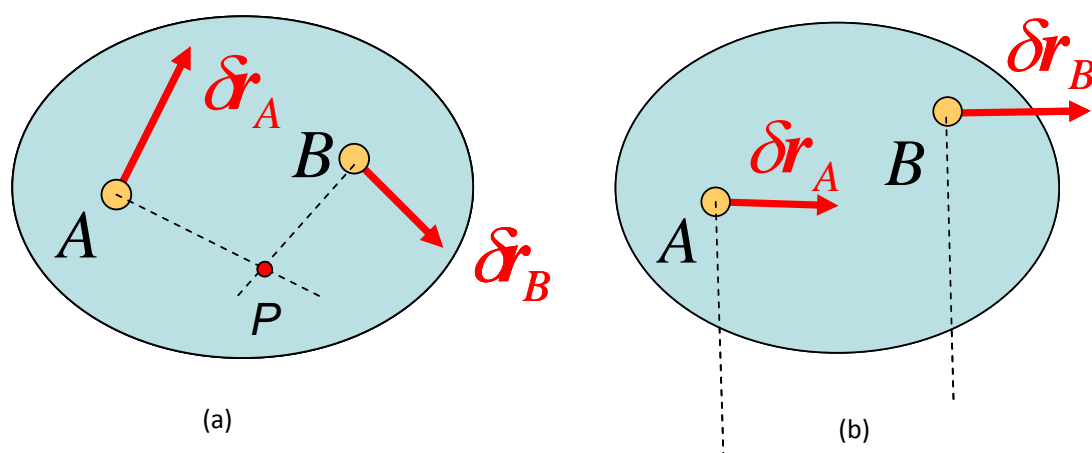


图 4—5

由推论 1 可知, 在该瞬时, 刚体的虚位移可视为绕 P 点作定轴转动, 其转角为 $\delta\theta = \frac{\delta r_A}{AP} = \frac{\delta r_B}{BP}$, 由推论 2 可知, 在该瞬时, 刚体的虚位移是平移。

七、广义力

取质点系的广义坐标为 q_1, \dots, q_k , 设质点系有虚位移 $(\delta q_1, \dots, \delta q_k)$, 则作用在质点上的所有力 $(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n)$ 所做的虚功之和可以写成如下形式:

$$\sum_{i=1}^n \delta W_i = \sum_{i=1}^n (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = \sum_{j=1}^k Q_j \delta q_j$$

其中: (x_i, y_i, z_i) 是力 \mathbf{F}_i 的作用点位置的直角坐标, 它是广义坐标 q_1, \dots, q_k 的函数。

Q_j 称为对应于广义坐标 q_j 的广义力, 它的表达式为

$$Q_j = \sum_{i=1}^n (F_{ix} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_j}), j = 1, \dots, k \quad (4-2)$$

虚位移原理的一个直接推论是: 具有定常、双面、完整、理想约束的质点系, 其平衡的充要条件是, 对应于所有广义坐标的广义力都

等于零。

力场：力场是一个空间。当质点(系)所受力完全由其所在位置决定，这样的空间称为力场。

势力场：如果场力所做的功与质点经过的路径无关，这样的力场称为势力场或**保守力场**，相应的场力称为有势力或保守力。

常见的有势力有：重力、弹性力、万有引力等。

阻力不是有势力，因为它们做的功与路径有关。它们甚至不能构成力场，因为阻力的大小和方向取决于质点(系)的速度。即使象动滑动摩擦力在平面上可以大小保持不变，但其方向却得由质点(系)的速度方向来决定。

势函数：决定势力场中力的函数，也称**力函数**。

记质点系的位形空间为 (q_1, \dots, q_k) ，记势力场的力函数为 $U = U(q_1, \dots, q_k)$ ，则质点系在势力场中的广义力为：

$$Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j}, (j=1, \dots, k)$$

势函数可以相差一个常数而不改变势力场中的力。

势能：质点(系)从某一位置或形状——简称位形—— A 移动(或变形)到基准位形 A_0 ，有势力所做的功，称为质点系在该位形的势能。基准位形的势能为零。

要注意的是，由于基准位形是势能函数的参考点，它必须是一固定的位形。就如同描述位置的参考点必须是确定点一样。

势能函数常记为 $V = V(q_1, \dots, q_k)$ ，势力场的广义力与势能函数的关系是：

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, (j=1, \dots, k) \quad (4-3)$$

八、平衡位置的稳定性

平衡位置也称平衡解，它是动力学系统的一个特解。如果初始条件适当，系统将保持在这个平衡位置。当系统在平衡位置受到微小扰动时(即对初始条件做微小改变)，如果相应的动力学方程的解仍保持在平衡位置的邻近区域，则称该平衡位置是稳定的。

稳定性研究是动力学理论中一个重要的研究领域。对于处于有势力场中的受理想约束的系统，有一个关于平衡位置的稳定性的重要判据：如果系统的势能函数在平衡位置具有严格的局部极小值，则该平衡状态是稳定的。

我们可以给该判据一个力学解释：由于势能函数在平衡位置取严格的局部极小值，平衡位置周围的势能都高于平衡位置的势能，当系统在平衡位置受到扰动而离开平衡点时，由于机械能守恒，它必须消耗动能来获得较高势能，这样当扰动微小时它没有足够的能量远离平衡位置，只能在平衡位置附近运动，所以平衡位置稳定。

与上述判据相应的是，成立这样的一个不稳定性命题：如果系统的势能函数在平衡位置具有严格的局部极大值，则该平衡状态是不稳定的。

在势力场中，质点系平衡的充分必要条件是：

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, k)$$

势力场中系统的平衡位置的稳定性的判断过程是：首先通过势能的驻点(一阶导数为零)求出系统的平衡位置；然后判断势能在该驻点是否取极小值。

点的运动学

点的运动学研究是物体上的某个点（或质点）在空间的位置随时间的变化规律，它既是研究质点动力学的预备知识，又是研究物体一般运动的基础。运动都是相对的，要描述物体的运动就必须选取另一个物体作为参考，这个被选作参考的物体称为参考体，与参考体固连的坐标系称为参考系。点的运动学研究点相对某参考体的运动规律，包括点的运动方程、速度、加速度以及它们之间的关系。研究点的运动，常用的方法有：矢量法、直角坐标法和自然坐标法。

在研究某些问题时，需要在不同的参考系中观察或描述点的运动，这些不同的参考系之间还存在有相对运动；有时可以把一些较复杂的运动分解成在不同参考系中几个简单运动的合成，这时就需要用复合运动的方法去处理这些问题。

一、点的运动学的基本理论

1、 矢量法

矢量法是用矢量描述点的运动规律。

运 动 方 程：

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (5-1)$$

速 度：

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (5-2)$$

加速度：

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (5-3)$$

运动轨迹：矢径端点的曲线。

该方法通常用于理论推导，在研究具体问题时，还应选用合适的坐标系来描述有关的物理量。

2、 直角坐标法

直角坐标法是用点的直角坐标 x, y, z 描述其运动规律。

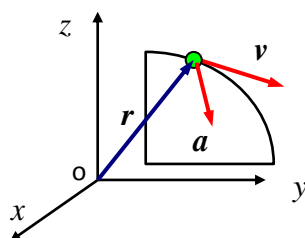


图 1-5

运 动 方 程 : $x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$
(5-4)

速 度 : $\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$
(5-5)

其中: $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 是速度 \mathbf{v} 在三个坐标轴上的投影。

加 速 度 : $\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$
(5-6)

其中: $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ 是加速度 \mathbf{a} 在三个坐标轴上的投影。

3、自然坐标法

点沿曲线运动时,其速度、加速度与曲线的几何形状有关,因此当点的运动轨迹已知时,其运动规律一般用自然坐标 s 描述。

运动方程: $s = f(t)$

速度: $\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{e}_t$

加速度: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_b$

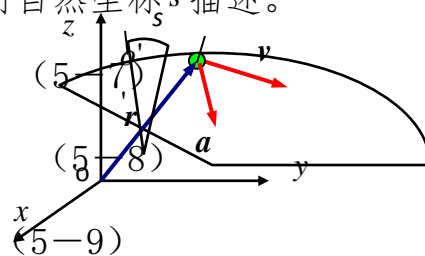


图 5-2

其中: $\mathbf{a}_t = \ddot{s}\mathbf{e}_t$, $\mathbf{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n$, $\mathbf{a}_b = 0\mathbf{e}_b$

上式中 $\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b$ 为单位向量, 分别是切向量 (指向弧坐标 s 的正向)、法向量 (指向曲线的凹向) 和副法线向量 (垂直于密切面并且满足关系式 $\mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_b$), 它们构成一个正交的框架, 称为自然轴系。 \mathbf{a}_t 为切向加速度, 反映了速度大小的变化; \mathbf{a}_n 为法向加速度, 反映了速度方向的变化。

二、点的复合运动的基本理论

1、基本定义

定参考系: 研究运动的基础参考系。在工程中, 一般取与地面或机座固连的参考系作为定参考系。

动参考系：相对基础参考系运动的参考系。

动点：被研究的点。动点要相对定参考系和动参考系均有运动。

绝对运动：动点相对定参考系的运动。

绝对速度：动点相对定参考系的速度，一般用 \mathbf{v}_a 表示。

绝对加速度：动点相对定参考系的加速度，一般用 \mathbf{a}_a 表示。

相对运动：动点相对动参考系的运动。

相对速度：动点相对动参考系的速度，一般用 \mathbf{v}_r 表示。

相对加速度：动点相对动参考系的加速度，一般用 \mathbf{a}_r 表示。

牵连运动：动系相对定系的运动，动系一般固连在某个刚体上。

瞬时重合点：在某瞬时动系上与动点重合的点。瞬时重合点在与动系固连的刚体上或该刚体的延展体上。

牵连速度：瞬时重合点相对定参考系的速度，一般用 \mathbf{v}_e 表示。

牵连加速度：瞬时重合点相对定参考系的加速度，一般用 \mathbf{a}_e 表示。

2、基本定理

速度合成定理：动点在每一瞬时的绝对速度等于该瞬时牵连速度与相对速度的矢量和，即：

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

(5-9)

该定理适用于动系作任何运动的情况，其中， \mathbf{v}_a 是 \mathbf{v}_e 和 \mathbf{v}_r 构成平行四边形的主对角线，这三个矢量必定共面并且可用 6 个标量表示（如各矢量的大小用一个标量表示，其方向用另一个标量表示；或用各矢量在两个正交轴上的投影表示）。式(5-9)是一个平面矢量方程，等价于两个代数方程，只能确定两个未知量与其它四个量的关系。

加速度合成定理：动点在每一瞬时的绝对加速度等于该瞬时的牵

连加速度、相对加速度与科氏加速度的矢量和，即：

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c$$

(5-10)

其中：

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

(5-11)

加速度合成定理 (5-10) 式适用于动系是任意运动的情况，(5-11)

式中的 $\boldsymbol{\omega}$ 为动参考系的角速度。当动系作平移时， $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$ ，此时 $\mathbf{a}_c \equiv 0$ ，

加速度合成定理可表示成：

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r$$

(5-12)

公式 (5-10) 可以写成最一般的形式

$$\mathbf{a}_a^t + \mathbf{a}_a^n = \mathbf{a}_e^t + \mathbf{a}_e^n + \mathbf{a}_r^t + \mathbf{a}_r^n + \mathbf{a}_c$$

(5-13)

如果上式中的 7 个矢量共面，则该矢量方程等价于两个代数方程，可求解两个未知量；若这 7 个矢量不共面，则该矢量方程等价于三个代数量方程，可求解三个未知量。需要注意的是，当复合运动问题中的各种速度(角速度)求解出来后，在轨迹的曲率半径已知的条件下，加速度 $\mathbf{a}_a^n, \mathbf{a}_e^n, \mathbf{a}_r^n, \mathbf{a}_c$ 均为已知量。

3、动点与动系的选择

为了便于求解复合运动问题，应选取合适的动点与动系，如果选取不当，就可能对问题的求解带来困难。动点与动系的选取应遵循以下规则：

(1) 动点与动系不能选在同一个刚体上，应使动点相对动系有运动，否则不能构成点的复合运动。

(2) 应使动点的相对运动轨迹易于确定，最好为一已知的直线

或曲线（轨迹的曲率半径已知），这样便于确定矢量 $\mathbf{v}_r, \mathbf{a}_r^n, \mathbf{a}_r^t$ 的方向。

质点动力学

质点动力学研究的是作用于质点上的力与其运动之间的一般规律。牛顿三定律是质点动力学的基础，也是质点系动力学和刚体动力学的理论基础。

一、质点运动微分方程

牛顿第二定律建立了在惯性参考系中，质点加速度与作用力之间的关系，即：

$$m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}$$

(6-1)

其中： $m, \mathbf{a}, \mathbf{F}$ 分别表示质点的质量、质点在惯性参考系中的加速度和作用在质点上的力。将上式在直角坐标轴上投影可得到直角坐标形式的质点运动微分方程

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_x \\ m\ddot{y} = \sum F_y \\ m\ddot{z} = \sum F_z \end{cases}$$

(6-2)

如果已知质点的运动轨迹，则利用牛顿第二定律可得到自然坐标形式的质点运动微分方程

$$\begin{cases} ma_t = m\ddot{s} = \sum F_t \\ ma_n = m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = \sum F_n \\ ma_b = 0 = \sum F_b \end{cases}$$

(6-3)

对于自由质点，应用质点运动微分方程通常可研究动力学的两类问题。

第一类问题：已知质点的运动规律，求作用在质点上的力；

第二类问题：已知作用在质点上的力，求质点的运动规律。

对于非自由质点，有些问题属于上述两类问题之一。当质点的运动规律未知，作用在质点上的约束力也未知时，这种情况就不属于上述两类问题。在研究这类问题时，首先建立质点运动微分方程；然后消去方程中的未知约束力，得到主动力与质点位置、速度和加速度的关系式，通常这个关系式以常微分方程（组）的形式给出，再通过求

解微分方程（组）得到质点的运动规律；最后在利用质点运动微分方程求出未知的约束力。

二、 质点相对运动微分方程

当研究质点在非惯性参考系下的运动与其受力之间的关系时，可选取一个惯性参考系为定系，非惯性参考系为动系，应用点的复合运动加速度合成定理和牛顿第二定律，就可得到质点在非惯性参考系下的运动微分方程（简称质点相对运动微分方程），即：

$$m\mathbf{a}_r = \sum \mathbf{F} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c$$

(6-4)

其中： $\mathbf{F}_e = -m\mathbf{a}_e$ 称为牵连惯性力、 $\mathbf{F}_c = -m\mathbf{a}_c$ 称为科氏惯性力， m 为质点的质量， \mathbf{a}_r 为质点在非惯性参考系中的加速度、 \mathbf{a}_e 和 \mathbf{a}_c 分别为质点的牵连加速度和科氏加速度。

在某些特殊情况下的质点相对运动微分方程有如下形式

- 1、 当动系作平移时， $\omega = 0, \mathbf{a}_c = 0, \mathbf{F}_c = 0$ ，质点相对运动微分方程为

$$m\mathbf{a}_r = \sum \mathbf{F} + \mathbf{F}_e$$

(6-5)

- 2、 当质点相对动参考系静止时， $\mathbf{a}_r = 0, \mathbf{v}_r = 0, \mathbf{F}_c = 0$ ，质点相对运动微分方程为

$$\sum \mathbf{F} + \mathbf{F}_e = 0$$

(6-6)

- 3、当质点相对动参考系作匀速直线运动时， $\mathbf{a}_r = 0$ ，质点相对运动微分方程为

$$\sum \mathbf{F} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c = 0$$

(6-7)

- 4、 当动参考系相对惯性参考系作匀速直线平移时，牵连惯性力和科氏惯性力均为零，质点相对运动微分方程为

$$m\mathbf{a}_r = \sum \mathbf{F}$$

(6-8)

在研究质点动力学问题时，首先进行受力和运动分析，然后建立矢量形式的质点运动微分方程，然后将矢量形式的运动微分方程在坐标轴上投影，当运动轨迹已知时，选取自然坐标轴。

刚体的平面运动

刚体的平面运动是刚体运动的一种特殊形式，可视为刚体的平移与转动的合成。本章研究的主要内容是如何描述刚体的平面运动，以及如何计算刚体上点的速度和加速度。

一、刚体的平移（平动）

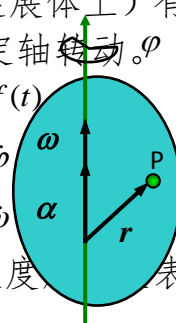
刚体在运动过程中，如果其上任一直线始终保持与初始的方向平行，则称该刚体作**平移或平动**。

平移刚体上各点的速度相同，加速度相同，运动轨迹的形状也相同。因此研究刚体的平移问题可简化成一个质点的运动问题来研究。

二、刚体的定轴转动

刚体在运动过程中，若其上（或刚体的延展体上）有一直线保持不动，且刚体绕此直线转动，则称该刚体作**定轴转动**。

- (1) 定轴转动刚体的运动方程： $\varphi = f(t)$
- (2) 定轴转动刚体的角速度： $\omega = \dot{\varphi}$
- (3) 定轴转动刚体的角加速度： $\alpha = \dot{\omega}$
- (4) 定轴转动刚体上一点 P 的速度和加速度表示



速度： $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (7-1)

加速度： $\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ (7-2)

其中： $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega}$ 为定轴转动刚体的角速度和角加速度矢量， \mathbf{r} 是由转轴上任一点引向 P 点的矢径。

三、刚体的平面运动

刚体在运动过程中，若其上任一点到某一固定平面的距离保持不变，则称该刚体作**平面运动**。研究刚体的平面运动可简化为研究一个平面图形在其所在平面内的运动。

1、刚体平面运动的角速度和角加速度

在平面图形上任取两点 A、B，过这两点的连线某一基准线的夹角为 θ （如图 7-2）。当刚体运动时这个夹角将随时间变化 $\theta(t)$ ，刚体平面运动的角速度和角加速度分别定义为：

$$\omega = \dot{\theta} \quad (7-3)$$

$$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \quad (7-4)$$

2、刚体平面运动的运动方程

平面运动刚体有三个自由度，其运动方程为：

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t) \quad (7-5)$$

其中：A 点称为基点（如图 7-3 所示）。因此刚体的平面运动可视为刚体随基点的平移和绕基点转动的合成，而刚体的平面平移（ $\varphi \equiv c$ ，其中 c 为常量）和定轴转动（ $x_A = c_1, y_A = c_2$ ，其中 c_1, c_2 为常量）又是刚体平面运动的特殊情况。

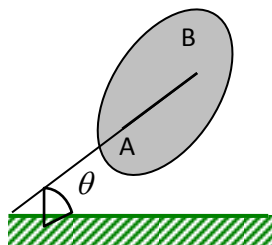


图 7-2

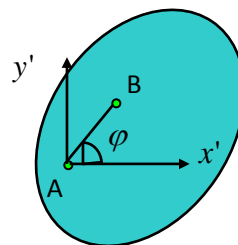


图 7-3

同一平面运动刚体，若选取得不同的基点，则基点的运动方程会有所不同，刚体绕不同基点转过的角度只相差一个常量，因此刚体的角速度和角加速度与基点的选取无关，根据平面运动刚体角速度、角加速度的定义（7-3）式和（7-4）式也可得到这一结论。

3、平面图形上各点的速度

基点法公式：

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$

（7-6）

基点法公式建立了平面图形上任意两点的速度与平面图形角速度的关系。

速度投影定理：平面图形上任意两点的速度在这两点连线上的投影相等，即：

$$[\mathbf{v}_A]_{AB} = [\mathbf{v}_B]_{AB}$$

（7-7）

该定理反映了刚体上任意两点间距离保持不变的性质。

速度瞬心法：只要平面图形的角速度不为零，就必定存在唯一的一点，其速度在该瞬时为零，该点称为平面图形的速度瞬心，用 c_v 表示。平面图形上任一点 M 的速度可表示成

$$\mathbf{v}_M = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{c_v M}$$

（7-8）

其中： $\mathbf{r}_{c_v M}$ 是从速度瞬心 c_v 引向 M 点的矢径， $\boldsymbol{\omega}$ 为平面图形的角速度矢量。

4、平面图形上各点的加速度

基点法公式：

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^t + \mathbf{a}_{BA}^n$$

(7-9)

其中： $\mathbf{a}_{BA}^t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{AB}$ ， $\mathbf{a}_{BA}^n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB})$ 。基点法公式建立了平面图形上任意两点的加速度与平面图形的角速度和角加速度间的关系。只要平面图形的角速度和角加速度不同时为零，则其上必存在唯一的一点，其加速度在该瞬时为零，该点称为平面图形的**加速度瞬心**，用 C_a 表示。

动力学普遍定理

动力学普遍定理包括动量定理、动量矩定理和动能定理。这三个定理从不同侧面揭示了质点系整体运动特征与其受力之间的一般规律。

基本理论

一、动量定理

1、质点系的动量

质点系的动量定义为：

$$\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_C \quad (8-1)$$

其中： m_i, \mathbf{v}_i 分别为质点系中第*i*个质点的质量及其速度， m, \mathbf{v}_C 分别为质点系的总质量和质心速度。根据质点系的动量定义可以推出刚体系的动量：

$$\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_{Ci} = m \mathbf{v}_C \quad (8-2)$$

其中 m_i, \mathbf{v}_{Ci} 分别为刚体系中第*i*个刚体的质量及其质心速度， m, \mathbf{v}_C 分别为刚体系的总质量及其质心速度。

2、质点系的动量定理

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum \mathbf{F}_i^{(e)} = \mathbf{F}_R^{(e)} \quad (8-3)$$

质点系动量随时间的变化率等于作用在质点系上外力的矢量和（外力系的主矢）。该定理的积分形式称为冲量定理，可表示成下列形式

$$\mathbf{p}_{t_2} - \mathbf{p}_{t_1} = \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i^{(e)} dt = \sum \mathbf{I}_i^{(e)} \quad (8-4)$$

3、质心运动定理

$$m \mathbf{a}_C = \sum \mathbf{F}_i^{(e)} = \mathbf{F}_R^{(e)} \quad (8-5)$$

其中： m, \mathbf{a}_C 分别为质点系的总质量及其质心加速度。

如果质点系是由若干个刚体构成的系统，则其质心运动定理可以

表示成

$$\sum m_i \mathbf{a}_{Ci} = \sum \mathbf{F}_i^{(e)} = \mathbf{F}_R^{(e)} \quad (8-6)$$

其中： m_i, \mathbf{a}_{Ci} 分别为刚体系中第 i 个刚体的质量及其质心加速度。

4、守恒情况

若 $\sum \mathbf{F}_i^{(e)} = 0$ ，则 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C = \text{常矢量}$ ；

若 $\sum F_x = 0$ ，则 $p_x = mv_{Cx} = \text{常量}$ 。

二、动量矩定理

1、动量矩

质点系对任意固定点 O 的动量矩定义为

$$\mathbf{L}_O = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (8-7)$$

质点系相对动点 A 的动量矩定义为

$$\mathbf{L}_A^r = \sum \tilde{\mathbf{r}}_i \times m_i \mathbf{v}_{ri} \quad (8-8)$$

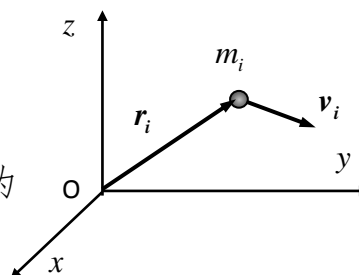


图 8-1

所谓质点系相对动点 A 的动量矩是指：在随动点 A 平移的动参考系中，若质量为 m_i 的质点相对这一动参考系的相对速度为 \mathbf{v}_{ri} ，则质点系相对动点 A 的动量矩为各个质点的相对动量 $m_i \mathbf{v}_{ri}$ 对 A 点之矩 $\tilde{\mathbf{r}}_i \times m_i \mathbf{v}_{ri}$ ($\tilde{\mathbf{r}}_i$ 为动点 A 到该质点的矢径) 的矢量和。如果将动点 A 取在质点系的质心，则可得到质点系相对质心 C 的动量矩

$$\mathbf{L}_C^r = \sum \tilde{\mathbf{r}}_i \times m_i \mathbf{v}_{ri}$$

(8-9)

质点系对固定点 O 的动量矩与相对质心的动量矩的关系如下

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r}_C \times m\mathbf{v}_C + \mathbf{L}_C^r$$

(8-10)

其中： m, \mathbf{v}_C 分别为质点系的总质量及其质心速度（相对定系的）， \mathbf{r}_C 为质点系的质心 C 在定系中的矢径。

定理：质点系对某一点 O 点的动量矩在通过该点的某一轴（如 x 轴）上的投影等于质点系对该轴（ x 轴）的动量矩。

2、动量矩定理

质点系对惯性参考系中固定点 O 的动量矩定理

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}^{(e)}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_R^{(e)})$$

(8-11)

质点系相对动点 A 的动量矩定理

$$\frac{d\mathbf{L}_A^r}{dt} = \sum \mathbf{M}_A(\mathbf{F}^{(e)}) + \mathbf{r}_{AC} \times (-m\mathbf{a}_A)$$

(8-12)

其中： \mathbf{r}_{AC} 为动点 A 到质心 C 的矢径， m 为质点系的总质量， \mathbf{a}_A 为动点 A 相对于惯性参考系的加速度。上式中等号右端的最后一项 $\mathbf{r}_{AC} \times (-m\mathbf{a}_A)$ 可以理解为质点系的牵连惯性力 $-m\mathbf{a}_A$ 对动点 A 之矩。

该定理的几种特殊情况：

情况 1：若动点 A 是质点系的质心 C， $\mathbf{r}_{AC} = 0$ ，则 (8-12) 式可表示成

$$\frac{d\mathbf{L}_C^r}{dt} = \sum \mathbf{M}_C(\mathbf{F}^{(e)}) \quad (8-13)$$

该公式称为相对质心的动量矩定理。

情况 2：若质点系在运动的过程中，始终有关系式 $\mathbf{r}_{AC} \parallel \mathbf{a}_A$ 成立，则 (8-12) 式可表示成

$$\frac{d\mathbf{L}_A^r}{dt} = \sum \mathbf{M}_A(\mathbf{F}^{(e)}) \quad (8-14)$$

情况 3：若质点系在运动的过程中，始终有关系式 $\mathbf{a}_A = 0$ 成立，则 (8-12) 式可表示成

$$\frac{d\mathbf{L}_A^r}{dt} = \sum \mathbf{M}_A(\mathbf{F}^{(e)}) \quad (8-15)$$

在这种情况下，随 A 点平移的动参考系也是惯性参考系，因此 (8-15) 式表示就是 (8-11) 式的另一种表达形式。

3、守恒情况

若 $\sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i^{(e)}) \equiv 0$ ，则 $\mathbf{L}_O = \text{常矢量}$ ； 若 $\sum M_x(\mathbf{F}_i^{(e)}) \equiv 0$ ，则 $L_x = \text{常量}$ 。

若 $\sum \mathbf{M}_C(\mathbf{F}_i^{(e)}) \equiv 0$ ，则 $\mathbf{L}_C^r = \text{常矢量}$ ； 若 $\sum M_{Cx}(\mathbf{F}_i^{(e)}) \equiv 0$ ，则 $L_{Cx}^r = \text{常量}$ 。

三、动能定理

1、动能

质点系的动能定义为

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (8-16)$$

绕 O 轴作定轴转动刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2} J_O \omega^2 \quad (8-17)$$

其中： J_O, ω 分别为刚体对 O 轴的转动惯量和刚体的角速度。

平面运动刚体的动能

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2$$

(8-18)

其中： v_C, J_C, ω 分别为刚体质心的速度，刚体对过质心 C 且垂直于运动平面的轴的转动惯量和刚体的角速度。

2、 力的功

物体上的 A 点作用有变力 F ，该瞬时 A 点的速度为 v ，则力 F 在该瞬时作的元功定义为

$$\delta W = F \cdot v dt$$

(8-19)

如果力 F 始终作用在物体上的 A 点，A 点在 dt 时间内的微小位移为 $dr = v dt$ ，则力的元功可表示成

$$\delta W = F \cdot dr$$

(8-20)

如果一个力系 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ 作用在质点系上，各力作用点的矢径为 $r_i (i=1, 2, \dots, n)$ ，则该力系对质点系所作的总元功定义为

$$\delta W = \sum_{i=1}^n F_i \cdot dr_i$$

(8-21)

如果一质点在力 F 的作用沿某一曲线从 A 点移动到 B 点，则力所作的总功定义为

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{AB} F \cdot dr$$

(8-22)

在势力场中，质点（或质点系）由任意位置 M 到某一选定的零势位 M_0 （基准位置）的过程中，有势力所作的功称为质点（或质点系）在位置 M 的势能，用符号 V 表示

$$V = W_{M \rightarrow M_0}$$

(8-23)

定理（简化力系做功定理）：作用在刚体上力系 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ 向刚体上的 A 点简化，得到一简化力系 $\{F_R, M_A\}$ ，若刚体上 A 点的速度为 v_A ，刚体的角速度为 ω ，则力系对刚体作的总元功为

$$\delta W = F_R \cdot v_A dt + M_A \cdot \omega dt$$

(8-24)

推论（等效力系做功定理）：如果作用于刚体上的力系 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ 与力系 $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ 等效，则这两个力系对该刚体所作的元功相等，即：

$$\delta W(F_1, F_2, \dots, F_n) = \delta W(P_1, P_2, \dots, P_m)$$

(8-25)

3、 动能定理

动能定理 (微分形式): 质点系动能的微分等于作用于质点系上所有力的元功之和, 即

$$dT = \sum \delta W_i$$

(8-26)

动能定理 (积分形式): 质点系由状态 1 运动到状态 2, 其动能的改变量等于作用于质点系上所有的力在这一运动过程中做功之和, 即

$$T_2 - T_1 = \sum W_{1 \rightarrow 2}$$

(8-27)

在应用动能定理时, 可以不考虑理想约束力, 因为其做功之和为零。但必须考虑非理想约束力和主动力所作的功。

四、动力学普遍定理的应用

1、变质量质点的动力学方程

应用质点系的动量定理可得变质量质点的动力学方程

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F^{(e)} + \frac{dm}{dt} v_r$$

(8-28)

2、刚体定轴转动动力学方程

应用动量矩定理可得刚体定轴转动动力学方程, 设刚体对转轴 z 的转动惯量为 J_z , 绕该轴的转角为 φ , 则动力学方程为

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum M_z$$

(8-29)

3、刚体平面运动动力学方程

具有质量对称面的刚体, 如果作用在其上的力向质量对称面内的一点简化得到一个在该平面的平面力系, 且刚体的运动平面也在质量对称面内, 则应用质心运动定理和相对质心的动量矩定理可得到刚体平面运动动力学方程

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c = \sum F_x \\ m\ddot{y}_c = \sum F_y \\ J_c \ddot{\varphi} = \sum M_{cz} \end{cases}$$

(8-30)

质点系的动量定理、动量矩定理和动能定理, 称为动力学普遍定理, 它们都是从牛顿第二定律推导出来的, 因此这三个定理仅适用于

惯性参考系；而质心运动定理、冲量定理、相对质心的动量矩定理、变质量质点动力学方程、刚体定轴转动动力学方程和刚体平面运动动力学方程都是由前面三个定理推导出的，因此也只适用于惯性参考系。这些定理或方程中涉及到的绝对速度（或角速度）和绝对加速度（或角加速度）都应在惯性参考系中描述。

碰 撞

物体在运动过程中受到冲击作用，在极短的时间内，运动状态发生突变，这种现象称为碰撞。由于碰撞过程比较复杂，因此我们只研究碰撞前后运动状态的变化规律。

一、碰撞的基本概念

1、碰撞的特点与基本假设

特点：

- (1) 碰撞过程持续的时间 τ 极短，碰撞前后物体的速度发生了突变。
- (2) 碰撞时物体间产生极大的作用力，称为碰撞力。碰撞力的作用以冲量的形式来度量

$$I^* = \int_0^{\tau} F dt$$

- (3) 碰撞过程常伴随有机械能的损失。

基本假设

- (1) 由于碰撞力很大，因此忽略非碰撞力（常规力）的影响。
- (2) 由于碰撞过程时间很短，因此忽略碰撞过程中物体的位移，也就是假设在碰撞过程中，物体或质点系在空间的位置保持不变。
- (3) 当物体碰撞时，物体的变形局限在接触点附近的很小区域内。

2、碰撞过程的两个阶段与恢复系数

压缩阶段：从两物体开始接触直至碰撞点处的压缩变形达到最大值。在这一阶段碰撞力的冲量称为压缩冲量，其大小用 I_1 表示。

恢复阶段：从两个物体在碰撞点处的变形开始恢复，直至两个物体脱离。在这一阶段碰撞力的冲量称为恢复冲量，其大小用 I_2 表示。

恢复系数：两个物体碰撞的恢复系数 e 定义为

$$e = \frac{I_2}{I_1}$$

(9-1)

恢复系数的取值范围为 $0 \leq e \leq 1$ ，可以证明上式等价于

$$e = -\frac{u_{1n} - u_{2n}}{v_{1n} - v_{2n}}$$

(9-2)

其中： $v_{1n}, v_{2n}, u_{1n}, u_{2n}$ 为物体 1 和物体 2 的碰撞点，在碰撞前后的速度在碰撞法线上的投影。

3、碰撞的分类

按恢复系数 e 的大小，碰撞可分为

(1) 弹性碰撞： $0 < e < 1$

(2) 完全弹性碰撞： $e = 1$

(3) 完全塑性碰撞： $e = 0$

按几何或运动条件，碰撞可分为

(1) 对心碰撞：两个物体的质心都在碰撞法线上，这样的碰撞称为对心碰撞。

(2) 偏心碰撞：两个物体的质心不都在碰撞法线上。

(3) 正碰撞：两个物体碰撞点的速度都平行于碰撞法线。

(4) 斜碰撞：两个物体碰撞点的速度不都平行于碰撞法线。

二、碰撞的基本定理

1、碰撞过程的冲量定理

定理：碰撞前后质点系动量的改变量等于作用于质点系上外碰撞力冲量的矢量和，即

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \sum \mathbf{I}^*$$

(9-3)

或表示成

$$m\mathbf{v}_{C2} - m\mathbf{v}_{C1} = \sum \mathbf{I}^*$$

(9-4)

对于平面问题，上述两个矢量微分方程，各等价于两个常微分方程。

2、碰撞过程的冲量矩定理

定理：碰撞前后质点系对惯性参考系中固定点 O 的动量矩的改变量等于作用于质点系上外碰撞力冲量对 O 点之矩的矢量和，即

$$\mathbf{L}_{O2} - \mathbf{L}_{O1} = \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{I}^*)$$

(9-5)

定理：碰撞前后质点系相对质心 C 的动量矩的改变量等于作用于质点系上外碰撞力冲量对质心 C 之矩的矢量和，即：

$$\mathbf{L}_{C2} - \mathbf{L}_{C1} = \sum \mathbf{M}_C(\mathbf{I}^*)$$

(9-6)

对于平面问题，上述两个矢量微分方程，各等价于一个常微分方程。对于作平面运动的质点系，其动量定理和动量矩定理等价于三个常微分方程。

动静法

动静法是用静力学建立平衡方程的方法研究质点或质点系的动力学问题（非平衡问题），它是将达朗贝尔原理为基础，研究动力学问题的普遍方法。

一、动静法的基本概念与理论

- 1、**惯性力**：质点的惯性力的大小等于质点的质量与其加速度的乘积，方向与质点加速度的方向相反。即

$$\mathbf{F}_I = -m\mathbf{a}$$

(10-1)

- 2、**质点的达朗贝尔原理**：在质点运动的每一瞬时，质点的惯性力 \mathbf{F}_I 与作用于质点上的主动力 \mathbf{F} 、约束力 \mathbf{F}_N 组成一个平衡力系，即

$$\mathbf{F}_I + \mathbf{F} + \mathbf{F}_N = 0$$

(10-2)

- 3、**质点系的达朗贝尔原理**：在质点系运动的每一瞬时，每个质点的惯性力 \mathbf{F}_{Ii} 与作用于该质点上的主动力 \mathbf{F}_i 、约束力 \mathbf{F}_{Ni} 组成一个平衡力系。

由质点系的达朗贝尔原理可知，在质点系运动的每一瞬时，质点系中所有质点的惯性力、与作用在质点系上所有的主动力和约束力构成一个平衡力系。

- 4、**动静法**：根据达朗贝尔原理，在质点或质点系运动的每一瞬时，质点或质点系中所有质点的惯性力、与作用在质点系上所有的主动力和约束力构成一个平衡力系，因此可以用建立平衡方程的方法研究质点或质点系动力学问题。这种方法称为动静法。

- 5、**刚体惯性力系的简化**：

(1) 平移刚体惯性力系的简化：在任意瞬时，平移刚体惯性力系向其质心简化为一合力，方向与质心加速度（也就是刚体的加速度）的方向相反，大小等于刚体的质量与加速度的乘积，即 $\mathbf{F}_I = -m\mathbf{a}_C$ 。

(2) 平面运动刚体惯性力系的简化：如果刚体具有质量对称面，并且刚体在质量对称面所在的平面内运动，则刚体惯性力系向质心简化为一个力和一个力偶，这个力的作用线通过该刚体质心，大小等于刚体的质量与质心加速度的乘积，方向与质心加速度相反；这个力偶的力偶矩等于刚体对通过质心且垂直于质量对称面的轴的转动惯量与刚体角加速度的乘积，

其转向与角加速度的转向相反。即

$$F_I = -ma_c, M_{IC} = -J_c \alpha \quad (10)$$

—3)

(3) 定轴转动刚体惯性力系的简化：如果刚体具有质量对称面，并且转轴垂直于质量对称面，则刚体惯性力系向转轴与质量对称面的交点 O 简化为一个力和一个力偶，这个力通过 O 点，大小等于刚体的质量与质心加速度的乘积，方向与质心加速度的方向相反；这个力偶的力偶矩等于刚体对转轴的转动惯量与角加速度的乘积，其转向与角加速度的转向相反。即

$$F_I = -ma_c, M_{IO} = -J_o \alpha \quad (10)$$

—4)

二、动平衡与平衡的基本概念

1、惯性积与惯量主轴

惯性积：设坐标系 $Oxyz$ 固连在刚体上，刚体对轴 x, y 、轴 y, z 、和轴 z, x 的惯性积分别定义为

$$J_{xy} = \sum m_i x_i y_i, \quad J_{yz} = \sum m_i y_i z_i, \quad J_{zx} = \sum m_i z_i x_i$$

惯性积这个物理量反映了刚体的质量相对坐标系分布的情况，它是一个代数量。

惯量主轴：如果与某轴（如 z 轴）有关的两个惯性积 $J_{yz} = J_{zx} = 0$ ，则称轴 z 为 O 点的惯量主轴。对于刚体上的任一点至少存在三根互相垂直的惯量主轴。过质心 C 的惯量主轴称为**中心惯量主轴**。

2、惯量主轴的判据

(1) 如果刚体有质量对称面，则垂直于该对称面的任一轴必是该轴与对称面交点的惯量主轴之一。

(2) 如果刚体有质量对称轴，则对称轴是该轴上任一点的惯量主轴之一，由于质心在对称轴上，所以该轴也是中心惯量主轴。

3、静平衡与动平衡

静平衡：当定轴转动刚体仅在重力作用下，可以在任意位置平衡，则称刚体为静平衡。定轴转动刚体为静平衡的充分必要条件是刚体的质心在转轴上。

动平衡：如果刚体在转动过程中不会引起轴承的附加动反力，则称刚体为动平衡。定轴转动刚体为动平衡的充分必要条件是刚体的转轴为中心惯量主轴。动平衡是静平衡的充分条件；静平衡是动平衡的必要条件。