# 同济大学课程考核试卷（重修卷）

# 2007—2008 学年第一学期

命题教师签名：　　　　　　　　　　审核教师签名：

课号：122010　　课名：线性代数 B　　考试考查：考查

此卷选为：期中考试(　)、期终考试(　)、重修( √ )试卷

年级_____专业__________________学号_________姓名____________任课教师__________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |

（注意：本试卷共六大题，三大张，满分 100 分．考试时间为 120 分钟．要求写出解题过程，否则不予计分）

一、填空（共 30 分，每空 3 分）：

1、 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为三阶矩阵，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 $A$ 的列向量．设 $B=(\alpha_2,2\alpha_1,3\alpha_3+4\alpha_2)$，并且 $|A|=2$，则 $|B|=$ ______________.

2、 设非齐次线性方程组 $A_{m\times n}X=\beta$ 有解，并且其系数矩阵的秩为 $r$．则其解向量组的秩为：______________.

3、 矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是：______________________.

4、 如果三阶矩阵 $A$ 的特征值为 $1,-1,2$，则行列式 $|A^*+3A-2E|$ 的值为：__________.

5、 矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&3\\a&b&c\\x&y&z\end{pmatrix}$ 中元素 $c$ 的代数余子式的值为：______________.

6、 矩阵 $A_{m\times n}$ 可对角化的充分必要条件为：____________________.

7、如果二次型 $f(x,y,z)=-5x^2-6y^2-pz^2+4xy+4xz$ 负定，则 $p$ 的取值范围是：__________.

8、 设矩阵 $A$ 的秩为 $r$．下面说法正确的是：__________.

A：$A$ 的每一个 $r$ 阶子式都不为零；　　B：$A$ 的每一个阶数小于 $r$ 的子式都不为零；

C：$A$ 的每一个阶数大于 $r$ 的子式都是零；　　D：$A$ 的每一个 $r$ 阶的子式都是零．

9、 设 $A$ 为 $n(n\geq 2)$ 阶可逆矩阵，$A^*$ 为其伴随矩阵．如果矩阵 $B$ 由交换矩阵 $A$ 的第一、二行得到，即 $A\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}B$，则下面说法正确的是：__________.

A：$A^*\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}B^*$；　　B：$A^*\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}-B^*$；

C：$A^*\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}B^*$；　　D：$A^*\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}-B^*$．

10、设 $A_{m\times n}X=\beta$ 为非齐次线性方程组. 下面说法正确的是：____________.

A：如果 $A_{m\times n}X=\beta$ 无解，则 $A_{m\times n}X=0$ 也无解；

B：如果 $A_{m\times n}X=0$ 有无穷多解，则 $A_{m\times n}X=\beta$ 也有无穷多解；

C：如果 $A_{m\times n}X=0$ 有唯一解，则 $A_{m\times n}X=\beta$ 也有唯一解；

D：如果 $A_{m\times n}X=\beta$ 有唯一解，则 $A_{m\times n}X=0$ 也有唯一解.

二、（15 分）设 $\alpha_1=(1\ \ -2\ \ 2\ \ 3)$，$\alpha_2=(-2\ \ 4\ \ -1\ \ 3)$, $\alpha_3=(-1,\ 2\ \ 0\ \ 3)$,

$\alpha_4=(0\ \ 6\ \ 2\ \ 3)$, $\alpha_5=(2\ \ -6\ \ 3\ \ 4)$. 求该向量组的秩及一个最大线性无关组，并用该最大线性无关组表示其余向量.

三、（10 分）解线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1, \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4, \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0. \end{cases}$

四、（10 分）设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$. 试对向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$正交化，并由此求出一个规范正交向量组.

五、（20 分）设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}$，定义映射 $T$： $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 如下：对任意 $\alpha\in\mathbb{R}^3$， $T(\alpha)=A\alpha$ .

（1）证明：$T$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换；

（2）求线性变换 $T$ 的核 $T^{-1}(0)$；

（3）求线性变换 $T$ 的像空间 $T(\mathbb{R}^3)$ 的维数及一组基；

（4）求线性变换 $T$ 在基 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 下的矩阵.

六、（15 分）设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ $(n\ge 2)$ 为非零向量， $A=\alpha\alpha^T$.

（1）证明： $A=\alpha\alpha^T$ 为对称矩阵；

（2）证明：矩阵 $A$ 的秩为 1；

（3）求矩阵 $A$ 的所有特征值；

（4）求可逆矩阵 $P$，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵.