高等数学上册知识点

一、 函数与极限

（一）函数

1、 函数定义及性质（有界性、单调性、奇偶性、周期性）；

2、 反函数、复合函数、函数的运算；

3、 初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数、双曲函数、反双曲函数；

4、 函数的连续性与间断点；（重点）

函数 $f(x)$ 在 x_0 连续 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

间断点：

- 第一类：左右极限均存在.
  可去间断点、跳跃间断点
- 第二类：左右极限、至少有一个不存在.
  无穷间断点、振荡间断点

5、 闭区间上连续函数的性质：有界性与最大值最小值定理、零点定理（重点）、介值定理及其推论.

（二）极限

1、 定义

1） 数列极限

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathrm{N},\ \forall n>N,\ |x_n-a|<\varepsilon$$

2） 函数极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x,\ \text{当} 0<|x-x_0|<\delta \text{时，} |f(x)-A|<\varepsilon$$

左极限：$f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$　　右极限：$f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在 $\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)$

2、 极限存在准则

1） 夹逼准则：

$$\left.\begin{aligned}&1)\ y_n\le x_n\le z_n\quad (n\ge n_0)\\&2)\ \lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}z_n=a\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}x_n=a$$

2） 单调有界准则：单调有界数列必有极限.

3、 无穷小（大）量

1） 定义：若 $\lim\alpha=0$ 则称为无穷小量；若 $\lim\alpha=\infty$ 则称为无穷大量.

2） 无穷小的阶：高阶无穷小、同阶无穷小、等价无穷小、k 阶无穷小

Th1　$\alpha\sim\beta\Leftrightarrow\beta=\alpha+o(\alpha)$；

Th2　$\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta',\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$（无穷小代换）

4、 求极限的方法

1） 单调有界准则；

2） 夹逼准则；

3） 极限运算准则及函数连续性；

4） 两个重要极限：（重点）

a） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　b） $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

5） 无穷小代换：（$x\to0$）（重点）

a） $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x$

b) $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

c) $e^x-1 \sim x$　　（$a^x-1 \sim x\ln a$）

d) $\ln(1+x) \sim x$　　（$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$）

e) $(1+x)^\alpha-1 \sim \alpha x$

二、 导数与微分

（一）导数

1、 定义：$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

2、 几何意义：$f'(x_0)$ 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率.

3、 可导与连续的关系：

4、 求导的方法

1） 导数定义；（重点）

2） 基本公式；

3） 四则运算；

4） 复合函数求导（链式法则）；（重点）

5） 隐函数求导数；（重点）

6） 参数方程求导；（重点）

7） 对数求导法. （重点）

5、 高阶导数

1） 定义：$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$

2） Leibniz 公式：$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$

（二）微分

1） 定义：$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 A 与 Δx 无关.

2） 可微与可导的关系：可微 $\Leftrightarrow$ 可导，且 $dy=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)dx$

三、 微分中值定理与导数的应用

（一）中值定理

1、 Rolle 定理：（重点）若函数 $f(x)$ 满足：

1） $f(x)\in C[a,b]$； 2） $f(x)\in D(a,b)$； 3） $f(a)=f(b)$；

则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$.

2、 Lagrange 中值定理：若函数 $f(x)$ 满足：

1） $f(x)\in C[a,b]$； 2） $f(x)\in D(a,b)$；

则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

3、 Cauchy 中值定理：若函数 $f(x),F(x)$ 满足：

1）$f(x),F(x)\in C[a,b]$；2）$f(x),F(x)\in D(a,b)$；3）$F'(x)\neq 0, x\in(a,b)$

则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

（二）洛必达法则（重点）

（三）Taylor 公式（不考）

（四）单调性及极值

1、 单调性判别法:（重点）$f(x)\in C[a,b]$，$f(x)\in D(a,b)$，则若 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调增加；则若 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调减少.

2、 极值及其判定定理：

a) 必要条件：$f(x)$ 在 x_0 可导，若 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0)=0$.

b) 第一充分条件：（重点）$f(x)$ 在 x_0 的邻域内可导，且 $f'(x_0)=0$，

c) 则①若当 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0$，则 x_0 为极大值点；②若当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，则 x_0 为极小值点；③若在 x_0 的两侧 $f'(x)$ 不变号，则 x_0 不是极值点.

d) 第二充分条件：（重点）$f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，

e) 则①若 $f''(x_0)<0$，则 x_0 为极大值点；②若 $f''(x_0)>0$，则 x_0 为极小值点.

3、 凹凸性及其判断，拐点

1）$f(x)$ 在区间 I 上连续，若 $\forall x_1,x_2\in I$，$f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上的图形是凹的；若 $\forall x_1,x_2\in I$，$f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上的图形是凸的.

2）判定定理（重点）：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上有一阶、二阶导数，则

a) 若 $\forall x\in(a,b), f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的；

b）若 $\forall x\in(a,b), f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的.

3）拐点：设 $y=f(x)$ 在区间 *I* 上连续，x_0 是 $f(x)$ 的内点，如果曲线 $y=f(x)$ 经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时，曲线的凹凸性改变了，则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点.

（五）不等式证明

1、 利用微分中值定理；

2、 利用函数单调性；（重点）

3、 利用极值（最值）.

（六）方程根的讨论

1、 连续函数的介值定理；

2、 Rolle 定理；

3、 函数的单调性；

4、 极值、最值；

5、 凹凸性.

（七）渐近线

1、 铅直渐近线：$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，则 $x=a$ 为一条铅直渐近线；

2、 水平渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$，则 $y=b$ 为一条水平渐近线；

3、 斜渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k \quad \lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$ 存在，则 $y=kx+b$ 为一条斜渐近线.

（八）图形描绘

四、 不定积分

（一）概念和性质

1、 原函数：在区间 I 上，若函数 $F(x)$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$，则 $F(x)$ 称为 $f(x)$ 的一个原函数.（重点）

2、 不定积分：在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数的原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分.

3、 基本积分表（P188，13 个公式）；（重点）

4、 性质（线性性）.

（二）换元积分法（重点）

1、 第一类换元法（凑微分）：$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}$

2、 第二类换元法（变量代换）：$\int f(x)dx=\left[\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$

（三）分部积分法：$\int udv=uv-\int vdu$ （重点）

（四）有理函数积分

1、“拆”；

2、变量代换（三角代换、倒代换、根式代换等）.

五、 定积分

（一）概念与性质：

1、 定义：$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

2、 性质：（7 条）

性质 7 （积分中值定理） 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad \text{（平均值：} f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\text{）}$$

（二）微积分基本公式（N—L 公式）（重点）

1、 变上限积分：设 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$，则 $\Phi'(x)=f(x)$

推广：$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt = f[\beta(x)]\beta'(x) - f[\alpha(x)]\alpha'(x)$

2、 N—L 公式：若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

（三）换元法和分部积分（重点）

1、 换元法：$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$

2、 分部积分法：$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$

（四）反常积分

1、 无穷积分：

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

2、 瑕积分：

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx \quad \text{（}a\text{ 为瑕点）}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx \quad \text{（}b\text{ 为瑕点）}$$

两个重要的反常积分：

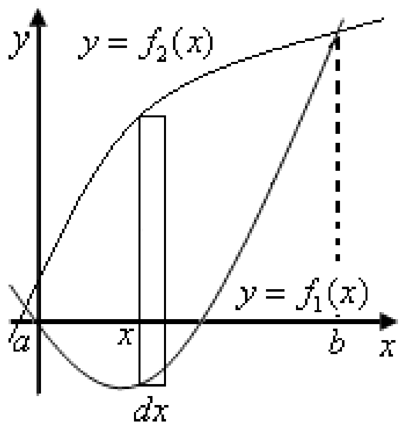
1）$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}+\infty, & p\le 1\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1\end{cases}$$

2）$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}=\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^q}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1\\ +\infty, & q\ge 1\end{cases}$$

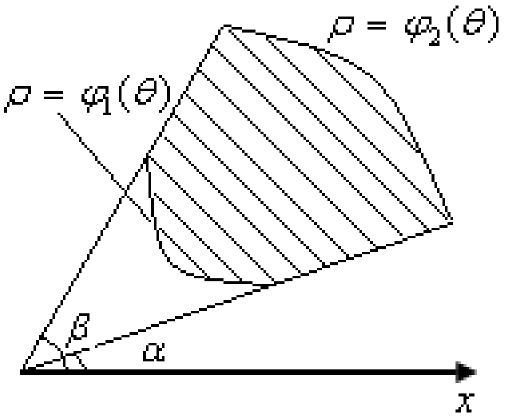
六、 定积分的应用

（一）平面图形的面积

1、 **直角坐标：** $A=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx$ **（重点）**



2、 **极坐标：** $A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[\varphi_2^2(\theta)-\varphi_1^2(\theta)]d\theta$



（二）体积

1、 旋转体体积：（重点）

a) 曲边梯形 $y=f(x),x=a,x=b,x$ 轴，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积：

$$V_x=\int_a^b \pi f^2(x)dx$$

b) 曲边梯形 $y=f(x),x=a,x=b,x$ 轴，绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积：

$$V_y=\int_a^b 2\pi x f(x)dx \qquad \text{（柱壳法）}$$

2、 平行截面面积已知的立体：$V=\int_a^b A(x)dx$

（三）弧长

1、 直角坐标：$s=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$

2、 参数方程：$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\phi'(t)]^2}dt$

3、 极坐标：$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{[\rho(\theta)]^2+[\rho'(\theta)]^2}d\theta$

七、 微分方程

（一）概念

1、 微分方程：表示未知函数、未知函数的导数及自变量之间关系的方程.

阶：微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数.

2、 解：使微分方程成为恒等式的函数.

通解：方程的解中含有任意的常数，且常数的个数与微分方程的阶数相同.

特解：确定了通解中的任意常数后得到的解.

（二）变量可分离的方程（重点）

$g(y)dy = f(x)dx$，两边积分 $\int g(y)dy = \int f(x)dx$

（三）齐次型方程

$\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$，设 $u = \frac{y}{x}$，则 $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$；

或 $\frac{dx}{dy} = \phi(\frac{x}{y})$，设 $v = \frac{x}{y}$，则 $\frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$

（四）一阶线性微分方程（重点）

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

用常数变易法或用公式：$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$

（五）可降阶的高阶微分方程

1、 $y^{(n)} = f(x)$，两边积分 n 次；

2、 $y'' = f(x, y')$（不显含有 y），令 $y' = p$，则 $y'' = p'$；

3、 $y'' = f(y, y')$（不显含有 x），令 $y' = p$，则 $y'' = p\frac{dp}{dy}$

（六）线性微分方程解的结构

1、y_1, y_2 是齐次线性方程的解，则 $C_1y_1+C_2y_2$ 也是；

2、y_1, y_2 是齐次线性方程的线性无关的特解，则 $C_1y_1+C_2y_2$ 是方程的通解；

3、$y=C_1y_1+C_2y_2+y^*$ 为非齐次方程的通解，其中 y_1, y_2 为对应齐次方程的线性无关的解，y^* 非齐次方程的特解.

（七）常系数齐次线性微分方程（重点）

二阶常系数齐次线性方程：$y''+py'+qy=0$

特征方程：$r^2+pr+q=0$，特征根：r_1, r_2

特征根	通　　解
实根 $r_1 \neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
$r_1=r_2=-\frac{p}{2}$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
$r_{1,2}=\alpha \pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

（八）常系数非齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=f(x)$$

1、$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$（重点）

设特解 $y^*=x^ke^{\lambda x}Q_m(x)$，其中 $k=\begin{cases}0, & \lambda\text{不是特征根}\\ 1, & \lambda\text{是一个单根}\\ 2, & \lambda\text{是重根}\end{cases}$

2、$f(x)=e^{\lambda x}\left(P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x\right)$

设特解 $y^*=x^ke^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x\right]$，

其中 $m=\max\{l,\ n\}$，$k=\begin{cases}0, & \lambda+\omega i\text{不是特征根}\\ 1, & \lambda+\omega i\text{是特征根}\end{cases}$