一、填空题（每空 3 分，共 24 分）

1、 设α_1、α_2、α_3均为 3 维列向量，已知矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ 3\alpha_1+9\alpha_2+27\alpha_3, 2\alpha_1+4\alpha_2+8\alpha_3)$，且$|A|=1$，那么$|B|=$__________.

2、 设分块矩阵$C=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$， A,B均为方阵，则下列命题中正确的个数为______________.

(A). 若A,B均可逆，则C也可逆. (B). 若A,B均为对称阵，则C也为对称阵.

(C). 若A,B均为正交阵，则C也为正交阵. (D). 若A,B均可对角化，则C也可对角化.

3、 设$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$，则$D$的第一列上所有元素的代数余子式之和为__________.

4、 设向量组(I)$:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组(II)$:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，则____________成立.(注：此题单选)

(A). 当$r<s$时，向量组（II）必线性相关 (B). 当$r>s$时，向量组（II）必线性相关

(C). 当$r<s$时，向量组（I）必线性相关 (D). 当$r>s$时，向量组（I）必线性相关

5、 已知方阵A满足$2A^2+3A=O$，则$(A+E)^{-1}=$___________.

6、 当矩阵A满足下面条件中的____________时, 推理“若$AB=O$， 则$B=O$”可成立.
（注：此题可多选）

(A). A可逆 (B). A为列满秩（即A的秩等于A的列数）

(C). A的列向量组线性无关 (D). $A\neq O$

7、 设矩阵A,B分别为 3 维线性空间V中的线性变换T在某两组基下的矩阵，已知$1,-2$为A的特征值，B的所有对角元的和为5， 则矩阵B的全部特征值为____________.

8、设J_n是所有元素均为 1 的n阶方阵($n\geq 2$)，则J_n的互不相同的特征值的个数为________.

二、(10 分）已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

矩阵P， X满足$PA=B$，$PX=C$． 求矩阵X．

三、（10分）设线性方程组$\begin{cases} x_1-3x_2-x_3=0 \\ x_1-4x_2-ax_3=b \\ 2x_1-x_2+3x_3=5 \end{cases}$， 问当参数$a,b$取何值时，

(1). 此方程组无解?

(2). 此方程组有唯一解?

(3). 此方程组有无穷多解?

四、(10 分）设A 为 4 阶方阵，4 维列向量$b\neq 0$， $R(A)=2$. 若p_1,p_2,p_3,p_4都是非齐次方程组$Ax=b$的解向量，且满足

$$p_1+p_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},\quad p_2+p_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad p_3+p_4=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1). (6 分）求齐次方程组$Ax=0$的一个基础解系.

(2). (4 分）求$Ax=b$的通解.

五、(16 分）将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+6x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$ 用正交变换化为标准型.

六、(14 分)设V为所有 2 阶方阵在矩阵的加法和数乘下构成的线性空间. 定义V上的变换T如下：

对任意$X\in V$，$T(X)=AX-X^TA$，其中$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$， X^T表示X的转置矩阵.

(1). (6 分)证明T是V上的一个线性变换；

(2). (8 分)求T在V的基$E_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$下的矩阵.

七、(1). (8 分)已知向量组$a_1,a_2,\cdots,a_n$线性无关, 向量组$b_1,b_2,\cdots,b_n$满足：$\begin{cases} b_1=a_1+a_2 \\ b_2=a_2+a_3 \\ \quad\vdots \\ b_{n-1}=a_{n-1}+a_n \\ b_n=a_n+a_1 \end{cases}$，

分别讨论当$n=4$和$n=5$时，向量组$b_1,b_2,\cdots,b_n$是否线性相关?

(2). (8 分)设λ_1,λ_2为方阵A的两个不同的特征值， α_1,α_2为A相应于λ_1的两个线性无关的特征向量，α_3,α_4为A相应于λ_2的两个线性无关的特征向量，证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关.