01. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}$, 则其行列式 $|A|=\underline{160}$.

02. 设列向量 $\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$, 则 $|2E_n+\alpha\alpha^T|=\underline{2^{n-1}(n+2)}$.

03. 设 A,B 都是 n 阶方阵, 且 $|A|=2,|B|=3$, 则 $\big||A^{-1}|A^*B^{-1}\big|=\underline{1/6}$.

04. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$, 则其两次伴随 $(A^*)^*=\underline{O}$.

05. 若矩阵 X 满足方程 $AXA^*=2XA^*+E$, 其中 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$, 则 $X=\underline{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}}$.

06. 已知行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=3$, 则 $|\alpha_n+\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n|=\underline{3(1+(-1)^{n+1})}$.

07. 矩阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$, 则下列必为可逆矩阵的是 $\underline{(a)(c)(d)}$.
$(a)A+2E$; $(b)A+E$; $(c)A$; $(d)A-E$; $(e)A-2E$.

08. 若 $4A^T=A^{-1}$, $|A|=-1/4$, 则 $|E+2A|=\underline{0}$.

09. 写出元素为整数并且满足 $A^2=E_2$ 的所有下三角矩阵 $A=\underline{\begin{pmatrix}\pm1&0\\0&\pm1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\pm1&0\\k&\mp1\end{pmatrix},k\in\mathbb{Z}}$.

10. 设行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\q&1&1&1&1\\1&u&1&1&1\\1&1&i&1&1\\1&1&1&z&1\end{vmatrix}$, 则其所有元素的代数余子式之和为 $\underline{(q-1)(u-1)(i-1)(z-1)}$.

11. 设 $\alpha=(1,2,3,4)^T,\beta=(4,3,2,1)^T,A=\alpha\beta^T$, 则 $A^n=\underline{20^{n-1}\alpha\beta^T=\cdots}$.

12. 判断 (空格处填 $\times$ 或 $\checkmark$)

$\underline{\times}$ (a) 设 A 是方阵, λ 是实数, 则 $|\lambda A|=|\lambda||A|$.

$\underline{\times}$ (b) 若矩阵 A 与 B 既可左乘又可右乘, 则 $|AB|=|BA|$.

$\underline{\checkmark}$ (c) 若 n 阶方阵 A,B,C 满足 $ABC=E$, 则 $BCA=E$.

$\underline{\times}$ (d) 若 A,B 为同阶方阵, 则 $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$.

$\underline{\times}$ (e) 设 A 是方阵, 若线性方程组 $Ax=b$ 有解, 则 $|A|\neq0$.

13. 设三阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 求 A^n.

解:

(1) 易得 $A^2=2A$, 因此 $A^n=2^{n-1}A$.

(2) 也可用二项式展开. 将 A 拆为 $A=E+F=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

利用 $F^2=E$, 可得

$$A^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kF^k=\sum_i C_n^{2i}E+\sum_i C_n^{2i+1}F=2^{n-1}E+2^{n-1}F=2^{n-1}A.$$

14. 证明：若两个 n 次多项式在 $n+1$ 个点取值相同，则它们必恒等.

证明：

设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$.

若它们在点 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{n+1}$ 取值相同，则 $f(x_i)=g(x_i)$, 即

$$\begin{cases}(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x_1+\cdots+(a_n-b_n)x_1^n=0\\(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x_2+\cdots+(a_n-b_n)x_2^n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x_{n+1}+\cdots+(a_n-b_n)x_{n+1}^n=0\end{cases}$$

即 $\begin{pmatrix}1&x_1&\cdots&x_1^n\\1&x_2&\cdots&x_2^n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_{n+1}&\cdots&x_{n+1}^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0-b_0\\a_1-b_1\\\vdots\\a_n-b_n\end{pmatrix}=O$

系数矩阵行列式为范德蒙行列式 $D=\Pi_{i>j}(x_i-x_j)$. 由于 x_i 两两不等，因此 $D\neq0$.

因此该齐次方程组只有零解，即 $a_0-b_0=a_1-b_1=\cdots=a_n-b_n=0$.

故而，$f(x)=g(x)$.

15. 设 A 是 n 阶方阵，证明：存在 $\delta>0$, 当 $|x|<\delta$ 时，有 $E+xA$ 可逆.

证明：

要证 $E+xA$ 可逆，即证 $|E+xA|\neq0$. 注意到 $f(x)=|E+xA|$ 是 x 的多项式，必然连续.

有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=|E|=1$.

因此，存在 $\delta>0$, 当 $|x|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(0)|<1/2$

即 $1/2<|E+xA|<3/2$.