例题 1、解：令随机变量 Y 表示抛硬币的结果，Y=1 表示为正面，Y=-1 表示反面，

则 $P\{Y=1\}=P\{Y=-1\}=\dfrac{1}{2}$。

(1)当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，Y=1 时有 $X(\dfrac{1}{2})=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$

Y=-1 时有 $X(\dfrac{1}{2})=1$

$$\therefore F_X(x,\frac{1}{2})=P\{X(\frac{1}{2})\le x\}=P\{X(\frac{1}{2})\le x\mid Y=1\}P\{Y=1\}+P\{X(\frac{1}{2})\le x\mid Y=-1\}P\{Y=-1\}$$

我们讨论一下 x 的取值范围。

当 $x<0$ 时，则 $F_X(x,\dfrac{1}{2})=0$

$0\le x<1$ 时，则第二项为 0，第一项为 $1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$1\le x$ 时，则 $F_X(x,\dfrac{1}{2})=1\times\dfrac{1}{2}+1\times\dfrac{1}{2}=1$

$$\therefore F_X(x,\frac{1}{2})=\begin{cases}0,x<0\\ \dfrac{1}{2},0\le x<1\\ 1,x\ge 1\end{cases}$$

同理，可以求出 $F_X(x,1)=P\{X(1)\le x\}=\begin{cases}0,x<-1\\ \dfrac{1}{2},-1\le x<2\\ 1,x\ge 2\end{cases}$

（2）$t=\dfrac{1}{2}$ 时，Y=1，则 $X(\dfrac{1}{2})=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$，

Y=-1，则 $X(\dfrac{1}{2})=2\times\dfrac{1}{2}=1$，

当 $t=1$ 时，Y=1，则 $X(1)=\cos\pi=-1$，

Y=-1，则 $X(1)=2\times 1=2$。

所以有 $F_X(x_1,x_2,-\frac{1}{2},1)=P\{X(\frac{1}{2})\le x_1, X(1)\le x_2\}=\begin{cases}0, & x_1<0\\ 0, & x_2<-1\\ \frac{1}{4}, & 0\le x_1<1,-1\le x_2<2\\ \frac{1}{2}, & x_1\ge 1,-1\le x_2<2\\ \frac{1}{2}, & 0\le x_1<1,-1\le x_2<2\\ 1, & x_1\ge 1, x_2\ge 2\end{cases}$

例题 2、解：

（1）由数字特征的定义：

$$m_Z(t)=E[Z(t)]=E[X\sin t+Y\cos t]=E(X)\sin t+E(Y)\cos t$$

$$R_Z(t_1,t_2)=E[Z(t_1)\cdot Z(t_2)]=E[(X\sin t_1+Y\cos t_1)(X\sin t_2+Y\cos t_2)]$$
$$=E(X^2)\sin t_1\sin t_2+E(Y^2)\cos t_1\cos t_2+E(XY)\sin t_1\cos t_2+E(YX)\cos t_1\sin t_2$$

又Q $E(X)=\frac{2}{3}\times(-1)+\frac{1}{3}\times 2=E(Y)=0$

$$E(X^2)=\frac{2}{3}\times(-1)^2+\frac{1}{3}\times 2^2=E(Y^2)$$

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=0$$

$$\therefore m_Z(t)=0, R_Z(t_1,t_2)=2\cos(t_1-t_2)$$

（2）由（1）的结论可知，Z(t)是广义平稳随机过程，为证明其不是狭义平稳随机过程，我们考虑高阶项

$$E[Z^3(t)]=E[(X\sin t+Y\cos t)^3]$$
$$=E(X^3)\sin^3 t+3E(X^2Y)\sin^2 t\cos t+3E(XY^2)\sin t\cos^2 t+E(Y^3)\cos^3 t$$

因为 $E(X^3)=(-1)^3\times\frac{2}{3}+2^3\times\frac{1}{3}=E(Y^3)$

$E(X^2Y)=E(XY^2)=0$

代入 $E[Z^3(t)]=2(\sin^3 t+\cos^3 t)$

所以 Z(t)不是狭义平稳过程。

例题 3、解：

根据自相关函数定义：

$$R_Y(\tau)=E[Y(t)Y(t-\tau)]=E\{[X(t)+X(t-T)][X(t-\tau)+X(t-\tau-T)]\}$$
$$=E[X(t)X(t-\tau)]+E[X(t)\cdot X(t-\tau-T)]+E[X(t-T)\cdot X(t-\tau)]+E[X(t-T)\cdot X(t-\tau-T)])]$$
$$=2R_X(\tau)+R_X(\tau-T)+R_X(\tau+T)$$

由维纳-辛钦定理得：

$$S_Y(\omega)=F[R_Y(\tau)]=2S_X(\omega)+S_X(\omega)e^{j\omega T}+S_X(\omega)e^{-j\omega T}$$
$$=2S_X(\omega)(1+\cos\omega T)$$

例题 4、证明：

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

求导得：

$$\frac{dS(\omega)}{d\omega}=(-j\tau)\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$
$$\frac{d^2S(\omega)}{d\omega^2}=(-j\tau)^2\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$
$$\therefore\frac{d^2S(\omega)}{d\omega^2}=-\tau^2\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$
$$\therefore\frac{d^2S(\omega)}{d\omega^2}\text{和}-\tau^2R(\tau)\text{互为傅里叶变换对}$$

又由自相关函数的性质可知：$\mathrm{R}(0)|\geq|R(\tau)|$

因此，对应某一个 $\tau_1\neq 0$，如果有 $R(\tau_1)\neq 0$，则令 $R_1(\tau)=-\tau^2R(\tau)$

$|R_1(0)|<|R_1(\tau_1)|$

即 $R_1(\tau)$ 不可能是自相关函数，因此 $\mathrm{S}_1(\omega)=\dfrac{d^2S(\omega)}{d\omega^2}$ 不可能是功率谱函数。

例题 5、解：

（1）

$$E[X^2(t)]=E[A^2\cos^2(\omega_0t+\Theta)]$$
$$=\frac{A^2}{2}E[1+\cos(2\omega_0t+2\Theta)]$$
$$=\frac{A^2}{2}+\frac{A^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\omega_0t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta$$
$$=\frac{A^2}{2}$$

所以 $P_X = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E[X^2(t)]dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{A^2}{2}dt = \frac{A^2}{2}$

（2）根据 $X_T(\omega)$ 的定义：

$$X_T(\omega) = \int_{-T}^{T} X(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$= \int_{-T}^{T} A\cos(\omega_0 t+\Theta)e^{-j\omega t}dt$$
$$= ATe^{j\Theta}\frac{\sin[(\omega-\omega_0)T]}{(\omega-\omega_0)T} + ATe^{-j\Theta}\frac{\sin[(\omega+\omega_0)T]}{(\omega+\omega_0)T}$$

则

$$E[(X_T(\omega))^2] = E\{|\,ATe^{j\Theta}\frac{\sin[(\omega-\omega_0)T]}{(\omega-\omega_0)T} + ATe^{-j\Theta}\frac{\sin[(\omega+\omega_0)T]}{(\omega+\omega_0)T}|^2\}$$
$$= A^2T^2\{\sin c^2[(\omega-\omega_0)T] + \sin c^2[(\omega+\omega_0)T] + \sin c[(\omega-\omega_0)T]\sin c[(\omega+\omega_0)T]\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2\theta d\theta\}$$

由功率谱的定义可得：

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T} = \frac{A^2}{2}\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

注意：这里用到了一个性质，即 $\lim_{T\to\infty}\frac{T}{\pi}[\frac{\sin(aT)}{aT}] = \delta(a)$

所以，所求的功率为：

$$P_X = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A^2}{2}\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]d\omega$$
$$= \frac{A^2}{2}$$

例题 6、证明：

根据相关函数定义有：

$$E[X(t)X^{'}(t)] = E[X(t)\cdot \underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\frac{X(t+\varepsilon)-X(t)}{\varepsilon}]$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}E[X(t)\frac{X(t+\varepsilon)-X(t)}{\varepsilon}]$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[R(\varepsilon)-R(0)] = R^{'}(0)$$

考虑到自相关函数的性质：$|R(0)|\ge|R(\tau)|$

且 $R(\tau)$ 为偶函数，因此 $\tau=0$ 为 $R(\tau)$ 的极值点，从而有 $R^{'}(0)=0$，由此可知

$E[X(t)X^{'}(t)]$，所以为正交的

进一步，若令 $E[X(t)]=m(t)$，则 $E[X^{'}(t)]=m^{'}(t)$。因为是平稳过程，$m(t)$ 为常数，因此 $m^{'}(t)=0$，所以有 $E[X(t)]\cdot E[X^{'}(t)]=0$

即 $E[X(t)X^{'}(t)]=E[X(t)]\cdot E[X^{'}(t)]=0$，所以可知也是不相关的。

例题 7、解：

根据相关函数的定义，可得:

$$R_Y(\tau)=E[Y(t)Y(t-\tau)]$$
$$=E\{[X(t)+\dot{X}(t)][X(t-\tau)+\dot{X}(t-\tau)]\}$$
$$E\{X(t)X(t-\tau)+\dot{X}(t)\dot{X}(t-\tau)+\dot{X}(t)X(t-\tau)+X(t)\dot{X}(t-\tau)\}$$
$$=R_X(\tau)-R_X^{''}(\tau)+R_X^{'}(\tau)-R_X^{'}(\tau)\quad (\text{由R}(\tau)\text{微分性质})$$
$$=R_X(\tau)-R_X^{''}(\tau)$$
$$R_X^{'}(\tau)=-2\tau\cdot e^{-\tau^2}$$
$$R_X^{''}(\tau)=-2\tau\cdot e^{-\tau^2}+4\tau^2e^{-\tau^2}$$
$$\therefore R_X(\tau)-R_X^{''}(\tau)=(3-4\tau^2)e^{-\tau^2}$$

例题 8、解：

$$R_E(\tau)=E\{[Y(t)-X(t)][Y(t-\tau)-X(t-\tau)]\}$$
$$=E\{Y(t)Y(t-\tau)\}+E\{X(t)X(t-\tau)\}-E\{X(t)Y(t-\tau)\}-E\{Y(t)X(t-\tau)\}$$
$$=R_Y(\tau)+R_X(\tau)-R_{XY}(\tau)-R_{YX}(\tau)$$

由于 $S_Y(\omega)=|H(j\omega)|^2\,S_X(\omega)\quad S_{YX}(\omega)=H(j\omega)S_X(\omega)\quad S_{YX}(\omega)=H^*(j\omega)S_X(\omega)$

所以 $$\begin{aligned}S_E(\omega)&=|H(j\omega)|^2\,S_X(\omega)+S_X(\omega)-H^*(j\omega)S_X(\omega)-H(j\omega)S_X(\omega)\\&=|H(j\omega)-1|^2\,S_X(\omega)\end{aligned}$$

可以思考，此时如果告诉了输入，告诉了传递函数，则可以求得误差输出。

例题 9、解：

（1）如图所示：

$$Z(t)=\int_{-\infty}^{t}[X(a)-X(a-T)]da$$

$$=\int_{-\infty}^{t}X(a)*[\delta(a)-\delta(a-T)]da$$

$$=X(t)*[\delta(t)-\delta(t-T)]*u(t)$$

$$=X(t)*[u(t)-u(t-T)]$$

即 $h(t)=u(t)-u(t-T)$ 为系统冲激响应

故传递函数为：

$$H(j\omega)=F[h(t)]=\int_{0}^{T}e^{-j\omega T}dt$$

$$=\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega T}\,|_{T}^{0}$$

$$=\frac{1}{-j\omega}[1-e^{-j\omega T}]=\frac{e^{\frac{-j\omega T}{2}}-e^{\frac{j\omega T}{2}}}{-j\omega}\cdot e^{\frac{j\omega T}{2}}$$

$$=\frac{-2j\sin\frac{\omega T}{2}}{-j\omega}e^{\frac{j\omega T}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega}{2}}e^{\frac{j\omega T}{2}}$$

（2）输出功率谱为：$S_Z(\omega)=|H(j\omega)|^2 S_X(\omega)=S_0\frac{\sin^2(\frac{\omega T}{2})}{(\frac{\omega}{2})^2}$

所以均方值为：

$$\varphi_Z^2=R_Z(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_Z(\omega)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}4S_0\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2(\frac{\omega T}{2})}{(\frac{\omega}{2})^2}d\frac{\omega}{2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}4S_0T\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2(\frac{\omega T}{2})}{(\frac{\omega T}{2})^2}d\frac{\omega T}{2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}4S_0\cdot T\cdot\frac{\pi}{2}=S_0T$$