同济大学课程考核试卷（A 卷）
2009—2010 学年第一学期

命题教师签名：　　　　　　　　　　审核教师签名：

课号：122010　　　课名：线性代数 B　　　　　考试考查：考试

此卷选为：期中考试( )、期终考试(√)、重考( )试卷

年级_____专业__________学号_________姓名________任课教师________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

（注意：本试卷共七大题，三大张，满分 100 分．考试时间为 120 分钟.要求写出解题过程，否则不予计分）

一、填空题（每空 3 分，共 24 分）

1、 设α_1、α_2、α_3均为 3 维列向量，已知矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ 3\alpha_1+9\alpha_2+27\alpha_3, 2\alpha_1+4\alpha_2+8\alpha_3)$，且$|A|=1$，那么$|B|=$__________.

2、 设分块矩阵$C=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$，$A,B$均为方阵，则下列命题中正确的个数为____________.

(A).若A,B均可逆，则C也可逆.　　(B).若A,B均为对称阵，则C也为对称阵.

(C).若A,B均为正交阵，则C也为正交阵.　　(D).若A,B均可对角化，则C也可对角化.

3、 设$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$，则$D$的第一列上所有元素的代数余子式之和为__________.

4、 设向量组(I)$:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组(II)$:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，则___________成立.(注：此题单选)

(A)．当$r<s$时，向量组（II）必线性相关　　(B)．当$r>s$时，向量组（II）必线性相关

(C)．当$r<s$时，向量组（I）必线性相关　　(D)．当$r>s$时，向量组（I）必线性相关

5、 已知方阵A满足$2A^2+3A=O$，则$(A+E)^{-1}=$__________.

6、 当矩阵A满足下面条件中的___________时，推理“若$AB=O$，则$B=O$”可成立.（注：此题可多选）

(A)．A可逆　　(B)．A为列满秩（即A的秩等于A的列数）

(C)．A的列向量组线性无关　　(D)．$A\neq O$

7、 设矩阵A,B分别为 3 维线性空间V中的线性变换T在某两组基下的矩阵，已知$1,-2$为A的特征值，B的所有对角元的和为5，则矩阵B的全部特征值为___________.

8、设J_n是所有元素均为 1 的n阶方阵（$n\geq 2$），则J_n的互不相同的特征值的个数为_______.

二、（10 分）已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

矩阵P，X满足$PA=B$，$PX=C$．求矩阵X.

三、（10分）设线性方程组$\begin{cases} x_1-3x_2-x_3=0 \\ x_1-4x_2-ax_3=b \\ 2x_1-x_2+3x_3=5 \end{cases}$，问当参数$a,b$取何值时，

(1)．此方程组无解?

(2)．此方程组有唯一解?

(3)．此方程组有无穷多解?

四、（10 分）设 A 为 4 阶方阵，4 维列向量 $b \neq 0$，$R(A)=2$. 若 p_1, p_2, p_3, p_4 都是非齐次方程组 $Ax=b$ 的解向量，且满足

$$p_1+p_2=\begin{pmatrix}2\\2\\0\\4\end{pmatrix},\quad p_2+p_3=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix},\quad p_3+p_4=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

(1).（6 分）求齐次方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系.

(2).（4 分）求 $Ax=b$ 的通解.

五、（16 分）将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+6x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$ 用正交变换化为标准型.

六、(14 分)设 V 为所有 2 阶方阵在矩阵的加法和数乘下构成的线性空间. 定义 V 上的变换 T 如下：

对任意 $X \in V$，$T(X) = AX - X^T A$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$，$X^T$ 表示 X 的转置矩阵.

(1). (6 分)证明 T 是 V 上的一个线性变换；

(2). (8 分)求 T 在 V 的基 $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵.

七、(1). (8 分)已知向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性无关, 向量组 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 满足：$\begin{cases} b_1 = a_1 + a_2 \\ b_2 = a_2 + a_3 \\ \quad\vdots \\ b_{n-1} = a_{n-1} + a_n \\ b_n = a_n + a_1 \end{cases}$，

分别讨论当 $n = 4$ 和 $n = 5$ 时，向量组 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是否线性相关？

(2). (8 分)设 λ_1, λ_2 为方阵 A 的两个不同的特征值，α_1, α_2 为 A 相应于 λ_1 的两个线性无关的特征向量，α_3, α_4 为 A 相应于 λ_2 的两个线性无关的特征向量，证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.