三、(18分)

设随机过程 $X(t)=a+\cos(\omega t+\phi)$，其中 $a>0$，$\omega>0$，ϕ 是均匀分布于区间 $[-\pi,\pi]$ 的随机变量。证明：

1、$X(t)$ 是广义平稳过程；

2、$X(t)$ 具有均值各态历经性；

3、$X(t)$ 与其均方导数过程 $\dot{X}(t)$ 在同一时刻互不相关。

解：

(1) $\because \phi \sim U(-\pi,\pi)$，则 $f_\phi(\varphi)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi} & -\pi<\varphi<\pi \\ 0 & 其他\end{cases}$

$$m_X=E[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}[a+\cos(\omega t+\phi)]\cdot f_\phi(\varphi)\,d\varphi=a$$

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E\{[a+\cos(\omega t_1+\phi)]\cdot[a+\cos(\omega t_2+\phi)]\}$$

$$=E[a^2]+E[a\cdot\cos(\omega t_2+\phi)]+E[a\cdot\cos(\omega t_1+\phi)]+E[\cos(\omega t_1+\phi)\cdot\cos(\omega t_2+\phi)]$$

$$=a^2+\frac{1}{2}\cos\omega(t_1-t_2)=a^2+\frac{1}{2}\cos\omega\tau \quad (\tau=t_1-t_2)$$

~~$\because m_X, R_X(\tau)$ 都共与~~

$\because m_X$ 为常数，$R_X(\tau)$ 为只与时间间隔有关的函数，故 $X(t)$ 为广义平稳随机过程

(2) $$m_{XT}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[a+\cos(\omega t+\phi)]\,dt=a=m_X$$

故 $X(t)$ 均值各态历经。

(3) 证明 $X(t)$ 与 $\dot{X}(t)$ 在同一时刻互不相关 <=> ~~$C(X(t), \dot{X}(t))$~~ $C_{X\dot{X}}(t_1,t_2)|_{t_1=t_2}=0$

~~$E[X(t)\cdot\dot{X}(t)]=0$~~ $E[X(t)\dot{X}(t)] - E[X(t)]E[\dot{X}(t)]=0$

$$\because E[X(t)\cdot\dot{X}(t)] = E\left[X(t)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right]$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{E[X(t+\Delta t)X(t)]-E[X(t)X(t)]}{\Delta t} = \frac{\partial R_X(\tau)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=0} = 0$$

故证得 $X(t)$ 与 $\dot{X}(t)$ 在同一时刻互不相关。

五.(20)

功率谱密度为1的零均值高斯白噪声 $N(t)$ 通过理想低通滤波器 $h(t)$，输出为 $X(t)$.

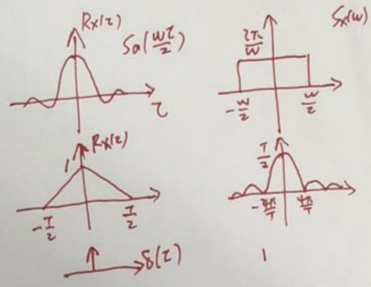
且有

$$H(jw)=\begin{cases}1 & -1\le w\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

令 $Y(t)=X(t)-X(t-T)$，其中 $T>0$. 求.

(1). $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$; (2) $Y(t)$ 和 $N(t)$ 的互功率谱密度 $S_{YN}(w)$

(3) $Y(t)$ 的一维和二维概率密度函数.



$S_X(w)=\begin{cases}\frac{2\pi}{W}, & |w|\le\frac{W}{2}\\ 0, & |w|>\frac{W}{2}\end{cases}$

解:

(1) $\because X(t)=N(t)\otimes h(t)$

$\therefore S_X(w)=S_N(w)|H(jw)|^2=\begin{cases}1 & -1\le w\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$

参见书中P77页

$\because R_X(\tau)=Sa(\frac{W\tau}{2}) \iff S_X(w)=\begin{cases}\frac{2\pi}{W}, & |w|\le\frac{W}{2}\\ 0, & |w|>\frac{W}{2}\end{cases}$ 互为傅里叶变换对. 1 $2\pi\delta(w)$

$f(t)\leftrightarrow F(w)$

$F(t)\leftrightarrow 2\pi f(-w)$

故. $S_X(w)=\begin{cases}1 & -1\le w\le 1\\ 0 & 其他\end{cases} \Rightarrow R_X(\tau)=\frac{1}{\pi}\cdot Sa(\tau)$

(2) 利用功率谱方法求解.

$\because Y(t)=X(t)\otimes[\delta(t)-\delta(t-T)] = N(t)\otimes h(t)\otimes[\delta(t)-\delta(t-T)] = N(t)\otimes h_1(t)$

$h_1(t)=h(t)\otimes[\delta(t)-\delta(t-T)] = h(t)-h(t-T)$

$\therefore H_1(jw)=H(jw)-H(jw)\cdot e^{-jwT} = H(jw)\cdot(1-e^{-jwT})$

又$\because$ $S_{YN}(w)=S_N(w)\cdot H_1(jw) = S_N(w)\cdot H(jw)\cdot(1-e^{-jwT})$

$$=\begin{cases}1-e^{-jwT} & -1\le w\le 1\\ 0 & 其他\end{cases} = rect(\frac{w}{2})\cdot(1-e^{-jwT})$$

(3). $\because N(t)$ 为高斯随机过程. 故 $Y(t)$ 也为高斯随机过程.

涉及第五章内容, 暂且不讲.

①

4.1 窄带随机过程.

$\Rightarrow\ n(t) = \lim_{\Delta f \to 0} \sum_k A_k \cos[2\pi(f_0 + k\Delta f)t + \theta_k]$ (准正弦波振荡的形式).

$\Rightarrow\ n(t) = n_c(t)\cdot\cos 2\pi f_0 t - n_s(t)\cdot\sin 2\pi f_0 t$ (两项正交分量表示).

②

4.2 $\boxed{\text{确定性}}$信号的复表示.

$\cos t \to$ 高频窄带 $\to$ 一般信号

$\uparrow$

扩展 $\Rightarrow$ 4.3 希尔伯特变换.

4.4 复随机过程.

复随机变量 $E[x(t)x^*(t)]$

$\downarrow$

复随机过程

$\downarrow$

实随机过程的复表示②.

$R_x(\tau)$

$R_{\tilde{x}}(\tau)$

$R_{\hat{x}}(\tau)$

$R_{x\hat{x}}(\tau)$

$R_{\hat{x}x}(\tau)$

★
$$\begin{cases} R_{\hat{x}}(\tau) = R_x(\tau) \\ R_{\hat{x}x}(\tau) = -R_{x\hat{x}}(\tau) = \hat{R}_x(\tau) \\ R_{\tilde{x}}(\tau) = 2[R_x(\tau) + j\hat{R}_x(\tau)] \end{cases}$$

4.5 窄带实平稳随机过程的数字特征.①

$$\begin{cases} x(t) = x_c(t)\cdot\cos\omega_0 t - x_s(t)\cdot\sin\omega_0 t \\ \hat{x}(t) = x_c(t)\cdot\sin\omega_0 t + x_s(t)\cdot\cos\omega_0 t. \end{cases} \iff \begin{cases} x_c(t) = x(t)\cdot\cos\omega_0 t + \hat{x}(t)\cdot\sin\omega_0 t \\ x_s(t) = \hat{x}(t)\cdot\cos\omega_0 t - x(t)\cdot\sin\omega_0 t. \end{cases}$$

★
$$\begin{cases} R_{x_c} = R_{x_s} = R_x(\tau)\cdot\cos\omega_0\tau + \hat{R}_x(\tau)\cdot\sin\omega_0\tau \\ R_{cs}(\tau) = -R_{sc}(\tau) = R_x(\tau)\cdot\sin\omega_0\tau - \hat{R}_x(\tau)\cdot\cos\omega_0\tau. \end{cases}$$

~~题~~4.9. 解:

同根联系相关.

对称、窄带平稳高斯. 求 $E[A_c(t)A_s(t-\tau)]$

$$\begin{cases} Y(t) = \underline{A_c(t)}\cdot\cos w_0 t - \underline{A_s(t)}\cdot\sin w_0 t. \\ \hat{Y}(t) = A_c(t)\cdot\sin w_0 t + A_s(t)\cdot\cos w_0 t \end{cases}$$

$\therefore A_c(t) = Y(t)\cdot\cos w_0 t + \hat{Y}(t)\cdot\sin w_0 t$

$A_s(t) = \hat{Y}(t)\cdot\cos w_0 t - Y(t)\cdot\sin w_0 t.$

$$\therefore E[A_c(t)\cdot A_s(t-\tau)] = E\begin{bmatrix} Y(t)\cdot\hat{Y}(t-\tau)\cdot\cos w_0 t\cdot\cos w_0(t-\tau) & - Y(t)\cdot Y(t-\tau)\cdot\cos w_0 t\cdot\sin w_0(t-\tau). \\ \hat{Y}(t)\cdot\hat{Y}(t-\tau)\cdot\sin w_0 t\cdot\cos w_0(t-\tau) & -\hat{Y}(t)\cdot Y(t-\tau)\cdot\sin w_0 t\cdot\sin w_0(t-\tau) \end{bmatrix}$$

$= R_{Y\hat{Y}}(\tau)\cdot\cos w_0 t\cdot\cos w_0(t-\tau) - R_Y(\tau)\cdot\cos w_0 t\cdot\sin w_0(t-\tau).$

$+ R_{\hat{Y}}(\tau)\cdot\sin w_0 t\cdot\cos w_0(t-\tau) - R_{\hat{Y}Y}(\tau)\cdot\sin w_0 t\cdot\sin w_0(t-\tau).$

又 $\because R_{\hat{Y}}(\tau) = R_Y(\tau)$. $R_{\hat{Y}Y}(\tau) = -R_{Y\hat{Y}} = \hat{R}_Y(\tau)$

$\therefore$ 上式 $= R_Y\sin w_0\tau - \hat{R}_Y\cos w_0\tau$

即 $R_{cs}(\tau) = R_Y\sin w_0\tau - \hat{R}_Y\cos w_0\tau$

$\therefore S_{cs}(w) = \int_{-\infty}^{\infty}[R_Y\cdot\sin w_0\tau - \hat{R}_Y\cos w_0\tau]\cdot e^{-jw\tau}\cdot d\tau$

$\sin w_0\tau = \dfrac{e^{jw_0\tau} - e^{-jw_0\tau}}{2j}$

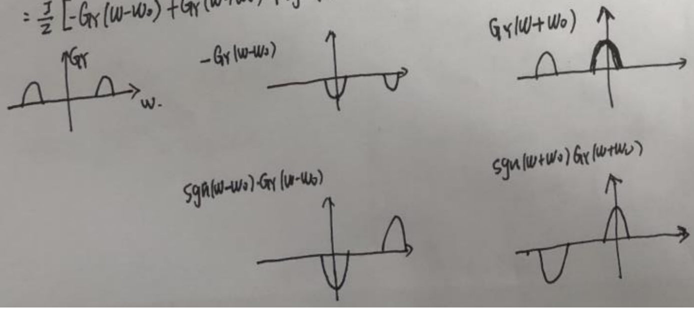
$\cos w_0\tau = \dfrac{e^{jw_0\tau} + e^{-jw_0\tau}}{2}$

P154推导

$= \frac{1}{2j}[G_Y(w-w_0) - G_Y(w+w_0)] + \frac{1}{2}[j\,\mathrm{sgn}(w-w_0)G_Y(w-w_0) + j\,\mathrm{sgn}(w+w_0)G_Y(w+w_0)]$

$= \frac{j}{2}[-G_Y(w-w_0) + G_Y(w+w_0) + \mathrm{sgn}(w-w_0)\cdot G_Y(w-w_0) + \mathrm{sgn}(w+w_0)G_Y(w+w_0)]$

令. GY



$\because Y(t)$为对称.

故 $S_{cs}(w)=0$

故 $R_{cs}(\tau)=0$

教案：

四、窄带实平稳随机过程

$$X(t)=X_c(t)\cdot\cos w_0t - X_s(t)\cdot\sin w_0t$$

其中 $w_0 >> 2\pi$，$X_c(t)$ 为同相分量，$X_s(t)$ 为正交分量。已知 $X_c(t)$ 与 $X_s(t)$ 的互功率谱密度 $S_{X_cX_s}(w)=0$，$X_c(t)$ 的功率谱密度为：

$$S_c(w)=\begin{cases}\pi+w & -\pi\le w\le 0\\ \pi-w & 0\le w\le\pi\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

(1) $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$.

(2) $X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 的互功率谱密度. $\cancel{R_{X\hat{X}}(\tau)}$ $S_{X\hat{X}}(w)$

(3) $X(t)$ 的复表示 $\tilde{X}$ 的自功率谱密度 $S_{\tilde{X}}(w)$

$R_X(\tau)$, $R_{\hat{X}}(\tau)$, $R_{\tilde{X}}(\tau)$, $R_{X\hat{X}}(\tau)$, $R_{\hat{X}X}(\tau)$, $R_{X_c}(\tau)$, $R_{X_s}(\tau)$

$R_{X_cX_s}(\tau)$, $R_{X_sX_c}(\tau)$,

$R_{\tilde{X}}(\tau)=2[R_X(\tau)+j\hat{R}_X(\tau)]$

$R_{X_c}(\tau)=R_X(\tau)\cdot\cos w_0\tau+\hat{R}_X(\tau)\cdot\sin w_0\tau$

$R_{cs}(\tau)=R_X(\tau)\cdot\sin w_0\tau-\hat{R}_X(\tau)\cdot\cos w_0\tau$

解：(1)

$\because S_{cs}(w)=0 \Rightarrow R_{cs}(\tau)=0$

即 $R_{cs}(\tau)=R_X(\tau)\cdot\sin w_0\tau-\hat{R}_X(\tau)\cdot\cos w_0\tau=0 \Rightarrow \hat{R}_X(\tau)=\dfrac{R_X(\tau)\cdot\sin w_0\tau}{\cos w_0\tau}$

又 $\because R_c(\tau)=R_X(\tau)\cdot\cos w_0\tau+\hat{R}_X(\tau)\cdot\sin w_0\tau$

$$=R_X(\tau)\cdot\cos w_0\tau+\frac{R_X(\tau)\cdot\sin^2 w_0\tau}{\cos w_0\tau}=\frac{R_X(\tau)}{\cos w_0\tau}$$

~~$R_c(\tau)\cos w_0\tau=R_X(\tau)\cos w_0\tau+\hat{R}_X(\tau)\sin w_0\tau$~~

$\therefore R_X(\tau)=R_c(\tau)\cdot\cos w_0\tau$

又 $\because R_c(\tau)=\mathcal{F}^{-1}[S_c(w)]=\frac{\pi}{2}Sa^2(\frac{\pi\tau}{2})$

$\therefore R_X(\tau)=\frac{\pi}{2}Sa^2(\frac{\pi\tau}{2})\cdot\cos w_0\tau$

如何利用 P77 页公式

$\Rightarrow$ 写出变换对

$$f(t)=\begin{cases}0 & |t|\ge\frac{T}{2}\\ 1-\frac{2|t|}{T} & |t|\le\frac{T}{2}\end{cases} \longleftrightarrow F(w)=\frac{T}{2}Sa^2(\frac{wT}{4})$$

$\Rightarrow f(t)\leftrightarrow F(w)$ $\quad F(t)\leftrightarrow 2\pi f(w)$

$$\cdot\ \frac{T}{2}Sa^2(\frac{\tau\cdot T}{4}) \longleftrightarrow \begin{cases}0 & |w|>\frac{T}{2}\\ 2\pi-\frac{2\pi\cdot 2|w|}{T} & |w|<\frac{T}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 代入参数.

(2)

$$S_{X\hat{X}}(\omega) \Longleftrightarrow R_{X\hat{X}}(\tau)$$

$\because R_{X\hat{X}}(\tau) = -\hat{R}_X(\tau)$

$\therefore S_{X\hat{X}}(\omega) = j S_X(\omega)\cdot \mathrm{sgn}(\omega)$

又 $\because S_X(\omega) = S_c(\omega) * [\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]\cdot \pi \cdot \frac{1}{2\pi}$

$= \frac{1}{2}[S_c(\omega-\omega_0) + S_c(\omega+\omega_0)]$

$\therefore S_{X\hat{X}}(\omega) = \frac{j}{2}\cdot[S_c(\omega-\omega_0) - S_c(\omega+\omega_0)]$

!! $f_1(t) \otimes f_2(t) \Leftrightarrow F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$

$f_1(t)\cdot f_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\cdot F_1(\omega)\otimes F_2(\omega)$

(3) $\because S_{\tilde{X}}(\omega) = 4S_X(\omega)\cdot U(\omega) = 2S_c(\omega-\omega_0) = \cdots$

关于第五章，说明一个易混淆点

高斯随机变量 vs 高斯随机矢量 vs 高斯随机过程

(高斯分布) (联合f_X为高斯分布) (任意有限维分布为高斯分布)

高斯分布统计特性由前两阶矩决定。

$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right\}$ ‥ $P_X(X) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-a)^T C^{-1}(X-a)\right\}$

$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow$ 前二阶矩

广义平稳 $\Leftrightarrow$ 严格平稳。 — — 广义平稳 $\Leftrightarrow$ 前两阶矩与时间无关 $\Leftrightarrow$ N维分布与时间无关

严格平稳 $\Leftrightarrow$ N维分布与时间无关

$\therefore$ 应该有个认识，研究高斯问题 一、二阶矩可以代表其全部信息，

(如 提取特征、充分统计量时。

但一旦研究问题不局限于高斯，

那就只可以用概率密度函数 (全)

各阶矩 (部分)

教案:

(高斯随机过程.)

5.8. 设 $Z(t) = X\cos 2\pi t + Y\cdot\sin 2\pi t$，其中 X 和 Y 是统计独立的零均值高斯随机变量，其方差为 σ^2.

为什么 Z 为高斯分布？

→高斯矢量

线性变换

→仍为高斯矢量

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$P_{z_1} = \int_{-\infty}^{\infty} P(z_1, z_2)\, dz_2$. 为高斯.

(1) 求 $P_z(z)$

∵ Z 为高斯分布，求其前两阶矩.

$$m_z = E[z] = E[X]\cdot\cos 2\pi t + E[Y]\cdot\sin 2\pi t = 0$$

$$\sigma_z^2 = E[z^2] - E[z]^2 = E[X^2]\cdot\cos^2 2\pi t + 2E[XY]\cdot\cos 2\pi t\cdot\sin 2\pi t + E[Y^2]\cdot\sin^2 2\pi t$$

$$= \sigma^2$$

前两阶

$$\therefore P_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\exp\left\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right\}$$

高斯随机变量 $f(z)$ 仅与前两阶矩有关

(2) $R = \sqrt{X^2+Y^2}$，求 $P_R(r)$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} r \\ \phi \end{bmatrix}$$ 雅各比矩阵法 雅各比矩阵法.

$$F_R(r) = \iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le r} P(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le r} \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right\} dx\,dy$$

$$\because \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \arctan\frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r\cdot\cos\phi \\ y = r\cdot\sin\phi \end{cases} \Rightarrow |J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & r\cdot\sin\phi \\ \sin\phi & -r\cdot\cos\phi \end{vmatrix} = r$$

$$\therefore F_R(r) = \int_0^{2\pi}\int_0^r r\cdot\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\} dr\,d\phi$$

$$= \int_0^r r\cdot\frac{1}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\} dr$$

$$\therefore P_R(r) = \begin{cases} r\cdot\frac{1}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\} & r \ge 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

瑞利分布. 与之前结论一致. 两个相互独立的高斯随机变量的平方和开方为瑞利分布

(3) $t=0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ 时.

$z_1 = X$

$z_2 = Y$

$z_3 = -X$

∵ z_2与z_1相互独立，

z_3是z_1的线性函数.

故

$$p(z_1 z_2 z_3) = p(z_1 z_3) \cdot p(z_2 | z_1 z_3)$$

$$= p(z_1) \cdot p(z_1 | z_3) \cdot p(z_2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{z_1^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \delta(z_1 + z_3) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{z_2^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \delta(z_1 + z_3)$$

联合高斯??

这里并不是，如何判定X，Y是否联合高斯呢?

⇓

其可写成

$$P_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |C|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (x - a)^T C^{-1} (x - a)\right\}$$

五、(20) 功率谱密度为1的零均值高斯白噪声 $N(t)$ 通过理想低通滤波

器 $h(t)$，输出为 $X(t)$，且有 $H(j\omega)=\begin{cases}1 & -1\le\omega\le1\\0 & 其他\end{cases}$

令 $Y(t)=X(t)-X(t-T)$，其中 $T>0$，求

(1) $R_X(\tau)$

(2) $S_{YN}(\omega)$

(3) $Y(t)$ 的一维、二维概率密度函数。

$\because S_Y(\omega)=S_N(\omega)\cdot|H_1(\omega)|^2=2|H(\omega)|^2(1-\cos\omega T):2\mathrm{rect}(\frac{\omega}{2})(1-\cos\omega T)$

$\therefore R_Y(\tau)=\frac{2}{\pi}\mathrm{sinc}(\tau)\otimes\left[1-\frac{1}{2}\delta(\tau+T)-\frac{1}{2}\delta(\tau-T)\right]$ 变换对的应用

$=\frac{1}{\pi}\left[2\mathrm{sinc}(\tau)-\mathrm{sinc}(\tau+T)-\mathrm{sinc}(\tau-T)\right]$

$\therefore m_Y=\sqrt{R_Y(\infty)}=0$

$\sigma_Y^2=R_Y(0)-R_Y(\infty)=\frac{2}{\pi}[1-\mathrm{sinc}(T)]$ 前两阶矩、

$\therefore$ $\cancel{均}$ $a=\begin{bmatrix}m_Y(t_1)\\m_Y(t_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{\pi}\begin{bmatrix}2-2\mathrm{sinc}(T) & 2\mathrm{sinc}(\tau)-\mathrm{sinc}(\tau+T)-\mathrm{sinc}(\tau-T)\\2\mathrm{sinc}(\tau)-\mathrm{sinc}(\tau+T)-\mathrm{sinc}(\tau-T) & 2-2\mathrm{sinc}(T)\end{bmatrix}$ 前两阶矩。

$\therefore$ 一维分布：$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}\right\}$

二维分布：$f_Y(y_1,y_2;\tau)=\frac{1}{2\pi|C|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y_1,y_2)C^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right\}$

教案、

第6章 泊松随机过程.

这一章主要的部分是三个概念,

· ① 泊松分布. $P\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$ $k=0,1,2\cdots$ P194

② 到达时间

$$f_{T_k}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} & t\geq 0\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$$ P197

· ③ 时间间隔.

$$f_{Z_K}(z)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda z} & z\geq 0\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$$ P199.

主要讲两个习题. 对于三个概念,主要讲两个习题。

① 某地区:孕妇难产数服从每月5个的泊松过程、

一般一个孩子,每一难产使婴儿死亡概率为0.25.

求:该地区一年中由于难产使婴儿死亡数的概率分布与平均值. 泊松分布与其数字特征.

解:

记t时间死于难产婴儿数为N(t). 易知其为泊松分布,且泊松强度为 $\lambda=5\times0.25=1.25$

即 $P\{N(t_0+t)-N(t_0)=k\}=\frac{(1.25t)^k}{k!}e^{-1.25t}$

取 $t=12$ 则

$P\{N(12)=k\}=\frac{15^k}{k!}e^{-15}$,平均值为 $E[N(t)]=15$.

② P200. 例6.3-1. 这道题同时讲了到达时间与时间间隔

(1) 求该装置寿命的概率密度函数.

$$\therefore f_{T_{100}}(t) = \begin{cases} \dfrac{5e^{-5t}\cdot(5t)^{99}}{99!} & t>0 \\ 0 & t\leq 0 \end{cases}$$

到达时间（第k个出现的时间）

$$f_{T_k}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} & t\geq 0 \\ 0 & t>0 \end{cases}$$

(2) 对于泊松过程 $E[N(t)] = \lambda t$

$$\therefore 5t = 100 \Rightarrow t = 20\ h$$

(3)

$$f_{T_n} = \begin{cases} 5e^{-5t} & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

每两个次之间的时间间隔的分布

$$f_{z_k}(z) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda z} & z\geq 0 \\ 0 & 其他 \end{cases} \quad k=1,2,3\cdots$$

(4) $\cancel{E[z_k] = \int_{-\infty}^{\infty} z_k \cdot f_{z_k}\, dz}$

$$E[T_n] = \int_0^{\infty} t\, 5e^{-5t}\, dt.$$

第7章、马尔可夫也是考试范围、但是没有时间~~复~~习题课了、大家课后自行准备一下。

（以去年为参考，~~转移~~转移的概率矩阵、求稳态分布）

十 简答题、（以去年为参考）

① 平稳随机过程相关系数、相关时间的定义及相互关系；

② 随机过程独立、不相关和正交的定义及相互关系；

③ 两个随机过程联合平稳的定义及其判定；