随 机 过 程 理 论

任课教师：李春升

201教研室

目录

随机过程基本概念

线性变换

-微分、积分

-通过性线系统

窄带随机过程式

-希尔伯特变换

-复形化

高斯随机过程

泊松随机过程式

-泊松计数过程

-到达时间、更新计数过程

马尔可夫过程式

-马尔可夫链定义

-切普曼-柯尔莫洛夫方程

-平稳分布

一、随机过程的基本概念

1、随机过程的数字特征

✓ 均值 $$m(t)=E[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,t)dx$$

✓ 方差 $$\sigma^2(t)=D[X(t)]=E\{[X(t)-m(t)]^2\}$$

✓ 均方值 $$\psi_X{}^2(t)=E[X^2(t)]$$

✓ 均方差 $$\sigma(t)$$

一、随机过程的基本概念

1、随机过程的数字特征

✓ 相关函数

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2 f(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

✓ 互相关函数

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y;t_1,t_2)dxdy$$

✓ 协方差函数

$$C_X(t_1,t_2)=E\left\{\left[X(t_1)-m_X(t_1)\right]\left[X(t_2)-m_X(t_2)\right]\right\}$$
$$=R_X(t_1,t_2)-m_x(t_1)m_x(t_2)$$

✓ 互协方差函数

$$C_{XY}(t_1,t_2)=E\left\{\left[X(t_1)-m_X(t_1)\right]\left[Y(t_2)-m_Y(t_2)\right]\right\}$$
$$=R_{XY}(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_Y(t_2)$$

2、谱密度与相关函数的关系

✓ 谱密度与自相关函数

$$\begin{cases} S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\ R(\tau)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega \end{cases}$$

由维纳---辛钦定理得：

$$\begin{cases} S(\omega)=2\int_{0}^{\infty} R(\tau)\cos\omega\tau d\tau \\ R(\tau)=\dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} S(\omega)\cos\omega\tau d\omega \end{cases}$$

一、随机过程的基本概念

3、严格平稳过程(狭义平稳过程)

✓ 定义

设$\{X(t),t\in T\}$为一随机过程，若对任意正整数 n，任意的实数$t_1,t_2,\cdots,t_n$与τ ,随机变量 $X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)$的 n 维分布函数与 $X(t_1+\tau),X(t_2+\tau),\cdots,X(t_n+\tau)$的 n 维分布函数相同，即

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots t_n)=F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots t_n+\tau)$$

$$n=1,2,\cdots$$

则称 $X(t)$ 为严格平稳随机过程。

严格平稳条件等价于

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots t_n)=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots t_n+\tau)$$

4、广义平稳过程

➢ 定义

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程, $E[X^2(t)] < \infty$ (功率有限),且

◆1

$$E[X(t)] = m_X = \text{常数}$$

◆2

$$R(t_1, t_2) = E[X(t)X(t-\tau)] = R(\tau) \qquad \tau = t_1 - t_2$$

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为广义平稳随机过程。

□用高阶矩来判断广义平稳随机过程是否是狭义平稳随机过程

□二者没有关系, 但如果狭义平稳随机过程且功率有限, 则必为广义平稳的

5、各态历经性

✓ 均值各态历经

$$\overline{X(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt$$

✓ 自相关函数各态历经

$$\overline{X(t+\tau)X(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+\tau)x(t)dt$$

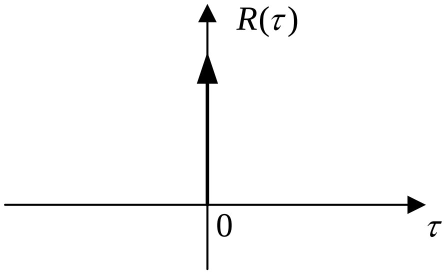
✓ 各态历经性-----同时满足以上两条!

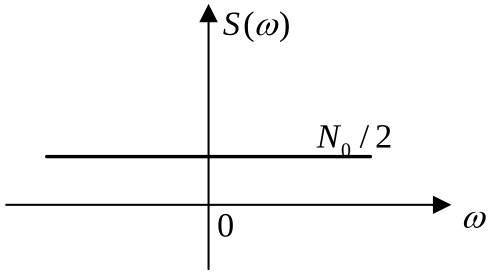
平稳随机过程均值各态历经的充要条件

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})[R_X(\tau)-m_X^2]d\tau = 0$$

6、白噪声

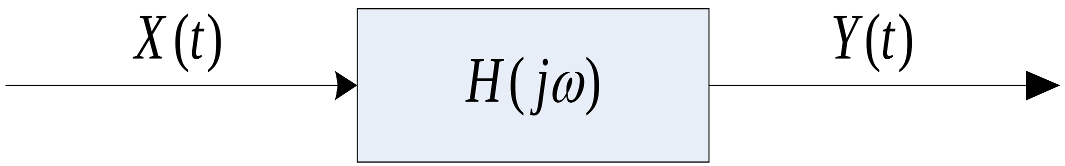
$$S(\omega) = N_0 / 2 \qquad \omega \in (-\infty, +\infty)$$





$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{N_0}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\delta(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

二、随机过程的线性变换



$$
\left.\begin{aligned}
&R_{YX}(\tau)=R_X(\tau)*h(\tau)\\
&R_{XY}(\tau)=R_X(\tau)*h(-\tau)\\
&R_Y(\tau)=R_X(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)
\end{aligned}\right\}
\Rightarrow
\left\{\begin{aligned}
&S_{YX}(\omega)=S_X(\omega)\cdot H(j\omega)\\
&S_{XY}(\omega)=S_X(\omega)\cdot H^*(j\omega)\\
&S_Y(\omega)=S_X(\omega)\cdot H(j\omega)\cdot H^*(j\omega)\\
&\qquad\quad=S_X(\omega)\cdot\left|H(j\omega)\right|^2
\end{aligned}\right.
$$

1、希尔伯特变换

$$\hat{x}(t) = H[x(t)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(t-\tau)}{\tau}d\tau$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(t+\tau)}{\tau}d\tau$$

$$H[a(t)\cos\omega_c t] = a(t)\sin\omega_c t$$

$$H[a(t)\sin\omega_c t] = -a(t)\cos\omega_c t$$

2、复随机过程

详 细 推 导

- $R_{\hat{X}X}(\tau)$ 和 $R_{X\hat{X}}(\tau)$

$$R_{\hat{X}X}(\tau)=R_X(\tau)*\frac{1}{\pi t}=\hat{R}_X(\tau)$$

$$R_{X\hat{X}}(\tau)=R_X(\tau)*\frac{-1}{\pi t}=-\hat{R}_X(\tau)$$

$\because R_{X\hat{X}}(0)=-\hat{R}_X(0)$，$R_{\hat{X}X}(0)=\hat{R}_X(0)$

$$\therefore \hat{R}_X(0)=-\hat{R}_X(0)=0$$

2、复随机过程

- $R_{\tilde{X}}(\tau)$

$$R_{\tilde{X}}(\tau) = 2\left[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau) \right]$$

因为$R_X(\tau)$ 偶函数，$\hat{R}_X(\tau)$ 为奇函数，故有

$$R_{\tilde{X}}(-\tau) = 2[R_X(\tau) - j\hat{R}_X(\tau)] = R_{\tilde{X}}^{*}(\tau)$$

2、复随机过程

- $\tilde{X}(t)$ 的功率谱密度 $S_{\tilde{X}}(\omega)$

$$S_{\hat{X}}(\omega) = -jS_X(\omega)sgn(\omega)$$

$$S_{\tilde{X}}(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega < 0 \\ 2S_X(\omega) & \omega = 0 \\ 4S_X(\omega) & \omega > 0 \end{cases}$$

$$\therefore S_{\tilde{X}}(\omega) = 4S_X(\omega)U(\omega)$$

3、窄带平稳随机过程

$$X(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\phi(t)]$$
$$=X_c(t)\cos\omega_0 t-X_s(t)\sin\omega_0 t$$

$$X(t)=X_c(t)\cos\omega_0 t-X_s(t)\sin\omega_0 t$$
$$\hat{X}(t)=X_c(t)\sin\omega_0 t+X_s(t)\cos\omega_0 t$$

$$\Downarrow$$

$$X_c(t)=X(t)\cos\omega_0 t+\hat{X}(t)\sin\omega_0 t$$
$$X_s(t)=\hat{X}(t)\cos\omega_0 t-X(t)\sin\omega_0 t$$

3、窄带平稳随机过程

相关函数

详 细 推 导

$$R_{X_s}(\tau) = R_X(\tau)\cos\omega_0\tau + \hat{R}_X(\tau)\sin\omega_0\tau = R_{X_c}(\tau)$$

$$R_{X_cX_s}(\tau) = R_X(\tau)\sin\omega_0\tau - \hat{R}_X(\tau)\cos\omega_0\tau$$

$$R_{X_sX_c}(\tau) = -R_X(\tau)\sin\omega_0\tau + \hat{R}_X(\tau)\cos\omega_0\tau = -R_{X_cX_s}(\tau)$$

$$R_X(\tau) = R_{X_c}(\tau)\cos\omega_0\tau + R_{X_cX_s}(\tau)\sin\omega_0\tau$$

3、窄带平稳随机过程

谱

$$S_{X_c}(\omega)=\begin{cases} S_X(\omega-\omega_0)+S_X(\omega+\omega_0) & |\omega|<\omega_0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$S_{X_cX_s}(\omega)=\begin{cases} -j[S_X(\omega-\omega_0)-S_X(\omega+\omega_0)] & |\omega|<\omega_0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

四、高斯随机过程

1、高斯分布的概率密度函数

$$X \sim N(a,\sigma^2) \qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\}$$

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2-2r\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left|\mathbf{C}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a})\right\}$$

2、高斯随机过程

见例题

$$X(t) = X_1(t)\cos\omega_0 t - X_2(t)\sin\omega_0 t$$

3、窄带平稳高斯过程

$$X(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

$$= X_c(t)\cos\omega_0 t - X_s(t)\sin\omega_0 t$$

式中： $X_c(t) = A(t)\cos\varphi(t)$ ， $X_s(t) = A(t)\sin\varphi(t)$

$$A(t) = \sqrt{X_c^{\,2}(t) + X_s^{\,2}(t)}\ ,\quad \varphi(t) = \tan^{-1}\frac{X_s(t)}{X_c(t)}$$

五、泊松随机过程

1、定义及性质

$$P\{N(t_0+t)-N(t_0)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

$$E\left[N(t_0+t,t_0)\right]=E[N(t)]=\lambda t$$

$$E\left[N^2(t_0+t,t_0)\right]=E[N^2(t)]=\lambda t+(\lambda t)^2$$

$$D\left[t_0+t,t_0\right]=D[N(t)]=\lambda t$$

$$R_N(t_1,t_2)=\lambda^2 t_1 t_2+\lambda\min(t_1,t_2)$$

2、复合泊松过程

$$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}Y_n \quad t\geq 0$$

六、马尔可夫过程

1、一步转移概率矩阵

$$p_{ij}(m) = P\{X_{m+1} = j \mid X_m = i\} \qquad i, j \in S$$

2、切普曼-柯尔莫柯洛夫方程

$$\mathbf{P}^{(m+r)} = \mathbf{P}^{(m)}\mathbf{P}^{(r)} \qquad \mathbf{P}^{(m)} = \left(p_{\mathrm{ij}}{}^{(\mathrm{m})}, \mathrm{i}, \mathrm{j} \in \mathrm{S} \right)$$

3、平稳分布

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}$$

结束语

预祝大家考试顺利！

愉快！

谨贺新年

orchids