第一章 矩阵

矩阵的概念： A_{m*n} （零矩阵、负矩阵、行矩阵、列矩阵、n 阶方阵、相等矩阵)

矩阵的运算： 加法（同型矩阵）---------交换、结合律

数乘 $kA=(ka_{ij})_{m*n}$ ---------分配、结合律

乘法 $A*B=(a_{ik})_{m*l}*(b_{kj})_{l*n}=(\sum_{1}^{l}a_{ik}b_{kj})_{m*n}$

（一般 AB=BA，不满足消去律；由 AB=0，不能得 A=0 或 B=0）

转置：$(A^T)^T=A$ $(A+B)^T=A^T+B^T$

$(kA)^T=kA^T$ $(AB)^T=B^TA^T$

方幂：$A^{k_1}A^{k_2}=A^{k_1+k_2}$ $(A^{k_1})^{k_2}=A^{k_1+k_2}$

逆矩阵：设 A 是 N 阶方阵，若存在 N 阶矩阵 B 的 AB=BA=I 则称 A 是可逆的，且 $A^{-1}=B$

矩阵的逆矩阵满足的运算律：

1、可逆矩阵 A 的逆矩阵也是可逆的，且 $(A^{-1})^{-1}=A$

2、可逆矩阵 A 的数乘矩阵 kA 也是可逆的，且 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$

3、可逆矩阵 A 的转置 A^T 也是可逆的，且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

4、两个可逆矩阵 A 与 B 的乘积 AB 也是可逆的，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，但是两个可逆矩阵 A 与 B 的和 A+B 不一定可逆，即使可逆，但 $(A+B)\neq A^{-1}+B^{-1}$。A 为 N 阶方阵，若|A|=0，则称 A 为**奇异矩阵**，否则为**非奇异矩阵**。

5、若 A 可逆，则 $\left|A^{-1}\right|=\left|A\right|^{-1}$

逆矩阵注： ①AB=BA=I 则 A 与 B 一定是方阵 ②BA=AB=I 则 A 与 B 一定互逆；

③不是所有的方阵都存在逆矩阵；④若 A 可逆，则其逆矩阵是唯一的。

分块矩阵： 加法，数乘，乘法都类似普通矩阵

转置：每块转置并且每个子块也要转置

注：**把分出来的小块矩阵看成是元素**

初等变换：

1、交换两行（列）

2.、非零 k 乘某一行（列）

3、将某行（列）的 K 倍加到另一行（列）

初等变换不改变矩阵的可逆性，初等矩阵都可逆

初等矩阵：单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵

等价标准形矩阵 $D_r = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

第二章 行列式

N 阶行列式的值：行列式中所有不同行、不同列的 n 个元素的乘积的和

$$\left|a_{ij}\right|_n = \sum_{j_1 j_2 j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 .. j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \ldots a_{n j_n}$$

行列式的性质：①行列式行列互换，其值不变。（转置行列式 $D = D^T$ ）

②行列式中某两行（列）互换，行列式变号。

推论：若行列式中某两行（列）对应元素相等，则行列式等于零。

③常数 k 乘以行列式的某一行（列），等于 k 乘以此行列式。

推论：若行列式中两行（列）成比例，则行列式值为零；

推论：行列式中某一行（列）元素全为零，行列式为零。

④行列式具有分行（列）可加性

⑤将行列式某一行（列）的 k 倍加到另一行（列）上，值不变

行列式依行（列）展开：余子式 M_{ij}、代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

定理：行列式中某一行的元素与另一行元素对应余子式乘积之和为零。

克莱姆法则：

非齐次线性方程组 ：当系数行列式 $D \neq 0$ 时，有唯一解：$x_j = \dfrac{D_j}{D} (j = 1、2 \ldots\ldots n)$

齐次线性方程组 ：当系数行列式 $D = 1 \neq 0$ 时，则只有零解

（逆否命题：若方程组存在非零解，则 D 等于零）

特殊行列式：

①转置行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$

②对称行列式: $a_{ij} = a_{ji}$

③反对称行列式: $a_{ij} = -a_{ji}$ 奇数阶的反对称行列式值为零

④三阶线性行列式: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$

解法：用 $k_1 a_{22}$ 把 a_{21} 化为零，。。化为三角形行列式

⑤上（下）三角形行列式

第三章 矩阵的秩与线性方程组

矩阵的秩 r(A)：

若 A 可逆，则满秩
若 A 是非奇异矩阵，则 r（AB）=r（B）
初等变换不改变矩阵的秩

求法：1.定义；2.转化为标准式或阶梯形

伴随矩阵：A 为 N 阶方阵，伴随矩阵：$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

特殊矩阵的逆矩阵：

1、分块矩阵 $D = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ 则 $D^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$

2、准对角矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & A_4 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & A_3^{-1} & \\ & & & A_4^{-1} \end{pmatrix}$

3、 $AA^* = A^*A = |A|I$

4、$A^* = |A|A^{-1}$（A 可逆）

5、$|A^*| = |A|^{n-1}$

6、$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$（A 可逆）

7、$(A^*)^T = (A^T)^*$

8、$\underline{(AB)^* = B^*A^*}$

判断矩阵是否可逆：充要条件是 $|A| \neq 0$，此时 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

求逆矩阵的方法：

定义法 $AA^{-1} = I$

伴随矩阵法 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$

初等变换法$\left(A|I_n\right)=\left(I_n|A^{-1}\right)$,**只能是行变换。**

初等矩阵与矩阵乘法的关系：

设$A=\left(a_{ij}\right)_{m*n}$是 m*n 阶矩阵，则对 A 的行实行一次初等变换得到的矩阵，等于用同等的 m 阶初等矩阵左乘以 A：对 A 的列实行一次初等变换得到的矩阵，等于用同种 n 阶初等矩阵右乘以 A （**行变左乘，列变右乘**）

线性方程组解的判定：

非齐次线性方程组：

增广矩阵→简化阶梯型矩阵

r(AB)=r(B)=r 当 r=n 时，有唯一解；当$r\neq n$时，有无穷多解

r(AB)$\neq$r(B)，无解

齐次线性方程组：

仅有零解充要 r(A)=n 有非零解充要 r(A)<n

当齐次线性方程组方程个数<未知量个数，一定有非零解

当齐次线性方程组方程个数=未知量个数，有非零解充要|A|=0

齐次线性方程组若有零解，一定是无穷多个

N 维向量：由 n 个实数组成的 n 元有序数组。希腊字母表示（加法数乘）

特殊的向量：行（列）向量，零向量 θ，负向量，相等向量，转置向量

向量间的线性关系: 线性组合或线性表示

向量组的秩：

定理：如果$\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},.....\alpha_{j_r}$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,.....\alpha_s$的线性无关的部分组，则它是极大无关组的充要条件是：$\alpha_1,\alpha_2,.....\alpha_s$中的每一个向量都可由$\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},.....\alpha_{j_r}$线性表出。

秩:极大无关组中所含的向量个数。

定理：设 A 为 m*n 矩阵，则$r(A)=r$的充要条件是：A 的列（行）秩为 r。

线性组合或线性表示注：两个向量 α，β，若$\alpha=k\beta$则 α 是 β 的线性组合

任意向量都是单位向量组的线性组合

零向量是任意向量组的线性组合

任意向量组中的一个都是他本身的线性组合

向量组间的线性相关注：

1. n 个 n 维**单位向量组**一定是线性无关
2. 一个非零向量是线性无关，零向量是线性相关
3. 含有零向量的向量组一定是线性相关
4. 若两个向量成比例，则他们一定线性相关

向量 β 可由$\alpha_1,\alpha_2,..\alpha_n$线性表示的充要条件是$r(\alpha_1{}^T\alpha_2{}^T...\alpha_n{}^T)=r(\alpha_1{}^T\alpha_2{}^T...\alpha_n{}^T\beta^T)$

判断向量组是否线性相关的方法：

1、定义法：设 $k_1k_2....k_n$，求 $k_1k_2....k_n$

2、向量间关系法：部分相关则整体相关，整体无关则部分无关

3、分量法（n 个 m 维向量组）：

4、线性相关（充要）$\Rightarrow r(\alpha_1{}^T\alpha_2{}^T....\alpha_n{}^T) < n$

线性无关（充要）$\Rightarrow r(\alpha_1{}^T\alpha_2{}^T....\alpha_n{}^T) = n$

推论①当 m=n 时，相关，则 $\left|\alpha_1{}^T\alpha_2{}^T\alpha_3{}^T\right| = 0$；无关，则 $\left|\alpha_1{}^T\alpha_2{}^T\alpha_3{}^T\right| \neq 0$

②当 m<n 时，线性相关

推广：若向量 $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_s$ 组线性无关，则当 s 为奇数时，向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,...\alpha_s+\alpha_1$ 也线性无关；当 s 为偶数时，向量组也线性相关。

定理：如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_s,\beta$ 线性相关，则向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_s$ 线性表出，且表示法唯一的充分必要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_s$ 线性无关。

极大无关组注：向量组的极大无关组不是唯一的，但他们所含向量的个数是确定的；
不全为零的向量组的极大无关组一定存在；
无关的向量组的极大无关组是其本身；
向量组与其极大无关组是等价的。

第四章 向量空间

向量的内积

定义：（α，β）$=\alpha\beta^T = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$

性质：非负性、对称性、线性性

(α,kβ)=k(α,β);

(kα,kβ)= k^2 (α,β);

(α+β, $\gamma+\delta$)=(α, γ)+(α, δ)+(β, γ)+(β, δ);

$$(\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i, \sum_{j=1}^{s} l_j \ \beta_j) = \sum_{i=1}^{r} k_i \sum_{j=1}^{s} l_j(\alpha_i,\beta_j) \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta \in R^n,$$

向量的长度：$|\alpha| = \sqrt{(\alpha,\alpha)}$

$|\alpha| = 0$ 的充要条件是 α=0；α 是单位向量的充要条件是（α，α）=1

正交向量：α，β 是正交向量的充要条件是（α，β）=0

正交的向量组必定线性无关

正交矩阵： n 阶矩阵 A $AA^T=A^TA=I$

性质： 1、若 A 为正交矩阵，则 A 可逆，且 $A^{-1}=A^T$，且 A^{-1} 也是正交矩阵；

2、若 A 为正交矩阵，则 $|A|=\pm1$；

3、若 A、B 为同阶正交矩阵，则 A B 也是正交矩阵；

4、n 阶矩阵 A＝（a_{ij}）是正交矩阵的充要条件是 A 的列（行）向量组是标准正交向量；

线性方程组解的结构： 齐次非齐次、基础解系

齐次线性方程组（I）解的结构： 解为 $\alpha_1,\alpha_2\ldots$

（I）的两个解的和 $\alpha_1+\alpha_2$ 仍是它的解；

（I）解的任意倍数 $k\alpha$ 还是它的解；

（I）解的线性组合 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\ldots.+c_s\alpha_s$ 也是它的解，$c_1,c_2,\ldots c_s$ 是任意常数。

非齐次线性方程组（II）解的结构： 解为 $\mu_1,\mu_2\ldots$

（II）的两个解的差 $\mu_1-\mu_2$ 仍是它的解；

若 μ 是非齐次线性方程组 AX=B 的一个解，v 是其导出组 AX=O 的一个解，则 u+v 是（II）的一个解。

定理：

如果齐次线性方程组的系数矩阵 A 的秩 $r(A)=r<n$，则该方程组的基础解系存在，且在每个基础解系中，恰含有 n-r 个解。

若 μ 是非齐次线性方程组 AX=B 的一个解，v 是其导出组 AX=O 的全部解，则 u+v 是（II）的全部解。