一章习题解答

1.1 给定三个矢量 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 如下：

$$\mathbf{A}=\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y2-\mathbf{e}_z3$$

$$\mathbf{B}=-\mathbf{e}_y4+\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{C}=\mathbf{e}_x5-\mathbf{e}_z2$$

求：（1）$\mathbf{a}_A$；（2）$|\mathbf{A}-\mathbf{B}|$；（3）$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$；（4）$\theta_{AB}$；（5）$\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{B}$ 上的分量；（6）$\mathbf{A}\times\mathbf{C}$；（7）$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ 和 $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$；（8）$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$。

解 （1）$\mathbf{a}_A=\dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}=\dfrac{\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y2-\mathbf{e}_z3}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}=\mathbf{e}_x\dfrac{1}{\sqrt{14}}+\mathbf{e}_y\dfrac{2}{\sqrt{14}}-\mathbf{e}_z\dfrac{3}{\sqrt{14}}$

（2）$|\mathbf{A}-\mathbf{B}|=|(\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y2-\mathbf{e}_z3)-(-\mathbf{e}_y4+\mathbf{e}_z)|=|\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y6-\mathbf{e}_z4|=\sqrt{53}$

（3）$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y2-\mathbf{e}_z3)\cdot(-\mathbf{e}_y4+\mathbf{e}_z)=-11$

（4）由 $\cos\theta_{AB}=\dfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}=\dfrac{-11}{\sqrt{14}\times\sqrt{17}}=-\dfrac{11}{\sqrt{238}}$，得 $\theta_{AB}=\cos^{-1}(-\dfrac{11}{\sqrt{238}})=135.5^\circ$

（5）$\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{B}$ 上的分量 $A_B=|\mathbf{A}|\cos\theta_{AB}=\dfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}=-\dfrac{11}{\sqrt{17}}$

（6）$\mathbf{A}\times\mathbf{C}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=-\mathbf{e}_x4-\mathbf{e}_y13-\mathbf{e}_z10$

（7）由于 $\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ 0 & -4 & 1\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=\mathbf{e}_x8+\mathbf{e}_y5+\mathbf{e}_z20$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 0 & -4 & 1\end{vmatrix}=-\mathbf{e}_x10-\mathbf{e}_y1-\mathbf{e}_z4$$

所以

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y2-\mathbf{e}_z3)\cdot(\mathbf{e}_x8+\mathbf{e}_y5+\mathbf{e}_z20)=-42$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=(-\mathbf{e}_x10-\mathbf{e}_y1-\mathbf{e}_z4)\cdot(\mathbf{e}_x5-\mathbf{e}_z2)=-42$$

（8）$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ -10 & -1 & -4\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=\mathbf{e}_x2-\mathbf{e}_y40+\mathbf{e}_z5$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 8 & 5 & 20\end{vmatrix}=\mathbf{e}_x55-\mathbf{e}_y44-\mathbf{e}_z11$$

1.2 三角形的三个顶点为 $P_1(0,1,-2)$、$P_2(4,1,-3)$和 $P_3(6,2,5)$。

（1）判断 $\Delta P_1P_2P_3$ 是否为一直角三角形；

（2）求三角形的面积。

解 （1）三个顶点 $P_1(0,1,-2)$、$P_2(4,1,-3)$和 $P_3(6,2,5)$ 的位置矢量分别为

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z 2，\quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_x 4 + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z 3，\quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{e}_x 6 + \mathbf{e}_y 2 + \mathbf{e}_z 5$$

则

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_x 4 - \mathbf{e}_z，\qquad \mathbf{R}_{23} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_x 2 + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z 8，$$

$$\mathbf{R}_{31} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 = -\mathbf{e}_x 6 - \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z 7$$

由此可见

$$\mathbf{R}_{12}\cdot\mathbf{R}_{23} = (\mathbf{e}_x 4 - \mathbf{e}_z)\cdot(\mathbf{e}_x 2 + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z 8) = 0$$

故 $\Delta P_1P_2P_3$ 为一直角三角形。

（2）三角形的面积 $S = \frac{1}{2}|\mathbf{R}_{12}\times\mathbf{R}_{23}| = \frac{1}{2}|\mathbf{R}_{12}|\times|\mathbf{R}_{23}| = \frac{1}{2}\sqrt{17}\times\sqrt{69} = 17.13$

1.3 求 $P'(-3,1,4)$ 点到 $P(2,-2,3)$ 点的距离矢量 $\mathbf{R}$ 及 $\mathbf{R}$ 的方向。

解 $\mathbf{r}_{P'} = -\mathbf{e}_x 3 + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z 4$，$\mathbf{r}_P = \mathbf{e}_x 2 - \mathbf{e}_y 2 + \mathbf{e}_z 3$，

则

$$\mathbf{R}_{P'P} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_{P'} = \mathbf{e}_x 5 - \mathbf{e}_y 3 - \mathbf{e}_z$$

且 $\mathbf{R}_{P'P}$ 与 x、y、z 轴的夹角分别为

$$\phi_x = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{R}_{P'P}}{|\mathbf{R}_{P'P}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{35}}\right) = 32.31^\circ$$

$$\phi_y = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{R}_{P'P}}{|\mathbf{R}_{P'P}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{35}}\right) = 120.47^\circ$$

$$\phi_z = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{R}_{P'P}}{|\mathbf{R}_{P'P}|}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{35}}\right) = 99.73^\circ$$

1.4 给定两矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x 2 + \mathbf{e}_y 3 - \mathbf{e}_z 4$ 和 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_x 4 - \mathbf{e}_y 5 + \mathbf{e}_z 6$，求它们之间的夹角和 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{B}$ 上的分量。

解 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 之间的夹角为 $\theta_{AB} = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-31}{\sqrt{29}\times\sqrt{77}}\right) = 131^\circ$

$\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{B}$ 上的分量为 $A_B = \mathbf{A}\cdot\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{-31}{\sqrt{77}} = -3.532$

1.5 给定两矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x 2 + \mathbf{e}_y 3 - \mathbf{e}_z 4$ 和 $\mathbf{B} = -\mathbf{e}_x 6 - \mathbf{e}_y 4 + \mathbf{e}_z$，求 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 在 $\mathbf{C} = \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$ 上的分量。

解

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2 & 3 & -4 \\ -6 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_x 13 + \mathbf{e}_y 22 + \mathbf{e}_z 10$$

所以 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 在 $\mathbf{C}$ 上的分量为 $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_C = \frac{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}}{|\mathbf{C}|} = -\frac{25}{\sqrt{3}} = -14.43$

1.6 证明：如果 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times\mathbf{C}$，则 $\mathbf{B} = \mathbf{C}$；

解　由 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\times\mathbf{C}$，则有 $\mathbf{A}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{A}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{C})$，即

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})\mathbf{C}$$

由于 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$，于是得到　$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})\mathbf{C}$

故

$$\mathbf{B}=\mathbf{C}$$

1.7　如果给定一未知矢量与一已知矢量的标量积和矢量积，那么便可以确定该未知矢量。设 $\mathbf{A}$ 为一已知矢量，$p=\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}$ 而 $\mathbf{P}=\mathbf{A}\times\mathbf{X}$，$p$ 和 $\mathbf{P}$ 已知，试求 $\mathbf{X}$。

解　由 $\mathbf{P}=\mathbf{A}\times\mathbf{X}$，有

$$\mathbf{A}\times\mathbf{P}=\mathbf{A}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{X})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{X})\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})\mathbf{X}=p\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})\mathbf{X}$$

故得

$$\mathbf{X}=\frac{p\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\mathbf{P}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}$$

1.8　在圆柱坐标中，一点的位置由 $(4,\frac{2\pi}{3},3)$ 定出，求该点在：（1）直角坐标中的坐标；（2）球坐标中的坐标。

解　（1）在直角坐标系中　$x=4\cos(2\pi/3)=-2$、$y=4\sin(2\pi/3)=2\sqrt{3}$、$z=3$

故该点的直角坐标为 $(-2,2\sqrt{3},3)$。

（2）在球坐标系中　$r=\sqrt{4^2+3^2}=5$、$\theta=\tan^{-1}(4/3)=53.1^\circ$、$\phi=2\pi/3=120^\circ$

故该点的球坐标为 $(5,53.1^\circ,120^\circ)$

1.9　用球坐标表示的场 $\mathbf{E}=\mathbf{e}_r\frac{25}{r^2}$，

（1）求在直角坐标中点 $(-3,4,-5)$ 处的 $|\mathbf{E}|$ 和 E_x；

（2）求在直角坐标中点 $(-3,4,-5)$ 处 $\mathbf{E}$ 与矢量 $\mathbf{B}=\mathbf{e}_x2-\mathbf{e}_y2+\mathbf{e}_z$ 构成的夹角。

解　（1）在直角坐标中点 $(-3,4,-5)$ 处，$r^2=(-3)^2+4^2+(-5)^2=50$，故

$$|\mathbf{E}|=\left|\mathbf{e}_r\frac{25}{r^2}\right|=\frac{1}{2}$$

$$E_x=\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{E}=|\mathbf{E}|\cos\theta_{rx}=\frac{1}{2}\times\frac{-3}{5\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{20}$$

（2）在直角坐标中点 $(-3,4,-5)$ 处，$\mathbf{r}=-\mathbf{e}_x3+\mathbf{e}_y4-\mathbf{e}_z5$，所以

$$\mathbf{E}=\frac{25}{r^2}=\frac{25\mathbf{r}}{r^3}=\frac{-\mathbf{e}_x3+\mathbf{e}_y4-\mathbf{e}_z5}{10\sqrt{2}}$$

故 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{B}$ 构成的夹角为

$$\theta_{EB}=\cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{E}|\cdot|\mathbf{B}|}\right)=\cos^{-1}\left(-\frac{19/(10\sqrt{2})}{3/2}\right)=153.6^\circ$$

1.10　球坐标中两个点 (r_1,θ_1,ϕ_1) 和 (r_2,θ_2,ϕ_2) 定出两个位置矢量 $\mathbf{R}_1$ 和 $\mathbf{R}_2$。证明 $\mathbf{R}_1$ 和 $\mathbf{R}_2$ 间夹角的余弦为

$$\cos\gamma=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2)$$

解　由

$$\mathbf{R}_1=\mathbf{e}_xr_1\sin\theta_1\cos\phi_1+\mathbf{e}_yr_1\sin\theta_1\sin\phi_1+\mathbf{e}_zr_1\cos\theta_1$$

$$\mathbf{R}_2=\mathbf{e}_xr_2\sin\theta_2\cos\phi_2+\mathbf{e}_yr_2\sin\theta_2\sin\phi_2+\mathbf{e}_zr_2\cos\theta_2$$

得到 $$\cos\gamma=\frac{\mathbf{R}_1\cdot\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_1||\mathbf{R}_2|}=$$

$$\sin\theta_1\cos\phi_1\sin\theta_2\cos\phi_2+\sin\theta_1\sin\phi_1\sin\theta_2\sin\phi_2+\cos\theta_1\cos\theta_2=$$

$$\sin\theta_1\sin\theta_2(\cos\phi_1\cos\phi_2+\sin\phi_1\sin\phi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2=$$

$$\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2$$

1.11 一球面 S 的半径为 5，球心在原点上，计算：$\oint_S(\mathbf{e}_r 3\sin\theta)\cdot d\mathbf{S}$ 的值。

解 $$\oint_S(\mathbf{e}_r 3\sin\theta)\cdot d\mathbf{S}=\oint_S(\mathbf{e}_r 3\sin\theta)\cdot\mathbf{e}_r\,dS=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}3\sin\theta\times 5^2\sin\theta\,d\theta=75\pi^2$$

1.12 在由 $r=5$、$z=0$ 和 $z=4$ 围成的圆柱形区域，对矢量 $\mathbf{A}=\mathbf{e}_r r^2+\mathbf{e}_z 2z$ 验证散度定理。

解 在圆柱坐标系中 $$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rr^2)+\frac{\partial}{\partial z}(2z)=3r+2$$

所以 $$\int_\tau\nabla\cdot\mathbf{A}\,d\tau=\int_0^4 dz\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^5(3r+2)r\,dr=1200\pi$$

又 $$\oint_S\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\oint_S(\mathbf{e}_r r^2+\mathbf{e}_z 2z)\cdot(\mathbf{e}_r\,dS_r+\mathbf{e}_\phi\,dS_\phi+\mathbf{e}_z\,dS_z)=$$

$$\int_0^4\int_0^{2\pi}5^2\times 5\,d\phi\,dz+\int_0^5\int_0^{2\pi}2\times 4r\,dr\,d\phi=1200\pi$$

故有 $$\int_\tau\nabla\cdot\mathbf{A}\,d\tau=1200\pi=\oint_S\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

1.13 求（1）矢量 $\mathbf{A}=\mathbf{e}_x x^2+\mathbf{e}_y x^2y^2+\mathbf{e}_z 24x^2y^2z^3$ 的散度；（2）求 $\nabla\cdot\mathbf{A}$ 对中心在原点的一个单位立方体的积分；（3）求 $\mathbf{A}$ 对此立方体表面的积分，验证散度定理。

解 （1）$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\partial(x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(x^2y^2)}{\partial y}+\frac{\partial(24x^2y^2z^3)}{\partial z}=2x+2x^2y+72x^2y^2z^2$$

（2）$\nabla\cdot\mathbf{A}$ 对中心在原点的一个单位立方体的积分为

$$\int_\tau\nabla\cdot\mathbf{A}\,d\tau=\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}(2x+2x^2y+72x^2y^2z^2)\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{24}$$

（3）$\mathbf{A}$ 对此立方体表面的积分

$$\oint_S\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^2dy\,dz-\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2dy\,dz+$$

$$\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}2x^2\left(\frac{1}{2}\right)^2dx\,dz-\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}2x^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2dx\,dz+$$

$$\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}24x^2y^2\left(\frac{1}{2}\right)^3dx\,dy-\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}24x^2y^2\left(-\frac{1}{2}\right)^3dx\,dy=\frac{1}{24}$$

故有 $$\int_\tau \nabla\cdot\mathbf{A}\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{24}=\oint_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

1.14 计算矢量 $\mathbf{r}$ 对一个球心在原点、半径为 a 的球表面的积分，并求 $\nabla\cdot\mathbf{r}$ 对球体积的积分。

解 $$\oint_S \mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\oint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_r\,\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}aa^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=4\pi a^3$$

又在球坐标系中，$\nabla\cdot\mathbf{r}=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 r)=3$，所以

$$\int_\tau \nabla\cdot\mathbf{r}\,\mathrm{d}\tau=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}3r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=4\pi a^3$$

1.15 求矢量 $\mathbf{A}=\mathbf{e}_x x+\mathbf{e}_y x^2+\mathbf{e}_z y^2 z$ 沿 xy 平面上的一个边长为 2 的正方形回路的线积分，此正方形的两边分别与 x 轴和 y 轴相重合。再求 $\nabla\times\mathbf{A}$ 对此回路所包围的曲面积分，验证斯托克斯定理。

解 $$\oint_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=\int_0^2 x\,\mathrm{d}x-\int_0^2 x\,\mathrm{d}x+\int_0^2 2^2\,\mathrm{d}y-\int_0^2 0\,\mathrm{d}y=8$$

又 $$\nabla\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & x^2 & y^2 z\end{vmatrix}=\mathbf{e}_x 2yz+\mathbf{e}_z 2x$$

所以 $$\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\int_0^2\int_0^2(\mathbf{e}_x 2yz+\mathbf{e}_z 2x)\cdot\mathbf{e}_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=8$$

故有 $$\oint_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=8=\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

1.16 求矢量 $\mathbf{A}=\mathbf{e}_x x+\mathbf{e}_y xy^2$ 沿圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的线积分，再计算 $\nabla\times\mathbf{A}$ 对此圆面积的积分。

解 $$\oint_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=\oint_C x\,\mathrm{d}x+xy^2\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}(-a^2\cos\phi\sin\phi+a^4\cos^2\phi\sin^2\phi)\,\mathrm{d}\phi=\frac{\pi a^4}{4}$$

$$\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\int_S \mathbf{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cdot\mathbf{e}_z\,\mathrm{d}S=\int_S y^2\,\mathrm{d}S=\int_0^a\int_0^{2\pi}r^2\sin^2\phi\, r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r=\frac{\pi a^4}{4}$$

1.17 证明：（1）$\nabla\cdot\mathbf{R}=3$；（2）$\nabla\times\mathbf{R}=\mathbf{0}$；（3）$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})=\mathbf{A}$。其中 $\mathbf{R}=\mathbf{e}_x x+\mathbf{e}_y y+\mathbf{e}_z z$，$\mathbf{A}$ 为一常矢量。

解 （1）$$\nabla\cdot\mathbf{R}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$$

（2）
$$\nabla\times\mathbf{R}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & y\end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

（3）设 $\mathbf{A}=\mathbf{e}_x A_x+\mathbf{e}_y A_y+\mathbf{e}_z A_z$，则 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}=A_x x+A_y y+A_z z$，故

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})=\mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x}(A_x x+A_y y+A_z z)+\mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y}(A_x x+A_y y+A_z z)+$$
$$\mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}(A_x x+A_y y+A_z z)=\mathbf{e}_x A_x+\mathbf{e}_y A_y+\mathbf{e}_z A_z=\mathbf{A}$$

1.18 一径向矢量场 $\mathbf{F}=\mathbf{e}_r f(r)$ 表示，如果 $\nabla\cdot\mathbf{F}=0$，那么函数 $f(r)$ 会有什么特点呢？

解 在圆柱坐标系中，由
$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}[rf(r)]=0$$
可得到
$$f(r)=\frac{C}{r}\qquad C\text{ 为任意常数。}$$

在球坐标系中，由
$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}[r^2 f(r)]=0$$
可得到
$$f(r)=\frac{C}{r^2}$$

1.19 给定矢量函数 $\mathbf{E}=\mathbf{e}_x y+\mathbf{e}_y x$，试求从点 $P_1(2,1,-1)$ 到点 $P_2(8,2,-1)$ 的线积分 $\int\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$：（1）沿抛物线 $x=y^2$；（2）沿连接该两点的直线。这个 $\mathbf{E}$ 是保守场吗？

解 （1）
$$\int_C\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\int_C E_x\,dx+E_y\,dy=\int_C y\,dx+x\,dy=$$
$$\int_1^2 y\,d(2y^2)+2y^2\,dy=\int_1^2 6y^2\,dy=14$$

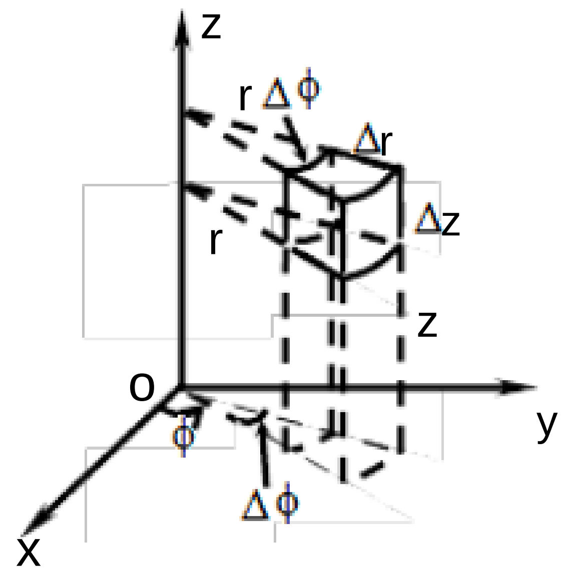
（2）连接点 $P_1(2,1,-1)$ 到点 $P_2(8,2,-1)$ 直线方程为
$$\frac{x-2}{y-1}=\frac{x-8}{y-2}\qquad\text{即}\qquad x-6y+4=0$$

故
$$\int_C\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\int_C E_x\,dx+E_y\,dy=\int_1^2 y\,d(6y-4)+(6y-4)\,dy=\int_1^2(12y-4)\,dy=14$$

由此可见积分与路径无关，故是保守场。

1.20 求标量函数 $\Psi=x^2yz$ 的梯度及 Ψ 在一个指定方向的方向导数，此方向由单位矢量 $\mathbf{e}_x\frac{3}{\sqrt{50}}+\mathbf{e}_y\frac{4}{\sqrt{50}}+\mathbf{e}_z\frac{5}{\sqrt{50}}$ 定出；求 $(2,3,1)$ 点的方向导数值。

解
$$\nabla\Psi=\mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x}(x^2yz)+\mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y}(x^2yz)+\mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}(x^2yz)=$$
$$\mathbf{e}_x 2xyz+\mathbf{e}_y x^2z+\mathbf{e}_z x^2y$$



题 1.21 图

故沿方向 $\mathbf{e}_l = \mathbf{e}_x \frac{3}{\sqrt{50}} + \mathbf{e}_y \frac{4}{\sqrt{50}} + \mathbf{e}_z \frac{5}{\sqrt{50}}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial \Psi}{\partial l} = \nabla \Psi \cdot \mathbf{e}_l = \frac{6xyz}{\sqrt{50}} + \frac{4x^2 z}{\sqrt{50}} + \frac{5x^2 y}{\sqrt{50}}$$

点 $(2,3,1)$ 处沿 $\mathbf{e}_l$ 的方向导数值为

$$\frac{\partial \Psi}{\partial l} = \frac{36}{\sqrt{50}} + \frac{16}{\sqrt{50}} + \frac{60}{\sqrt{50}} = \frac{112}{\sqrt{50}}$$

1.21 试采用与推导直角坐标中 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ 相似的方法推导圆柱坐标下的公式

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{\partial A_\phi}{r\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}。$$

解　在圆柱坐标中，取小体积元如题 1.21 图所示。矢量场 $\mathbf{A}$ 沿 $\mathbf{e}_r$ 方向穿出该六面体的表面的通量为

$$\Psi_r = \int_\phi^{\phi+\Delta\phi}\int_z^{z+\Delta z} A_r\big|_{r+\Delta r}(r+\Delta r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi - \int_\phi^{\phi+\Delta\phi}\int_z^{z+\Delta z} A_r\big|_r r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \approx$$

$$[(r+\Delta r)A_r(r+\Delta r,\phi,z) - rA_r(r,\phi,z)]\Delta\phi\Delta z \approx \frac{\partial(rA_r)}{\partial r}\Delta r\Delta\phi\Delta z = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r}\Delta\tau$$

同理

$$\Psi_\phi = \int_r^{r+\Delta r}\int_z^{z+\Delta z} A_\phi\big|_{\phi+\Delta\phi}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z - \int_r^{r+\Delta r}\int_z^{z+\Delta z} A_\phi\big|_\phi \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \approx$$

$$[A_\phi(r,\phi+\Delta\phi,z) - A_\phi(r,\phi,z)]\Delta r\Delta z \approx \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\Delta r\Delta\phi\Delta z = \frac{\partial A_\phi}{r\partial\phi}\Delta\tau$$

$$\Psi_z = \int_r^{r+\Delta r}\int_\phi^{\phi+\Delta\phi} A_z\big|_{z+\Delta z} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi - \int_r^{r+\Delta r}\int_\phi^{\phi+\Delta\phi} A_z\big|_z r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \approx$$

$$[A_z(r,\phi,z+\Delta z) - A_z(r,\phi,z)]r\Delta r\Delta\phi\Delta z \approx \frac{\partial A_z}{\partial z} r\Delta r\Delta\phi\Delta z = \frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta\tau$$

因此，矢量场 $\mathbf{A}$ 穿出该六面体的表面的通量为

$$\Psi = \Psi_r + \Psi_\phi + \Psi_z \approx \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\phi}{r\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right]\Delta\tau$$

故得到圆柱坐标下的散度表达式 $\nabla\cdot\mathbf{A} = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Psi}{\Delta\tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\phi}{r\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

1.22 方程 $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ 给出一椭球族。求椭球表面上任意点的单位法向矢量。

解　由于 $\nabla u = \mathbf{e}_x\frac{2x}{a^2} + \mathbf{e}_y\frac{2y}{b^2} + \mathbf{e}_z\frac{2z}{c^2}$

$$|\nabla u| = 2\sqrt{(\frac{x}{a^2})^2 + (\frac{y}{b^2})^2 + (\frac{z}{c^2})^2}$$

故椭球表面上任意点的单位法向矢量为

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = (\mathbf{e}_x \frac{x}{a^2} + \mathbf{e}_y \frac{y}{b^2} + \mathbf{e}_z \frac{z}{c^2}) \Big/ \sqrt{(\frac{x}{a^2})^2 + (\frac{y}{b^2})^2 + (\frac{z}{c^2})^2}$$

1.23 现有三个矢量 **A**、**B**、**C** 为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_r \sin\theta\cos\phi + \mathbf{e}_\theta \cos\theta\cos\phi - \mathbf{e}_\phi \sin\phi$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_r z^2 \sin\phi + \mathbf{e}_\phi z^2 \cos\phi + \mathbf{e}_z 2rz\sin\phi$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{e}_x(3y^2 - 2x) + \mathbf{e}_y x^2 + \mathbf{e}_z 2z$$

（1）哪些矢量可以由一个标量函数的梯度表示？哪些矢量可以由一个矢量函数的旋度表示？

（2）求出这些矢量的源分布。

解（1）在球坐标系中

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} =$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\cos\phi) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cos\theta\cos\phi) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(-\sin\phi) =$$

$$\frac{2}{r}\sin\theta\cos\phi + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} - \frac{2\sin\theta\cos\phi}{r} - \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \end{vmatrix} = 0$$

故矢量 **A** 既可以由一个标量函数的梯度表示，也可以由一个矢量函数的旋度表示；

在圆柱坐标系中

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} =$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rz^2\sin\phi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}(z^2\cos\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(2rz\sin\phi) =$$

$$\frac{z^2\sin\phi}{r} - \frac{z^2\sin\phi}{r} + 2r\sin\phi = 2r\sin\phi$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ B_r & rB_\theta & B_z\end{vmatrix}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z^2\sin\phi & rz^2\cos\phi & 2rz\sin\phi\end{vmatrix}=0$$

故矢量 $\mathbf{B}$ 可以由一个标量函数的梯度表示；

直角在坐标系中

$$\nabla\cdot\mathbf{C}=\frac{\partial C_x}{\partial x}+\frac{\partial C_y}{\partial y}+\frac{\partial C_z}{\partial z}=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(3y^2-2x)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2)+\frac{\partial}{\partial z}(2z)=0$$

$$\nabla\times\mathbf{C}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 3y^2-2x & x^2 & 2z\end{vmatrix}=\mathbf{e}_z(2x-6y)$$

故矢量 $\mathbf{C}$ 可以由一个矢量函数的旋度表示。

（2）这些矢量的源分布为

$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$， $\nabla\times\mathbf{A}=0$ ；

$\nabla\cdot\mathbf{B}=2r\sin\phi$， $\nabla\times\mathbf{B}=0$ ；

$\nabla\cdot\mathbf{C}=0$， $\nabla\times\mathbf{C}=\mathbf{e}_z(2x-6y)$

1.24 利用直角坐标，证明

$$\nabla\cdot(f\mathbf{A})=f\nabla\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\nabla f$$

解 在直角坐标中

$$f\nabla\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\nabla f=f\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)+\left(A_x\frac{\partial f}{\partial x}+A_y\frac{\partial f}{\partial y}+A_z\frac{\partial f}{\partial z}\right)=$$

$$\left(f\frac{\partial A_x}{\partial x}+A_x\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\left(f\frac{\partial A_y}{\partial y}+A_y\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\left(f\frac{\partial A_z}{\partial z}+A_z\frac{\partial f}{\partial z}\right)=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(fA_x)+\frac{\partial}{\partial y}(fA_y)+\frac{\partial}{\partial z}(fA_z)=\nabla\cdot(f\mathbf{A})$$

1.25 证明

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{H}$$

解 根据 ∇ 算子的微分运算性质，有

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H})=\nabla_A\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H})+\nabla_H\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H})$$

式中 ∇_A 表示只对矢量 $\mathbf{A}$ 作微分运算， ∇_H 表示只对矢量 $\mathbf{H}$ 作微分运算。

由 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$，可得

$$\nabla_A\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot(\nabla_A\times\mathbf{A})=\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})$$

同理 $$\nabla_H\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H})=-\mathbf{A}\cdot(\nabla_H\times\mathbf{H})=-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$$

故有 $$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{H}$$

1.26 利用直角坐标，证明

$$\nabla\times(f\mathbf{G}) = f\nabla\times\mathbf{G}+\nabla f\times\mathbf{G}$$

解　在直角坐标中

$$f\nabla\times\mathbf{G} = f\left[\mathbf{e}_x\left(\frac{\partial G_z}{\partial y}-\frac{\partial G_y}{\partial z}\right)+\mathbf{e}_y\left(\frac{\partial G_x}{\partial z}-\frac{\partial G_z}{\partial x}\right)+\mathbf{e}_z\left(\frac{\partial G_y}{\partial x}-\frac{\partial G_x}{\partial y}\right)\right]$$

$$\nabla f\times\mathbf{G} = \left[\mathbf{e}_x\left(G_z\frac{\partial f}{\partial y}-G_y\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\mathbf{e}_y\left(G_x\frac{\partial f}{\partial z}-G_z\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\mathbf{e}_z\left(G_y\frac{\partial f}{\partial x}-G_x\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]$$

所以

$$\begin{aligned} f\nabla\times\mathbf{G}+\nabla f\times\mathbf{G} = {} & \mathbf{e}_x\left[\left(G_z\frac{\partial f}{\partial y}+f\frac{\partial G_z}{\partial y}\right)-\left(G_y\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial G_y}{\partial z}\right)\right]+ \\ & \mathbf{e}_y\left[\left(G_x\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial G_x}{\partial z}\right)-\left(G_z\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial G_z}{\partial x}\right)\right]+ \\ & \mathbf{e}_z\left[\left(G_y\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial G_y}{\partial x}\right)-\left(G_x\frac{\partial f}{\partial y}+f\frac{\partial G_x}{\partial y}\right)\right]= \\ & \mathbf{e}_x\left[\frac{\partial(fG_z)}{\partial y}-\frac{\partial(fG_y)}{\partial z}\right]+\mathbf{e}_y\left[\frac{\partial(fG_x)}{\partial z}-\frac{\partial(fG_z)}{\partial x}\right]+ \\ & \mathbf{e}_z\left[\frac{\partial(fG_y)}{\partial x}-\frac{\partial(fG_x)}{\partial y}\right]=\nabla\times(f\mathbf{G}) \end{aligned}$$

1.27　利用散度定理及斯托克斯定理可以在更普遍的意义下证明 $\nabla\times(\nabla u)=0$ 及 $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0$，试证明之。

解　（1）对于任意闭合曲线 C 为边界的任意曲面 S，由斯托克斯定理有

$$\int_S(\nabla\times\nabla u)\cdot d\mathbf{S}=\oint_C\nabla u\cdot d\mathbf{l}=\oint_C\frac{\partial u}{\partial l}dl=\oint_C du=0$$

由于曲面 S 是任意的，故有

$$\nabla\times(\nabla u)=0$$

（2）对于任意闭合曲面 S 为边界的体积 τ，由散度定理有

$$\int_\tau\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})d\tau=\oint_S(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}=\int_{S_1}(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}+\int_{S_2}(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$$

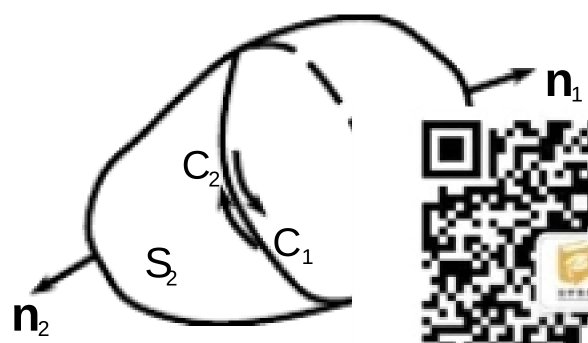
其中 S_1 和 S_2 如题 1.27 图所示。由斯托克斯定理，有

$$\int_{S_1}(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}=\oint_{C_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}\,,\qquad \int_{S_2}(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}=\oint_{C_2}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$$

由题 1.27 图可知 C_1 和 C_2 是方向相反的同一回路，则有 $\oint_{C_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=-\oint_{C_2}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$

所以得到 $$\int_\tau\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})d\tau=\oint_{C_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}+\oint_{C_2}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=-\oint_{C_2}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}+\oint_{C_2}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=0$$

由于体积 τ 是任意的，故有 $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0$



题 1.27 图

二章习题解答

2.1 一个平行板真空二极管内的电荷体密度为 $\rho=-\frac{4}{9}\varepsilon_0 U_0 d^{-4/3}x^{-2/3}$，式中阴极板位于 $x=0$，阳极板位于 $x=d$，极间电压为 U_0。如果 $U_0=40V$、$d=1cm$、横截面 $S=10cm^2$，求：（1）$x=0$ 和 $x=d$ 区域内的总电荷量 Q；（2）$x=d/2$ 和 $x=d$ 区域内的总电荷量 Q'。

解 （1）
$$Q=\int_\tau \rho \mathrm{d}\tau=\int_0^d(-\frac{4}{9}\varepsilon_0 U_0 d^{-4/3}x^{-2/3})S\mathrm{d}x=-\frac{4}{3d}\varepsilon_0 U_0 S=-4.72\times10^{-11}C$$

（2）
$$Q'=\int_{\tau'} \rho \mathrm{d}\tau=\int_{d/2}^d(-\frac{4}{9}\varepsilon_0 U_0 d^{-4/3}x^{-2/3})S\mathrm{d}x=-\frac{4}{3d}(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}})\varepsilon_0 U_0 S=-0.97\times10^{-11}C$$

2.2 一个体密度为 $\rho=2.32\times10^{-7}C/m^3$ 的质子束，通过 $1000V$ 的电压加速后形成等速的质子束，质子束内的电荷均匀分布，束直径为 $2mm$，束外没有电荷分布，试求电流密度和电流。

解 质子的质量 $m=1.7\times10^{-27}kg$、电量 $q=1.6\times10^{-19}C$。由

$$\frac{1}{2}mv^2=qU$$

得

$$v=\sqrt{2mqU}=1.37\times10^6\ m/s$$

故

$$J=\rho v=0.318\ A/m^2$$

$$I=J\pi(d/2)^2=10^{-6}\ A$$

2.3 一个半径为 a 的球体内均匀分布总电荷量为 Q 的电荷，球体以匀角速度 ω 绕一个直径旋转，求球内的电流密度。

解 以球心为坐标原点，转轴（一直径）为 z 轴。设球内任一点 P 的位置矢量为 $\mathbf{r}$，且 $\mathbf{r}$ 与 z 轴的夹角为 θ，则 P 点的线速度为

$$\mathbf{v}=\omega\times\mathbf{r}=\mathbf{e}_\phi\omega r\sin\theta$$

球内的电荷体密度为

$$\rho=\frac{Q}{4\pi a^3/3}$$

故

$$\mathbf{J}=\rho\mathbf{v}=\mathbf{e}_\phi\frac{Q}{4\pi a^3/3}\omega r\sin\theta=\mathbf{e}_\phi\frac{3Q\omega}{4\pi a^3}r\sin\theta$$

2.4 一个半径为 a 的导体球带总电荷量为 Q，同样以匀角速度 ω 绕一个直径旋转，求球表面的面电流密度。

解 以球心为坐标原点，转轴（一直径）为 z 轴。设球面上任一点 P 的位置矢量为 $\mathbf{r}$，且 $\mathbf{r}$ 与 z 轴的夹角为 θ，则 P 点的线速度为

$$\mathbf{v}=\omega\times\mathbf{r}=\mathbf{e}_\phi\omega a\sin\theta$$

球面的上电荷面密度为

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi a^2}$$

故

$$\mathbf{J}_S=\sigma\mathbf{v}=\mathbf{e}_\phi\frac{Q}{4\pi a^2}\omega a\sin\theta=\mathbf{e}_\phi\frac{Q\omega}{4\pi a}\sin\theta$$

2.5 两点电荷 $q_1 = 8C$ 位于 z 轴上 $z = 4$ 处，$q_2 = -4C$ 位于 y 轴上 $y = 4$ 处，求 $(4,0,0)$ 处的电场强度。

解 电荷 q_1 在 $(4,0,0)$ 处产生的电场为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1'|^3} = \frac{2}{\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{e}_x 4 - \mathbf{e}_z 4}{(4\sqrt{2})^3}$$

电荷 q_2 在 $(4,0,0)$ 处产生的电场为

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_2'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2'|^3} = -\frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{e}_x 4 - \mathbf{e}_y 4}{(4\sqrt{2})^3}$$

故 $(4,0,0)$ 处的电场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z 2}{32\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}$$

2.6 一个半圆环上均匀分布线电荷 ρ_l，求垂直于圆平面的轴线上 $z = a$ 处的电场强度 $\mathbf{E}(0,0,a)$，设半圆环的半径也为 a，如题 2.6 图所示。

解 半圆环上的电荷元 $\rho_l dl' = \rho_l a d\phi'$ 在轴线上 $z = a$ 处的电场强度为

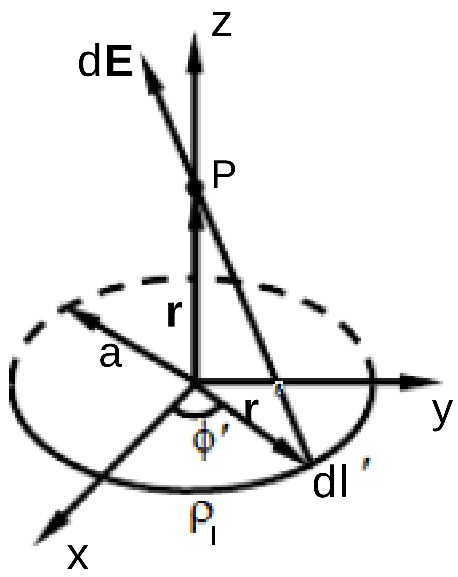
$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_l a}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{(\sqrt{2}a)^3}d\phi' =$$

$$\frac{\rho_l}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{e}_z - (\mathbf{e}_x\cos\phi' + \mathbf{e}_y\sin\phi')}{a}d\phi'$$

在半圆环上对上式积分，得到轴线上 $z = a$ 处的电场强度为

$$\mathbf{E}(0,0,a) = \int d\mathbf{E} =$$

$$\frac{\rho_l}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[\mathbf{e}_z - (\mathbf{e}_x\cos\phi' + \mathbf{e}_y\sin\phi')]d\phi' = \frac{\rho_l(\mathbf{e}_z\pi - \mathbf{e}_x 2)}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a}$$



题 2.6 图

2.7 三根长度均为 L，均匀带电荷密度分别为 ρ_{l1}、ρ_{l2} 和 ρ_{l3} 地线电荷构成等边三角形。设 $\rho_{l1} = 2\rho_{l2} = 2\rho_{l3}$，计算三角形中心处的电场强度。

解 建立题 2.7 图所示的坐标系。三角形中心到各边的距离为

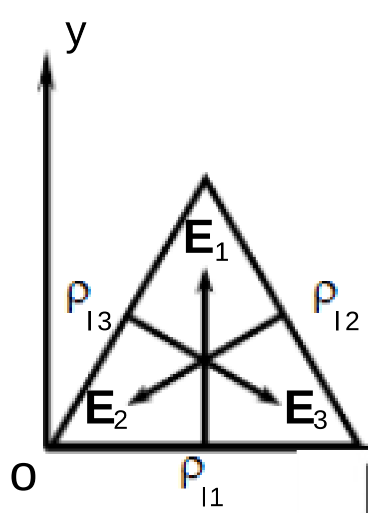
$$d = \frac{L}{2}\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6}L$$

则

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_y\frac{\rho_{l1}}{4\pi\varepsilon_0 d}(\cos 30^\circ - \cos 150^\circ) = \mathbf{e}_y\frac{3\rho_{l1}}{2\pi\varepsilon_0 L}$$

$$\mathbf{E}_2 = -(\mathbf{e}_x\cos 30^\circ + \mathbf{e}_y\sin 30^\circ)\frac{3\rho_{l2}}{2\pi\varepsilon_0 L} = -(\mathbf{e}_x\sqrt{3} + \mathbf{e}_y)\frac{3\rho_{l1}}{8\pi\varepsilon_0 L}$$

$$\mathbf{E}_3 = (\mathbf{e}_x\cos 30^\circ - \mathbf{e}_y\sin 30^\circ)\frac{3\rho_{l3}}{2\pi\varepsilon_0 L} = (\mathbf{e}_x\sqrt{3} - \mathbf{e}_y)\frac{3\rho_{l1}}{8\pi\varepsilon_0 L}$$



题 2.7 图

故等边三角形中心处的电场强度为

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_3=$$

$$\mathbf{e}_y\frac{3\rho_{l1}}{2\pi\varepsilon_0 L}-(\mathbf{e}_x\sqrt{3}+\mathbf{e}_y)\frac{3\rho_{l1}}{8\pi\varepsilon_0 L}+(\mathbf{e}_x\sqrt{3}-\mathbf{e}_y)\frac{3\rho_{l1}}{8\pi\varepsilon_0 L}=\mathbf{e}_y\frac{3\rho_{l1}}{4\pi\varepsilon_0 L}$$

2.8 一点电荷 $+q$ 位于 $(-a,0,0)$ 处，另一点电荷 $-2q$ 位于 $(a,0,0)$ 处，空间有没有电场强度 $\mathbf{E}=0$ 的点？

解　电荷 $+q$ 在 (x,y,z) 处产生的电场为

$$\mathbf{E}_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{e}_x(x+a)+\mathbf{e}_y y+\mathbf{e}_z z}{[(x+a)^2+y^2+z^2]^{3/2}}$$

电荷 $-2q$ 在 (x,y,z) 处产生的电场为

$$\mathbf{E}_2=-\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{e}_x(x-a)+\mathbf{e}_y y+\mathbf{e}_z z}{[(x-a)^2+y^2+z^2]^{3/2}}$$

(x,y,z) 处的电场则为 $\mathbf{E}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2$。令 $\mathbf{E}=0$，则有

$$\frac{\mathbf{e}_x(x+a)+\mathbf{e}_y y+\mathbf{e}_z z}{[(x+a)^2+y^2+z^2]^{3/2}}=\frac{2[\mathbf{e}_x(x-a)+\mathbf{e}_y y+\mathbf{e}_z z]}{[(x-a)^2+y^2+z^2]^{3/2}}$$

由上式两端对应分量相等，可得到

$$(x+a)[(x-a)^2+y^2+z^2]^{3/2}=2(x-a)[(x+a)^2+y^2+z^2]^{3/2} \qquad ①$$

$$y[(x-a)^2+y^2+z^2]^{3/2}=2y[(x+a)^2+y^2+z^2]^{3/2} \qquad ②$$

$$z[(x-a)^2+y^2+z^2]^{3/2}=2z[(x+a)^2+y^2+z^2]^{3/2} \qquad ③$$

当 $y\neq 0$ 或 $z\neq 0$ 时，将式②或式③代入式①，得 $a=0$。所以，当 $y\neq 0$ 或 $z\neq 0$ 时无解；

当 $y=0$ 且 $z=0$ 时，由式①，有

$$(x+a)(x-a)^3=2(x-a)(x+a)^3$$

解得

$$x=(-3\pm 2\sqrt{2})a$$

但 $x=-3a+2\sqrt{2}a$ 不合题意，故仅在 $(-3a-2\sqrt{2}a,0,0)$ 处电场强度 $\mathbf{E}=0$。

2．9 一个很薄的无限大导电带电面，电荷面密度为 σ。证明：垂直于平面的 z 轴上 $z=z_0$ 处的电场强度 E 中，有一半是有平面上半径为 $\sqrt{3}z_0$ 的圆内的电荷产生的。

解　半径为 r、电荷线密度为 $\rho_l=\sigma\,dr$ 的带电细圆环在 z 轴上 $z=z_0$ 处的电场强度为

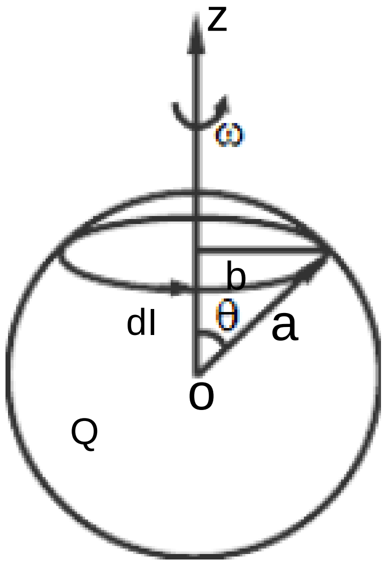
$$d\mathbf{E}=\mathbf{e}_z\frac{r\sigma z_0\,dr}{2\varepsilon_0(r^2+z_0^2)^{3/2}}$$

故整个导电带电面在 z 轴上 $z=z_0$ 处的电场强度为

$$\mathbf{E}=\mathbf{e}_z\int_0^\infty\frac{r\sigma z_0\,dr}{2\varepsilon_0(r^2+z_0^2)^{3/2}}=-\mathbf{e}_z\frac{\sigma z_0}{2\varepsilon_0}\frac{1}{(r^2+z_0^2)^{1/2}}\Big|_0^\infty=\mathbf{e}_z\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

而半径为 $\sqrt{3}z_0$ 的圆内的电荷产生在 z 轴上 $z=z_0$ 处的电场强度为

$$\mathbf{E}'=\mathbf{e}_z\int_0^{\sqrt{3}z_0}\frac{r\sigma z_0\,dr}{2\varepsilon_0(r^2+z_0^2)^{3/2}}=-\mathbf{e}_z\frac{\sigma z_0}{2\varepsilon_0}\frac{1}{(r^2+z_0^2)^{1/2}}\Big|_0^{\sqrt{3}z}$$



题 2.10 图

2.10 一个半径为 a 的导体球带电荷量为 Q，当球体以均匀角速度 ω 绕一个直径旋转，如题 2.10 图所示。求球心处的磁感应强度 $\mathbf{B}$。

解 球面上的电荷面密度为

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

当球体以均匀角速度 ω 绕一个直径旋转时，球面上位置矢量 $\mathbf{r} = \mathbf{e}_r a$ 点处的电流面密度为

$$\mathbf{J}_S = \sigma \mathbf{v} = \sigma\, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \sigma \mathbf{e}_z \omega \times \mathbf{e}_r a =$$

$$\mathbf{e}_\phi \omega\sigma a \sin\theta = \mathbf{e}_\phi \frac{\omega Q}{4\pi a}\sin\theta$$

将球面划分为无数个宽度为 $dl = a\,d\theta$ 的细圆环，则球面上任一个宽度为 $dl = a\,d\theta$ 细圆环的电流为

$$dI = J_S\, dl = \frac{\omega Q}{4\pi}\sin\theta\, d\theta$$

细圆环的半径为 $b = a\sin\theta$，圆环平面到球心的距离 $d = a\cos\theta$，利用电流圆环的轴线上的磁场公式，则该细圆环电流在球心处产生的磁场为

$$d\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 b^2\, dI}{2(b^2 + d^2)^{3/2}} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 \omega Q a^2 \sin^3\theta\, d\theta}{8\pi(a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)^{3/2}} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 \omega Q \sin^3\theta\, d\theta}{8\pi a}$$

故整个球面电流在球心处产生的磁场为 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 \omega Q \sin^3\theta}{8\pi a} d\theta = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 \omega Q}{6\pi a}$

2.11 两个半径为 b、同轴的相同线圈，各有 N 匝，相互隔开距离为 d，如题 2.11 图所示。电流 I 以相同的方向流过这两个线圈。

（1）求这两个线圈中心点处的磁感应强度 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_x B_x$；

（2）证明：在中点处 dB_x/dx 等于零；

（3）求出 b 与 d 之间的关系，使中点处 $d^2 B_x/dx^2$ 也等于零。

解 （1）由细圆环电流在其轴线上的磁感应强度 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$

得到两个线圈中心点处的磁感应强度为 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_x \frac{\mu_0 N I b^2}{(b^2 + d^2/4)^{3/2}}$

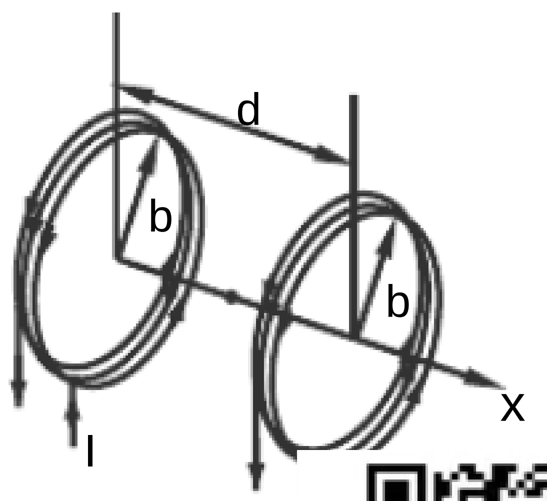
（2）两线圈的电流在其轴线上 $x\ (0 < x < d)$ 处的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_x \left\{ \frac{\mu_0 N I b^2}{2(b^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0 N I b^2}{2[b^2 + (d - x)^2]^{3/2}} \right\}$$

所以 $$\frac{dB_x}{dx} = -\frac{3\mu_0 N I b^2 x}{2(b^2 + x^2)^{5/2}} + \frac{3\mu_0 N I b^2 (d - x)}{2[b^2 + (d - x)^2]^{5/2}}$$

故在中点 $x = d/2$ 处，有

$$\frac{dB_x}{dx} = -\frac{3\mu_0 N I b^2 d/2}{2[b^2 + d^2/4]^{5/2}} + \frac{3\mu_0 N I b^2 d/2}{2[b^2 + d^2/4]^{5/2}} = 0$$



题 2.1

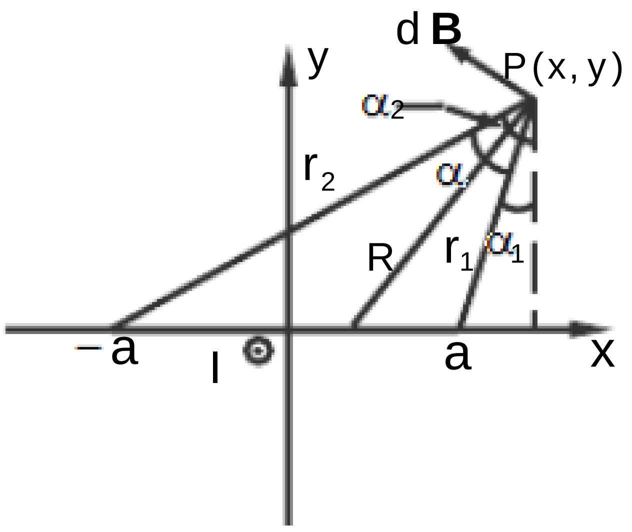
（3）
$$\frac{d^2B_x}{dx^2}=\frac{15\mu_0NIb^2x^2}{2(b^2+x^2)^{7/2}}-\frac{3\mu_0NIb^2}{2(b^2+x^2)^{5/2}}+\frac{15\mu_0NIb^2(d-x)^2}{2[b^2+(d-x)^2]^{7/2}}-\frac{3\mu_0NIb^2}{2[b^2+(d-x)^2]^{5/2}}$$

令 $\left.\frac{d^2B_x}{dx^2}\right|_{x=d/2}=0$，有
$$\frac{5d^2/4}{[b^2+d^2/4]^{7/2}}-\frac{1}{[b^2+d^2/4]^{5/2}}=0$$

即
$$5d^2/4=b^2+d^2/4$$

故解得
$$d=b$$

2.12 一条扁平的直导体带，宽为 $2a$，中心线与 z 轴重合，通过的电流为 I。证明在第一象限内的磁感应强度为 $B_x=-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\alpha$，$B_y=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\ln\frac{r_2}{r_1}$ 式中 α、r_1 和 r_2 如题 2.12 图所示。



题 2.12 图

解 将导体带划分为无数个宽度为 dx' 的细条带，每一细条带的电流 $dI=\frac{I}{2a}dx'$。由安培环路定理，可得位于 x' 处的细条带的电流 dI 在点 $P(x,y)$ 处的磁场为
$$dB=\frac{\mu_0 dI}{2\pi R}=\frac{\mu_0 I\,dx'}{4\pi aR}=\frac{\mu_0 I\,dx'}{4\pi a[(x-x')^2+y^2]^{1/2}}$$

则
$$dB_x=-dB\sin\theta=-\frac{\mu_0 Iy\,dx'}{4\pi a[(x-x')^2+y^2]}$$
$$dB_y=dB\cos\theta=\frac{\mu_0 I(x-x')dx'}{4\pi a[(x-x')^2+y^2]}$$

所以
$$B_x=-\int_{-a}^{a}\frac{\mu_0 Iy\,dx'}{4\pi a[(x-x')^2+y^2]}=-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\arctan\left(\frac{x'-x}{y}\right)\Big|_{-a}^{a}=$$
$$-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\arctan\left(\frac{a-x}{y}\right)-\arctan\left(\frac{-a-x}{y}\right)\right]=-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\arctan\left(\frac{x+a}{y}\right)-\arctan\left(\frac{x-a}{y}\right)\right]=$$
$$-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\alpha_2-\alpha_1)=-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\alpha$$

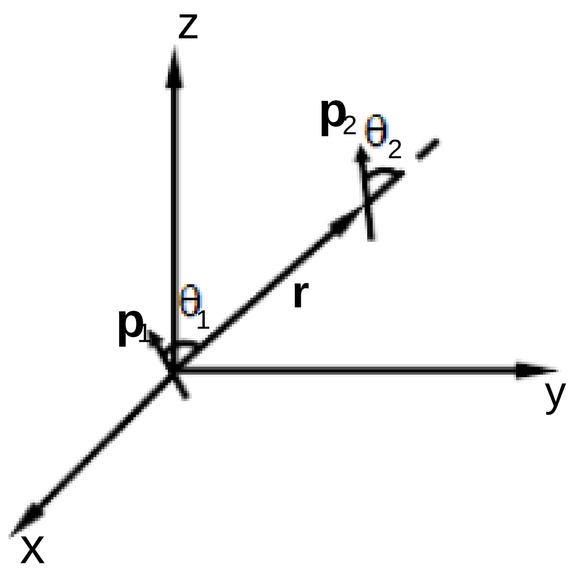
$$B_y=\int_{-a}^{a}\frac{\mu_0 I(x-x')dx'}{4\pi a[(x-x')^2+y^2]}=-\frac{\mu_0 I}{8\pi a}\ln[(x-x')^2+y^2]\Big|_{-a}^{a}=\frac{\mu_0 I}{8\pi a}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

2.13 如题 2.13 图所示，有一个电矩为 $\mathbf{p}_1$ 的电偶极子，位于坐标原点上，另一个电矩为 $\mathbf{p}_2$ 的电偶极子，位于矢径为 $\mathbf{r}$ 的某一点上。试证明两偶极子之间相互作用力为
$$F_r=\frac{3p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi-2\cos\theta_1\cos\theta_2)$$

式中 $\theta_1 = \langle \mathbf{r}, \mathbf{p}_1 \rangle$， $\theta_2 = \langle \mathbf{r}, \mathbf{p}_2 \rangle$， ϕ 是两个平面 $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1)$ 和 $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2)$ 间的夹角。并问两个偶极子在怎样的相对取向下这个力值最大？

解　电偶极子 $\mathbf{p}_1$ 在矢径为 $\mathbf{r}$ 的点上产生的电场为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_1}{r^3}\right]$$



题 2.13 图

所以 $\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_2$ 之间的相互作用能为

$$W_e = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r^3}\right]$$

因为 $\theta_1 = \langle \mathbf{r}, \mathbf{p}_1 \rangle$， $\theta_2 = \langle \mathbf{r}, \mathbf{p}_2 \rangle$， 则

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r} = p_1 r \cos\theta_1$$

$$\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r} = p_2 r \cos\theta_2$$

又因为 ϕ 是两个平面 $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1)$ 和 $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2)$ 间的夹角，所以有

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2) = r^2 p_1 p_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\phi$$

另一方面，利用矢量恒等式可得

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2) = [(\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1) \times \mathbf{r}] \cdot \mathbf{p}_2 = [r^2 \mathbf{p}_1 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_1)\mathbf{r}] \cdot \mathbf{p}_2 = r^2 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_1)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_2)$$

因此

$$(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) = \frac{1}{r^2}[(\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2) + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_1)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_2)] = p_1 p_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\phi + p_1 p_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2$$

于是得到

$$W_e = \frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\phi - 2\cos\theta_1 \cos\theta_2)$$

故两偶极子之间的相互作用力为

$$F_r = -\frac{\partial W_e}{\partial r}\bigg|_{q=\mathrm{const}} = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0}(\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\phi - 2\cos\theta_1 \cos\theta_2)\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^3}\right) =$$

$$\frac{3p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}(\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\phi - 2\cos\theta_1 \cos\theta_2)$$

由上式可见，当 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 时，即两个偶极子共线时，相互作用力值最大。

2.14　两平行无限长直线电流 I_1 和 I_2，相距为 d，求每根导线单位长度受到的安培力 $\mathbf{F}_m$。

解　无限长直线电流 I_1 产生的磁场为　$\mathbf{B}_1 = \mathbf{e}_\phi \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$

直线电流 I_2 每单位长度受到的安培力为　$\mathbf{F}_{m12} = \int_0^1 I_2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_1 \, dz = -\mathbf{e}_{12} \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$

式中 $\mathbf{e}_{12}$ 是由电流 I_1 指向电流 I_2 的单位矢量。

同理可得，直线电流 I_1 每单位长度受到的安培力为　$\mathbf{F}_{m21} = -\mathbf{F}_{m12} = \mathbf{e}_{12} \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$

2.15　一根通电流 I_1 的无限长直导线和一个通电流 I_2 的圆环在同一平面上，圆心与导线的距离为 d，如题 2.15 图所示。证明：两电流间相互作用的安培力为

$$F_m = \mu_0 I_1 I_2 (\sec\alpha - 1)$$

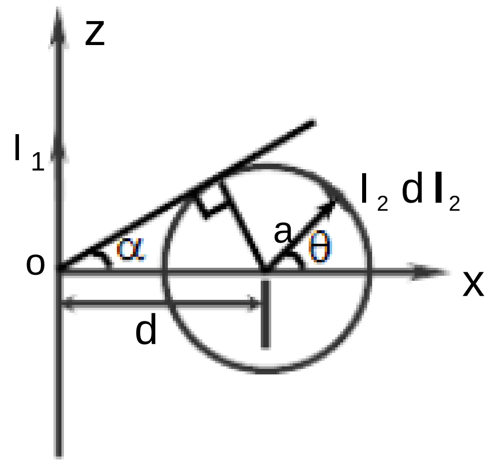
这里 α 是圆环在直线最接近圆环的点所张的角。

解　无限长直线电流 I_1 产生的磁场为

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

圆环上的电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 受到的安培力为

$$d\mathbf{F}_m = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1 = d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{e}_y \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}$$



题 2.15 图

由题 2.15 图可知 $d\mathbf{l}_2 = (-\mathbf{e}_x \sin\theta + \mathbf{e}_z \cos\theta) a\, d\theta$

$$x = d + a\cos\theta$$

所以

$$\mathbf{F}_m = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi(d + a\cos\theta)} (-\mathbf{e}_z \sin\theta - \mathbf{e}_x \cos\theta) d\theta =$$

$$-\mathbf{e}_x \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{(d + a\cos\theta)} d\theta = -\mathbf{e}_x \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi}\left(-\frac{2\pi}{a} + \frac{d}{a}\frac{2\pi}{\sqrt{d^2 - a^2}}\right) = -\mathbf{e}_x \mu_0 I_1 I_2 (\sec\alpha - 1)$$

2.16 证明在不均匀的电场中，某一电偶极子 $\mathbf{p}$ 绕坐标原点所受到的力矩为 $\mathbf{r} \times (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} + \mathbf{p} \times \mathbf{E}$。

解　如题 2.16 图所示，设 $\mathbf{p} = q d\mathbf{l}$ $(dl \ll 1)$，则电偶极子 $\mathbf{p}$ 绕坐标原点所受到的力矩为

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}_2 \times q\mathbf{E}(\mathbf{r}_2) - \mathbf{r}_1 \times q\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) =$$

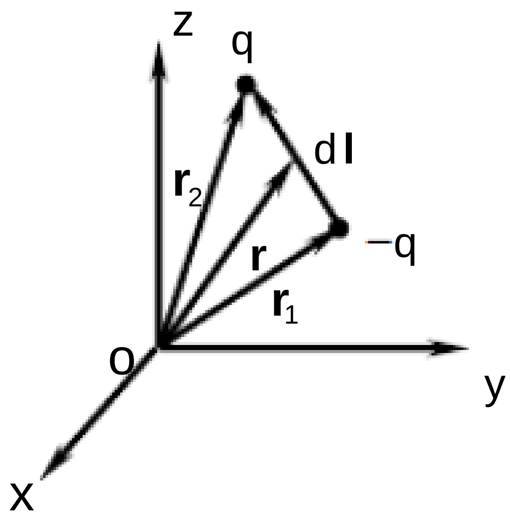
$$(\mathbf{r} + \frac{d\mathbf{l}}{2}) \times q\mathbf{E}(\mathbf{r} + \frac{d\mathbf{l}}{2}) - (\mathbf{r} - \frac{d\mathbf{l}}{2}) \times q\mathbf{E}(\mathbf{r} - \frac{d\mathbf{l}}{2}) =$$

$$q\mathbf{r} \times [\mathbf{E}(\mathbf{r} + \frac{d\mathbf{l}}{2}) - \mathbf{E}(\mathbf{r} - \frac{d\mathbf{l}}{2})] + \frac{q}{2} d\mathbf{l} \times [\mathbf{E}(\mathbf{r} + \frac{d\mathbf{l}}{2}) + \mathbf{E}(\mathbf{r} - \frac{d\mathbf{l}}{2})]$$

当 $dl \ll 1$时，有

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} + \frac{d\mathbf{l}}{2}) \approx \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\frac{d\mathbf{l}}{2} \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} - \frac{d\mathbf{l}}{2}) \approx \mathbf{E}(\mathbf{r}) - (\frac{d\mathbf{l}}{2} \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r})$$



题 2.16 图

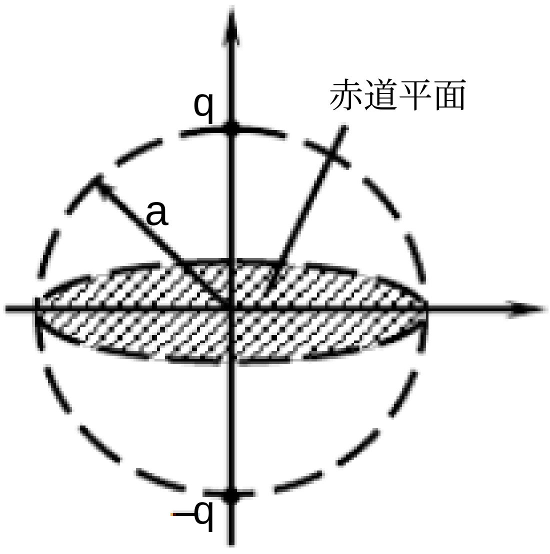
故得到

$$\mathbf{T} \approx \mathbf{r} \times (q d\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q d\mathbf{l} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) =$$

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} + \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

三章习题解答

3.1 真空中半径为 a 的一个球面，球的两极点处分别设置点电荷 q 和 $-q$，试计算球赤道平面上电通密度的通量 Φ (如题 3.1 图所示)。



题 3.1 图

解 由点电荷 q 和 $-q$ 共同产生的电通密度为

$$\mathbf{D}=\frac{q}{4\pi}\left[\frac{\mathbf{R}_+}{R_+^3}-\frac{\mathbf{R}_-}{R_-^3}\right]=$$

$$\frac{q}{4\pi}\left\{\frac{\mathbf{e}_r r+\mathbf{e}_z(z-a)}{[r^2+(z-a)^2]^{3/2}}-\frac{\mathbf{e}_r r+\mathbf{e}_z(z+a)}{[r^2+(z+a)^2]^{3/2}}\right\}$$

则球赤道平面上电通密度的通量

$$\Phi=\int_S\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\int_S\mathbf{D}\cdot\mathbf{e}_z\big|_{z=0}\,dS=$$

$$\frac{q}{4\pi}\int_0^a\left[\frac{(-a)}{(r^2+a^2)^{3/2}}-\frac{a}{(r^2+a^2)^{3/2}}\right]2\pi r\,dr=$$

$$\left.\frac{qa}{(r^2+a^2)^{1/2}}\right|_0^a=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)q=-0.293q$$

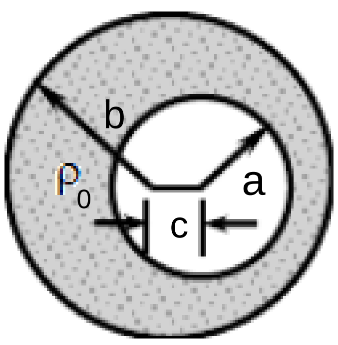
3.2 1911 年卢瑟福在实验中使用的是半径为 r_a 的球体原子模型，其球体内均匀分布有总电荷量为 $-Ze$ 的电子云，在球心有一正电荷 Ze（Z 是原子序数，e 是质子电荷量），通过实验得到球体内的电通量密度表达式为 $\mathbf{D}_0=\mathbf{e}_r\dfrac{Ze}{4\pi}\left(\dfrac{1}{r^2}-\dfrac{r}{r_a^3}\right)$，试证明之。

解 位于球心的正电荷 Ze 球体内产生的电通量密度为 $\mathbf{D}_1=\mathbf{e}_r\dfrac{Ze}{4\pi r^2}$

原子内电子云的电荷体密度为 $\rho=-\dfrac{Ze}{4\pi r_a^3/3}=-\dfrac{3Ze}{4\pi r_a^3}$

电子云在原子内产生的电通量密度则为 $\mathbf{D}_2=\mathbf{e}_r\dfrac{\rho 4\pi r^3/3}{4\pi r^2}=-\mathbf{e}_r\dfrac{Ze}{4\pi}\dfrac{r}{r_a^3}$

故原子内总的电通量密度为 $\mathbf{D}=\mathbf{D}_1+\mathbf{D}_2=\mathbf{e}_r\dfrac{Ze}{4\pi}\left(\dfrac{1}{r^2}-\dfrac{r}{r_a^3}\right)$



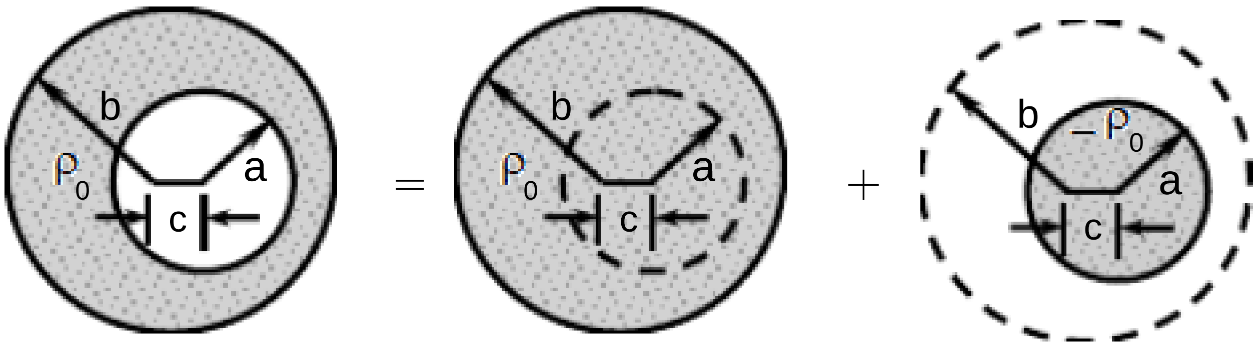
题 3. 3 图 (a)

3.3 电荷均匀分布于两圆柱面间的区域中，体密度为 $\rho_0\ C/m^3$，两圆柱面半径分别为 a 和 b，轴线相距为 $c\ (c<b-a)$，如题 3.3 图 (a) 所示。求空间各部分的电场。

解 由于两圆柱面间的电荷不是轴对称分布，不能直接用高斯定律求解。但可把半径为 a 的小圆柱面内看作同时具有体密度分别为 $\pm\rho_0$ 的两种电荷分布，这样在半径为 b 的整个圆柱体内具有体密度为 ρ_0 的均匀电荷分布，而在半径为 a 的整个圆柱体内则具有体密度为 $-\rho_0$ 的均匀电荷分布，如题 3.3 图 (b) 所示。空间任一点的电场是这两种电荷所产生的电场的叠加。

在 $r>b$ 区域中，由高斯定律 $\oint_S\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\dfrac{q}{\varepsilon_0}$，可求得大、小圆柱中的正、负电荷在点 P 产生

的电场分别为 $\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_r \dfrac{\pi b^2 \rho_0}{2\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{\rho_0 b^2 \mathbf{r}}{2\varepsilon_0 r^2}$ $\quad \mathbf{E}_1' = \mathbf{e}_r' \dfrac{-\pi a^2 \rho_0}{2\pi\varepsilon_0 r'} = -\dfrac{\rho_0 a^2 \mathbf{r}'}{2\varepsilon_0 r'^2}$



题 3. 3 图 (b)

点 P 处总的电场为 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1' = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}(\dfrac{b^2\mathbf{r}}{r^2} - \dfrac{a^2\mathbf{r}'}{r'^2})$

在 $r < b$ 且 $r' > a$ 区域中，同理可求得大、小圆柱中的正、负电荷在点 P 产生的电场分别为

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_r \frac{\pi r^2 \rho}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho \mathbf{r}}{2\varepsilon_0} \qquad \mathbf{E}_2' = \mathbf{e}_r' \frac{-\pi a^2 \rho}{2\pi\varepsilon_0 r'} = -\frac{\rho a^2 \mathbf{r}'}{2\varepsilon_0 r'^2}$$

点 P 处总的电场为 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2' = \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(\mathbf{r} - \dfrac{a^2\mathbf{r}'}{r'^2})$

在 $r' < a$ 的空腔区域中，大、小圆柱中的正、负电荷在点 P 产生的电场分别为

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_r \frac{\pi r^2 \rho_0}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho_0 \mathbf{r}}{2\varepsilon_0} \qquad \mathbf{E}_3' = \mathbf{e}_r' \frac{-\pi r'^2 \rho_0}{2\pi\varepsilon_0 r'} = -\frac{\rho_0 \mathbf{r}'}{2\varepsilon_0}$$

点 P 处总的电场为 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_3' = \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\mathbf{c}$

3.4 半径为 a 的球中充满密度 $\rho(r)$ 的体电荷，已知电位移分布为

$$D_r = \begin{cases} r^3 + Ar^2 & (r \le a) \\ \dfrac{a^5 + Aa^4}{r^2} & (r \ge a) \end{cases}$$

其中 A 为常数，试求电荷密度 $\rho(r)$。

解：由 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$，有 $\rho(r) = \nabla \cdot \mathbf{D} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}(r^2 D_r)$

故在 $r < a$ 区域 $\rho(r) = \varepsilon_0 \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}[r^2(r^3 + Ar^2)] = \varepsilon_0(5r^2 + 4Ar)$

在 $r > a$ 区域 $\rho(r) = \varepsilon_0 \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}[r^2 \dfrac{(a^5 + Aa^4)}{r^2}] = 0$

3.5 一个半径为 a 薄导体球壳内表面涂覆了一薄层绝缘膜，球内充满总电荷量为 Q 为的体电荷，球壳上又另充有电荷量 Q。已知球内部的电场为 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_r (r/a)^4$，设球内介质为真空。计算：（1） 球内的电荷分布；（2）球壳外表面的电荷面密度。

解 （1） 由高斯定律的微分形式可求得球内的电荷体密度为

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 [\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 E)] = \varepsilon_0 [\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{r^4}{a^4})] = 6\varepsilon_0\frac{r^3}{a^4}$$

（2）球体内的总电量 Q 为 $Q = \int_\tau \rho d\tau = \int_0^a 6\varepsilon_0\frac{r^3}{a^4} 4\pi r^2 dr = 4\pi\varepsilon_0 a^2$

球内电荷不仅在球壳内表面上感应电荷 $-Q$，而且在球壳外表面上还要感应电荷 Q，所以球壳外表面上的总电荷为 $2Q$，故球壳外表面上的电荷面密度为 $\sigma = \frac{2Q}{4\pi a^2} = 2\varepsilon_0$

3.6 两个无限长的同轴圆柱半径分别为 $r = a$ 和 $r = b$ $(b > a)$，圆柱表面分别带有密度为 σ_1 和 σ_2 的面电荷。（1）计算各处的电位移 $\mathbf{D}_0$；（2）欲使 $r > b$ 区域内 $\mathbf{D}_0 = 0$，则 σ_1 和 σ_2 应具有什么关系？

解 （1）由高斯定理 $\oint_S \mathbf{D}_0 \cdot d\mathbf{S} = q$，当 $r < a$ 时，有 $\mathbf{D}_{01} = 0$

当 $a < r < b$ 时，有 $2\pi r D_{02} = 2\pi a\sigma_1$，则 $\mathbf{D}_{02} = \mathbf{e}_r \frac{a\sigma_1}{r}$

当 $b < r < \infty$ 时，有 $2\pi r D_{03} = 2\pi a\sigma_1 + 2\pi b\sigma_2$，则 $\mathbf{D}_{03} = \mathbf{e}_r \frac{a\sigma_1 + b\sigma_2}{r}$

（2）令 $\mathbf{D}_{03} = \mathbf{e}_r \frac{a\sigma_1 + b\sigma_2}{r} = 0$，则得到 $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = -\frac{b}{a}$

3.7 计算在电场强度 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y x$ 的电场中把带电量为 $-2\mu C$ 的点电荷从点 $P_1(2,1,-1)$ 移到点 $P_2(8,2,-1)$ 时电场所做的功：（1）沿曲线 $x = 2y^2$；（2）沿连接该两点的直线。

解 （1）$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q\int_C E_x dx + E_y dy =$

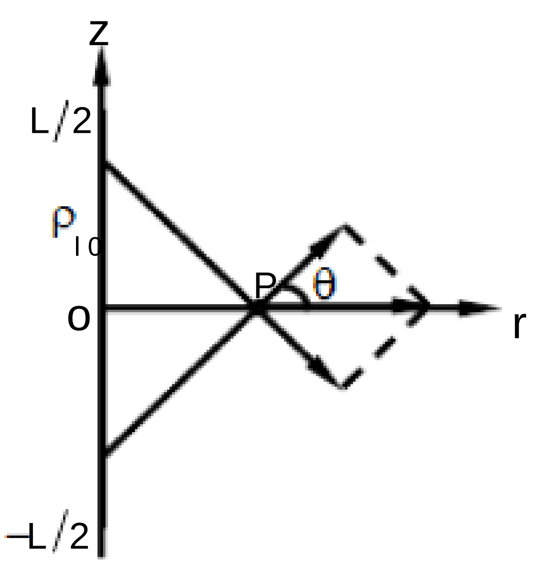
$$q\int_C y dx + x dy = q\int_1^2 y d(2y^2) + 2y^2 dy = q\int_1^2 6y^2 dy = 14q = -28\times 10^{-6}\ (J)$$

（2）连接点 $P_1(2,1,-1)$ 到点 $P_2(8,2,-1)$ 直线方程为

$$\frac{x-2}{y-1} = \frac{x-8}{y-2} \quad \text{即} \quad x - 6y + 4 = 0$$

故 $W = q\int_C y dx + x dy = q\int_1^2 y d(6y-4) + (6y-4) dy = q\int_1^2 (12y-4) dy = 14q = -28\times 10^{-6}\ (J)$

3.8 长度为 L 的细导线带有均匀电荷，其电荷线密度为 ρ_{l0}。（1）计算线电荷平分面上任意点的电位 φ；（2）利用直接积分法计算线电荷平分面上任意点的电场 $\mathbf{E}$，并用 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 核对。



题 3.8 图

解 （1）建立如题 3.8 图所示坐标系。根据电位的积分表达式，线电荷平分面上任意点 P 的电位为

$$\varphi(r,0) = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_{l0} dz'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2 + z'^2}} =$$

$$\frac{\rho_{l0}}{4\pi\varepsilon_0}\ln(z'+\sqrt{r^2+z'^2})\Big|_{-L/2}^{L/2}=$$

$$\frac{\rho_{l0}}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{r^2+(L/2)^2}+L/2}{\sqrt{r^2+(L/2)^2}-L/2}=$$

$$\frac{\rho_{l0}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{r^2+(L/2)^2}+L/2}{r}$$

（2）根据对称性，可得两个对称线电荷元 $\rho_{l0}dz'$ 在点 P 的电场为

$$d\mathbf{E}=\mathbf{e}_r dE_r=\mathbf{e}_r\frac{\rho_{l0}dz'}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z'^2}}\cos\theta=\mathbf{e}_r\frac{\rho_{l0}r\,dz'}{2\pi\varepsilon_0(r^2+z'^2)^{3/2}}$$

故长为 L 的线电荷在点 P 的电场为

$$\mathbf{E}=\int d\mathbf{E}=\mathbf{e}_r\int_0^{L/2}\frac{\rho_{l0}r\,dz'}{2\pi\varepsilon_0(r^2+z'^2)^{3/2}}=\mathbf{e}_r\frac{\rho_{l0}}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{z'}{\sqrt{r^2+z'^2}}\right)\Big|_0^{L/2}=\mathbf{e}_r\frac{\rho_{l0}}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{L}{\sqrt{r^2+(L/2)^2}}$$

由 $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$ 求 $\mathbf{E}$，有

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi=-\frac{\rho_{l0}}{2\pi\varepsilon_0}\nabla\left[\ln\frac{L/2+\sqrt{r^2+(L/2)^2}}{r}\right]=$$

$$-\mathbf{e}_r\frac{\rho_{l0}}{2\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dr}\left[\ln\left(L/2+\sqrt{r^2+(L/2)^2}\right)-\ln r\right]=$$

$$-\mathbf{e}_r\frac{\rho_{l0}}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{r}{\left[L/2+\sqrt{r^2+(L/2)^2}\right]\sqrt{r^2+(L/2)^2}}-\frac{1}{r}\right\}=\mathbf{e}_r\frac{\rho_{l0}}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{L}{\sqrt{r^2+(L/2)^2}}$$

3.9 已知无限长均匀线电荷 ρ_l 的电场 $\mathbf{E}=\mathbf{e}_r\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}$，试用定义式 $\varphi(r)=\int_r^{r_P}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ 求其电位函数。其中 r_P 为电位参考点。

解 $$\varphi(r)=\int_r^{r_P}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\int_r^{r_P}\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}dr=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln r\Big|_r^{r_P}=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_P}{r}$$

由于是无限长的线电荷，不能将 r_P 选为无穷远点。

3.10 一点电荷 $+q$ 位于 $(-a,0,0)$，另一点电荷 $-2q$ 位于 $(a,0,0)$，求空间的零电位面。

解 两个点电荷 $+q$ 和 $-2q$ 在空间产生的电位

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}-\frac{2q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}\right]$$

令 $\varphi(x,y,z)=0$，则有 $$\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}-\frac{2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}=0$$

即 $$4[(x+a)^2+y^2+z^2]=(x-a)^2+y^2+z^2$$

故得 $$(x+\frac{5}{3}a)^2+y^2+z^2=(\frac{4}{3}a)^2$$

由此可见，零电位面是一个以点 $(-\frac{5}{3}a,0,0)$ 为球心、$\frac{4}{3}a$ 为半径的球面。

3.11 证明习题 3.2 的电位表达式为 $\varphi(r)=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r}+\frac{r^2}{2r_a}-\frac{3}{2r_a})$

解 位于球心的正电荷 Ze 在原子外产生的电通量密度为 $\mathbf{D}_1=\mathbf{e}_r\frac{Ze}{4\pi r^2}$

电子云在原子外产生的电通量密度则为 $\mathbf{D}_2=\mathbf{e}_r\frac{\rho 4\pi r_a^3/3}{4\pi r^2}=-\mathbf{e}_r\frac{Ze}{4\pi r^2}$

所以原子外的电场为零。故原子内电位为

$$\varphi(r)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_r^{r_a}D\,dr=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{r_a}(\frac{1}{r^2}-\frac{r}{r_a^3})dr=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r}+\frac{r^2}{2r_a}-\frac{3}{2r_a})$$

3.12 电场中有一半径为 a 的圆柱体，已知柱内外的电位函数分别为

$$\begin{cases}\varphi(r)=0 & r\le a\\ \varphi(r)=A(r-\frac{a^2}{r})\cos\phi & r\ge a\end{cases}$$

（1）求圆柱内、外的电场强度；

（2）这个圆柱是什么材料制成的？表面有电荷分布吗？试求之。

解 （1）由 $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$，可得到 $r<a$ 时，$\mathbf{E}=-\nabla\varphi=0$

$r>a$ 时，$\mathbf{E}=-\nabla\varphi=-\mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r}[A(r-\frac{a^2}{r})\cos\phi]-\mathbf{e}_\phi\frac{\partial}{r\partial\phi}[A(r-\frac{a^2}{r})\cos\phi]=$

$$-\mathbf{e}_r A(1+\frac{a^2}{r^2})\cos\phi+\mathbf{e}_\phi A(1-\frac{a^2}{r^2})\sin\phi$$

（2）该圆柱体为等位体，所以是由导体制成的，其表面有电荷分布，电荷面密度为

$$\sigma=\varepsilon_0\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\big|_{r=a}=\varepsilon_0\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{E}\big|_{r=a}=-2\varepsilon_0 A\cos\phi$$

3.13 验证下列标量函数在它们各自的坐标系中满足 $\nabla^2\varphi=0$

（1）$\sin(kx)\sin(ly)e^{-hz}$ 其中 $h^2=k^2+l^2$；

（2）$r^n[\cos(n\phi)+A\sin(n\phi)]$ 圆柱坐标；

（3）$r^{-n}\cos(n\phi)$ 圆柱坐标；

（4）$r\cos\phi$ 球坐标；

（5）$r^{-2}\cos\phi$ 球坐标。

解 （1）在直角坐标系中 $\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

而 $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\sin(kx)\sin(ly)e^{-hz}]=-k^2\sin(kx)\sin(ly)e^{-hz}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sin(kx)\sin(ly)e^{-hz}]=-l^2\sin(kx)\sin(ly)e^{-hz}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\sin(kx)\sin(ly)e^{-hz}]=h^2\sin(kx)\sin(ly)e^{-hz}$$

故
$$\nabla^2\varphi=(-k^2-l^2+h^2)\sin(kx)\sin(ly)e^{-hz}=0$$

（2）在圆柱坐标系中
$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{r^2\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

而
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\{r\frac{\partial}{\partial r}r^n[\cos(n\phi)+A\sin(n\phi)]\}=n^2r^{n-2}[\cos(n\phi)+A\sin(n\phi)]$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=-n^2r^{n-2}[\cos(n\phi)+A\sin(n\phi)]$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}r^{-n}[\cos(n\phi)+A\sin(n\phi)]=0$$

故
$$\nabla^2\varphi=0$$

（3）
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\{r\frac{\partial}{\partial r}[r^{-n}\cos(n\phi)]\}=n^2r^{-n-2}\cos(n\phi)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=-n^2r^{-n-2}\cos(n\phi)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}[r^{-n}\cos(n\phi)]=0$$

故
$$\nabla^2\varphi=0$$

（4）在球坐标系中
$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}$$

而
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta)]=\frac{2}{r}\cos\theta$$

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos\theta)]=$$

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(-r\sin^2\theta)=-\frac{2}{r}\cos\theta$$

$$\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}(r\cos\theta)=0$$

故
$$\nabla^2\varphi=0$$

（5）
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2\frac{\partial}{\partial r}(r^{-2}\cos\theta)]=\frac{2}{r^2}\cos\theta$$

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(r^{-2}\cos\theta)]=$$

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(-r^{-2}\sin^2\theta)=-\frac{2}{r^4}\cos\theta$$

$$\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}(r^{-2}\cos\theta)=0$$

故 $$\nabla^2\varphi=0$$

3.14 已知 $y>0$ 的空间中没有电荷，下列几个函数中哪些是可能的电位的解？

（1）$e^{-y}\cosh x$；

（2）$e^{-y}\cos x$；

（3）$e^{-\sqrt{2}y}\cos x\sin x$

（4）$\sin x\sin y\sin z$。

解 （1）$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{-y}\cosh x)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(e^{-y}\cosh x)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(e^{-y}\cosh x)=2e^{-y}\cosh x\neq0$$

所以函数 $e^{-y}\cosh x$ 不是 $y>0$ 空间中的电位的解；

（2）$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{-y}\cos x)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(e^{-y}\cos x)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(e^{-y}\cos x)=-e^{-y}\cos x+e^{-y}\cos x=0$$

所以函数 $e^{-y}\cos x$ 是 $y>0$ 空间中可能的电位的解；

（3）$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{-\sqrt{2}y}\cos x\sin x)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(e^{-\sqrt{2}y}\cos x\sin x)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(e^{-\sqrt{2}y}\cos x\sin x)=$$

$$-4e^{-\sqrt{2}y}\cos x\sin x+2e^{-\sqrt{2}y}\cos x\sin x\neq0$$

所以函数 $e^{-\sqrt{2}y}\cos x\sin x$ 不是 $y>0$ 空间中的电位的解；

（4）$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sin x\sin y\sin z)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sin x\sin y\sin z)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sin x\sin y\sin z)=$$

$$-3\sin x\sin y\sin z\neq0$$

所以函数 $\sin x\sin y\sin z$ 不是 $y>0$ 空间中的电位的解。

3.15 中心位于原点，边长为 L 的电介质立方体的极化强度矢量为 $\mathbf{P}=P_0(\mathbf{e}_x x+\mathbf{e}_y y+\mathbf{e}_z z)$。（1）计算面束缚电荷密度和体束缚电荷密度；（2）证明总的束缚电荷为零。

解 （1）$$\rho_P=-\nabla\cdot\mathbf{P}=-3P_0$$

$$\sigma_P(x=\frac{L}{2})=\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}\big|_{x=L/2}=\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{P}\big|_{x=L/2}=\frac{L}{2}P_0$$

$$\sigma_P(x=-\frac{L}{2})=\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}\big|_{x=-L/2}=-\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{P}\big|_{x=-L/2}=\frac{L}{2}P_0$$

同理 $$\sigma_P(y=\frac{L}{2})=\sigma_P(y=-\frac{L}{2})=\sigma_P(z=\frac{L}{2})=\sigma_P(z=-\frac{L}{2})=\frac{L}{2}P_0$$

（2）$$q_P=\int_\tau\rho_P\,d\tau+\oint_S\sigma_P\,dS=-3P_0L^3+6L^2\times\frac{L}{2}P_0=0$$

3.16 一半径为 R_0 的介质球，介电常数为 $\varepsilon_r\varepsilon_0$，其内均匀分布自由电荷 ρ，

电位为 $$\frac{2\varepsilon_r+1}{2\varepsilon_r}\left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)R_0^2$$

解　由 $\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=q$，可得到

$r<R_0$ 时，$$4\pi r^2 D_1=\frac{4\pi r^3}{3}\rho$$

即 $$D_1=\frac{\rho r}{3},\qquad E_1=\frac{D_1}{\varepsilon_r\varepsilon_0}=\frac{\rho r}{3\varepsilon_r\varepsilon_0}$$

$r>R_0$ 时，$$4\pi r^2 D_2=\frac{4\pi R_0^3}{3}\rho$$

即 $$D_2=\frac{\rho R_0^3}{3r^2},\qquad E_2=\frac{D_1}{\varepsilon_0}=\frac{\rho R_0^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

故中心点的电位为

$$\varphi(0)=\int_0^{R_0}E_1\,dr+\int_{R_0}^{\infty}E_2\,dr=\int_0^{R_0}\frac{\rho r}{3\varepsilon_r\varepsilon_0}dr+\int_{R_0}^{\infty}\frac{\rho R_0^3}{3\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{\rho R_0^2}{6\varepsilon_r\varepsilon_0}+\frac{\rho R_0^2}{3\varepsilon_0}=\frac{2\varepsilon_r+1}{2\varepsilon_r}\left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)R_0^2$$

3.17　一个半径为 R 的介质球，介电常数为 ε，球内的极化强度 $\mathbf{P}=\mathbf{e}_r K/r$，其中 K 为一常数。（1）计算束缚电荷体密度和面密度；（2）计算自由电荷密度；（3）计算球内、外的电场和电位分布。

解　（1）介质球内的束缚电荷体密度为 $$\rho_p=-\nabla\cdot\mathbf{P}=-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{K}{r}\right)=-\frac{K}{r^2}$$

在 $r=R$ 的球面上，束缚电荷面密度为 $$\sigma_p=\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}\big|_{r=R}=\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{P}\big|_{r=R}=\frac{K}{R}$$

（2）由于 $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$，所以 $$\nabla\cdot\mathbf{D}=\varepsilon_0\nabla\cdot\mathbf{E}+\nabla\cdot\mathbf{P}=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\nabla\cdot\mathbf{D}+\nabla\cdot\mathbf{P}$$

即 $$\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\nabla\cdot\mathbf{D}=\nabla\cdot\mathbf{P}$$

由此可得到介质球内的自由电荷体密度为 $$\rho=\nabla\cdot\mathbf{D}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\varepsilon_0}\nabla\cdot\mathbf{P}=-\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\varepsilon_0}\rho_p=\frac{\varepsilon K}{(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}$$

总的自由电荷量 $$q=\int_\tau\rho\,d\tau=\frac{\varepsilon K}{\varepsilon-\varepsilon_0}\int_0^R\frac{1}{r^2}4\pi r^2dr=\frac{4\pi\varepsilon RK}{\varepsilon-\varepsilon_0}$$

（3）介质球内、外的电场强度分别为

$$\mathbf{E}_1=\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon-\varepsilon_0}=\mathbf{e}_r\frac{K}{(\varepsilon-\varepsilon_0)r}\qquad(r<R)$$

$$\mathbf{E}_2=\mathbf{e}_r\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\mathbf{e}_r\frac{\varepsilon RK}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}\qquad(r>R)$$

介质球内、外的电位分别为

$$\varphi_1=\int_r^{\infty}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\int_r^{R}E_1dr+\int_R^{\infty}E_2dr=$$

$$\int_r^{R}\frac{K}{(\varepsilon-\varepsilon_0)r}dr+\int_R^{\infty}\frac{\varepsilon RK}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}dr=$$

$$\frac{K}{(\varepsilon-\varepsilon_0)}\ln\frac{R}{r}+\frac{\varepsilon K}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}\qquad (r\le R)$$

$$\varphi_2=\int_r^{\infty}E_2dr=\int_r^{\infty}\frac{\varepsilon RK}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)r^2}dr=\frac{\varepsilon RK}{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)r}\qquad (r\ge R)$$

3.18 （1）证明不均匀电介质在没有自由电荷密度时可能存在束缚电荷体密度；（2）导出束缚电荷密度 ρ_P 的表达式。

解 （1）由 $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$，得束缚电荷体密度为 $\rho_P=-\nabla\cdot\mathbf{P}=-\nabla\cdot\mathbf{D}+\varepsilon_0\nabla\cdot\mathbf{E}$

在介质内没有自由电荷密度时， $\nabla\cdot\mathbf{D}=0$，则有 $\rho_P=\varepsilon_0\nabla\cdot\mathbf{E}$

由于 $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$，有 $\nabla\cdot\mathbf{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\mathbf{E})=\varepsilon\nabla\cdot\mathbf{E}+\mathbf{E}\cdot\nabla\varepsilon=0$

所以 $$\nabla\cdot\mathbf{E}=-\frac{\mathbf{E}\cdot\nabla\varepsilon}{\varepsilon}$$

由此可见，当电介质不均匀时， $\nabla\cdot\mathbf{E}$ 可能不为零，故在不均匀电介质中可能存在束缚电荷体密度。

（2）束缚电荷密度 ρ_P 的表达式为 $\rho_P=\varepsilon_0\nabla\cdot\mathbf{E}=-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\mathbf{E}\cdot\nabla\varepsilon$

3.19 两种电介质的相对介电常数分别为 $\varepsilon_{r1}=2$ 和 $\varepsilon_{r2}=3$，其分界面为 $z=0$ 平面。如果已知介质 1 中的电场的

$$\mathbf{E}_1=\mathbf{e}_x2y-\mathbf{e}_y3x+\mathbf{e}_z(5+z)$$

那么对于介质 2 中的 $\mathbf{E}_2$ 和 $\mathbf{D}_2$，我们可得到什么结果？能否求出介质 2 中任意点的 $\mathbf{E}_2$ 和 $\mathbf{D}_2$？

解 设在介质 2 中

$$\mathbf{E}_2(x,y,0)=\mathbf{e}_xE_{2x}(x,y,0)+\mathbf{e}_yE_{2y}(x,y,0)+\mathbf{e}_zE_{2z}(x,y,0)$$

$$\mathbf{D}_2=\varepsilon_0\varepsilon_{r2}\mathbf{E}_2=3\varepsilon_0\mathbf{E}_2$$

在 $z=0$ 处，由 $\mathbf{e}_z\times(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)=0$ 和 $\mathbf{e}_z\cdot(\mathbf{D}_1-\mathbf{D}_2)=0$，可得

$$\begin{cases}\mathbf{e}_x2y-\mathbf{e}_y3x=\mathbf{e}_xE_{2x}(x,y,0)+\mathbf{e}_yE_{2y}(x,y,0)\\ 2\times5\varepsilon_0=3\varepsilon_0E_{2z}(x,y,0)\end{cases}$$

于是得到

$$E_{2x}(x,y,0)=2y$$
$$E_{2y}(x,y,0)=-3x$$
$$E_{2z}(x,y,0)=10/3$$

故得到介质 2 中的 $\mathbf{E}_2$ 和 $\mathbf{D}_2$ 在 $z=0$ 处的表达式分别为

$$\mathbf{E}_2(x,y,0)=\mathbf{e}_x2y-\mathbf{e}_y3x+\mathbf{e}_z(10/3)$$
$$\mathbf{D}_2(x,y,0)=\varepsilon_0(\mathbf{e}_x6y-$$

不能求出介质 2 中任意点的 $\mathbf{E}_2$ 和 $\mathbf{D}_2$。由于是非均匀场，介质中任意点的电场与

电场是不相同的。

3.20 电场中一半径为 a、介电常数为 ε 的介质球，已知球内、外的电位函数分别为

$$\varphi_1 = -E_0 r\cos\theta + \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0} a^3 E_0 \frac{\cos\theta}{r^2} \qquad r \ge a$$

$$\varphi_2 = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0} E_0 r\cos\theta \qquad r \le a$$

验证球表面的边界条件，并计算球表面的束缚电荷密度。

解　在球表面上

$$\varphi_1(a,\theta) = -E_0 a\cos\theta + \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0} aE_0\cos\theta = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0 a\cos\theta$$

$$\varphi_2(a,\theta) = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0 a\cos\theta$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=a} = -E_0\cos\theta - \frac{2(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0\cos\theta = -\frac{3\varepsilon}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0\cos\theta$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=a} = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0\cos\theta$$

故有　$\varphi_1(a,\theta) = \varphi_2(a,\theta)$，　$\varepsilon_0\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=a} = \varepsilon\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=a}$

可见 φ_1 和 φ_2 满足球表面上的边界条件。

球表面的束缚电荷密度为

$$\sigma_p = \mathbf{n}\cdot\mathbf{P}_2\big|_{r=a} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{E}_2 = -(\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=a} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0\cos\theta$$

3.21 平行板电容器的长、宽分别为 a 和 b，极板间距离为 d。电容器的一半厚度（$0\sim\dfrac{d}{2}$）用介电常数为 ε 的电介质填充，如题 3.21 图所示。

(1) (1) 板上外加电压 U_0，求板上的自由电荷面密度、束缚电荷；

(2) (2) 若已知板上的自由电荷总量为 Q，求此时极板间电压和束缚电荷；

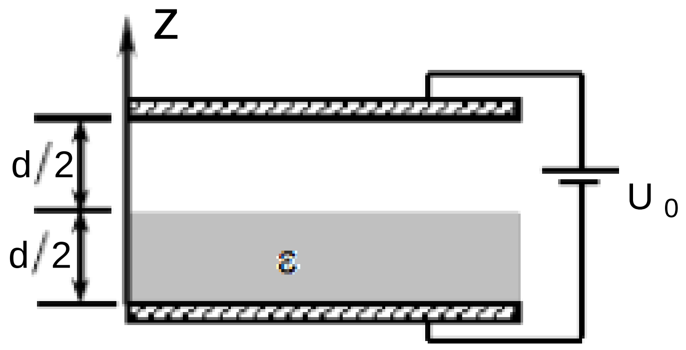
(3) (3) 求电容器的电容量。

解 （1） 设介质中的电场为 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_z E$，空气中的电场为 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_z E_0$。由 $D = D_0$，有

$$\varepsilon E = \varepsilon_0 E_0$$

又由于

$$E\frac{d}{2} + E_0\frac{d}{2} = -U_0$$



题 3.21 图

由以上两式解得

$$E = -\frac{2\varepsilon_0 U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}, \quad E_0 = -\frac{2\varepsilon U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$$

故下极板的自由电荷面密度为

$$\sigma_{下} = \varepsilon E = -\frac{2\varepsilon_0\varepsilon U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$$

上极板的自由电荷面密度为 $\sigma_{上} = -\varepsilon_0 E_0 = \dfrac{2\varepsilon_0 \varepsilon U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$

电介质中的极化强度 $\mathbf{P} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\mathbf{E} = -\mathbf{e}_z \dfrac{2\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$

故下表面上的束缚电荷面密度为 $\sigma_{p下} = -\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{P} = \dfrac{2\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$

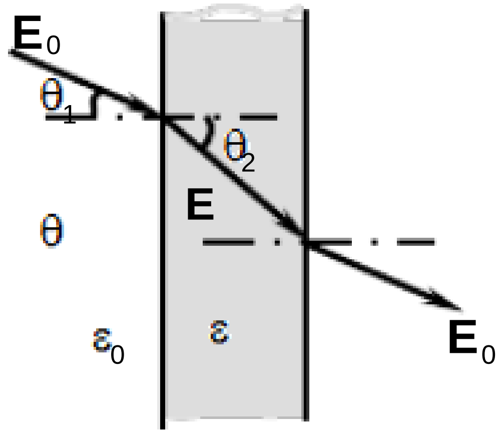
上表面上的束缚电荷面密度为 $\sigma_{p上} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{P} = -\dfrac{2\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$

（2）由 $\sigma = \dfrac{Q}{ab} = \dfrac{2\varepsilon_0\varepsilon U}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$

得到 $U = \dfrac{(\varepsilon+\varepsilon_0)dQ}{2\varepsilon_0\varepsilon ab}$

故 $\sigma_{p下} = \dfrac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q}{\varepsilon ab}$

$\sigma_{p上} = -\dfrac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q}{\varepsilon ab}$



题 3.22 图

（3）电容器的电容为 $C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{2\varepsilon_0\varepsilon ab}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}$

3.22 厚度为 t、介电常数为 $\varepsilon = 4\varepsilon_0$ 的无限大介质板，放置于均匀电场 $\mathbf{E}_0$ 中，板与 $\mathbf{E}_0$ 成角 θ_1，如题 3.22 图所示。求：（1）使 $\theta_2 = \pi/4$ 的 θ_1 值；（2）介质板两表面的极化电荷密度。

解 （1）根据静电场的边界条件，在介质板的表面上有 $\dfrac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$

由此得到 $\theta_1 = \tan^{-1}\dfrac{\varepsilon_0\tan\theta_2}{\varepsilon} = \tan^{-1}\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = \tan^{-1}\dfrac{1}{4} = 14^\circ$

（2）设介质板中的电场为 $\mathbf{E}$，根据分界面上的边界条件，有 $\varepsilon_0 E_{0n} = \varepsilon E_n$，即

$$\varepsilon_0 E_0\cos\theta_1 = \varepsilon E_n$$

所以 $E_n = \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}E_0\cos\theta_1 = \dfrac{1}{4}E_0\cos 14^\circ$

介质板左表面的束缚电荷面密度 $\sigma_p = -(\varepsilon-\varepsilon_0)E_n = -\dfrac{3}{4}\varepsilon_0 E_0\cos 14^\circ \approx -0.728\varepsilon_0 E_0$

介质板右表面的束缚电荷面密度 $\sigma_p = (\varepsilon-\varepsilon_0)E_n = \dfrac{3}{4}\varepsilon_0 E_0\cos 14^\circ \approx 0.728\varepsilon_0 E_0$

3.23 在介电常数为 ε 的无限大均匀介质中，开有如下的空腔，求各腔中的 $\mathbf{E}_0$ 和 $\mathbf{D}_0$：

（1）平行于 $\mathbf{E}$ 的针形空腔；

（2）底面垂直于 $\mathbf{E}$ 的薄盘形空腔；

（3）小球形空腔（见第四章 4.14 题）。

解 （1）对于平行于 $\mathbf{E}$ 的针形空腔，根据边界条件，在空腔的侧面上，有 $\mathbf{E}_0$

形空腔中

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

（2）对于底面垂直于 $\mathbf{E}$ 的薄盘形空腔，根据边界条件，在空腔的底面上，有 $\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}$。故在薄盘形空腔中

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{E}_0 = \frac{\mathbf{D}_0}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon \mathbf{E}}{\varepsilon_0}$$

3.24 在面积为 S 的平行板电容器内填充介电常数作线性变化的介质，从一极板 $(y=0)$ 处的 ε_1 一直变化到另一极板 $(y=d)$ 处的 ε_2，试求电容量。

解 由题意可知，介质的介电常数为 $\varepsilon = \varepsilon_1 + y(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/d$

设平行板电容器的极板上带电量分别为 $\pm q$，由高斯定理可得

$$D_y = \sigma = \frac{q}{S}$$

$$E_y = \frac{D_y}{\varepsilon} = \frac{q}{[\varepsilon_1 + y(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/d]S}$$

所以，两极板的电位差 $U = \int_0^d E_y \, dy = \int_0^d \frac{q}{[\varepsilon_1 + y(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/d]S} dy = \frac{qd}{S(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$

故电容量为 $C = \frac{q}{U} = \frac{S(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{d \ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}$

3.25 一体密度为 $\rho = 2.32\times10^{-7}\ \mathrm{C/m^3}$ 的质子束，束内的电荷均匀分布，束直径为 $2\ \mathrm{mm}$，束外没有电荷分布，试计算质子束内部和外部的径向电场强度。

解 在质子束内部，由高斯定理可得 $2\pi r E_r = \frac{1}{\varepsilon_0}\pi r^2 \rho$

故 $$E_r = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} = \frac{2.32\times10^{-7} r}{2\times8.854\times10^{-12}} = 1.31\times10^{4} r \ \mathrm{V/m} \quad (r < 10^{-3}\ \mathrm{m})$$

在质子束外部，有 $2\pi r E_r = \frac{1}{\varepsilon_0}\pi a^2 \rho$

故 $$E_r = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r} = \frac{2.32\times10^{-7}\times10^{-6}}{2\times8.854\times10^{-12} r} = 1.31\times10^{-2}\frac{1}{r} \ \mathrm{V/m} \quad (r > 10^{-3}\ \mathrm{m})$$

3.26 考虑一块电导率不为零的电介质 (γ, ε)，设其介质特性和导电特性都是不均匀的。证明当介质中有恒定电流 $\mathbf{J}$ 时，体积内将出现自由电荷，体密度为 $\rho = \mathbf{J}\cdot\nabla(\varepsilon/\gamma)$。试问有没有束缚体电荷 ρ_P？若有则进一步求出 ρ_P。

解 $$\rho = \nabla\cdot\mathbf{D} = \nabla\cdot(\varepsilon\mathbf{E}) = \nabla\cdot\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\mathbf{J}\right) = \mathbf{J}\cdot\nabla\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right) + \frac{\varepsilon}{\gamma}\nabla\cdot\mathbf{J}$$

对于恒定电流，有 $\nabla\cdot\mathbf{J} = 0$，故得到 $\rho = \mathbf{J}\cdot\nabla(\varepsilon/\gamma)$

介质中有束缚体电荷 ρ_P，且

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \mathbf{D} + \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{J} \cdot \nabla(\frac{\varepsilon}{\gamma}) + \varepsilon_0 \nabla \cdot (\frac{\mathbf{J}}{\gamma}) = -\mathbf{J} \cdot \nabla(\frac{\varepsilon}{\gamma}) + \mathbf{J} \cdot \nabla(\frac{\varepsilon_0}{\gamma}) = -\mathbf{J} \cdot \nabla(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\gamma})$$

3.27 填充有两层介质的同轴电缆，内导体半径为 a，外导体内半径为 c，介质的分界面半径为 b。两层介质的介电常数为 ε_1 和 ε_2，电导率为 γ_1 和 γ_2。设内导体的电压为 U_0，外导体接地。求：(1) 两导体之间的电流密度和电场强度分布；(2) 介质分界面上的自由电荷面密度；(3) 同轴线单位长度的电容及漏电阻。

解 (1) 设同轴电缆中单位长度的径向电流为 I，则由 $\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I$，可得电流密度

$$\mathbf{J} = \mathbf{e}_r \frac{I}{2\pi r} \qquad (a < r < c)$$

介质中的电场

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{J}}{\gamma_1} = \mathbf{e}_r \frac{I}{2\pi r \gamma_1} \qquad (a < r < b)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{J}}{\gamma_2} = \mathbf{e}_r \frac{I}{2\pi r \gamma_2} \qquad (b < r < c)$$

由于

$$U_0 = \int_a^b \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_b^c \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} = \frac{I}{2\pi\gamma_1} \ln\frac{b}{a} + \frac{I}{2\pi\gamma_2} \ln\frac{c}{b}$$

于是得到

$$I = \frac{2\pi\gamma_1\gamma_2 U_0}{\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)}$$

故两种介质中的电流密度和电场强度分别为

$$\mathbf{J} = \mathbf{e}_r \frac{\gamma_1\gamma_2 U_0}{r[\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)]} \qquad (a < r < c)$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_r \frac{\gamma_2 U_0}{r[\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)]} \qquad (a < r < b)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_r \frac{\gamma_1 U_0}{r[\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)]} \qquad (b < r < c)$$

(2) 由 $\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}$ 可得，介质 1 内表面的电荷面密度为

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}_1 \big|_{r=a} = \frac{\varepsilon_1 \gamma_2 U_0}{a[\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)]}$$

介质 2 外表面的电荷面密度为

$$\sigma_2 = -\varepsilon_2 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}_2 \big|_{r=c} = -\frac{\varepsilon_2 \gamma_1 U_0}{c[\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)]}$$

两种介质分界面上的电荷面密度为

$$\sigma_{12} = -(\varepsilon_1 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}_2)\big|_{r=b} = -\frac{(\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\gamma_1)U_0}{b[\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)]}$$

(3) 同轴线单位长度的漏电阻为

$$R = \frac{U_0}{I} = \frac{\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)}{2\pi\gamma_1\gamma_2}$$

由静电比拟，可得同轴线单位长度的电容为

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2 \ln(b/a) + \varepsilon_1 \ln(c/b)}$$

3.28 半径为 R_1 和 R_2 $(R_1<R_2)$ 的两个同心的理想导体球面间充满了介电常数为 ε、电导率为 $\gamma=\gamma_0(1+K/r)$ 的导电媒质（K 为常数）。若内导体球面的电位为 U_0，外导体球面接地。试求：（1）媒质中的电荷分布；（2）两个理想导体球面间的电阻。

解 设由内导体流向外导体的电流为 I，由于电流密度成球对称分布，所以

$$\mathbf{J}=\mathbf{e}_r\frac{I}{4\pi r^2}\qquad (R_1<r<R_2)$$

电场强度

$$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{J}}{\gamma}=\mathbf{e}_r\frac{I}{4\pi\gamma_0(r+K)r}\qquad (R_1<r<R_2)$$

由两导体间的电压

$$U_0=\int_{R_1}^{R_2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{I}{4\pi\gamma_0(r+K)r}dr=\frac{I}{4\pi\gamma_0K}\ln\left[\frac{R_2(R_1+K)}{R_1(R_2+K)}\right]$$

可得到

$$I=\frac{4\pi\gamma_0KU_0}{\ln\left[\dfrac{R_2(R_1+K)}{R_1(R_2+K)}\right]}$$

所以

$$\mathbf{J}=\mathbf{e}_r\frac{\gamma_0KU_0}{r^2\ln\left[\dfrac{R_2(R_1+K)}{R_1(R_2+K)}\right]}$$

媒质中的电荷体密度为

$$\rho=\mathbf{J}\cdot\nabla\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)=\frac{\varepsilon K^2U_0}{\ln\left[\dfrac{R_2(R_1+K)}{R_1(R_2+K)}\right]}\frac{1}{(r+K)^2r^2}$$

媒质内、外表面上的电荷面密度分别为

$$\sigma_1=\frac{\varepsilon}{\gamma}\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{J}\Big|_{r=R_1}=\frac{\varepsilon KU_0}{\ln\left[\dfrac{R_2(R_1+K)}{R_1(R_2+K)}\right]}\frac{1}{(R_1+K)R_1}$$

$$\sigma_2=-\frac{\varepsilon}{\gamma}\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{J}\Big|_{r=R_2}=-\frac{\varepsilon KU_0}{\ln\left[\dfrac{R_2(R_1+K)}{R_1(R_2+K)}\right]}\frac{1}{(R_2+K)R_2}$$

（2）两理想导体球面间的电阻

$$R=\frac{U_0}{I}=\frac{1}{4\pi\gamma_0K}\ln\frac{R_2(R_1+K)}{R_1(R_2+K)}$$

3.29 电导率为 γ 的无界均匀电介质内，有两个半径分别为 R_1 和 R_2 的理想导体小球，两球之间的距离为 $d(d\gg R_1,d\gg R_2)$，试求两小导体球面间的电阻。

解 此题可采用静电比拟的方法求解。假设两小球分别带电荷 q 和 $-q$，由于两球间的距离 $d\gg R_1$、$d\gg R_2$，可近似认为小球上的电荷均匀分布在球面上。由电荷 q 和 $-q$ 的电位叠加求出两小球表面的电位差，即可求得两小导体球面间的电容，再由静电比拟求出两小导体球面间的电阻。

设两小球分别带电荷 q 和 $-q$，由于 $d\gg R_1$、$d\gg R_2$，可得到两小球表面的

$$\varphi_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{d-R_2}\right)$$

$$\varphi_2=-\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{d-R_1}\right)$$

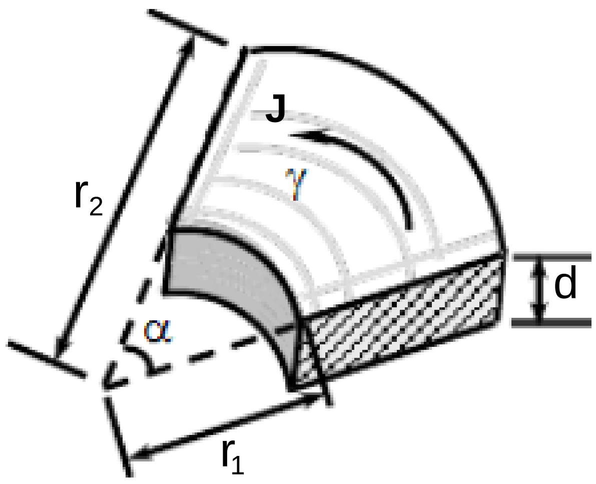
所以两小导体球面间的电容为
$$C=\frac{q}{\varphi_1-\varphi_2}=\frac{4\pi\varepsilon}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{1}{d-R_1}-\dfrac{1}{d-R_2}}$$

由静电比拟，得到两小导体球面间的电导为
$$G=\frac{I}{\varphi_1-\varphi_2}=\frac{4\pi\gamma}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{1}{d-R_1}-\dfrac{1}{d-R_2}}$$

故两个小导体球面间的电阻为
$$R=\frac{1}{G}=\frac{1}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{1}{d-R_1}-\frac{1}{d-R_2}\right)$$

3.30 在一块厚度 d 的导电板上，由两个半径为 r_1 和 r_2 的圆弧和夹角为 α 的两半径割出的一块扇形体，如题 3.30 图所示。求：（1）沿厚度方向的电阻；（2）两圆弧面之间的电阻；沿 α 方向的两电极的电阻。设导电板的电导率为 γ。

解 （1）设沿厚度方向的两电极的电压为 U_1，则有



3.30 图

$$E_1=\frac{U_1}{d}$$

$$J_1=\gamma E_1=\frac{\gamma U_1}{d}$$

$$I_1=J_1S_1=\frac{\gamma U_1}{d}\frac{\alpha}{2}(r_2^2-r_1^2)$$

故得到沿厚度方向的电阻为

$$R_1=\frac{U_1}{I_1}=\frac{2d}{\alpha\gamma(r_2^2-r_1^2)}$$

（2）设内外两圆弧面电极之间的电流为 I_2，则

$$J_2=\frac{I_2}{S_2}=\frac{I_2}{\alpha rd}\qquad E_2=\frac{J_2}{\gamma}=\frac{I_2}{\gamma\alpha rd}$$

$$U_2=\int_{r_1}^{r_2}E_2\,dr=\frac{I_2}{\gamma\alpha d}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

故得到两圆弧面之间的电阻为

$$R_2=\frac{U_2}{I_2}=\frac{1}{\gamma\alpha d}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

（3）设沿 α 方向的两电极的电压为 U_3，则有 $U_3=\int_0^{\alpha}E_3r\,d\phi$

由于 E_3 与 ϕ 无关，所以得到

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_\phi \frac{U_3}{\alpha r}$$

$$\mathbf{J}_3 = \gamma \mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_\phi \frac{\gamma U_3}{\alpha r}$$

$$I_3 = \int_{S_3} \mathbf{J}_3 \cdot \mathbf{e}_\phi dS = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\gamma d U_3}{\alpha r} dr = \frac{\gamma d U_3}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

故得到沿 α 方向的电阻为 $R_3 = \frac{U_3}{I_3} = \frac{\alpha}{\gamma d \ln(r_2/r_1)}$

3.31 圆柱形电容器外导体内半径为 b，内导体半径为 a。当外加电压 U 固定时，在 b 一定的条件下，求使电容器中的最大电场强度取极小值 E_{min} 的内导体半径 a 的值和这个 E_{min} 的值。

解 设内导体单位长度带电荷为 ρ_l，由高斯定理可求得圆柱形电容器中的电场强度为

$$E(r) = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

由内外导体间的电压 $U = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{b}{a}$

得到 $\rho_l = \frac{2\pi\varepsilon_0 U}{\ln(b/a)}$

由此得到圆柱形电容器中的电场强度与电压的关系式 $E(r) = \frac{U}{r\ln(b/a)}$

在圆柱形电容器中，$r = a$ 处的电场强度最大 $E(a) = \frac{U}{a\ln(b/a)}$

令 $E(a)$ 对 a 的导数为零，即 $\frac{\partial E(a)}{\partial a} = -\frac{1}{a^2} \frac{\ln(b/a) - 1}{\ln^2(b/a)} = 0$

由此得到 $\ln(b/a) = 1$

故有 $a = \frac{b}{e} \approx \frac{b}{2.718}$

$$E_{min} = \frac{e}{b} U = 2.718 \frac{U}{b}$$

3.32 证明：同轴线单位长度的静电储能 W_e 等于 $\frac{q_l^2}{2C}$。q_l 为单位长度上的电荷量，C 为单位长度上的电容。

解 由高斯定理可求得圆柱形电容器中的电场强度为 $E(r) = \frac{q_l}{2\pi\varepsilon r}$

内外导体间的电压为

$$U = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon r} dr = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b}{a}$$

则同轴线单位长度的电容为 $C=\dfrac{q_l}{U}=\dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$

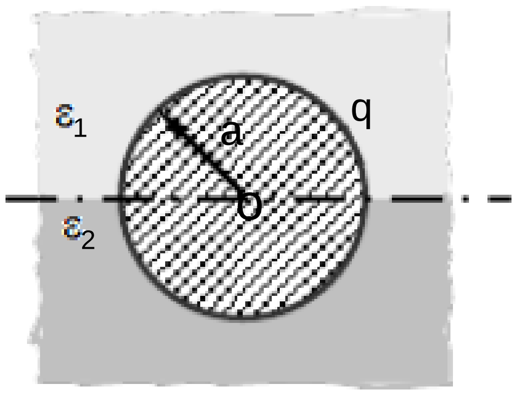
同轴线单位长度的静电储能为 $W_e=\dfrac{1}{2}\int_\tau \varepsilon E^2\,d\tau=\dfrac{1}{2}\int_a^b \varepsilon\left(\dfrac{q_l}{2\pi\varepsilon r}\right)^2 2\pi r\,dr=\dfrac{1}{2}\dfrac{q_l^2}{2\pi\varepsilon}\ln(b/a)=\dfrac{1}{2}\dfrac{q_l^2}{C}$

3.33 如题 3.33 图所示，一半径为 a、带电量 q 的导体球，其球心位于两种介质的分界面上，此两种介质的电容率分别为 ε_1 和 ε_2，分界面为无限大平面。求：（1）导体球的电容；（2）总的静电能量。

解 （1）由于电场沿径向分布，根据边界条件，在两种介质的分界面上 $E_{1t}=E_{2t}$，故有 $E_1=E_2=E$。由于 $D_1=\varepsilon_1E_1$、$D_2=\varepsilon_2E_2$，所以 $D_1\neq D_2$。由高斯定理，得到

$$D_1S_1+D_2S_2=q$$

即 $$2\pi r^2\varepsilon_1E+2\pi r^2\varepsilon_2E=q$$



题 3.33 图

所以 $$E=\frac{q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

导体球的电位

$$\varphi(a)=\int_a^\infty E\,dr=\frac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\int_a^\infty\frac{1}{r^2}dr=\frac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a}$$

故导体球的电容 $C=\dfrac{q}{\varphi(a)}=2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a$

（2） 总的静电能量为 $W_e=\dfrac{1}{2}q\varphi(a)=\dfrac{q^2}{4\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a}$

3.34 把一带电量 q、半径为 a 的导体球切成两半，求两半球之间的电场力。

解 先利用虚位移法求出导体球表面上单位面积的电荷受到的静电力 $\mathbf{f}$，然后在半球面上对 $\mathbf{f}$ 积分，求出两半球之间的电场力。

导体球的电容为 $C=4\pi\varepsilon_0a$

故静电能量为 $W_e=\dfrac{q^2}{2C}=\dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0a}$

根据虚位移法，导体球表面上单位面积的电荷受到的静电力

$$f=-\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial W_e}{\partial a}=-\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0a}\right)=\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0a^4}$$

方向沿导体球表面的外法向，即 $\mathbf{f}=\mathbf{e}_r f=\dfrac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0a^4}\mathbf{e}_r$

这里 $\mathbf{e}_r=\mathbf{e}_x\sin\theta\cos\phi+\mathbf{e}_y\sin\theta\sin\phi+\mathbf{e}_z\cos\theta$

在半球面上对 $\mathbf{f}$ 积分，即得到两半球之间的静电力为

$$\mathbf{F}=\int\mathbf{f}\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\mathbf{e}_r\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0a^4}a^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi=\mathbf{e}_z\frac{2\pi a^2q^2}{32\pi^2\varepsilon_0a^4}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\ \cdots$$

3.35 如题 3.35 图所示，两平行的金属板，板间距离为 d，竖直地插入在电容

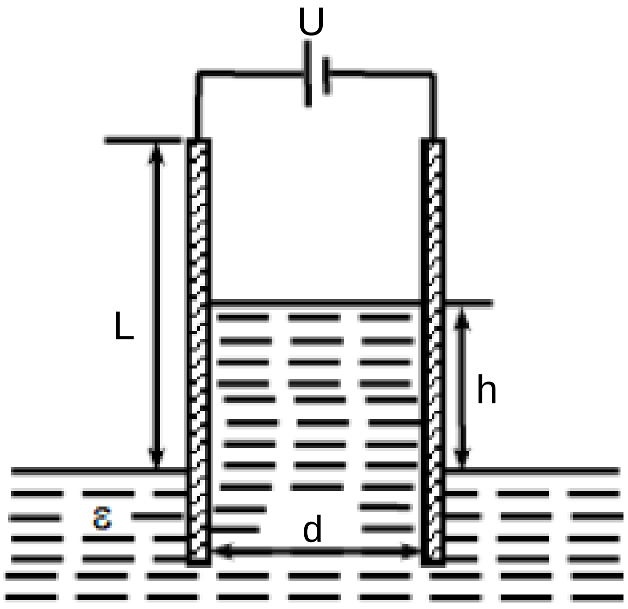
体中，两板间加电压 U，证明液面升高

$$h=\frac{1}{2\rho g}(\varepsilon-\varepsilon_0)\left(\frac{U}{d}\right)^2$$

其中 ρ 为液体的质量密度。

解 设金属板的宽度为 a、高度为 L。当金属板间的液面升高为 h 时，其电容为

$$C=\frac{\varepsilon ah}{d}+\frac{\varepsilon_0 a(L-h)}{d}$$



题 3.35 图

金属板间的静电能量为

$$W_e=\frac{1}{2}CU^2=\frac{aU^2}{2d}[h\varepsilon+(L-h)\varepsilon_0]$$

液体受到竖直向上的静电力为

$$F_e=\frac{\partial W_e}{\partial h}=\frac{aU^2}{2d}(\varepsilon-\varepsilon_0)$$

而液体所受重力

$$F_g=mg=ahd\rho g$$

F_e 与 F_g 相平衡，即 $\dfrac{aU^2}{2d}(\varepsilon-\varepsilon_0)=ahdg$

故得到液面上升的高度

$$h=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)U^2}{2d^2\rho g}=\frac{1}{2\rho g}(\varepsilon-\varepsilon_0)\left(\frac{U}{d}\right)^2$$

3.36 可变空气电容器，当动片由 0° 至 180° 电容量由 25 至 350pF 直线地变化，当动片为 θ 角时，求作用于动片上的力矩。设动片与定片间的电压为 $U_0=400V$。

解 当动片为 θ 角时，电容器的电容为

$$C_\theta=25+\frac{350-25}{180^\circ}\theta=25+1.81\theta\ \ PF=(25+1.81\theta)\times10^{-12}\ \ F$$

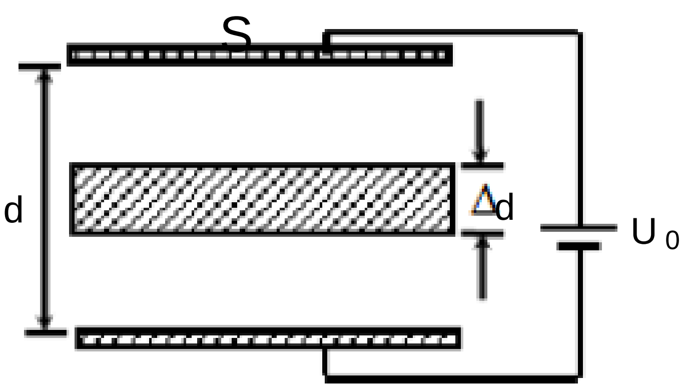
此时电容器中的静电能量为 $W_e=\dfrac{1}{2}C_\theta U_0^2=\dfrac{1}{2}(25+1.81\theta)\times10^{-12}U_0^2$

作用于动片上的力矩为 $T=\dfrac{\partial W_e}{\partial\theta}=\dfrac{1}{2}\times1.81\times10^{-12}U_0^2=1.45\times10^{-7}\ \ Nm$

3.37 平行板电容器的电容是 $\varepsilon_0 S/d$，其中 S 是板的面积，d 为间距，忽略边缘效应。

（1）如果把一块厚度为 Δd 的不带电金属插入两极板之间，但不与两极接触，如题 3.37(a) 图所示。则在原电容器电压 U_0 一定的条件下，电容器的能量如何变化？电容量如何变化？

（2）如果在电荷 q 一定的条件下，将一块横截面为 ΔS、介电常数为 ε 的电介质片插入电容器（与电容器极板面积基本上垂直地插入，如题 3.37(b) 图所示，则电容器的能量如何变化？电容量又如何变化？



题 3.37 图 (a)

解 （1）在电压 U_0 一定的条件下，未插

极板间的电场为

$$E_0=\frac{U_0}{d}$$

电容为 $$C_0=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

静电能量为 $$W_{e0}=\frac{1}{2}C_0U_0^2=\frac{\varepsilon_0 SU_0^2}{2d}$$

当插入金属板后，电容器中的电场为 $$E=\frac{U_0}{d-\Delta d}$$

此时静电能量和电容分别为 $$W_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{U_0}{d-\Delta d}\right)^2 S(d-\Delta d)=\frac{\varepsilon_0 SU_0^2}{2(d-\Delta d)}$$

$$C=\frac{2W_e}{U_0^2}=\frac{\varepsilon_0 S}{d-\Delta d}$$

故电容器的电容及能量的改变量分别为

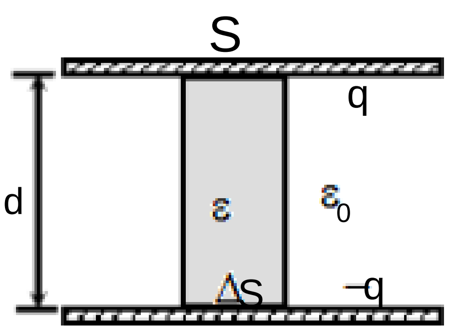
$$\Delta C=C-C_0=\frac{\varepsilon_0 S}{d-\Delta d}-\frac{\varepsilon_0 S}{d}=\frac{\varepsilon_0 S\Delta d}{d(d-\Delta d)}$$

$$\Delta W_e=W_e-W_{e0}=\frac{\varepsilon_0 SU_0^2\Delta d}{2d(d-\Delta d)}$$

（2）在电荷 q 一定的条件下，未插入电介质板前，极板间的电场为 $$E_0=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

静电能量为 $$W_{e0}=\frac{q^2}{2C_0}=\frac{dq^2}{2\varepsilon_0 S}$$

当插入电介质板后，由介质分界面上的边界条件 $E_{1t}=E_{2t}$，有 $E_1=E_2=E$



题 3.37 图 (b)

再由高斯定理可得 $$E\varepsilon\Delta S+E\varepsilon_0(S-\Delta S)=q$$

于是得到极板间的电场为 $$E=\frac{q}{\varepsilon\Delta S+\varepsilon_0(S-\Delta S)}$$

两极板间的电位差位 $$U=Ed=\frac{qd}{\varepsilon\Delta S+\varepsilon_0(S-\Delta S)}$$

此时的静电能量为 $$W_e=\frac{1}{2}qU=\frac{1}{2}\frac{q^2 d}{\varepsilon\Delta S+\varepsilon_0(S-\Delta S)}$$

其电容为 $$C=\frac{\varepsilon\Delta S+\varepsilon_0(S-\Delta S)}{d}$$

故电容器的电容及能量的改变量分别为 $$\Delta C=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)\Delta S}{d}$$

$$\Delta W_e=-\frac{1}{2}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)q^2 d}{\varepsilon_0 S[\varepsilon\Delta S+\varepsilon_0(S-\Delta S)]}$$

3.38 如果不引入电位函数，静电问题也可以通过直接求解法求解 **E** 的微分方

（1）证明：有源区 $\mathbf{E}$ 的微分方程为 $\nabla^2\mathbf{E}=\dfrac{\nabla\rho_t}{\varepsilon_0}$， $\rho_t=\rho+\rho_P$ ；

（2）证明： $\mathbf{E}$ 的解是 $\mathbf{E}=-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_\tau\dfrac{\nabla'\rho_t}{R}\mathrm{d}\tau'$

解 （1）由 $\nabla\times\mathbf{E}=0$，可得 $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=0$，即 $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-\nabla^2\mathbf{E}=0$

又
$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\cdot(\mathbf{D}-\mathbf{P})=\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho+\rho_P)$$

故得到
$$\nabla^2\mathbf{E}=\frac{\nabla(\rho+\rho_P)}{\varepsilon_0}=\frac{\nabla\rho_t}{\varepsilon_0}$$

（2）在直角坐标系中 $\nabla^2\mathbf{E}=\dfrac{\nabla\rho_t}{\varepsilon_0}$ 的三个分量方程为

$$\nabla^2E_x=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\rho_t}{\partial x},\quad\nabla^2E_y=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\rho_t}{\partial y},\quad\nabla^2E_z=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\rho_t}{\partial z}$$

其解分别为

$$E_x=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_\tau\frac{1}{R}\frac{\partial\rho_t}{\partial x'}\mathrm{d}\tau'$$

$$E_y=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_\tau\frac{1}{R}\frac{\partial\rho_t}{\partial y'}\mathrm{d}\tau'$$

$$E_z=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_\tau\frac{1}{R}\frac{\partial\rho_t}{\partial z'}\mathrm{d}\tau'$$

故
$$\mathbf{E}=\mathbf{e}_xE_x+\mathbf{e}_yE_y+\mathbf{e}_zE_z=$$
$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_\tau\frac{1}{R}\left[\mathbf{e}_x\frac{\partial\rho_t}{\partial x'}+\mathbf{e}_y\frac{\partial\rho_t}{\partial y'}+\mathbf{e}_z\frac{\partial\rho_t}{\partial z'}\right]\mathrm{d}\tau'=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_\tau\frac{\nabla'\rho_t}{R}\mathrm{d}\tau'$$

3.39 证明： $\int\limits_\tau\nabla'\left(\dfrac{\rho_t}{R}\right)\mathrm{d}\tau'=0$

解 由于 $\nabla'\left(\dfrac{\rho_t}{R}\right)=\rho_t\nabla'\left(\dfrac{1}{R}\right)+\dfrac{\nabla'\rho_t}{R}=\rho_t\dfrac{\mathbf{R}}{R^3}+\dfrac{\nabla'\rho_t}{R}$ ，所以

$$\int\limits_\tau\nabla'\left(\frac{\rho_t}{R}\right)\mathrm{d}\tau'=\int\limits_\tau\rho_t\frac{\mathbf{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau'+\int\limits_\tau\frac{\nabla'\rho_t}{R}\mathrm{d}\tau'=4\pi\varepsilon_0\mathbf{E}+\int\limits_\tau\frac{\nabla'\rho_t}{R}\mathrm{d}\tau'$$

由题 3.38(2) 可知
$$\int\limits_\tau\frac{\nabla'\rho_t}{R}\mathrm{d}\tau'=-4\pi\varepsilon_0\mathbf{E}$$

故
$$\int\limits_\tau\nabla'\left(\frac{\rho_t}{R}\right)\mathrm{d}\tau'=-4\pi\varepsilon_0\mathbf{E}+4\pi\varepsilon_0\mathbf{E}=0$$

四章习题解答

4.1 如题 4.1 图所示为一长方形截面的导体槽，槽可视为无限长，其上有一块与槽相绝缘的盖板，槽的电位为零，上边盖板的电位为 U_0，求槽内的电位函数。

解 根据题意，电位 $\varphi(x,y)$ 满足的边界条件为

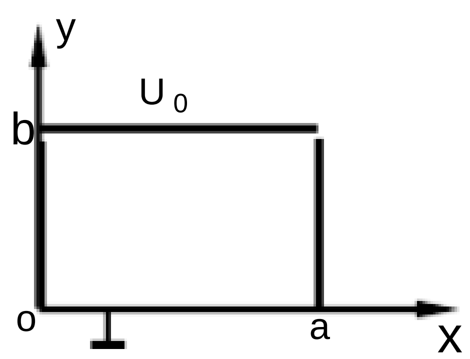
① $\varphi(0,y)=\varphi(a,y)=0$

② $\varphi(x,0)=0$

③ $\varphi(x,b)=U_0$

根据条件①和②，电位 $\varphi(x,y)$ 的通解应取为

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh(\frac{n\pi y}{a})\sin(\frac{n\pi x}{a})$$



题 4.1 图

由条件③，有

$$U_0=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh(\frac{n\pi b}{a})\sin(\frac{n\pi x}{a})$$

两边同乘以 $\sin(\frac{n\pi x}{a})$，并从 0 到 a 对 x 积分，得到

$$A_n=\frac{2U_0}{a\sinh(n\pi b/a)}\int_0^a\sin(\frac{n\pi x}{a})dx=$$

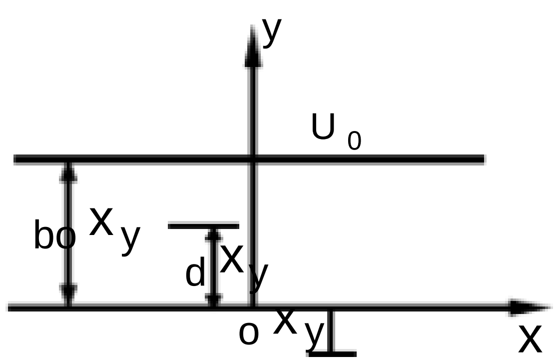
$$\frac{2U_0}{n\pi\sinh(n\pi b/a)}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}\dfrac{4U_0}{n\pi\sinh(n\pi b/a)}, & n=1,3,5,\cdots\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

故得到槽内的电位分布 $$\varphi(x,y)=\frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{1}{n\sinh(n\pi b/a)}\sinh(\frac{n\pi y}{a})\sin(\frac{n\pi x}{a})$$

4.2 两平行无限大导体平面，距离为 b，其间有一极薄的导体片由 $y=d$ 到 $y=b$ $(-\infty<x<\infty)$。上板和薄片保持电位 U_0，下板保持零电位，求板间电位的解。设在薄片平面上，从 $y=0$ 到 $y=d$，电位线性变化，$\varphi(0,y)=U_0y/d$。

解 应用叠加原理，设板间的电位为

$$\varphi(x,y)=\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)$$



题 4.2 图

其中，$\varphi_1(x,y)$ 为不存在薄片的平行无限大导体平面间（电压为 U_0）的电位，即 $\varphi_1(x,y)=U_0y/b$；$\varphi_2(x,y)$ 是两个电位为零的平行导体板间有导体薄片时的电位，其边界条件为：

① $\varphi_2(x,0)=\varphi_2(x,b)=0$

② $\varphi_2(x,y)=0\ (x\to\infty)$

③ $$\varphi_2(0,y)=\varphi(0,y)-\varphi_1(0,y)=\begin{cases}U_0-\dfrac{U_0}{b}y & (0\le y\le d)\\ \dfrac{U_0}{d}y-\dfrac{U_0}{b}y & \end{cases}$$

根据条件①和②，可设 $\varphi_2(x,y)$ 的通解为 $\varphi_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi y}{b})e^{-\frac{n\pi}{b}|x|}$

由条件③有 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi y}{b})=\begin{cases}U_0-\frac{U_0}{b}y & (0\le y\le d)\\ \frac{U_0}{d}y-\frac{U_0}{b}y & (d\le y\le b)\end{cases}$

两边同乘以 $\sin(\frac{n\pi y}{b})$，并从 0 到 b 对 y 积分，得到

$$A_n=\frac{2U_0}{b}\int_0^d(1-\frac{y}{b})\sin(\frac{n\pi y}{b})dy+\frac{2U_0}{b}\int_d^b(\frac{1}{d}-\frac{1}{b})y\sin(\frac{n\pi y}{b})dy=\frac{2U_0}{(n\pi)^2}\frac{b}{d}\sin(\frac{n\pi d}{b})$$

故得到 $\varphi(x,y)=\frac{U_0}{b}y+\frac{2bU_0}{d\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(\frac{n\pi d}{b})\sin(\frac{n\pi y}{b})e^{-\frac{n\pi}{b}|x|}$

4.3 求在上题的解中，除开 U_0y/b 一项外，其他所有项对电场总储能的贡献。并按 $C_f=\frac{2W_e}{U_0^2}$ 定出边缘电容。

解 在导体板（$y=0$）上，相应于 $\varphi_2(x,y)$ 的电荷面密度

$$\sigma_2=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\bigg|_{y=0}=-\frac{2\varepsilon_0U_0}{\pi d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(\frac{n\pi d}{b})e^{-\frac{n\pi}{b}|x|}$$

则导体板上（沿 z 方向单位长）相应的总电荷

$$q_2=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_2dx=2\int_0^{\infty}\sigma_2dx=-2\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\varepsilon_0U_0}{n\pi d}\sin(\frac{n\pi d}{b})e^{-\frac{n\pi}{b}x}dx=-\frac{4\varepsilon_0U_0b}{\pi^2d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(\frac{n\pi d}{b})$$

相应的电场储能为 $W_e=\frac{1}{2}q_2U_0=-\frac{2\varepsilon_0bU_0^2}{\pi^2d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(\frac{n\pi d}{b})$

其边缘电容为 $C_f=\frac{2W_e}{U_0^2}=\frac{4\varepsilon_0b}{\pi^2d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(\frac{n\pi d}{b})$

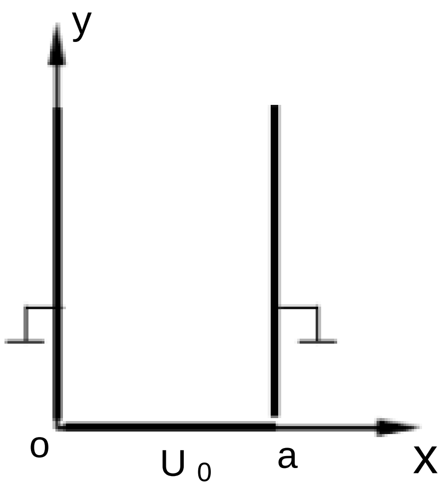
4.4 如题 4.4 图所示的导体槽，底面保持电位 U_0，其余两面电位为零，求槽内的电位的解。

解 根据题意，电位 $\varphi(x,y)$ 满足的边界条件为

① $\varphi(0,y)=\varphi(a,y)=0$

② $\varphi(x,y)\to0\ (y\to\infty)$

③ $\varphi(x,0)=U_0$



题 4.4 图 a

根据条件①和②，电位 $\varphi(x,y)$ 的通解应取为

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-n\pi y/a}\sin(\frac{n\pi x}{a})$$

由条件③，有 $U_0=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi x}{a})$

两边同乘以 $\sin(\frac{n\pi x}{a})$，并从 0 到 a 对 x 积分，得到

$$A_n=\frac{2U_0}{a}\int_0^a \sin(\frac{n\pi x}{a})dx=\frac{2U_0}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}\frac{4U_0}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

故得到槽内的电位分布为 $\varphi(x,y)=\frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5}\frac{1}{n}e^{-n\pi y/a}\sin(\frac{n\pi x}{a})$

4.5 一长、宽、高分别为 a、b、c 的长方体表面保持零电位，体积内填充密度为

$$\rho=y(y-b)\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(\frac{\pi z}{c})$$

的电荷。求体积内的电位 φ。

解 在体积内，电位 φ 满足泊松方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}y(y-b)\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(\frac{\pi z}{c}) \tag{1}$$

长方体表面 S 上，电位 φ 满足边界条件 $\varphi|_S=0$。由此设电位 φ 的通解为

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}A_{mnp}\sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})\sin(\frac{p\pi z}{c})$$

代入泊松方程（1），可得

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}A_{mnp}[(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2+(\frac{p\pi}{c})^2]\times$$

$$\sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})\sin(\frac{p\pi z}{c})=y(y-b)\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(\frac{\pi z}{c})$$

由此可得

$$A_{mnp}=0 \qquad (m\neq 1 \text{或} p\neq 1)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}A_{1n1}[(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2+(\frac{\pi}{c})^2]\sin(\frac{n\pi y}{b})=y(y-b) \tag{2}$$

由式（2），可得

$$A_{1n1}[(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2+(\frac{\pi}{c})^2]=\frac{2}{b}\int_0^b y(y-b)\sin(\frac{n\pi y}{b})dy=\frac{4}{b}(\frac{b}{n\pi})^3(\cos n\pi-1)=$$

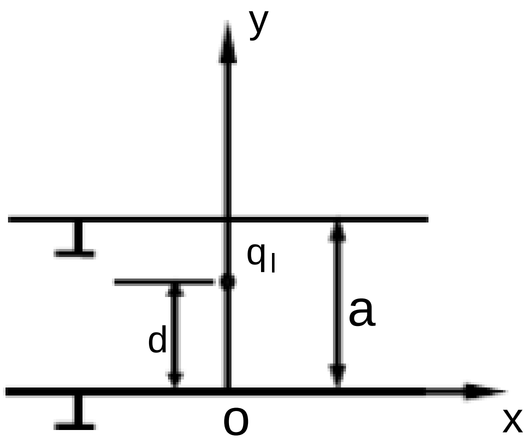
$$\begin{cases}-\frac{8b^2}{(n\pi)^3} & n=1,3,5,\cdots\\ 0 & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

故 $$\varphi(x,y,z)=-\frac{8b^2}{\pi^5\varepsilon_0}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^3[(\frac{1}{a})^2+(\frac{n}{b})^2+(\frac{1}{c})^2]}\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})\sin(\frac{\pi z}{c})$$

4.6 如题 4.6 图所示的一对无限大接地平行导体板，板间有一与 z 轴平行的线位置为 $(0,d)$。求板间的电位函数。

解　由于在 $(0,d)$ 处有一与 z 轴平行的线电荷 q_l，以 $x=0$ 为界将场空间分割为 $x>0$ 和 $x<0$ 两个区域，则这两个区域中的电位 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 都满足拉普拉斯方程。而在 $x=0$ 的分界面上，可利用 δ 函数将线电荷 q_l 表示成电荷面密度 $\sigma(y)=q_l\delta(y-y_0)$。

电位的边界条件为



题 4.6 图

① $\varphi_1(x,0)=\varphi_1(x,a)=0$

$\varphi_2(x,0)=\varphi_2(x,a)=0$

② $\varphi_1(x,y)\to 0\ (x\to\infty)$

$\varphi_2(x,y)\to 0\ (x\to-\infty)$

③ $\varphi_1(0,y)=\varphi_2(0,y)$

$$\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0}=-\frac{q_l}{\varepsilon_0}\delta(y-d)$$

由条件①和②，可设电位函数的通解为

$$\varphi_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-n\pi x/a}\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\qquad(x>0)$$

$$\varphi_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{n\pi x/a}\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\qquad(x<0)$$

由条件③，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\tag{1}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{n\pi}{a}\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi}{a}\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)=\frac{q_l}{\varepsilon_0}\delta(y-d)\tag{2}$$

由式（1），可得

$$A_n=B_n\tag{3}$$

将式（2）两边同乘以 $\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$，并从 0 到 a 对 y 积分，有

$$A_n+B_n=\frac{2q_l}{n\pi\varepsilon_0}\int_0^a\delta(y-d)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)dy=\frac{2q_l}{n\pi\varepsilon_0}\sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right)\tag{4}$$

由式（3）和（4）解得

$$A_n=B_n=\frac{q_l}{n\pi\varepsilon_0}\sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right)$$

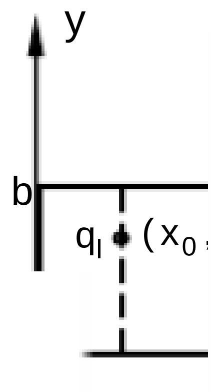
故

$$\varphi_1(x,y)=\frac{q_l}{\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right)e^{-n\pi x/a}\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\qquad(x>0)$$

$$\varphi_2(x,y)=\frac{q_l}{\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right)e^{n\pi x/a}\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

$(x<0)$

4.7　如题 4.7 图所示的矩形导体槽的电位为零，槽中有一与槽平行的线电荷 q_l。求槽内的电位函数。



题 4.7

解　由于在 (x_0, y_0) 处有一与 z 轴平行的线电荷 q_l，以 $x = x_0$ 为界将场空间分割为 $0 < x < x_0$ 和 $x_0 < x < a$ 两个区域，则这两个区域中的电位 $\varphi_1(x, y)$ 和 $\varphi_2(x, y)$ 都满足拉普拉斯方程。而在 $x = x_0$ 的分界面上，可利用 δ 函数将线电荷 q_l 表示成电荷面密度 $\sigma(y) = q_l\,\delta(y - y_0)$，电位的边界条件为

① $\varphi_1(0, y) = 0$，$\varphi_2(a, y) = 0$

② $\varphi_1(x, 0) = \varphi_1(x, b) = 0$

$\varphi_2(x, 0) = \varphi_2(x, b) = 0$

③ $\varphi_1(x_0, y) = \varphi_2(x_0, y)$

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)\Big|_{x = x_0} = -\frac{q_l}{\varepsilon_0}\delta(y - y_0)$$

由条件①和②，可设电位函数的通解为

$$\varphi_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \qquad (0 < x < x_0)$$

$$\varphi_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a - x)\right] \qquad (x_0 < x < a)$$

由条件③，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sinh\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a - x_0)\right] \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\cosh\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\cosh\left[\frac{n\pi}{b}(a - x_0)\right] = \frac{q_l}{\varepsilon_0}\delta(y - y_0) \qquad (2)$$

由式（1），可得

$$A_n \sinh\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) - B_n \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a - x_0)\right] = 0 \qquad (3)$$

将式（2）两边同乘以 $\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$，并从 0 到 b 对 y 积分，有

$$A_n \cosh\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) + B_n \cosh\left[\frac{n\pi}{b}(a - x_0)\right] = \frac{2q_l}{n\pi\varepsilon_0}\int_0^b \delta(y - y_0)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy = \frac{2q_l}{n\pi\varepsilon_0}\sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right) \qquad (4)$$

由式（3）和（4）解得

$$A_n = \frac{2q_l}{\sinh(n\pi a/b)}\frac{1}{n\pi\varepsilon_0}\sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a - x_0)\right]\sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right)$$

$$B_n = \frac{2q_l}{\sinh(n\pi a/b)}\frac{1}{n\pi\varepsilon_0}\sinh\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right)$$

故

$$\varphi_1(x,y)=\frac{2q_l}{\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sinh(n\pi a/b)}\sinh[\frac{n\pi}{b}(a-x_0)]\sin(\frac{n\pi y_0}{b})\sinh(\frac{n\pi x}{b})\sin(\frac{n\pi y}{b})\qquad(0<x<x_0)$$

$$\varphi_2(x,y)=\frac{2q_l}{\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sinh(n\pi a/b)}\sinh(\frac{n\pi x_0}{b})\sin(\frac{n\pi y_0}{b})\sinh[\frac{n\pi}{b}(a-x)]\sin(\frac{n\pi y}{b})\qquad(x_0<x<a)$$

若以 $y=y_0$ 为界将场空间分割为 $0<y<y_0$ 和 $y_0<y<b$ 两个区域，则可类似地得到

$$\varphi_1(x,y)=\frac{2q_l}{\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sinh(n\pi b/a)}\sinh[\frac{n\pi}{a}(b-y_0)]\sin(\frac{n\pi x_0}{a})\sinh(\frac{n\pi y}{a})\sin(\frac{n\pi x}{a})\qquad(0<y<y_0)$$

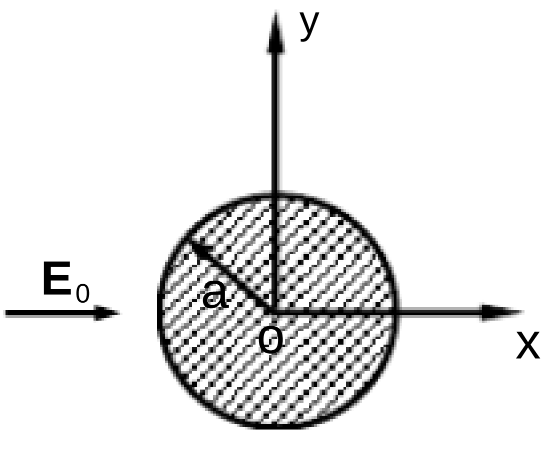
$$\varphi_2(x,y)=\frac{2q_l}{\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sinh(n\pi b/a)}\sinh(\frac{n\pi y_0}{a})\sin(\frac{n\pi x_0}{a})\sinh[\frac{n\pi}{a}(b-y)]\sin(\frac{n\pi x}{a})\qquad(y_0<y<b)$$

4.8 如题 4.8 图所示，在均匀电场 $\mathbf{E}_0=\mathbf{e}_x E_0$ 中垂直于电场方向放置一根无限长导体圆柱，圆柱的半径为 a。求导体圆柱外的电位 φ 和电场 $\mathbf{E}$ 以及导体表面的感应电荷密度 σ。

解 在外电场 $\mathbf{E}_0$ 作用下，导体表面产生感应电荷，圆柱外的电位是外电场 $\mathbf{E}_0$ 的电位 φ_0 与感应电荷的电位 φ_{in} 的叠加。由于导体圆柱为无限长，所以电位与变量 z 无关。在圆柱面坐标系中，外电场的电位为 $\varphi_0(r,\phi)=-E_0x+C=-E_0r\cos\phi+C$（常数 C 的值由参考点确定），而感应电荷的电位 $\varphi_{in}(r,\phi)$ 应与 $\varphi_0(r,\phi)$ 一样按 $\cos\phi$ 变化，而且在无限远处为 0。由于导体是等位体，所以 $\varphi(r,\phi)$ 满足的边界条件为

① $\varphi(a,\phi)=C$

② $\varphi(r,\phi)\to-E_0r\cos\phi+C\quad(r\to\infty)$



题 4.8 图

由此可设 $\varphi(r,\phi)=-E_0r\cos\phi+A_1r^{-1}\cos\phi+C$

由条件①，有 $-E_0a\cos\phi+A_1a^{-1}\cos\phi+C=C$

于是得到 $A_1=a^2E_0$

故圆柱外的电位为

$$\varphi(r,\phi)=(-r+a^2r^{-1})E_0\cos\phi+C$$

若选择导体圆柱表面为电位参考点，即 $\varphi(a,\phi)=0$，则 $C=0$。

导体圆柱外的电场则为

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi(r,\phi)=-\mathbf{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\mathbf{e}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}=-\mathbf{e}_r(1+\frac{a^2}{r^2})E_0\cos\phi+\mathbf{e}_\phi(-1+\frac{a^2}{r^2})E_0\sin\phi$$

导体圆柱表面的电荷面密度为

$$\sigma=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi(r,\phi)}{\partial r}\Big|_{r=a}=2\varepsilon_0E_0\cos\phi$$

4.9 在介电常数为 ε 的无限大的介质中，沿 z 轴方向开一个半径为 a 的圆柱形空腔。沿 x 轴方向外加一均匀电场 $\mathbf{E}_0=\mathbf{e}_x E_0$，求空腔内和空腔外的电位函数。

解 在电场 $\mathbf{E}_0$ 的作用下，介质产生极化，空腔表面形成极化电荷，空腔内、外的电场 $\mathbf{E}$ 为外加电场 $\mathbf{E}_0$ 与极化电荷的电场 $\mathbf{E}_p$ 的叠加。外电场的电位为 $\varphi_0(r,\phi)=-E_0x=-E_0r\cos\phi$ 而感应电荷的电位 $\varphi_{in}(r,\phi)$ 应与 $\varphi_0(r,\phi)$ 一样按 $\cos\phi$ 变化，则空腔内、外的电位分别为 $\varphi_1(r,\phi)$ 和 $\varphi_2(r,\phi)$ 的边界条件为

① $r\to\infty$ 时，$\varphi_2(r,\phi)\to -E_0r\cos\phi$；

② $r=0$ 时，$\varphi_1(r,\phi)$ 为有限值；

③ $r=a$ 时，$\varphi_1(a,\phi)=\varphi_2(a,\phi)$，$\varepsilon_0\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}=\varepsilon\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}$

由条件①和②，可设

$$\varphi_1(r,\phi)=-E_0r\cos\phi+A_1r\cos\phi \qquad (r\le a)$$

$$\varphi_2(r,\phi)=-E_0r\cos\phi+A_2r^{-1}\cos\phi \qquad (r\ge a)$$

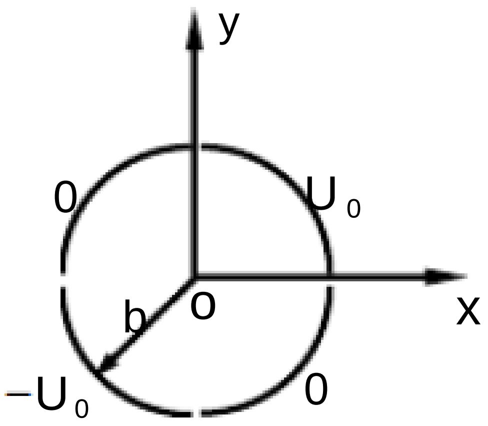
带入条件③，有 $A_1a=A_2a^{-1}$，$-\varepsilon_0E_0+\varepsilon_0A_1=-\varepsilon E_0-\varepsilon a^{-2}A_2$

由此解得 $A_1=-\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}E_0$，$A_2=-\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}a^2E_0$

所以
$$\varphi_1(r,\phi)=-\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+\varepsilon_0}E_0r\cos\phi \qquad (r\le a)$$

$$\varphi_2(r,\phi)=-[1+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}(\frac{a}{r})^2]E_0r\cos\phi \qquad (r\ge a)$$

4.10 一个半径为 b、无限长的薄导体圆柱面被分割成四个四分之一圆柱面，如题 4.10 图所示。第二象限和第四象限的四分之一圆柱面接地，第一象限和第三象限分别保持电位 U_0 和 $-U_0$。求圆柱面内部的电位函数。



题 4.10 图

解 由题意可知，圆柱面内部的电位函数满足边界条件为

① $\varphi(0,\phi)$ 为有限值；

② $$\varphi(b,\phi)=\begin{cases}U_0 & 0<\phi<\pi/2\\ 0 & \pi/2<\phi<\pi\\ -U_0 & \pi<\phi<3\pi/2\\ 0 & 3\pi/2<\phi<2\pi\end{cases};$$

由条件①可知，圆柱面内部的电位函数的通解为

$$\varphi(r,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}r^n(A_n\sin n\phi+B_n\cos n\phi) \qquad (r\le b)$$

代入条件②，有 $\sum_{n=1}^{\infty}b^n(A_n\sin n\phi+B_n\cos n\phi)=\varphi(b,\phi)$

由此得到

$$A_n=\frac{1}{b^n\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(b,\phi)\sin n\phi\,d\phi=\frac{1}{b^n\pi}\left[\int_0^{\pi/2}U_0\sin n\phi\,d\phi-\int_{\pi}^{3\pi/2}U_0\sin n\phi\,d\phi\right]=\frac{U_0}{b^n n\pi}(1-\cos n\pi)=$$

$$\begin{cases}\dfrac{2U_0}{n\pi b^n}, & n=1,3,5,\cdots\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

$$B_n=\frac{1}{b^n\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(b,\phi)\cos n\phi\,d\phi=\frac{1}{b^n\pi}\left[\int_0^{\pi/2}U_0\cos n\phi\,d\phi-\int_{\pi}^{3\pi/2}U_0\cos n\phi\,d\phi\right]=$$

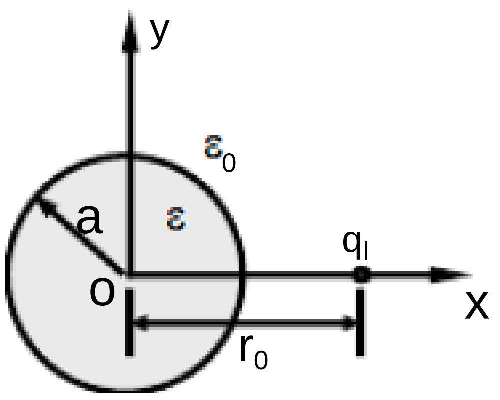
$$\frac{U_0}{b^n n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}-\sin\frac{3n\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n+3}{2}}\dfrac{2U_0}{n\pi b^n}, & n=1,3,5,\cdots\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

故
$$\varphi(r,\phi)=\frac{2U_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{b}\right)^n\left[\sin n\phi+(-1)^{\frac{n+3}{2}}\cos n\phi\right]\qquad (r\le b)$$

4.11 如题 4.11 图所示，一无限长介质圆柱的半径为 a、介电常数为 ε，在距离轴线 $r_0(r_0>a)$ 处，有一与圆柱平行的线电荷 q_l，计算空间各部分的电位。

解 在线电荷 q_l 作用下，介质圆柱产生极化，介质圆柱内外的电位 $\varphi(r,\phi)$ 均为线电荷 q_l 的电位 $\varphi_l(r,\phi)$ 与极化电荷的电位 $\varphi_p(r,\phi)$ 的叠加，即 $\varphi(r,\phi)=\varphi_l(r,\phi)+\varphi_p(r,\phi)$。线电荷 q_l 的电位为

$$\varphi_l(r,\phi)=-\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln R=-\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\phi}\qquad(1)$$



题 4.11 图

而极化电荷的电位 $\varphi_p(r,\phi)$ 满足拉普拉斯方程，且是 ϕ 的偶函数。介质圆柱内外的电位 $\varphi_1(r,\phi)$ 和 $\varphi_2(r,\phi)$ 满足的边界条件为分别为

① $\varphi_1(0,\phi)$ 为有限值；

② $\varphi_2(r,\phi)\to\varphi_l(r,\phi)\quad(r\to\infty)$

③ $r=a$ 时，$\varphi_1=\varphi_2$，$\varepsilon\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}=\varepsilon_0\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}$

由条件①和②可知，$\varphi_1(r,\phi)$ 和 $\varphi_2(r,\phi)$ 的通解为

$$\varphi_1(r,\phi)=\varphi_l(r,\phi)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n r^n\cos n\phi\qquad(0\le r\le a)\qquad(2)$$

$$\varphi_2(r,\phi)=\varphi_l(r,\phi)+\sum_{n=1}^{\infty}B_n r^{-n}\cos n\phi\qquad(a\le r<\infty)\qquad(3)$$

将式（1）～（3）带入条件③，可得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n a^n\cos n\phi=\sum_{n=1}^{\infty}B_n a^{-n}\cos n\phi\qquad(4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\varepsilon n a^{n-1}+B_n\varepsilon_0 n a^{-n-1})\cos n\phi=(\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\partial\ln R}{\partial r}\bigg|_{r=a}$$

当 $r<r_0$ 时，将 $\ln R$ 展开为级数，有 $$\ln R=\ln r_0-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\cos n\phi \tag{6}$$

带入式（5），得 $$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\varepsilon n a^{n-1}+B_n\varepsilon_0 n a^{-n-1})\cos n\phi=-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)q_l}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r_0}\right)^{n-1}\cos n\phi \tag{7}$$

由式（4）和（7），有 $$A_n a^n=B_n a^{-n}$$

$$A_n\varepsilon n a^{n-1}+B_n\varepsilon_0 n a^{-n-1}=-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)q_l}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\left(\frac{a}{r_0}\right)^{n-1}$$

由此解得 $$A_n=-\frac{q_l(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+\varepsilon_0)}\frac{1}{nr_0^n},\quad B_n=-\frac{q_l(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+\varepsilon_0)}\frac{a^{2n}}{nr_0^n}$$

故得到圆柱内、外的电位分别为

$$\varphi_1(r,\phi)=-\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\phi}-\frac{q_l(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+\varepsilon_0)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\cos n\phi \tag{8}$$

$$\varphi_2(r,\phi)=-\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\phi}-\frac{q_l(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+\varepsilon_0)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n\cos n\phi \tag{9}$$

讨论：利用式（6），可将式（8）和（9）中得第二项分别写成为

$$-\frac{q_l(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+\varepsilon_0)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\cos n\phi=\frac{q_l(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+\varepsilon_0)}(\ln R-\ln r_0)$$

$$-\frac{q_l(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+\varepsilon_0)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n\cos n\phi=\frac{q_l(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+\varepsilon_0)}(\ln R'-\ln r)$$

其中 $R'=\sqrt{r^2+(a^2/r_0)^2-2r(a^2/r_0)\cos\phi}$。因此可将 $\varphi_1(r,\phi)$ 和 $\varphi_2(r,\phi)$ 分别写成为

$$\varphi_1(r,\phi)=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{2\varepsilon_0 q_l}{\varepsilon+\varepsilon_0}\ln R-\frac{q_l(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon+\varepsilon_0)}\ln r_0$$

$$\varphi_2(r,\phi)=-\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln R-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{-(\varepsilon-\varepsilon_0)q_l}{\varepsilon+\varepsilon_0}\ln R'-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)q_l}{\varepsilon+\varepsilon_0}\ln r$$

由所得结果可知，介质圆柱内的电位与位于（$r_0,0$）的线电荷 $\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}q_l$ 的电位相同，而介质圆柱外的电位相当于三根线电荷所产生，它们分别为：位于（$r_0,0$）的线电荷 q_l；位于 $(\frac{a^2}{r_0},0)$ 的线电荷 $-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}q_l$；位于 $r=0$ 的线电荷 $\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}q_l$。

4.12 将上题的介质圆柱改为导体圆柱，重新计算。

解　导体圆柱内的电位为常数，导体圆柱外的电位 $\varphi(r,\phi)$ 均为线电荷 q_l 的电位 $\varphi_l(r,\phi)$ 与感应电荷的电位 $\varphi_{in}(r,\phi)$ 的叠加，即 $\varphi(r,\phi)=\varphi_l(r,\phi)+\varphi_{in}(r,\phi)$。线电荷 q_l 的电

$$\varphi_l(r,\phi) = -\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln R = -\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\phi} \tag{1}$$

而感应电荷的电位 $\varphi_{in}(r,\phi)$ 满足拉普拉斯方程，且是 ϕ 的偶函数。

$\varphi(r,\phi)$ 满足的边界条件为

① $\varphi(r,\phi)\to\varphi_l(r,\phi),\ (r\to\infty)$；

② $\varphi(a,\phi)=C$。

由于电位分布是 ϕ 的偶函数，并由条件①可知，$\varphi(r,\phi)$ 的通解为

$$\varphi(r,\phi)=\varphi_l(r,\phi)+\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^{-n}\cos n\phi \tag{2}$$

将式（1）和（2）带入条件②，可得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n a^{-n}\cos n\phi = C+\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\sqrt{a^2+r_0^2-2ar_0\cos\phi} \tag{3}$$

将 $\ln\sqrt{a^2+r_0^2-2ar_0\cos\phi}$ 展开为级数，有

$$\ln\sqrt{a^2+r_0^2-2ar_0\cos\phi}=\ln r_0-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{r_0}\right)^n\cos n\phi \tag{4}$$

带入式（3），得

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n a^{-n}\cos n\phi = C+\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln r_0-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{r_0}\right)^n\cos n\phi\right] \tag{5}$$

由此可得 $A_0 = C+\dfrac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_0$，$A_n=-\dfrac{q_l}{2\pi\varepsilon_0 n}\left(\dfrac{a^2}{r_0}\right)^n$

故导体圆柱外的电为

$$\varphi(r,\phi)=-\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\phi}+$$

$$\left(C+\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_0\right)-\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n\cos n\phi \tag{6}$$

讨论：利用式（4），可将式（6）中的第二项写成为

$$-\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n\cos n\phi=\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}(\ln R'-\ln r)$$

其中 $R'=\sqrt{r^2+(a^2/r_0)^2-2r(a^2/r_0)\cos\phi}$。因此可将 $\varphi(r,\phi)$ 写成为

$$\varphi(r,\phi)=-\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln R+\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln R'-\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln r+C+\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_0$$

由此可见，导体圆柱外的电位相当于三根线电荷所产生，它们分别为：位于（r_0, 0）的线电荷 q_l；位于 $\left(\dfrac{a^2}{r_0},0\right)$ 的线电荷 $-q_l$；位于 $r=0$ 的线电荷 q_l。

4.13 在均匀外电场 $\mathbf{E}_0=\mathbf{e}_z E_0$ 中放入半径为 a 的导体球，设（1）导体充电至

体上充有电荷 Q。试分别计算两种情况下球外的电位分布。

解 （1）这里导体充电至 U_0 应理解为未加外电场 $\mathbf{E}_0$ 时导体球相对于无限远处的电位为 U_0，此时导体球面上的电荷密度 $\sigma = \varepsilon_0 U_0 / a$，总电荷 $q = 4\pi\varepsilon_0 a U_0$。将导体球放入均匀外电场 $\mathbf{E}_0$ 中后，在 $\mathbf{E}_0$ 的作用下，产生感应电荷，使球面上的电荷密度发生变化，但总电荷 q 仍保持不变，导体球仍为等位体。

设 $\varphi(r,\theta) = \varphi_0(r,\theta) + \varphi_{in}(r,\theta)$，其中

$$\varphi_0(r,\theta) = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta$$

是均匀外电场 $\mathbf{E}_0$ 的电位，$\varphi_{in}(r,\theta)$ 是导体球上的电荷产生的电位。

电位 $\varphi(r,\theta)$ 满足的边界条件为

① $r \to \infty$ 时，$\varphi(r,\theta) \to -E_0 r\cos\theta$；

② $r = a$ 时，$\varphi(a,\theta) = C_0$，$-\varepsilon_0 \oint_S \dfrac{\partial\varphi}{\partial r} dS = q$

其中 C_0 为常数，若适当选择 $\varphi(r,\theta)$ 的参考点，可使 $C_0 = U_0$。

由条件①，可设 $\varphi(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + A_1 r^{-2}\cos\theta + B_1 r^{-1} + C_1$

代入条件②，可得到 $A_1 = a^3 E_0$，$B_1 = aU_0$，$C_1 = C_0 - U_0$

若使 $C_0 = U_0$，可得到 $\varphi(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + a^3 E_0 r^{-2}\cos\theta + aU_0 r^{-1}$

（2）导体上充电荷 Q 时，令 $Q = 4\pi\varepsilon_0 a U_0$，有 $U_0 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

利用（1）的结果，得到 $\varphi(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + a^3 E_0 r^{-2}\cos\theta + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

4.14 如题 4.14 图所示，无限大的介质中外加均匀电场 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_z E_0$，在介质中有一个半径为 a 的球形空腔。求空腔内、外的电场 $\mathbf{E}$ 和空腔表面的极化电荷密度（介质的介电常数为 ε）。

解 在电场 $\mathbf{E}_0$ 的作用下，介质产生极化，空腔表面形成极化电荷，空腔内、外的电场 $\mathbf{E}$ 为外加电场 $\mathbf{E}_0$ 与极化电荷的电场 $\mathbf{E}_p$ 的叠加。设空腔内、外的电位分别为 $\varphi_1(r,\theta)$ 和 $\varphi_2(r,\theta)$，则边界条件为

① $r \to \infty$ 时，$\varphi_2(r,\theta) \to -E_0 r\cos\theta$；

② $r = 0$ 时，$\varphi_1(r,\theta)$ 为有限值；

③ $r = a$ 时，$\varphi_1(a,\theta) = \varphi_2(a,\theta)$，$\varepsilon_0 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \varepsilon \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}$

由条件①和②，可设

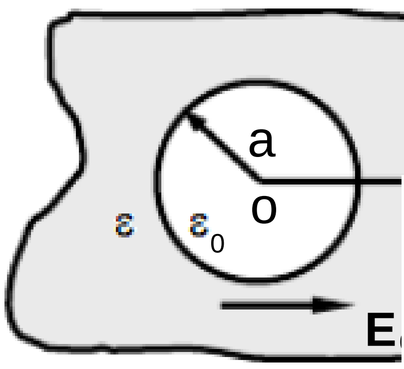
$$\varphi_1(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + A_1 r\cos\theta$$

$$\varphi_2(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + A_2 r^{-2}\cos\theta$$

带入条件③，有

$$A_1 a = A_2 a^{-2},\quad -\varepsilon_0 E_0 + \varepsilon_0 A_1 = -\varepsilon E_0 - 2\varepsilon a^{-3} A_2$$

由此解得 $A_1 = -\dfrac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0} E_0$，$A_2 = -\dfrac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0} a^3 E_0$



.14 图

所以
$$\varphi_1(r,\theta)=-\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0}E_0 r\cos\theta$$

$$\varphi_2(r,\theta)=-[1+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}(\frac{a}{r})^3]E_0 r\cos\theta$$

空腔内、外的电场为

$$\mathbf{E}_1=-\nabla\varphi_1(r,\theta)=\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\mathbf{E}_0$$

$$\mathbf{E}_2=-\nabla\varphi_2(r,\theta)=\mathbf{E}_0-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)E_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}(\frac{a}{r})^3[\mathbf{e}_r 2\cos\theta+\mathbf{e}_\theta\sin\theta]$$

空腔表面的极化电荷面密度为

$$\sigma_p=-\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}_2\big|_{r=a}=-(\varepsilon-\varepsilon_0)\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{E}_2\big|_{r=a}=-\frac{3\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\varepsilon+\varepsilon_0}E_0\cos\theta$$

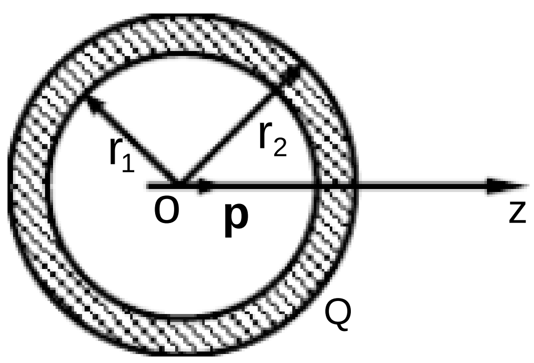
4.15 如题 4.15 图所示，空心导体球壳的内、外半径分别为 r_1 和 r_2，球的中心放置一个电偶极子 $\mathbf{p}$，球壳上的电荷量为 Q。试计算球内、外的电位分布和球壳上的电荷分布。

解 导体球壳将空间分割为内外两个区域，电偶极子 $\mathbf{p}$ 在球壳内表面上引起感应电荷分布，但内表面上的感应电荷总量为零，因此球壳外表面上电荷总量为 Q，且均匀分布在外表面上。

球壳外的场可由高斯定理求得为

$$\mathbf{E}_2(r)=\mathbf{e}_r\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\varphi_2(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



题 4.15 图

外表面上的电荷面密度为 $\sigma_2=\dfrac{Q}{4\pi r_2^2}$

设球内的电位为 $\varphi_1(r,\theta)=\varphi_p(r,\theta)+\varphi_{in}(r,\theta)$，其中

$$\varphi_p(r,\theta)=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}P_1(\cos\theta)$$

是电偶极子 $\mathbf{p}$ 的电位，$\varphi_{in}(r,\theta)$ 是球壳内表面上的感应电荷的电位。

$\varphi_{in}(r,\theta)$ 满足的边界条件为

① $\varphi_{in}(0,\theta)$ 为有限值；

② $\varphi_1(r_1,\theta)=\varphi_2(r_2)$，即 $\varphi_{in}(r_1,\theta)+\varphi_p(r_1,\theta)=\varphi_2(r_2)$，所以

$$\varphi_{in}(r_1,\theta)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}P_1(\cos\theta)$$

由条件①可知 $\varphi_{in}(r,\theta)$ 的通解为 $\varphi_{in}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\theta)$

由条件②，有
$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n r_1^n P_n(\cos\theta)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}P_1(\cos\theta)$$

比较两端 $P_n(\cos\theta)$ 的系数，得到

$$A_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}, \qquad A_1 = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3},$$

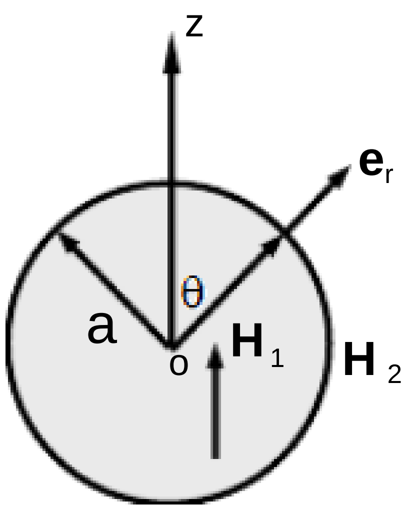
$$A_n = 0 \quad (n \geq 2)$$

最后得到 $$\varphi_1(r,\theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{r_1^3}\right)\cos\theta$$

球壳内表面上的感应电荷面密度为 $$\sigma_1 = -\varepsilon_0 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\bigg|_{r=r_1} = \varepsilon_0 \frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\bigg|_{r=r_1} = -\frac{3p}{4\pi r_1^3}\cos\theta$$

感应电荷的总量为 $$q_1 = \oint_S \sigma_1 \, dS = -\frac{3p}{4\pi r_1^3}\int_0^\pi \cos\theta \cdot 2\pi r_1^2 \sin\theta \, d\theta = 0$$

4.16 欲在一个半径为 a 的球上绕线圈使在球内产生均匀场，问线圈应如何绕（即求绕线的密度）？



题 4.16 图

解 设球内的均匀场为 $\mathbf{H}_1 = \mathbf{e}_z H_0 \ (r < a)$，球外的场为 $\mathbf{H}_2 \ (r > a)$，如题 4.16 图所示。根据边界条件，球面上的电流面密度为

$$\mathbf{J}_S = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)\big|_{r=a} = \mathbf{e}_r \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{e}_z H_0)\big|_{r=a} =$$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{H}_2 \big|_{r=a} + \mathbf{e}_\phi H_0 \sin\theta$$

若令 $\mathbf{e}_r \times \mathbf{H}_2\big|_{r=a} = 0$，则得到球面上的电流面密度为 $\mathbf{J}_S = \mathbf{e}_\phi H_0 \sin\theta$

这表明球面上的绕线密度正比于 $\sin\theta$，则将在球内产生均匀场。

4.17 一个半径为 R 的介质球带有均匀极化强度 $\mathbf{P}$。

（1）证明：球内的电场是均匀的，等于 $-\dfrac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$；

（2）证明：球外的电场与一个位于球心的偶极子 $\mathbf{P}\tau$ 产生的电场相同，$\tau = \dfrac{4\pi R^3}{3}$。

解 （1）当介质极化后，在介质中会形成极化电荷分布，本题中所求的电场即为极化电荷所产生的场。由于是均匀极化，介质球体内不存在极化电荷，仅在介质球面上有极化电荷面密度，球内、外的电位满足拉普拉斯方程，可用分离变量法求解。

建立如题 4.17 图所示的坐标系，则介质球面上的极化电荷面密度为

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_r = P\cos\theta$$

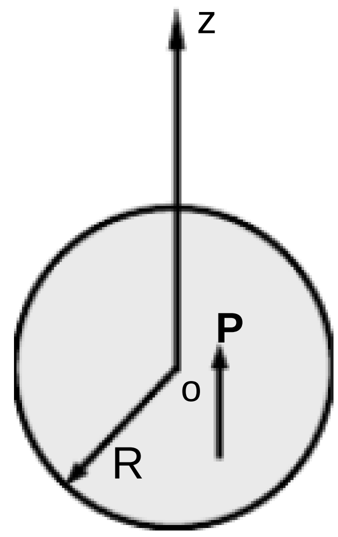
介质球内、外的电位 φ_1 和 φ_2 满足的边界条件为

① $\varphi_1(0,\theta)$ 为有限值；

② $\varphi_2(r,\theta) \to 0 \quad (r \to \infty)$；

③ $\varphi_1(R,\theta) = \varphi_2(R,\theta)$

$$\varepsilon_0\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right)\bigg|_{r=R} = P\cos\theta$$



题 4.17 图

因此，可设球内、外电位的通解为

$$\varphi_1(r,\theta) = A_1 r\cos\theta$$

$$\varphi_2(r,\theta)=\frac{B_1}{r^2}\cos\theta$$

由条件③，有 $A_1 R=\dfrac{B_1}{R^2}$， $\varepsilon_0(A_1+\dfrac{2B_1}{R^3})=P$

解得 $A_1=\dfrac{P}{3\varepsilon_0}$， $B_1=\dfrac{PR^3}{3\varepsilon_0}$

于是得到球内的电位 $\varphi_1(r,\theta)=\dfrac{P}{3\varepsilon_0}r\cos\theta=\dfrac{P}{3\varepsilon_0}z$

故球内的电场为 $\mathbf{E}_1=-\nabla\varphi_1=-\mathbf{e}_z\dfrac{P}{3\varepsilon_0}=-\dfrac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$

（2）介质球外的电位为

$$\varphi_2(r,\theta)=\frac{PR^3}{3\varepsilon_0 r^2}\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{4\pi R^3 P}{3}\cos\theta=\frac{P\tau}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

其中 $\tau=\dfrac{4\pi R^3}{3}$ 为介质球的体积。故介质球外的电场为

$$\mathbf{E}_2=-\nabla\varphi_2(r,\theta)=-\mathbf{e}_r\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}-\mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}=\frac{P\tau}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\mathbf{e}_r 2\cos\theta+\mathbf{e}_\theta\sin\theta)$$

可见介质球外的电场与一个位于球心的偶极子 $\mathbf{P}\tau$ 产生的电场相同。

4.18 半径为 a 的接地导体球，离球心 $r_1(r_1>a)$ 处放置一个点电荷 q，如题 4.18 图所示。用分离变量法求电位分布。

解 球外的电位是点电荷的电位与球面上感应电荷产生的电位的叠加，感应电荷的电位满足拉普拉斯方程。用分离变量法求解电位分布时，将点电荷的电位在球面上按勒让德多项式展开，即可由边界条件确定通解中的系数。

设 $\varphi(r,\theta)=\varphi_0(r,\theta)+\varphi_{in}(r,\theta)$，其中

$$\varphi_0(r,\theta)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos\theta}}$$

是点电荷 q 的电位，$\varphi_{in}(r,\theta)$ 是导体球上感应电荷产生的电位。

电位 $\varphi(r,\theta)$ 满足的边界条件为

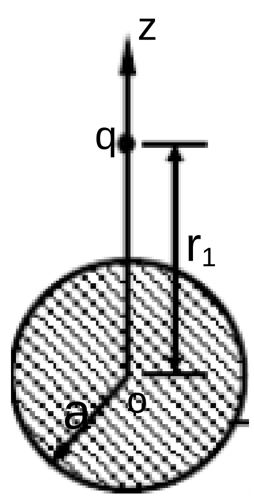
① $r\to\infty$ 时，$\varphi(r,\theta)\to 0$；

② $r=a$ 时，$\varphi(a,\theta)=0$。

由条件①，可得 $\varphi_{in}(r,\theta)$ 的通解为

$$\varphi_{in}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^{-n-1}P_n(\cos\theta)$$

为了确定系数 A_n，利用 $1/R$ 的球坐标展开式



题 4.18 图

$$\frac{1}{R}=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{r^{n}}{r_1^{n+1}}P_n(\cos\theta) & (r\le r_1)\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{r_1^{n}}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta) & (r\ge r_1)\end{cases}$$

将 $\varphi_0(r,\theta)$ 在球面上展开为 $\varphi_0(a,\theta)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n}{r_1^{n+1}}P_n(\cos\theta)$

代入条件②，有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n a^{-n-1}P_n(\cos\theta)+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n}{r_1^{n+1}}P_n(\cos\theta)=0$

比较 $P_n(\cos\theta)$ 的系数，得到 $A_n=-\dfrac{qa^{2n+1}}{4\pi\varepsilon_0 r_1^{n+1}}$

故得到球外的电位为 $\varphi(r,\theta)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^{2n+1}}{(r_1 r)^{n+1}}P_n(\cos\theta)$

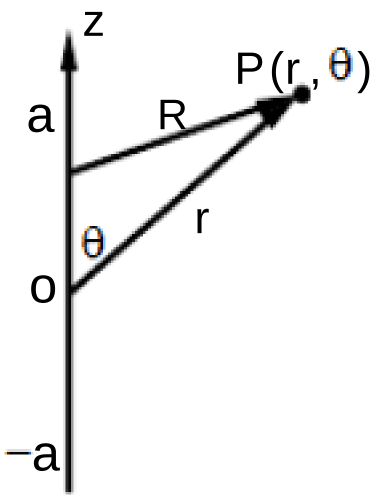
讨论：将 $\varphi(r,\theta)$ 的第二项与 $1/R$ 的球坐标展开式比较，可得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n+1}}{(r_1 r)^{n+1}}P_n(\cos\theta)=\frac{a/r_1}{\sqrt{r^2+(a^2/r_1)^2-2r(a^2/r_1)\cos\theta}}$$

由此可见，$\varphi(r,\theta)$ 的第二项是位于 $r'=a^2/r_1$ 的一个点电荷 $q'=-qa/r_1$ 所产生的电位，此电荷正是球面上感应电荷的等效电荷，即像电荷。

4.19 一根密度为 q_l、长为 $2a$ 的线电荷沿 z 轴放置，中心在原点上。证明：对于 $r>a$ 的点，有

$$\varphi(r,\theta)=\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a}{r}+\frac{a^3}{3r^3}P_2(\cos\theta)+\frac{a^5}{5r^5}P_4(\cos\theta)+\cdots\right)$$



题 4.19 图

解 线电荷产生的电位为

$$\varphi(r,\theta)=\frac{q_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{1}{R}dz'=\frac{q_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{r^2+z'^2-2rz'\cos\theta}}dz'$$

对于 $r>a$ 的点，有

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+z'^2-2rz'\cos\theta}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z')^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$

故得到

$$\varphi(r,\theta)=\frac{q_l}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-a}^{a}\frac{(z')^n}{r^{n+1}}P(\cos\theta)dz'=$$

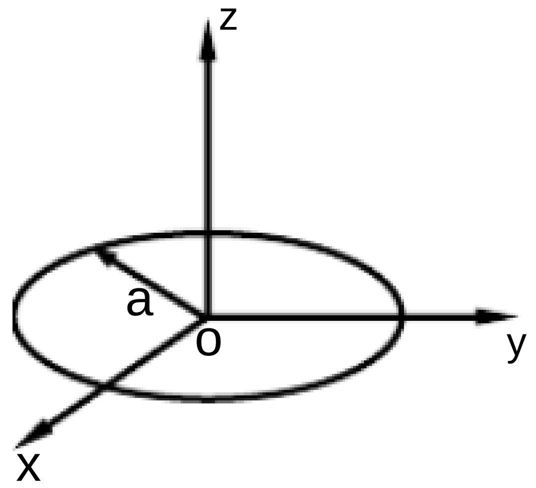
$$\frac{q_l}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\frac{a^{n+1}-(-a)^{n+1}}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta)=\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a}{r}+\frac{a^3}{3r^3}P_2(\cos\theta)+\frac{a^5}{5r^5}P_4(\cos\theta)+\cdots\right)$$

4.20 一个半径为 a 的细导线圆环，环与 xy 平面重合，中心在原点上，环上总电荷量为 Q，如题 4.20 图所示。证明：空间任意点电位为

$$\varphi_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2(\cos\theta)+\frac{3}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^4 P_4(\cos\theta)+\cdots\right] \qquad (r\le a)$$

$$\varphi_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\cos\theta)+\frac{3}{8}\left(\frac{a}{r}\right)^4 P_4(\cos\theta)+\cdots\right] \qquad (r\ge a)$$

解 以细导线圆环所在的球面 $r=a$ 把场区分为两部分，分别写出两个场域的通解，并利用 δ 函数将细导线圆环上的线电荷 Q 表示成球面 $r=a$ 上的电荷面密度



题 4.20 图

$$\sigma=\frac{Q}{2\pi a^2}\delta(\cos\theta-\cos\frac{\pi}{2})=\frac{Q}{2\pi a^2}\delta(\cos\theta)$$

再根据边界条件确定系数。

设球面 $r=a$ 内、外的电位分别为 $\varphi_1(r,\theta)$ 和 $\varphi_2(r,\theta)$，则边界条件为：

① $\varphi_1(0,\theta)$ 为有限值；

② $\varphi_2(r,\theta)\to 0\ (r\to\infty)$

③ $\varphi_1(a,\theta)=\varphi_2(a,\theta)$，

$$\varepsilon_0\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right)\Big|_{r=a}=\frac{Q}{2\pi a^2}\delta(\cos\theta)$$

根据条件①和②，可得 $\varphi_1(r,\theta)$ 和 $\varphi_2(r,\theta)$ 的通解为

$$\varphi_1(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\theta) \tag{1}$$

$$\varphi_2(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n r^{-n-1} P_n(\cos\theta) \tag{2}$$

代入条件③，有

$$A_n a^n=B_n a^{-n-1} \tag{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[A_n n a^{n-1}+B_n(n+1)a^{-n-2}]P_n(\cos\theta)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\delta(\cos\theta) \tag{4}$$

将式（4）两端同乘以 $P_m(\cos\theta)\sin\theta$，并从 0 到 π 对 θ 进行积分，得

$$A_n n a^{n-1}+B_n(n+1)a^{-n-2}=\frac{(2n+1)Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\int_0^{\pi}\delta(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta=$$

$$\frac{(2n+1)Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}P_n(0) \tag{5}$$

其中

$$P_n(0)=\begin{cases}0 & n=1,3,5,\cdots\\ (-1)^{n/2}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n} & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

由式（3）和（5），解得 $A_n=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^{n+1}}P_n(0)$ $B_n=\dfrac{Qa^n}{4\pi\varepsilon_0}P_n(0)$

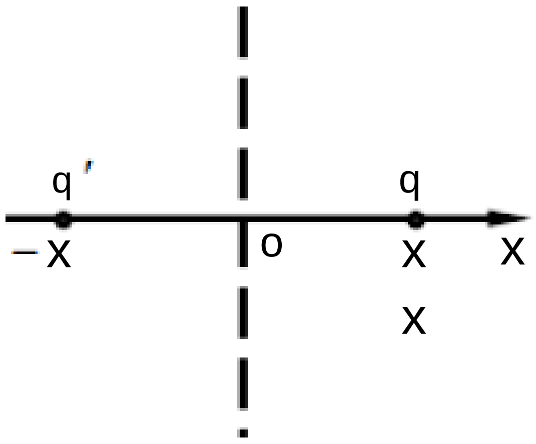
代入式（1）和（2），即得到

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2(\cos\theta) + \frac{3}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^4 P_4(\cos\theta) + \cdots\right] \qquad (r \le a)$$

$$\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\cos\theta) + \frac{3}{8}\left(\frac{a}{r}\right)^4 P_4(\cos\theta) + \cdots\right] \qquad (r \ge a)$$

4.21 一个点电荷 q 与无限大导体平面距离为 d，如果把它移到无穷远处，需要作多少功？

解 利用镜像法求解。当点电荷 q 移动到距离导体平面为 x 的点 P 处时，其像电荷 $q' = -q$，与导体平面相距为 $x' = -x$，如题 4.21 图所示。像电荷 q' 在点 P 处产生的电场为



题 4.21 图

$$\mathbf{E}'(x) = \mathbf{e}_x \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 (2x)^2}$$

所以将点电荷 q 移到无穷远处时，电场所作的功为

$$W_e = \int_d^{\infty} q\mathbf{E}'(x)\cdot d\mathbf{r} = \int_d^{\infty} \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2x)^2} dx = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}$$

外力所作的功为 $W_o = -W_e = \dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}$

4.22 如题 4.22 图所示，一个点电荷 q 放在 60° 的接地导体角域内的点 $(1, 1, 0)$ 处。求：（1）所有镜像电荷的位置和大小；（2）点 $x = 2, y = 1$ 处的电位。

解 （1）这是一个多重镜像的问题，共有 5 个像电荷，分布在以点电荷 q 到角域顶点的距离为半径的圆周上，并且关于导体平面对称，其电荷量的大小等于 q，且正负电荷交错分布，其大小和位置分别为

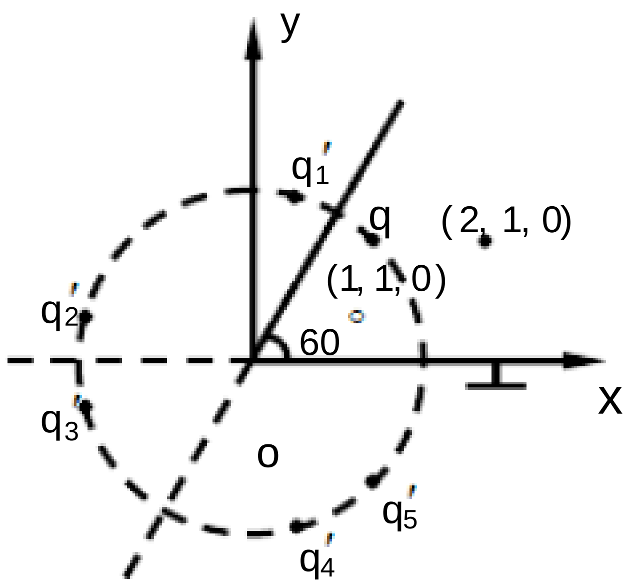
$$q_1' = -q, \quad \begin{cases} x_1' = \sqrt{2}\cos 75^\circ = 0.366 \\ y_1' = \sqrt{2}\sin 75^\circ = 1.366 \end{cases}$$

$$q_2' = q, \quad \begin{cases} x_2' = \sqrt{2}\cos 165^\circ = -1.366 \\ y_2' = \sqrt{2}\sin 165^\circ = 0.366 \end{cases}$$

$$q_3' = -q, \quad \begin{cases} x_3' = \sqrt{2}\cos 195^\circ = -1.366 \\ y_3' = \sqrt{2}\sin 195^\circ = -0.366 \end{cases}$$

$$q_4' = q, \quad \begin{cases} x_4' = \sqrt{2}\cos 285^\circ = 0.366 \\ y_4' = \sqrt{2}\sin 285^\circ = -1.366 \end{cases}$$

$$q_5' = -q, \quad \begin{cases} x_5' = \sqrt{2}\cos 315^\circ = 1 \\ y_5' = \sqrt{2}\sin 315^\circ = -1 \end{cases}$$



题 4.22 图

（2）点 $x = 2, y = 1$ 处电位

$$\varphi(2, 1, 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R} + \frac{q_1'}{R_1} + \frac{q_2'}{R_2} + \frac{q_3'}{R_3} + \frac{q_4'}{R_4} + \frac{q_5'}{R_5}\right) =$$

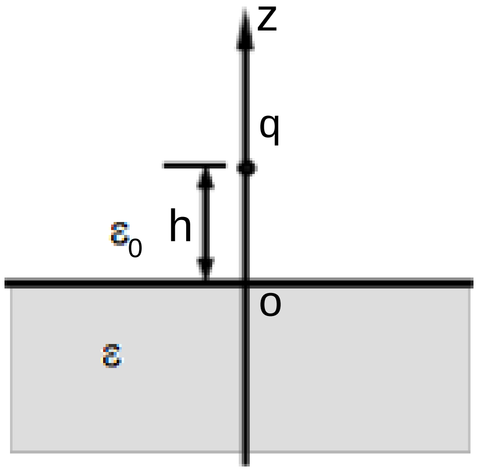
$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(1-0.597+0.292-0.275+0.348-0.477)=\frac{0.321}{4\pi\varepsilon_0}q=2.88\times10^{9}q\ \ (V)$$

4.23 一个电荷量为 q、质量为 m 的小带电体，放置在无限大导体平面下方，与平面相距为 h。求 q 的值以使带电体上受到的静电力恰与重力相平衡（设 $m=2\times10^{-3}\,kg$，$h=0.02\,m$）。

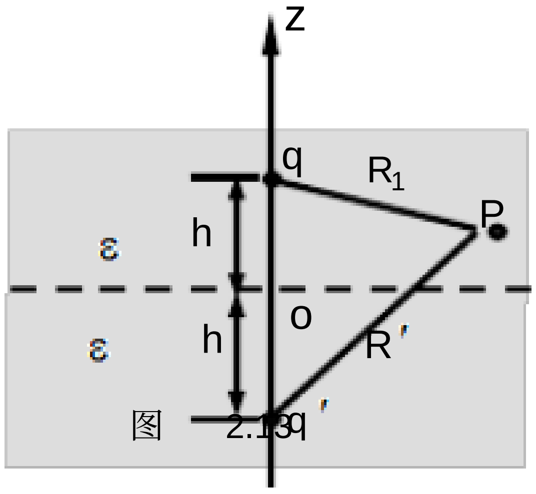
解 将小带电体视为点电荷 q，导体平面上的感应电荷对 q 的静电力等于镜像电荷 q' 对 q 的作用力。根据镜像法可知，镜像电荷为 $q'=-q$，位于导体平面上方为 h 处，则小带电体 q 受到的静电力为 $f_e=-\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2h)^2}$

令 f_e 的大小与重力 mg 相等，即 $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2h)^2}=mg$

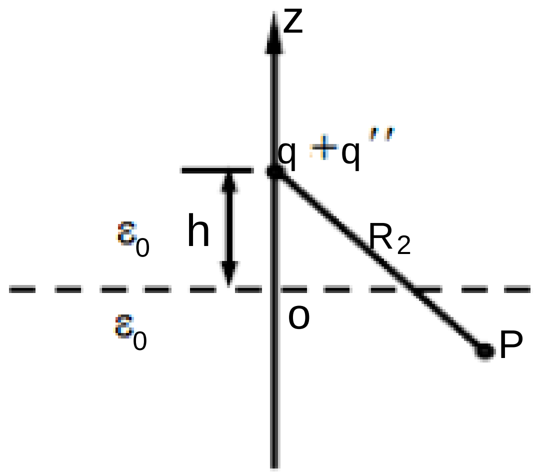
于是得到 $q=4h\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg}=5.9\times10^{-8}\,C$



题 4.24 图（a）



题 4.24 图（b）



题 4.24 图（c）

4.24 如题 4.24（a）图所示，在 $z<0$ 的下半空间是介电常数为 ε 的介质，上半空间为空气，距离介质平面距为 h 处有一点电荷 q，求：（1）$z>0$ 和 $z<0$ 的两个半空间内的电位；（2）介质表面上的极化电荷密度，并证明表面上极化电荷总电量等于镜像电荷 q'。

解 （1）在点电荷 q 的电场作用下，介质分界面上出现极化电荷，利用镜像电荷替代介质分界面上的极化电荷。根据镜像法可知，镜像电荷分布为（如题 4.24 图（b）、（c）所示）

$$q'=-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}q,\quad 位于\quad z=-h$$

$$q''=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}q,\quad 位于\quad z=h$$

上半空间内的电位由点电荷 q 和镜像电荷 q' 共同产生，即

$$\varphi_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R_1}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0R'}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}}-\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+(z+h)^2}}\right\}$$

下半空间内的电位由点电荷 q 和镜像电荷 q'' 共同产生，即 $\varphi_2=\dfrac{q+q''}{4\pi\varepsilon R_2}=\dfrac{q}{2\pi(\varepsilon+\varepsilon_0)}\dfrac{1}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}}$

（2）由于分界面上无自由电荷分布，故极化电荷面密度为

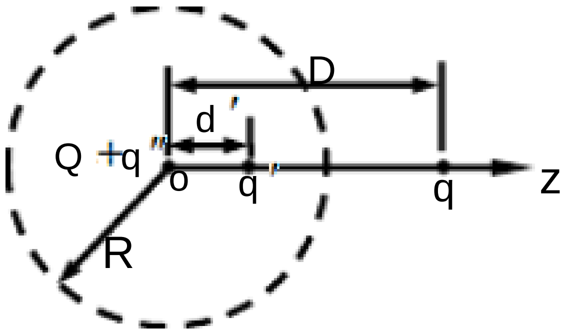
$$\sigma_p = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)_{z=0} = \varepsilon_0(E_{1z} - E_{2z})\Big|_{z=0} = \varepsilon_0\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)\Big|_{z=0} = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)hq}{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_0)(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

极化电荷总电量为

$$q_P = \int_S \sigma_P dS = \int_0^\infty \sigma_P 2\pi r dr = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)hq}{\varepsilon + \varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{r}{(r^2 + h^2)^{3/2}}dr = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)q}{\varepsilon + \varepsilon_0} = q'$$

4.25 一个半径为 R 的导体球带有电荷量为 Q，在球体外距离球心为 D 处有一个点电荷 q。（1）求点电荷 q 与导体球之间的静电力；（2）证明：当 q 与 Q 同号，且 $\frac{Q}{q} < \frac{RD^3}{(D^2 - R^2)^2} - \frac{R}{D}$ 成立时，F 表现为吸引力。

解 （1）导体球上除带有电荷量 Q 之外，点电荷 q 还要在导体球上感应出等量异号的两种不同电荷。根据镜像法，像电荷 q' 和 q'' 的大小和位置分别为（如题 4.25 图所示）



题 4.25 图

$$q' = -\frac{R}{D}q, \quad d' = \frac{R^2}{D}$$

$$q'' = -q' = \frac{R}{D}q, \quad d'' = 0$$

导体球自身所带的电荷 Q 则与位于球心的点电荷 Q 等效。故点电荷 q 受到的静电力为

$$F = F_{q'\to q} + F_{q''\to q} + F_{Q\to q} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0(D - d')^2} + \frac{q(D + q'')}{4\pi\varepsilon_0 D^2} =$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q + (R/D)q}{D^2} - \frac{Rq}{D\left[D - (R/D)^2\right]^2}\right\}$$

（2）当 q 与 Q 同号，且 F 表现为吸引力，即 $F < 0$ 时，则应有

$$\frac{Q + (R/D)q}{D^2} - \frac{Rq}{D\left[D - (R/D)^2\right]^2} < 0$$

由此可得出 $\frac{Q}{q} < \frac{RD^3}{(D^2 - R^2)^2} - \frac{R}{D}$

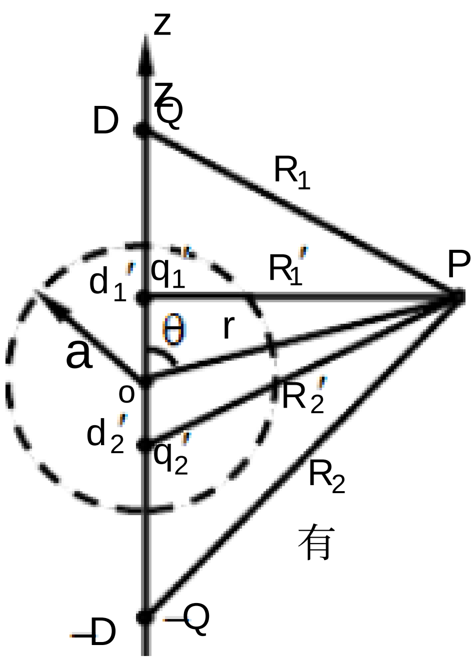
4.26 两个点电荷 Q 和 $-Q$，在一个半径为 a 的导体球直径的延长线上，分别位于导体球的两侧且距球心为 D。

（1）证明：镜像电荷构成一个电偶极子，位于球心，电偶极矩为 $p = \frac{2a^3Q}{D^2}$；

（2）令 D 和 Q 分别趋于无穷，同时保持 $\frac{Q}{D^2}$ 不变，计算球外的电场。

解 （1）点电荷 Q 和 $-Q$ 都要在球面上引起等量异号的感应电荷，可分别按照点电荷与不接地导体球面的镜像确定其等效的像电荷。根据镜像法，点电荷 Q 的像电荷为

$$q_1' = -\frac{a}{D}Q, \quad 位于：\ d_1' = \frac{a^2}{D}$$



题 4.26 图

$$q_1'' = -q_1' = \frac{a}{D}Q，\text{位于：}\ d_1'' = 0$$

而点电荷 $-Q$ 的像电荷为

$$q_2' = \frac{a}{D}Q，\quad \text{位于：}\ d_2' = -\frac{a^2}{D}$$

$$q_2'' = -q_2' = -\frac{a}{D}Q，\text{位于：}\ d_2'' = 0$$

有

如题 4.26 图所示。由此可见，像电荷 q_1'' 和 q_2'' 等值异号，且同时位于球心，故球心处总的像电荷为零；而像电荷 q_1' 和 q_2' 也等值异号，且位置关于球心对称，故构成位于球心的电偶极子，其电偶极矩为

$$p = q_2'(2d_1') = \frac{a}{D}Q\cdot\frac{2a^2}{D} = \frac{2a^3Q}{D^2}$$

（2）球外的电位由 Q 和 $-Q$ 以及像电荷 q_1' 和 q_2' 共同产生，即

$$\varphi(r,\theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R_1'} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R_2'} =$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{r^2+D^2-2rD\cos\theta}} - \frac{a/D}{\sqrt{r^2+(a^2/D)^2-(2ra^2/D)\cos\theta}} - \right.$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{r^2+D^2+2rD\cos\theta}} + \frac{a/D}{\sqrt{r^2+(a^2/D)^2+(2ra^2/D)\cos\theta}}\right\}$$

当 D 和 Q 分别趋于无穷，同时保持 $\frac{Q}{D^2}$ 不变时，有

$$\varphi(r,\theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 D^2}\left\{\frac{D^2}{\sqrt{r^2+D^2-2rD\cos\theta}} - \frac{aD}{\sqrt{r^2+(a^2/D)^2-(2ra^2/D)\cos\theta}} - \right.$$

$$\left.\frac{D^2}{\sqrt{r^2+D^2+2rD\cos\theta}} + \frac{aD}{\sqrt{r^2+(a^2/D)^2+(2ra^2/D)\cos\theta}}\right\} \approx$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 D^2}\left\{D\left(1+\frac{r}{D}\cos\theta\right) - \frac{aD}{r}\left(1+\frac{a^2}{rD}\cos\theta\right) - D\left(1-\frac{r}{D}\cos\theta\right) + \frac{aD}{r}\left(1-\frac{a^2}{rD}\cos\theta\right)\right\} =$$

$$\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3} r\cos\theta - \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

球外的电场为

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\left(\mathbf{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathbf{e}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\right) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left[-\mathbf{e}_r\left(1-\frac{2a^3}{r^3}\right)\cos\theta + \mathbf{e}_\phi\left(1+\frac{a^3}{r^3}\right)E_0\sin\theta\right] =$$

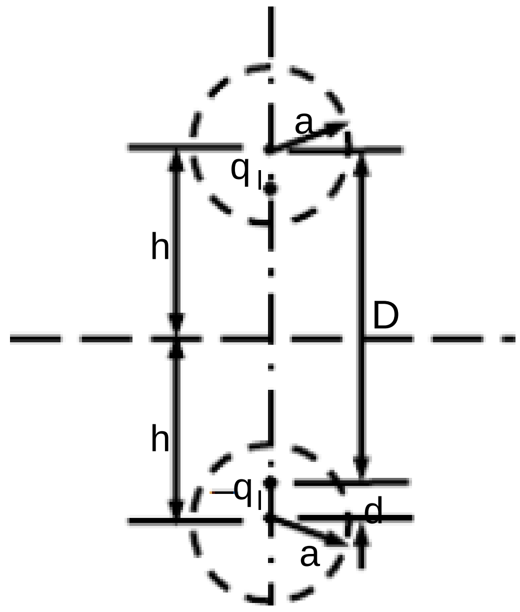
$$\mathbf{e}_z\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3} + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\mathbf{e}_r 2\cos\theta + \mathbf{e}_\phi\sin\theta)$$

4.27 一根与地面平行架设的圆截面导线，半径为 a，悬挂高度为 h。证明：单位长度上圆柱导线与地面间的电容为 $C_0=\dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\cosh^{-1}(h/a)}$。

解 地面的影响可用一个像圆柱来等效。设导线单位长度带电荷为 q_l，则像圆柱单位长度带电荷为 $-q_l$。根据电轴法，电荷 q_l 和 $-q_l$ 可用位于电轴上的线电荷来等效替代，如题 4.27 图所示。等效线电荷对导体轴线的偏移为

$$D=h+\sqrt{h^2-a^2}$$

$$d=h-\sqrt{h^2-a^2}$$



题 4.27 图

则导线与地间的电位差为

$$\varphi=\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{a-d}-\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{D-a}=\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{h^2-a^2}+(h-a)}{\sqrt{h^2-a^2}-(h-a)}=$$

$$\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{h^2-a^2}+h}{a}=\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0}\cosh^{-1}(\frac{h}{a})$$

故单位长度上圆柱导线与地面间的电容为

$$C_0=\frac{q_l}{\varphi}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\cosh^{-1}(h/a)}$$

4.28 在上题中设导线与地面间的电压为 U_0。证明：地面对导线单位长度的作用力 $F_0=\dfrac{\pi\varepsilon_0U_0^2}{[\cosh^{-1}(h/a)]^2(h^2-a^2)^{1/2}}$。

解 导线单位长度上的电场能量为 $W_e=\dfrac{1}{2}C_0U_0^2=\dfrac{\pi\varepsilon_0U_0^2}{\cosh^{-1}(h/a)}$

由虚位移法，得到地面对导线单位长度的作用力为

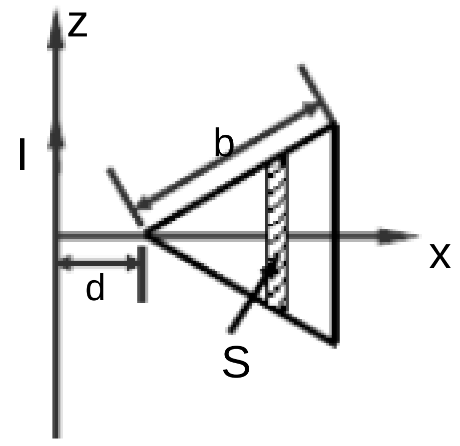
$$F_0=\frac{\partial W_e}{\partial h}\bigg|_{U_0}=\frac{\partial}{\partial h}[\frac{\pi\varepsilon_0U_0^2}{\cosh^{-1}(h/a)}]=\frac{\pi\varepsilon_0U_0^2}{[\cosh^{-1}(h/a)]^2(h^2-a^2)^{1/2}}$$

五章习题解答

5.1 真空中直线长电流 I 的磁场中有一等边三角形回路，如题 5.1 图所示，求三角形回路内的磁通。

解 根据安培环路定理，得到长直导线的电流 I 产生的磁场

$$\mathbf{B}=\mathbf{e}_{\phi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



题 5.1 图

穿过三角形回路面积的磁通为

$$\Psi=\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_d^{d+\sqrt{3}b/2}\frac{2}{x}\left[\int_0^z dz\right]dx=\frac{\mu_0 I}{\pi}\int_d^{d+\sqrt{3}b/2}\frac{z}{x}dx$$

由题 5.1 图可知，$z=(x-d)\tan\frac{\pi}{6}=\frac{x-d}{\sqrt{3}}$，故得到

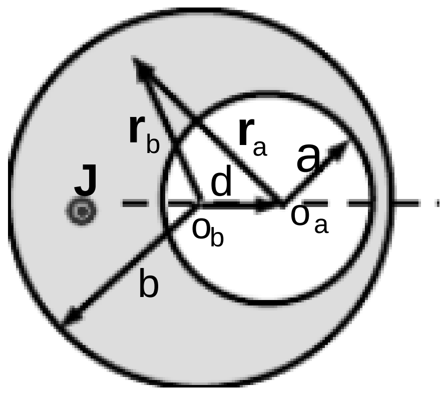
$$\Psi=\frac{\mu_0 I}{\sqrt{3}\pi}\int_d^{d+\sqrt{3}b/2}\frac{x-d}{x}dx=\frac{\mu_0 I}{\pi}\left[\frac{b}{2}-\frac{d}{\sqrt{3}}\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}b}{2d}\right)\right]$$

5.2 通过电流密度为 $\mathbf{J}$ 的均匀电流的长圆柱导体中有一平行的圆柱形空腔，如题 5.2 图所示。计算各部分的磁感应强度 $\mathbf{B}$，并证明腔内的磁场是均匀的。

解 将空腔中视为同时存在 $\mathbf{J}$ 和 $-\mathbf{J}$ 的两种电流密度，这样可将原来的电流分布分解为两个均匀的电流分布：一个电流密度为 $\mathbf{J}$、均匀分布在半径为 b 的圆柱内，另一个电流密度为 $-\mathbf{J}$、均匀分布在半径为 a 的圆柱内。由安培环路定律，分别求出两个均匀分布电流的磁场，然后进行叠加即可得到圆柱内外的磁场。

由安培环路定律 $\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}=\mu_0 I$，可得到电流密度为 $\mathbf{J}$、均匀分布在半径为 b 的圆柱内的电流产生的磁场为

$$\mathbf{B}_b=\begin{cases}\dfrac{\mu_0}{2}\mathbf{J}\times\mathbf{r}_b & r_b<b\\[2ex] \dfrac{\mu_0 b^2}{2}\dfrac{\mathbf{J}\times\mathbf{r}_b}{r_b^2} & r_b>b\end{cases}$$



题 5.2 图

电流密度为 $-\mathbf{J}$、均匀分布在半径为 a 的圆柱内的电流产生的磁场为

$$\mathbf{B}_a=\begin{cases}-\dfrac{\mu_0}{2}\mathbf{J}\times\mathbf{r}_a & r_a<a\\[2ex] -\dfrac{\mu_0 a^2}{2}\dfrac{\mathbf{J}\times\mathbf{r}_a}{r_a^2} & r_a>a\end{cases}$$

这里 $\mathbf{r}_a$ 和 $\mathbf{r}_b$ 分别是点 o_a 和 o_b 到场点 P 的位置矢量。

将 $\mathbf{B}_a$ 和 $\mathbf{B}_b$ 叠加，可得到空间各区域的磁场为

圆柱外：$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{2}\mathbf{J}\times\left(\frac{b^2}{r_b^2}\mathbf{r}_b-\frac{a^2}{r_a^2}\mathbf{r}_a\right)\qquad (r_b>b)$$

圆柱内的空腔外：$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{2}\mathbf{J}\times\left(\mathbf{r}_b-\frac{a^2}{r_a^2}\mathbf{r}_a\right)\qquad (r_b<b,\ r_a>a)$$

空腔内：$\mathbf{B}=\dfrac{\mu_0}{2}\mathbf{J}\times(\mathbf{r}_b-\mathbf{r}_a)=\dfrac{\mu_0}{2}\mathbf{J}\times\mathbf{d}\qquad(r_a<a)$

式中 $\mathbf{d}$ 是点和 o_b 到点 o_a 的位置矢量。由此可见，空腔内的磁场是均匀的。

5.3 下面的矢量函数中哪些可能是磁场？如果是，求其源变量 $\mathbf{J}$。

(1) $\mathbf{H}=\mathbf{e}_r ar$，$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$ （圆柱坐标）

(2) $\mathbf{H}=\mathbf{e}_x(-ay)+\mathbf{e}_y ax$，$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$

(3) $\mathbf{H}=\mathbf{e}_x ax-\mathbf{e}_y ay$，$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$

(4) $\mathbf{H}=\mathbf{e}_\phi ar$，$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$ （球坐标系）

解　根据恒定磁场的基本性质，满足 $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ 的矢量函数才可能是磁场的场矢量，否则，不是磁场的场矢量。若是磁场的场矢量，则可由 $\mathbf{J}=\nabla\times\mathbf{H}$ 求出源分布。

（1）在圆柱坐标中 $\nabla\cdot\mathbf{B}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rB_r)=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(ar^2)=2a\neq 0$

该矢量不是磁场的场矢量。

（2）　$\nabla\cdot\mathbf{B}=\dfrac{\partial}{\partial x}(-ay)+\dfrac{\partial}{\partial y}(ax)=0$

该矢量是磁场的矢量，其源分布为 $\mathbf{J}=\nabla\times\mathbf{H}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -ay & ax & 0\end{vmatrix}=\mathbf{e}_z 2a$

（3）　$\nabla\cdot\mathbf{B}=\dfrac{\partial}{\partial x}(ax)+\dfrac{\partial}{\partial y}(-ay)=0$

该矢量是磁场的场矢量，其源分布为 $\mathbf{J}=\nabla\times\mathbf{H}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ ax & -ay & 0\end{vmatrix}=0$

（4）　在球坐标系中 $\nabla\cdot\mathbf{B}=\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial B_\phi}{\partial\phi}=\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\phi}(ar)=0$

该矢量是磁场的场矢量，其源分布为

$$\mathbf{J}=\nabla\times\mathbf{H}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi}\\ 0 & 0 & ar^2\sin\theta\end{vmatrix}=\mathbf{e}_r a\,\mathrm{ctag}\theta-\mathbf{e}_\theta 2a$$

5.4　由矢量位的表示式 $\mathbf{A}(\mathbf{r})=\dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int_\tau\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R}d\tau'$ 证明磁感应强度的积分公式

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times\mathbf{R}}{R^3}d\tau'$$

并证明 $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$

解：$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})=\nabla\times\dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\dfrac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R}\mathrm{d}\tau'=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\nabla\times\dfrac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R}\mathrm{d}\tau'=-\dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times\nabla(\dfrac{1}{R})\mathrm{d}\tau'=$

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times(-\frac{\mathbf{R}}{R^3})\mathrm{d}\tau'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times\mathbf{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=\nabla\cdot[\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})]=0$$

5.5 有一电流分布 $\mathbf{J}(\mathbf{r})=\mathbf{e}_z rJ_0(r\le a)$，求矢量位 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$。

解 由于电流只有 $\mathbf{e}_z$ 分量，且仅为 r 的函数，故 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 也只有 $\mathbf{e}_z$ 分量，且仅为 r 的函数，即 $\mathbf{A}(\mathbf{r})=\mathbf{e}_zA_z(r)$。在圆柱坐标系中，由 $A_z(r)$ 满足的一维微分方程和边界条件，即可求解出 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$，然后由 $\mathbf{B}(r)=\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 可求出 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$。

记 $r\le a$ 和 $r\ge a$ 的矢量位分别为 $\mathbf{A}_1(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{A}_2(\mathbf{r})$。由于在 $r\ge a$ 时电流为零，所以

$$\nabla^2A_{z1}(r)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial A_{z1}}{\partial r})=-\mu_0J_0r\qquad(r\le a)$$

$$\nabla^2A_{z2}(r)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial A_{z2}}{\partial r})=0\qquad(r\ge a)$$

由此可解得

$$A_{z1}(r)=-\frac{1}{9}\mu_0J_0r^3+C_1\ln r+D_1$$

$$A_{z2}(r)=C_2\ln r+D_2$$

$A_{z1}(r)$ 和 $A_{z2}(r)$ 满足的边界条件为

① $r\to0$ 时，$A_{z1}(r)$ 为有限值

② $r=a$ 时，$A_{z1}(a)=A_{z2}(a)$，$\dfrac{\partial A_{z1}}{\partial r}\Big|_{r=a}=\dfrac{\partial A_{z2}}{\partial r}\Big|_{r=a}$

由条件①、②，有 $C_1=0$，$-\dfrac{1}{9}\mu_0J_0a^3=C_2\ln a+D_2$，$-\dfrac{1}{3}\mu_0J_0a^2=C_2\dfrac{1}{a}$

由此可解得 $C_2=-\dfrac{1}{3}\mu_0J_0a^3$，$D_2=-\dfrac{1}{3}\mu_0J_0a^3(\dfrac{1}{3}-\ln a)$

故

$$A_{z1}(r)=-\frac{1}{9}\mu_0J_0r^3+D_1\qquad(r\le a)$$

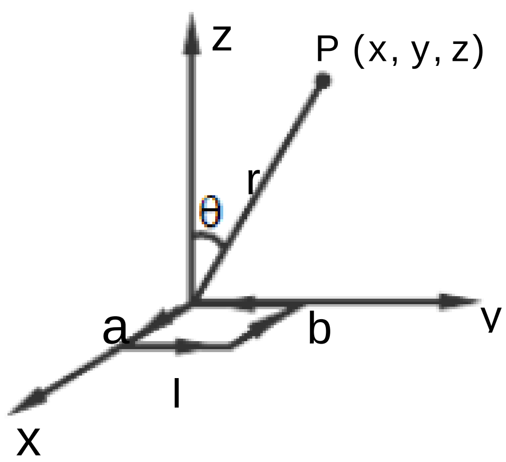
$$A_{z2}(r)=-\frac{1}{3}\mu_0J_0a^3\ln r-\frac{1}{3}\mu_0J_0a^3(\frac{1}{3}-\ln a)\qquad(r\ge a)$$

式中常数 D_1 由参考点确定，若令 $r=0$ 时，$A_{z1}(r)=0$，则有 $D_1=0$。

空间的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_1(r)=\nabla\times\mathbf{A}_1(r)=\mathbf{e}_\phi\frac{1}{3}\mu_0J_0r^2\qquad(r<a)$$

$$\mathbf{B}_2(r)=\nabla\times\mathbf{A}_2(r)=\mathbf{e}_\phi\frac{\mu_0J_0a^3}{3r}$$



题 5.6 图

5.6 如题 5.6 图所示，边长分别为 a 和 b、载有电流 I 的小矩形回路。

（1）求远处的任一点 $P(x, y, z)$ 的矢量位 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$，并证明它可以写成 $\mathbf{A}(\mathbf{r})=\dfrac{\mu_0\mathbf{p}_m\times\mathbf{r}}{4\pi r^3}$。其中 $\mathbf{p}_m=\mathbf{e}_z Iab$；

（2）由 $\mathbf{A}$ 求磁感应强度 $\mathbf{B}$，并证明 $\mathbf{B}$ 可以写成

$$\mathbf{B}=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla(d\Omega)$$

式中 $d\Omega=\dfrac{ab\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_r}{r^2}$ 场点对小电流回路所张的立体角。

解 （1）电流回路的矢量位为 $\mathbf{A}(\mathbf{r})=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C\dfrac{1}{R}d\mathbf{l}$

式中：$R=[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{1/2}=[r^2-2r\sin\theta(x'\cos\phi+y'\sin\phi)+x'^2+y'^2]^{1/2}$

根据矢量积分公式 $\oint_C\Psi d\mathbf{l}=\int_S d\mathbf{S}\times\nabla\Psi$，有 $\oint_C\dfrac{1}{R}d\mathbf{l}'=\int_S d\mathbf{S}'\times\nabla'(\dfrac{1}{R})$

而

$$\nabla'(\frac{1}{R})=-\nabla(\frac{1}{R})$$

所以

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_S d\mathbf{S}'\times\nabla(\frac{1}{R})$$

对于远区场，$r\gg x'$，$r\gg y'$，所以 $R\approx r$，故

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_S d\mathbf{S}'\times\nabla(\frac{1}{r})=-\frac{\mu_0}{4\pi}[I\int_S d\mathbf{S}']\times\nabla(\frac{1}{r})=-\frac{\mu_0}{4\pi}(\mathbf{e}_z Iab)\times\nabla(\frac{1}{r})=$$

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{p}_m\times(-\frac{\mathbf{r}}{r^3})=\frac{\mu_0\mathbf{p}_m\times\mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

（2）由于

$$\mathbf{A}(r)=-\frac{\mu_0}{4\pi}p_m\mathbf{e}_z\times(-\frac{\mathbf{r}}{r^3})=\mathbf{e}_\phi\frac{\mu_0 p_m}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^2}$$

故

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{e}_r\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi)-\mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)=\frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^3}(\mathbf{e}_r 2\cos\theta+\mathbf{e}_\theta\sin\theta)$$

又由于

$$\mathbf{e}_r 2\cos\theta+\mathbf{e}_\theta\sin\theta=-r^3\nabla(\frac{\cos\theta}{r^2})=-r^3\nabla(\frac{\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_r}{r^2})$$

故

$$\mathbf{B}=-\frac{\mu_0 p_m}{4\pi}\nabla(\frac{\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_r}{r^2})=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla(\frac{ab\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_r}{r^2})=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla(d\Omega)$$

5.7 半径为 a 磁介质球，具有磁化强度为

$$\mathbf{M}=\mathbf{e}_z(Az^2+B)$$

其中 A 和 B 为常数，求磁化电流和等效磁荷。

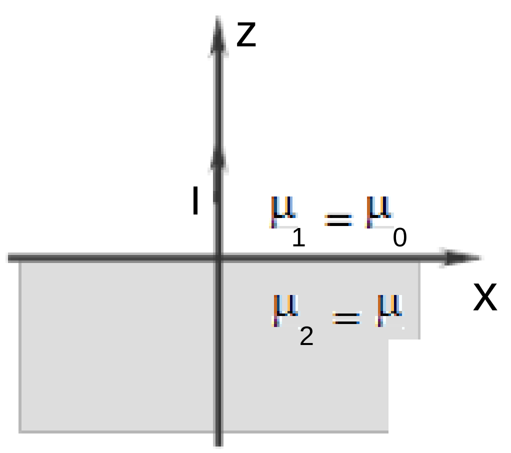
解 磁介质球内的磁化电流体密度为 $\mathbf{J}_m=\nabla\times\mathbf{M}=-\mathbf{e}_z\times\nabla(Az^2+B)=-\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_z 2Az=0$

等效磁荷体密度为 $\rho_m=-\nabla\cdot\mathbf{M}=-\dfrac{\partial}{\partial z}(Az^2+B)=-2Az$

磁介质球表面的磁化电流面密度为

$$\mathbf{J}_{mS}=\mathbf{M}\times\mathbf{n}\big|_{r=a}=\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_r(Aa^2\cos^2\theta+B)=$$

$$\mathbf{e}_\phi(Aa^2\cos^2\theta+B)\sin\theta$$



题 5.8 图

等效磁荷面密度为

$$\sigma_m = \mathbf{n}\cdot\mathbf{M}\big|_{r=a} = \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_z(Aa^2\cos^2\theta + B) =$$

$$(Aa^2\cos^2\theta + B)\cos\theta$$

5.8 如题 5.8 所示图，无限长直线电流 I 垂直于磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种磁介质的分界面，试求：（1）两种磁介质中的磁感应强度 $\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{B}_2$；（2）磁化电流分布。

解 （1）由安培环路定理，可得 $\mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi\dfrac{I}{2\pi r}$

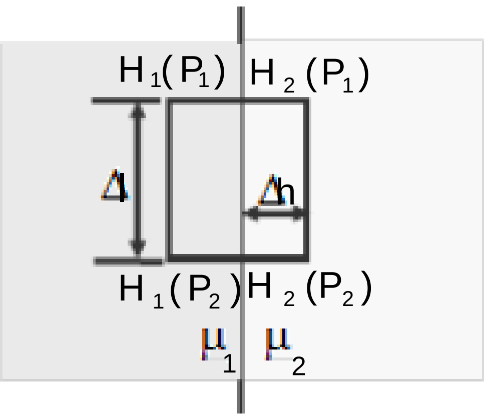
所以得到

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0\mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu\mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi\frac{\mu I}{2\pi r}$$

（2）磁介质在的磁化强度 $\mathbf{M} = \dfrac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_2 - \mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi\dfrac{(\mu-\mu_0)I}{2\pi\mu_0 r}$

则磁化电流体密度 $\mathbf{J}_m = \nabla\times\mathbf{M} = \mathbf{e}_z\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(rM_\phi) = \mathbf{e}_z\dfrac{(\mu-\mu_0)I}{2\pi\mu_0}\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{d}(r\cdot\dfrac{1}{r}) = 0$



题 5.9 图

在 $r=0$ 处，$\mathbf{B}_2$ 具有奇异性，所以在磁介质中 $r=0$ 处存在磁化线电流 I_m。以 z 轴为中心、r 为半径作一个圆形回路 C，由安培环路定理，有

$$I + I_m = \frac{1}{\mu_0}\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu I}{\mu_0}$$

故得到

$$I_m = (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)I$$

在磁介质的表面上，磁化电流面密度为

$$\mathbf{J}_{mS} = \mathbf{M} ? \mathbf{e}_z\big|_{z=0} \quad \mathbf{e}_r\frac{(\mu-\mu_0)I}{2\pi\mu_0 r}$$

5.9 已知一个平面电流回路在真空中产生的磁场强度为 $\mathbf{H}_0$，若此平面电流回路位于磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种均匀磁介质的分界平面上，试求两种磁介质中的磁场强度 $\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{H}_2$。

解 由于是平面电流回路，当其位于两种均匀磁介质的分界平面上时，分界面上的磁场只有法向分量，根据边界条件，有 $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}$。在分界面两侧作一个小矩形回路，分别就真空和存在介质两种不同情况，应用安培环路定律即可导出 $\mathbf{H}_1$、$\mathbf{H}_2$ 与 $\mathbf{H}_0$ 的关系。

在分界面两侧，作一个尺寸为 $2\Delta h\times\Delta l$ 的小矩形回路，如题 5.9 图所示。根据安培环路定律，有

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = H_1(P_1)\Delta h + H_2(P_1)\Delta h - H_1(P_2)\Delta h - H_2(P_2)\Delta h = I \qquad (1)$$

因 $\mathbf{H}$ 垂直于分界面，所以积分式中 $\mathbf{H}\cdot\Delta\mathbf{l} = 0$。这里 I 为与小矩形回路交链的电流。

对平面电流回路两侧为真空的情况，则有

$$\oint_C \mathbf{H}_0\cdot d\mathbf{l} = 2H_0(P_1)\Delta h - 2H_0(P_2)\Delta h = I \qquad (2)$$

由于 P_1 和 P_2 是分界面上任意两点，由式（1）和（2）可得到 $\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 = 2\mathbf{H}_0$

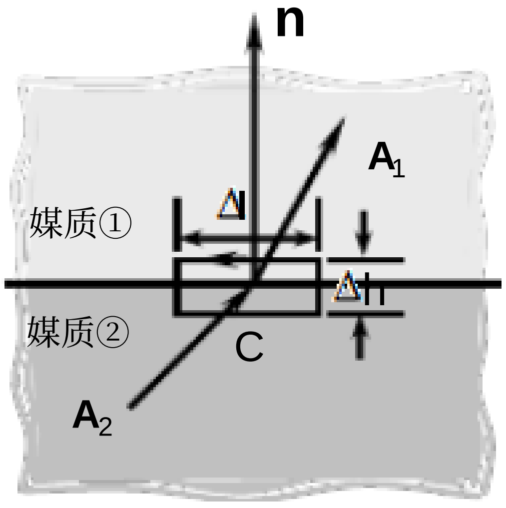
即 $$\frac{B}{\mu_1}+\frac{B}{\mu_2}=2H_0$$

于是得到 $$B=\frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}H_0$$

故有 $$H_1=\frac{B}{\mu_1}=\frac{2\mu_2}{\mu_1+\mu_2}H_0\qquad H_2=\frac{B}{\mu_2}=\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}H_0$$

5.10 证明：在不同介质分界面上矢量位 $\mathbf{A}$ 的切向分量是连续的。

解 由 $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$ 得 $$\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}\tag{1}$$



题 5.10 图

在媒质分界面上任取一点 P，围绕点 P 任作一个跨越分界面的狭小矩形回路 C，其长为 Δl、宽为 Δh，如题 5.10 图所示。将式（1）应用于回路 C 上，并令 Δh 趋于零，得到

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=\mathbf{A}_1\cdot\Delta\mathbf{l}-\mathbf{A}_2\cdot\Delta\mathbf{l}=\lim_{\Delta h\to 0}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

由于 $\mathbf{B}$ 为有限值，上式右端等于零，所以

$$\mathbf{A}_1\cdot\Delta\mathbf{l}-\mathbf{A}_2\cdot\Delta\mathbf{l}=0$$

由于矢量 $\Delta\mathbf{l}$ 平行于分界面，故有

$$A_{1t}=A_{2t}$$

5.11 一根极细的圆铁杆和一个很薄的圆铁盘样品放在磁场 $\mathbf{B}_0$ 中，并使它们的轴与 $\mathbf{B}_0$ 平行，（铁的磁导率为 μ）。求两样品内的 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$；若已知 $B_0=1\text{T}$、$\mu=5000\mu_0$，求两样品内的磁化强度 M。

解 对于极细的圆铁杆样品，根据边界条件 $H_{1t}=H_{2t}$，有

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_0=\mathbf{B}_0/\mu_0$$

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}=\frac{\mu}{\mu_0}\mathbf{B}_0$$

$$M=\frac{B}{\mu_0}-H=\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)B_0=\frac{4999}{\mu_0}$$

对于很薄的圆铁盘样品，根据边界条件 $B_{1n}=B_{2n}$，有

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_0$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{B}/\mu=\mathbf{B}_0/\mu$$

$$M=\frac{B}{\mu_0}-H=\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu}\right)B_0=\frac{4999}{5000\mu_0}$$

5. 12 如题 5.12 图所示，一环形螺线管的平均半径 $r_0=15$ cm，其圆形截面的半径 $a=2$ cm，铁芯的相对磁导率 $\mu_r=1400$，环上绕 $N=1000$ 匝线圈，通过电流 $I=0.7\text{A}$。

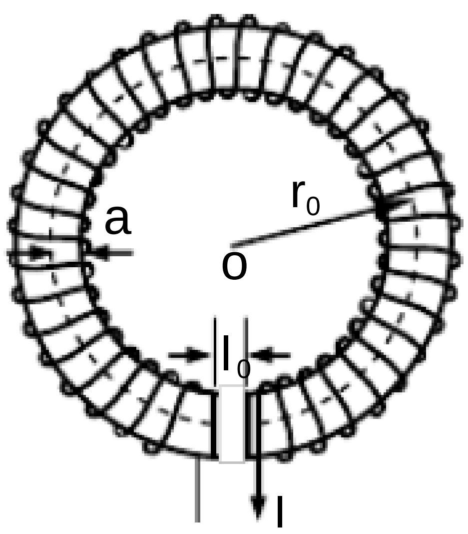
（1）计算螺旋管的电感；

（2）在铁芯上开一个 $l_0=0.1\text{cm}$ 的空气隙，再计算电感。（假设开口后铁芯的 μ_r 不变）

（3）求空气隙和铁芯内的磁场能量的比值。

解 （1）由于 $a \ll r_0$，可认为圆形截面上的磁场是均匀的，且等于截面的中心处的磁场。

由安培环路定律，可得螺旋管内的磁场为 $H = \dfrac{NI}{2\pi r_0}$



题 5.12 图

与螺线管铰链的磁链为 $\Psi = NS\mu H = \dfrac{\mu a^2 N^2 I}{2r_0}$

故螺线管的电感为

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu a^2 N^2}{2r_0} = \frac{1400\times 4\pi\times 10^{-7}\times 0.02^2\times 1000^2}{2\times 0.15} = 2.346 \ \mathrm{H}$$

（2）当铁芯上开有小空气隙时，由于可隙很小，可忽略边缘效应，则在空气隙与铁芯的分界面上，磁场只有法向分量。根据边界条件，有 $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_\mu = \mathbf{B}$，但空气隙中的磁场强度 $\mathbf{H}_0$ 与铁芯中的磁场强度 $\mathbf{H}_\mu$ 不同。根据安培环路定律，有

$$H_0 l_0 + H_\mu(2\pi r_0 - l_0) = NI$$

又由于 $B_0 = \mu_0 H_0$、$B_\mu = \mu_0\mu_r H_\mu$ 及 $B_0 = B_\mu = B$，于是可得 $B = \dfrac{\mu_0\mu_r NI}{\mu_r l_0 + (2\pi r_0 - l_0)}$

所以螺线管得磁链为 $\Psi = NSB = \dfrac{\pi\mu_0\mu_r a^2 N^2 I}{\mu_r l_0 + (2\pi r_0 - l_0)}$

故螺线管得电感为

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\pi\mu_0\mu_r a^2 N^2}{\mu_r l_0 + (2\pi r_0 - l_0)} = \frac{4\pi^2\times 10^{-7}\times 1400\times 0.02^2\times 1000^2}{1400\times 0.001 + 2\times\pi\times 0.15 - 0.001} = 0.944 \ \mathrm{H}$$

（3）空气隙中的磁场能量为 $W_{m0} = \dfrac{1}{2}\mu_0 H_0^2 S l_0$

铁芯中的磁场能量为 $W_{m\mu} = \dfrac{1}{2}\mu_0\mu_r H_\mu^2 S(2\pi r_0 - l_0)$

故 $\dfrac{W_{m0}}{W_{m\mu}} = \dfrac{\mu_r l_0}{2\pi r_0 - l_0} = \dfrac{1400\times 0.001}{2\pi\times 0.15 - 0.001} = 1.487$

5.13 证明：单匝线圈励磁下磁路的自感量为 $L_0 = 1/R_m$，R_m 为磁路的磁阻，故 NI 激励下，电感量为 $L = N^2/R_m$。磁路中单匝激励下的磁场储能 $W_{m0} = R_m\Phi_0^2/2$，则 NI 激励下的 $W_m = N^2 W_{m0}$。

解 在单匝线圈励磁下，设线圈中的电流为 I，有 $\Phi_0 = L_0 I = \dfrac{I}{R_m}$。则在 NI 激励下，磁路的磁通为 $\Psi = N^2\Phi_0 = \dfrac{N^2 I}{R_m}$

故电感量为 $L = \dfrac{\Psi}{I} = \dfrac{N^2}{R_m}$