北京航空航天大学

2003－2004 学年第一学期期末

考试统一用答题册(A)

考试课程 复变函数

班级 __________ 学号 __________ 姓名 __________

题目	一	二	三	四	五	总分
得分						

2004 年 01 月 7 日

一、填空（每题 4 分，共 40 分）

1.$(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i})^6$ 的指数表示式为 ________________________________.

2. 函数 $f(z)=z\mathrm{Re}z$ 在 $z_0=$ ______________ 点可导，且 $f'(z_0)=$ ______________.

3.$(1-i)^{1+i}$ 的实部为 ______________________________________.

4. 设 C 为从 0 到 $2+i$ 的直线段，则 $\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z=$ ____________.

5. $\oint_{|z|=2}\dfrac{z}{z^2-1}\mathrm{d}z=$ ______________________.

6. 函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{1-z}$ 在 __________ 域内可展开成含 z 的幂的泰勒级数为 __________________________________（至少写到含 z^3 的项）.

7. $\int_C |z|\mathrm{d}z=$ ____________，其中 C 为从 $-i$ 到 i 的左半单位圆周.

8. 函数 $f(z)=\mathrm{ctg}\pi z$ 有孤立奇点 __________，此函数在它的孤立奇点处的留数为 __________.

9.（三系、十五系不做此题）$\omega=z^2$ 在 $z=i$ 的伸缩率为 ____________，转动角为 ______________.

9.（二系不做此题）函数 $F(s)=e^{-s}\dfrac{1}{s-1}$ 的拉氏逆变换 $L^{-1}[e^{-s}\dfrac{1}{s-1}]=$ ______________________.

10.（三系、十五系不做此题）$\mathrm{Res}[\dfrac{z+1}{z^2-2z},\infty]=$ ________________.

10.（二系不做此题）$e^t*e^{-t}(t>0)=$ ________________________.

二、计算（每题 8 分，共 32 分）

1. 已知 $f(z)=\oint_{|\zeta|=2}\dfrac{\zeta^4+\zeta^2}{(\zeta-z)^3}\mathrm{d}\zeta$，求 $f(1), f'(1), f(3), f'(3)$.

2. 求积分 $\oint_C \dfrac{\mathrm{d}z}{z^3(z+1)(z-1)}$，其中 C 为圆 $|z-1|=\dfrac{3}{2}$ 的正向一周。

3. 验证 $v = 2x^2 - 2y^2 + x$ 为调和函数, 并求解析函数 $f(z) = u + iv$ 使得 $f(0) = 1$.

4. 将函数 $f(z) = \dfrac{z}{z-2}$ 在适当的圆环域内展开成含 $z+1$ 的幂的洛朗级数。

三、（ 10 分，三系、十五系不做此题）

计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2} dx$.

三、（ 10 分，二系不做此题）

求矩形脉冲函数 $f(z) = \begin{cases} 1, & |t| \le \delta; \\ 0, & |t| \ge \delta, \end{cases}$ $(\delta > 0)$ 的傅氏变换及傅氏积分，并验证 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

四、（ 12 分，三系、十五系不做此题）

求共形映射 $\omega = f(z)$, 将带形域 $\pi < \mathrm{Im}z < 2\pi$ 映射成单位圆域 $|\omega| < 1$, 且满足 $f(2\pi i) = i, f(\frac{3\pi}{2}i) = 0$, 并图示说明.

四、（ 12 分，二系不做此题）

用拉氏变换及拉氏逆变换解微分方程组:

$$\begin{cases} 2x - y - y' = 4(1 - e^{-t}); \\ 2x' + y = 2(1 + 3e^{-2t}); \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

五、证明题（ 6 分）

设 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 在 z_0 的邻域 K 内解析，且 K 内有收敛于 z_0 的点列 $\{z_n\}(z_n \neq z_0)$ 使 $f_1(z_n) = f_2(z_n), (n = 1, 2, 3, \ldots)$，证明 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 在 K 内恒等。

北京航空航天大学

2004 — 2005 学年第一学期

考试统一用答题册

(共 6 页)

考试课程 复变函数 A

班级 ______ 学号 ______

姓名 ______ 成绩 ______

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							

2005 年 1 月 16 日

一、　选择题(每题 3 分，共 33 分)

1．一个向量逆时针旋转$\frac{\pi}{3}$，向右平移 3 个单位，再向上平移 2 个单位后对应的复数为2，则原向量对应的复数是（　　　）

(A) $1-\sqrt{3}i$　　(B) $1+\sqrt{3}i$　　(C) $\sqrt{3}-i$　　(D) $\sqrt{3}+i$

2. $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}=$（　　　）

(A)等于1　　(B) 等于-1　　(C) 等于$-i$　　(D) 不存在

3．下列函数中，在整个复平面上均为解析函数的是(　　　)

(A)　xy^2+ix^2y　　(B) $x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$

(C)　$x^2-y^2-x+(2xy-y^2)i$　　(D) x^2-y^2-2xyi

4．设C是从0到πi的直线段，则积分$\int_C z\cos z^2 \mathrm{d}z=$（　　　）

(A) $\frac{1}{2}\sin\pi^2$　　(B) $-\frac{1}{2}\sin\pi^2$　　(C) $-\frac{1}{2}\cos\pi^2$　　(D) $\frac{1}{2}\cos\pi^2$

5．设C为曲线C_1：左半平面中以原点为中心的负向单位半圆以及曲线C_2：从i到$-i$的直线段所组成的复合曲线，则$\int_C |z|\,\mathrm{d}z=$（　　　）

(A) i　　(B) $-i$　　(C) 0　　(D) 1

6．设C为正向圆周$|z|=1$，则$\oint_C \dfrac{e^{\frac{1}{3-z}}\cos\frac{1}{z-3}}{(2-z)}\mathrm{d}z=$（　　　）

(A) $2\pi ie\cos 1$　　(B) 0　　(C) $6\pi ie\cos 1$　　(D) $-2\pi ie\cos 1$

7．若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$收敛半径为 2，那么该级数在$z=1+\sqrt{3}i$ 处的敛散性为(　　　)

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛

(C) 发散　　(D) 不能确定

8．设$v(x,y)$在区域D内为$u(x,y)$的共轭调和函数，则下列函数中为D内解析函数的是（　　）

（A） $v(x,y)+iu(x,y)$　　（B） $v(x,y)-iu(x,y)$

（C） $u(x,y)-iv(x,y)$　　（D） $\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial v}{\partial x}$

9. 设 $z=0$ 为函数 $\dfrac{1-e^{z^2}}{z^4\sin z}$ 的 m 级极点，那么 $m=$（　　）

（A）5　　（B）4　　（C）3　　（D）2

10. 设 $\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$，假如当 $t\to+\infty$ 时，$g(t)=\int_{-\infty}^{t}f(t)\mathrm{d}t\to 0$，则 $\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{2t}f(t)\mathrm{d}t]=$（　　）

(A) $\dfrac{1}{2i\omega}F(\dfrac{\omega}{2})$　　(B) $\dfrac{1}{i\omega}F(\dfrac{\omega}{2})$

(C) $\dfrac{1}{2i\omega}F(\omega)$　　(D) $\dfrac{1}{i\omega}F(\omega)$

11. 设 $f(t)=\sin(t-\dfrac{\pi}{3})$，则 $\mathcal{L}[f(t)]=$（　　）

(A) $\dfrac{1-\sqrt{3}s}{2(1+s^2)}$　　(B) $\dfrac{s-\sqrt{3}}{2(1+s^2)}$

(C) $\dfrac{1}{1+s^2}e^{-\frac{\pi}{3}s}$　　(D) $\dfrac{s}{1+s^2}e^{-\frac{\pi}{3}s}$

二、填空题(每题 3 分，共 33 分)

1. 设 $|z|=\sqrt{5},\arg(z-i)=\dfrac{3\pi}{4}$，则 $z=$____________________.

2. 设 $f(z)=\dfrac{1}{4}z^4+8z$，则方程 $f'(z)=0$ 的所有根为____________________.

3. $f(z)=2(x-1)y+i(y^2-x^2+2x)$，则 $f'(1+i)=$____________.

4. 解析函数 $f(z)=u+iv$ 的实部 $u=x^2-y^2$，则 $f(z)=$__________.

5. 复数 $(1+i)^i$ 的主值为 __________________.

6. 设 $f(z)=\oint_{|\xi|=1}\dfrac{e^{\xi}}{(\xi-z)^5}\mathrm{d}\xi$，其中 $|z|\neq1$，则 $f'(\dfrac{\pi}{4}i)=$____________.

$f'''(2) =$ ____________________.

7．设函数 $\dfrac{z^2+z}{\sin z}$ 的泰勒展开式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-\dfrac{\pi}{2})^n$，那么幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-\dfrac{\pi}{2})^n$ 的收敛半径

$R =$ ____________________.

8．函数 $\dfrac{\cos z}{1-z}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式为____________________

(至少写到含 z^3 的项).

9. $z=\infty$ 是函数 $\dfrac{3+2z+z^3}{z^2}$ 的 ____________________.

10．函数 $f(z)=\dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{z}}$ 的孤立奇点为____________________,在其孤立奇点处的留数

为____________________.

11.已知 $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s(s+1)}$，则 $L^{-1}[F(s)] =$ ____________________.

三、(9 分) 设 $f(z)$ 在 $|z|<R\ (R>1)$ 内解析，且 $f(0)=1, f'(0)=2$，试计算积分

$\oint\limits_{|z|=1} (z+1)^2 \dfrac{f(z)}{z^2} \mathrm{d}z$ 并由此得出 $\int_0^{2\pi} \cos^2\dfrac{\theta}{2} f(e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$ 之值.

四、（9 分）将函数$f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(z^2-1)}$在适当的圆环域内展开成含$z$的幂的洛朗级数.

五、（8 分）计算函数 $f(t)=e^{-|t|}\cos t$ 的 Fourier 变换，并证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^2+4}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos t.$$

六、(8分)用Laplace变换及其逆变换求变系数微分方程$ty''(t)-2y'(t)+ty(t)=0$

满足条件$y(0)=0$的解.

2005年试题

一．选择题（每题3分，共33分）

1．一个向量顺时针旋转$\dfrac{\pi}{3}$，向右平移3个单位，再向下平移1个单位后对应的复数为$1-\sqrt{3}i$，则原向量对应的复数是（　　）

（A）2　　（B）$1+\sqrt{3}i$　　（C）$\sqrt{3}-i$　　（D）$\sqrt{3}+i$

2．设$f(z)=u+iv$在区域D内解析，则下列函数中在D内解析的是（　　）

（A）$f(\bar{z})$　　（B）$\overline{f(z)}$　　（C）$\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$　　（D）$\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial v}{\partial x}$

3．幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\cos(in))\,z^n$的收敛半径是（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）e　　（D）e^{-1}

4．积分$\int\limits_{|z|=1}\dfrac{dz}{z^2+2z+4}$=（　　）

（A）$2\pi i$　　（B）$-2\pi i$　　（C）1　　（D）0

5．设c是$z=(1+i)t$，$1\le t\le 2$的线段，则$\int_c \arg z dz$=（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{4}$　　（B）$\dfrac{\pi}{4}i$　　（C）$\dfrac{\pi}{4}(1+i)$　　（D）$1+i$

6．$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\mathrm{Im}(z)-\mathrm{Im}(z_0)}{z-z_0}$（　　）

（A）等于i　　（B）等于$-i$　　（C）等于0　　（D）不存在

7．设c为任意常数，那么由调和函数$u=x^2-y^2$确定的解析函数$f(z)=u+iv$是（　　）

（A）iz^2+c　　（B）$i\bar{z}^2+c$　　（C）z^2+c　　（D）$\bar{z}^2+c$

8．下列级数中，绝对收敛的是（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(1+\dfrac{i}{n})$　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{i}{2^n}]$　　（C）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{i^n}{\ln n}$　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n i^n}{2^n}$

9．$z=1$是函数$(z-1)\sin\frac{1}{z-1}$的（　　　）

（A）可去奇点　　　　（B）一级极点　　（C）一级零点　　（D）本性奇点

10．设$\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$，则 $\mathcal{F}[(t-2)f(t)]=($　　　$)$

(A) $F'(\omega)-2F(\omega)$　　　　(B) $-F'(\omega)-2F(\omega)$

(C) $iF'(\omega)-2F(\omega)$　　　　(D) $-iF'(\omega)-2F(\omega)$

11．设$f(t)=e^{-t}u(t-1)$，则$L[f(t)]$=（　　　）

（A）$\frac{e^{-(s-1)}}{s-1}$　（B）$\frac{e^{-(s+1)}}{s+1}$　（C）$\frac{e^{-s}}{s-1}$　（D）$\frac{e^{-s}}{s+1}$

二．填空题（每空 3 分，共 33 分）

1．设$F(z)=\frac{1}{4}z^4-(1-i)z$，则$F'(z)$=0 的所有根为____________________.

2．设$z=\frac{1+i}{1-i}$，$z^{100}+z^{75}+z^{50}$的值等于____________________.

3．$\ln(1-i)$的主值为____________________.

4．设$f(z)=x^2+iy^2$，则$f'(1+i)=$____________________.

5．设$f(z)=u+iv$在区域D内是解析的，如果$u+v$是实常数，那么$f(z)$在D内是____________________________.

6．设$f(z)=\int_{|\xi|=2}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}\xi)}{\xi-z}d\xi$，其中$|z|\neq 2$，则$f'(3)=$______________________.

7．函数$\frac{1}{1+\cos z}$在$z=0$处的泰勒展开式中，z^3项的系数为____________________.

8．已知tgz在$z=0$处的泰勒展开式为$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$，则此幂级数的收敛半径为____________________.

9．设 $f(z)=\dfrac{2z}{1+z^2}$，则 $f(z)$ 在扩充复平面上的孤立奇点为____________________________，在其孤立奇点处的留数为____________________________.

10. 已知 $F(s)=\dfrac{2e^{-s}-e^{-2s}}{s}$，则 $L^{-1}[F(s)]=$________________.

三.（8 分）求积分 $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz$。

四.（9 分）. 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z-2)}$ 在 $z=0$ 的适当圆环域内展开成洛朗级数

五．（8 分）求函数 $f(t)=e^{-\beta|t|}(\beta>0)$ 的 Fourier 变换，并推证 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}dw=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}$。

六.（8 分）用 Laplace 变换及其逆变换求微分方程

$$ty'' + (1-2t)y' - 2y = 0$$

满足条件 $y(0)=1$，$y'(0)=2$ 的解。

一、 选择题

1．当$z=\frac{1+i}{1-i}$时，$z^{100}+z^{75}+z^{50}$的值等于（　　）

（A）i　　（B）$-i$　　（C）1　　（D）-1

2．设x,y为实数，$z_1=x+\sqrt{11}+yi,z_2=x-\sqrt{11}+yi$且有$|z_1|+|z_2|=12$，则动点$(x,y)$的轨迹是（　　）

（A）圆　　（B）椭圆　　（C）双曲线　　（D）抛物线

3．$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\mathrm{Im}(z)-\mathrm{Im}(z_0)}{z-z_0}$（　　）

（A）等于i　　（B）等于$-i$　　（C）等于0　　（D）不存在

4．函数$f(z)$在点z可导是$f(z)$在点z解析的（　　）

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既非充分条件也非必要条件

5．下列函数中，为解析函数的是（　）

（A）x^2-y^2-2xyi　　（B）x^2+xyi

（C）$2(x-1)y+i(y^2-x^2+2x)$　　（D）x^3+iy^3

6．若函数$f(z)=x^2+2xy-y^2+i(y^2+axy-x^2)$在复平面内处处解析，那么实常数$a=$（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）-2

7．设c为正向圆周$|z|=\frac{1}{2}$，则$\oint_c\frac{z^3\cos\frac{1}{z-2}}{(1-z)^2}dz=$（　　）

（A）$2\pi i(3\cos 1-\sin 1)$　　（B）0　　（C）$6\pi i\cos 1$　　（D）$-2\pi i\sin 1$

8．设$f(z)$在单连通域B内处处解析且不为零，c为B内任何一条简单闭曲线，则积分$\oint_c\frac{f''(z)+2f'(z)+f(z)}{f(z)}dz$（　　）

（A）于$2\pi i$　　（B）等于$-2\pi i$　　（C）等于0　　（D）不能确定

9．若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$在$z=1+2i$处收敛，那么该级数在$z=2$处的敛散性为（　　）

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛

（C）发散　　　　　　　　　　　　（D）不能确定

10．设 $f(z)$ 在圆环域 $H: R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内的洛朗展开式为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$，$c$ 为 H 内绕 z_0 的任一条正向简单闭曲线，那么 $\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz =$（　　）

(A) $2\pi i c_{-1}$　　（B）$2\pi i c_1$　　（C）$2\pi i c_2$　　（D）$2\pi i f'(z_0)$

11．$z=1$ 是函数 $(z-1)\sin\frac{1}{z-1}$ 的（　　）

(A)可去奇点　　　　　　　　　　（B）一级极点
（C）　一级零点　　　　　　　　　（D）本性奇点

12．$z=\infty$ 是函数 $\frac{3+2z+z^3}{z^2}$ 的（　　）

(A)可去奇点　　　　　　　　　　（B）一级极点
（C）　二级极点　　　　　　　　　（D）本性奇点

二．填空题

1．设 $z=(2-3i)(-2+i)$，则 $\arg z =$ ____________________

2．以方程 $z^6 = 7-\sqrt{15}i$ 的根的对应点为顶点的多边形的面积为_______________

3．设 $f(z)=x^3+y^3+ix^2y^2$，则 $f'(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i)=$ ____________________

4．复数 i^i 的模为_________________________

5．解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的____________________

6．设 c 为沿原点 $z=0$ 到点 $z=1+i$ 的直线段，则 $\int_c 2\bar{z}dz =$ _______________________

7．设 $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^5}$，则 $\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=$ ____________________.

8．设函数 $f(z)=\frac{z^2}{z^2+1}$，则 $\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=$ _______________________

9．设 $a>0, f(t)=\begin{cases} e^{at}, t<0 \\ e^{-at}, t>0 \end{cases}$，则函数 $f(t)$ 的 $Fourier$ 变换为_______________________

10．设 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s), a>0$，则 $\mathcal{L}[e^{-\frac{t}{a}}f(\frac{t}{a})]=$ ________ 。

11．函数 $\dfrac{s^2}{s^2+1}$ 的 Laplace 逆变换 $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{s^2}{s^2+1}]=(\quad)$。

三．求积分 $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z}\mathrm{d}z$，并证明 $\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\pi$

四．在 $0<|z|<\infty$ 内将 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ 展开成洛朗级数。

五．求方程 $y''+2y'-3y=e^{-t}$ 满足初始条件 $y\big|_{t=0}=0, y'\big|_{t=0}=1$ 的解。

一、 选择(每题 3 分，共 27 分)

1. $\dfrac{2i}{-1+i}$的三角形式为(　　　　　)

(A) $\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$　　　　(B) $\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4})$

(C) $\sqrt{2}[\sin(-\dfrac{\pi}{4})+i\cos(-\dfrac{\pi}{4})]$　　　　(D) $\sqrt{2}[\cos(-\dfrac{\pi}{4})+i\sin(-\dfrac{\pi}{4})]$

2. 下列函数中在整个复平面上都解析的是(　　　　　)

(A) $x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i$　　　　(B) $\dfrac{1}{3x-3iy}$

(C) $x-iy$　　　　(D) $2x+ixy^2$

3. 设c是$z=(1+i)t$，$1\le t\le 2$的线段，则$\int_c \arg z dz=$（　　　　　）

（A）$\dfrac{\pi}{4}$　　（B）$\dfrac{\pi}{4}i$　　（C）$\dfrac{\pi}{4}(1+i)$　　（D）$1+i$

4. 设函数$e^z\text{ctg}z$的泰勒展开式为$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\dfrac{\pi}{2})^n$，那么幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\dfrac{\pi}{2})^n$的收敛半径$R=$(　　　　　)

(A) $+\infty$　　(B) 1　　(C)$\dfrac{\pi}{2}$　　(D) π

5. 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$的收敛半径为 2，那么该级数在$z=1+\sqrt{3}i$处的敛散性为(　　　　　)

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛　　（C）发散　　（D）不能确定

6。下列命题中，正确的是（　　　　　）

（A）设$f(z)=(z-z_0)^{-m}\varphi(z),\varphi(z)$在$z_0$处解析，$m$为自然数，则$z_0$为$f(z)$的$m$级极点。

（B）如果无穷远点∞是函数$\text{f}(z)$的可去奇点，那么$\text{Re}\,s[f(z),\infty]=0$。

（C）若$z=0$为偶函数$f(z)$的一个孤立奇点，则$\text{Re}\,s[f(z),0]=0$。

（D）若$\oint_c f(z)dz=0$，则$f(z)$在c内无孤立奇点。

7. 利用 Laplace 变换的性质可知，实积分$\int_0^{+\infty} te^{-t}\sin 2t\,\mathrm{d}t$的值为(　　　　　)

（A）$\frac{3}{25}$　　　（B）$-\frac{3}{25}$　　　（C）$\frac{4}{25}$　　　(D) $-\frac{4}{25}$

8．积分$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)t}dt =$（　　　　　）

(A) $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$　　　(B) $2\pi\delta(\omega+\omega_0)$　　　(C) $+\infty$　　　(D) $-\infty$

9．设$f(t)$的 Laplace 变换$\mathrm{L}[f(t)]=F(s)$,则$\mathrm{L}[\int_0^t (t-2)e^{2t}f(t)dt]=$（　　　　　）

(A) $-\frac{1}{s}[F'(s-2)+2F(s-2)]$　　　（B）$-\frac{1}{s}[F'(s+2)+2F(s+2)]$

（C）$\frac{1}{s}[F'(s-2)-2F(s-2)]$　　　（D）$\frac{1}{s}[F'(s+2)-2F(s+2)]$

二、填空（2，8 题分别为 4 分，6 分，其余每空 3 分，共 40 分）

1. 映射 $\omega=\frac{1}{z}$ 将 z 平面上的曲线 $(x-1)^2+y^2=1$ 映射　成 ω 平面上的曲线_______________.

2. 已知$f(z)=z^3-3(1-\sqrt{3}\mathrm{i})z$, 则$f'(z)=0$的所有根为__________________________.

3. 函数$f(z)=\frac{x^2+y^2}{3x-3iy}$在$z=1$处的导数为_________________________________.

4. $(-1+i)^i$的主值____.

5. 设$f(z)=\oint\limits_{|\zeta|=1}\frac{e^{\zeta}\cos\zeta}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$，则$f'(0)=$___________________________________.

6. 已知$u(x,y)=2x-x^3+3xy^2$,则由 u 及其共轭调和函数构成的解析函数$f(z)=u+iv$ =____________________________________.

7. $\int\limits_C (y\text{-}x\text{-}3ix^2)\mathrm{d}z=$_______________________,其中曲线 C 为从$z=0$到$z=1+i$的直线段.

8. 在扩充复平面上，函数$f(z)=\frac{\sin z-z}{z^3}$的孤立奇点有_______________，奇点类型____________________________，奇点处留数为_________________________。

9．在全平面解析，在实轴上等于 $\sin x$ 的函数是____________。

10．函数 $(1-t)f(1-t)$ 的傅立叶变换 $\mathrm{F}[(1-t)f(1-t)]$ 为____________。

11. 已知某函数的傅立叶逆变换为 $F(\omega)=\dfrac{1}{9+\omega^2}$，则该函数 $f(t)$=____________。

12．函数 $\dfrac{2\mathrm{e}^{-\mathrm{s}}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{s}}}{\mathrm{s}}$ 的 Laplace 逆变换 $\mathrm{L}^{-1}[\dfrac{2\mathrm{e}^{-\mathrm{s}}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{s}}}{\mathrm{s}}]$ 为____________。

三、（8 分）计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=4}\frac{\cos z}{z\ (z-\pi)^2}\mathrm{d}z.$

四、（8 分）将函数 $f(z)=\dfrac{z^2-2z+3}{z-2}$ 在 $z=1$ 的适当圆环域(包括圆域)内展成洛朗级数.

五、(12 分)用 Laplace 变换解微分方程组：

$$\begin{cases} x+x'-y'=u(t-1), \quad x(0)=x'(0)=0 \\ y'+x''-y''=\delta(t-1), \ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

六、(5 分) 若函数 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，并且

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$$

证明

$$|f^{(n)}(0)| \leq (n+1)!(1+\frac{1}{n})^n < e(n+1)!, \quad n=1,2,\cdots$$

2007 年复变函数试题

一、 解答下列各小题（每小题 5 分）

1. 求方程 $z^6+1=0$ 的所有根

2. 求 $Ln(-1-\sqrt{3}i)$ 的实部与虚部

3. 计算 $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{\sqrt{5}}$，并写出主值

4. 什么叫做复变函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析？（回答）

5. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{z-1}{n})^n$ 的收敛半径

6. 求 $\frac{e^{2iz}}{(z^2+9)^2}$ 在 $3i$ 点的留数

二、 求函数 $f(z)=\frac{2(z+1)}{z^2+2z-3}$ 在以 $z=0$ 为中心，由它的奇点相互隔开的不同圆环域内的洛朗展开级数（15 分）

三、 已知 $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，求 $v(x,y)$，使 $f(z)=u+iv$ 为解析函数，且 $f(1+i)=\frac{1}{2}\ln 2$（15 分）

四、 计算以下积分

1. 计算 $\int\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z^n}dz$（$n$ 为正整数或负整数）（10 分）

2. 计算积分 $I=\int_0^{\infty}\frac{x^4}{x^6+1}dx$（15 分）

3. 计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{x\sin ax}{(x^2+b^2)}dx$（$a,b$ 为实数且 $a>0,b>0$）（15 分）

2007 年度复变函数补考题（满分 100）

一、　计算或求解下列各小题：（每小题 5 分）

（1）　计算：$(-1+\sqrt{3}i)^6$

（2）　解方程：$z^4-1++i=0$

（3）　求 $(1-i)^{2i}$ 的值

（4）　求函数 $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$ 在 *z=1* 处的留数

二、　把 $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)(z+4)}$ 在环域 $1<|z|<4$ 内展成罗仑级数，并求出 C_{-1}。

（15 分）

三、　求解析函数 *f(z)*，使 *f(z)* 的虚部为：

$v(x,y)=2x^2-2y^2+x$，且满足：$f(1)=3i$。　（15 分）

四、　计算下列积分

（1）$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$　(10 分)

（2）$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\cos ax}{1+x^2}dx$　（*a>0*）（10 分）

（3）$I=\int_{0}^{+2\pi}\dfrac{1}{2+\cos\theta}d\theta$　（10 分）

五、　试用柯西-黎曼方程证明：

$$W(z)=\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

在整个复平面上解析（20 分）

复变函数补考试题　　2008，10

学号____________　　姓名 __________　　分数_________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、（每小题 3 分，共 15 分） 判断下列各题正误。

1、如果函数$f(z)$在点z_0处可导，则$f(z)$在z_0解析。（　　　）

2、如果函数$f(z)$在点z_0满足柯西—黎曼方程，那么它在z_0处一定有导数。（　　　）

3、如果函数$f(z)$在区域D内解析，那么它沿着D内任一条简单闭曲线的积分为0。（　　　）

4、如果函数$f(z)$在区域D内解析且不为常数，那么$|f(z)|$不可能在D内达到最小值。（　　　）

5、设函数$f(z)$在区域D内解析，点列 $\{z_n\}\subset D$，　$f(z_n)=0$，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$，则$f(z)$在D内恒为零。（　　　）

二、（每空 3 分，共 15 分）填空题。

1、$w=z^2$在$z=i$处的伸缩率是(　　　　), 旋转角是(　　　　)。

2、函数 i^i 的值是（　　　　　　　　　）。

3、设 $f(z)=\int_{|z|=3}\frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}d\xi$，则$f'(1+i)=$（　　　　　　　　）。

4、设$f(z)=\frac{1}{\sin z-\sin a}$，其中$a$为一常数，$f(z)$的孤立奇点及它的类型和阶数分别是（　　　　　　　）和（　　　　　　　　）。

5、方程$z^4-5z+1=0$在单位圆内的零点个数是（　　　　）。

三、 （20分）计算题

1、 积分 $\int\limits_{|z|=1}\frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}$；

2、 设 $g(z)=\int\limits_{|\zeta|=2}\frac{2\zeta^2-\zeta+1}{\zeta-z}d\zeta$.

（1）计算 $g(1)$；

（2）求 $g(z_0),|z_0|>2$；

（3）能否求出 $g(2)$。

四、（10分）写出函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环 $1<|z|<2$ 内的洛朗级数展式。

五、（15分）计算实积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{x^4+a^4}dx\quad (m>0,\ \ a>0)$$

六、（15分）求作一单叶函数 $f(z)$，将 $|z|<1$ 保形映射成 $|w|<1$，使 $f(0)=\frac{1}{2},f'(0)>0$。

七、（10分） 设 $f(z)$ 是一个整函数，如果存在着正数 ρ、R 和 M，使得当 $|z|\geq R$ 时，

$$|f(z)|<M|z|^{\rho},$$

证明 $f(z)$ 至多是一个多项式。

北京航空航天大学

2007 — 2008 学年第二学期

考试统一用答题册

课程 复变函数与积分变换

班级 ________________ 学号 ________________

姓名 ________________ 成绩 ________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分数								
评阅人								

2008 年 2 月 23 日

一、填空题(每题 4 分，共 40 分)

1. $(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i})^6$**的指数表示式为**_____________________________。

2. 函数 $\omega=1/z$ 将 z 平面上的曲线 $x=2$ 变成 ω 平面上的曲线

____________________________。

3. 设 $f(z)=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3$，则方程 $f'(z)=0$ 的所有根为__________

____________________________。

4. $f(z)=(x^2-y^2-x)+i(2xy-y^2)$, 则 $f'(\frac{1}{2}i)=$________________.

5. cos(iln5)=____.

6. 设 $f(z)=\oint_{|\xi|=1}\frac{e^{\xi}}{(\xi-z)^3}\mathrm{d}\xi$，其中 $|z|\neq 1$，则 $f'(0)=$________________，

$f'''(2)=$________________________.

7. 设函数 $\frac{e^z}{\sin z}$ 的泰勒展开式为 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\frac{\pi}{2})^n$，那么幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\frac{\pi}{2})^n$ 的收敛半径 $R=$___________________________________.

8. 函数 $f(z)=\frac{\sin z-z}{z^3}$ 的孤立奇点为________________，___孤立奇点类型

分别为________________________.

9. 函数 $e^z\cos z$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式为________________________.

10．已知$F(s)=\dfrac{e^{-s}}{(s+1)(s+2)}$，则$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=$ ______________________.

二、(10 分)已知解析函数$f(z)=u+iv$的实部$u=x^2-y^2+xy$，求$f(z)$.

三、(10分)求积分 $\int_C(\bar{z}-1)\mathrm{d}z$，其中曲线$C$为$C_1$：从 -1 到 1 的下半 单位圆周和C_2: 从 1到-1 的直线构成的封闭曲线。

四、（14 分） **计算$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$,, 其中 C是包含 0与1在内的闭光滑曲线 .**

五、（16 分）将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z-2)}$ 在下列圆环域内展开成含 z 的

幂的洛朗级数.

(1) $1<|z|<2,$ (2) $2<|z|<\infty.$

六、（10 分）用 Laplace 变换及其逆变换求解微分方程 $y''(t)+2y'(t)-3y(t)=e^{-t}$满足条件 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的解.

2008 —2009 学年第一学期

考试统一用答题册

题号	一	二	三	四	五	六	总分
成绩							
阅卷人签字							
校对人签字							

考试课程____复变函数与积分变换 A________

班　　级______________学　号________________

姓　　名______________成　绩________________

2009 年 1 月 4 日

（试题共 5 页）

一、　选择题(每题 3 分，共 27 分)

1．下列函数中，在有限复平面上解析的函数是(　　　　)

（A）$x^2-y^2+(2xy-y^2)i$　　　　（B）x^2+y^2i

（C）$2xy+i(y^2-x^2+2x)$　　　　（D）$x^3-3xy^2+3x^2yi-y^3i$

2．设 C 是从 i 到 $\frac{i}{2}$ 的直线段，则积分 $\int_C e^{\pi z}\mathrm{d}z=$ (　　　　)

（A）$\frac{1}{\pi}$　　（B）$-\frac{1}{\pi}$　　（C）$-\frac{1}{\pi}(1+i)$　　（D）$\frac{1}{\pi}(1+i)$

3．设 C 为曲线 C_1：从 －1 到 1 的下半单位圆周和曲线 C_2：从 1 到 －1 的直线构成的封闭曲线，则 $\int_C(\bar{z}-1)\mathrm{d}z=$ (　　　　)

（A）$i\pi$　　（B）$-i\pi$　　（C）0　　（D）π

4．设函数 $zctgz$ 的泰勒展开式为 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\frac{\pi}{2})^n$，那么幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\frac{\pi}{2})^n$ 的收敛半径 $R=$ (　　　　)

（A）$+\infty$　　（B）1　　（C）$\frac{\pi}{2}$　　（D）π

5．设 $f(z)=x^2-y^2-x+i(2xy-y^2)$，则 $f'(1+\frac{i}{2})=$ (　　　　)

(A) $1-i$　　（B）$1+i$　　（C）$1-\frac{1}{2}i$　　（D）$1+\frac{1}{2}i$

6．下列命题中，正确的是(　　　　)

（A）设 v_1,v_2 在区域 D 内均为 u 的共轭调和函数，则必有 $v_1=v_2$

（B）解析函数的实部是虚部的共轭调和函数

（C）若 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，则 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 为 D 内的调和函数

（D）以调和函数为实部与虚部的函数是解析函数

7．设$z=0$为函数$\dfrac{1-e^z}{z-\sin z}$的m级极点，那么$m=$(　　　　)

（A）5　　　　（B）4　　　　(C)3　　　　（D）2

8.设函数$f(t)$的拉普拉斯变换$\mathrm{L}[f(t)]=F(s)$，则$\mathrm{L}[\int_0^{3t}f(t)\mathrm{d}t]=$（　　　　）

(A) $\dfrac{1}{3s}F(\dfrac{s}{3})$　　　　(B) $\dfrac{1}{s}F(\dfrac{s}{3})$

(C) $\dfrac{1}{3s}F(s)$　　　　(D) $\dfrac{1}{s}F(s)$

9．设函数$f(t)$的傅立叶变换为$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$,则函数 $(t-2)f(-2t)$ 的傅立叶变换为(　　　　)

$(A)-\dfrac{i}{4}F'(-\dfrac{\omega}{2})-F(-\dfrac{\omega}{2})$　　$(B)\dfrac{i}{4}F'(-\dfrac{\omega}{2})-F(-\dfrac{\omega}{2})$

$(C)-\dfrac{i}{2}F'(-\dfrac{\omega}{2})-F(-\dfrac{\omega}{2})$　　$(D)\dfrac{i}{2}F'(-\dfrac{\omega}{2})-F(-\dfrac{\omega}{2})$

二、填空题(每题 4 分，共 40 分)

1．已知$z=(\dfrac{2i}{-1+i})(\dfrac{1-i}{1+i})^5$，则$z^6=$____________________.

2. 复数i^{1+i}的主值为____________________.

3. 解析函数$f(z)=u+iv$的实部$u=x^3-3xy^2$，则$f(z)$ =____________________.

4．积分$\int_{|z|=1}\dfrac{1}{z+2}\mathrm{d}z=$____________________，由此计算

$\int_0^{2\pi}\dfrac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=$____________________.

5．设$f(z)=\int_{|\zeta|=1}\dfrac{\cos\zeta}{(\zeta-z)^3}d\zeta$，其中$|z|\neq 1$，则$f'(\dfrac{\pi}{6})=$____________________,

$f'''(2)=$____________________.

6. $\int_{|z|=3} \dfrac{1}{z^2(z+1)}\mathrm{d}z=$______________________________.

7. 函数 $\dfrac{e^z}{1-z}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式为__________________________(至少写到含 z^3 的项).

8．在扩充复平面上函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^4}$ 的孤立奇点为__________________________（写出类型），在孤立奇点处留数为____.

9.已知 $F(s)=\dfrac{e^{-\frac{\pi}{3}s}}{s^2+1}$，则 $F(s)$ 的拉普拉斯逆变换为______________________________.

10．设 $F(\omega)=\dfrac{2}{\omega^2+1}$,则 $F(\omega)$ 的傅立叶逆变换为______________________________.

三、（10 分）将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-i)z^2}$ 在适当的圆环域内展开成含 $z-i$ 的幂的洛朗级数.

四、（9 分）、计算函数 $f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-1\\ -1, & -1<t<0\\ 1, & 0<t<1\\ 0, & 1<t<+\infty\end{cases}$ 的傅立叶变换，并计算广义积分

$\int_0^{+\infty}\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega}\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega$ 的值.

五、（8 分）用拉普拉斯变换及其逆变换求解微分方程组$\begin{cases} x'(t)+y''(t)=\delta(t-1) \\ 2x(t)+y'''(t)=2u(t-1) \end{cases}$满足初始条件$\begin{cases} x(0)=y(0)=0 \\ y'(0)=y''(0)=0 \end{cases}$的解.

六、(6分)　如果$|z|<1$内$f(z)$解析且$|f(z)|\le \dfrac{1}{1-|z|}$，证明$\left|f^{(n)}(0)\right|\le 2^{n+1}n!$　$(n=1,2,\cdots)$

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

2009 —2010 学年第一学期

考试统一用答题册

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成绩									
阅卷人									

考试课程 复变函数与积分变换 A

班　　级________ 学 号____________

姓　　名________ 成 绩____________

2010 年 1 月 13 日

（试题共 5 页）

一、判断对错（每题 2 分，共 10 分）

1. 如果 z 不是实数，则 $\arg\bar{z}=-\arg z$。（　　　）

2. 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 均为整函数，则 $5f(z)+ig(z)$ 也是整函数。（　　　）

3. 微积分中的求导公式、洛必达法则、积分中值定理等均可推广到复变函数。（　　　）

4. 存在在原点解析，在 $\frac{1}{n}$ 处取值为 $1,0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},\cdots$ 的函数。（　　　）

5. 若 ∞ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点，则 $f(z)$ 在 ∞ 处的留数为 0。（　　　）

二、选择题(每题 3 分，共 24 分)

1. 下列方程所表示的平面点集中，为有界区域的是（　　　）

(A) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|>2$　　(B) $|z+3|-|z-3|>4$

(C) $1<\operatorname{Re}z<2,\quad \operatorname{Im}z=0$　　(D) $z\bar{z}+a\bar{z}+\bar{a}z+a\bar{a}-c>0\ (c>0)$

2. 假设点 z_0 是函数 $f(z)$ 的奇点，则函数 $f(z)$ 在点 z_0 处（　　　）

(A) 不可导　　(B) 不解析

(C) 不连续　　(D) 以上答案都不对

3. 设 C 为椭圆 $x^2+4y^2=1$，则积分 $\int_C\frac{1}{z}\mathrm{d}z=$（　　　）

(A) $2\pi i$　　(B) π　　(C) 0　　(D) $-2\pi i$

4. 设 c 为正向圆周 $|z|=1$，则 $\int_C\left|\frac{dz}{z}\right|=$（　　　）

(A) $2\pi i$　　(B) 2π　　(C) $-2\pi i$　　(D) -2π

5. 如果 z_0 为 $f(z)$ 的 n 级极点，则 z_0 为 $f'(z)$ 的（　　　）级极点

(A) n　　(B) $-n$　　(C) $n-1$　　(D) $n+1$

6. $\operatorname{Res}[\frac{1}{z\sin z},z=0]=$（　　　）

(A) $2\pi i$　　(B) 2π　　(C) 0　　(D) $-2\pi i$

7. 设 $f(t)$ 的傅立叶变换为 $F(\omega)$，则 $f(at+b)(a,b$为实数且$a>0)$ 的傅立叶变换为

（　　　）

(A) $\dfrac{1}{a}e^{i\frac{b}{a^2}\omega}F(\dfrac{\omega}{a})$ (B) $\dfrac{1}{a}e^{i\frac{b}{a}\omega}F(\dfrac{\omega}{a})$

(C) $\dfrac{1}{a}e^{-i\frac{b}{a^2}\omega}F(\dfrac{\omega}{a})$ (D) $\dfrac{1}{a}e^{-i\frac{b}{a}\omega}F(\dfrac{\omega}{a})$

8. 函数$\dfrac{s^2}{(s+1)^2+1}$的拉普拉斯逆变换为（ ）

（A）$\delta(t)-2e^{-t}\cos t$ （B）$\delta(t)-2\cos t-2\sin t$

（C）$\delta(t)-2e^{-t}\sin t$ (D)$\dfrac{i-1}{2}e^{it}$

三、 填空题（每题3分，共24分）

1. 当$z=\dfrac{\cos(\frac{5}{6}\pi)+i\sin(\frac{5}{6}\pi)}{\cos(\frac{1}{3}\pi)+i\sin(\frac{1}{3}\pi)}$时，$z^{-2009}+z^{2357}+z^{-256}+z^{74}$的值等于____________.

2. 设$f(z)=e^{x^2-y^2}[\cos(2xy)+i\sin(2xy)]$，则$f'(1)=$____________________.

3. 复数$i^{\frac{1}{2}}=$________________________________.

4. 设 C 为过点$2+3i$的正向简单闭曲线，则当z从曲线 C 内部趋向$2+3i$时，

$\lim\limits_{z\to 2+3i}\oint_c \dfrac{e^{\zeta}}{\xi-z}d\xi=$ ____________________,当z从曲线 C 外部趋向$2+3i$时，

$\lim\limits_{z\to 2+3i}\oint_c \dfrac{e^{\zeta}}{\xi-z}d\xi=$ ____________________.

5. 设$u(x,y)$的共轭调和函数为$v(x,y)$，那么$v(x,y)$的共轭调和函数为____________.

6. 级数$\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots$的收敛域是____________________________.

7. 函数$F(\omega)=\dfrac{1}{9+\omega^2}$的傅立叶逆变换为____________________________.

8. 函数$F(s)=\dfrac{1}{s^2+1}e^{-2s}$的拉普拉斯逆变换为____________________________.

四、（8 分）计算积分 $\oint_C \frac{1}{(z^2+a^2)^2}dz$，其中 C 为不经过 $z=\pm ai$ 的简单正向闭曲线.

五、（8 分）将 $f(z)=\frac{1}{(z+i)(z-2)}$ 在适当的圆环域内展成以 2 为心的幂级数。

六、（10 分）计算函数 $f(t)=\begin{cases} t, & |t|\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 的傅立叶变换，并求积分

$\int_0^{+\infty}(\frac{\sin\omega}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega})\sin\omega t\mathrm{d}\omega$ 的值，

（试题共 5 页）

一、选择题(每题 3 分，共 24 分)

1. 一个复数乘以 $-i$，则(　　)

（A）复数的模不变，辐角减少π/2　　（B）复数的模不变，辐角增加π/2。

（C）复数的模增加，辐角减少π/2。　　（D）复数的模减少，辐角增加π/2。

2. 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 均为整函数，下列命题错误的是（　　）

（A）$f^3(z)$ 是整函数　　（B）$f(z)g(z)$ 是整函数

（C）$\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 是整函数　　（D）$g(z^2+2)$ 是整函数

3. 设 C 为正向圆周 $|z|=\dfrac{1}{2}$，则 $\displaystyle\int_C \frac{(z-2)^3\sin\frac{1}{z-2}}{z^2-6z+10}\mathrm{d}z=$（　　）

（A）$2\pi i(3\cos 1-\sin 1)$　（B）0　（C）$6\pi i\cos 1$　（D）$-2\pi i\sin 1$

4. 若 $z=z_0$ 是函数 $f(z)$ 的 m 级零点，则 z_0 是 $f^2(z)$ 的(　　)

（A）m 级零点　（B）m^2 级零点　（C）$2m$ 级零点　（D）$-m$ 级零点

5. 若 $c_n=\begin{cases}2^n, & n=0,1,2,\cdots\\ 3^n, & n=-1,-2,\cdots\end{cases}$，则双边幂级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-2)^n$ 的收敛域为（　　）

（A）$\dfrac{1}{3}<|z|<\dfrac{1}{2}$　（B）$\dfrac{1}{3}<|z-2|<\dfrac{1}{2}$　（C）$2<|z|<3$　（D）$2<|z-2|<3$

6. $z=\infty$ 是函数 $\dfrac{z^3+2z^2+i}{z}$ 的（　　）

（A）可去奇点　（B）一级极点　（C）二级极点　（D）本性奇点

7. 设 $z=0$ 为函数 $\dfrac{1-e^z}{z-\sin z}$ 的 m 级极点，那么 $m=$(　　)

（A）5　（B）4　（C）3　（D）2

8. 积分 $\int_0^{+\infty} te^{-3t}\sin 2t\,dt$ 的值为（　　）

（A）$\dfrac{12}{169}$　（B）$-\dfrac{12}{169}$　（C）0　（D）$2\pi i$

二、 填空题（每题3分，共24分）

1．假设 z_1,z_2 非零，则 $|z_1|+|z_2|=|z_1|+|z_2|$ 的充分必要条件是 z_1,z_2 具有相同的____________________.

2. 复数 $\cos(\ln i)$____________________.

3. 设 $f(z)=z^4+32z$，则 $f'(z)=0$ 的根为____________________.

4. 设 C 为椭圆 $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，则积分 $\int_C \dfrac{1}{z}\,\mathrm{d}z=$____________________.

5. 设 $f(z)=\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\xi^2-\xi+2}{\xi-z}d\xi,$，则 $f(0)=$____________，$f'(2+i)=$____________.

6. $\mathrm{Re}\,s[z^3\cos\dfrac{2i}{z},0]=$____________________.

7. 函数 $F(\omega)=\dfrac{1}{9+4\omega^2}$ 的傅立叶逆变换为____________________.

8. 函数 $f(t)=\pi\delta(t)+\cos t$ 的傅立叶变换为____________________.

三、（10分）计算积分 $\oint\limits_C\dfrac{\cos z}{(1-z)^2 z}dz$，其中 C 为不经过0,1的简单正向闭曲线.

四、（8分）设$v = e^{px}\sin y$，求p的值使v是调和函数，并求解析函数$f(z) = u + iv$.

五、（10分）将$f(z) = \dfrac{1}{(z+i)(z-2)^2}$在适当的圆环域内展成以$-i$为心的幂级数。

六、（6 分）已知函数 $f(t)$ 的傅立叶变换为 $F(\omega)$，求函数 $tf(2t-4)$ 的傅立叶变换，

七、（12 分）利用拉普拉斯变换求解微分方程

$$f''-2f'+f=\begin{cases}1, & 1\le t\le 2\\ 0, & 其他\end{cases},\quad f(0)=0,\ f'(0)=0\ .$$

八、（6分）设 $f(z)$ 为非常数的整函数，又设 R, M 为任意正数，试证：存在 z 满足如下条件：$|z|>R$，且 $|f(z)|>M$。

复变函数试题及答案

一、填空题

1． z_0＝0 是函数 $f(z)=\dfrac{\cos z-1}{z^5}$ 的________________

（说出类型，如果是极点，则要说明阶数）

2． $f(z)=x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i$，则 $f'(z)=$ ________________

3． $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\dfrac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}=$ ____________

4． $\operatorname{Res}[1/z\sin z,0]=$ ________________

5． 函数 $w=\sin z$ 在 $z=\dfrac{\pi}{4}$ 处的转动角为________________

6． 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\cos in)z^n$ 的收敛半径为 $R=$____________

7． $\int_0^1 z\sin zdz=$ ________________

8．设 C 为包围原点在内的任一条简单正向封闭曲线，则

$\oint\limits_C\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2}dz=$________

9．函数 $f(z)=\dfrac{z}{z^4-1}$ 在复平面上的所有有限奇点处留数的和为

____

三． $v=e^{px}\sin y$ 为调和函数，求 p 的值，并求出解析函数 $f(z)=u+iv$。

四． 求 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域 $1<|z|<2$ 和 $1<|z-2|<+\infty$ 内的洛朗展开式。

五．计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{2\cos x}{x^2+4x+5}dx$。

六．设 $f(z)=\oint_C \frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}d\xi$，其中 C 为圆周$|z|=3$的正向，求 $f'(1+i)$。

七．求将带形区域$\{z\,|\,0<\mathrm{Im}(z)<a\}$映射成单位圆的共形映射。

复变函数答案

1. 三级极点 ；2. $3z^2$ ；3. $\frac{1}{2}[\frac{1}{j(\omega-2)}+\frac{1}{j(\omega+2)}+\pi\delta(\omega-2)+\pi\delta(\omega+2)]$；

4. 0 ；5. 0 ；6. $\frac{1}{e}$ ；7. $\frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$ ；8. 0；

9. 0 ；

三．解：1) 在$1<|z|<2$

$$f(z)=z(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1})=z(-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n)=-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z^{n+1}}{2^{n+1}}+\frac{1}{z^n})\text{------4 分}$$

2) 在$1<|z-2|<\infty$

$$f(z)=\frac{1}{z-2}(1+\frac{1}{z-2+1})=\frac{1}{z-2}(1+\frac{1}{(z-2)(1+\frac{1}{z-2})})=\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+2}}$$

四. 解:被积函数分母最高次数比分子最高次数高二次, 且在实轴上无奇点, 在上半平面有一个一级极点 $-2+i$， 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}dx=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5},-2+i]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to-2+i}(z-(-2+i))\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}=\frac{\pi}{e}(\cos 2-i\sin 2)$$

故 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\cos x}{x^2+4x+5}dx=2\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}dx=\frac{2\pi}{e}\cos 2$$

五．解： $$f'(z)=\oint_C\frac{3\xi^2+7\xi+1}{(\xi-z)^2}d\xi$$

由于 1+i 在$|z|=3$所围的圆域内，故

$$f'(1+i)=\oint_C \frac{3\xi^2+7\xi+1}{(\xi-(1+i))^2}d\xi = 2\pi i(3\xi^2+7\xi+1)'|_{\xi=1+i} = 2\pi(-6+13i)$$

六. 解:利用指数函数映射的特点以及上半平面到单位圆的分式线性映射, 可以得到

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{e^{\frac{\pi}{a}z}-\lambda}{e^{\frac{\pi}{a}z}-\overline{\lambda}}$$ （映射不唯一, 写出任何一个都算对）

七. 解:对方程两端做拉氏变换:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+(sY(s)-y(0))-3Y(s)=\frac{3}{s+1}$$

代入初始条件, 得 $Y(s)=\dfrac{\frac{3}{s+1}+1}{s^2+2s-3}$ --------4 分

$$=\frac{3}{(s+1)(s+3)(s-1)}+\frac{1}{(s+3)(s-1)}=\frac{-\frac{3}{4}}{s+1}+\frac{\frac{5}{8}}{s-1}+\frac{\frac{1}{8}}{s+3}$$

故有 $y(t)=-\dfrac{3}{4}e^{-t}+\dfrac{5}{8}e^{t}+\dfrac{1}{8}e^{-3t}$ （用留数做也可以）