离散数学试题及答案

一、填空题

1 设集合 A,B，其中 A＝{1,2,3}, B= {1,2}, 则 A - B＝____________________; ρ(A) - ρ(B) ＝ __________________________ .

2. 设有限集合 A, |A| = n, 则 |ρ(A×A)| = __________________________.

3. 设集合 A = {*a*, *b*}, B = {1, 2}, 则从 A 到 B 的所有映射是__________________________ _____________, 其中双射的是__________________________.

4. 已知命题公式 G＝¬(P→Q)∧R，则 G 的主析取范式是_______________________________ ____.

5.设 *G* 是完全二叉树，G 有 7 个点，其中 4 个叶点，则 *G* 的总度数为__________，分枝点数为________________.

6 设 A、B 为两个集合, A= {1,2,4}, B = {3,4}, 则从 A∩B＝_________________________; A∪B ＝_________________________;A－B＝ _____________________ .

7. 设 R 是集合 A 上的等价关系，则 R 所具有的关系的三个特性是______________________, ________________________, _______________________________.

8. 设命题公式 G＝¬(P→(Q∧R))，则使公式 G 为真的解释有__________________________, _____________________________, __________________________.

9. 设集合 A＝{1,2,3,4}, A 上的关系 R_1 = {(1,4),(2,3),(3,2)}, R_1 = {(2,1),(3,2),(4,3)}, 则 $R_1 \bullet R_2$ = ________________________,$R_2 \bullet R_1$ =____________________________, R_1^2 =________________________.

10. 设有限集 A, B，|A| = m, |B| = n, 则| |ρ(A×B)| = _____________________________.

11 设 A,B,R 是三个集合，其中 R 是实数集，A = {x | -1≤x≤1, x∈R}, B = {x | 0≤x < 2, x∈R},则 A-B = __________________________ , B-A = __________________________ , A∩B = __________________________ , .

13. 设集合 A＝{2, 3, 4, 5, 6}，R 是 A 上的整除，则 R 以集合形式(列举法)记为___________ ____.

14. 设一阶逻辑公式 G = ∀xP(x)→∃xQ(x)，则 G 的前束范式是__________________________ _____.

15.设 G 是具有 8 个顶点的树，则 G 中增加_________条边才能把 G 变成完全图。

16. 设谓词的定义域为{a, b},将表达式$\forall x R(x) \rightarrow \exists x S(x)$中量词消除，写成与之对应的命题公式是____.

17. 设集合 A＝{1, 2, 3, 4}，A 上的二元关系 R＝{(1,1),(1,2),(2,3)}, S＝{(1,3),(2,3),(3,2)}。则 R·S ＝__________________________________,

R^2＝__________________________________.

二、选择题

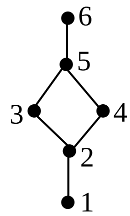
1 设集合 A={2,{a},3,4}，B = {{a},3,4,1}，E 为全集，则下列命题正确的是(　　)。

(A){2}∈A　(B){a}⊆A　(C)∅⊆{{a}}⊆B⊆E　(D){{a},1,3,4}⊂B.

2 设集合 A={1,2,3},A 上的关系 R＝{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)}，则 R 不具备(　　).

(A)自反性　(B)传递性　(C)对称性　(D)反对称性

3 设半序集(A,≤)关系≤的哈斯图如下所示，若 A 的子集 B = {2,3,4,5}, 则 元素 6 为 B 的(　　)。



(A)下界　(B)上界　(C)最小上界　(D)以上答案都不对

4 下列语句中，(　　)是命题。

(A)请把门关上　(B)地球外的星球上也有人

(C)x + 5 > 6　(D)下午有会吗？

5 设 I 是如下一个解释：D＝{a,b},

$P(a,a)$	P(a,b)	P(b,a)	P(b,b)
1	0	1	0

则在解释 I 下取真值为 1 的公式是(　　).

(A)$\exists x \forall y P(x,y)$　(B)$\forall x \forall y P(x,y)$　(C)$\forall x P(x,x)$　(D)$\forall x \exists y P(x,y)$.

6. 若供选择答案中的数值表示一个简单图中各个顶点的度，能画出图的是(　　).

(A)(1,2,2,3,4,5)　(B)(1,2,3,4,5,5)　(C)(1,1,1,2,3)　(D)(2,3,3,4,5,6).

7. 设 G、H 是一阶逻辑公式，P 是一个谓词，G＝$\exists x P(x)$, H＝$\forall x P(x)$,则一阶逻辑公式 G→H 是(　　).

(A)恒真的　(B)恒假的　(C)可满足的　(D)前束范式.

8 设命题公式 G＝¬(P→Q)，H＝P→(Q→¬P)，则 G 与 H 的关系是(　　)。

(A)$G \Rightarrow H$　(B)$H \Rightarrow G$　(C)$G = H$　(D)以上都不是.

9　设 A, B 为集合，当(　　)时 A－B＝B.

(A)A＝B　(B)$A \subseteq B$　(C)$B \subseteq A$　(D)$A = B = \varnothing$.

10　设集合 A = {1,2,3,4}, A 上的关系 R＝{(1,1),(2,3),(2,4),(3,4)}, 则 R 具有(　　)。

(A)自反性　(B)传递性　(C)对称性　(D)以上答案都不对

11　下列关于集合的表示中正确的为(　　)。

(A)$\{a\} \in \{a,b,c\}$　(B)$\{a\} \subseteq \{a,b,c\}$　(C)$\varnothing \in \{a,b,c\}$　(D)$\{a,b\} \in \{a,b,c\}$

12　命题$\forall x G(x)$取真值 1 的充分必要条件是(　　).

(A)对任意 x，G(x)都取真值 1.　(B)有一个 x_0，使 $G(x_0)$取真值 1.

(C)有某些 x，使 $G(x_0)$取真值 1.　(D)以上答案都不对.

13. 设 G 是连通平面图，有 5 个顶点，6 个面，则 G 的边数是(　　).

(A) 9 条　(B) 5 条　(C) 6 条　(D) 11 条.

14. 设 G 是 5 个顶点的完全图，则从 G 中删去(　　)条边可以得到树.

(A)6　(B)5　(C)10　(D)4.

15. 设图 G 的相邻矩阵为$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则 G 的顶点数与边数分别为(　　).

(A)4, 5　(B)5, 6　(C)4, 10　(D)5, 8.

三、计算证明题

1.设集合 A＝{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12}，R 为整除关系。

(1) 画出半序集(A,R)的哈斯图;

(2) 写出 A 的子集 B = {3,6,9,12}的上界，下界，最小上界，最大下界;

(3) 写出 A 的最大元，最小元，极大元，极小元。

2.　设集合 A＝{1, 2, 3, 4}，A 上的关系 R＝$\{(x,y) \mid x, y \in A$ 且 $x \geq y\}$, 求

(1) 画出 R 的关系图；

(2) 写出 R 的关系矩阵.

3. 设 R 是实数集合，σ,τ,φ是 R 上的三个映射，$\sigma(x) = x+3$, $\tau(x) = 2x$, $\varphi(x) = x/4$,试求复合映射$\sigma\bullet\tau$，$\sigma\bullet\sigma$, $\sigma\bullet\varphi$, $\varphi\bullet\tau$，$\sigma\bullet\varphi\bullet\tau$.

4. 设 I 是如下一个解释：D = {2, 3},

a	b	$f(2)$	$f(3)$	$P(2, 2)$	$P(2, 3)$	$P(3, 2)$	$P(3, 3)$
3	2	3	2	0	0	1	1

试求 (1) $P(a, f(a))\wedge P(b, f(b))$;

(2) $\forall x\exists y\, P(y, x)$.

5. 设集合 A＝{1, 2, 4, 6, 8, 12}，R 为 A 上整除关系。

(1) 画出半序集(A,R)的哈斯图；

(2) 写出 A 的最大元，最小元，极大元，极小元；

(3) 写出 A 的子集 B = {4, 6, 8, 12}的上界，下界，最小上界，最大下界.

6. 设命题公式 $G = \neg(P\to Q)\vee(Q\wedge(\neg P\to R))$, 求 G 的主析取范式。

7. (9 分)设一阶逻辑公式：$G = (\forall xP(x)\vee\exists yQ(y))\to\forall xR(x)$，把 G 化成前束范式.

9. 设 R 是集合 A = {a, b, c, d}. R 是 A 上的二元关系, R = {(a,b), (b,a), (b,c), (c,d)},

(1) 求出 r(R), s(R), t(R)；

(2) 画出 r(R), s(R), t(R)的关系图.

11. 通过求主析取范式判断下列命题公式是否等价：

(1) $G = (P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

(2) $H = (P\vee(Q\wedge R))\wedge(Q\vee(\neg P\wedge R))$

13. 设 R 和 S 是集合 A＝{a, b, c, d}上的关系，其中 R＝{(a, a),(a, c),(b, c),(c, d)},

S＝{(a, b),(b, c),(b, d),(d, d)}.

(1) 试写出 R 和 S 的关系矩阵；

(2) 计算 $R \bullet S, R \cup S, R^{-1}, S^{-1} \bullet R^{-1}$.

四、证明题

1. 利用形式演绎法证明：$\{P \to Q, R \to S, P \vee R\}$蕴涵 $Q \vee S$。

2. 设 A,B 为任意集合，证明：$(A-B)-C = A-(B \cup C)$.

3. (本题 10 分)利用形式演绎法证明：$\{\neg A \vee B,\quad \neg C \to \neg B,\quad C \to D\}$蕴涵 $A \to D$。

4. (本题 10 分)A, B 为两个任意集合，求证：

$A-(A \cap B) = (A \cup B)-B$.

参考答案

一、填空题

1. $\{3\}$;　$\{\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

2. $\mathbf{2^{n^2}}$.

3. $\alpha_1 = \{(a,1), (b,1)\}$, $\alpha_2 = \{(a,2), (b,2)\}$, $\alpha_3 = \{(a,1), (b,2)\}$, $\alpha_4 = \{(a,2), (b,1)\}$; α_3, α_4.

4. $(P \wedge \neg Q \wedge R)$.

5. 12, 3.

6. {4}, {1, 2, 3, 4}, {1, 2}.

7. 自反性；对称性；传递性.

8. (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0).

9. {(1,3),(2,2),(3,1)}; {(2,4),(3,3),(4,2)}; {(2,2),(3,3)}.

10. $2^{m \times n}$.

11. $\{x \mid -1 \leqslant x < 0, x \in R\}$; $\{x \mid 1 < x < 2, x \in R\}$; $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in R\}$.

12. 12; 6.

13. {(2, 2),(2, 4),(2, 6),(3, 3),(3, 6),(4, 4),(5, 5),(6, 6)}.

14. $\exists x(\neg P(x) \vee Q(x))$.

15. 21.

16. $(R(a)\wedge R(b))\rightarrow(S(a)\vee S(b))$.

17. {(1, 3),(2, 2)}; {(1, 1),(1, 2),(1, 3)}.

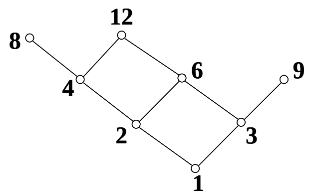
二、选择题

1. C. 2. D. 3. B. 4. B.
5. D. 6. C. 7. C.
8. A. 9. D. 10. B. 11. B.
13. A. 14. A. 15. D

三、计算证明题

1.

(1)

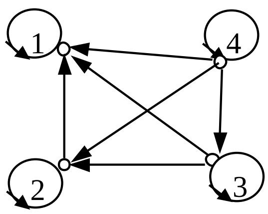


(2) B 无上界，也无最小上界。下界 1, 3; 最大下界是 3.

(3) A 无最大元，最小元是 1，极大元 8, 12, 90+; 极小元是 1.

2. R = {(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)}.

(1)



(2) $M_R=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$

3. (1)σ•τ＝σ(τ(x))＝τ(x)+3＝2x+3＝2x+3.

(2)σ•σ＝σ(σ(x))＝σ(x)+3＝(x+3)+3＝x+6,

(3)σ•φ＝σ(φ(x))＝φ(x)+3＝x/4+3,

(4)φ•τ＝φ(τ(x))＝τ(x)/4＝2x/4 = x/2,

(5)σ•φ•τ＝σ•(φ•τ)＝φ•τ+3＝2x/4+3＝x/2+3.

4. (1) $P(a, f(a)) \wedge P(b, f(b)) = P(3, f(3)) \wedge P(2, f(2))$

$= P(3, 2) \wedge P(2, 3)$

$= 1 \wedge 0$

$= 0.$

(2) $\forall x \exists y\, P(y, x) = \forall x\, (P(2, x) \vee P(3, x))$

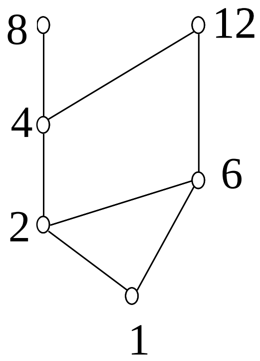
$= (P(2, 2) \vee \mathrm{P}(3, 2)) \wedge (P(2, 3) \vee \mathrm{P}(3, 3))$

$= (0 \vee 1) \wedge (0 \vee 1)$

$= 1 \wedge 1$

$= 1.$

5. (1)



(2) 无最大元，最小元 1，极大元 8, 12; 极小元是 1.

(3) B 无上界，无最小上界。下界 1, 2; 最大下界 2.

6. $\mathrm{G} = \neg(\mathrm{P} \to \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{Q} \wedge (\neg \mathrm{P} \to \mathrm{R}))$

$= \neg(\neg \mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{Q} \wedge (\mathrm{P} \vee \mathrm{R}))$

$= (\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{Q} \wedge (\mathrm{P} \vee \mathrm{R}))$

$= (\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{P}) \vee (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R})$

$= (\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}) \vee (\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q} \wedge \neg \mathrm{R}) \vee (\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}) \vee (\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \wedge \neg \mathrm{R}) \vee (\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}) \vee (\neg \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \wedge \mathrm{R})$

$= (\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}) \vee (\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q} \wedge \neg \mathrm{R}) \vee (\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}) \vee (\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \wedge \neg \mathrm{R}) \vee (\neg \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \wedge \mathrm{R})$

$= m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 = \Sigma(3, 4, 5, 6, 7).$

7. $G = (\forall xP(x)\vee\exists yQ(y))\rightarrow\forall xR(x)$

$= \neg(\forall xP(x)\vee\exists yQ(y))\vee\forall xR(x)$

$= (\neg\forall xP(x)\wedge\neg\exists yQ(y))\vee\forall xR(x)$

$= (\exists x\neg P(x)\wedge\forall y\neg Q(y))\vee\forall zR(z)$

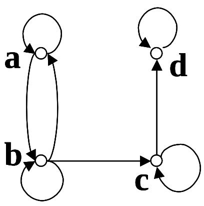
$= \exists x\forall y\forall z((\neg P(x)\wedge\neg Q(y))\vee R(z))$

9. (1) $r(R)=R\cup I_A=\{(a,b), (b,a), (b,c), (c,d), (a,a), (b,b), (c,c), (d,d)\}$,

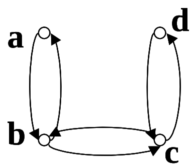
$s(R)=R\cup R^{-1}=\{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b)\ (c,d), (d,c)\}$,

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4=\{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (c,d)\}$;

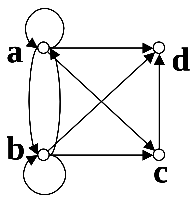
(2)关系图:



r(R)



s(R)



t(R)

11. $G=(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$=(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$=m_6\vee m_7\vee m_3$

$=\sum(3, 6, 7)$

$H = (P\vee(Q\wedge R))\wedge(Q\vee(\neg P\wedge R))$

$=(P\wedge Q)\vee(Q\wedge R))\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$=(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$=(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

$=m_6\vee m_3\vee m_7$

$=\sum(3, 6, 7)$

G,H 的主析取范式相同，所以 G = H.

13. (1) $M_R=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $M_S=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

(2)$R\bullet S=\{(a, b),(c, d)\}$,

$R\cup S=\{(a, a),(a, b),(a, c),(b, c),(b, d),(c, d),(d, d)\}$,

$R^{-1}=\{(a, a),(c, a),(c, b),(d, c)\}$,

$S^{-1}\bullet R^{-1}=\{(b, a),(d, c)\}$.

四 证明题

1. 证明：$\{P\rightarrow Q, R\rightarrow S, P\vee R\}$蕴涵 $Q\vee S$

(1) $P\vee R$ P

(2) $\neg R\rightarrow P$ Q(1)

(3) $P\rightarrow Q$ P

(4) $\neg R\rightarrow Q$ Q(2)(3)

(5) $\neg Q\rightarrow R$ Q(4)

(6) $R\rightarrow S$ P

(7) $\neg Q\rightarrow S$ Q(5)(6)

(8) $Q\vee S$ Q(7)

2. 证明：(A-B)-C = (A∩~B)∩~C

= A∩(~B∩~C)

= A∩~(B∪C)

= A-(B∪C)

3. 证明：$\{\neg A \vee B,\ \neg C \to \neg B,\ C \to D\}$蕴涵 $A \to D$

(1) A D(附加)

(2) $\neg A \vee B$ P

(3) B Q(1)(2)

(4) $\neg C \to \neg B$ P

(5) $B \to C$ Q(4)

(6) C Q(3)(5)

(7) $C \to D$ P

(8) D Q(6)(7)

(9) $A \to D$ D(1)(8)

所以 $\{\neg A \vee B,\ \neg C \to \neg B,\ C \to D\}$蕴涵 $A \to D$.

4. 证明：$A-(A\cap B)$

$=A\cap\sim(A\cap B)$

$=A\cap(\sim A\cup\sim B)$

$=(A\cap\sim A)\cup(A\cap\sim B)$

$=\varnothing\cup(A\cap\sim B)$

$=(A\cap\sim B)$

$=A-B$

而 $(A\cup B)-B$

$=(A\cup B)\cap\sim B$

$=(A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim B)$

$=(A\cap\sim B)\cup\varnothing$

$=A-B$

所以：$A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$.

离散数学试题（A 卷及答案）

一、（10 分）某项工作需要派 A、B、C 和 D 4 个人中的 2 个人去完成，按下面 3 个条件，有几种派法？如何派？

(1)若 A 去，则 C 和 D 中要去 1 个人；

(2)B 和 C 不能都去；

(3)若 C 去，则 D 留下。

解　设 A：A 去工作；B：B 去工作；C：C 去工作；D：D 去工作。则根据题意应有：$A\rightarrow C\oplus D$，$\neg(B\wedge C)$，$C\rightarrow\neg D$ 必须同时成立。因此

$(A\rightarrow C\oplus D)\wedge\neg(B\wedge C)\wedge(C\rightarrow\neg D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\vee(C\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge D))\wedge(\neg B\vee\neg C)\wedge(\neg C\vee\neg D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\vee(C\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge D))\wedge((\neg B\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge\neg D)\vee\neg C\vee(\neg C\wedge\neg D))$

$\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge\neg C\wedge\neg D)$

$\vee(C\wedge\neg D\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(C\wedge\neg D\wedge\neg B\wedge\neg D)\vee(C\wedge\neg D\wedge\neg C)\vee(C\wedge\neg D\wedge\neg C\wedge\neg D)$

$\vee(\neg C\wedge D\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(\neg C\wedge D\wedge\neg B\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge D\wedge\neg C)\vee(\neg C\wedge D\wedge\neg C\wedge\neg D)$

$\Leftrightarrow F\vee F\vee(\neg A\wedge\neg C)\vee F\vee F\vee(C\wedge\neg D\wedge\neg B)\vee F\vee F\vee(\neg C\wedge D\wedge\neg B)\vee F\vee(\neg C\wedge D)\vee F$

$\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge C\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge D\wedge\neg B)\vee(\neg C\wedge D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge C\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge D)$

$\Leftrightarrow T$

故有三种派法：$B\wedge D$，$A\wedge C$，$A\wedge D$。

二、（15 分）在谓词逻辑中构造下面推理的证明：某学术会议的每个成员都是专家并且是工人，有些成员是青年人，所以，有些成员是青年专家。

解：论域：所有人的集合。$S(x)$：x是专家；$W(x)$：x是工人；$Y(x)$：x是青年人；则推理化形式为：

$\forall x(S(x)\wedge W(x))$，$\exists xY(x)\vdash\exists x(S(x)\wedge Y(x))$

下面给出证明：

(1) $\exists xY(x)$　　P

(2) $Y(c)$　　T(1)，ES

(3) $\forall x(S(x)\wedge W(x))$　　P

(4) $S(c)\wedge W(c)$　　T(3)，US

(5) $S(c)$　　T(4)，I

(6) $S(c)\wedge Y(c)$　　T(2)(5)，I

(7) $\exists x(S(x)\wedge Y(x))$　　T(6)，EG

三、（10 分）设 A、B 和 C 是三个集合，则 $A\subset B\Rightarrow\neg(B\subset A)$。

证明：$A\subset B\Leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\exists x(x\in B\wedge x\notin A)\Leftrightarrow\forall x(x\notin A\vee x\in B)\wedge\exists x(x\in B\wedge x\notin A)$

$\Leftrightarrow\neg\exists x(x\in A\wedge x\notin B)\wedge\neg\forall x(x\notin B\vee x\in A)\Rightarrow\neg\exists x(x\in A\wedge x\notin B)\vee\neg\forall x(x\in A\vee x\notin B)$

$\Leftrightarrow\neg(\exists x(x\in A\wedge x\notin B)\wedge\forall x(x\in A\vee x\notin B))\Leftrightarrow\neg(\exists x(x\in A\wedge x\notin B)\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\in A))$

$\Leftrightarrow\neg(B\subset A)$。

四、（15 分）设 $A=\{1，2，3，4，5\}$，R 是 A 上的二元关系，且 $R=\{\langle 2，1\rangle，\langle 2，5\rangle，\langle 2，4\rangle，\langle 3，4\rangle，\langle 4，4\rangle，\langle 5，2\rangle\}$，求 $r(R)$、$s(R)$ 和 $t(R)$。

解　$r(R)=R\cup I_A=\{\langle 2，1\rangle，\langle 2，5\rangle，\langle 2，4\rangle，\langle 3，4\rangle，\langle 4，4\rangle，\langle 5，2\rangle，\langle 1，1\rangle，\langle 2，2\rangle，\langle 3，3\rangle，\langle 4，4\rangle，\langle 5，5\rangle\}$

$s(R)=R\cup R^{-1}=\{\langle 2，1\rangle，\langle 2，5\rangle，\langle 2，4\rangle，\langle 3，4\rangle，\langle 4，4\rangle，\langle 5，2\rangle，\langle 1，2\rangle，\langle 4，2\rangle，\langle 4，3\rangle\}$

$R^2=\{\langle 2，2\rangle，\langle 2，4\rangle，\langle 3，4\rangle，\langle 4，4\rangle，\langle 5，1\rangle，\langle 5，5\rangle，\langle 5，4\rangle\}$

$R^3=\{\langle 2，1\rangle，\langle 2，5\rangle，\langle 2，4\rangle，\langle 3，4\rangle，\langle 4，4\rangle，\langle 5，2\rangle，\langle 5，4\rangle\}$

$R^4=\{\langle 2，2\rangle，\langle 2，4\rangle，\langle 3，4\rangle，\langle 4，4\rangle，\langle 5，1\rangle，\langle 5，5\rangle，\langle 5，4\rangle\}=R^2$

$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=\{\langle 2，1\rangle，\langle 2，5\rangle，\langle 2，4\rangle，\langle 3，4\rangle，\langle 4，4\rangle，\langle 5，2\rangle，\langle 2，2\rangle，\langle 5，$

1>，<5，4>，<5，5>}。

五、（10 分）R 是非空集合 A 上的二元关系，若 R 是对称的，则 $r(R)$ 和 $t(R)$ 是对称的。

证明　对任意的 x、$y\in A$，若 $xr(R)y$，则由 $r(R)=R\cup I_A$ 得，xRy 或 xI_Ay。因 R 与 I_A 对称，所以有 yRx 或 yI_Ax，于是 $yr(R)x$。所以 $r(R)$ 是对称的。

下证对任意正整数 n，R^n 对称。

因 R 对称，则有 $xR^2y\Leftrightarrow\exists z(xRz\wedge zRy)\Leftrightarrow\exists z(zRx\wedge yRz)\Leftrightarrow yR^2x$，所以 R^2 对称。若 R^n 对称，则 $xR^{n+1}y\Leftrightarrow\exists z(xR^nz\wedge zRy)\Leftrightarrow\exists z(zR^nx\wedge yRz)\Leftrightarrow yR^{n+1}x$，所以 R^{n+1} 对称。因此，对任意正整数 n，R^n 对称。

对任意的 x、$y\in A$，若 $xt(R)y$，则存在 m 使得 xR^my，于是有 yR^mx，即有 $yt(R)x$。因此，$t(R)$ 是对称的。

六、（10 分）若 f：$A\rightarrow B$ 是双射，则 f^{-1}：$B\rightarrow A$ 是双射。

证明　因为 f：$A\rightarrow B$ 是双射，则 f^{-1} 是 B 到 A 的函数。下证 f^{-1} 是双射。

对任意 $x\in A$，必存在 $y\in B$ 使 $f(x)=y$，从而 $f^{-1}(y)=x$，所以 f^{-1} 是满射。

对任意的 y_1、$y_2\in B$，若 $f^{-1}(y_1)=f^{-1}(y_2)=x$，则 $f(x)=y_1$，$f(x)=y_2$。因为 f：$A\rightarrow B$ 是函数，则 $y_1=y_2$。所以 f^{-1} 是单射。

综上可得，f^{-1}：$B\rightarrow A$ 是双射。

七、（10 分）设<S，$*$>是一个半群，如果 S 是有限集，则必存在 $a\in S$，使得 $a*a=a$。

证明　因为<S，$*$>是一个半群，对任意的 $b\in S$，由$*$的封闭性可知，$b^2=b*b\in S$，$b^3=b^2*b\in S$，…，$b^n\in S$，…。

因为 S 是有限集，所以必存在 $j>i$，使得 $b^i=b^j$。令 $p=j-i$，则 $b^j=b^p*b^j$。所以对 $q\geqslant i$，有 $b^q=b^p*b^q$。

因为 $p\geqslant1$，所以总可找到 $k\geqslant1$，使得 $kp\geqslant i$。对于 $b^{kp}\in S$，有 $b^{kp}=b^p*b^{kp}=b^p*(b^p*b^{kp})=\cdots=b^{kp}*b^{kp}$。

令 $a=b^{kp}$，则 $a\in S$ 且 $a*a=a$。

八、（20 分）（1）若 G 是连通的平面图，且 G 的每个面的次数至少为 $l(l\geqslant3)$，则 G

的边数 m 与结点数 n 有如下关系：

$$m \leqslant \frac{l}{l-2}(n-2)。$$

证明　设 G 有 r 个面，则 $2m=\sum_{i=1}^{r} d(f_i) \geqslant lr$。由欧拉公式得，$n-m+r=2$。于是，$m \leqslant \frac{l}{l-2}(n-2)$。

（2）设平面图 $G=\langle V, E, F\rangle$ 是自对偶图，则 $|E|=2(|V|-1)$。

证明　设 $G^{*}=\langle V^{*}, E^{*}\rangle$ 是连通平面图 $G=\langle V, E, F\rangle$ 的对偶图，则 $G^{*}\cong G$，于是 $|F|=|V^{*}|=|V|$，将其代入欧拉公式 $|V|-|E|+|F|=2$ 得，$|E|=2(|V|-1)$。

离散数学试题（B卷及答案）

一、（10分）证明$(P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(Q\to S)\vdash S\vee R$

证明　因为$S\vee R\Leftrightarrow\neg R\to S$，所以，即要证$(P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(Q\to S)\vdash\neg R\to S$。

(1)$\neg R$	附加前提
(2)$P\to R$	P
(3)$\neg P$	T(1)(2)，I
(4)$P\vee Q$	P
(5)Q	T(3)(4)，I
(6)$Q\to S$	P
(7)S	T(5)(6)，I
(8)$\neg R\to S$	CP
(9)$S\vee R$	T(8)，E

二、（15分）根据推理理论证明：每个考生或者勤奋或者聪明，所有勤奋的人都将有所作为，但并非所有考生都将有所作为，所以，一定有些考生是聪明的。

设$P(e)$：e是考生，$Q(e)$：e将有所作为，$A(e)$：e是勤奋的，$B(e)$：e是聪明的，个体域：人的集合，则命题可符号化为：$\forall x(P(x)\to(A(x)\vee B(x)))$，$\forall x(A(x)\to Q(x))$，$\neg\forall x(P(x)\to Q(x))\vdash\exists x(P(x)\wedge B(x))$。

(1)$\neg\forall x(P(x)\to Q(x))$	P
(2)$\neg\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))$	T(1)，E
(3)$\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$	T(2)，E
(4)$P(a)\wedge\neg Q(a)$	T(3)，ES
(5)$P(a)$	T(4)，I
(6)$\neg Q(a)$	T(4)，I
(7)$\forall x(P(x)\to(A(x)\vee B(x))$	P
(8)$P(a)\to(A(a)\vee B(a))$	T(7)，US
(9)$A(a)\vee B(a)$	T(8)(5)，I
(10)$\forall x(A(x)\to Q(x))$	P
(11)$A(a)\to Q(a)$	T(10)，US
(12)$\neg A(a)$	T(11)(6)，I
(13)$B(a)$	T(12)(9)，I

(14)$P(a)\wedge B(a)$　　　　　　　　　$T(5)(13)$，I

(15)$\exists x(P(x)\wedge B(x))$　　　　　　　　$T(14)$，EG

三、（10 分）某班有 25 名学生，其中 14 人会打篮球，12 人会打排球，6 人会打篮球和排球，5 人会打篮球和网球，还有 2 人会打这三种球。而 6 个会打网球的人都会打另外一种球，求不会打这三种球的人数。

解　设 A、B、C 分别表示会打排球、网球和篮球的学生集合。则：

$|A|$＝12，$|B|$＝6，$|C|$＝14，$|A\cap C|$＝6，$|B\cap C|$＝5，$|A\cap B\cap C|$＝2，$|(A\cup C)\cap B|$＝6。

因为$|(A\cup C)\cap B|$＝$(A\cap B)\cup(B\cap C)|$＝$|(A\cap B)|$＋$|(B\cap C)|$－$|A\cap B\cap C|$＝$|(A\cap B)|$＋5－2＝6，所以$|(A\cap B)|$＝3。于是$|A\cup B\cup C|$＝12＋6＋14－6－5－3＋2＝20，$|\overline{A\cup B\cup C}|$＝25－20＝5。故，不会打这三种球的共 5 人。

四、（10 分）设 A_1、A_2 和 A_3 是全集 U 的子集，则形如$\bigcap_{i=1}^{3}A_i'$(A_i'为 A_i 或$\overline{A_i}$)的集合称为由 A_1、A_2 和 A_3 产生的小项。试证由 A_1、A_2 和 A_3 所产生的所有非空小项的集合构成全集 U 的一个划分。

证明　小项共 8 个，设有 r 个非空小项 s_1、s_2、…、$s_r(r\leqslant 8)$。

对任意的 $a\in U$，则 $a\in A_{\mathrm{i}}$ 或 $a\in\overline{A_i}$，两者必有一个成立，取 A_{i}'为包含元素 a 的 A_{i} 或$\overline{A_i}$，则 $a\in\bigcap_{i=1}^{3}A_i'$，即有 $a\in\bigcup_{i=1}^{r}s_i$，于是 $U\subseteq\bigcup_{i=1}^{r}s_i$。又显然有$\bigcup_{i=1}^{r}s_i\subseteq U$，所以 $U=\bigcup_{i=1}^{r}s_i$。

任取两个非空小项 s_p 和 s_q，若 $s_p\neq s_q$，则必存在某个 A_i 和$\overline{A_i}$分别出现在 s_p 和 s_q 中，于是 $s_p\cap s_q=\varnothing$。

综上可知，$\{s_1，s_2，…，s_r\}$是 U 的一个划分。

五、（15 分）设 R 是 A 上的二元关系，则：R 是传递的$\Leftrightarrow R*R\subseteq R$。

证明　(5)若 R 是传递的，则$<x，y>\in R*R\Rightarrow\exists z(xRz\wedge zSy)\Rightarrow xRc\wedge cSy$，由 R 是传递的得 xRy，即有$<x，y>\in R$，所以 $R*R\subseteq R$。

反之，若 $R*R\subseteq R$，则对任意的 x、y、$z\in A$，如果 xRz 且 zRy，则$<x，y>\in R*R$，于是有$<x，y>\in R$，即有 xRy，所以 R 是传递的。

六、（15 分）若 G 为连通平面图，则 $n-m+r=2$，其中，n、m、r 分别为 G 的结点数、边数和面数。

证明　对 G 的边数 m 作归纳法。

当 $m=0$ 时，由于 G 是连通图，所以 G 为平凡图，此时 $n=1$，$r=1$，结论自然成立。

假设对边数小于 m 的连通平面图结论成立。下面考虑连通平面图 G 的边数为 m 的情况。

设 e 是 G 的一条边，从 G 中删去 e 后得到的图记为 G'，并设其结点数、边数和面数分别为 n'、m'和 r'。对 e 分为下列情况来讨论：

若 e 为割边，则 G'有两个连通分支 G_1 和 G_2。G_i 的结点数、边数和面数分别为 n_i、m_i 和 r_i。显然 $n_1+n_2=n'=n$，$m_1+m_2=m'=m-1$，$r_1+r_2=r'+1=r+1$。由归纳假设有 $n_1-m_1+r_1=2$，$n_2-m_2+r_2=2$，从而 $(n_1+n_2)-(m_1+m_2)+(r_1+r_2)=4$，$n-(m-1)+(r+1)=4$，即 $n-m+r=2$。

若 e 不为割边，则 $n'=n$，$m'=m-1$，$r'=r-1$，由归纳假设有 $n'-m'+r'=2$，从而 $n-(m-1)+r-1=2$，即 $n-m+r=2$。

由数学归纳法知，结论成立。

七、（10 分）设函数 g：$A\to B$，f：$B\to C$，则：

(1)$f\circ g$ 是 A 到 C 的函数；

(2)对任意的 $x\in A$，有 $f\circ g(x)=f(g(x))$。

证明　(1)对任意的 $x\in A$，因为 g：$A\to B$ 是函数，则存在 $y\in B$ 使 $<x，y>\in g$。对于 $y\in B$，因 f：$B\to C$ 是函数，则存在 $z\in C$ 使 $<y，z>\in f$。根据复合关系的定义，由 $<x，y>\in g$ 和 $<y，z>\in f$ 得 $<x，z>\in g*f$，即 $<x，z>\in f\circ g$。所以 $D_{f\circ g}=A$。

对任意的 $x\in A$，若存在 y_1、$y_2\in C$，使得 $<x，y_1>$、$<x，y_2>\in f\circ g=g*f$，则存在 t_1 使得 $<x，t_1>\in g$ 且 $<t_1，\ y_1>\in f$，存在 t_2 使得 $<x，t_2>\in g$ 且 $<t_2，y_2>\in f$。因为 g：$A\to B$ 是函数，则 $t_1=t_2$。又因 f：$B\to C$ 是函数，则 $y_1=y_2$。所以 A 中的每个元素对应 C 中惟一的元素。

综上可知，$f\circ g$ 是 A 到 C 的函数。

(2)对任意的 $x\in A$，由 g：$A\to B$ 是函数，有 $<x，g(x)>\in g$ 且 $g(x)\in B$，又由 f：$B\to C$ 是函数，得 $<g(x)，f(g(x))>\in f$，于是 $<x，f(g(x))>\in g*f=f\circ g$。又因 $f\circ g$ 是 A 到 C 的函数，则可写为 $f\circ g(x)=f(g(x))$。

八、（15 分）设 $<H，*>$是 $<G，*>$的子群，定义 $R=\{<a，b>|a、b\in G 且 a^{-1}*b\in H\}$，则 R 是 G 中的一个等价关系，且 $[a]_R=aH$。

证明　对于任意 $a\in G$，必有 $a^{-1}\in G$ 使得 $a^{-1}*a=e\in H$，所以 $<a，a>\in R$。

若 $<a，b>\in R$，则 $a^{-1}*b\in H$。因为 H 是 G 的子群，故 $(a^{-1}*b)^{-1}=b^{-1}*a\in H$。所以 $<b，a>\in R$。

若 $<a，b>\in R$，$<b，c>\in R$，则 $a^{-1}*b\in H$，$b^{-1}*c\in H$。因为 H 是 G 的子群，所以 $(a^{-1}*b)*(b^{-1}*c)=a^{-1}*c\in H$，故 $<a，c>\in R$。

综上可得，R 是 G 中的一个等价关系。

对于任意的 $b\in[a]_R$，有 $<a，b>\in R$，$a^{-1}*b\in H$，则存在 $h\in H$ 使得 $a^{-1}*b=h$，$b=a*h$，于是 $b\in aH$，$[a]_R\subseteq aH$。对任意的 $b\in aH$，存在 $h\in H$ 使得 $b=a*h$，$a^{-1}*b=h\in H$，$<a，b>\in R$，故 $aH\subseteq[a]_R$。所以，$[a]_R=aH$。