同济大学课程考核试卷（B 卷）
2008—2009 学年第一学期

命题教师签名：　　　　　　　　　　审核教师签名：

课号：　　　课名：**线性代数 B**　　　考试考查：**考试**

此卷选为：期中考试(　)、期终考试(√)、重考(　)试卷

年级_____专业_______________学号__________姓名___________任课教师_______

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

（注意：本试卷共七大题，三大张，满分 100 分．考试时间为 120 分钟.要求写出解题过程，否则不予计分）

一、填空与选择题（**注：均为单选题**）(24 分)

1、设 3 阶方阵 A 满足 $|A+E|=|A+2E|=|A+3E|=0$，则 $|A+4E|=$ ______________.

2、已知 n 维向量 $x=(1,0,\cdots,0,1)^T$，方阵 $A=E-a^2xx^T$，其中 $a<0$，又 $A^{-1}=E+axx^T$，则参数 $a=$__________________.

3、设 n 阶方阵 A 经过若干次初等变换可化为 B，则必有_____________.

(A). $|A|=|B|$　　　(B). $\exists$可逆阵Q，使得$B=AQ$

(C). $R(A)=R(B)$　　　(D). $Ax=0$与$Bx=0$同解

4、已知 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&\lambda^2\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$，若存在非零矩阵 B，使得 $AB=0$，则参数 $\lambda=$_____________.

5、设 A,B,C 均为 n 阶方阵，则下列结论中错误的是________________.

(A). 若$ABC=E$，则A，B，C均为可逆阵

(B). 若$AB=AC$，且A可逆，则$B=C$

(C). 若$AB=AC$，且A可逆，则$BA=CA$

(D). 若$AB=0$，且$A\neq0$，则$B=0$

6、设 n 维向量组 A: $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 n 维向量组 $B:\beta_1,\cdots,\beta_t$ 具有相同的秩 r，则下列说法中错误的是 ________.

(A). 若$s=t$，则组A与组B等价

(B). 若组A的每个向量都在组B中，则组A与组B等价

(C). 若组A可由组B线性表出，则组A与组B等价

(D). 若组(A, B)的秩为r，则组A与组B等价

7、已知 A 为 $m\times5$ 阵，$AB=0$，$R(A)+R(B)=5$，而 $B=(\alpha_1,\cdots,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&3&2&3\\2&5&3&5\\0&1&1&1\\2&6&4&6\end{pmatrix}$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系为_______________.

(A). α_1　(B). α_1，α_4　(C). α_2，α_4　(D). α_1，α_3，α_4

8、设矩阵 $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，矩阵 A 相似于 B，则 $R(B-E)+R(A-E)=$_________.

二、(10 分) 设 4 阶方阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_4)$，$B=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1)$，其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_4$ 均为 4 维向量，求矩阵 B 的行列式.

三、(10 分) 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^{*}X=A^{-1}+2X$，其中 A^{*} 是 A 的伴随阵，求矩阵 X.

四、(13 分) 已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\ 2\\ 10\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 4\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\ b\\ b\end{pmatrix}$，试问参数 a,b 满足什么条件时，

(1) 向量 β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出, 且表达式唯一，

(2) 向量 β 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，

(3) 向量 β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出, 且表达式不唯一，并求出一般表达式.

五、(15 分) 设实三元二次型 $f=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$，

(1) 求二次型 f 所对应的矩阵 A，

(2) 问参数 a 取何值时，矩阵 A 的秩为 2，

(3) 当 $R(A)=2$ 时，用正交变换 $x=Py$ 将二次型 f 化为标准形，并求出正交阵 P 及标准形.

六、(10 分) 设V 为所有 2 阶实方阵对于矩阵的加法和数乘构成的线性空间，在V 上定义T 如下：对任意 $A \in V$，$T(A)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，

(1) 证明： T 是V 上的一个线性变换，

(2) 求T 在V 的基$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$下的矩阵.

七、(1)（9 分）设 A,B 均为 n 阶实方阵，若 A, B 相似，试证 A, B 的特征多项式相同；特别地，当矩阵 A, B 均为实对称阵时，试证上述命题的逆命题也成立.

(2)（9 分）已知η 是非齐次线性方程组 $Ax=b(b\neq 0)$ 的一个解向量，$\xi_1,\cdots,\xi_s$ 是其对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系. 证明：η, $\eta+\xi_1$, $\cdots$, $\eta+\xi_s$ 是方程组 $Ax=b$ 解向量组的最大线性无关组.