随机过程 简答题复习

1. 随机过程正交、互不相关，相互独立的定义及其相互关系。

(1) 正交：

两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$，若对任意 t_1 和 t_2 都有互相关函数等于0，

即 $R_{XY}(t_1, t_2)=0$，则称两随机过程之间正交。

(2) 互不相关：

两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$，如果对于任意 t_1, t_2 都有互协方差函数等于0。

即 $C_{XY}(t_1, t_2)=0$，则称两随机过程之间互不相关

(3) 相互独立。

如果对于任意 $t_1, t_2 \cdots t_n$ 和 $t_1' \cdots t_m'$ 有

$$f_{XY}(x_1, \cdots x_n; t_1 \cdots t_n; y_1 \cdots y_m; t_1' \cdots t_m')$$

$$= f_X(x_1 \cdots x_n, t_1 \cdots t_n) \cdot f_Y(y_1 \cdots y_m, t_1' \cdots t_m')$$

则称两个随机过程之间相互独立。

(4) 相互关系：两个随机过程独立，则一定互不相关，互不相关则不一定相互独立。

正交与不相关、独立无必然联系。

2. 随机过程各态历经性及实际意义。

① 随机过程的各个样本都同样经历了随机过程的各种可能状态，即从随机过程的任何一个样本函数就可以得出它的全部统计信息，这就叫随机过程的各态历经性。

② 实际意义：

若一个随机过程具有各态历经性，则可用一个样本在时间上的平均来求出其均值和相关函数，大大简化工作量。

3. 广义平稳随机过程与其均方导数过程在同一时刻正交但不相关。

若：$X(t)$ 为广义平稳随机过程

$Y(t) = \dfrac{dR_X(\tau)}{d\tau}$ 为其均方导数。

则有 $R_{XY}(\tau) = -\dfrac{dR_X(\tau)}{d\tau}$

$R_{YX}(\tau) = \dfrac{dR_X(\tau)}{d\tau}$

$\because R_{XY}(0) = R_{YX}(0)$

$\therefore -\dfrac{dR_X(0)}{d\tau} = \dfrac{dR_X(0)}{d\tau}$

$\therefore \dfrac{dR_X(0)}{d\tau} = 0$

$\therefore R_{XY}(0) = R_{YX}(0) = 0$

即同一时刻正交且互不相关。

(不相关和相互独立的关系)

4. 高斯随机过程的互不相关与相互独立等价. (不相关和相互独立等价的例子)

答: 若高斯随机过程 $X(t)$, $Y(t)$ 相互独立, 则一定互不相关.

若高斯随机过程 $X(t)$, $Y(t)$ 互不相关, 则相关系数 $r=0$, $X(t)$, $Y(t)$ 的联合概率密度函数为 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 概率密度乘积, $X(t)$, $Y(t)$ 相互独立.

5. 泊松过程不是广义平稳随机过程.

泊松过程 $N(t)$ 的均值 $E[N(t)]=\lambda t$

自相关函数 $R_N(t_1,t_2)=\lambda^2 t_1 t_2+\lambda\min(t_1,t_2)$

均值、自相关函数均和 t 相关.

∴ 泊松过程不是广义平稳随机过程.

补充:

① 泊松分布: $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $E[X]=\lambda$ $D[X]=\lambda$

② 泊松过程: ~~$P\{X(t)=k\}=e^{-\lambda t}\lambda^{t}$~~

$$P\{X(t)=k\}=e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$E[X(t)]=\lambda t$

$D[X(t)]=\lambda t$

$R_X(t_1,t_2)=\lambda^2 t_1 t_2+\lambda\min(t_1,t_2)$

6 狭义平稳和广义平稳的定义和关系.

① 狭义平稳:

设 $\{X(t), t\in T\}$ 为一随机过程, 若对任意正整数 n, 任意实数 $t_1,\cdots,t_n$, $t_i\in T$, $i=1,2,\cdots,n$, 以及实数 τ 为任意值

有分布函数:

$F_n(x_1,\cdots x_n;t_1\cdots t_n)$

$=F_n(x_1,\cdots x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau)$

则称 $X(t)$ 为严平稳(狭义).

② 广义平稳:

设 $\{X(t), t\in T\}$ 为一平稳随机过程, 若 $E[X^2(t)]<\infty$, 且:

$E[X(t)]=m_X=$ 常数

$R_X(t_1,t_2)=R(\tau)$ $\tau=t_1-t_2$.

则称 $\{X(t), t\in T\}$ 为广义平稳随机过程.

③ 关系:

狭义平稳 $\underset{\times}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$ 广义平稳.

广义平稳随机过程不一定是严格平稳.

但当 $X(t)$ 为高斯随机过程时, 则 狭义平稳 $\Leftrightarrow$ 广义平稳

当 $E[X^2(t)]<\infty$ 时 狭义平稳 $\Rightarrow$ 广义平稳.

7. 维纳过程定义及其描述：

设随机过程 $\{W_0(t), t\in[0,\infty)\}$ 满足下列条件

① $W_0(t)$ 是一独立增量过程，且对任意 $t_1, t_2 \in [0,\infty)$，$t_1<t_2$ 及 $h>0$，增量 $W_0(t_2+h)-W_0(t_1+h)$ 具有相同的分布密度

② 对任意 $t\in[0,\infty)$，增量 $W_0(t_2)-W_0(t_1)$ 具有高斯分布密度

$$p_{W_0(t_2)-W_0(t_1)}(x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t_2-t_1}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{t_2-t_1}\right\}. \quad -\infty<x<+\infty.$$

③ $P[W_0(0)=0]=1$.

则称 $W_0(t)$ 为规范化维纳过程.

描述：零均值，平稳高斯白噪声过程 $X(t)$ 通过理想积分器可生成维纳过程 $W(t)$.

期望 $E[X(t)]=0$.

~~相关函数: R_X~~

方差：$R_X(\tau)=\sigma^2\delta(\tau)$.

~~8. 平稳过程通过线性系统输出是否平稳过程.~~

可能系统不存在/不可实现.

即 $X(t)$ 不是绝对可积.

线性平稳过程通过线性系统不一定平稳.

比如积分器.

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{t}x(\alpha)\,d\alpha.$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\alpha)u(t-\alpha)\,d\alpha.$$

$$h(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

9. 随机过程均方连续和均方导数的定义及导数过程的数字特征.

①均方连续：

若$X(t)$在t时刻均方连续，则

$$\lim_{\Delta t \to 0} E\left[\,|X(t+\Delta t) - X(t)|^2\right] = 0.$$

②均方导数：

$$\dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

③导数过程$\dot{X}(t)$的数字特征.

$$m_{\dot{X}}(t) = \frac{dm_X(t)}{dt}$$

$$\begin{cases} R_{\dot{X}X}(t) = \dfrac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1} \\ R_{X\dot{X}}(t) = \dfrac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial t_2} \\ R_{\dot{X}}(t) = \dfrac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \end{cases}$$

10 高斯随机过程的狭义平稳和广义平稳等价.

11. 实平稳随机过程$X(t)$的希尔伯特变换$\hat{X}(t)$，复表示$\tilde{X}(t)$性质

$$\hat{X}(t) = X(t) * \frac{1}{\pi t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(\tau)}{\pi(t-\tau)}\, d\tau.$$

$$\tilde{X}(t) = X(t) + j\hat{X}(t)$$

性质：

① $R_{\hat{X}}(\tau) = R_X(\tau)$

② $R_{\hat{X}X}(\tau) = \hat{R}_X(\tau)$　$R_{X\hat{X}}(\tau) = -\hat{R}_X(\tau)$

③ $S_{\hat{X}}(w) = S_X(w)$

④ $\hat{S}_X(w) = -jS_X(w)\,sgn(w)$

⑤ $R_{\tilde{X}}(\tau) = 2[R_X(\tau) + j\hat{R}_X(\tau)]$

12. 平稳随机过程 相关系数，相关时间的定义及其相互关系.

①平稳随机过程 $X(t)$ 相关系数为:

$$r_X(\tau)=\frac{C_X(\tau)}{C_X(0)}=\frac{R_X(\tau)-m_X^2}{R_X(0)-m_X^2}=\frac{R_X(\tau)-m_X^2}{\sigma_X^2}$$

②相关时间定义:

$$\tau_0=\int_0^{\infty} r_X(\tau)\,d\tau.$$

当 $\tau>\tau_0$ 时，可认为 $X(t)$ 与 $X(t-\tau)$ 实际上已不相关，称时间 τ_0 为相关时间.

工程上常取 $|r_X(\tau_0)|\le 0.05$.

③二者关系:

相关时间 τ_0 小，意味着相关系数 $r_X(\tau)$ 随 τ 增大而迅速减小，说明随机过程随时间变化激烈. 反之变化缓慢.

13. $X_i(t)$ $(i=1,2,\cdots n)$ 为独立同分布的泊松过程，说明 $Y(t)=\sum_{i=1}^{n}X_i(t)$ 为仍是泊松过程，给出其自相关函数. $R_Y(t_1,t_2)$

解: $X_i(t)$ $(i=1,2\cdots n)$ 独立同分布，不妨设其强度均为 λ，且初始值 $X(0)=0$.

则 $P\{X_i(t)=k\}=P\{X_i(t)-X_i(0)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda t}$

特征函数:

$$\varphi_{X_i}(v,t)=E[e^{jvX_i(t)}]=\sum_{k=0}^{\infty}e^{jvk}\cdot\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{jv}\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

$$=e^{e^{jv}\lambda t}e^{-\lambda t}=e^{\lambda t(e^{jv}-1)}$$

$$\varphi_Y(v,t)=E[e^{jvY(t)}]$$

$$=E[e^{jv\sum_{i=1}^{n}X_i(t)}]$$

$$=\prod_{i=1}^{n}E[e^{jvX_i(t)}]$$

$$=\prod_{i=1}^{n}e^{\lambda t(e^{jv}-1)}$$

$$=e^{n\lambda t(e^{jv}-1)}$$

$Y(t)$ 为过程强度为 $n\lambda$ 的泊松分布.

(2). $E[Y(t)]=n\lambda t$.

$D[Y(t)]=n\lambda t$.

自相关函数:

$$R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)Y(t_2)]$$

$t_1>t_2$ $=E\{[Y(t_1)-Y(t_2)+Y(t_2)]Y(t_2)\}$

$$=E\{[Y(t_1)-Y(t_2)]Y(t_2)\}+E[Y^2(t_2)]$$

$$=E\{[Y(t_1)-Y(t_2)][Y(t_2)-Y(0)]\}+D[Y(t_2)]+[E[Y(t_2)]]^2$$

$$=n\lambda(t_1-t_2)\cdot n\lambda t_2+n\lambda t_2+(n\lambda t_2)^2.$$

$$=(n\lambda)^2t_1t_2+n\lambda t_2$$

当 $t_1<t_2$ 时同理得:

$$R_Y(t_1,t_2)=(n\lambda)^2t_1t_2+n\lambda t_1.$$

$\therefore R_Y(t_1,t_2)=(n\lambda)^2t_1t_2+n\lambda\min\{t_1,t_2\}$.

14. 齐次马尔可夫链定义，一步转移和n步转移概率关系，平稳分布的计算方法。

① 齐次马尔可夫链

$$P_{ij}(m)=P\{X_{m+1}=j|X_m=i\}=P_{ij}$$

即从状态i转移到状态j的概率与m无关

② 一步转移概率与n步转移概率关系

设一步转移概率矩阵

$$P=\begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & P_{22} & \\ \vdots & & \ddots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

切普曼-科尔莫哥洛夫方程：

$$P_{ij}^{m+r}(n)=\sum_{k\in S}P_{ik}^{(m)}(n)\cdot P_{kj}^{(r)}(n+m)$$

对于齐次马氏链：

$$P^{(2)}=\left[\sum_{k\in S}P_{ik}^{(1)}P_{kj}^{(1)}\right]=P\cdot P=P^2$$

$$P^{(m+1)}=\left[\sum_{k\in S}P_{ik}^{(m)}P_{kj}^{(1)}\right]=P^mP=P^{m+1}$$

∴ n步转移概率 $P^{(n)}=P^n$

（一步转移概率的n次幂）

③ 当 P 和 P^2 矩阵各元素为正值时，稳态分布存在，设 $\pi=(S_1\cdots S_n)$.

可以利用 $\pi=\pi P$ 求出 π 中各状态 $S_1\cdots S_n$.

扫描全能王 创建