

# 蜂考速成课

## 《高数/微积分上》

### 版权声明：

内容来自蜂考原创，讲义笔记和相关图文均有著作权，视频课程已申请版权，登记号：陕作登字-2018-I-00001958，根据《中华人民共和国著作权法》、《中华人民共和国著作权法实施条例》、《信息网络传播权保护条例》等有关规定，如有侵权，将根据法律法规提及诉讼。

## 课时一 极限、连续、间断点

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 函数	★★	0~3	选择、填空
2. 极限	必考	6~10	选择、填空、大题
3. 连续			
4. 间断点			

### 1. 函数

题 1. 求函数  $y = \ln \frac{x}{x-2} + \arcsin \frac{3x-1}{5}$  的定义域

解： 
$$\begin{cases} \frac{x}{x-2} > 0 \\ \left| \frac{3x-1}{5} \right| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{4}{3} \leq x < 0, \text{ 即函数的定义域为 } x \in \left[-\frac{4}{3}, 0\right)$$

题 2.  $f(2x+3) = x^2$  求  $f(x)$

解：令  $t = 2x+3$ , 则  $x = \frac{t-3}{2}$

得  $f(t) = \left(\frac{t-3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{9}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$

2. 极限 记作：  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  左极限  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$  右极限  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$

1)  $x \rightarrow x_0$  表示  $x \neq x_0$

2)  $x \rightarrow x_0$  表示  $x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-$

3) 极限存在的充要条件：  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  (左右极限存在且相等)

题 1: 设函数  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ , 当  $x \rightarrow 0$  时求极限值

解： 
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

左右极限存在但是不相等，故无极限

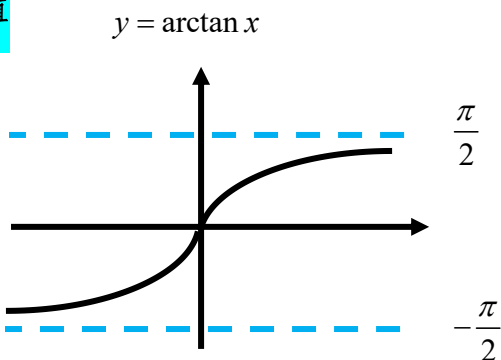


题 2. 设函数  $f(x) = \arctan \frac{1}{x-1}$ , 当  $x \rightarrow 1$  时求极限值

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

左右极限存在但是不相等, 故无极限



题 3. 设函数  $f(x) = e^{\frac{x}{x-2}}$ , 当  $x \rightarrow 2$  时求极限值

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{-\infty} = 0$$

左极限存在, 右极限不存在

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} e^{+\infty} = +\infty$$

所以极限不存在

3. 连续  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  (极限值=函数值)

题 1.  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \end{cases}$  是否连续

解: 分界点在  $x=1$  处

$$\text{左极限: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$$

$$\text{右极限: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x) = 1$$

$$\text{函数值: } f(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1 \quad \text{函数连续}$$

题 2.  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 则  $k$  等于多少

$$\text{解: 极限值: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+9}+3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{函数值: } f(0) = k \quad \text{根据极限值等于函数值, 所以 } k = \frac{1}{6}$$



题 3. 确定  $a, b$ , 使  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ ax+b & 0 \leq x < 1 \\ e^x & x < 0 \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续。

解：在分界点为  $x=0$  处

$$\text{左极限: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\text{右极限: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ax+b = b$$

$$\text{函数值: } f(0) = b \quad \text{可得 } b = 1$$

在分界点为  $x=1$  处

$$\text{左极限: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax+b = a+b$$

$$\text{右极限: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$$

$$\text{函数值: } f(1) = 1 \quad \text{可得 } a+b = 1$$

$$\text{联立 } \begin{cases} b = 1 \\ a+b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \quad b = 1$$

### 3. 间断点

第一类间断点	可去间断点	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$
	跳跃间断点	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$
第二类间断点		$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

题 1. 求函数  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$  的间断点, 并判断其类型

解:  $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$  在点  $x=1, x=2$  处无定义, 故  $x=1, x=2$  为间断点

在  $x=1$  处

$$\text{极限值: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2$$

左右极限存在且相等, 故点  $x=1$  为可去间断点

在  $x=2$  处

$$\text{左极限: } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$$

$$\text{右极限: } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$$

故为第二类间断点



题 2. 求函数  $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & x > 0 \\ \ln(1+x) & -0.5 \leq x < 0 \end{cases}$  的间断点，并判断其类型

解：在  $x=0$  处

$$\text{左极限：} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(1+x) = 0$$

$$\text{右极限：} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{e}$$

左右极限都存在，但是不相等，故  $x=0$  为跳跃间断点

$x > 0$  时  $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$  定义域  $x \neq 1$  故在  $x=1$  处也是间断点

$$\text{左极限：} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$$

$$\text{右极限：} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$$

故  $x=1$  为第二类间断点



## 课时一      练习题

1.  $y = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} + \arcsin \frac{2x+1}{3}$  求  $f(x)$  的定义域;

学完课时一和课时二，再做练习题

2. 设  $f(\sin \frac{x}{2}) = 1 + \cos x$ , 求  $f(\cos x)$ .

3. 设  $f(x) = \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & x > \pi \\ ax, & x < \pi \end{cases}$  如果  $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$  存在, 那么  $a$  为何值。

4. 设  $f(x) = \begin{cases} (1+ax)^{\frac{1}{x}} & x > 0 \\ e & x = 0 \\ \frac{\sin ax}{bx} & x < 0 \end{cases}$ ; ( $a \neq 0, b \neq 0$ ) 问  $a$  和  $b$  取何值时  $f(x)$  在  $x=0$  处连续

5. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & x > 0 \\ x & x = 0 \\ \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & x < 0 \end{cases}$  问  $f(x)$  在  $x=0$  处是否连续

6. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin 2x & x < 0 \\ k & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} + 2 & x > 0 \end{cases}$  求常数  $k$  的值, 使函数  $f(x)$  在定义域内连续

7. 求函数间断点, 并判断其类型

(1)  $y = \begin{cases} x-1 & x \leq 1 \\ 3-x & x > 1 \end{cases}$       (2)  $f(x) = \frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}, x \neq 0$

(3)  $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}, x \neq 2$       (4)  $f(x) = \frac{1}{1-e^{\frac{1}{1-x}}}, x \neq 1$



## 课时二 求极限值

考点		重要程度	分值	常见题型
求极限	1. 有理化、多项式	必考	10 ~ 20	选择 填空 大题必考
	3. 重要极限公式			
	4. 无穷小公式			
	4. 洛必达法则			

### 1. 有理化、多项式

题 1: 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+9}-3}$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+9}-3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+9}+3 = 6$$

题 2: 求极限例:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}} = \frac{3}{7}$$

### 2. 重要极限公式

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta}{\Delta} = 1$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{\sin \Delta}{\Delta} = 0$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} (1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}} = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{\Delta})^{\Delta} = e$$

题 1: 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 = 3$$

题 2: 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x}$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 = 2$$

题 3: 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1+(-x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1+(-x)]^{(-\frac{1}{x}) \cdot (-1)} = e^{-1}$$



题 4：求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})^n$

$$\text{解：} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{n+1}{n^2})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (1 + \frac{n+1}{n^2})^{\frac{n^2}{n+1}} \right]^{\frac{n+1}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}} = e$$

### 3. 无穷小

1) 定义：以 0 为极限的函数称作无穷小

例： $x \rightarrow 0$  时， $x, 2x^2, \tan x \rightarrow 0$  称为  $x \rightarrow 0$  时的无穷小

$x \rightarrow \infty$  时， $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{2}{3x^3+1} \rightarrow 0$  称为  $x \rightarrow \infty$  时的无穷小

2) 无穷小比较  $\alpha, \beta$  为自变量某种趋向下的无穷小

①  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ ，称  $\beta$  为  $\alpha$  的高阶无穷小

②  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = k (k \neq 0)$ ，称  $\beta$  为  $\alpha$  的同阶无穷小

③  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ ，称  $\beta$  为  $\alpha$  的等阶无穷小

3) 等价无穷小替换公式：

$x \rightarrow 0$  时 (①  $x \rightarrow 0$  才成立 ②  $x$  作为整体看待，不仅仅指  $x$ )

①  $\sin x \sim x \quad \tan x \sim x \quad \arctan x \sim x \quad \arcsin x \sim x \quad \ln(1+x) \sim x \quad e^x - 1 \sim x$

②  $(1+x)^a - 1 \sim ax \quad \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad 1 - \cos^a x \sim \frac{a}{2}x^2$

题 1：求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x}$

$$\text{解：} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

题 2：求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{1-\cos \sqrt{x}}$

$$\text{解：} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{1-\cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2} = 1$$





题 3：求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \cdot \arcsin x^2}$

错解：  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \cdot \arcsin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x \cdot x^2} = 0$  (×)

正解：  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \cdot \arcsin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$

题 4：求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x \cdot \ln(1 + 2x)}$

解：  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x \cdot \ln(1 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1) + (1 - \cos x)}{2x^2}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1)}{2x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

题 5：当  $x \rightarrow 0$  时， $\sqrt{1+x}-1$  与  $ax$  是等价无穷小，求  $a$

解：  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x}{ax} = 1$  可求得  $a = \frac{1}{2}$

4. 洛必达法则 若满足  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$  型，则  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$

① 必须满足  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$  型才可以使用，其他形式，不能直接使用

② 若  $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$  仍满足  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$  型，可以连续使用洛必达法则  $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)}$

③ 洛必达法则不是万能的，求极限的时候，首选无穷小替换，再用洛必达法则

题 1：求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

( $\frac{0}{0}$  型) 可直接使用洛必达法则

解：  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}$



题 2：求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{2x^2 + x}$

( $\frac{\infty}{\infty}$  型) 可直接使用洛必达法则

$$\text{解：} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{4x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

题 3：求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x})$

( $\infty - \infty$  型) 方法：通分

$$\begin{aligned} \text{解：} \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \quad (\text{通分后变成 } \frac{0}{0}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \quad (\text{先用一步无穷小代换}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} \quad (\text{使用洛必达法则，上下求导}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x} = 0 \quad (\text{再使用一步无穷小替换}) \end{aligned}$$

题 4：求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x$

( $0 \cdot \infty$  型) 方法：取倒数

$$\begin{aligned} \text{解：} \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad (\text{取倒数后变成 } \frac{\infty}{\infty} \text{ 型}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{x} = 0 \end{aligned}$$

题 5：求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{1}{\ln x}}$

( $1^\infty$  型) 方法：取对数

$$\text{解：令 } y = \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$\text{两边取对数 } \ln y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} \ln(2-x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{\ln x} \quad (\frac{0}{0} \text{ 型})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{2-x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x}{2-x} = -1$$

$$\ln y = -1 \quad y = e^{-1} \quad \text{故 } \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}$$

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\ln B^A = A \ln B$$



题 6：求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2 \sin x}$

( $0^0$  型) 方法：取对数

解：令  $y = \lim_{x \rightarrow 0} x^{2 \sin x}$

两边取对数  $\ln y = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \sin x \ln x$  ( $0 \cdot \infty$  型)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x}{\frac{1}{\sin x}} \quad (\text{取对数后变成 } \frac{\infty}{\infty} \text{ 型}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{1}{x \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-\frac{2 \sin^2 x}{x \cos x}) = \lim_{x \rightarrow 0} (-\frac{2x^2}{x \cos x}) = \lim_{x \rightarrow 0} (-\frac{2x}{\cos x}) = 0 \\
 &\ln y = 0 \quad y = 1 \quad \text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} x^{2 \sin x} = 1
 \end{aligned}$$

题 7：求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$

( $\infty^0$  型) 方法：取对数

解：令  $y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$

两边取对数  $\ln y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(e^x - 1)} \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(e^x - 1)}$  (取对数后变成  $\frac{\infty}{\infty}$  型)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + x e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + x} = 0 \\
 &\ln y = 0 \quad y = 1 \quad \text{故 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} = 1
 \end{aligned}$$

## 课时二 练习题

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$

3)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+x}{x} \right)^{2x}$

5)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$  ( $m, n$  为正整数且  $m \neq n$ )

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2(e^x - 1)}$

7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{\sin x - \tan x}$

8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$

9)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

10)  $y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\ln(x^3 + 1)}}$



## 课时三 导数

考点		重要程度	分值	常见题型
1. 求导定义公式		★★★★	0~8	选择、填空
2. 求导计算	1) 复合函数求导	必 考	6~15	选择、填空、大题
	2) 微分			
	3) 隐函数求导			
	4) 参数方程求导			
3. 可导，可微，连续之间的关系		★★★	0~3	选择、填空

1. 求导定义公式 (导数记作形式:  $y'$ ,  $f'(x)$ ,  $\frac{dy}{dx}$ )

求导定义公式:  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  (这个式子有极限值就说明在这点可导)

$$\text{左导数: } f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\text{右导数: } f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

函数在某点可导的充分必要条件:  $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$  (左导数等于右导数)

题 1: 求函数  $f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ \ln(1+x) & x \geq 0 \end{cases}$  在  $x=0$  的导数

解: 左导数

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \Delta x - \ln(1+0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$$

右导数

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \Delta x) - \ln(1+0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$f'_-(0) = f'_+(0) = 1 \quad \text{所以在 } x=0 \text{ 处导数 } f'(0) = 1$$

题 2: 已知  $f'(2) = 1$ , 求函数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h}$

$$\text{解: } \frac{h - (-h)}{h} = 2 \quad \text{所以 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h} = 2 \cdot f'(2) = 2$$

$$\text{若 } f'(x_0) = A \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ah) + f(x_0 + bh)}{ch} = \frac{ah + bh}{ch} f'(x_0) = \frac{a+b}{c} \cdot A$$



## 2. 求导计算

题 1. 设  $y = e^x \ln x$ , 求  $y'$ 

$$\text{解: } y' = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$$

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

题 2. 设  $y = \ln \cos e^x$ , 求  $dy$ 

$$\text{解: } y' = \frac{1}{\cos e^x} \cdot [-\sin e^x] \cdot e^x = -e^x \tan e^x$$

$$dy = -e^x \tan e^x dx$$

题 3. 设  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ , 求  $y'$ 

$$\begin{aligned} \text{解: } y' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \right] \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

题 4. 设  $y = f(\sin x^2)$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ 

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = f'(\sin x^2) \cdot (\sin x^2)' = f'(\sin x^2) \cdot \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2 f'(\sin x^2)$$

题 5. 设  $y = f(x)$  由方程  $y - xe^y = 1$  确定, 求  $dy|_{x=0}$ 解: 两边同时对  $x$  求导, 得

$$y' - e^y - xe^y y' = 0 \quad \text{解得 } y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$$

把  $x=0$  代入原方程可得  $y=1$ 

$$\text{所以 } y' = \frac{e^y}{1 - xe^y} \Big|_{(0,1)} = e \Rightarrow dy|_{x=0} = edx$$



题 6. 求曲线  $e^y - xy = e$  在  $x=0$  处的切线方程。

解：两边同时对  $x$  求导，得

$$e^y \cdot y' - y - x \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{y}{e^y - x}$$

当  $x=0$  时代入原方程  $y=1$  则  $y' = \frac{1}{e}$

则切线方程为  $y-1 = \frac{1}{e}(x-0)$  整理可得  $y = \frac{1}{e}x + 1$

题 7. 设  $y = (1+x^2)^{\sin x}$ ，求  $y'$

解：两边取对数得： $\ln y = \sin x \cdot \ln(1+x^2)$

两边同时对  $x$  求导得： $\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x}{1+x^2} \sin x$

于是  $y' = y \cdot \left[ \cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x}{1+x^2} \sin x \right] = (1+x^2)^{\sin x} \left[ \cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x}{1+x^2} \sin x \right]$

题 8. 设  $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ ，求  $\frac{dy}{dx}$ ， $\frac{d^2y}{dx^2}$

解： $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2} \cdot 2t = \frac{2t}{1+t^2}$        $\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{dt} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \bigg/ \frac{2t}{1+t^2} = \frac{1+t^2}{4t}$$

参数方程求导方法：

$$\textcircled{1} \frac{dx}{dt} \quad \textcircled{2} \frac{dy}{dt}$$

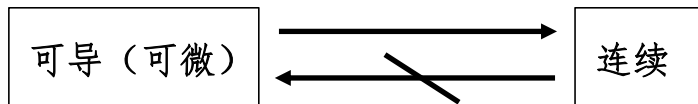
$$\textcircled{3} \frac{dy}{dx} = \frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}}$$

$$\textcircled{4} \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}$$

$$\textcircled{5} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\textcircled{4}}{\textcircled{1}}$$

### 3. 可导，可微，连续之间的关系

(可导和可微可以认为是一样的，可导就是可微，可微就是可导)



## 课时三 练习题

1. 求函数  $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ \sin 2x, & x > 0 \end{cases}$  在  $x=0$  的导数。
2. 设  $f'(x_0) = 2$ ，求  $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0 - \frac{1}{2n})]n$ 。
3. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ ax+b, & x > 1 \end{cases}$  为了使函数  $f(x)$  在  $x=1$  处连续且可导， $a, b$  应取什么值。
4. 设  $y = \sin x \cdot \cos x$ ，求  $y'$ 。
5. 设  $y = \ln(1+x^2)$ ，求  $dy$ 。
6. 设  $y = f(\ln x)$ ，求  $\frac{dy}{dx}$ 。
7. 设  $y = f(x)$  由方程  $xy = e^{x+y}$  确定，求  $dy$ 。
8. 求曲线  $y = 2 + xe^y$  在  $x=0$  处得切线方程。
9. 设  $y = x^x$ ，求  $y'$ 。
10. 设  $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ y = 1-t \end{cases}$ ，求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 。



## 课时四 单调性与凹凸性

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 单调性与极值点	★★★★	3~8	选择、填空、大题
2. 凹凸性与拐点			

题 1：求函数  $y = x - \ln(1+x)$  的单调性与极值。

驻点：一阶导数为 0 的点

解：定义域为  $x \in (-1, +\infty)$

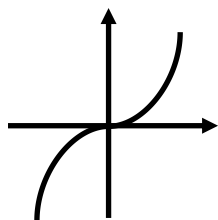
$$y' = 1 - \frac{1}{1+x}$$

由  $y' > 0$  可得单调增区间为  $x \in [0, +\infty)$

由  $y' < 0$  可得单调减区间为  $x \in (-1, 0]$

所以  $x = 0$  为极小值点  $f(0) = 0$

1) 驻点一定是极值点 (×) 例  $y = x^3$ ,  $y' = 3x^2 = 0$  驻点为  $(0, 0)$



$x = 0$  不是极值点，因为在  $x = 0$  的左右两边  $y'$  不是异号

2) 极值点一定是驻点 (×) 极值点存在于两处：①驻点；②一阶导数不存在点

3) 可导函数极值点一定是驻点 (√) 去掉了导数不存在的情况。

题 2：求函数  $y = xe^{-x}$  的凹凸区间及拐点。

解：定义域为  $x \in (-\infty, +\infty)$

$$y' = e^{-x}(1-x) \quad y'' = e^{-x}(x-2)$$

由  $y'' > 0$  可得凹区间为  $x \in [2, +\infty)$

由  $y'' < 0$  可得凸区间为  $x \in (-\infty, 2]$

$y'' = 0$  得  $x = 2$ ，且左右异号；

故拐点为  $(2, 2e^{-2})$





①  $f''(x)=0$  的点一定是拐点 (×) 要保证左右异号。

② 拐点一定是  $f''(x)=0$  的点。(×)

(拐点存在于两处①  $f''(x)=0$  的点；② 二阶导数不存在点)

③ 二阶导数存在的函数，拐点一定是  $f''(x)=0$  (√) 去掉了二阶导数不存在的情况。

题 3：证明：当  $x > 0$  时， $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ 。

证明：令  $f(x) = x - \ln(1+x)$

$$f' = 1 - \frac{1}{1+x} > 0$$

故  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  时单调增加，且  $f(0) = 0$

于是有  $f(x) > 0$ ，即  $x - \ln(1+x) > 0$  得证  $x > \ln(1+x)$ ，

$$\text{令 } g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

故  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  单调增加，且  $g(0) = 0$

故  $g(x) > 0$ ，即  $\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} > 0$  得证  $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$

综合可得： $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

## 课时四 练习题

1. 求函数  $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$  的单调性与极值

2. 求  $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 5$  的凹凸区间及拐点

3. 试证：当  $x > 0$  时， $e^x - (1+x) > 1 - \cos x$



## 课时五 不定积分

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 直接积分	★★★★	0~3	选择、填空
5. 凑微分	必 考	6~10	选择、填空、大题
3. 换元法			
4. 分部积分法			
5. 有理化积分	★★★		

不定积分公式表：

1.  $\int k dx = kx + C$

2. (1)  $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$  (2)  $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$

3. (1)  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$  (2)  $\int e^x dx = e^x + C$

4. (1)  $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(2)  $\int \cos x dx = \sin x + C$

(3)  $\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$

(4)  $\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$

(5)  $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$

(6)  $\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$

(7)  $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

(8)  $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

(9)  $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

(10)  $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

5. (1)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

(2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$

(3)  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

(4)  $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

(5)  $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

(6)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a^2} \right| + C$

(7)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2-a^2} \right| + C$

(8)  $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + C$



## 1. 直接积分

题 1:  $\int \sqrt{x}(x^2-5)dx$

解：原式  $= \int (x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}})dx = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

题 2:  $\int \frac{3x^2}{1+x^2}dx$  (加项减项)

解：原式  $= \int \frac{3x^2+3-3}{1+x^2}dx = \int (3 - \frac{3}{1+x^2})dx = 3x - 3\arctan x + C$

题 3:  $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$

解：原式  $= \int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2})dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$

题 4:  $\int 2^x e^x dx$

解：原式  $= \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C$

题 5:  $\int \sin^2(\frac{x}{2})dx$

解：原式  $= \int \frac{1}{2}(1 - \cos x)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x + C$

题 6:  $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx$

解

:

原

式

$$= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} dx = \int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + C$$

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 x\end{aligned}$$



## 2. 凑微分

题 1:  $\int (1+2x)^2 dx$

解：原式  $= \frac{1}{2} \int (1+2x)^2 d(1+2x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (1+2x)^3 + C = \frac{1}{6} (1+2x)^3 + C$

题 2:  $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

解：原式  $= \int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} x dx = \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+1) = \sqrt{x^2+1} + C$

题 3:  $\int \frac{5^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

解：原式  $= \int (5^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}) dx = -\int 5^{\frac{1}{x}} d(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{\ln 5} 5^{\frac{1}{x}} + C$

题 4:  $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

解：原式  $= \int \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} d(\sqrt{x}) = 2 \arctan \sqrt{x} + C$

题 5:  $\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx$

解：原式  $= \int \frac{1}{1+e^x} \cdot e^x dx = \int \frac{1}{1+e^x} d(1+e^x) = \ln(e^x+1) + C$

题 6:  $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

解：原式  $= \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{\ln x} d(\ln x) = \ln(\ln x) + C$

题 7:  $\int \tan x dx$

解：原式  $= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x} d \cos x = -\ln |\cos x| + C$

题 8:  $\int \cos^3 \theta d\theta$

解：原式  $= \int \cos^2 \theta \cdot \cos \theta d\theta = \int \cos^2 \theta d \sin \theta = \int (1-\sin^2 \theta) d \sin \theta = \sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta + C$



题 9:  $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

解：原式 =  $2 \int \arctan \sqrt{x} d(\arctan \sqrt{x}) = (\arctan \sqrt{x})^2 + C$

### 3. 换元法

题 1:  $\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}} dx$

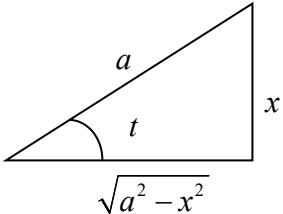
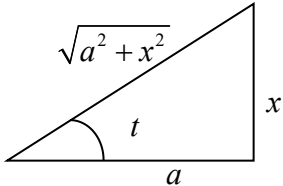
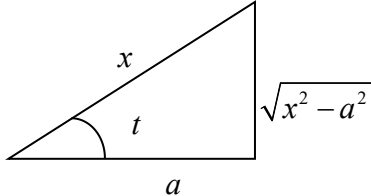
解：令  $1+\sqrt{2x}=t$ ,  $x=\frac{1}{2}(t-1)^2$ ,  $dx=(t-1)dt$

原式 =  $\int \frac{1}{t} \cdot (t-1)dt = \int (1-\frac{1}{t})dt = t - \ln t + C = 1+\sqrt{2x} - \ln(1+\sqrt{2x}) + C$

题 2:  $\int \frac{1}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

解：令  $x = a \sin t$ ,  $dx = a \cos t dt$

原式 =  $\int \frac{1}{a^3 \cos^3 t} \cdot a \cos t dt = \frac{1}{a^2} \int \sec^2 t dt = \frac{1}{a^2} \tan t + C = \frac{1}{a^2} \tan t + C = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + C$

根式形式	依据公式	所作替换	对应三角形
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$	$x = a \sin t$	
$\sqrt{a^2+x^2}$	$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$	$x = a \tan t$	
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\tan^2 t = \sec^2 t - 1$	$x = a \sec t$	



## 4. 分部积分法

$$\int u \cdot v' dx = \int u dv = uv - \int v \cdot du = uv - \int v \cdot u' dx$$

题 1:  $\int x \ln x dx$ 

$$\text{解: 原式} = \frac{1}{2} \int \ln x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 d \ln x = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

题 2:  $\int x \arctan x dx$ 

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \frac{1}{2} \int \arctan x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int x^2 d \arctan x = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C \end{aligned}$$

题 3:  $\int \ln x dx$ 

$$\text{解: 原式} = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int 1 \cdot dx = x \ln x - x + C$$

题 4:  $\int e^{\sqrt{x}} dx$  令  $\sqrt{x} = t$ ,  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ 

$$\text{解: 原式} = \int e^t \cdot 2t dt = 2 \int t d e^t = 2t \cdot e^t - 2 \int e^t dt = 2te^t - 2e^t + c = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$$

## 5. 有理化积分

题:  $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx$ 

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{x+1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x-2A-3B}{(x-2)(x-3)}$$

$$(A+B)x-2A-3B=x+1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 2A+3B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=-3 \end{cases}$$

$$\text{故} \int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx = \int \left( \frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2} \right) dx = 4 \ln|x-3| - 3 \ln|x-2| + C$$



## 课时五 练习题

- |                                        |                                   |                                          |                                                      |
|----------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| 1) $\int (x^2 + 1)^2 dx$               | 2) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$   | 3) $\int (\sin ax - e^{\frac{x}{b}}) dx$ | 4) $\int \tan \sqrt{1+x^2} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| 5) $\int \frac{x}{\sqrt{(2-3x^2)}} dx$ | 6) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ | 7) $\int \tan^3 x \sec x dx$             | 8) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$            |
| 9) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$    | 10) $\int x^n \ln x dx$           | 11) $\int \arcsin x dx$                  | 12) $\int \ln^2 x dx$                                |
| 13) $\int x \tan^2 x dx$               | 14) $\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx$  |                                          |                                                      |



## 课时六 定积分

考点		重要程度	分值	常见题型
1. 定积分计算	1) 凑微分, 分部积分类型 2) 换元换限类型 3) 反常积分	必考	6-8 分	大题
2. 定积分的性质		★★★★★	0-6 分	选择、填空
3. 积分的导数		★★★★★	0-6 分	大题

## 1、定积分的计算

题 1: 计算定积分  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$  (凑微分)

$$\text{解: 原式} = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} d\left(\frac{x}{2}\right) = \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \arcsin \frac{1}{2} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

题 2: 计算定积分  $\int_0^{\sqrt{3}} 2x \arctan x dx$  (分部积分)

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \int_0^{\sqrt{3}} \arctan x d(x^2) = x^2 \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x^2 d \arctan x \\ &= \pi - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2} dx = \pi - \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \pi - (x - \arctan x) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \end{aligned}$$

题 3: 计算定积分  $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$  (分段积分)

$$\text{解: 原式} = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4$$

题 4: 计算  $\int_0^2 f(x) dx$ , 其中  $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & x > 1 \end{cases}$  (分段积分)

$$\text{解: } \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (x+1) dx + \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) \Big|_0^1 + \frac{1}{6}x^3 \Big|_1^2 = \frac{8}{3}$$

题 5: 计算定积分  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$  (换元换限)

$$\text{解: } \sqrt{e^x - 1} = t, \quad x = \ln(1+t^2), \quad dx = \frac{2t}{1+t^2} dt$$

$$x=0 \text{ 时 } t=0, \quad x=\ln 2 \text{ 时 } t=1$$

$$\text{故 } \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \int_0^1 t \cdot \frac{2t}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = 2(t - \arctan t) \Big|_0^1 = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}$$





题 6:  $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$  (换元换限)

解:  $x = a \sin t \quad dx = a \cos t dt$

$x = 0$  时  $t = 0$ ,  $x = a$  时  $t = \frac{\pi}{2}$

$$\text{故 } \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot a \cos t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

题 7:  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$  (反常积分—积分区间无界)

$$\text{解: 原式} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + (x+1)^2} d(x+1) = \arctan(x+1) \bigg|_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x+1) - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

题 8:  $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$  (反常积分—被积函数无界)

$$\text{解: 原式} = - \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2} d(1-x) = \frac{1}{1-x} \bigg|_0^1 = \infty - 1 = \infty \text{ (无值)}$$

## 2. 定积分的性质

题 1:  $\int_{-\pi}^{\pi} (x^3 \cos x + 1) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

①若被积函数  $f(x)$  为奇函数, 积分区间对称  $[-a, a]$ , 则  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

②若  $f(x) = 1$ , 则  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b dx = b - a$

$$\text{解: } \int_{-\pi}^{\pi} (x^3 \cos x + 1) dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x dx + \int_{-\pi}^{\pi} dx$$

$x^3 \cos x$  为奇函数, 积分区域  $[-\pi, \pi]$  对称, 故  $\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x dx = 0$

$$\text{故原式} = \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi - (-\pi) = 2\pi$$

题 2:  $I_1 = \int_0^1 x dx$ ,  $I_2 = \int_0^1 x^2 dx$ ,  $I_3 = \int_0^1 x^3 dx$ , 比较  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  大小

设  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$  则  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

解: 在  $[0, 1]$  上,  $x > x^2 > x^3$  故  $I_1 > I_2 > I_3$



题 3:  $f(x) = \cos x + \int_0^2 f(x) dx$ , 求  $f(x)$

解: 令  $\int_0^2 f(x) dx = A$ , 则  $f(x) = \cos x + A$

$$\text{两边积分 } \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (\cos x + A) dx = (\sin x + Ax) \Big|_0^2 = \sin 2 + 2A$$

$$\text{即 } A = \sin 2 + 2A \Rightarrow A = -\sin 2 \quad f(x) = \cos x - \sin 2$$

### 3. 积分的导数

$$\left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t) dt \right]' = \frac{d}{dx} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t) dt = f[\varphi_2(x)] \cdot \varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)] \cdot \varphi_1'(x)$$

题 1:  $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$

$$\text{解: 原式} = \sqrt{1+(x^2)^2} \cdot 2x - \sqrt{1+0^2} \cdot (0)' = 2x\sqrt{1+x^4}$$

题 2: 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2}$

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - e^{-\cos^2 x} \cdot (-\sin x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\cos^2 x}}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} e^{-1}$$

## 课时六 练习题

1.  $\int_1^5 \frac{1}{3x+1} dx$

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$

3.  $\int_0^{2\pi} |\cos x| dx$

4.  $\int_0^2 f(x) dx$ , 其中  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & 0 \leq x \leq 1 \\ -x^3 + 2x + 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

5.  $\int_1^8 \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}} dx$

6.  $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} dx$

7.  $\int_{-a}^a \left( \frac{\sin x}{1+x^2} + \sqrt{a^2 - x^2} \right) dx$

8.  $I_1 = \int_0^1 x dx$ ,  $I_2 = \int_0^1 \ln x dx$ ,  $I_3 = \int_0^1 \sqrt{x} dx$  比较  $I_1, I_2, I_3$  大小

9. 求极限  $\frac{d}{dx} \int_0^{\sin x} \sqrt{1+3t} dt$

10. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt}{\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt}$

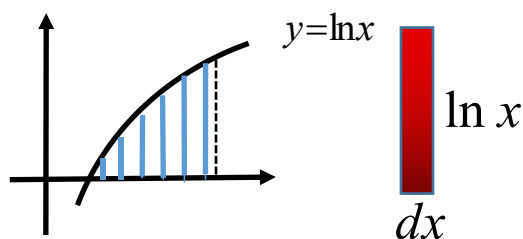


## 课时七 定积分的应用

考点	重要程度	分值	常见题型
4) 利用定积分求面积	必考	3-12 分	选择、填空、大题
5) 利用定积分求体积			

### 1、用定积分求面积

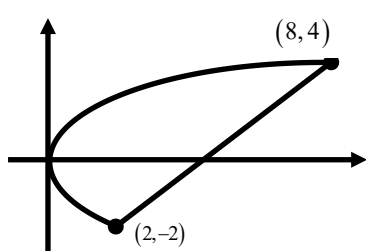
题 1: 计算  $y = \ln x$ ,  $x$  轴, 以及  $x = e$  围成的图形面积



解:  $dA = \ln x dx$

$$A = \int_1^e dA = \int_1^e \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^e = 1$$

题 2: 计算抛物线  $y^2 = 2x$  与  $y = x - 4$  所围成的图形面积



$$A_1: \int_0^2 (\sqrt{2x} - (-\sqrt{2x})) dx$$

解:  $dA_1 = [\sqrt{2x} - (-\sqrt{2x})] dx = 2\sqrt{2x} dx$

$$A_1 = \int_0^2 dA_1 = \int_0^2 2\sqrt{2x} dx = \frac{16}{3}$$

$$A_2: \int_2^8 (\sqrt{2x} - (x - 4)) dx$$

$$dA_2 = [\sqrt{2x} - (x - 4)] dx = (\sqrt{2x} + 4 - x) dx$$

$$A_2 = \int_2^8 dA_2 = \int_2^8 (\sqrt{2x} + 4 - x) dx = \frac{38}{3}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{38}{3} = 18$$

解法二:  $\int_{-2}^4 \left( (y+4) - \frac{1}{2}y^2 \right) dy$

解:  $dA = \left( y + 4 - \frac{1}{2}y^2 \right) dy$   $A = \int_{-2}^4 \left( y + 4 - \frac{1}{2}y^2 \right) dy = \left[ \frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6} \right]_{-2}^4 = 18$



## 2、用定积分求体积

题 3：计算  $y = \ln x$ ， $x$  轴以及  $x = e$  围成的图形绕  $x$  轴和  $y$  轴旋转一周的体积分别是多少

解：绕  $x$  轴

$$dV_x = \pi r^2 dx = \pi \cdot (\ln x)^2 dx$$

$$V_x = \int_1^e dV_x = \int_1^e \pi (\ln x)^2 dx = \pi(e - 2)$$

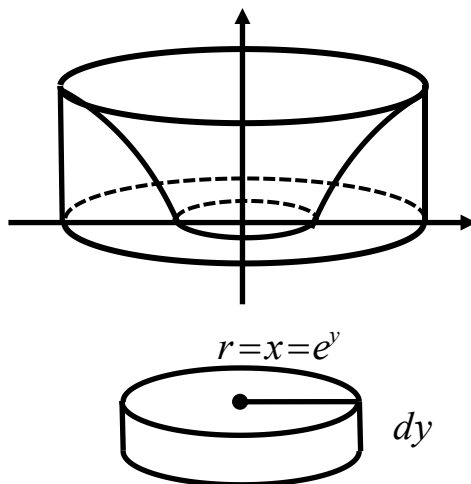
绕  $y$  轴  $V_y = V_{\text{外}} - V_{\text{内}}$

$$V_{\text{外}} = \pi \cdot e^2 \cdot 1 = \pi e^2$$

$$dV_{\text{内}} = \pi \cdot (e^y)^2 \cdot dy = \pi \cdot e^{2y} dy$$

$$V_{\text{内}} = \int_0^1 dV_{\text{内}} = \int_0^1 \pi e^{2y} dy = \frac{1}{2} \pi (e^2 - 1)$$

$$\text{则 } V_y = V_{\text{外}} - V_{\text{内}} = \pi e^2 - \frac{1}{2} \pi (e^2 - 1) = \frac{1}{2} \pi (e^2 + 1)$$



## 课时七 练习题

1. 计算平面图形由抛物线  $y = 2 - x^2$  与直线  $y = x$  围成的面积
2. 求曲线  $y = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 与  $y = 0$  所围成的平面图形面积以及绕  $x$  轴旋转所得的体积
3. 过坐标原点作曲线  $y = e^x$  的切线，该切线与曲线  $y = e^x$  以及  $x$  轴围成的平面图形记为 D
  - ①求 D 的面积  $A$
  - ②求 D 绕  $x$  轴所围成的旋转体体积  $V$



## 课时八 微分方程

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 可分离变量	★★★★	0~3	选择、填空
6. 齐次微分方程	★★★★	0~3	
3. 一阶线性微分方程	必考	6~10	大题
4. 二阶常系数齐次			
5. 二阶常系数非齐次			

### 1、可分离变量

形式：  $g(y)dy = f(x)dx$  方法：两边同时积分

题 1.  $\frac{dy}{dx} = 2xy$

解：分离变量  $\frac{dy}{y} = 2xdx$  两边同时积分  $\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$

得：  $\ln|y| = x^2 + C \Rightarrow |y| = e^{x^2+C} = e^{x^2} \cdot e^C \Rightarrow y = \pm e^C \cdot e^{x^2} = C_1 e^{x^2} (C_1 = \pm e^C)$

题 2.  $xy' - y \ln y = 0$

解：  $x \frac{dy}{dx} - y \ln y = 0$  分离变量  $\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{x}$  两边积分  $\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{x}$

得  $\ln|\ln y| = \ln|x| + C_1 = \ln|x| + \ln e^{C_1} = \ln e^{C_1} |x|$

$|\ln y| = e^{C_1} |x| \Rightarrow \ln y = \pm e^{C_1} x = Cx \quad (C = \pm e^{C_1})$

### 2、齐次微分方程

形式：  $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

题 1.  $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$

解：  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + 2xy}{xy} = -\frac{1 + 2\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}}$  令  $\frac{y}{x} = u \quad y = xu \quad y' = u + x \frac{du}{dx}$

替换上式得：  $u + x \frac{du}{dx} = -\frac{1+2u}{u}$  整理得：  $x \frac{du}{dx} = -\frac{1+2u}{u} - u = -\frac{(u+1)^2}{u}$

分离变量  $\frac{u}{(u+1)^2} du = -\frac{1}{x} dx$



$$\text{两边积分得 } \int \frac{u}{(u+1)^2} du = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} = -\ln|x| + C \quad \text{将 } u = \frac{y}{x} \text{ 代入 } \ln\left|\frac{y}{x}+1\right| + \frac{1}{\frac{y}{x}+1} = -\ln|x| + C$$

$$\text{化简整理: } \ln\left|\frac{y}{x}+1\right| + \ln|x| + \frac{x}{x+y} = C \quad \Rightarrow \ln|y+x| + \frac{x}{x+y} = C$$

3、一阶线性微分方程 形式:  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

题 1.  $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$

解:  $P(x)=1, Q(x)=e^{-x}$

$$\int P(x)dx = \int 1dx = x$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx} = \int e^{-x} \cdot e^x dx = x$$

所以方程通解:  $y = e^{-x}(x+C)$

$$\text{通解公式: } y = e^{-\int P(x)dx} \left( \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$$

题 2. 已知  $f(x)$  为可导函数, 且满足方程  $\int_0^x tf(t)dt = x^2 + f(x)$ , 求  $f(x)$

解: 两边求导  $xf(x) = 2x + f'(x)$  整理得  $y' - xy = -2x$

$$P(x) = -x \quad Q(x) = -2x$$

$$\int P(x)dx = \int -x dx = -\frac{1}{2}x^2$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx = \int -2xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 2e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\text{故方程通解: } f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} \left( 2e^{-\frac{1}{2}x^2} + C \right) = 2 + Ce^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$x=0 \text{ 时 代入原方程 } \int_0^x tf(t)dt = x^2 + f(x)$$

$$\Rightarrow 0 = 0 + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$\text{代入 } (0,0) \text{ 点, 即 } 0 = 2 + C \Rightarrow C = -2$$

$$\text{故 } f(x) = 2 - 2e^{\frac{1}{2}x^2}$$



## 4、二阶常系数齐次线性微分方程

形式：  $y'' + Py' + Qy = 0$ 题 1. 求微分方程  $y'' - 2y' - 3y = 0$  的通解.解：特征方程  $r^2 - 2r - 3 = 0$ 特征根：  $r_1 = -1$   $r_2 = 3$ 则  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$ 

特征根 $r_1, r_2$	通解
$r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_1 = r_2 = \alpha \pm \beta i$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

题 2. 求  $\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$  的解, 满足初始条件  $y|_{x=0} = 4$   $y'|_{x=0} = -2$ 原方程：  $y'' + 2y' + y = 0$ 特征方程：  $r^2 + 2r + 1 = 0$ 特征根：  $r_1 = r_2 = -1$ 通解为：  $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x}$  代入  $y|_{x=0} = 4$  得  $C_1 = 4$  则  $y = (4 + C_2 x) e^{-x}$  $y' = C_2 e^{-x} - (4 + C_2 x) e^{-x}$  代入  $y'|_{x=0} = -2$  得  $-2 = C_2 - 4$   $C_2 = 2$ 所以方程的解：  $y = (4 + 2x) e^{-x}$ 

## 5、二阶常系数非齐次线性方程

形式：  $y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$ 题 1.  $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 特征方程：  $r^2 - 5r + 6 = 0$ 特征根：  $r_1 = 2, r_2 = 3$ 通解：  $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ 从原方程可知：  $\lambda = 2$ ,  $P_m(x) = x$ 设方程特解为：  $y^* = xe^{2x}(ax + b)$  $(y^*)' = e^{2x}(2ax^2 + 2bx + 2ax + b)$  $(y^*)'' = e^{2x}(4ax^2 + 4bx + 8ax + 4b + 2a)$ 将  $y^*, (y^*)', (y^*)''$  代入原方程 化简后得：  $-2ax + 2a - b = x$ 对应系数相等  $\begin{cases} -2a = 1 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow y^* = x\left(-\frac{1}{2}x - 1\right)e^{2x}$ 则方程通解为  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)e^{2x}$ 解的结构：  $y = Y + y^*$  (齐通+非特)

$$y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x) \quad k = \begin{cases} 0 & \lambda \neq \lambda_1, \lambda_2 \\ 1 & \lambda = \lambda_1 \text{ 或 } \lambda = \lambda_2 \\ 2 & \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

$P_m(x)$	$Q_m(x)$
$x$	$ax + b$
$x^2 + 1$	$ax^2 + bx + c$
$x^3 + x^2 + 1$	$ax^3 + bx^2 + cx + d$



## 课时八 练习题

1.  $xy' - y \ln y = 0$

2.  $3x^2 + 5x - 5y' = 0$

3.  $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$

4.  $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$

5.  $(x-2)\frac{dy}{dx} = y + 2(x-2)^3$

6.  $y'' + y' - 2y = 0$

7.  $y'' - 4y' + 3y = 0 \quad y|_{x=0} = 6 \quad y'|_{x=0} = 10$

8.  $y'' + 6y' + 9y = 0$

9.  $y'' - 4y' + 5y = 0$

10.  $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$





## 课时九 中值定理

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 罗尔中值定理	★★★★★	0~5	大题
2. 拉格朗日中值定理			

### 1、罗尔定理

(1) 在闭区间  $[a, b]$  上连续；

(2) 在开区间  $(a, b)$  内可导；

(3)  $f(a) = f(b)$ ；

那么在  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$  ( $a < \xi < b$ )，使得  $f'(\xi) = 0$ 。

题：设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续，在  $(a, b)$  内可导， $f(a) = f(b) = 0$ ，证明：存在  $\xi \in (a, b)$ ，使得

$$f'(\xi) - 2f(\xi) = 0$$

解：令  $\varphi(x) = e^{-2x} f(x)$

$$f(a) = f(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

由罗尔定理可知，存在  $\xi \in (a, b)$ ，使得  $\varphi'(\xi) = 0$

$$\text{又 } \varphi'(\xi) = e^{-2\xi} [f'(\xi) - 2f(\xi)], \text{ 且 } e^{-2\xi} \neq 0$$

$$\Rightarrow f'(\xi) - 2f(\xi) = 0$$

### 2、拉格朗日中值定理

(1) 在闭区间  $[a, b]$  上连续；

(2) 在开区间  $(a, b)$  内可导；

那么在  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$  ( $a < \xi < b$ )，使得  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$  成立



题：设  $a > b > 0$ ，证明不等式：
$$\frac{(a-b)}{a} < \ln a - \ln b < \frac{(a-b)}{b}$$

证明：令  $f(x) = \ln(x)$

由拉格朗日中值定理知：存在  $\xi \in (b, a)$  使得  $f'(\xi) = \frac{\ln a - \ln b}{a - b}$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ ， $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ ， $f'(x)$  在  $(b, a)$  上单调递减

$\frac{1}{a} < f'(x) < \frac{1}{b}$ ，即  $\frac{1}{a} < f'(\xi) < \frac{1}{b}$ ， $\frac{1}{a} < \frac{\ln a - \ln b}{a - b} < \frac{1}{b}$

又  $a - b > 0$ ， $\therefore \frac{a-b}{a} < \ln a - \ln b < \frac{a-b}{b}$ ，原不等式得证

## 课时九 练习题

1) 已知函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续，在  $(0, 1)$  内可微，且  $f(0) = 1, f(1) = 0$  求证：存在  $c \in [0, 1]$ ，

使得  $f'(c) + \frac{f(c)}{c} = 0$

2) 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续，在  $(a, b)$  内可导， $f(a) = f(b) = 0$ ，证明：至少存在一个

$\xi \in (a, b)$ ，使得  $f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0$

3) 证明：当  $b > a > 0, n > 1$  时有不等式  $na^{n-1} < \frac{b^n - a^n}{b - a} < nb^{n-1}$

4) 证明：对任何实数  $a, b$  成立  $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$

