Álgebra (FHOM) **Año 2023**

Guía de trabajos prácticos 5: Relaciones
Parte I: Relaciones de orden y equivalencia

El concepto de **relación** entre dos elementos es fundamental en matemática. Podemos relacionar dos números enteros por medio de una *función*, también a dos fracciones que sean *equivalentes*. Podemos *comparar* dos conjuntos por medio de la inclusión, etc.

La forma natural de representar una relación entre elementos de un conjunto A con elementos de un conjunto B es por medio de **pares ordenados** (a,b) (a se relaciona con b). Así, las relaciones son subconjuntos $\mathscr{R}$ de $A \times B$.

Para esta guía, es importante que repasen las ideas y notaciones que trabajamos en conjuntos: operaciones con conjuntos, representaciones en diagramas de Venn, en coordenadas cartesianas, etc.

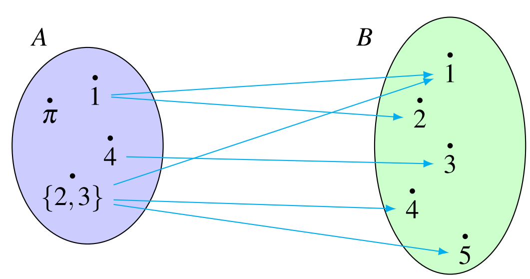
Representación de relaciones - Relación inversa - Imagen y preimagen por una relación

Notación: *recuerden que la notación "* $\mathscr{R}$*" para una relación entre los conjuntos* A *y* B *la utilizamos tanto para nombrar al subconjunto de* $A \times B$ *como para simbolizar la expresión "el elemento* a *está relacionado con* b *por medio de* $\mathscr{R}$*" escribiendo simplemente* $a\mathscr{R}b$.

En los siguientes ejercicios se trabajará con la representación de una relación: puede ser mediante diagramas de Venn, en coordenadas cartesianas, exhibiendo al conjunto de la relación por extensión o describiendo a la relación mediante alguna propiedad.

Las nociones de imagen e imagen inversa por una relación, relación inversa y composición de relaciones también se trabajarán, conceptos que continuaremos en la práctica de funciones.

Ejercicio 1. Dado el siguiente diagrama de Venn:



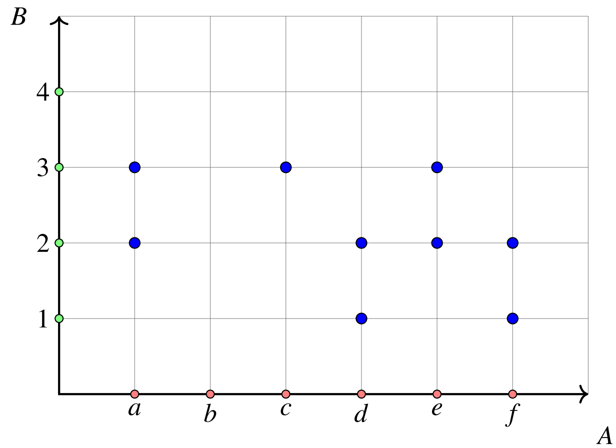
a) Describir por extensión los conjuntos A, B y la relación $\mathscr{R} \subset A \times B$ representada en el diagrama.

b) Describir la relación $\mathscr{R}^{-1}$.

c) Hallar la imagen por $\mathscr{R}$ del subconjunto $\{1, \pi, 4\}$ de A.

d) Proponer una relación $\mathscr{S}$ del conjunto B en $C = \{a, b, c, d, e\}$ tal que $(1,b)$, $(\{2,3\},d)$, $(\{2,3\},e)$ y $(4,b)$ pertenezcan a $\mathscr{S} \circ \mathscr{R}$.

Ejercicio 2. Dado el siguiente diagrama en ejes cartesianos:



a) Describir a los conjuntos A y B y la relación $\mathscr{R} \subset A \times B$ representada.

b) Hallar el dominio y la imagen de la relación.

c) Proponer, si es que existen, subconjuntos X e Y de A y B respectivamente, tales que $\mathscr{R}(X) = \emptyset$ y $\mathscr{R}^{-1}(Y) = \emptyset$.

d) Describir la relación inversa $\mathscr{R}^{-1}$.

Ejercicio 3. Dados los conjuntos $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4,5\}$ y las relaciones de A en B: $\mathscr{S}$, $\mathscr{T}$ y $\mathscr{R}$, definidas por:

I. $x\mathscr{S}y$ si y sólo si $x-1 = y$ o $x+1 = y$

II. $\mathscr{T} = \{(1,2),(2,4),(3,5)\}$

III. $1\mathscr{R}2$, $1\mathscr{R}3$, $1\mathscr{R}4$, $1\mathscr{R}5$.

1. Obtener los gráficos cartesianos para cada una de estas relaciones. Además, determinar en cada caso dominio e imagen.

2. Hallar: $\mathscr{S} \cap \mathscr{R}$, $\mathscr{T}^c$ y $\mathscr{T}^{-1} - \mathscr{R}^{-1}$

NOTA: Si $\mathscr{R}$ es una relación de A en B, se llama $\mathscr{R}^c$ a $(A \times B) - \mathscr{R}$

Ejercicio 4. Sean $A = \mathbb{Z}$ y $B = \mathbb{N}$ y definamos la relación $\mathscr{R}$ entre A y B como $a\mathscr{R}n$ si y sólo si $a|n$.

a) Hallar $\mathscr{R}^{-1}(\{4, 5, 6\})$

b) Describir el conjunto $\mathscr{R}(\{-3\})$.

Ejercicio 5. Sea $E = \{a,b,c\}$ y $\mathscr{R}$ la relación definida en $\mathscr{P}(E)$ por: $A\mathscr{R}B$ si y sólo si $A \cap B = \emptyset$. Hallar dominio e imagen de $\mathscr{R}$. Describir la imagen de $X = \{\{a\}\}$ por $\mathscr{R}$.

Ejercicio 6. Sea $\mathscr{R}$ la relación definida en el conjunto A integrado por las de rectas del plano , como: $a\mathscr{R}b \iff a \cap b \neq \emptyset$. Hallar la imagen por $\mathscr{R}$ del conjunto $X = \{a, b\}$, donde a es la recta $y = 2x+1$ y b es $y = -x+5$.

Relaciones internas en un conjunto. Reflexividad, Simetría/Antisimetría - Transitividad. Relaciones de orden y equivalencia

En esta sección trabajaremos con relaciones **internas** *en un conjunto A (es decir, relaciones $\mathscr{R} \subset A \times A$). Repasemos de nuestros apuntes de teoría las definiciones de algunos tipos de relaciones: simétricas, reflexivas, etc. En los siguientes ejercicios se trabaja cómo chequear si una relación dada tiene alguna de estas propiedades ¡Presten mucha atención a las definiciones!*

En la segunda parte de esta sección trabajaremos con las relaciones **de orden** *y* **de equivalencia***. Las primeras, generalizan lo que sucede en $\mathscr{P}(E)$ con la inclusión. Las segundas, extienden la idea de "igualdad": dos elementos* *equivalentes por una relación de equivalencia pasan a ser "iguales" en el conjunto cociente. Es importante tener todo el tiempo esto en la cabeza cuando trabajamos estos conceptos.*

Ejercicio 7. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathscr{R}$ en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

1. $A = \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $\mathscr{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(2,5),(1,5)\}$
2. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathscr{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$
3. $A = \mathbb{N}$, $\mathscr{R} = \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : a+b \text{ es par}\}$
4. $A = \mathbb{R}$, $\mathscr{R}$ dada por $x\mathscr{R}y$ si y sólo si $x-y \geq 0$.
5. $A = \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, $\mathscr{R}$ dada por $(m,n)\mathscr{R}(m',n')$ si y sólo si $m = n'$.

Ejercicio 8. Enunciar la noción de relación no simétrica (es decir, **asimétrica**) ¿Es lo mismo que ser antisimétrica? Definir cuándo una relación es **arreflexiva** (no reflexiva) y cuándo **atransitiva** (no transitiva).

Para ello deberá recordar cómo se negaban las expresiones con cuantificadores.

Ejercicio 9. Dar un ejemplo de una relación en $\mathbb{Z}$ que

1. Sea simétrica y antisimétrica.
2. No sea ni simétrica ni antisimétrica.
3. Sea simétrica pero no reflexiva.

Ejercicio 10. Sea $\mathscr{R}$ una relación definida en un conjunto A. Establecer si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar

1. Si $\mathscr{R}$ es reflexiva entonces $\mathscr{R}^{-1}$ es reflexiva.
2. Si $\mathscr{R}$ es simétrica entonces $\mathscr{R}\cap\mathscr{R}^{-1} \neq \emptyset$.
3. Si $\mathscr{R}$ no es simétrica entonces $\mathscr{R}$ es antisimétrica.

Ejercicio 11. Considere en el conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ la relación $\mathscr{R}$ definida por $(n,m)\mathscr{R}(s,t)$ si y sólo si $n \leq s$.

Analice las propiedades de esta relación ¿Es de orden? ¿Puede dar otra relación con la que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ resulte ordenado?

Ejercicio 12. Sea E un conjunto y $\mathscr{R}$ la relación definida en $\mathscr{P}(E)$ por $A\mathscr{R}B$ si y sólo si $A \subset B$.

Demostrar que $(\mathscr{P}(E),\mathscr{R})$ es un conjunto ordenado.

1. ¿Cuáles son los elementos maximales y cuáles los minimales?
2. Consideremos ahora el conjunto $\mathscr{P}(E) - \{\emptyset\}$ con el orden inducido por $\mathscr{R}$, ¿cuáles serán ahora los elementos minimales?

Ejercicio 13. Sea $A = \{x \in \mathbb{N} \ : \ 1 \leq x \leq 10\}$ y sean $\mathscr{R}$ y $\mathscr{T}$ dos relaciones de orden definidas en A dadas por

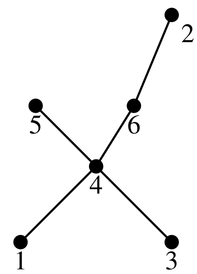
a) $a\mathscr{R}b$ si y sólo si a divide a b.

b) $a\mathscr{T}b$ si y sólo si a es múltiplo de b.

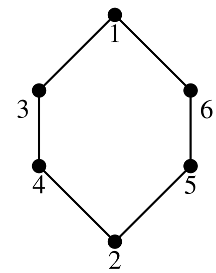
1. Demostrar que son ambas relaciones de orden en A.
2. Hacer el diagrama de Hasse y hallar los elementos maximales y los elementos minimales para cada una de las relaciones.
3. Idem inciso anterior con $A' = A - \{1\}$.

Ejercicio 14. Demostrar que si a es primer elemento de un conjunto ordenado (A, $\prec$), entonces a es el único minimal de A.

Ejercicio 15. Considerar el conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ ordenado con dos relaciones representadas en los siguientes diagramas:



Orden 1



Orden 2

En cada caso:
- Hallar los elementos minimales y maximales. Primer y último elemento.
- Hallar cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, primer y último elemento del subconjunto $\{4,5,6\} \subset A$.
- Determinar un subconjunto que sea totalmente ordenado con el orden inducido.

Ejercicio 16. Sea $A = \{a,b,c,d\}$,

1. Sea $\{\{a\},\{b,c\},\{d\}\}$ una partición de A. Obtener la relación de equivalencia asociada.
2. ¿$\mathscr{S} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(b,c),(b,a),(c,a)\}$ es una relación de equivalencia?
3. Hallar dos relaciones de equivalencias en A ¿Cuántas se pueden definir?

> *NOTA: en general, para calcular el número de diferentes particiones de un conjunto A de n elementos se calcula, para cada $1 \leq k \leq n$, el número de de particiones de A que tienen k subconjuntos. Ese número se nota $S(n,k)$ y es llamado número de Stirling de segunda especie. Es claro que entonces, el número total de particiones (y por lo tanto, relaciones de equivalencia distintas en A) es $\sum_{k=1}^{n} S(n,k)$.*
> *Los números $S(n,k)$ en cierta forma se comportan como los números $\binom{m}{n}$ que vimos en combinatoria: pueden hallarse mediante una fórmula de recurrencia. Pueden buscar en textos o apuntes en internet para saber más de ellos.*

Ejercicio 17. (Construcción de $\mathbb{Z}$ como conjunto cociente) Sea $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Se define en $A = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ la relación $\mathscr{R}$ por:

$$(n,m)\mathscr{R}(n',m') \text{ si y sólo si } n+m' = n'+m.$$

Probar que es una relación de equivalencia en A. Hallar la clase del elemento $(1,3)$.

Mostrar que puede identificarse cada clase de equivalencia con un número entero diferente.

Ejercicio 18. (Construcción de $\mathbb{Q}$ como conjunto cociente) Sea $\sim$ una relación definida en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ dada por:

$$(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc$$

Probar que $\sim$ es de equivalencia. Hallar la clase de equivalencia del elemento $(-1,4)$.

Mostrar que puede identificarse cada clase de equivalencia con un elemento $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

Ejercicio 19. En el conjunto $\mathbb{Z}$ se define la relación xRy si y sólo si $x^2 - y^2 = x - y$. Probar que es relación de equivalencia y hallar el conjunto cociente.

Ejercicio 20. Sea $\mathscr{R}$ la relación en $\mathbb{R}$ definida por

$$x\mathscr{R}y \text{ si y sólo si } (x-1)^2 = (y-1)^2.$$

Probar que es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$. ¿Cuál es la partición de $\mathbb{R}$ asociada a esta relación?