Algebra (UNLP)

Roberth Marcano

17 de agosto de 2023

Índice general

Capítulo 1

Logica

1.1. Escribir en el lenguaje simbólico – Tablas de verdad

El propósito de los siguientes ejercicios es familiarizarnos con la notación simbólica del cálculo proposicional y con el uso de esquemas y cuantificadores. Además, es importante que ejerciten el hacer tablas de verdad para poder establecer después el valor de verdad de proposiciones compuestas a partir del valor de las proposiciones atómicas que las integran.

Ejercicio 1. Determinar si los siguientes enunciados son proposiciones. Escribir en lenguaje simbólico aquellos que sean proposición e indicar su valor de verdad. Y si algún enunciado no es proposición, explicar porqué.

1. 8 es par y 6 es impar.

   Son proposiciones, llamando a las proposiciones como $p =$ 8 es par y $q =$ 6 es impar. Construimos la tabla de verdad para la preposición. **Recordamos** $\wedge$ es la **conjunción** o ȳ".

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

   Encontramos que la proposición es inequívocamente falsa, debido a los valores de p y q.

2. 8 es par o 6 es impar.

   Es una proposición. Llamando $p =$ 8 es par y $q =$ 6 es impar, a su vez **recordando** a la **disyunción** u .ºçomo $\vee$, tenemos:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

   Así, encontramos que la proposición es verdadera y se cumple cuando p es verdadera o q es falsa.

3. 4 es par y 2 no divide a 5.

   Es proposición. Llamando $p =$ 4 es par y $q =$ 2 no divide a 5. Se trata de una conjunción, por lo tanto,

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

   Y la proposición será verdadera siempre y cuando ambas afirmaciones sean correctas.

4. $x < 2$.

   No es una proposición, esto se debe a que no es posible determinar el valor de verdad de la expresión sin antes fijar un valor a la variable x.

5. Si 8 es par y 6 impar, o bien 4 es par o 2 divide a 8.

   Es una proposición. Nombramos a las proposiciones como:

   $$\begin{array}{ll} p = \text{ 8 es par} & q = \text{ 6 es impar} \\ r = \text{ 4 es par} & s = \text{ 2 divide a 8} \end{array}$$

   La proposición tendrá la forma: $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$ y la tabla de verdad es:

p	q	r	s	$p \wedge q$	$r \vee s$	$(p \wedge q) \to (r \vee s)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F	V

Para la misma se utilizo la definición de tabla de verdad del **condicional** $\to$ que tiene la forma:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Y por lo tanto, concluimos que la proposición será siempre verdadera cuando q sea falsa.

6. Hace frío.

   No es una proposición, se trata de una opinión subjetiva, implicando que no puede cuantificarse su valor de verdad.

7. 10 es múltiplo de 5 pero no de 3.

   Es una proposición. Llamando las proposiciones $p =$ 10 es múltiplo de 5 y $\neg q =$ 10 es multiplo de 3. Construimos la tabla de verdad

p	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
V	F	F
V	V	V
F	F	F
F	V	F

Encontramos que es verdad siempre que p sea verdad y q falso.

Ejercicio 2. Dadas la siguientes proposiciones, reescribirlas utilizando “necesario” y “suficiente”.

1. Si un número es múltiplo de 3 entonces su cuadrado es múltiplo de 9.

   Reescribiendo como condicional y recordando que, la estructura es: p es *suficiente* para q, o, q es *necesaria* para p. Así, llamando $p =$ un número es múltiplo de 3 y $q =$ su cuadrado es múltiplo de 9. Las dos formas son:

   - Un número múltiplo de 3 es *suficiente* para que su cuadrado sea múltiplo de 9.
   - Si el cuadrado de un número es múltiplo de 9 es *necesario* que el número sea múltiplo de 3

2. Un número es múltiplo de 4 sólo si es divisible por 2.

   Llamando $p =$ número es múltiplo de 4 y $q =$ divisible por 2. Entonces,

   - Si un número es múltiplo de 4 es *suficiente* para que sea divisible por 2.
   - Si un número es divisible por 2 es *necesario* que el múltiplo del número sea 4

3. Un número es múltiplo de 7 si es múltiplo de 21.

   Llamando $q =$ número es múltiplo de 7 y $p =$ número múltiplo de 21, utilizando la estructura detallada previamente, las oraciones son

   - Si un número es múltiplo de 21 es *suficiente* para que sea múltiplo de 7
   - Un número es múltiplo de 7 es necesario que sea múltiplo de 21.

4. Enunciar el recíproco, el contrarrecíproco y el contrario del enunciado en b).

   Recordando que el **recíproco** es $q \to p$ si $p \to q$, el **contrarrecíproco** es $\neg q \to \neg p$ y el **contrario** es $\neg p \to \neg q$. De esta manera, tenemos que las expresiones son:

   - **Recíproco:** Un número es divisible por 2 si es múltiplo de 4.
   - **Contrarrecíproco:** Si un número no es divisible por 2 entonces no es múltiplo de 4.
   - **Contrario:** Un número no es múltiplo de 4 si no es divisible por 2.

Ejercicio 3. Construir las tablas de verdad de las siguientes fórmulas y clasificarlas en tautologías ,contradicciones y contingencias.

1. $\neg p \to (q \vee \neg p)$

   La tabla de verdad correspondiente es

$\neg p$	q	$q \vee \neg p$	$\neg p \to (q \vee \neg p)$
F	V	V	F
F	F	F	V
V	V	V	V
V	F	V	V

   Debido a que su veracidad depende los valores de las proposiciones, concluimos que es una **contingencia.**

2. $((p \wedge q) \to p) \to q$

   Repitiendo el procedimiento previo,

p	q	$q \wedge p$	$(p \wedge q) \to p$	$((p \wedge q) \to p) \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

   Se trata de una contingencia.

3. $(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$

   Construimos la tabla de verdad

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to q$	$\neg q \to p$	$(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V

Debido que en todos los casos siempre se llega al mismo resultado de verdad y que el mismo es Verdad, concluimos que se trata de una tautología.

4. $((p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)) \leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge \neg q))$

   Llamando $P = ((p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)) \leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge \neg q))$, construimos la tabla.

p	q	r	$p \wedge q$	$r \wedge \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg r \wedge \neg q$	$(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)$	$(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge \neg q)$	P
V	V	V	V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F	F	V	F	F
V	F	F	F	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	V	V	F	V	F

Encontramos que se trata de una contingencia.

1.2. Esquemas lógicos - Cuantificadores

Ejercicio 4. Simbolizar utilizando universo, esquemas, cuantificadores y conectivos lógicos:

1. Todos los números son enteros.

   Definiendo un universo con todos los números enteros $\mathbb{N}$, entonces:

   $$(\forall n)(P(n)) \qquad : P(n) = n \text{ pertence a } \mathbb{Z}$$

2. Existen números impares o no todos los números son pares.

Definiendo los números $n \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{Z}$. Llamando a las proposiciones $p = n$ impar y $q = m$ par, construimos la proposición

$$p \vee \neg q$$

De esta manera, la expresión simbólica es

$$(\exists n)(\forall m)(p \vee \neg q)$$