Álgebra (FHOM) **Año 2023**

Guía de trabajos prácticos 1: Lógica

En esta primera guía de ejercicios trabajaremos en lo que será nuestra base para la matemática formal: la *lógica de primer orden* y el *cálculo proposicional*. Es fundamental entender los conceptos básicos y aprender a trabajar con ellos, ya que nos ayudarán a aprender a pensar, leer y escribir matemática; de hecho, en todo lo que veremos durante la materia (y lo que sea que vean ustedes en cualquier otra materia de matemática) se sustenta en el formalismo lógico: al verificar que los pasos de una demostración sean correctos, al "negar" de forma correcta una expresión cuando intentamos hacer una prueba "por el absurdo",etc.

Escribir en el lenguaje simbólico – Tablas de verdad

El propósito de los siguientes ejercicios es familiarizarnos con la notación simbólica del cálculo proposicional y con el uso de esquemas y cuantificadores. Además, es importante que ejerciten el hacer tablas de verdad para poder establecer después el valor de verdad de proposiciones compuestas a partir del valor de las proposiciones atómicas que las integran.

Ejercicio 1. Determinar si los siguientes enunciados son proposiciones. Escribir en lenguaje simbólico aquellos que sean proposición e indicar su valor de verdad. Y si algún enunciado no es proposición, explicar porqué.

a) 8 es par y 6 es impar

b) 8 es par o 6 es impar

c) 4 es par y 2 no divide a 5.

d) $x < 2$.

e) Si 8 es par y 6 impar, o bien 4 es par o 2 divide a 8.

f) Hace frío.

g) 10 es múltiplo de 5 pero no de 3.

Ejercicio 2. Dadas la siguientes proposiciones, reescribirlas utilizando "necesario" y "suficiente".

a) Si un número es múltiplo de 3 entonces su cuadrado es múltiplo de 9.

b) Un número es múltiplo de 4 sólo si es divisible por 2.

c) Un número es múltiplo de 7 si es múltiplo de 21.

Enunciar el recíproco, el contrarrecíproco y el contrario del enunciado en b).

Ejercicio 3. Construir las tablas de verdad de las siguientes fórmulas y clasificarlas en tautologías ,contradicciones y contingencias

a) $\sim p \to (q \vee \sim p)$

b) $((p \wedge q) \to p) \to q$

c) $(\sim p \to q) \to (\sim q \to p)$

d) $((p \wedge q) \vee (r \wedge \sim q)) \leftrightarrow ((\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim r \wedge \sim q))$.

Esquemas lógicos – Cuantificadores

Ejercicio 4. Simbolizar utilizando universo, esquemas, cuantificadores y conectivos lógicos:

a) Todos los números son enteros.

b) Existen números impares o no todos los números son pares.

c) Para todo par de números reales, si su producto es uno entonces uno es el inverso del otro.

d) Dado dos números reales, existe un número real mayor a la suma de ambos.

Nota: Recuerden que para chequear que un esquema esté bien definido podemos pensar lo siguiente: ¿qué pasa cuando reemplazamos la/s variable/s ('x', 'y', etc) por un/unos elemento/s cualquiera del universo? Si el resultado es siempre una proposición, entonces estamos bien.

Ejercicio 5. Escribir en el lenguaje corriente las siguientes proposiciones, siendo el universo el conjunto de números reales y los esquemas definidos como sigue:

$p(x)$: x es par

$q(x)$: x es divisible por 2

$r(x) : x > 0$

$p(x,y) : y > x$

$q(x,y) : x + y = 0$

a) $(\forall x)(p(x) \to q(x))$

b) $(\exists y)(\forall x) p(x,y)$

c) $(\forall x)(\exists y) p(y, x+3)$

d) $(\forall x)\Big(r(x) \to (\exists y)(\sim r(y) \wedge q(x,y))\Big)$

Implicaciones y leyes de equivalencia

Es importante incorporar y aprender a manejar las equivalencias e implicaciones lógicas que veremos a continuación. Son de utilidad para simplificar y operar de forma más efectiva con proposiciones y esquemas proposicionales más complejos. Como los enunciados en matemática son de la forma "si pasa tal cosa"(hipótesis), "entonces pasa tal otra"(conclusión), es fundamental que incorporen las equivalencias lógicas necesarias para la negación de una implicación o condicional $p \to q$. Además, como muchas veces nuestras propiedades son enunciados cuantificados, es igual de fundamental que incorporen las equivalencias lógicas que se usan para negar cuantificadores.

Las siguientes son algunas equivalencias lógicas:

1. **Doble negación:** $p \iff \sim(\sim p)$
2. **Leyes conmutativas:** $p \wedge q \iff q \wedge p$ y $p \vee q \iff q \vee q$
3. **Leyes asociativas:** $(p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r)$ y $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$
4. **Leyes distributivas:** $(p \vee q) \wedge r \iff (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ y $(p \wedge q) \vee r \iff (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
5. **Leyes de De Morgan:** $\sim(p \vee q) \iff \sim p \wedge \sim q$ y $\sim(p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q$
6. **Ley de implicación:** $p \to q \iff \sim p \vee q$

Ejercicio 6.

a) Probar las equivalencias de 5, mostrando que las proposiciones que se obtienen reemplazando $\Longleftrightarrow$ por $\leftrightarrow$ son tautologías.

b) Deducir la equivalencia de la implicación con el contrarrecíproco: $p \to q \Longleftrightarrow \sim q \to \sim p$.

Las siguientes son algunas implicaciones lógicas, que incorporaremos como herramientas para hacer pruebas más complejas:

1. **Adición:** $p \implies (p \vee q)$
2. **Simplificación:** $(p \wedge q) \implies p$
3. **Modus Ponens:** $p \wedge (p \to q) \implies q$
4. **Modus Tolens:** $(p \vee q) \wedge \sim p \implies q$
5. **Silogismo hipotético:** $(p \to q) \wedge (q \to r) \implies p \to r$.

Ejercicio 7. Probar las implicaciones 3 y 5, mostrando que las proposiciones que se obtienen reemplazando $\implies$ por $\to$ son tautologías.

Negación de cuantificadores y condicionales

Teniendo en cuenta las equivalencias:

$$\sim (\forall x)p(x) \Longleftrightarrow (\exists x)(\sim p(x)) \quad \text{y} \quad \sim (\exists x)p(x) \Longleftrightarrow (\forall x)(\sim p(x))$$

Ejercicio 8. Encontrar expresiones equivalentes para la negación de los esquemas del ejercicio 5

Ejercicio 9. A partir de la leyes de equivalencia, probar la siguiente equivalencia para la negación de una implicación: $\sim (p \to q) \Longleftrightarrow p \wedge \sim q$

Ejercicio 10. Definir universo y esquemas para simbolizar la siguiente proposición:

Para todo par de números reales, si su suma es 16 y su producto es 9, entonces uno de ellos es 5

Negar la proposición anterior en forma simbólica y traducirla al lenguaje coloquial.

Actividad adicional: Reglas de inferencia y razonamientos válidos

Una aplicación directa de lo visto anteriormente es poder verificar si un razonamiento dado es válido desde el punto de vista formal. En matemática, es usual presentar los resultados (teoremas, proposiciones, corolarios, etc.) mediante un procedimiento deductivo: a partir de ciertas premisas, deducimos una tesis o conclusión. Es importante poder chequear que los pasos lógicos de ese procedimiento deductivo sean correctos.

Dado un grupo de proposiciones $H_1, H_2, \ldots H_k$ que llamamos **hipótesis** o **premisas** y una proposición C que llamamos conclusión, decimos que la inferencia $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_k \implies C$ es válida si tenemos que $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_k \to C$ es una tautología.

A una inferencia que es válida se la denomina *teorema*. Un razonamiento inválido es una *falacia*.

Notación: notaremos $H_1, H_2, \ldots H_k / C$ a un razonamiento en donde las hipótesis son $H_1, H_2, \ldots, H_k$ y la conclusión es la proposición C.

Por ejemplo, de las implicaciones lógicas, tenemos la regla de inferencia de Modus Ponens: $p, p \to q \,/\, q$.

Las equivalencias e implicaciones lógicas y las reglas de inferencia nos permiten verificar la validez de un razonamiento sin necesidad de hacer tablas de verdad muy grandes para verficar si es tautología o no la implicación.

Ejemplo 1: Si queremos verificar la veracidad del razonamiento: $(l \wedge p) \to (\sim m), (l \wedge m) \,/\, (\sim p)$, podemos listar las premisas e ir agregando las que vamos obteniendo por equivalencias o por inferencias lógicas, hasta llegar a la conclusión:

1. $(l \wedge p) \to (\sim m)$ (Premisa)
2. $(l \wedge m)$ (Premisa)
3. m (simplificación en 2.)
4. $(\sim (\sim m))$ (equivalencia de la doble negación en 3.).
5. $(\sim (l \wedge p))$ (Modus Tollens 1. y 4.).
6. $((\sim l) \vee (\sim p))$ (equivalencia (De Morgan) en 5.)
7. $(l \to (\sim p))$ (equivalencia del condicional en 6.)
8. l (simplificación en 2.)
9. $(\neg p)$ (Modus Ponens en 8. y 7.)

Desde ya que no hay una única forma de ir realizando estos pasos!

Ejemplo 2: Si ahora tenemos el razonamiento: $\sim p \to (q \wedge r), q \wedge p \,/\, \sim r$, podemos verificar que $(\sim p \to (q \wedge r)) \wedge (q \wedge p) \to \sim r$ no es una tautología, simplemente tomando como valor de verdad V para p, q y r. Por lo que el razonamiento es una falacia.

Ejercicio 11. Verificar si los siguientes razonamientos son teoremas o falacias:

a) $(\sim p) \to (q \wedge r),\ q \wedge r \,/\, \sim r$

b) $p \to \sim q,\ (\sim r) \to p,\ q \,/\, r$

Ejercicio 12. Escribir simbólicamente las premisas y conclusión del siguiente razonamiento y analizar su validez:

"Si voy a cursar, no puedo mirar la tele. Miro la tele o apruebo el examen. Fui a cursar, por lo tanto, aprobé el examen."