Guía de trabajos prácticos 2: Teoría de Conjuntos

Los aspectos básicos de la Teoría de Conjuntos que estudiaremos en la materia y trabajaremos en esta guía son útiles porque nos permiten establecer un marco riguroso para desarrollar el estudio de los conjuntos numéricos que conocemos, y otras estructuras algebraicas de una manera formal.

A lo largo de estos ejercicios iremos aplicando lo visto en lógica: todo lo que hemos trabajado en relación a las reglas de inferencia, a las equivalencias lógicas, a los razonamientos válidos, etc, será ahora una herramienta indispensable para demostrar teoremas y propiedades de conjuntos.

Recordemos brevemente las notaciones que utilizamos para algunos conjuntos numéricos y que aparecen en esta práctica:

- El conjunto de **números reales**, que notamos por $\mathbb{R}$.
- El conjunto de **números enteros**, que notamos por $\mathbb{Z}$.
- El conjunto de **números naturales**, que notamos por $\mathbb{N}$.

Utilizando la notación de conjuntos, tenemos que se dan las inclusiones siguientes: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

Definición por extensión y comprensión - Conjunto vacío

En esta primer tanda de ejercicios trabajamos con el concepto de conjunto y su definición: tanto por extensión –exhibiendo la lista de sus elementos- como por comprensión -en donde se especifica una (o varias) propiedades que debe cumplir un elemento para pertenecer al conjunto en cuestión-. Es importante notar que podemos definir de muchas formas a un mismo conjunto por comprensión (¡incluso al conjunto vacío!).

Ejercicio 1. Definir los siguientes conjuntos por extensión:

1. $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ divide a } 6\}$;
2. $B = \{k \in \mathbb{Z} : -5 < k < 10\}$;

Ejercicio 2. Definir por comprensión:

1. El conjunto de los números naturales **impares**.
2. El conjunto $C = \{4, 9, 16, 25, 36\}$;

Ejercicio 3. Determinar si $A = B$ en los siguientes casos:

a) $A = \{z \in \mathbb{Z} : z \text{ es impar }\}$ y $B = \{z \in \mathbb{Z} : \text{ existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } z = 2k+1\}$;

b) $A = \emptyset$ y $B = \{\emptyset\}$;

c) $A = \emptyset$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$;

d) $A = \{y \in \mathbb{N} : 0 < y < 1\}$ y $B = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y < 1\}$;

e) $A = \{-2, 0, 1, -1, 2, 3\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es un número entero y } -\frac{5}{2} \leq x < \sqrt{9}\}$

Inclusión de conjuntos - Subconjuntos

La relación inclusión nos sirve para "comparar" dos conjuntos; se trata de analizar si todos los elementos de uno son también elementos del otro. Es muy importante aprender a distinguir este concepto del de pertenencia y para eso es que trabajaremos los siguientes ejercicios. Recuerden que hay que tener mucho cuidado en no confundir los símbolos "$\in$" ("pertenece a") y "$\subset$" ("está incluido en").

Ejercicio 4. Sea $A = \{1,2,\{3\},\{1,2\},-1\}$, decir si son verdaderas o falsas las siguientes relaciones. Justifique.

a) $3 \in A$ b) $\{1,2\}$ es subconjunto de A c) $\{1,2\} \in A$
d) $\{3\} \subseteq A$ e) $\{\{3\}\} \subseteq A$ f) $\emptyset \in A$
g) $\{-1,2\} \subseteq A$ h) $\emptyset \subseteq A$ i) $\{1,2,-1\} \in A$

Ejercicio 5. Sean: $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } 7\}$ y $C = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } 21\}$.
Probar que:

1. $C \subset A$ y $A \neq C$
2. $C \subset B$ y $B \neq C$.

Ejercicio 6. Sea E el conjunto cuyos elementos son el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales y el conjunto $\mathbb{P}$ de los números naturales pares.
a) ¿Es $\{2,4,6\}$ subconjunto de E? b) ¿$\{\mathbb{N}\} \subset E$? c) ¿$N \subset E$?
d) ¿$\mathbb{P} \in E$? e) ¿$\emptyset \subset E$?
¡Justificar sus respuestas!

Ejercicio 7. Analizar la validez, en general, de la afirmación ***Si* B $\in$ A *y* C $\subset$ B, *entonces*** **C $\subset$ A** (Ayuda: el ejercicio anterior puede servir).

Conjunto de partes

El conjunto de partes es la "prueba de fuego" para detectar si estamos trabajando correctamente los conceptos de inclusión y pertenencia. Debemos comprender que la idea es que **pertenecer a** $P(A)$ *equivale a* **estar incluído en** A.

Ejercicio 8. Sea $A = \{a,b,c,d\}$

a) Hallar $P(A)$.
b) Decidir cuáles de las siguientes expresiones son verdaderas:
   1) $\{a\} \in A$ 2) $\{a\} \in P(A)$, 3) $\emptyset \in P(A)$, 4) $\emptyset \subset P(A)$, 5) $b \in P(A)$, 6) $\{a,\{b,c\}\} \in P(A)$.

Ejercicio 9.

1. Sea $A = \{1,\{2\},\{\emptyset\},\{1,2\}\}$, hallar $P(A)$.
2. Hallar: $P(\emptyset)$ y $P(P(\emptyset))$.

Ejercicio 10. Construir tres conjuntos A, B y C que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:
- $2 \in A$, • $\{1,2,3\} \in P(A)$, • $\{\{2\}\} \in P(A)$, • $\emptyset \in B$, • $\{6,\{10\}\} \subset B$, • $A \in C$, y
- $B \subset C$

Operaciones con conjuntos

Unión e intersección

La unión e intersección de conjuntos son dos operaciones binarias que nos permiten crear, a partir de un par de conjuntos, nuevos conjuntos. Es importante no confundirlas, tanto a las operaciones como a las notaciones que se emplean para indicarlas. También es importante relacionarlas con los conectivos disyunción y conjunción que vimos en lógica.

Ejercicio 11. Hallar la unión $A \cup B$ en los siguientes casos:

1. $A = \{x \in \mathbb{Z} : -2 \leq x \leq 8\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{Z} : -5 \leq x \leq 3\}$
2. $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x < 8\};$ $\quad B = \{x \in \mathbb{N} : 8 < x \leq 12\}$

Ejercicio 12. Hallar la intersección $A \cap B$ en los siguientes casos:

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 6\};$ $\quad B = \{y \in \mathbb{N} : 0 < y \leq 10\}.$
2. $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq 1/4\};$ $\quad B = \{z \in \mathbb{R} : -1 < z < 0 \text{ ó } 0 < z < 3\}.$

Ejercicio 13. Tomando los conjuntos: $A = \{1, 3, \{4, 5, 6\}, \{7\}\};$ $\quad B = \{3, 4, 5, b, c\};$

$C = \{0, b, \{c\}, 2, 3, 4\}$ y $D = \{\{1\}, \{2\}, \{7\}, b, c\},$

Hallar: $(A \cup B) \cap C$, $(A \cap B) \cup C)$, $D \cap C \cap B$, $A \cup (C \cup B)$, y $(A \cap B) \cup (C \cap D)$.

Complemento -Diferencia y Diferencia simétrica

Tomar complemento de un conjunto es la operación que nos queda para analizar. Es fundamental tener presente el universo respecto al cual complementamos (y que siempre lo indiquemos en los ejercicios). Vamos a trabajar en reconocer a las restantes operaciones (diferencia y diferencia simétrica) caracterizándolas a partir de las operaciones que ya estudiamos. Por ejemplo, podemos interpretar $A - B$ como la intersección de A con el complemento de B.

Ejercicio 14. Sean: $A = \{1, 2, 3\};$ $\quad B = \{3, 4, 1, b\};$ $\quad C = \{0, b, 2, 3\}.$

Hallar: $A - B$, $A - C$, $A - (C - B)$, $(A - B) - (A - C)$, $(A - B) - A$.

Nota: De ser necesario, considerar para este ejercicio como universo al conjunto $U = A \cup B \cup C$

Ejercicio 15. Hallar el complemento de $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x\}$ y de $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x\}$ considerando a $\mathbb{N}$ como universo para A y $\mathbb{R}$ como universo para B.

Ejercicio 16. Hallar $A \Delta B$ en los siguientes casos:

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\},$ $\quad B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 3\}$
2. A es el conjunto de los números enteros impares y B es el intervalo natural $\{n \in \mathbb{N} : 12 \leq n \leq 30\}$.

Ejercicio 17. Representar, utilizando diagramas de Venn, las siguientes propiedades que son válidas para conjuntos A, B y C. Tomar como universo $U = A \cup B \cup C$ en cada caso.

a) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

b) $A - B = (A \cup B) - B$

c) $A - B = A - (A \cap B)$

d) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

e) $A \Delta B = B \Delta A$

Producto cartesiano de conjuntos

En estos ejercicios vamos a trabajar con los conceptos de par ordenado y de producto cartesiano entre conjuntos. Estas ideas volverán a aparecer más adelante, cuando estudiemos relaciones y funciones entre conjuntos. Recuerden que el producto cartesiano entre A y B es un nuevo conjunto, que notamos $A \times B$, cuyos elementos son **pares ordenados** *de la forma (a,b), con componentes en A y B (o sea, con $a \in A$ y $b \in B$).*

Ejercicio 18. Hallar valores de x e y en $\mathbb{R}$ (si existen) para que los siguientes pares ordenados sean iguales:

1. $(5x-2,1)$; $(3,x-3y)$
2. $(x+3,4)$; $(2, x+y)$
   Estos pares ordenados, ¿a qué conjunto pertenecen?

Ejercicio 19. Para los siguientes conjuntos, $A=\{1,3\},\ B=\{w,u,1\},\ C=\{\emptyset,1\},\ D=\emptyset$ y $U=A\cup B\cup C\cup D$, determinar:

a) $A \times B$

b) $C \times A$

c) $A \times D$

d) $(A-B) \times C$

e) $(A-C) \times D$

f) $(B^c \cup C) \times A$

Ejercicio 20. Para los siguientes conjuntos, hallar y representar en el plano $A \times B$:

1. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{-1,5\}$.
2. $A=[0,1]$, $B=[-1,1]$.
3. $A=[0,4)$, $B=(-5,2]$

Ejercicios varios - Demostraciones de identidades con conjuntos

Dejamos para el final de la guía los ejercicios en donde debemos demostrar, rigurosamente, distintas propiedades e identidades, que involucran conjuntos. Es importante aquí que puedan relacionar lo visto en lógica: equivalencias lógicas, reglas de inferencia, etc., que permiten fundamentar los pasos en las demostraciones.

Acerca de las demostraciones.

Si tenemos que demostrar, por ejemplo, una inclusión $A \subset B$, notemos que, por definición, tenemos que deducir que cada elemento a que pertenezca a A debe pertenecer a B (en las identidades, es decir, si lo que tenemos que probar es una igualdad, hay que probar la **doble inclusión** entre los conjuntos).
Así, el esquema de una demostración de inclusión sería algo como:

"Sea $a \in A$, entonces $\ldots \longmapsto$ $\boxed{\text{incluir aquí todo el proceso de la demostración}}$ $\longmapsto \ldots$, así, podemos concluir que $a \in B$. Como a es un elemento arbitrario del universo U, podemos concluir que para todo $x \in U$, si $x \in A$ entonces $x \in B$ y por lo tanto, $A \subset B$ como queríamos demostrar"

Ahora bien, este enfoque que mencionamos arriba se corresponde a una demostración **directa** de $A \subset B$, pues partimos de la premisa $a \in A$ para llegar a la conclusión $a \in B$.
Podemos encarar una demostración de otras formas, utilizando las equivalencias lógicas :

$$p \to q \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\sim q) \to (\sim p) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\sim p) \vee q \tag{1}$$

Así, la segunda equivalencia nos permite encarar una demostración por el **contrarrecíproco**:

" Supongamos que $a \notin B$, entonces $\ldots \longmapsto$ $\boxed{\text{incluir aquí todo el proceso de la demostración}}$ $\longmapsto \ldots$, por lo tanto, podemos concluir que $a \notin A$. Como a es un elemento arbitrario del universo U, podemos concluir, por el contrarrecíproco, que $A \subset B$, como queríamos demostrar."

De la última equivalencia en (1), podemos encarar la demostración suponiendo que es falso lo que querermos demostrar (en este caso, eso sería afirmar que A no está incluido en B). Si negamos la proposición $(\forall a)(a \in A \to a \in B)$, esto equivale a afirmar que $(\exists a)(a \in A \wedge a \notin B)$.
Este último enfoque para la demostración es el método **por contradicción o por el absurdo**. Se llama así pues como lo que queremos probar es lo contrario de lo que supuestamente vale, deberíamos llegar a una proposición que es una contradicción (del estilo $(a \in A) \wedge (a \notin A)$).
Sería algo asi como:

"Supongamos, por el absurdo, que A no está incluido en B. Entonces, existe $a \in U$ tal que $a \in A$, pero $a \notin B$, pero entonces $\ldots \longmapsto$ $\boxed{\text{incluir aquí todo el proceso de la demostración}}$ $\longmapsto \ldots$, y se llega a la contradicción $\boxed{\text{inserte aquí la contradicción que se deduce de la demostración}}$. Por lo tanto, se deduce que $A \subset B$."

Ejercicio 21. Probar:

1. $\emptyset \cup A = A$.
2. $A \subset A \cup B$.
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
4. $A \cap B \subset A$
5. $A \cap A = A$
6. Elegir dos identidades del Ejercicio 17 y demostrarlas usando definiciones y propiedades de conjuntos.

¿ Cómo plantearía la demostración del ítem 4. por los tres métodos de demostración ?

Ejercicio 22. Siendo A, B y C conjuntos, demostrar que:

1. Si $A \subset B$ y $B \subset C$ y $C \subset A$ entonces $A = B = C$.
2. Si $X \subset \emptyset$ entonces $X = \emptyset$.
3. Si $C \subset A$ y $C \subset B$, entonces $C \subset A \cap B$.

Ejercicio 23. Demostrar que dados dos conjuntos A y B:

1. Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$
2. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$
3. Sean A y B dos conjuntos. Mostrar que $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$. Dar un ejemplo que muestre que no es cierta la igualdad de esos conjuntos en general.

   ¿Se anima a enunciar una condición que deberían cumplir A y B para que $P(A \cup B) \subset P(A) \cup P(B)$?