Guía de trabajos prácticos 5: Números Enteros

En esta guía trabajaremos con el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$, teniendo en cuenta sus operaciones básicas: suma y producto. Con esas dos operaciones **binarias**, que cumplen una serie de propiedades (asociatividad, conmutatividad, distributividad etc.), el conjunto de números enteros constituye lo que en álgebra se llama **anillo conmutativo con identidad**. Es fundamental incorporar los conceptos y los enfoques en las diferentes situaciones que se plantean en este tema (y en particular en los ejercicios de esta guía): a muchos los volveremos a ver cuando más adelante estudiemos anillos más generales, como el anillo de polinomios.

Divisibilidad - Algoritmo de la división

Uno de los conceptos más importantes en el estudio del anillo de enteros es el de divisibilidad: dados a y b enteros, la ecuación $b \cdot x = a$ no tiene siempre solución entera; la relación de divisibilidad (de a por b en este caso) surge cuando tal solución entera existe (y es única!) y la notamos $b|a$. En el caso general, la relación entre b y a queda determinada por el algoritmo de división: existen, y son únicos, enteros c y r (cociente y resto) tal que $a = b \cdot c + r$, con $0 \leq r < |b|$.

La siguiente lista de actividades tiene como objetivo que practiquen con las propiedades de la divisibilidad en los enteros y el algortimo de la división en general. Al buscar cociente y resto, deben estar atentos a la condición sobre el resto que pide el algoritmo de la división en $\mathbb{Z}$ ¡Es fundamental para la unicidad!

Ejercicio 1. Sean $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Analizar la validez de:

1. Si $a|(b \cdot c)$ entonces $a|b$ ó $a|c$
2. Si $a|(c+b)$ entonces $a|b$ ó $a|c$
3. Si $a|b$ y $c|b$ entonces $(a \cdot c)|b$
4. Si $a|b$ entonces $a|-b$ y $-a|b$
5. Si $a|b$ y $a|c$ entonces $a|(b+c)$ y $a|(b-c)$
6. Si $a|b$ entonces $a|(b \cdot c)$
7. Si $a|(c+b)$ y $a|b$ entonces $a|c$.

Si el enunciado es verdadero, demostrarlo utilizando la definición de divisibilidad. Si es falso, dar un contraejemplo.

Ejercicio 2. Usando que si a,b,c son enteros tales que $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(mb+nc)$, para todos $m,n \in \mathbb{Z}$, probar:

a) $3n-2|15n-10$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Si $3n-2|5n-8$, entonces $3n-2|15n-24$ ($n \in \mathbb{N}$)

c) Si $3n-2|5n-8$ entonces $3n-2|14$ (necesitará los incisos anteriores!).

d) Usando el item anterior, hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $3n-2|5n-8$.

(*Ayuda: usando el ítem d) y teniendo en cuenta que los divisores en $\mathbb{N}$ de 14 son 1,2,7 y 14, reducir las posibles opciones para los $n \in \mathbb{N}$ tales que $3n-2|5n-8$ a unos pocos y verificar para cuáles de ellos se cumple que $5n-8$ es múltiplo de $3n-2$*).

Ejercicio 3. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $3n-1|n+7$.

(*Ayuda: razonar como el ejercicio anterior para probar que, si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $3n-1|n+7$, entonces $3n-1|22$. ¿Cuáles son los divisores en $\mathbb{N}$ de 22?*)

Ejercicio 4. Dados los enteros a y b, hallar el cociente q y el resto r, tales que cumplan que $a = b \cdot q + r$, con $0 \leq r < |b|$

(a) $a = 135$ $b = 14$ (b) $a = -1234$ $b = 234$

(c) $a = -1245$ $b = -546$ (d) $a = 1001$ $b = -111$

Ejercicio 5. Siendo $a \in \mathbb{N}$, hallar el resto de dividir x por 42 en los siguientes casos:
1)$x = a\,42 + 86$ 2)$x = a\,42 - 61$
3)$x = a\,42 + 11$ 4)$x = a\,42 - 10$

Ejercicio 6. Sean a y b dos números enteros que tienen restos 5 y 8, respectivamente, en la división por 13. Hallar los restos de la división por 13 de los siguientes enteros:

1. $5a - 4b$
2. $a + b^2$
3. $(26b^2 - 39a^2)^{50}$

Ejercicio 7. El resto de la división de un número por 7 es 2; si se lo divide por 3, su resto es 1 ¿Cuál es el resto si se lo divide por 21?

Ejercicio 8. Probar por inducción que:

1. $7^n - 1$ es divisible por 6, $\forall n, n \in \mathbb{N}$
2. $10^{n+1} + 10^n + 1$ es divisible por 3, $\forall n, n \in \mathbb{N}$

Ejercicio 9. Hallar el resto de dividir a por b en los siguientes casos: (usar binomio de Newton).

(i) $a = 4^{38} + 1$	$b = 3$
(ii) $a = 4^{1010101}$	$b = 5$
(iii) $a = 9^{32}$	$b = 7$
(iv) $a = 6^{55} + 1$	$b = 7$

Máximo Común Divisor y Algoritmo de Euclides

El cálculo del Máximo Común Divisor (MCD) entre dos enteros es de mucha utilidad para distintos problemas y situaciones en matemática. Por ejemplo, permite estudiar la existencia y caracterización del conjunto de soluciones enteras de ecuaciones del estilo $nx + my = c$, con n, m, c enteros. Hay distintas formas de calcular el MCD. En estos ejercicios practicaremos el método que nos provee el Algoritmo de Euclides, que se basa en el Algoritmo de la División.

Ejercicio 10. Calcular (a, b) y expresar los tres primeros como combinación lineal de a y b, siendo:

(a) $a = 47$	$b = 10$
(b) $a = 352$	$b = 16$
(c) $a = 12001$	$b = -12002$
(d) $a = n^2 + 1$	$b = n + 1$, con $n \in \mathbb{N}$

Ejercicio 11. Sean a, b enteros y $n \in \mathbb{N}$. Calcular:

1. $(a + 1, a)$;
2. $(a, a \cdot b + 1)$;
3. $(2^n - 7^n, 2^n + 7^n)$;

Ejercicio 12. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, demostrar:

1. Si $(a, b) = 1 \Longrightarrow (a, a + b) = 1$
2. Si $(a, b) = 1$ y $a | (b \cdot c) \Longrightarrow a | c$
3. Si $(a, b) = 1 \Longrightarrow (a, b \cdot c) = (a, c)$
4. $(a, b) = 1 \Longrightarrow (7a - 3b, 2a - b) = 1$
5. $(a, b) = 1 \Longrightarrow (2a - 3b, 5a + 2b) = 1$ ó 19.

Ejercicio 13. Determinar el conjunto de soluciones enteras de las siguientes ecuaciones:

1. $5x+8y=3$
2. $24x+14y=7$
3. $20x+16y=36$

Números primos y Teorema Fundamental de la Aritmética

Como sabemos, los números primos constituyen los "ladrillos fundamentales" de los números enteros: multiplicándolos, podemos construir (casi) cualquier número entero, y es el Teorema Fundamental de la Aritmética (TFA) quien nos garantiza la factorización única como producto de primos de todo entero no nulo $n \neq \pm 1$. El TFA también nos permite describir a todos los divisores de un entero dado y calcular el MCD entre dos enteros a partir de sus factorizaciones primas.

Ejercicio 14. Probar que un número natural n es compuesto si y solo si es divisible por algún primo positivo $p \leq \sqrt{n}$.

Ejercicio 15. ¿Son primos los siguientes números? Justifique su respuesta.
a) 91 b) 307 c)1001 d) $46^{104}-1$ e) $1000^{501}-4$

Ejercicio 16.

- Probar (usando inducción) que $a-b|a^n-b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a \neq b$ en $\mathbb{Z}$.
- Usar el item anterior para mostrar que si n es compuesto, 2^n-1 es compuesto.

  (Los primos de la forma 2^p-1 con p primo se llaman *primos de Mersenne*. No todos los enteros de la forma 2^p-1 con p primo son primos. Actualmente se conocen 51 primos de Mersenne, siendo el más grande 2^p-1 con $p=82589933$, que tiene más de 24 millones de cifras.)

Ejercicio 17.

a) Demostrar que no existen enteros m,n no nulos tales que $m^2 = 2\cdot n^2$.

b) Demostrar que no existen enteros r,s no nulos tales que $r^3 = 21\cdot s^3$.

Ejercicio 18. Calcular la cantidad de divisores positivos de $10^n \cdot 11^n$. Idem para $10^n \cdot 8^{n+1}$ y para 9.000.

Ejercicio 19. i)¿Cuál es el menor entero positivo que admite exactamente 6 divisores?
ii) Hallar $m \in \mathbb{N}$ con exactamente 10 divisores.
iii) Hallar $m \in \mathbb{N}$ con exactamente 25 divisores positivos y solo uno de ellos primo.

Ejercicio 20. Calcular $[a,b]$ en los siguientes casos:

(a) $a=1$	$b=384$
(b) $a=4$	$b=-4$
(c) $a=284$	$b=-13$
(c) $a=12001$	$b=-12002$
(d) $a=3^4\cdot 5^3\cdot 11\cdot 15$	$b=2^3\cdot 7^2\cdot 5^4$

Ejercicio 21. Encontrar todos los números enteros a y b que verifican que $(a,b)=54$ y $[a,b]=810$.