Álgebra (FHOM) **Año 2023**

Guía de trabajos prácticos 3: Números Naturales

En esta guía trabajaremos con el primer conjunto numérico que estudiamos en la materia: el de los números naturales. En realidad, nos enfocaremos en la propiedad distintiva de este subconjunto de $\mathbb{R}$: $\mathbb{N}$ es el **subconjunto inductivo más chico que tiene** $\mathbb{R}$.

Esta propiedad nos da el ingrediente clave en esta parte de la materia: **el principio de inducción**, que da paso a formalizar definiciones por recursividad, a dar demostraciones de ciertas proposiciones, etc.

Conjuntos inductivos

El conjunto de números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ *tiene la propiedad fundamental de que está contenido en todo subconjunto* H *de* $\mathbb{R}$ *que sea* **inductivo**. $H \subset \mathbb{R}$ *es inductivo si:*

- $1 \in H$
- *Si* $h \in H$, *entonces* $h+1 \in H$

Ejercicio 1. Decidir si los siguientes son o no subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$:

1. El conjunto de números enteros.
2. El intervalo real $(1, \infty)$
3. El conjunto $\{1\} \cup [2, \infty)$
4. El conjunto de números impares.
5. El conjunto $\{x : x^2 \leq 10^{10000}\}$

Ejercicio 2. Probar que si A y B son subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$, entonces $A \cap B$ también lo es. ¿qué puede decir de $A \cup B$?

Ejercicio 3. Usando que $\mathbb{N}$ es el menor subconjunto inductivo, probar que ningún real x en el intervalo $(1,2)$ pertenece a $\mathbb{N}$. (Sugerencia: considerar el conjunto inductivo $H = \{1\} \cup [2, \infty)$)

Sucesiones - Sumatorias - Productorias

El hecho de que $\mathbb{N}$ *sea inductivo nos permite definir* **recursivamente** *los símbolos* Σ *y* $\prod$ *para sumas y productos de una arbitraria cantidad de números (finita, claro).*

Por ejemplo, para la definición de $\sum_{j=1}^{n+1} a_j$ *necesitamos tener previamente definido* $\sum_{j=1}^{n} a_j$. *Otro ejemplo, para definir el factorial* $(n+1)!$ *partimos de conocer quién es* $n!$ *(al que luego le multiplicamos* $n+1$*).*

En el manejo de sumatorias y productorias es útil saber manipular las sucesiones : en particular, es importante que seamos capaces de proponer una fórmula para el término general de una sucesión en función de algunos términos, o calcular términos a partir de la fórmula general. También es fundamental que nos familiaricemos con la notación con subíndices en sucesiones y series. En particular, para poder reescribir una serie o una sucesión. También consideraremos sucesiones que son definidas recursivamente, es decir, un término definido a partir de los anteriores.

Esta parte de la práctica consta de varias situaciones en las que tienen que operar y manipular los índices de una sumatoria o productoria y trabajar con sucesiones.

Ejercicio 4. Escribir los primeros 5 términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = n^4 - 5n \qquad n = 1, 2, \ldots$

b) $b_j = x^j \cdot y^{-(j+1)} \qquad j = 1, 2, \ldots$ con x, y fijos.

c) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_m = (-2) \cdot a_{m-1} + a_{m-2}, \qquad m = 3, 4, \ldots$

Ejercicio 5. Dados los siguientes términos de una sucesión, proponer, en cada caso, una fórmula general adecuada para los mismos.

i) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots$

ii) $2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2, \cdots$

iii) $-2, 4, -6, 8, -10, \cdots$

iv) $\frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \cdots$

Ejercicio 6. Desarrollar las siguientes sumatorias:

1. $\sum_{j=4}^{7} \left(\frac{(j)^{j-1}}{(j-1)^{j+1}} \right)^{-1}$
2. $\sum_{k=1}^{5} a_k \cdot b_k$
3. $\sum_{k=1}^{5} (8+k)$

Ejercicio 7. Expresar las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria.

1. $\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{16}$
2. $1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} + \frac{1}{125}$
3. $a^4 b^0 + a^3 b^1 + a^2 b^2 + a^1 b^3 + a^0 b^4$

Ejercicio 8. Desarrollar los siguientes productos.

1. $\prod_{j=1}^{5} (-1)^j (j+1)$
2. $\prod_{j=2}^{4} a^j (b+j)$
3. $\prod_{k=1}^{4} -2$

Ejercicio 9. Expresar las siguientes multiplicaciones usando el símbolo de productoria.

1. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{21}$
2. $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdots b_h$ $\qquad$ h factores.
3. $\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{10}{20} \cdots$ $\qquad$ n factores.

Ejercicio 10. Expresar los siguientes productos utilizando factoriales:

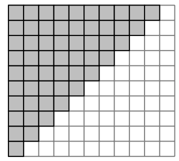
a) $11 \cdot 10 \cdot 9$ $\qquad$ b) $(r+2)(r+1)r(r-1)$ $\qquad$ c) $n \cdot 2n \cdot 3n \cdots n^2$ $\qquad$ d) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2000$

Ejercicio 11. Reescribir adecuadamente las siguientes sumatorias y productorias para obtener la igualdad en cada caso.

a) $\sum_{i=1}^{10} \frac{i}{i+2} = \sum_{i=2}^{\cdots} \cdots$ $\qquad$ b) $\prod_{j=2}^{m} \left(j^3 + j\right) = \prod_{j=\cdots}^{\cdots} \left((j+1)^3 + j + 1\right)$

Inducción

Ejercicio 12. Dado el siguiente diagrama



contar de dos formas distintas las celdas grises para mostrar que

$$\sum_{i=1}^{10} i = \frac{10\cdot 11}{2}$$

a) Deducir una fórmula general para $\sum_{i=1}^{n} i$ y demostrar su validez por inducción.

b) Usar el ítem anterior para deducir una fórmula general para $\sum_{i=1}^{n} 2i$ y demostrar su validez por inducción.

d) Calcular

i) $\sum_{i=1}^{n}(3i+1)$ ii) $\sum_{i=5}^{20} 2(i-4)$ iii) $1+3+5+7+\cdots+(2n+1)$

Ejercicio 13. *(Sumas de cuadrados y cubos)* Probar que para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene

i) $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ii) $\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Ejercicio 14. Probar que:

1. $\sum_{i=1}^{n} i\cdot 2^{i-1} = 1+(n-1)\cdot 2^n,$ para todo $n\in\mathbb{N}$.
2. $\sum_{i=1}^{n} \frac{-1}{4(i-1)^2-1} = \frac{n}{2n-1},$ para todo $n\in\mathbb{N}$
3. $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right) = \frac{1}{n},$ para todo $n\geq 2$
4. $\sum_{i=1}^{n} i\cdot i! = (n+1)!-1,$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Ejercicio 15. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Probar por inducción que $\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i) = a_{n+1}-a_1$

Utilizar este resultado para calcular $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$ (*Sugerencia:* $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$)

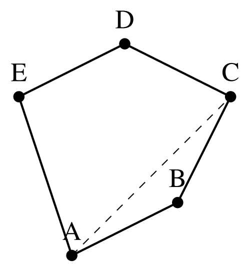
Ejercicio 16. (*Desigualdades*) Probar por inducción:

1. Dado $a>-1$, $(1+a)^n \geq 1+na$, $\forall n\geq 1$.
2. $(m+1)! \geq 2\cdot m!$ $\forall m\geq 1$
3. $6^n \geq 1+4^n$ $\forall n\geq 1$
4. $3^n \geq 3n$ $\forall n\geq 1$

El siguiente ejercicio nos muestra que el método de inducción también nos permite demostrar resultados en geometría plana:

Un **polígono convexo** es una figura plana formada por finitos segmentos rectos que encierran una región en el plano (*polígono*) que tiene la propiedad de que todas las **diagonales** (es decir, los segmentos que unen los vértices del polígono) quedan completamente contenidos en la región encerrada (*convexo*).

En la siguiente figura, tenemos un polígono convexo de 5 lados con una de sus diagonales (el segmento AC) dibujada.



Ejercicio 17. Probar por inducción en el número de lados que, para todo $n \geq 3$ vale que

a) El número de diagonales de un polígono convexo de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$.

b) La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es $(n-2) \cdot 180°$.

(Ayuda: El caso base es considerar triángulos, por lo que es un caso fácil de tratar, verdad?. Para poder usar la hipótesis inductiva, miren el gráfico de arriba: al trazar una diagonal como la del dibujo, y "cortar" el triángulo ABC, nos queda un polígono convexo con un lado menos, se dan cuenta?)

Sucesiones definidas por recursividad - Principio de inducción fuerte

Las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas en forma recursiva son aquellas en las cuales, a partir de cierto n_0, para $n \geq n_0$, el término a_n se define en función de uno o más términos previos.

Ejemplos básicos de sucesiones definidas por recursividad son las **geométricas** *y las* **aritméticas***, en donde cada término (salvo el primero) se define en función del término precedente multiplicando (geométricas) o sumando (aritméticas) una constante dada.*

Si se tiene una propuesta para término general de estas sucesiones, el método inductivo nos permite validarla. Dependiendo de la definición recursiva necesitaremos inducción simple o fuerte para esta demostración.

Sucesiones geométricas y aritméticas

- Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice **geométrica** si cada término a_n (con $n \geq 2$) se obtiene multiplicando al término a_{n-1} por una constante r (llamada razón).
- Una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice **aritmética** si cada término b_n (con $n \geq 2$) se obtiene sumando a l término b_{n-1} por una constante d (llamada diferencia).

Ejercicio 18. Dar una fórmula general para $n \geq 2$ para una sucesión geométrica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de razón r y probar su validez por inducción. Hacer lo mismo con una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, aritmética de diferencia d.

Ejercicio 19. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión geométrica de razón $r \neq 1$.

Probar por inducción que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1}$. ¿Qué sucede si $r = 1$?

Deducir que, si $r \neq 1$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} r^{j-1} = \frac{r^n - 1}{r-1}$.

Ejercicio 20. Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión aritmética de diferencia d. Dar una fórmula para la suma de los primeros n términos, $\sum_{j=1}^{n} b_j$ y probar su validez por inducción.

Ejercicio 21. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente como $a_1 = 13$ y $a_{n+1} = 7a_n - 6^n$, $n \geq 1$.

Probar que $a_n = 7^n + 6^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 22. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por:

$$a_1 = 18, \quad a_2 = 170 \quad \text{y} \quad a_n = 18a_{n-1} - 77a_{n-2}, \quad \forall n \geq 3.$$

Probar que $a_n = 7^n + 11^n \quad \forall n \geq 1$

Ejercicio 23. Consideremos la **sucesión de Fibonacci** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida recursivamente por

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1 \quad \text{y} \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \qquad \forall n \geq 3.$$

Probar que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \forall n \geq 1.$$

Ejercicio 24. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales definida por $a_1 = 0$, $a_2 = 3$ y tal que $a_n = 9a_{n-2} \quad \forall n \geq 3$

Probar que

$$a_n = \frac{3^n + (-3)^n}{6} \quad \forall n \geq 1.$$

Ejercicio 25. Teniendo en cuenta las fórmulas para sumatorias halladas en esta práctica, calcular las siguientes sumas:

a) $\sum_{i=5}^{50} \frac{3}{2^i}$;

b) $\sum_{j=20}^{100} j2^j$;

c) $\sum_{s=4}^{15} (9+7s)$;

d) La suma de los primeros 100 naturales pares.

e) La suma de los impares entre 100 y 200.