Álgebra (FHOM) **Año 2023**

Guía de trabajos prácticos 4: Combinatoria

El objetivo de esta guía es ganar algo de práctica en el cálculo del **cardinal** de ciertos conjuntos finitos (es decir, contar cuántos elementos hay en determinado conjunto). Siendo más específicos, nos interesará contar la cantidad de combinaciones entre elementos de distintos conjuntos u ordenamientos de conjuntos o elementos. Este tipo de situaciones se da naturalmente cuando se calculan probabilidades en conjuntos muestrales finitos y en diversas ramas de la matemática discreta, como la teoría de grafos.

En la segunda parte de la guía trabajaremos sobre el número combinatorio y su rol en la fórmula del binomio de Newton.

Algunas cosas a tener en cuenta al plantear las disitintas situaciones que se presentan en los problema siguientes son:

- Verificar si el orden interesa en el conteo o no. Por ejemplo, no es lo mismo contar cuántas son todas las **ternas ordenadas de elementos distintos** de A que contar cuántos subconjuntos de tres elementos hay en A.
- Prestar atención a si los objetos que contamos se pueden repetir o no.
- Siempre que sea posible, haga un diagrama (con casilleros, diagramas de Venn, etc.) que ayude a visualizar el ejercicio.

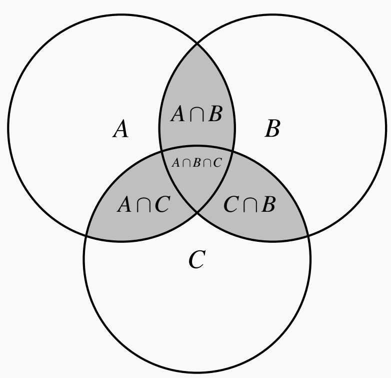
Cardinal de uniones de conjuntos

Notación: *notaremos por $|A|$ al cardinal del conjunto A, es decir, la cantidad de elementos que pertenecen a A.*

En los siguientes ejercicios de conteo, el propósito es calcular el cardinal de uniones de conjuntos que tengan intersección no vacía (qué pasa con el cardinal de la unión de dos conjuntos si su intersección es vacía?). Aquí hay que tener cuidado de no contar más de una vez a los elementos que están en las intersecciones!

Ejercicio 1. Un grupo de 30 amigos charlan sobre películas. 20 dicen haber visto Avatar y 15 afirman haber visto Blade Runner. Además, 7 dicen que vieron ambas pelćulas. ¿Hay alguien en el grupo que no haya visto ninguna de esas dos películas? ¿Cuántos son? (Ayuda: hagan el diagrama de Venn que represente a los conjuntos de personas que vieron cada película)

En el ejercicio anterior necesitamos relacionar el cardinal de $A \cup B$ con $|A|$, $|B|$ y $|A \cap B|$. En el caso en que tengamos tres conjuntos A, B y C:



para calcular el cardinal $|A \cup B \cup C|$ necesitaremos los cardinales de A, B y C y de sus intersecciones: $A \cap B$, $A \cap C$, $C \cap B$ y $A \cap B \cap C$.

Ejercicio 2. En base al diagrama de Venn de arriba, Calcular la cantidad de elementos que tiene $A \cup B \cup C$ si sabemos que $|A| = 5$, $|B| = 10$, $|C| = 9$, y además, conocemos el cardinal de las intersecciones: $|A \cap C| = 3$, $|A \cap B| = 3$, $|C \cap B| = 7$ y $|A \cap B \cap C| = 1$.

Con estos valores para los distintos cardinales: ¿ Cuál es el cardinal de $C-(A\cup B)$? (considerando como universo a $A\cup B\cup C$).

Ejercicio 3. Consideremos el conjunto $V=\{n\in\mathbb{N} : n\leq 1000\}$. Calcular cuántos elementos en V son o múltiplos de 2, o múltiplos de 3 o múltiplos de 5. (Ayuda: consideren $A=\{n\in V : n \text{ es múltiplo de } 2\}$, $B=\{n\in V : n \text{ es múltiplo de } 3\}$ y $C=\{n\in V : n \text{ es múltiplo de } 5\}$ y razonen como en el ejercicio anterior ¿Qué propiedad satisfacen los números en las distintas intersecciones?)

Variaciones y permutaciones

El principio del producto nos dice que si tenemos que calcular la cantidad de pares ordenados en $A\times B$, con $|A|=n$ y $|B|=m$ debemos multiplicar esas cantidades. Es decir,

$$|A\times B|=|A|\cdot|B|$$

Naturalmente esto se generaliza a cuando debemos contar cuántas k-uplas ordenadas podemos formar con elementos pertenecientes a k conjuntos finitos: nuevamente, multiplicamos los cardinales de los k conjuntos involucrados.

Esta propiedad cobra relevancia en los problemas de conteo en los cuales el ordenamiento de los objetos a contar juegue un papel importante.

Ejercicio 4. Una contraseña de 64 bits tiene una longitud de 64 caracteres **binarios**, es decir, que valen 0 o 1 ¿Cuántas contraseñas de 64 bits distintas se pueden formar?

Ejercicio 5. Juan olvidó la clave de 4 dígitos del cajero. Lo único que recuerda es que son números distintos y que seguro **no** aparecen en la clave los dígitos 4, 5, 9 y 0.

-Con esos datos: ¿Cuántas claves distintas puede intentar para hallar la correcta?

-Cree recordar que además la clave empezaba y terminaba con un dígito impar ¿Cuál es el número de combinaciones posibles para probar en este caso?

Ejercicio 6. ¿Cuántos anagramas de la palabra MONEDA se pueden formar? ¿Cuántos que tengan la letra M en el tercer lugar? ¿Cuántos en los que aparezca la secuencia MO? ¿Cuántos en la que no aparezca la secuencia MO? ¿Cuántos en los que las letras M, N y O aparezcan juntas?

(*Por ejemplo, con RIO podemos formar 6 anagramas: RIO, ROI, IRO, IOR, ORI y OIR*)

Ejercicio 7. ¿Cuántos anagramas de la palabra MATEMATICA se pueden formar? ¿Cuántos que no comiencen con M? ¿Cuántos que comiencen y terminen con la misma letra?

(*Ojo con las letras que se repiten: no contar más de una vez algún anagrama.*)

Ejercicio 8. ¿De cuántas formas pueden apilarse 6 remeras y 6 buzos

a. sin restricciones;

b. en forma alternada;

c. las remeras primero y los buzos después;

d. primero tres remeras, luego los 6 buzos y finalmente las restantes 3 remeras.

Ejercicio 9. Se dispone de 10 libros de Matemática, 5 de Física y 8 de Astronomía.

a. ¿De cuántas maneras pueden ordenarse en un estante si los de una misma materia deben estar juntos entre sí

b. ¿De cuántas si los de Astronomía deben estar juntos entre sí? (sin importar qué sucede con los de las otras asignaturas)

Números combinatorios y Binomio de Newton

Para los siguientes ejercicios tener en cuenta que el número combinatorio (también llamado coeficiente binomial)

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \qquad \text{con } n \geq m \geq 0$$

nos permite contar cuántos subconjuntos de un conjunto A tienen determinado cardinal (ver los apuntes de la teoría y el ejercicio que sigue). Es por esto que resulta natural que el número combinatorio sea de utilidad cuando contemos en situaciones en donde no nos importa el orden.

Ejercicio 10. Un conjunto A consta de 20 elementos ¿Cuántos subconjuntos de A tienen 15 elementos? Si a es un elemento de A, ¿Cuántos de esos subconjuntos contienen a a?

Ejercicio 11. De un grupo formado por 6 astrónomas - entre las que se encuentran Paula y Pía- y 8 físicas - entre las que se encuentran Cristina e Inés - se quiere seleccionar 2 astrónomas y 3 físicas para fomar una comisión ¿De cuántas formas puede hacerse

1. sin restricciones?
2. si Paula y Pía no pueden estar juntas?
3. si Paula y Cristina no pueden estar juntas?
4. si Pía e Inés deben formar parte de la comisión?

Ejercicio 12. Veintidos artistas participan de una jornada de trabajo y deben formar dos equipos, ambos con igual número de integrantes; uno de ellos debe estar dirigido por Ema y el otro por Agustín:

1. ¿Cuántos equipos distintos pueden formarse?
2. ¿Cuántos equipos distintos si hay 3 artistas (particulares) que deben estar con Ema y 2 (también particulares) en el equipo de Agustín?

Ejercicio 13. Probar que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Binomio de Newton

En esta última parte trabajaremos con la fórmula del binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} a^k b^{n-k}$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Además de ser importante en sí misma, en ella los números combinatorios juegan un rol importante. Les sugerimos que repasen su demostración por inducción de los apuntes de teoría (otra sugerencia: intenten hacer ustedes la demostración y si se traban o no saben cómo seguir, miren sus apuntes).

Los últimos ejercicios nos muestran que podemos emplear la fórmula del binomio, con valores convenientes de a, b y n para calcular sumas de números combinatorios.

Tener en cuenta que es importante manejar correctamente la notación para las sumatorias que aparecen: a veces, tendremos que hacer un cambio de índice en una sumatoria, o calcular un sumando para un valor de índice en particular, etc.

Ejercicio 14. Hallar el término independiente de x en el desarrollo de $(x^2 - 2x^{-1})^{12}$.

Ejercicio 15. Determinar si existe n, tal que en el desarrollo de $(2+3b)^n$ el coeficiente de b^{12} es cuatro veces el coeficiente de b^{11}. En caso de que exista, hallarlo.

Ejercicio 16. Hallar los coeficientes que multiplican a x^3 y a x^{-9} en el desarrollo de $(2x^3 - \frac{3}{x})^9$

Ejercicio 17. Expresar la potencia cuarta del número 1,1 como la potencia de un binomio y evaluar (sin usar calculadora!)

Ejercicio 18. Evaluar las siguientes sumas (sin desarrollar los combinatorios):

1. $\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\cdots+\binom{6}{5}$.

2. $\binom{6}{0}-\binom{6}{1}+\binom{6}{2}-\binom{6}{3}+\cdots+\binom{6}{6}$.

Ejercicio 19. Probar que $\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}=4^n$ (Sugerencia: escribir la sumatoria como el desarrollo del binomio de Newton de $(a+b)^m$ para a, b y m adecuados).

Ejercicio 20. Probar que $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$ (Sugerencia: usar el Ejercicio 13 y cambiar adecuadamente el índice de sumación).