Algebra (UNLP)

Roberth Marcano

22 de agosto de 2023

Índice general

Capítulo 1

Logica

1.1. Escribir en el lenguaje simbólico – Tablas de verdad

El propósito de los siguientes ejercicios es familiarizarnos con la notación simbólica del cálculo proposicional y con el uso de esquemas y cuantificadores. Además, es importante que ejerciten el hacer tablas de verdad para poder establecer después el valor de verdad de proposiciones compuestas a partir del valor de las proposiciones atómicas que las integran.

Ejercicio 1. Determinar si los siguientes enunciados son proposiciones. Escribir en lenguaje simbólico aquellos que sean proposición e indicar su valor de verdad. Y si algún enunciado no es proposición, explicar porqué.

1. 8 es par y 6 es impar.

   Son proposiciones, llamando a las proposiciones como $p =$ 8 es par y $q =$ 6 es impar. Construimos la tabla de verdad para la preposición. **Recordamos** $\wedge$ es la **conjunción** o *ะ*".

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

   Encontramos que la proposición es inequívocamente falsa, debido a los valores de p y q.

2. 8 es par o 6 es impar.

   Es una proposición. Llamando $p =$ 8 es par y $q =$ 6 es impar, a su vez **recordando** a la **disyunción** u .ºçomo $\vee$, tenemos:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Así, encontramos que la proposición es verdadera y se cumple cuando p es verdadera o q es falsa.

3. 4 es par y 2 no divide a 5.

   Es proposición. Llamando $p =$ 4 es par y $q =$ 2 no divide a 5. Se trata de una conjunción, por lo tanto,

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

   Y la proposición será verdadera siempre y cuando ambas afirmaciones sean correctas.

4. $x < 2$.

   No es una proposición, esto se debe a que no es posible determinar el valor de verdad de la expresión sin antes fijar un valor a la variable x.

5. Si 8 es par y 6 impar, o bien 4 es par o 2 divide a 8.

   Es una proposición. Nombramos a las proposiciones como:

$$p = \text{ 8 es par} \qquad q = \text{ 6 es impar}$$
$$r = \text{ 4 es par} \qquad s = \text{ 2 divide a 8}$$

   La proposición tendrá la forma: $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$ y la tabla de verdad es:

p	q	r	s	$p \wedge q$	$r \vee s$	$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F	V

Para la misma se utilizo la definición de tabla de verdad del **condicional** $\rightarrow$ que tiene la forma:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Y por lo tanto, concluimos que la proposición será siempre verdadera cuando q sea falsa.

6. Hace frío.

   No es una proposición, se trata de una opinión subjetiva, implicando que no puede cuantificarse su valor de verdad.

7. 10 es múltiplo de 5 pero no de 3.

   Es una proposición. Llamando las proposiciones $p =$ 10 es múltiplo de 5 y $\neg q =$ 10 es multiplo de 3. Construimos la tabla de verdad

p	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
V	F	F
V	V	V
F	F	F
F	V	F

   Encontramos que es verdad siempre que p sea verdad y q falso.

Ejercicio 2. Dadas la siguientes proposiciones, reescribirlas utilizando “necesario” y “suficiente”.

1. Si un número es múltiplo de 3 entonces su cuadrado es múltiplo de 9.

   Reescribiendo como condicional y recordando que, la estructura es: p es *suficiente* para q, o, q es *necesaria* para p. Así, llamando $p =$ un número es múltiplo de 3 y $q =$ su cuadrado es múltiplo de 9. Las dos formas son:

   - Un número múltiplo de 3 es *suficiente* para que su cuadrado sea múltiplo de 9.
   - Si el cuadrado de un número es múltiplo de 9 es *necesario* que el número sea múltiplo de 3

2. Un número es múltiplo de 4 sólo si es divisible por 2.

   Llamando $p =$ número es múltiplo de 4 y $q =$ divisible por 2. Entonces,

   - Si un número es múltiplo de 4 es *suficiente* para que sea divisible por 2.
   - Si un número es divisible por 2 es *necesario* que el múltiplo del número sea 4

3. Un número es múltiplo de 7 si es múltiplo de 21.

   Llamando $q =$ número es múltiplo de 7 y $p =$ número múltiplo de 21, utilizando la estructura detallada previamente, las oraciones son

   - Si un número es múltiplo de 21 es *suficiente* para que sea múltiplo de 7
   - Un número es múltiplo de 7 es necesario que sea múltiplo de 21.

4. Enunciar el recíproco, el contrarrecíproco y el contrario del enunciado en b).

   Recordando que el **recíproco** es $q \to p$ si $p \to q$, el **contrarrecíproco** es $\neg q \to \neg p$ y el **contrario** es $\neg p \to \neg q$. De esta manera, tenemos que las expresiones son:

   - **Recíproco:** Un número es divisible por 2 si es múltiplo de 4.
   - **Contrarrecíproco:** Si un número no es divisible por 2 entonces no es múltiplo de 4.
   - **Contrario:** Un número no es múltiplo de 4 si no es divisible por 2.

Ejercicio 3. Construir las tablas de verdad de las siguientes fórmulas y clasificarlas en tautologías ,contradicciones y contingencias.

1. $\neg p \to (q \vee \neg p)$

   La tabla de verdad correspondiente es

$\neg p$	q	$q \vee \neg p$	$\neg p \to (q \vee \neg p)$
F	V	V	F
F	F	F	V
V	V	V	V
V	F	V	V

   Debido a que su veracidad depende los valores de las proposiciones, concluimos que es una **contingencia.**

2. $((p \wedge q) \to p) \to q$

   Repitiendo el procedimiento previo,

p	q	$q \wedge p$	$(p \wedge q) \to p$	$((p \wedge q) \to p) \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

   Se trata de una contingencia.

3. $(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$

   Construimos la tabla de verdad

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to q$	$\neg q \to p$	$(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V

   Debido que en todos los casos siempre se llega al mismo resultado de verdad y que el mismo es Verdad, concluimos que se trata de una tautología.

4. $((p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)) \leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge \neg q))$

   Llamando $P = ((p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)) \leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge \neg q))$, construimos la tabla.

p	q	r	$p \wedge q$	$r \wedge \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg r \wedge \neg q$	$(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)$	$(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge \neg q)$	P
V	V	V	V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F	F	V	F	F
V	F	F	F	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	V	V	F	V	F

   Encontramos que se trata de una contingencia.

1.2. Esquemas lógicos - Cuantificadores

Ejercicio 4. Simbolizar utilizando universo, esquemas, cuantificadores y conectivos lógicos:

1. Todos los números son enteros.

   Definiendo un universo con todos los números enteros $\mathbb{N}$, entonces:

$$(\forall n)(P(n)) \qquad : P(n) = n \text{ pertence a } \mathbb{Z}$$

2. Existen números impares o no todos los números son pares.

   Definiendo los números $n \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{Z}$. Llamando a las proposiciones $p = n$ impar y $q = m$ par, construimos la proposición

   $$p \vee \neg q$$

   De esta manera, la expresión simbólica es

   $$(\exists n)(\forall m)(p \vee \neg q)$$

3. Para todo par de números reales, si su producto es uno entonces uno es el inverso del otro.

   Definiendo un par de números $(x, y) \in \mathbb{R}$, y las proposiciones

   $$p(x,y) \equiv x \cdot y = 1 \qquad\qquad q(x,y) \equiv x = \frac{1}{y}$$

   Podemos escribir la expresión como

   $$(\forall x)(\forall y)(p(x,y) \rightarrow q(x,y))$$

4. Dado dos números reales, existe un número real mayor a la suma de ambos.

   Para el universo de los números reales, definimos tres valores $(x, y, z) \in \mathbb{R}$, la cuantificación de l proposición será

   $$p(x,y,z) \equiv z > x + y$$

   Así, la expresión lógica es

   $$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(p(x,y,z))$$

Ejercicio 5. Escribir en el lenguaje corriente las siguientes proposiciones, siendo el universo el conjunto de números reales y los esquemas definidos como sigue:

$$p(x) : xespar \qquad q(x) : xesdivisiblepor2 \qquad r(x) : x > 0$$
$$p(x,y) : y > x \qquad q(x,y) : x + y = 0$$

1. $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$

   Para todo número real, si es par entonces el mismo es divisible por 2

2. $(\exists y)(\forall x)p(x,y)$

   Existe un número real mayor a cualquier otro.

3. $(\forall x)(\exists y)p(y, x+3)$

   Para todo número real sumado 3, existe otro que es mayor.

4. $(\forall x)\,(r(x) \rightarrow (\exists y)(\neg r(y) \wedge q(x,y)))$

   Para todo número real positivo, existe un número negativo para el cuál su suma es igual a cero.

1.3. Implicaciones y leyes de equivalencia

Es importante incorporar y aprender a manejar las equivalencias e implicaciones lógicas que veremos a continuación. Son de utilidad para simplificar y operar de forma más efectiva con proposiciones y esquemas proposicionales más complejos. Como los enunciados en matemática son de la forma "si pasa tal cosa"(hipótesis), "entonces pasa tal otra"(conclusión), es fundamental que incorporen las equivalencias lógicas necesarias para la negación de una implicación o condicional $p \to q$. Además, como muchas veces nuestras propiedades son enunciados cuantificados, es igual de fundamental que incorporen las equivalencias lógicas que se usan para negar cuantificadores.

Las siguientes son algunas implicaciones lógicas:

1. **Doble negación:** $p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$
2. **Leyes conmutativas:** $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ y $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
3. **Leyes asociativas:** $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ y $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
4. **Leyes distributivas:** $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ y $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
5. **Leyes de Morgan:** $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ y $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
6. **Ley de implicación:** $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

Ejercicio 6.

1. Probar las equivalencias de 5, mostrando que las proposiciones que se obtienen reemplazando $\Leftrightarrow$ por $\leftrightarrow$ son tautologías.

   Expresando la primera con la forma del bicondicional, $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ procedemos a elaborar la tabla de verdad.

p	q	$p \vee q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
V	V	V	F	V
V	F	V	F	V
F	V	V	F	V
F	F	F	V	V

   Como se trata de una tautología, confirmamos que la primera equivalencia es correcta. Repetimos para la segunda, cambiando la equivalencia por un bicondicional, tenemos la expresión $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$, y su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

   Al igual que el resultado anterior, se trata de una tautología que comprueba la equivalencia.

2. Deducir la equivalencia de la implicación con el contrarrecíproco: $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$

   Construimos la tabla de verdad para la expresión, reemplazando $\Leftrightarrow$ por $\leftrightarrow$.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\neg q \leftrightarrow \neg p$	$p \to q \leftrightarrow \neg q \to \neg p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

   Como se trata de una tautología, se demuestra la equivalencia entre ambas

Las siguientes son algunas implicaciones lógicas, que incorporaremos como herramientas para hacer pruebas más complejas:

1. **Adición:** $p \Rightarrow (p \vee q)$
2. **Simplificación:** $(p \wedge q) \Rightarrow p$
3. **Modus Ponens:** $p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$
4. **Modus Tolens:** $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$
5. **Silogismo hipotético:** $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow p \to r$

Ejercicio 7. Probar las implicaciones 3 y 5, mostrando que las proposiciones que se obtienen reemplazando $\Rightarrow$ por $\to$ son tautologías.

Haciendo el reemplazo en Modus ponens, la tabla de verdad es

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$p \wedge (p \to q) \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Comprobando así la implicación. Y para el silogismo hipotético

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r) \to p \to r$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

1.4. Negación de cuantificadores y condicionales

Teniendo en cuenta las equivalencias:

$$\neg(\forall x)p(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x)) \qquad \text{y} \qquad \neg(\exists x)p(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg p(x)) \tag{1.1}$$

Ejercicio 8. Encontrar expresiones equivalentes para la negación de los esquemas del ejercicio 5.

1. Planteando la negación y utilizando la equivalencia

   $$\neg(\forall x)(p(x) \to q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg(p(x) \to q(x)))$$

   Aplicando la Ley de Implicación

   $$(\exists x)(\neg(p(x) \to q(x))) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg(\neg p(x) \vee q(x)))$$

   Luego, la Ley de Morgan

   $$(\exists x)(\neg(\neg p(x) \vee q(x))) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg(\neg p(x)) \wedge \neg q(x))$$

   Y por doble negación,

   $$(\exists x)(\neg(\neg p(x)) \wedge \neg q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(p(x) \wedge \neg q(x))$$

   Así, se lee como *Existe un número par que no es divisible por 2*

2. Planteando la equivalencia de negación

   $$\neg(\exists y)(\forall x)p(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\exists x)(\neg p(x,y))$$

   Y se lee, *Para todo número, existe otro que es menor.*