Álgebra (FHOM) **Año 2023**

Guía de trabajos prácticos 8: Relaciones
Parte III:Funciones

Las funciones son una clase especial de relaciones entre un par de conjuntos. No hace falta aclarar su importancia en la matemática y en las aplicaciones de la matemática a otras disciplinas: toda vez que tengamos una cantidad o magnitud dependiendo de otra, vamos a tener una función. Desde el punto de vista algebraico, nos centraremos en el concepto de función como relación entre conjuntos, considerando el subconjunto de los pares ordenados que constituyen la relación funcional.

El propósito de esta práctica es que puedan diferenciar correctamente una función de una relación “no funcional”, identificando dominio, codominio, imagen, preimagen de conjuntos, etc. También que puedan analizar formalmente cuándo una función es inyectiva, suryectiva y/o biyectiva.

Como siempre, al trabajar con contenidos matemáticos, es importante que presten atención y ejerciten mucho la notación empleada: por ejemplo, al diferenciar **la preimagen** de un conjunto X por una función f, $f^{-1}(X)$, del valor que toma la **función inversa** de f (en caso de que exista) en un elemento x, $f^{-1}(x)$.

Definición de relación funcional

En estos ejercicios, trabajaremos con la definición de relación funcional y función. Tengan a mano los conceptos, definiciones, notaciones, etc. que estudiaron para relaciones entre dos conjuntos.

Ejercicio 1. Consideremos los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}$. Determinar cuáles de las siguientes relaciones entre A y B son funciones:

a) $\mathscr{R} = \{(3,0), (4,-1), (1,-3), (2,1), (7,3), (5,3), (6,0)\}$;

b) $\mathscr{S} = \{(2,1), (5,-1), (6,-3), (2,-1), (7,3), (4,-2), (1,0)\}$;

c) $\mathscr{T} = \{(5,-1), (1,2), (3,-3), (2,1), (4,3), (6,2)\}$;

d) $\mathscr{U} = \{(a,b) \in A \times B : a - b = 4\}$;

Realizar los diagramas de Venn correspondientes.

Ejercicio 2. Sea $E = \{a, b, c\}$ y $A = \mathscr{P}(E)$. Determinar, justificando, si las siguientes relaciones en $A \times A$ son funciones:

a) $V \mathscr{R} W$ si y sólo si $V \cap W = \emptyset$;

b) $V \mathscr{S} W$ si y sólo si $V \cap W = \emptyset$ y $V \cup W = E$;

c) $V \mathscr{S} W$ si y sólo si $V \cap W \neq \emptyset$;

Ejercicio 3. Determinar si son funciones las siguientes relaciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$:

a) $\mathscr{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : b + 5 - a^2 = 0\}$;

b) $\mathscr{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a + b \text{ es divisible por } 7\}$;

c) $\mathscr{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \text{ y } b \text{ no son simultáneamente nulos y } a \text{ y } b \text{ son coprimos}\} \cup \{(0,0)\}$;

Imagen y preimagen por una función - Composición de funciones

Ya hemos trabajado previamente con imagen, preimagen y composición de relaciones en general. Como siempre, es importante prestar atención a la notación empleada al resolver los ejercicios: tener en cuenta que si nos piden que hallemos la imagen o preimagen de un conjunto por una función, nuestra respuesta debe ser un **subconjunto del dominio (o codominio)**, *no un elemento!*

Ejercicio 4. Sean $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ y $f : A \to B$ definida mediante $f(a) = a^2 - 1$. Determinar

a) $f(0)$	b) $f(-1)$	c) $f(-2)$
d) $f(\{1\})$	e) $f(A)$	f) $f(\{-1,0,1\})$
g) $f^{-1}(\{-2,2\})$	h) $f^{-1}(\{-1,3\})$	i) $f^{-1}(\{0,-1,3\})$

Ejercicio 5. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 5 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

Hallar $f^{-1}(B)$ para:
a) $B = \{4\}$ b) $B = \{4, 5\}$ c) $B = (-\infty, 0]$ d) $B = (0, 4] \cup \{5\}$
¿ Hay algún subconjunto B para el cual $f^{-1}(B) = \emptyset$?

Ejercicio 6. Sea $f : A \to B$ una función. Sean X e Y subconjuntos de A y V y W subconjuntos de B. Probar

a) Si $X \subset Y$, entonces $f(X) \subset f(Y)$;

b) Si $V \subset W$, entonces $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(W)$;

c) $f(X) - f(Y) \subset f(X - Y)$;

d) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ y $f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$;

e) $f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$;

f) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$. Dar un ejemplo en donde no se dé la inclusión contraria.

Ejercicio 7. Hallar una expresión para $f \circ g$ en los siguientes casos:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 3x$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (2x, x^2 + 1)$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g(n) = \sqrt{n}$;

c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = \begin{cases} n^3 + 2 & \text{si } n \text{ es divisible por 3} \\ 3n + 5 & \text{en caso contrario} \end{cases}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = 3n$.

Ejercicio 8. Dadas las funciones

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{4} & \text{si } n \text{ es par} \\ 2n + 1 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \text{y} \quad g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(n,m) = nm$$

Hallar $(f \circ g)(2,3)$, $(f \circ g)(1,1)$, y $(f \circ g)^{-1}(\{25\})$

Inyectividad, suryectividad, biyectividad - Función inversa

Los conceptos de inyectividad, suryectividad (o sobreyectividad) y biyectividad son sencillos de entender pero cuesta un poco aplicarlos en la práctica: la idea de los siguientes ejercicios es que puedan demostrar la inyectividad/suryectividad/biyectividad de una función a partir de la definición "formal" de estas propiedades.

Ejercicio 9. Analizar la inyectividad y suryectividad de las siguientes funciones y hallar la imagen en cada caso:

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = n+2$;

b) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x+2$;

c) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(z) = 3z-2$;

d) $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $b(x) = x^2 - 1$;

e) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n,m) = n^2 + 2m$;

f) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = \begin{cases} n-1, & \text{si } n \text{ es par} \\ 2n, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$;

g) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por $g(x) = (2x, x^2)$

Ejercicio 10. Probar que la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{-n}{2}, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

es biyectiva y hallar la expresión de la inversa $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

Ejercicio 11. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Probar:

a) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva;

b) Si $g \circ f$ es suryectiva, entonces g es suryectiva;

c) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

d) Enunciar y demostrar un resultado análogo al del inciso anterior, pero para la suryectividad.