# 1 Introducción a las ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial es aquella que relaciona las variables independientes con la variable dependiente y sus derivadas con respecto a una o más variables independientes. Las ecuaciones diferenciales juegan un papel fundamental tanto en la propia Matemática como en otras ciencias como la Física, Química, Economía, Biología, etc.

Si $y = f(x)$ es una función dada, su derivada respecto de la variable independiente $x$ se puede interpretar como el ritmo de cambio de la variable $y$ respecto de la variable $x$. Por ejemplo, es bastante usual que en un proceso económico, las variables involucradas y sus ritmos de variación estén relacionados entre sí por medio de los principios económicos que gobiernan dicho proceso. Al expresar tal conexión en términos matemáticos el resultado es, con frecuencia, una ecuación diferencial.

A diferencia de las ecuaciones algebraicas, en una ecuación diferencial la incógnita es una función (en ocasiones del tiempo), no un número.

Una *ecuación diferencial* es aquélla que relaciona una o varias variables independientes, una función de dichas variables (que es la función incógnita) y las derivadas de dicha función hasta un cierto orden.

**Ecuación diferencial en derivadas parciales.** Cuando la función incógnita depende de más de una variable, tendremos una *ecuación diferencial en derivadas parciales.* Por ejemplo, la ecuación:

$$F\left(x, y, z(x,y), \frac{\partial z}{\partial x}(x,y), \frac{\partial z}{\partial y}(x,y), \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)\right) = 0$$

relaciona las variables independientes $x, y$ con la variable dependiente $z(x,y)$ y las derivadas parciales de $z(x,y)$.

Un ejemplo de ecuación diferencial en derivadas parciales es

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = kz$$

donde la función incógnita es $z = z(x,y)$.

**Ecuación diferencial ordinaria.** Cuando la función incógnita depende de una variable, se dice que es una *ecuación diferencial ordinaria*; esto es, la ecuación:

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n}(x)\right) = 0$$

relaciona la variable independiente $x$ con la variable dependiente $y(x)$ y las derivadas hasta orden $n$ de $y(x)$.

Si la ecuación anterior se puede escribir como

$$y^{(n}(x) = f(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1}(x))$$

donde $f$ es una determinada función definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$, se dice que la ecuación viene dada en su *forma normal.*

Se llama *orden* de una ecuación diferencial ordinaria al mayor de los órdenes de las derivadas que aparecen en la ecuación.

En el primer tema nos centraremos en el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden; esto es, ecuaciones de la forma

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

Se llama *solución* de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

en el conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ a toda función $y = \varphi(x)$ tal que

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$$

para todo $x \in D \subseteq \mathbb{R}$.

En general, una ecuación diferencial ordinaria tiene infinitas soluciones pero se suelen tener condiciones, por ejemplo, valores iniciales, que limitan el número de soluciones adecuadas al modelo a estudiar.

Llamamos *solución general* de una ecuación diferencial al conjunto de todas las soluciones. Y se denomina *solución particular* de una ecuación diferencial a una cualquiera de sus soluciones.

El proceso de obtención de las soluciones de una ecuación diferencial se denomina *resolución* o *integración* de la misma.

**Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales**

Cuando se empezó a desarrollar la teoría de las ecuaciones diferenciales, se trató de hallar soluciones explícitas de tipos especiales de ecuaciones pero pronto se advirtió que sólo unas pocas ecuaciones se podían resolver de esta manera. Sin embargo, en muchos casos no es necesario obtener fórmulas explícitas de las soluciones y basta con poner en relieve las propiedades más relevantes de la solución. La teoría de las ecuaciones diferenciales comprende muchos resultados sobre el comportamiento general de las soluciones. Esto es lo que se llama *teoría cualitativa*. Sus resultados principales son los teoremas de existencia y unicidad de solución, los análisis de sensibilidad e investigaciones de estabilidad de equilibrios. Estos temas tienen tanto interés teórico como una gran importancia práctica.

**NOTA:** Usaremos indistintamente las siguientes notaciones para una EDO de primer orden en forma normal:

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)), \quad x \text{ variable independiente, } y(x) \text{ variable dependiente,} \\ u'(x) &= f(x, u(x)), \quad x \text{ variable independiente, } u(x) \text{ variable dependiente,} \\ x'(t) &= f(t, x(t)), \quad t \text{ variable independiente, } x(t) \text{ variable dependiente.} \end{aligned}$$

# 2 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Vamos a estudiar diferentes tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y las técnicas de integración que nos permiten calcular la solución general en cada caso.

En primer lugar, y antes de proceder a realizar las operaciones oportunas para el cálculo de la solución del problema planteado, es necesario verificar la existencia y unicidad de solución, para ello contamos con el *Teorema de existencia y unicidad de solución*, que nos dice que, dado un problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

esto es, dada una ecuación diferencial ordinaria $y' = f(x, y)$ donde $f$ es una función real de clase $C^1$ en un abierto $A \subset \mathbb{R}^2$, (es decir, existen las derivadas primeras de $f$ en $A$ y son funciones continuas) y dada una condición inicial $y(x_0) = y_0$, con $(x_0, y_0) \in A$, entonces existe un entorno de $x_0$ en el cual dicha ecuación diferencial posee una única solución $y = \varphi(x)$, que verifica la condición inicial $\varphi(x_0) = y_0$.

La solución de un problema de Cauchy concreto se encuentra a partir de la integral general de la ecuación diferencial $\varphi(x, C)$, donde $C$ es una constante arbitraria, determinando la constante $C$ de manera que se obtenga una curva que contenga al punto $(x_0, y_0)$.

En muchas ocasiones puede ser conveniente apoyarnos en la interpretación geométrica de las soluciones diferenciales de primer orden, para ello, analicemos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 1:** Sea la ecuación diferencial:

$$y' = -\frac{x}{y} \tag{1}$$

La ecuación (1) es una ecuación diferencial de las denominadas en variables separables, cuya resolución se efectuará más adelante (Ejemplo 3); se adelanta que su solución es:

$$y^2 + x^2 = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Esto es, la solución general es una familia de circunferencias concéntricas, de centro $(0, 0)$ y radio $\sqrt{C}$.

Para encontrar la solución particular de la ecuación diferencial (1) que verifique: $(x, y) = (2, 1)$, únicamente tendríamos que sustituir el punto $(2, 1)$ en la solución general y de esta manera obtendríamos el parámetro $C$:

$$1^2 + 2^2 = C \text{ de donde } C = 5.$$

Es decir, la solución particular es:

$$x^2 + y^2 = 5$$

que, geométricamente, es la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $\sqrt{5}$.

## 2.1 Ecuaciones diferenciales de variables separables

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

se dice que es de *variables separables* si se puede expresar en la forma

$$g(u(x))u'(x) = h(x)$$

donde $g$ y $h$ son funciones dadas.

La solución general de este tipo de ecuaciones se calcula integrando los dos miembros de la ecuación; esto es,

$$\int g(u(x))u'(x)dx = \int h(x)dx + C.$$

**Ejemplo 2:** Vamos a resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden de variables separables:

$$u'(x) = 2x(u(x) + 3),$$

esto es,

$$\frac{u'(x)}{u(x) + 3} = 2x.$$

Integrando tenemos

$$\int \frac{u'(x)}{u(x) + 3}dx = \int 2xdx,$$

esto es,

$$\ln |u(x) + 3| = x^2 + C$$

y, tomando exponenciales a ambos lados de la igualdad y operando, obtenemos la solución general:

$$u(x) = e^{x^2+C} - 3 = Ke^{x^2} - 3, \text{ donde } K = e^C.$$

**Ejemplo 3:** Hallar la curva tal que la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto es $-x/y$. Por tanto, dicha curva debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = -\frac{x}{y}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. La ecuación anterior se puede escribir como sigue:

$$yy' = -x$$

e integrando, tenemos

$$\int y(x)y'(x)dx = \int -xdx,$$

esto es,

$$\frac{1}{2}y(x)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

de donde, operando se tiene

$$y^2 + x^2 = C.$$

NOTA: A la constante $2C$, la denominamos también $C$ ya que vuelve a ser una constante arbitraria.

**Ejemplo 4:** Vamos a resolver ahora la siguiente ecuación diferencial:

$$u'(x) = -2u(x)^2 x$$

con valor inicial: $u(0) = -1/2$.

Operando obtenemos:

$$-\frac{u'(x)}{u(x)^2} = 2x,$$

e, integrando la ecuación anterior se tiene

$$-\int \frac{u'(x)}{u(x)^2}dx = \int 2xdx,$$

esto es,

$$\frac{1}{u(x)} = x^2 + C.$$

Con lo que la solución general de la ecuación dada es la siguiente familia de curvas:

$$u(x) = \frac{1}{x^2 + C}, \text{ con } C \in \mathbb{R}.$$

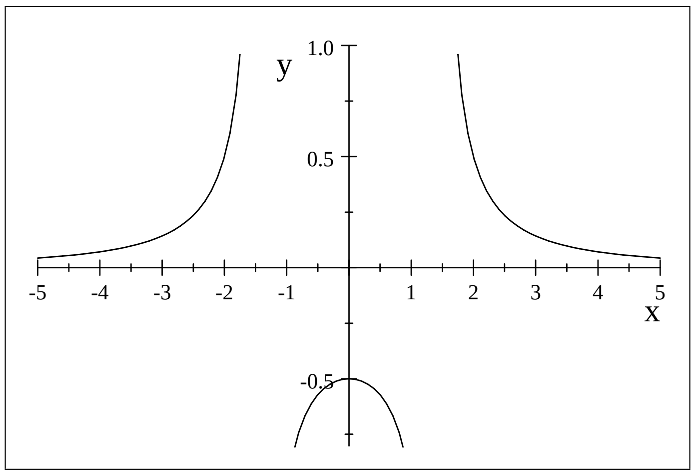
Para hallar la curva integral que verifica $u(0) = -1/2$, debemos hallar el valor de la constante $C$ correspondiente. Tenemos que

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{0 + C}$$

luego $C = -2$. Así, la curva integral es

$$u(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$$

que es la solución particular buscada. Puede verse su representación gráfica en la siguiente figura:



**Ejemplo 5:** La ecuación

$$u'(x) = (1 + x^2)(1 + u(x))$$

se puede escribir como

$$\frac{u'(x)}{1 + u(x)} = 1 + x^2.$$

Integramos a ambos lados de la igualdad:

$$\int \frac{u'(x)}{1 + u(x)} dx = \int \left(1 + x^2\right) dx \quad \Longrightarrow \quad \ln |(1 + u(x))| = x + \frac{x^3}{3} + C.$$

Y, operando obtenemos:

$$u(x) = Ce^{x+\frac{x^3}{3}} - 1.$$

**Ejemplo 6:** La ecuación

$$u'(x) + \frac{1 + u^2(x)}{x} = 0,$$

se puede escribir como

$$\frac{u'(x)}{1 + u^2(x)} = -\frac{1}{x}.$$

Integramos a ambos lados de la igualdad:

$$\int \frac{u'(x)}{1 + u^2(x)} dx = -\int \frac{1}{x} dx \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{arctg}(u(x)) = -\ln |x| + C = \ln \left(\frac{1}{|x|}\right) + C.$$

Y, operando obtenemos:

$$u(x) = \operatorname{tg}\left(\ln\left(\frac{1}{|x|}\right) + C\right).$$

**Problema:** Hallar la curva tal que por cada punto de la curva, el segmento cuyos extremos son los puntos de corte de la recta tangente a la curva en dicho punto con los ejes coordenados, se divide a la mitad en el punto de tangencia.

Supongamos que la curva es la gráfica de una función $y(x)$. Un punto de la curva es de la forma $(x, y(x))$. La condición es:

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

Por tanto, integrando

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{1}{x},$$

obtenemos:

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = -\int \frac{1}{x}dx \quad \Longrightarrow \quad \ln|y(x)| = -\ln|x| + C = \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) + C.$$

Y, tomando exponenciales a ambos lados de la igualdad, obtenemos:

$$y(x) = K\frac{1}{|x|}.$$

## 2.2 Ecuaciones diferenciales homogéneas

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden $u'(x) = f(x, u(x))$ se dice que es *homogénea* si la función $f$ es una función homogénea de grado 0; esto es,

$$f(tx, tu(x)) = t^0 f(x, u(x)) = f(x, u(x)).$$

En este caso, la ecaución diferencial se puede escribir de la siguiente manera:

$$u'(x) = f\left(1, \frac{u(x)}{x}\right). \tag{2}$$

La integral general de este tipo de ecuaciones se puede obtener haciendo el cambio de variable:

$$v(x) = \frac{u(x)}{x} \Longleftrightarrow u(x) = xv(x), \tag{3}$$

con lo que, derivando, obtenemos

$$u'(x) = v(x) + xv'(x). \tag{4}$$

Sustituyendo (3) y (4) en la ecuación (2) se obtiene la siguiente ecuación diferencial que es de variables separables:

$$v(x) + xv'(x) = f\left(1, v(x)\right)$$

pues operando, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{v'(x)}{f\left(1, v(x)\right) - v(x)} = \frac{1}{x}.$$

Veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 7:** Vamos a obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$(x^2 + u(x)^2) - 2xu(x)u'(x) = 0.$$

Despejamos $u'(x)$ de la ecuación anterior:

$$u'(x) = \frac{x^2 + u(x)^2}{2xu(x)}.$$

Y así escrita es fácil ver que es una ecuación homogénea. Dividiendo el numerador y el denominador del miembro de la derecha de la igualdad entre $x^2$, obtenemos

$$u'(x) = \frac{1 + \dfrac{u(x)^2}{x^2}}{2\dfrac{u(x)}{x}}.$$

Haciendo el cambio de variable $v(x) = u(x)/x$, y por tanto,

$$u'(x) = v(x) + xv'(x)$$

obtenemos

$$v(x) + xv'(x) = \frac{1 + v(x)^2}{2v(x)}$$

esto es,

$$xv'(x) = \frac{1 - v^2(x)}{2v(x)}$$

de donde

$$\frac{2v(x)}{1 - v^2(x)} v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Integrando a ambos lados de la ecuación anterior se obtiene:

$$\int \frac{2v(x)}{1 - v^2(x)} v'(x) dx = \int \frac{dx}{x}$$

esto es,

$$\begin{aligned} -\ln \left|1 - v^2(x)\right| &= \ln|x| + C, \\ \ln \left|1 - v^2(x)\right| &= -\ln|x| - C = \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) - C. \end{aligned}$$

Tomando exponenciales en la ecuación anterior se obtiene

$$1 - v^2(x) = K\frac{1}{x} \Longrightarrow v(x) = \sqrt{1 - \frac{K}{x}}.$$

Deshaciendo el cambio de variable: $v(x) = u(x)/x$, tenemos

$$u(x) = x\sqrt{1 - \frac{K}{x}}$$

que es la solución general del problema planteado.

**Ejemplo 8:** Vamos a obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$u'(x) = \frac{u(x)}{x} + 1.$$

Es inmediato comprobar que es una ecuación homogénea. Haciendo el cambio de variable $v(x) = u(x)/x$, y por tanto,

$$u'(x) = v(x) + xv'(x)$$

obtenemos

$$v(x) + xv'(x) = v(x) + 1$$

esto es,

$$v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Integrando a ambos lados de la ecuación anterior se obtiene:

$$\int v'(x)dx = \int \frac{dx}{x}$$

esto es,

$$v(x) = \ln|x| + C.$$

Deshaciendo el cambio de variable: $v(x) = u(x)/x$, tenemos

$$u(x) = x\,(\ln|x| + C)$$

que es la solución general del problema planteado.

**Ejemplo 9:** Vamos a obtener la solución general de la ecuación

$$u'(x) = \frac{x + u(x) - 2}{x - u(x) + 2}.$$

Esta ecuación no es una ecuación homogénea. Vamos a hacer un cambio de coordenadas de manera que en el nuevo sistema de coordenadas la ecuación sea homogénea. Las rectas

$$\begin{aligned} x + y - 2 &= 0 \\ x - y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

se cortan en el punto $(-1, 3)$. Consideramos el cambio de variables

$$\begin{aligned} x &= z - 1 \\ u(x) &= v(z) + 3 \end{aligned}$$

luego, $u'(x) = v'(z)$ y obtenemos la siguiente ecuación homogénea:

$$v'(z) = \frac{(z-1) + (v(z) + 3) - 2}{(z-1) - (v(z) + 3) + 4} = \frac{z + v(z)}{z - v(z)}$$

que sí es una ecuación homogénea. Dividimos por $z$ el numerados y el denominador del miembro de la derecha de la ecuación y obtenemos:

$$v'(z) = \frac{1 + \frac{v(z)}{z}}{1 - \frac{v(z)}{z}}$$

Haciendo ahora el cambio de variable $w(z) = v(z)/z$ obtenemos

$$w(z) + zw'(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)},$$

de donde, obtenemos

$$zw'(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} - w(z) = \frac{1 + w^2(z)}{1 - w(z)}$$

luego

$$\frac{1 - w(z)}{1 + w^2(z)} w'(z) = \frac{1}{z}$$

e, integrando, se tiene

$$\int \frac{1 - w(z)}{1 + w^2(z)} w'(z)dz = \int \frac{1}{z} dz.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - w(z)}{1 + w^2(z)} w'(z)dz &= \int \frac{1}{1 + w^2(z)} w'(z)dz - \frac{1}{2} \int \frac{2w(z)}{1 + w^2(z)} w'(z)dz \\ &= \arctan w(z) - \frac{1}{2} \ln(1 + w^2(z)). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\arctan w(z) - \frac{1}{2} \ln(1 + w^2(z)) = \ln|z| + C$$

y, deshaciendo los cambios de variables considerados (primero $w(z) = v(z)/z$ y después $x = z - 1$, $u(x) = v(z) + 3$, se tiene

$$\arctan\left(\frac{u(x) - 3}{x + 1}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{u(x) - 3}{x + 1}\right)^2\right) = \ln|x + 1| + C,$$

que es la ecuación implícita de la solución general de la ecuación diferencial dada.

## 2.3 Ecuación lineal de primer orden

Decimos que una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es *lineal* si se puede escribir de la siguiente forma:

$$y'(x) = y(x)f(x) + g(x). \tag{5}$$

Para su resolución, hacemos el cambio $y(x) = u(x)v(x)$. Entonces

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

y la ecuación se escribe como sigue:

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = u(x)v(x)f(x) + g(x),$$

de donde

$$u'(x)v(x) + u(x)\left[v'(x) - v(x)f(x)\right] = g(x). \tag{6}$$

Elegimos $v(x)$ en el cambio $y(x) = u(x)v(x)$ de manera que

$$v'(x) - v(x)f(x) = 0.$$

Nótese que $v(x)$ es solución de la parte homogénea de la ecuación lineal.

Integramos la EDO anterior:

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = f(x)$$

después de unas operaciones elementales, obtenemos la solución particular

$$v(x) = e^{\int f(x)dx}$$

que, sustituida en la ecuación (6), nos da

$$u'(x)e^{\int f(x)dx} + u(x)\left[f(x)e^{\int f(x)dx} - e^{\int f(x)dx}f(x)\right] = g(x)$$

esto es,

$$u'(x)e^{\int f(x)dx} = g(x),$$

que es una ecuación en variables separadas, cuya solución general es de la forma:

$$u(x) = \int g(x)e^{-\int f(x)dx}dx + C$$

La solución general de la ecuación lineal será $y(x) = u(x)v(x)$, por tanto,

$$y(x) = e^{\int f(x)dx}\left[\int g(x)e^{-\int f(x)dx}dx + C\right].$$

**Ejemplo 10:** Obtengamos la solución general de la ecuación diferencial

$$y'(x) = y(x) + e^{3x}.$$

Haciendo el cambio $y(x) = u(x)v(x)$ obtenemos

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = u(x)v(x) + e^{3x},$$

de donde

$$u'(x)v(x) + u(x)\left[v'(x) - v(x)\right] = e^{3x}.$$

Una solución particular de la ecuación $v'(x) - v(x) = 0$ es

$$v(x) = e^{x}.$$

Y lo sustituimos en nuestra ecuación:

$$u'(x)e^{x} = e^{3x}.$$

Por tanto, integrando $u'(x) = e^{3x}e^{-x} = e^{2x}$ obtenemos:

$$u(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial $y'(x) = y(x) + e^{3x}$ es

$$y(x) = \left[\frac{1}{2}e^{2x} + C\right]e^{x}.$$

COMPROBACIÓN:

Derivando $y(x) = \left[\frac{1}{2}e^{2x} + C\right]e^{x}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^{2x}e^{x} + \left[\frac{1}{2}e^{2x} + C\right]e^{x} \\ &= e^{3x} + y(x). \end{aligned}$$

**Ejemplo 11:** Obtengamos la solución general de la ecuación diferencial

$$y'(x) = \mathrm{tg}(x)y(x) + \sin(x).$$

Haciendo el cambio $y(x) = u(x)v(x)$ obtenemos

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \mathrm{tg}(x)u(x)v(x) + \sin(x),$$

de donde

$$u'(x)v(x) + u(x)\left[v'(x) - \mathrm{tg}(x)v(x)\right] = \sin(x).$$

Imponiendo $v'(x) - \mathrm{tg}(x)v(x) = 0$ obtenemos

$$v'(x) = \mathrm{tg}(x)v(x) \implies \frac{v'(x)}{v(x)} = \mathrm{tg}(x)$$

e integrando tenemos:

$$\int \frac{v'(x)}{v(x)}dx = \int \mathrm{tg}(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\ln|\cos(x)| + C$$

Por tanto,

$$\ln|v(x)| = -\ln|\cos(x)| + C \implies v(x) = K\frac{1}{\cos(x)}.$$

Tomo $K = 1$ y sustituyo $v(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ en la ecuación. Obtenemos:

$$u'(x)\frac{1}{\cos(x)} = \sin(x) \iff u'(x) = \sin(x)\cos(x).$$

Por tanto, integrando $u'(x) = \sin(x)\cos(x)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int \sin(x)\cos(x)dx \\ &= \frac{\sin^2(x)}{2} + C. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial $y'(x) = \mathrm{tg}(x)y(x) + \sin(x)$ es

$$y(x) = \left[\frac{\sin^2(x)}{2} + C\right]\frac{1}{\cos(x)}.$$

COMPROBACIÓN:

Derivando $y(x) = \left[\frac{\sin^2(x)}{2} + C\right]\frac{1}{\cos(x)}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sin(x)\cos(x)\frac{1}{\cos(x)} + \left[\frac{\sin^2(x)}{2} + C\right]\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \sin(x) + \left[\frac{\sin^2(x)}{2} + C\right]\frac{1}{\cos(x)}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \sin(x) + y(x)\mathrm{tg}(x). \end{aligned}$$

**Ejemplo 12:** Obtengamos la solución general de la ecuación diferencial

$$y'(x) = y(x) + \sin^2(x).$$

Hacemos el cambio $y(x) = u(x)v(x)$ con $v(x)$ solución de la parte homogénea de la EDO; esto es,

$$v'(x) = v(x)$$

luego

$$\int \frac{v'(x)}{v(x)} dx = \int 1dx \Longrightarrow \ln|v(x)| = x \Longrightarrow v(x) = e^x.$$

Tomando $y(x) = u(x)v(x)$ con $v(x) = e^x$ la EDO se escribe como sigue:

$$u'(x)v(x) = \sin^2(x),$$

de donde

$$u'(x) = \sin^2(x)e^{-x}.$$

Integrando obtenemos:

$$u(x) = \int \sin^2(x)e^{-x}dx$$

Integramos por partes tomando:

$$\begin{cases} u = \sin^2(x) & du = 2\sin x \cos x dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{cases}$$

luego

$$\int \sin^2(x)e^{-x}dx = -\sin^2(x)e^{-x} + \int 2\sin x \cos x e^{-x}dx.$$

Integramos otra vez por partes tomando:

$$\begin{cases} u = 2\sin x \cos x & du = 2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx = 2\left(1 - 2\sin^2 x\right)dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{cases}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x)e^{-x}dx &= -\sin^2(x)e^{-x} + \int 2\sin x \cos x e^{-x}dx \\ &= -\sin^2(x)e^{-x} - 2\sin x \cos x e^{-x} + \int 2\left(1 - 2\sin^2 x\right)e^{-x}dx \\ &= -\sin^2(x)e^{-x} - 2\sin x \cos x e^{-x} + \int 2e^{-x}dx - 4\int \sin^2 x e^{-x}dx \\ &= -\sin^2(x)e^{-x} - 2\sin x \cos x e^{-x} - 2e^{-x} - 4\int \sin^2 x e^{-x}dx. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int \sin^2(x)e^{-x}dx = \frac{1}{5}\left[-\sin^2(x)e^{-x} - 2\sin x\cos x e^{-x} - 2e^{-x} + C\right].$$

Luego la solución general de nuestra EDO es:

$$y(x) = \frac{1}{5}\left[-\sin^2(x)e^{-x} - 2\sin x\cos x e^{-x} - 2e^{-x} + C\right]e^{x}.$$

**Ejemplo 13:** Obtengamos la solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x)\cos^2(x) + y(x) = \mathrm{tg}(x) \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \end{cases}$$

Hacemos el cambio $y(x) = u(x)v(x)$ con $v(x)$ solución de la parte homogénea de la EDO; esto es,

$$v'(x)\cos^2(x) + v(x) = 0.$$

Luego

$$\int \frac{v'(x)}{v(x)}dx = -\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx \Longrightarrow \ln|v(x)| = -\mathrm{tg}(x) \Longrightarrow v(x) = e^{-\mathrm{tg}(x)}.$$

Tomando $y(x) = u(x)v(x)$ con $v(x) = e^{-\mathrm{tg}(x)}$ la EDO se escribe como sigue:

$$u'(x)v(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{tg}(x),$$

de donde

$$u'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{tg}(x)e^{\mathrm{tg}(x)}.$$

Integrando obtenemos:

$$u(x) = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{tg}(x)e^{\mathrm{tg}(x)}dx.$$

Integramos por partes tomando:

$$\begin{cases} u = \mathrm{tg}(x) & du = \frac{1}{\cos^2(x)}dx \\ dv = \frac{1}{\cos^2(x)}e^{\mathrm{tg}(x)}dx & v = e^{\mathrm{tg}(x)} \end{cases}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{tg}(x)e^{\mathrm{tg}(x)}dx \\ &= \mathrm{tg}(x)e^{\mathrm{tg}(x)} - \int e^{\mathrm{tg}(x)}\frac{1}{\cos^2(x)}dx \\ &= \mathrm{tg}(x)e^{\mathrm{tg}(x)} - e^{\mathrm{tg}(x)} + C \\ &= \left(\mathrm{tg}(x) - 1\right)e^{\mathrm{tg}(x)} + C. \end{aligned}$$

Luego la solución general de nuestra EDO es:

$$\begin{aligned} y(x) &= \left[(\operatorname{tg}(x)-1)\, e^{\operatorname{tg}(x)} + C\right] e^{-\operatorname{tg}(x)} \\ &= (\operatorname{tg}(x)-1) + Ce^{-\operatorname{tg}(x)}. \end{aligned}$$

Queremos que $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ por tanto,

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - 1\right) + Ce^{-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = 2$$

de donde: $C = 2e$. Luego la solución del problema de Cauchy es:

$$y(x) = (\operatorname{tg}(x)-1) + 2e^{1-\operatorname{tg}(x)}.$$

## 2.4 Ecuaciones de Bernouilli

Decimos que una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es de *Bernouilli* si se puede escribir de la siguiente forma:

$$y'(x) = y(x)f(x) + y(x)^n g(x), \text{ con } n \neq 0, 1.$$

Si $n = 0$ tenemos una EDO de variables separables y con $n = 1$ tenemos una ecuación lineal.

Dividiendo por $y(x)^n$ obtenemos:

$$\frac{y'(x)}{y(x)^n} = \frac{y(x)}{y(x)^n} f(x) + g(x).$$

Para convertirla en una EDO lineal hacemos el cambio:

$$u(x) = \frac{y(x)}{y(x)^n}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{y'(x)y(x)^n - y(x)ny(x)^{n-1}y'(x)}{y(x)^{2n}} \\ &= y'(x)\frac{y(x)^n - ny(x)^n}{y(x)^{2n}} \\ &= y'(x)(1-n)\frac{1}{y(x)^n}, \end{aligned}$$

luego,

$$\frac{y'(x)}{y(x)^n} = \frac{u'(x)}{1-n}.$$

Sustituyéndolo en la EDO obtenemos la siguiente EDO lineal que resolvemos siguiendo los pasos del apartado anterior:

$$u'(x) = (1-n)\, f(x)u(x) + (1-n)\, g(x).$$

**Ejemplo 14:** Obtengamos la solución general de la ecuación diferencial

$$y'(x) = -\frac{1}{x+2} y(x) - \frac{1}{2}(x+2)^4 y(x)^2.$$

Es una EDO de Bernuilli con $n = 2$. Dividiendo por $y(x)^2$, obtenemos:

$$\frac{y'(x)}{y(x)^2} = -\frac{1}{x+2}\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{2}(x+2)^4,$$

y hacemos el cambio de variable:

$$u(x) = \frac{1}{y(x)}.$$

luego

$$u'(x) = -\frac{y'(x)}{y(x)^2}.$$

Lo sustituimos en la EDO y obtenemos la siguiente ecuación lineal:

$$u'(x) = \frac{1}{x+2}u(x) + \frac{1}{2}(x+2)^4.$$

Hacemos el cambio $u(x) = w(x)v(x)$. Luego $u'(x) = w'(x)v(x) + w(x)v'(x)$, y lo sutituimos en la EDO:

$$w'(x)v(x) + w(x)v'(x) = \frac{1}{x+2}w(x)v(x) + \frac{1}{2}(x+2)^4. \tag{7}$$

Tomamos $v(x)$ tal que:

$$v'(x) = \frac{1}{x+2}v(x).$$

Integrando esta EDO obtenemos:

$$\int \frac{v'(x)}{v(x)}dx = \int \frac{1}{x+2}dx$$

luego,

$$v(x) = x + 2.$$

Luego la EDO (7) se escribe como sigue:

$$w'(x)\,(x+2) = \frac{1}{2}(x+2)^4 \Longrightarrow w'(x) = \frac{1}{2}(x+2)^3.$$

Luego, integrando obtenemos:

$$w(x) = \int \frac{1}{2}(x+2)^3 dx = \frac{1}{2}\frac{(x+2)^4}{4} + C.$$

Luego

$$\begin{aligned} u(x) &= w(x)v(x) \\ &= \left[\frac{(x+2)^4}{8} + C\right](x+2) \\ &= \frac{(x+2)^5 + 8C(x+2)}{8}. \end{aligned}$$

y la solución general de nuestra EDO es:

$$y(x) = \frac{8}{(x+2)^5 + 8C(x+2)}.$$

**Ejemplo 15:** Obtengamos la solución general de la ecuación diferencial

$$y'(x) = x^2 y(x) + (x^2-1)e^{3x}\frac{1}{y(x)^2}.$$

Es una EDO de Bernouilli con $n=-2$. Multiplicando por $y(x)^2$, obtenemos:

$$y'(x)y(x)^2 = x^2 y(x)^3 + (x^2-1)e^{3x}.$$

Y tomando $u(x) = y(x)^3$ obtenemos $u'(x) = 3y(x)^2 y'(x)$ luego la EDO se escribe como la siguiente EDO lineal:

$$\frac{1}{3}u'(x) = x^2 u(x) + (x^2-1)e^{3x}.$$

Hacemos el cambio $u(x) = w(x)v(x)$ siendo $v(x)$ solución de la EDO homogénea asociada:

$$v'(x) = 3x^2 v(x) \Longrightarrow \frac{v'(x)}{v(x)} = 3x^2,$$

e integrando obtenemos:

$$\ln|v(x)| = \int \frac{v'(x)}{v(x)}dx = \int 3x^2 dx = x^3.$$

Tomamos

$$v(x) = e^{x^3}.$$

Luego $u'(x) = w'(x)v(x) + w(x)v'(x)$, y lo sutituimos en la EDO anterior:

$$w'(x)v(x) + \underline{w(x)v'(x)} = 3\left(\underline{x^2 w(x)v(x)} + (x^2-1)e^{3x}\right).$$

Y la EDO lineal que teníamos se escribe como sigue:

$$w'(x)e^{x^3} = 3(x^2-1)e^{3x} \Longrightarrow w'(x) = 3(x^2-1)e^{3x}e^{-x^3} = 3(x^2-1)e^{-x^3+3x}.$$

Integrando obtenemos:

$$w(x) = \int 3(x^2-1)e^{-x^3+3x}dx = -\int 3(-x^2+1)e^{-x^3+3x}dx = -e^{-x^3+3x} + C.$$

Por tanto,

$$u(x) = \left[-e^{-x^3+3x} + C\right]e^{x^3},$$

y la solución general de nuestra ecuación es:

$$\begin{aligned} y(x) &= u(x)^{1/3} \\ &= \left[-e^{-x^3+3x} + C\right]^{1/3} e^{\frac{x^3}{3}}. \end{aligned}$$

## 2.5 Aplicaciones

### 2.5.1 Trayectorias ortogonales

Decimos que dos curvas planas se cortan ortogonalmente si sus tangentes en los puntos de corte son perpendiculares.

Problemas comunes de física requiere conocer una familia de curvas todas ellas ortogonales a las curvas de otra familia dada. Por ejemplo, en electrostática, las lineas de fuerza son ortogonales a las curvas equipotenciales.

Sea $F(x, y(x)) = C$ la ecuación de nuestra familia de curvas. La ecuación diferencial de dicha familia se obtiene derivando la ecuación anterior respecto de $x$. Tenemos:

$$\begin{cases} F(x, y(x)) = C \\ F_x + F_y y' = 0 \end{cases}$$

La familia de curvas ortogonales es la que satisface la ecuación:

$$F_x - F_y \frac{1}{y'} = 0.$$

**Ejemplo 16:** Obtener las curvas ortogonales a la familia de curvas dadas por $y = C/x$, $C \neq 0$.

Derivamos respecto de $x$ la ecuación. Tenemos:

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{C}{x^2} \\ y(x) = \dfrac{C}{x} \end{cases}$$

sustituimos el valor de $C$ en la primera ecuación y obtenemos la EDO de nuestra familia:

$$y'(x) = -\frac{xy(x)}{x^2} = -\frac{y(x)}{x}.$$

Estamos buscando una familia de curvas cuyas pendientes sean ortogonales a las pendientes de las curvas de la familia dada. Por tanto, buscamos curvas $y = y(x)$ tales que:

$$y'(x) = \frac{x}{y(x)}.$$

Operando e integrando la EDO anterior obtenemos:

$$\frac{y(x)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + K.$$

Luego la famila de curvas ortogonales a las hipérbolas de ecuación $y = C/x$ es la familia de las hipérbolas de ecuación $y^2 - x^2 = 2K$.

**Ejemplo 17:** Obtener las curvas ortogonales a una familia de circunferencias centradas en el origen de coordenadas.

La ecuación implícita de la familia de circunferencias centrada en el origen de coordenadas es:

$$x^2 + y(x)^2 = C.$$

Derivando los dos miembros de la ecuación anterior respecto de $x$ obtenemos:

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0.$$

Por tanto, la pendiente en cada punto $(x, y(x))$ de esa familia de circunferencias es:

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}.$$

Por tanto, la familia de curvas ortogonales tiene pendiente

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Resolvamos la EDO anterior y obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{y'(x)}{y(x)}dx &= \int \frac{1}{x}dx \Longrightarrow \ln|y(x)| = \ln|x| + C \\ &\Longrightarrow y(x) = Kx. \end{aligned}$$

Luego la familia de rectas de ecuación $y(x) = Kx$ es ortogonal a la familia de circunferencias centradas en el origen.

**Ejemplo 18:** Obtener las curvas ortogonales a una familia de elipses de ecuación:

$$3x^2 + 2y(x)^2 = C.$$

Derivando los dos miembros de la ecuación anterior respecto de $x$ obtenemos:

$$6x + 4y(x)y'(x) = 0.$$

Por tanto, la pendiente en cada punto $(x, y(x))$ de esa familia de elipses es:

$$y'(x) = -\frac{6x}{4y(x)}.$$

Por tanto, la familia de curvas ortogonales tiene pendiente

$$y'(x) = \frac{2y(x)}{3x}.$$

Resolvamos la EDO anterior y obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{y'(x)}{y(x)}dx &= \int \frac{2}{3x}dx \Longrightarrow \ln|y(x)| = \frac{2}{3}\ln|x| + C \\ &\Longrightarrow y(x) = K(x)^{2/3}. \end{aligned}$$

Luego la familia de curvas de ecuación $y(x) = K(x)^{2/3}$ es ortogonal a la familia de elipses de ecuación $3x^2 + 2y(x)^2 = C$.

**Ejemplo 19:** Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas: $y^2 + 2ax = a^2$, con $a > 0$.

Calculamos primero la ecuación diferencial asociada a dicha familia. Derivando respecto de $x$ la ecuación implícita de la familia de curvas; esto es, $y(x)^2 + 2ax = a^2$, obtenemos:

$$2y(x)y'(x) + 2a = 0.$$

Por tanto, dicha famila de curvas satisface las ecuaciones:

$$\begin{aligned} y(x)^2 + 2ax &= a^2, \\ y(x)y'(x) + a &= 0. \end{aligned}$$

Despejamos $a$ de la segunda ecuación y lo sustituimos en la primera. Tenemos:

$$y(x)^2 - 2y(x)y'(x)x = y^2(x)\left(y'(x)\right)^2,$$

que es la ecuación diferencial que describe a la familia de curvas dadas. Las curvas de la familia ortogonal tienen pendiente $-1/y'(x)$. Por tanto, las trayectorias ortogonales se obtienen sustituyendo en la ecuación diferencial de la familia $y'(x)$ por $-1/y'(x)$. Obtenemos:

$$y(x)^2 + 2y(x)\frac{1}{y'(x)}x = y^2(x)\frac{1}{(y'(x))^2}.$$

Multiplicando la ecuación anterior por $(y'(x))^2$ obtenemos:

$$y(x)^2(y'(x))^2 + 2y(x)x = y^2(x).$$

Que coincide con la ecuación diferencial de la familia de curvas dada. Por tanto, dichas curvas son autoortogonales.

**Ejemplo 20:** Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas: $y = ax^3$, con $a \neq 0$.

Calculamos primero la ecuación diferencial asociada a dicha familia. Derivando respecto de $x$ la ecuación implícita de la familia de curvas; esto es, $y(x) = ax^3$, obtenemos:

$$y'(x) = 3ax^2.$$

Por tanto, dicha famila de curvas satisface las ecuaciones:

$$\begin{aligned} y(x) &= ax^3, \\ y'(x) &= 3ax^2. \end{aligned}$$

Despejamos $a$ de la segunda ecuación y lo sustituimos en la primera. Tenemos:

$$y(x) = \frac{y'(x)}{3x^2}x^3 = \frac{1}{3}y'(x)x,$$

que es la ecuación diferencial que describe a la familia de curvas dadas. Las curvas de la familia ortogonal tienen pendiente $-1/y'(x)$. Por tanto, las trayectorias ortogonales se obtienen sustituyendo en la ecuación diferencial de la familia $y'(x)$ por $-1/y'(x)$. Obtenemos:

$$y(x) = -\frac{1}{3}\frac{1}{y'(x)}x,$$

esto es,

$$3y(x)y'(x) = -x,$$

e integrando la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{3}{2}y^2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + C.$$

Luego la familia de curvas ortogonales es:

$$3y^2(x) + x^2 = 2C.$$

### 2.5.2 Trayectorias parabólicas

**Problema:** Hallar la curva $y = y(x)$ tal que los rayos paralelos al eje de las $x$ que inciden sobre la curva al reflejarse pasan todos por el origen de coordenadas.

Por la ley de la reflexión tenemos que el ángulo de incidencia $\alpha$ es igual al ángulo reflejado $\beta$. Luego, $\alpha = \beta$.

Sabemos que $y' = \text{tg}\alpha$ y

$$\text{tg}2\alpha = \frac{y}{x}.$$

Por tanto, como

$$\text{tg}2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$$

se tiene:

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1-(y')^2} \Longleftrightarrow y(y')^2 + 2xy' - y = 0.$$

Despejando $y'$ obtenemos:

$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y},$$

que es una EDO homogénea. Hacemos el cambio $u(x) = y(x)/x$. Tenemos:

$$xu'(x) + u(x) = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + x^2u^2(x)}}{xu(x)}$$

esto es,

$$\frac{u(x)}{1 + u^2(x) \pm \sqrt{1+u^2(x)}}u'(x) = -\frac{1}{x}.$$

(Tomamos la raíz positiva). Integrando obtenemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{u(x)}{1+u^2(x)+\sqrt{1+u^2(x)}}u'(x)dx \underset{t^2=1+u^2(x),\ tdt=u(x)u'(x)dx}{=} \int \frac{t}{t^2+t}dt \\ = \int \frac{1}{t+1}dt = \ln|t+1| = \ln|\sqrt{1+u^2(x)}+1|.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\ln|\sqrt{1+u^2(x)}+1| = -\ln|x| + C = \ln\frac{1}{|x|} + C.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+u^2(x)}+1 &= K\frac{1}{|x|} \Longleftrightarrow \frac{y^2(x)}{x^2} = \left(K\frac{1}{|x|} - 1\right)^2 - 1 \\ &\Longleftrightarrow y^2(x) = (K-x)^2 - x^2 = K^2 - 2x.\end{aligned}$$

# 3 Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

Estudiamos en este tema las EDO de orden superior:

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1}(x), y^{(n}(x)) = 0.$$

Dentro de esta clase de ecuaciones nos restringiremos al caso en el que la función $F$ es linea, esto es, la EDO se escribe de la siguiente forma:

$$a_0(x)y^{(n}(x) + a_1(x)y^{(n-1}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = b(x).$$

Si $b(x) = 0$ diremos que la EDO de orden $n$ es lineal y *homogénea* y si $b(x)$ no es idénticamente cero, diremos que la EDO es *no homogénea*.

Si las funciones $a_i(x)$, $0 \leq i \leq n$, son constantes, diremos que la EDO lineal es de *coeficientes constantes*.

**Ejemplos:**

1. La ecuación $y'''(x) = \sin(xy(x)) + y'(x)$ es una EDO de tercer orden no lineal.
2. La ecuación $y'''(x) = \sin(x)y(x) + e^x y'(x) + (x^2+2)y''(x)$ es una EDO de tercer orden lineal homogénea con coeficientes no constantes.
3. La ecuación $y'''(x) = \sin(x)y(x) + e^x y'(x) + (x^2+2)y''(x) + \cos(x)$ es una EDO de tercer orden lineal no homogénea con coeficientes no constantes.
4. La ecuación $y'''(x) + 7y''(x) + 8y'(x) + 5y(x) = \cos(x)$ es una EDO de tercer orden lineal no homogénea con coeficientes constantes.

La solución general de una ecuación lineal de orden $n$ no homogénea

$$a_0(x)y^{(n}(x) + a_1(x)y^{(n-1}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = b(x),$$

se escribe como la suma de la solución general de la homogénea más una solución particular de la no homogénea.

Si $y_h(x)$ es solución de la homogénea se tiene:

$$a_0(x)y_h^{(n}(x) + a_1(x)y_h^{(n-1}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)y_h'(x) + a_n(x)y_h(x) = 0.$$

Y si $y_p(x)$ es una solución particular de la no homogénea entonces:

$$\begin{aligned} & a_0(x)(y_h+y_p)^{(n}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)(y_h+y_p)'(x) + a_n(x)(y_h+y_p)(x) \\ = \; & \underbrace{a_0(x)y_h^{(n}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)y_h'(x) + a_n(x)y_h(x)}_{0} \\ & + \underbrace{a_0(x)y_p^{(n}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)y_p'(x) + a_n(x)y_p(x)}_{b(x)} \\ = \; & b(x). \end{aligned}$$

Empezaremos con las ecuaciones lineales de segundo orden.

## 3.1 Ecuaciones lineales de segundo orden

La ecuación diferencial lineal de segundo orden general es:

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = b(x). \tag{8}$$

La ecuación lineal de segundo orden homogénea asociada a la anterior ecuación es:

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = 0. \tag{9}$$

Tenemos los siguientes teoremas:
**Teorema:** La solución general de una ecuación lineal de orden 2 no homogénea

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = b(x),$$

se escribe como la suma de la solución general de la homogénea más una solución particular de la no homogénea.
**Teorema:** Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones cualesquiera de la ecuación lineal homogénea (9), entonces

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

es también solución de (9) para todo par de constantes $c_1, c_2$.
**Demostración:** Se tiene:

$$\begin{aligned} & \left(c_1y_1 + c_2y_2\right)''(x) + a_1(x)\left(c_1y_1 + c_2y_2\right)'(x) + a_2(x)\left(c_1y_1 + c_2y_2\right)(x) \\ = \; & c_1\underbrace{\left(y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x)\right)}_{0} + c_2\underbrace{\left(y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x)\right)}_{0} \\ = \; & 0. \end{aligned}$$

Diremos que $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ es la *solución general* de la ecuación lineal homogénea (9) siempre que $y_1(x)$, $y_2(x)$ sean funciones linealmente independientes.

Una condición necesaria para que el sistema de funciones $\{y_1(x), y_2(x)\}$ sea linealmente dependiente en $[a, b]$ es que el siguiente determinante, que se denomina *wronskiano*,

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

sea identicamente nulo en $[a, b]$.

**Ejemplo:** Comprobar que $y_1(x) = 1$ y $y_2(x) = e^{-x}$ son soluciones independientes de la ecuación

$$y'' + y' = 0.$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} y_1''(x) + y_1'(x) &= 0 + 0 = 0, \\ y_2''(x) + y_2'(x) &= e^{-x} - e^{-x} = 0, \end{aligned}$$

y ademas el wronskiano de estas dos funciones es:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^{-x} \\ 0 & -e^{-x} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es: $y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$.

### 3.1.1 Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes

La ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes es:

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = b(x).$$

La ecuación lineal de segundo orden homogénea asociada a la anterior ecuación es:

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0.$$

**Estrategia:**

1. Buscar la solución general $y_h$ de la ecuación homogénea asociada.
2. Buscar una solución particular $y_p$ de la no homogénea.
3. La solución general de la ecuación es $y = y_h + y_p$.

**Cálculo de la solución general de la ecuación homogénea de orden** $2$ Tomando $y(x) = e^{\lambda x}$ y sustituyéndolo en la ecuación homogénea obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) \\ &= \lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_2 e^{\lambda x} \\ &= \left(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2\right) e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Como $e^{\lambda x} > 0$ la ecuación anterior se satisface para los valores de $\lambda$ que satisfacen la ecuación:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0,$$

que llamamos *ecuación característica* de la EDO de segundo orden. La ecuación característica es de grado dos y tiene dos soluciones. El discriminante de la ecuación característica es: $\Delta = a_1^2 - 4a_2$.

- Si $\Delta = a_1^2 - 4a_2 > 0$ las dos soluciones $\lambda_1, \lambda_2$ de la ecuación son reales y distintas y $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ son soluciones independientes, pues

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \neq 0.$$

  Por tanto, la solución general es:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

- Si $\Delta = a_1^2 - 4a_2 = 0$ la solución $\lambda_1 = -\frac{a_1}{2}$ de la ecuación es doble y $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ es solución. Para formar la solución general de la ecuación homogénea necesitamos otra solución de dicha ecuación. Probamos con $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$. Tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= y_2''(x) + a_1 y_2'(x) + a_2 y_2(x) \\ &= \left(2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x}\right) + a_1\left(e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1 e^{\lambda_1 x}\right) + a_2 x e^{\lambda_1 x} \\ &= \left(\underbrace{2\lambda_1 + a_1}_{0 \text{ pues } \lambda_1 = -\frac{a_1}{2}} + x\underbrace{\left(\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2\right)}_{0}\right) e^{\lambda_1 x}. \end{aligned}$$

Las soluciones $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$ son independientes, pues

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & xe^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1 e^{\lambda_1 x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 x} \neq 0.$$

Por tanto, la solución general es:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}.$$

- Si $\Delta = a_1^2 - 4a_2 < 0$ las dos soluciones $\lambda_1, \lambda_2$ de la ecuación son complejas conjugadas,

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

Las funciones $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ son funciones complejas. Nótese que teniendo en cuenta la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

se tiene

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda_1 x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right), \\ y_2(x) &= e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x}\left(\cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x)\right) = e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right). \end{aligned}$$

Como $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ son soluciones de la ecuación homogénea, combinaciones lineales de dichas soluciones también son soluciones de la ecuación homogénea. Tomamos:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{1}{2}\left(y_1(x) + y_2(x)\right) = e^{\alpha x}\cos(\beta x), \\ u_2(x) &= -\frac{i}{2}\left(y_1(x) - y_2(x)\right) = e^{\alpha x}\sin(\beta x). \end{aligned}$$

Son soluciones reales e independientes. La solución general se escribe como sigue:

$$y(x) = e^{\alpha x}\left(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)\right).$$

**Ejemplo:** Hallar la solución general de la siguiente ecuación: $y'' + 3y' - 4y = 0$.

La ecuación característica de dicha ecuación es:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

que tiene raíces:

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

Por tanto, la solución general de dicha ecuación es:

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-4x}.$$

**Ejemplo:** Hallar la solución general de la siguiente ecuación: $y'' - 6y' + 9y = 0$.

La ecuación característica de dicha ecuación es:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

que tiene raiz $\lambda = 3$ doble. Por tanto, la solución general de dicha ecuación es:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}.$$

**Ejemplo:** Hallar la solución general de la siguiente ecuación: $2y'' + 2y' + 3y = 0$.

La ecuación característica de dicha ecuación es:

$$2\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

que tiene raíces complejas:

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-24}}{4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Por tanto, la solución general de dicha ecuación es:

$$y(x) = e^{-x/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)\right).$$

**Cálculo de la solución particular de la ecuación no homogénea** Usaremos el método de los coeficients indeterminados para hallar una solucón particular $y_p$ de la ecuación no homogénea con coeficientes constantes:

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = b(x).$$

Veamos varios casos particulares:

- El término independiente de la ecuación $b(x)$ es una función polinómica de grado $n$. Entonces tomamos como candidata a solución particular de la ecuación un polinomio del mismo grado:
$$y_p(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \cdots$$
donde $A, B, C, \ldots$ son *los coeficientes indeterminados*. Sustituyéndolo en la ecuación despejamos de los valores de los coeficientes indeterminados.

**Ejemplo:** Hallar la solución general de la siguiente ecuación: $y'' - 2y' + y = 3x^2 + 2x - 20$.

La ecuación característica de la ecuación homogénea es: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$, que tiene raíz doble $\lambda = 1$. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Para hallar una solución particular de la ecuación tomamos: $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Sustituyéndolo en la ecuación obtenemos:

$$2A - 2(2Ax + B) + Ax^2 + Bx + C = 3x^2 + 2x - 20.$$

De donde, igualando coeficientes:

$$\begin{aligned} A &= 3, \\ -4A + B &= 2, \\ 2A - 2B + C &= -20, \end{aligned}$$

obtenemos

$$A = 3, \quad B = 14, \quad C = 2.$$

Por tanto, la solución general de nuestra ecuación es:

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + 3x^2 + 14x + 2.$$

- El término independiente de la ecuación $b(x)$ es una función exponencial; por ejemplo,

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = e^{ax}.$$

Tomamos $y_p(x) = Ae^{ax}$, donde $A$ es *el coeficiente indeterminado*. Sustituyéndo $y_p(x) = Ae^{ax}$ en la ecuación tenemos:

$$A\left(a^2 + a_1 a + a_2\right) e^{ax} = e^{ax}.$$

Por tanto, si $a^2 + a_1 a + a_2 \neq 0$ entonces

$$A = \frac{1}{a^2 + a_1 a + a_2}.$$

Si $a^2 + a_1 a + a_2 = 0$ entonces $a$ es una raíz doble de la ecuación característica de la ecuación homogénea asociada. En este caso tomamos: $y_p(x) = Axe^{ax}$. Sustituyéndolo en la ecuación tenemos:

$$(2Aae^{ax} + Aa^2xe^{ax}) + a_1(Ae^{ax} + Aaxe^{ax}) + a_2Axe^{ax} = e^{ax},$$

esto es,

$$A(2a + a_1 + \underbrace{(a^2 + a_1 a + a_2)}_{0}x)e^{ax} = e^{ax}.$$

Luego si $2a + a_1 \neq 0$ entonces

$$A = \frac{1}{2a + a_1}.$$

Si $2a + a_1 = 0$, esto es, $a = -a_1/2$ entonces probaríamos con $y_p(x) = Ax^2e^{ax}$.

**Ejemplo:** Hallar la solución general de la siguiente ecuación: $y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}$.

La ecuación característica de la ecuación homogénea es: $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$, que tiene raíces:

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x}.$$

Para hallar una solución particular de la ecuación tomamos: $y_p = Ae^{4x}$. Sustituyéndolo en la ecuación obtenemos:

$$A16e^{4x} + A12e^{4x} - A10e^{4x} = 6e^{4x}.$$

De donde,

$$A = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es:

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x} + \frac{1}{3}e^{4x}.$$

**Ejemplo:** Hallar la solución general de la siguiente ecuación: $y'' - 4y = 3e^{2x}$.

La ecuación característica de la ecuación homogénea es: $\lambda^2 - 4 = 0$, que tiene raíces:

$$\lambda = 2 \text{ y } \lambda = -2.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}.$$

Para hallar una solución particular de la ecuación tomamos: $y_p = Axe^{2x}$ pues sabemos que $e^{2x}$ es solución de la homogénea y por tanto $y = Ae^{2x}$ no es solución particular de la no homogénea. Sustituyéndo $y_p = Axe^{2x}$ en la ecuación obtenemos:

$$A\left(2e^{2x} + 2e^{2x} + 4xe^{2x}\right) - 4Axe^{2x} = 3e^{2x}$$

de donde,

$$A = \frac{3}{4}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{3}{4} x e^{2x}.$$

- El término independiente de la ecuación $b(x)$ es un $\sin(\beta x)$ o $\cos(\beta x)$. En este caso tomamos
$$y_p(x) = A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x),$$
donde $A, B$ son los *coeficientes indeterminados*. Los coeficientes indeterminados $A, B$ se pueden calcular sustituyendo la solución particular en la ecuación e igualando coeficientes.

**Ejemplo:** Hallar una solución particular de $y'' + y = \sin(x)$.

Tomamos
$$y_p(x) = A\sin(x) + B\cos(x).$$
Sustituyendo dicha solución en la ecuación obtenemos:
$$-A\sin(x) - B\cos(x) + A\sin(x) + B\cos(x) = \sin x \Longleftrightarrow 0 = \sin(x).$$
En este caso $y_p(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$ es solución de la ecuación homogénea, así que probamos con
$$y_p(x) = x(A\sin(x) + B\cos(x)).$$
Tenemos:
$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A\sin(x) + B\cos(x) + x(A\cos(x) - B\sin(x)), \\ y_p''(x) &= 2(A\cos(x) - B\sin(x)) - x(A\sin(x) + B\cos(x)). \end{aligned}$$
Por tanto, sustituyéndolo en la ecuación obtenemos:
$$2(A\cos(x) - B\sin(x)) - x(A\sin(x) + B\cos(x)) + x(A\sin(x) + B\cos(x)) = \sin(x),$$
esto es, igualando el coeficiente de $\sin(x)$ y el de $\cos(x)$ obtenemos:
$$2A = 0, \quad -2B = 1.$$
Por tanto,
$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= A\sin(x) + B\cos(x) - \frac{1}{2}x\cos(x). \end{aligned}$$

- **Principio de superposición:** Si $y_1(x)$ es solución de $y'' + a_1y' + a_2y = b_1(x)$ y $y_2(x)$ es solución de $y'' + a_1y' + a_2y = b_2(x)$, entonces $y_1(x) + y_2(x)$ es solución de $y'' + a_1y' + a_2y = b_1(x) + b_2(x)$.

**Ejemplo:** Hallar una solución particular de $y'' + 4y = 4\cos(2x) + 4\cos(x) + 8x^2 - 4x$.

La ecuación característica de la ecuación homogénea es: $\lambda^2 + 4 = 0$, que tiene raíces complejas $\pm 2i$. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_h = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x).$$

Como $c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)$ es solución particular de la homogénea y en el término independiente de la ecuación tenemos $4\cos(2x)$ tomamos

$$y_1 = Ax\cos(2x) + Bx\sin(2x).$$

Como en el término independiente también tenemos $4\cos(x)$ tomamos

$$y_2 = C\cos(x) + D\sin(x),$$

y como también tenemos: $8x^2 - 4x$ tomamos

$$y_3 = Ex^2 + Dx + F.$$

Por tanto, como solución particular tomamos:

$$y_p = Ax\cos(2x) + Bx\sin(2x) + C\cos(x) + D\sin(x) + Ex^2 + Dx + F.$$

Sustituyéndolo en la ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned}
y_p'' + 4y_p &= -4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) - 4Ax\cos(2x) - 4Bx\sin(2x)\\
&\quad -C\cos(x) - D\sin(x) + 2E\\
&\quad +4\left(Ax\cos(2x) + Bx\sin(2x) + C\cos(x) + D\sin(x) + Ex^2 + Dx + F\right)\\
&= -4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) + 2E + 3C\cos(x) + 3D\sin(x) + 4Ex^2 + 4Dx + 4F\\
&= 4\cos(2x) + 4\cos(x) + 8x^2 - 4x.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
A &= 0, \quad B = 1, \quad C = 4/3,\\
E &= 2, \quad D = -1, \quad F = -1,
\end{aligned}$$

y la solución general de la ecuación es:

$$\begin{aligned}
y &= y_h + y_p\\
&= c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + x\sin(2x) + \frac{4}{3}\cos(x) - \sin(x) + 2x^2 - x - 1.
\end{aligned}$$

**Ejemplo:** Hallar una solución del problema de valor incial:

$$\begin{cases} y'' - 4y = 3\cos(2x) + 8x^2 + 2 \\ y(0) = \frac{1}{8}, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

La ecuación característica de la ecuación homogénea es: $\lambda^2 - 4 = 0$, que tiene raíces reales distintas $\lambda = 2, \lambda = -2$. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}.$$

Como solución particular de la ecuación $y'' - 4y = 3\cos(2x)$ probamos con

$$y_1 = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} y_1' &= -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x), \\ y_1'' &= -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) = -4y_1, \end{aligned}$$

por tanto $y_1'' + 4y_1 = 0$ y

$$\begin{aligned} y_1'' - 4y_1 &= -8y_1 \\ &= -8\left(A\cos(2x) + B\sin(2x)\right) \\ &= 3\cos(2x) \end{aligned}$$

de donde $A = -3/8$ y $B = 0$.

Como solución particular de la ecuación $y'' - 4y = 8x^2 + 2$ probamos con

$$y_2 = Ax^2 + Bx + C.$$

Tenemos:

$$y_2'' - 4y_2 = 2A - 4\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 8x^2 + 2$$

de donde $A = -2$, $B = 0$, $C = -3/2$.

Luego, la solución general de la ecuación es:

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_1 + y_2 \\ &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \tfrac{3}{8}\cos(2x) - 2x^2 - \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

Si queremos además que $y(0) = 1/8$ y $y'(0) = 0$ entonces como

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x} + \tfrac{3}{4}\sin(2x) - 4x,$$

tenemos:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 e^0 + c_2 e^0 - \tfrac{3}{8}\cos(0) - \tfrac{3}{2} \\ &= c_1 + c_2 - \tfrac{3}{8} - \tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{8}, \\ y'(0) &= 2c_1 e^0 - 2c_2 e^0 + \tfrac{3}{4}\sin(0) \\ &= 2c_1 - 2c_2 = 0, \end{aligned}$$

de donde $c_1 = c_2 = 1$.

## 3.2 Método de variación de las constantes

El método que vamos a desarrollar nos servirá para encontrar una solución particular de una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes no constantes de la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

Suponemos conocidas dos soluciones $y_1(x), y_2(x)$, de la ecuación homogénea asociada. Por tanto,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

es también solución dela homogénea. Veamos que condiciones deben satisfacer las funciones $c_1(x)$ y $c_2(x)$ para que $y(x) = c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$ sea solución de la ecuación. Tenemos:

$$y'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x).$$

Vamos a pedir:

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0,$$

y entonces

$$\begin{aligned} y'(x) &= c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x), \\ y''(x) &= c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x). \end{aligned}$$

Sustituyéndolo en la ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) \\ &\quad +p(x)\left[c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)\right] \\ &\quad +q(x)\left[c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)\right] \\ &= c_1(x)\underbrace{\left[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)\right]}_{0} \\ &\quad +c_2(x)\underbrace{\left[y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)\right]}_{0} \\ &\quad +c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) \\ &= r(x). \end{aligned}$$

Por tanto, buscamos $c_1(x), c_2(x)$ tales que:

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= r(x). \end{aligned}$$

De donde, resolviendo el sistema lineal anterior por Cramer, se obtiene:

$$c_1'(x) = -\frac{y_2(x)r(x)}{W(y_1, y_2)}, \quad c_2'(x) = \frac{y_1(x)r(x)}{W(y_1, y_2)}.$$

**Ejemplo:** Hallar la solución general de la ecuación $y'' + y = \mathrm{tg}(x)$.

La ecuación característica de la ecuación homogénea es $\lambda^2 + 1 = 0$. Tiene dos raíces complejas $\pm i$ y la solución general de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Por tanto, dos soluciones de la ecuación homogénea son: $y_1(x) = \cos x$ y $y_2(x) = \sin x$ y aplicamos el método de variación de las constantes. Tenemos:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1.$$

Buscamos $c_1(x)$, $c_2(x)$ tales que:

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= -\frac{\sin x \, \mathrm{tg}(x)}{W(y_1, y_2)} = \sin^2 x \frac{1}{\cos x}, \\ c_2'(x) &= \frac{\cos x \, \mathrm{tg}(x)}{W(y_1, y_2)} = \sin x. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int \sin^2 x \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx \\ &= \int \left( \frac{1}{\cos x} - \cos x \right) dx = \int \left( \frac{1}{\cos x} - \cos x \right) \frac{1}{\cos x} \cos x dx \\ &= \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \cos x dx \underset{t = \sin x, \quad dt = \cos x dx}{=} \int \left( \frac{1}{1 - t^2} - 1 \right) dt \\ &= \int \left( \frac{1/2}{1 - t} + \frac{1/2}{1 + t} - 1 \right) dt \\ &= -\frac{1}{2} \ln |1 - t| + \frac{1}{2} \ln |1 + t| - t \\ &= \ln \left( \frac{1 + t}{1 - t} \right)^{1/2} - t \\ &= \ln \left( \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right)^{1/2} - \sin x + k_1. \end{aligned}$$

y

$$c_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x + k_2.$$

Por tanto, la solución general de nuestra ecuación es:

$$y(x) = \left( \ln \left( \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right)^{1/2} - \sin x + k_1 \right) \cos x + (-\cos x + k_2) \sin x.$$

**Ejemplo:** Hallar la solución general de la ecuación $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + 3)$.

La ecuación característica de la ecuación homogénea es $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Tiene raíces $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ y la solución general de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Por tanto, dos soluciones de la ecuación homogénea son: $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{2x}$ y aplicamos el método de variación de las constantes. Tenemos:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x}.$$

Buscamos $c_1(x)$, $c_2(x)$ tales que:

$$c_1'(x) = -\frac{y_2(x) r(x)}{W(y_1, y_2)}, \quad c_2'(x) = \frac{y_1(x) r(x)}{W(y_1, y_2)}$$

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= -\frac{e^{2x} e^{3x}(x^2+3)}{e^{3x}} = -e^{2x}(x^2+3), \\ c_2'(x) &= \frac{e^x e^{3x}(x^2+3)}{e^{3x}} = e^x(x^2+3). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$c_1(x) = -\int e^{2x}(x^2+3)dx.$$

Integramos por partes dos veces tomando $u = x^2+3$ y $dv = e^{2x}dx$. Obtenemos:

$$c_1(x) = -\int e^{2x}(x^2+3)dx = -\tfrac{1}{4}e^{2x}\left(2x^2 - 2x + 7\right) + k_1,$$

y análogamente integrando por partes dos veces tomando $u = x^2+3$ y $dv = e^x dx$ obtenemos

$$c_2(x) = \int e^x(x^2+3)dx = e^x(x^2 - 2x + 5) + k_2.$$

Por tanto, la solución general de nuestra ecuación es:

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 e^{2x} - \tfrac{1}{4}e^{3x}\left(2x^2 - 2x + 7\right) + e^{3x}(x^2 - 2x + 5).$$

Nótese que

$$\begin{aligned} y_p &= -\tfrac{1}{4}e^{3x}\left(2x^2-2x+7\right)+e^{3x}(x^2-2x+5) \\ &= e^{3x}\frac{1}{2}\left(x^2-3x+\frac{13}{2}\right) \end{aligned}$$

es una solución particular de la ecuación.

COMPROBACIÓN: Sustituimos $y_p$ en la ecuación $y''-3y'+2y=e^{5x}(x^2+3)$. Tenemos:

$$\begin{aligned} y_p' &= e^{3x}\frac{3}{2}\left(x^2-3x+\frac{13}{2}\right)+e^{3x}\frac{1}{2}\left(2x-3\right) \\ &= e^{3x}\frac{1}{2}\left(3x^2-7x+\frac{13}{2}\right) \\ y_p'' &= e^{3x}\frac{3}{2}\left(3x^2-7x+\frac{13}{2}\right)+e^{3x}\frac{1}{2}\left(6x-7\right) \\ &= e^{3x}\frac{1}{2}\left(9x^2-15x+\frac{5}{2}\right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} & y_p''-3y_p'+2y_p \\ = \; & e^{3x}\frac{1}{2}\left(9x^2-15x+\frac{5}{2}\right)-3e^{3x}\frac{1}{2}\left(3x^2-7x+\frac{13}{2}\right)+2e^{3x}\frac{1}{2}\left(x^2-3x+\frac{13}{2}\right) \\ = \; & e^{3x}\frac{1}{2}\left(9x^2-15x+\frac{5}{2}-9x^2+21x-3\frac{13}{2}+2x^2-6x+13\right) \\ = \; & e^{3x}\left(x^2+3\right). \end{aligned}$$

## 3.3 Ecs. lineales de orden superior con coeficientes constantes

Para las ecuaciones de orden superior se procede de manera análoga a como se ha hecho para las de ecuaciones de orden 2. Estudiaremos algunos ejemplos:

**Ejemplo:** Hallar la solución general de la ecuación $y''' - 2y'' - y' + 2y = 4$.

Como el orden de la ecuación es 3 la solución general de la ecuación homogénea es combinación lineal de 3 funciones. La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada es:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0.$$

Por tanto, las tres raíces son reales y distintas y la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}.$$

Como el término independiente de la ecuación es de tipo polinómico $b(x) = 4$ tomamos $y_p(x) = A$. Entonces, al sustituirlo en la ecuación obtenemos:

$$2A = 4 \implies A = 2.$$

Luego la solución general de la ecuación es:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x} + 2. \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Hallar la solución general de la ecuación $y^{(4} + 6y''' + 14y'' + 16y' + 8y = 24$.

Como el orden de la ecuación es 4 la solución general de la ecuación homogénea es combinación lineal de 4 funciones. La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada es:

$$\lambda^4 + 6\lambda^3 + 14\lambda^2 + 16\lambda + 8 = \left(\lambda^2 + 2\lambda + 2\right)(\lambda + 2)^2 = 0.$$

Por tanto, tiene una raíz real doble $\lambda = -2$ y dos complejas conjugadas $\lambda = -1 \pm i$. La solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + e^{-x}(C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x)).$$

Como el término independiente de la ecuación es de tipo polinómico $b(x) = 24$ tomamos $y_p(x) = A$. Entonces, al sustituirlo en la ecuación obtenemos:

$$8A = 24 \implies A = 3.$$

Luego la solución general de la ecuación es:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + e^{-x}(C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x)) + 3. \end{aligned}$$

# 4 Sistemas lineales de EDOs

Vamos a estudiar sistemas lineales homogéneos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Empezamos con un sistema sin término independiente de dos ecuaciones y dos incógnitas: las funciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = a_1 x(t) + b_1 y(t) \\ y'(t) = a_2 x(t) + b_2 y(t) \end{array} \right.$$

o equivalentemente

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y. \end{array} \right.$$

Matricialmente el sistema anterior se escribe como sigue:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Vamos a probar con soluciones del tipo:

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t},$$

con $\lambda, A, B$ constantes que vamos a intentar determinar. Sustituyéndolo en el sistema de ecuaciones obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ake^{\lambda t} = a_1 Ae^{\lambda t} + b_1 Be^{\lambda t}, \\ Bke^{\lambda t} = a_2 Ae^{\lambda t} + b_2 Be^{\lambda t}. \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = (a_1 - \lambda)A + b_1 B, \\ 0 = a_2 A + (b_2 - \lambda)B. \end{array} \right.$$

Como la solución $A = B = 0$ no nos interesa porque es la trivial para tener una solución distinta de la trivial tenemos que hallar los valores de $\lambda$ tales que:

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

que se denomina la *ecuación auxiliar* del sistema. La ecuación auxiliar es una ecuación de grado 2 en $\lambda$ y por tanto tiene dos soluciones. Cada solución nos da una solución particular del sistema de ecuaciones. Veamos ejemplos con los tres tipos posibles de soluciones de la ecuación auxiliar:

- Raíces reales distintas
- Raíz real doble
- Raíces complejas conjugadas

**Raíces reales distintas** Sean $\lambda_1, \lambda_2$ las dos raíces reales distintas de la ecuación auxiliar. Para $\lambda_1$ (resp. $\lambda_2$) hallamos $A_1, B_1$ (resp. $A_2, B_2$) soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = (a_1 - \lambda_1)A + b_1 B, \\ 0 = a_2 A + (b_2 - \lambda_1)B, \end{cases} \qquad \left( \text{resp.} \begin{cases} 0 = (a_1 - \lambda_2)A + b_1 B, \\ 0 = a_2 A + (b_2 - \lambda_2)B, \end{cases} \right)$$

entonces

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 A_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y = c_1 B_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 B_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases}$$

es la solución general del sistema.

**NOTA:** Nótese que $\lambda_1, \lambda_2$ son los autovalores de la matriz de coeficientes del sistema:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

y $(A_1, B_1)$ es el autovector asociado al autovalor $\lambda_1$ y $(A_2, B_2)$ es el autovector asociado al autovalor $\lambda_2$. La solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_1 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}.$$

A las dos soluciones particulares:

$$\left\{ \begin{pmatrix} A_1 e^{\lambda_1 t} \\ B_1 e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 e^{\lambda_2 t} \\ B_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \right\}$$

la denominamos sistema fundamental de soluciones. La solución general del sistema de ecuaciones es una combinación lineal de estas dos soluciones particulares.

**Ejemplo:** Hallar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y. \end{cases}$$

Marca (En donde me quede en la ultima lectura)

La ecuación axiliar es:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda+3)(\lambda-2).$$

Para $\lambda = 2$ buscamos $A, B$ soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 0 = (1-2)A + B \\ 0 = 4A + (-2-2)B \end{cases} \Longrightarrow A = B.$$

Por tanto, una solución no trivial es $A = B = 1$, y $x = e^{2t}$, $y = e^{2t}$, es una solución particular del sistema.

Para $\lambda = -3$ buscamos $A, B$ soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 0 = (1+3)A + B \\ 0 = 4A + (-2+3)B \end{cases} \Longrightarrow 0 = 4A + B.$$

Por tanto, una solución no trivial es $A = 1$, $B = -4$, y $x = e^{-3t}$, $y = -4e^{-3t}$, es una solución particular del sistema independiente de la anterior.

Luego,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

equivalentemente

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}, \\ y = c_1 e^{2t} - 4c_2 e^{-3t}, \end{cases}$$

es la solución general del sistema de ecuaciones.

**Raíz real doble** Sea $\lambda_1$ las raíz real doble de la ecuación auxiliar. Para $\lambda_1$ hallamos $A, B$ soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = (a_1 - \lambda_1)A + b_1 B, \\ 0 = a_2 A + (b_2 - \lambda_1)B, \end{cases}$$

entonces $x = Ae^{\lambda_1 t}$, $y = Be^{\lambda_1 t}$ es una solución particular del sistema. Para obtener la solución general necesitamos otra solución particular. Probamos con

$$\begin{cases} x = (A_1 + tA_2)e^{\lambda_1 t}, \\ y = (B_1 + tB_2)e^{\lambda_1 t}, \end{cases}$$

esto es,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + t \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}.$$

La derivada es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + t\lambda_1 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}$$

Lo sustituimos en el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ con } M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},$$

y obtenemos:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + t\lambda_1 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} = M \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + tM \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}$$

multiplicando por $e^{\lambda t}$ e igualando los coeficientes de $t$ y los términos independientes, obtenemos:

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}, \\ (M - \lambda I) \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Conclusión:**

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \text{ es autovector de } M \text{ asociado al autovalor } \lambda_1,$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \text{ satisface } (M - \lambda I) \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo:** Hallar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

La ecuación axiliar es:

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Para $\lambda = 1$ buscamos $(A, B)$ autovector asociado a $\lambda = 1$. Tenemos:

$$\begin{cases} 0 = (3-1)A - 4B \\ 0 = A + (-1-1)B \end{cases} \Longrightarrow 0 = A - 2B.$$

Por tanto, una solución no trivial es $A = 2$, $B = 1$, y $x = 2e^t$, $y = e^t$, es una solución particular del sistema. Buscamos ahora $(A, B)$ tales que:

$$\begin{pmatrix} 3-1 & -4 \\ 1 & -1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

esto es,

$$\begin{cases} 2A - 4B = 2, \\ A - 2B = 1, \end{cases}$$

luego $A = 1 + 2B$. Por ejemplo $(A, B) = (1, 0)$ es solución. Otra solución particular del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 1+2t \\ t \end{pmatrix} e^t.$$

La soluciíon general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1+2t \\ t \end{pmatrix} e^t.$$

**Raíces complejas conjugadas** Sean $\lambda = a \pm bi$ las dos raíces complejas conjugadas de la ecuación auxiliar. Para $\lambda = a + bi$ hallamos $A, B$ soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = (a_1 - \lambda)A + b_1 B, \\ 0 = a_2 A + (b_2 - \lambda)B, \end{cases}$$

entonces

$$\begin{cases} x = Ae^{\lambda t} = (A_1 + iA_2)e^{(a+bi)t} = (A_1 + iA_2)e^{at}\left[\cos bt + i \sin bt\right], \\ y = Be^{\lambda t} = (B_1 + iB_2)e^{(a+bi)t} = (B_1 + iB_2)e^{at}\left[\cos bt + i \sin bt\right], \end{cases}$$

es solución particular del sistema.

**Propiedad:** Si un par de funciones complejas es solución del sistema de ecuaciones, cuyos coeficientes son constantes reales, entonces sus respectivas partes reales e imaginarias son soluciones con valores reales.

Por tanto, tenemos las dos siguientes soluciones particulares del sistema (que se demuestra que además son independientes):

$$\begin{cases} x = e^{at}\left[A_1 \cos bt - A_2 \sin bt\right], \\ y = e^{at}\left[B_1 \cos bt - B_2 \sin bt\right], \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} x = e^{at}\left[A_2 \cos bt + A_1 \sin bt\right], \\ y = e^{at}\left[B_2 \cos bt + B_1 \sin bt\right]. \end{cases}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es una combinación lineal de estas dos soluciones:

$$\begin{cases} x = e^{at}C_1\left[A_1 \cos bt - A_2 \sin bt\right] + C_2 e^{at}\left[A_2 \cos bt + A_1 \sin bt\right], \\ y = e^{at}C_1\left[B_1 \cos bt - B_2 \sin bt\right] + C_2\left[B_2 \cos bt + B_1 \sin bt\right]. \end{cases}$$

**NOTA:** Nótese que $a, b$ son la parte real y compleja respectivamente de los autovalores de la matriz de coeficientes del sistema:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

y $(A = A_1 + A_2 i, B = B_1 + iB_2)$ es el autovector asociado a $a + bi$. Una solución particular <u>compleja</u> del sistema es:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 + A_2 i \\ B_1 + iB_2 \end{pmatrix} e^{(a+bi)t} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 + A_2 i \\ B_1 + iB_2 \end{pmatrix} e^{at} (\cos bt + i \sin bt) \\ &= \begin{pmatrix} A_1 \cos(bt) - A_2 \sin(bt) \\ B_1 \cos(bt) - B_2 \sin(bt) \end{pmatrix} e^{at} + i \begin{pmatrix} A_2 \cos(bt) + A_1 \sin(bt) \\ B_2 \cos(bt) + B_1 \sin(bt) \end{pmatrix} e^{at}. \end{aligned}$$

La parte real y la parte imaginaria de la solución anterior son dos soluciones particulares <u>reales</u> del sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cos(bt) - A_2 \sin(bt) \\ B_1 \cos(bt) - B_2 \sin(bt) \end{pmatrix} e^{at},$$

y

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \cos(bt) + A_1 \sin(bt) \\ B_2 \cos(bt) + B_1 \sin(bt) \end{pmatrix} e^{at}.$$

La solución general del sistema de ecuaciones es una combinación lineal de estas dos soluciones particulares:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} A_1 \cos(bt) - A_2 \sin(bt) \\ B_1 \cos(bt) - B_2 \sin(bt) \end{pmatrix} e^{at} + C_2 \begin{pmatrix} A_2 \cos(bt) + A_1 \sin(bt) \\ B_2 \cos(bt) + B_1 \sin(bt) \end{pmatrix} e^{at}.$$

Esto es,

$$\begin{aligned} x &= e^{at} \left[ A_1 \left( C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt) \right) + A_2 \left( C_2 \cos(bt) - C_1 \sin(bt) \right) \right], \\ y &= e^{at} \left[ B_1 \left( C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt) \right) + B_2 \left( C_2 \cos(bt) - C_1 \sin(bt) \right) \right]. \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Hallar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y. \end{cases}$$

La ecuación característica es:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 13,$$

con raíces $\lambda = 3 \pm 2i$. Buscamos un autovector $(A, B)$ asociado al autovalor $\lambda = 3 + 2i$, esto es, $A, B$ son solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 0 = (1 - (3+2i))A - 2B, \\ 0 = 4A + (5 - (3+2i))B, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = (1+i)A + B, \\ 0 = 2A + (1-i)B. \end{cases}$$

NOTA: El sistema anterior es compatible indeterminado (las dos ecuaciones son linealmente dependientes). Nótese que si multiplicamos la segunda ecuación por $1 + i$ obtenemos:

$$0 = (1+i)\left(2A + (1-i)B\right) = 2(1+i)A + 2B = 2\left((1+i)A + B\right).$$

Buscamos una solución particular de la primera ecuación: $0 = (1 + i)A + B$. Como $B = -(1+i)A$, una solución es $A = 1$, $B = -(1+i)$. Por tanto, una solución particular <u>compleja</u> del sistema es:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -(1+i) \end{pmatrix} e^{(3+2i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -(1+i) \end{pmatrix} e^{3t} e^{2it} = \begin{pmatrix} 1 \\ -(1+i) \end{pmatrix} e^{3t} (\cos 2t + i \sin 2t) \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} e^{3t} + i \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} e^{3t}. \end{aligned}$$

Dos soluciones particulares <u>reales</u> del sistema son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} e^{3t}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

La solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

**Ejemplo:** Hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - 13y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 4y, \end{cases} \qquad x(0) = 5, \ y(0) = 2.$$

La ecuación auxiliar es:

$$0 = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -13 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

con raíces $\lambda = 1 \pm i$. Buscamos un autovector $(A, B)$ asociado al autovalor $\lambda = 1 + i$; esto es, $A, B$ son solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 6-(1+i) & -13 \\ 2 & -4-(1+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = (5-i)A - 13B, \\ 0 = 2A - (5+i)B. \end{cases}$$

NOTA: El sistema anterior es compatible indeterminado (las dos ecuaciones son linealmente dependientes). Nótese que si multiplicamos la segunda ecuación por $5 - i$ obtenemos:

$$0 = (5-i)\left(2A - (5+i)B\right) = 2(5-i)A - 26B = 2\left((5-i)A - 13B\right).$$

Buscamos una solución $(A, B)$ de la segunda ecuación: $0 = 2A - (5+i)B$. Por ejemplo, tomamos $B = 2$ y $A = 5 + i$. Por tanto, una solución particular <u>compleja</u> del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} e^t + i \begin{pmatrix} 5\sin t + \cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} e^t.$$

Dos soluciones particulares <u>reales</u> del sistema son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} e^t, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sin t + \cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} e^t.$$

La solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 5\cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 5\sin t + \cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} e^t.$$

Para hallar la solución particular con condiciones iniciales $x(0) = 5$, $y(0) = 2$, sustituimos la solución general en $t = 0$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 5\cos 0 - \sin 0 \\ 2\cos 0 \end{pmatrix} e^0 + C_2 \begin{pmatrix} 5\sin 0 + \cos 0 \\ 2\sin 0 \end{pmatrix} e^0 \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de donde, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. La solución buscada es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} e^t.$$

## 4.1 Sistemas lineales no homogéneos de EDOs

Vamos a estudiar sistemas lineales no homogéneos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Empezamos con un sistema con término independiente de dos ecuaciones y dos incógnitas: las funciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Tenemos:

$$\begin{cases} x'(t) = a_1x(t) + b_1y(t) + f(t) \\ y'(t) = a_2x(t) + b_2y(t) + g(t) \end{cases}$$

Matricialmente el sistema anterior se escribe como sigue:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt}(t) \\ \dfrac{dy}{dt}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema se obtiene como suma de la solución del sistema homogéneo asociado:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt}(t) \\ \dfrac{dy}{dt}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

y una solución particular del sistema no homogéneo. Para hallar una solución particular del sistema no homogéneo seguiremos el razonamiento utilizado para el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden no homogéneas. Esto es:

- Los términos independientes son funciones polinómicas de grado $n$. Entonces tomamos como candidata a solución particular de la ecuación un polinomio del mismo grado:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= a_1t^n + a_2t^{n-1} + a_3t^{n-2} + \cdots \\ y_p(t) &= b_1t^n + b_2t^{n-1} + b_3t^{n-2} + \cdots \end{aligned}$$

  donde $a_1, a_2, \ldots$ son *los coeficientes indeterminados.* Sustituyéndolo en la ecuación despejamos de los valores de los coeficientes indeterminados.

- Los términos independientes son funciones exponenciales; por ejemplo,

$$f(t) = e^{at} \text{ y } g(t) = e^{bt}.$$

  Tomamos $x_p(t) = Ae^{at}$ y $y_p(t) = Be^{bt}$, donde $A, B$ son *coeficientes indeterminados.* Sustituyéndolo en la ecuación despejamos de los valores de los coeficientes indeterminados.

- Los términos independientes son funciones $\sin(\beta x)$ o $\cos(\beta x)$. En este caso tomamos

$$\begin{aligned} x_p(t) &= A_1\sin(\beta t) + B_1\cos(\beta t) \\ y_p(t) &= A_2\sin(\beta t) + B_2\cos(\beta t) \end{aligned}$$

  donde $A_1, B_1, A_2, B_2$ son los *coeficientes indeterminados.* Sustituyéndolo en la ecuación despejamos de los valores de los coeficientes indeterminados.

**Ejemplo:** Sabiendo que

$$\begin{cases} x(t) = 2e^{4t}, \\ y(t) = 3e^{4t}, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x(t) = e^{-t}, \\ y(t) = -e^{-t}, \end{cases}$$

son soluciones del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(t) + 2y(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x(t) + 2y(t), \end{cases}$$

se pide hallar la solución general del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(t) + 2y(t) + t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x(t) + 2y(t) - 5t - 2. \end{cases}$$

**Solución:** Como los términos independientes del sistema son polinomios de orden uno probamos con soluciones particulares de la forma:

$$\begin{cases} x(t) = at + b, \\ y(t) = ct + d. \end{cases}$$

Tenemos:

$$\begin{cases} x'(t) = a, \\ y'(t) = c, \end{cases}$$

y, sustituyéndolo en el sistema de EDOs obtenemos:

$$\begin{cases} a = at + b + 2(ct + d) + t - 1, \\ c = 3\,(at + b) + 2(ct + d) - 5t - 2. \end{cases}$$

Igualando coeficientes tenemos:

$$\begin{cases} 0 = a + 2c + 1 \\ a = b + 2d - 1 \\ 0 = 3a + 2c - 5 \\ c = 3b + 2d - 2 \end{cases} \Longrightarrow a = 3, b = -2, c = -2, d = 3$$

Por tanto, la solución gereal del sistema no homogéneo es:

$$\begin{cases} x(t) = A2e^{4t} + Be^{-t} + 3t - 2, \\ y(t) = A3e^{4t} - Be^{-t} - 2t + 3. \end{cases}$$

# 5 Aplicaciones

## 5.1 Mecanismo masa resorte

La ecuación diferencial que rige el mecanismo masa resorte es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + kx = f(t),$$

donde

- $x(t)$ es el desplazamiento respecto de la posición de equilibrio
- $m$ es la masa
- $\mu$ es el coeficiente de amortiguamiento viscoso
- $k$ es la constante elástica del resorte
- $f(t)$ es la fuerza exterior.

Queremos hallar el desplazamiento (vibración) para los distintos valores de $\mu$, $k$ y $f(t)$.

**Vibraciones libres** Caso homogéneo: $f(t) = 0$, tenemos:

$$mx''(t) + \mu x'(t) + kx(t) = 0.$$

Distinguimos dos casos: $\mu = 0$ y $\mu \neq 0$.

1. *Vibraciones libres sin amortiguamiento*: $\mu = 0$. La ecuación se escribe como sigue:

$$mx''(t) + kx(t) = 0.$$

La solución general es de la forma:

$$x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

Es un movimiento vibratrio.

2. *Vibraciones libres amortiguadas*: $\mu \neq 0$. La ecuación se escribe como sigue:

$$mx''(t) + \mu x'(t) + kx(t) = 0.$$

La ecuación característica de la ecuación es:

$$m\lambda^2 + \mu\lambda + k = 0,$$

y tiene raíces

$$\lambda = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m}.$$

Luego las soluciones dependen del signo de $\mu^2 - 4mk$.

(a) Si $\mu^2 - 4mk > 0$ entonces las raíces de la ecuación característica son:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m} < 0,\\ \lambda_2 &= \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m} < 0,\end{aligned}$$

y la solución general es de la forma:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}.$$

Se tiene:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \text{ (que es la posición de equilibrio).}$$

Luego la masa regresa a su posición de equilibrio.

Los valores $\mu$ tales que $\mu^2 - 4mk > 0$ se dicen de *sobreamortiguamiento*.

(b) Si $\mu^2 - 4mk = 0$ entonces $\mu = \sqrt{4mk}$, se denomina *amortiguamiento crítico*. La solución general es de la forma:

$$x(t) = (A + Bt)\, e^{-\frac{\sqrt{4mk}}{2m}t}.$$

(c) Si $\mu^2 - 4mk < 0$ ntonces las raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas. Los valores $\mu$ tales que $\mu^2 - 4mk < 0$ se denominan de *amortiguamiento subcrítico*. La solución general es de la forma:

$$x(t) = e^{-\frac{\mu}{2m}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{4mk-\mu^2}}{2m}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{4mk-\mu^2}}{2m}t\right)\right).$$

**Vibraciones forzadas** Caso no homogéneo: $f(t) \neq 0$.

Normalmente $f(t)$ es una fuerza de tipo periódico: $f(t) = \sin(\omega t)$. La solución particular de la ecuación es de la forma:

$$x_p(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t).$$

En el caso particular en el que $f(t) = \sin(\omega t)$ es solución de la homogénea (sucede cuando $\mu = 0$ y $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ llamada *frecuencia de resonancia*) la solución particular de la ecuación es de la forma:

$$x_p(t) = At\sin(\omega t) + Bt\cos(\omega t),$$

que es una caso **peligroso** pues $x_p(t)$ es una función no acotada.

## 5.2 Flexión de una viga

Suponemos una viga de longitu $L$, homogénea y con una sección transversal uniforme. Cuando no recibe carga alguna la curva que une los centroides de sus secciones transversales se denomina *eje de simetría* y si a la viga se le aplica una carga en un plano vertical que contenga al eje de simetría, sufre una distorsión y la curva que une los centroides de las secciones transversales se denomina *curva de flexión* ó *elástica*.

Suponagamos que el eje $x$ coincide con el eje de sietría y $y(x)$ es la curva de flexión (flexión positiva si $y(x) < 0$).

La teoría de elasticidad demuestra que el momento flexionante $M(x)$ satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = w(x)$$

donde $w(x)$ es la carga por unidad de longitud. Además se tiene:

$$M(x) = E \cdot I \cdot k(x),$$

donde $E, I$ son constantes y $k(x)$ es la curvatura de la curva de flexión y por tanto satisface la siguiente ecuación:

$$k(x) = \frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}}$$

que cuando $y'(x) \approx 0$ entonces $(1 + y'(x)^2)^{3/2} \approx 1$ y por tanto, $k(x) \approx y''(x)$. Luego

$$\frac{dM}{dx} = EI\frac{dk(x)}{dx} = EI\frac{d^3y}{dx^3},$$

y la curva de flexión $y(x)$ satisface la siguiente EDO de cuarto orden:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x).$$

# 6 Bibliografía

1. Chiang, A. C. Métodos Fundamentales de Economía Matemática. Ed. McGraw-Hill. (1987).

2. Simmons, G. F. Ecuaciones diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas. Ed. McGraw-Hill. (1996).