

Universidad Técnica de Manabí
Modelado y Simulación 1
Modelos Autónomos No Lineales

Wilfredo ANGULO

1 Modelos autónomos no lineales en \mathbb{R}^2

Queremos estudiar el comportamiento cualitativo de las trayectorias del modelo matemático autónomo

$$\dot{x} = f_1(x, y), \quad (1)$$

$$\dot{y} = f_2(x, y), \quad (2)$$

en donde f_1 y f_2 son funciones en las variables (x, y) y al menos una de ellas es no lineal en dichas variables.

Definición 1 (Estado estacionario). *Las coordenadas (x^e, y^e) son un estado estacionario del sistema autónomo no lineal (1)-(2) si es solución del **sistema homogéneo de ecuaciones algebraicas no lineales**:*

$$f_1(x^e, y^e) = 0 \quad (3)$$

$$f_2(x^e, y^e) = 0 \quad (4)$$

Observación 1.

1. Las **isoclinas** (ó: nullclinas) del sistema (1)-(2) son curvas en el plano de fase en donde el flujo del campo es horizontal o donde es vertical. Al respecto se tiene:
 - La isocлина dada por la ecuación $f_1(x, y) = 0$ es una curva en el plano de fase xy donde el campo vectorial varía únicamente en la dirección del eje y (el flujo es vertical porque $\dot{x} = 0$).
 - La isocлина dada por la ecuación $f_2(x, y) = 0$ es una curva en el plano de fase xy donde el campo vectorial varía únicamente en la dirección del eje x (el flujo es horizontal porque $\dot{y} = 0$).
2. Las coordenadas (x, y) en donde dos isoclinas se cortan, lógicamente, determinan los estados estacionarios (x^e, y^e) del sistema (1)-(2).
3. Las isoclinas van a determinar el comportamiento de las trayectorias $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ del sistema (1)-(2) que comienzan en estados iniciales $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ dentro de las regiones del plano de fase delimitadas por éstas.

Ejemplo 1.

Determinar los estados estacionarios del siguiente modelo autónomo no lineal y realizar un bosquejo del retrato de fase con sus isoclinas

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x^2 + 2 \\ \dot{y} &= x^2 - xy\end{aligned}$$

Solución:

Por definición, los estados estacionarios son las coordenadas (x^e, y^e) mediante la intersección de las isoclinas dadas por el sistema de ecuaciones algebraicas no lineales

$$y - x^2 + 2 = 0, \quad (5)$$

$$x^2 - xy = 0. \quad (6)$$

Entonces

- De la ecuación (5) se obtiene la isocлина

$$y = x^2 - 2,$$

la cual representa en el plano de fase (x, y) a la parábola con vértice en $(0, -2)$.

- De la ecuación (6) se tiene que

$$x(x - y) = 0.$$

Por tanto, se obtienen dos isoclinas:

- La recta $x = 0$. Es decir, el eje y del plano de fase.
- La recta $y = x$ que pasa por el origen.

Si se realiza el gráfico de estas isoclinas, se pueden evidenciar los estados estacionarios del sistema, tal como se muestra en la Figura 1.

Para encontrar los puntos de equilibrio nos remitimos a la ecuación (6) factorizada, de donde se tiene que

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad y = x.$$

Entonces se consideran los siguientes casos con la ecuación (5):

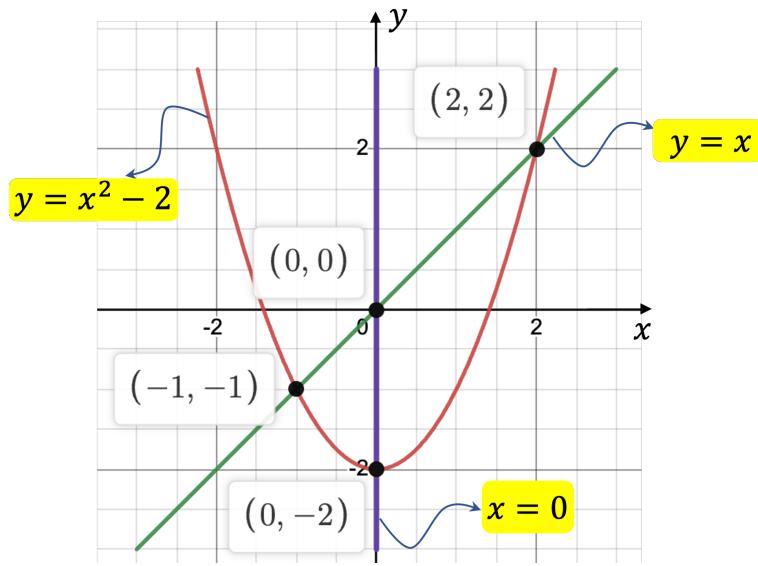


Figura 1: Isoclinas e intersecciones (estados estacionarios).

- Si $x = 0$, entonces al reemplazar en (5) se obtiene que

$$y - 0^2 + 2 = 0,$$

de donde $y = -2$. Por tanto, el primer estado estacionario es

$$(x^e, y^e) = (0, -2).$$

- Si $y = x$, entonces al reemplazar en (5) se obtiene

$$x - x^2 + 2 = 0 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff (x - 2)(x + 1) = 0.$$

De acá

$$x = 2 \quad \text{ó} \quad x = -1.$$

Como $y = x$, entonces los otros dos estados estacionarios son

$$(x^e, y^e) = (2, 2) \quad \text{ó} \quad (x^e, y^e) = (-1, -1).$$

De esta manera, el sistema (1)-(2) tiene tres estados estacionarios:

$$(x^e, y^e) = (0, -2), \quad (x^e, y^e) = (2, 2) \quad \text{y} \quad (x^e, y^e) = (-1, -1).$$

Ahora investigaremos el sentido que tienen las líneas de flujo sobre cada una de estas isoclinas.

- **Flujo vertical:** el cual se tiene sobre la isoclina

$$y = x^2 - 2.$$

Si se reemplaza esta isoclina en la segunda EDO del sistema se encuentra que

$$\dot{y} = x^2 - x^3 + 2x = -x(x+1)(x-2).$$

Entonces

- * $\dot{y} > 0$ para todo $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2)$. Esto indica que la dirección del campo es hacia arriba en las regiones definidas por los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(0, 2)$.
- * $\dot{y} < 0$ para todo $x \in (-1, 0) \cup (2, +\infty)$. Esto indica que la dirección del campo es hacia abajo en las regiones definidas por los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$.

En la Figura 2 se ilustra la isoclina sobre la cual el flujo del campo es vertical, junto con regiones donde la dirección es hacia arriba y donde la dirección es hacia abajo.

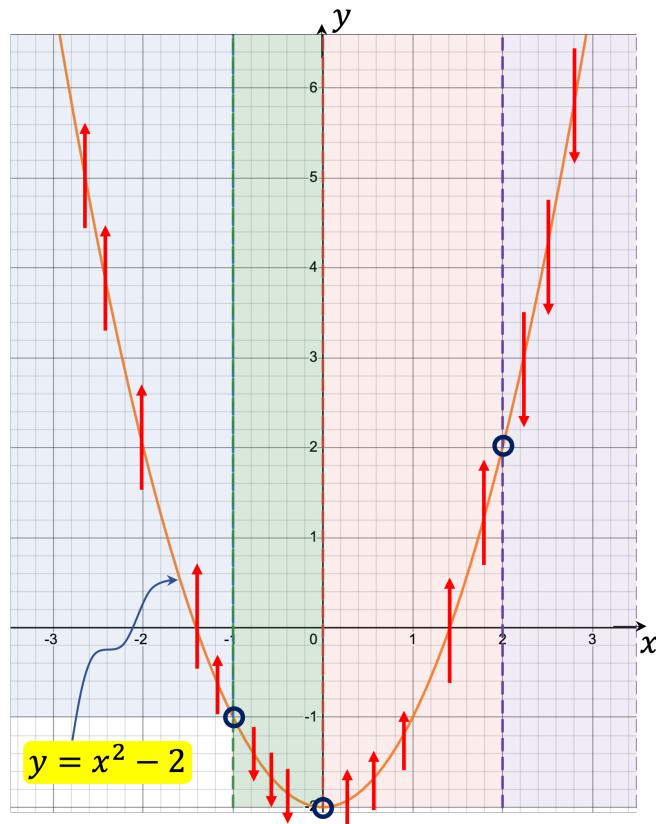


Figura 2: Flujo vertical del campo sobre la isoclina $y = x^2 - 2$ y sus direcciones en regiones definidas por: $(-\infty, -1) \cup (0, 2)$ y $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$.

- **Flujo horizontal:** el cual se tiene sobre las isoclinas

$$x = 0 \quad \text{y} \quad y = x.$$

Reemplazamos cada una de estas isoclinas en la primera EDO del sistema y analizamos el signo de \dot{x} .

* **Sobre $x = 0$:** la EDO se transforma en

$$\dot{x} = y + 2.$$

Entonces:

** $\dot{x} > 0 \iff y + 2 > 0 \implies y > -2$. Esto indica que sobre el eje y la dirección del campo es hacia la derecha en la región para la cual $y \in (-2, +\infty)$.

** $\dot{x} < 0 \iff y + 2 < 0 \implies y < -2$. Esto indica que sobre el eje y la dirección del campo es hacia la izquierda en la región para la cual $y \in (-\infty, -2)$.

En la Figura 3 se ilustra esta situación.

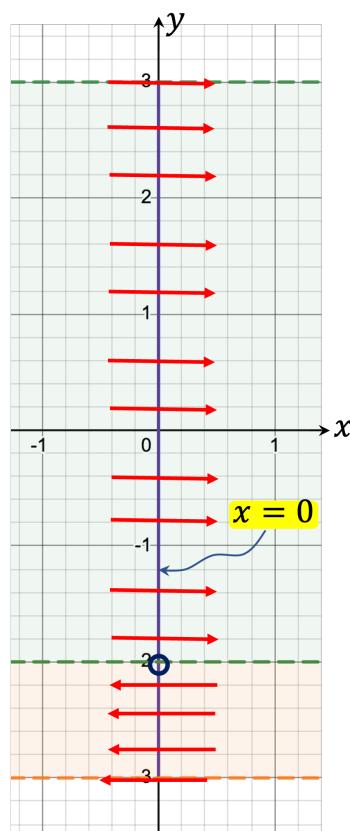


Figura 3: Flujo horizontal del campo sobre la isocrina $x = 0$ (el eje y) y sus direcciones en regiones definidas por los $y \in (-2, +\infty)$ y los $y \in (-\infty, -2)$.

* Sobre $y = x$: la EDO se transforma en

$$\dot{x} = x - x^2 + 2 = -x^2 + x + 2.$$

Entonces

** $\dot{x} > 0 \iff -x^2 + x + 2 > 0 \iff x^2 - x - 2 < 0 \iff (x - 2)(x + 1) < 0 \iff x \in (-1, 2)$. Esto indica que la dirección del campo es hacia la derecha en la región definida por el intervalo $(-1, 2)$.

** $\dot{x} < 0 \iff -x^2 + x + 2 < 0 \iff x^2 - x - 2 > 0 \iff (x - 2)(x + 1) > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$. Esto indica que la dirección del campo es hacia la izquierda en las regiones definidas por los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$.

En la Figura 4 se ilustra esta situación.

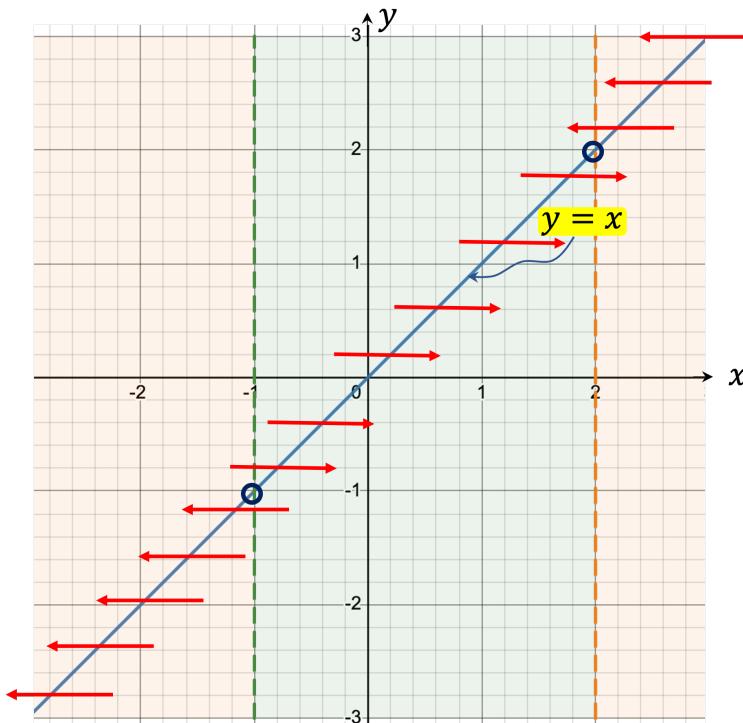


Figura 4: Flujo horizontal del campo sobre la isoclinia $y = x$ y sus direcciones en regiones definidas por los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ y $(2, +\infty)$.

En la Figura 5 se muestra un bosquejo de las isoclinas con las direcciones del campo cuando es horizontal y vertical, junto con los tres estados estacionarios.

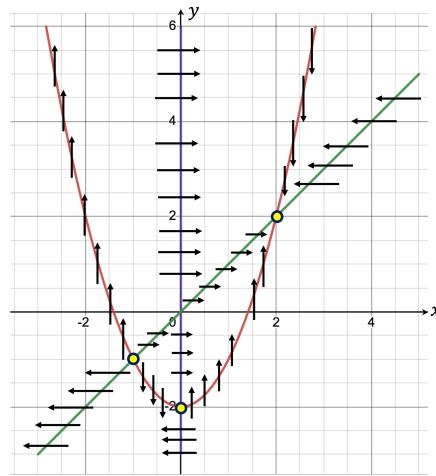


Figura 5: Bosquejo de las isolíneas con las direcciones del campo cuando es horizontal y verticales, junto con los tres estados estacionarios (círculos amarillos).

En la Figura 6 se muestra un bosquejo del retrato de fase, elaborado con MATLAB, para el sistema (1)-(2) con las isolíneas y sus estados estacionarios.

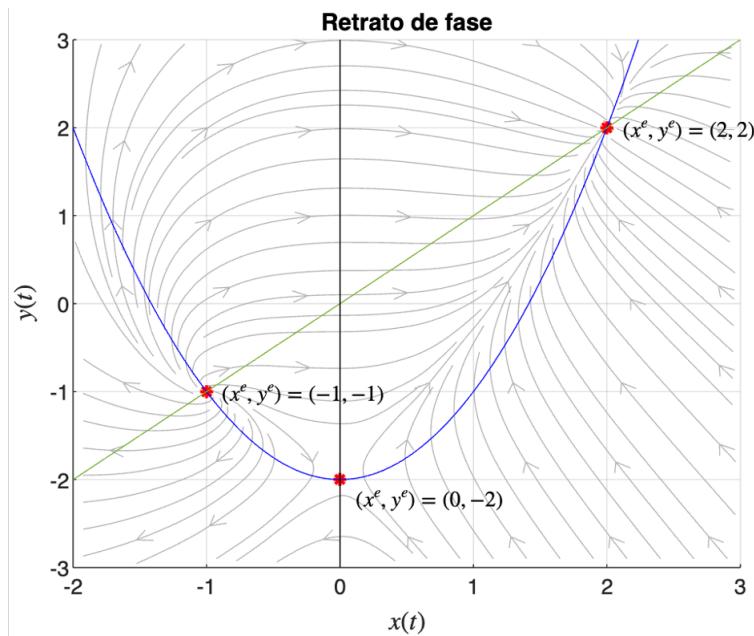


Figura 6: Bosquejo del retrato de fase con las isolíneas y estados estacionarios.

Con este retrato de fase se tienen una evidencia “numérica” respecto a la estabilidad de los estados estacionarios:

- el estado estacionario $(x^e, y^e) = (-1, -1)$ parece un foco inestable;

- el estado estacionario $(x^e, y^e) = (0, -2)$ parece un punto silla inestable;
- el estado estacionario $(x^e, y^e) = (2, 2)$ parece un foco asintóticamente estable.

Otra evidencia “numérica” con este bosquejo son las regiones delimitadas por las isoclinas, los signos del campo en cada región y la existencia de variedades. Estos aspectos, serán tratados de manera analítica con las técnicas del análisis cualitativo que se darán a continuación.

2 Linealización y teorema de Hartman

En esta sección ampliamos la técnica de linealización desarrollada anteriormente para modelos autónomos no lineales en \mathbb{R} . La esperanza es que podamos aproximar el retrato de fase cerca de un estado estacionario mediante el de un sistema lineal correspondiente.

En primer lugar consideremos el sistema autónomo no lineal en \mathbb{R}^2 (1)-(2) y supongamos que (x^e, y^e) es un estado estacionario. Sean

$$u = x - x^e \quad y \quad v = y - y^e$$

la denotación de las componentes de una **pequeña perturbación** del estado estacionario. Para ver si la perturbación crece o decae, necesitamos derivar ecuaciones diferenciales para u y v :

- **Para u :**

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{x} && (\text{ya que } x^e \text{ es constante}) \\ &= f_1(x, y) \\ &= f_1(u + x^e, v + y^e) && (\text{por sustitución}) \\ &= f_1(x^e, y^e) + u \frac{\partial f_1}{\partial x} + v \frac{\partial f_1}{\partial y} + \mathcal{O}(u^2, v^2, uv) && (\text{Expansión en serie de Taylor}) \\ \dot{u} &= u \frac{\partial f_1}{\partial x} + v \frac{\partial f_1}{\partial y} + \mathcal{O}(u^2, v^2, uv) && (\text{ya que } f_1(x^e, y^e) = 0) \end{aligned}$$

Debemos señalar que las derivadas $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ y $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ están evaluadas en (x^e, y^e) ; por lo tanto son números, no funciones. Además, la notación abreviada $\mathcal{O}(u^2, v^2, uv)$ denota **términos cuadráticos** en u y v . Como u y v son pequeños, estos términos cuadráticos son *extremadamente pequeños*.

- **Para v :**

Por un desarrollo similar al anterior se encuentra que

$$\dot{v} = u \frac{\partial f_2}{\partial x} + v \frac{\partial f_2}{\partial y} + \mathcal{O}(u^2, v^2, uv)$$

De lo anterior, se puede decir que la perturbación (u, v) evoluciona de acuerdo a

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \mathcal{O}(u^2, v^2, uv) \quad (7)$$

Para escribir de manera compacta la expresión (7) se introduce la notación

$$\mathbf{x}^e = \begin{pmatrix} x^e \\ y^e \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad J(\mathbf{x}^e) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix},$$

en donde a $J(\mathbf{x}^e)$ se le llama **matriz Jacobiana** en el estado estacionario \mathbf{x}^e .

Ahora bien, como los términos cuadráticos de (7) son pequeños, resulta tentador ignorarlos por completo. Si hacemos eso, obtenemos el **sistema linealizado**.

$$\dot{\mathbf{u}} = J(\mathbf{x}^e)\mathbf{u} \quad (8)$$

cuya dinámica se puede analizar empleando la teoría cualitativa de sistemas lineales vista previamente.

La extensión a sistemas autónomos no lineales en \mathbb{R}^n es directa. Es decir: encontrar $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (9)$$

donde $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es el campo vectorial. Entonces, una linealización de este sistema en una vecindad de uno de sus estados estacionarios \mathbf{x}^e consiste en determinar la evolución de una perturbación $\mathbf{u} \in \Omega$ tal que

$$\dot{\mathbf{u}} = J(\mathbf{x}^e)\mathbf{u}, \quad (10)$$

donde ahora la matriz Jacobiana, de tamaño $\mathbb{R}^{m \times n}$, viene dada por

$$J(\mathbf{x}^e) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (11)$$

La siguiente definición y resultado se tienen respecto a los estados estacionarios de un sistema autónomo lineal.

Definición 2 (Estado estacionario hiperbólico). *Un estado estacionario \mathbf{x}^e se llama **hiperbólico** si la parte real de los valores propios de la matriz jacobiana $J(\mathbf{x}^e)$ son **distintos de cero**. Si la **parte real de cualquiera de los valores propios de la jacobiana es igual a cero**, entonces el estado estacionario se llama **no hiperbólico**.*

Teorema 3 (Teorema de Hartman). *Supongamos que \mathbf{x}^e es un **estado estacionario hiperbólico** del sistema autónomo no lineal (9). Entonces, existe una vecindad de \mathbf{x}^e en la que el retrato de fase del sistema no lineal se parece al del sistema linealizado (10). En otras palabras, existe un **cambio curvilíneo continuo de coordenadas** que lleva de un retrato de fase al otro, y en una pequeña región alrededor del estado estacionario, los retratos son **cualitativamente equivalentes**.*

Observación 2.

1. El sistema linealizado proporciona una imagen cualitativamente correcta del retrato de fase cerca de \mathbf{x}^e . Los casos límites: centros, nodos singulares y nodos degenerados, son más delicados porque los términos no lineales que se han despreciado en la expansión de Taylor pueden tener efectos apreciables sobre la dinámica del sistema a nivel local.
2. Las variedades estables e inestables de un sistema no lineal se denotan por W_s y W_u , respectivamente.
3. El teorema de Hartman implica que las variedades W_s y W_u son tangentes a las variedades E_s y E_u , respectivamente, cerca del estado estacionario \mathbf{x}^e . Además, estas trayectorias especiales divergen (se alejan de las variedades del sistema linealizado) a medida que uno se aleja del estado estacionario.
4. Si algún estado estacionario **no es hiperbólico**, entonces la teoría local no decide nada sobre su comportamiento. Por lo tanto, se deben utilizar otros métodos para dibujar el retrato de fase y es posible que se requieran solucionadores numéricos.

3 Estabilidad local de sistemas no lineales

Proposición 4. *Considere el sistema autónomo no lineal (9), un estado estacionario \mathbf{x}^e de este sistema y la matriz Jacobina $J(\mathbf{x}^e)$ (11) asociada a su linealización (10). Entonces se tiene la siguiente caracterización*

- i) *Si **todos** los valores propios de $J(\mathbf{x}^e)$ **tienen parte real negativa**, entonces el estado estacionario \mathbf{x}^e es **asintóticamente estable** a nivel local.*
- ii) *Si **existe algún** valor propio de $J(\mathbf{x}^e)$ con **parte real positiva**, entonces el estado estacionario \mathbf{x}^e es **inestable**.*

- iii) Si **existe algún** valor propio de $J(\mathbf{x}^e)$ con **parte real nula**, entonces **la linealización no decide** sobre la naturaleza del estado estacionario. En este caso, el estado estacionario es **no hiperbólico**.

Ejemplo 2.

Caracterizar los estados estacionarios de los siguientes sistemas no lineales

a) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 - 1 \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 + 2 \\ \dot{y} = x^2 - xy \end{cases}$

solución:

a) Para el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 - 1 \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$$

los estados estacionarios son

$$(x^e, y^e) = (-1, 0) \quad \text{y} \quad (x^e, y^e) = (1, 0).$$

Por otro lado, la Jacobiana en cuquier (x, y) es

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

* **Caracterización del estacionario** $(x^e, y^e) = (-1, 0)$:

Evaluamos la matriz Jacobiana en dicho punto para obtener

$$J(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 2$. Cómo λ_1 y λ_2 son reales, distintos y uno es positivo y otro negativo, entonces el estado estacionario es un **punto silla inestable** a nivel local.

* **Caracterización del estacionario** $(x^e, y^e) = (1, 0)$:

Evaluamos la matriz Jacobiana en dicho punto para obtener

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 2$. Como λ_1 y λ_2 son reales repetidos positivos (existen dos vectores propios l.i), entonces el estado estacionario es un posible **nodo singular inestable** a nivel local. Esto lo verificaremos, por ahora, con la evidencia “numérica” sobre un bosquejo del retrato de fase.

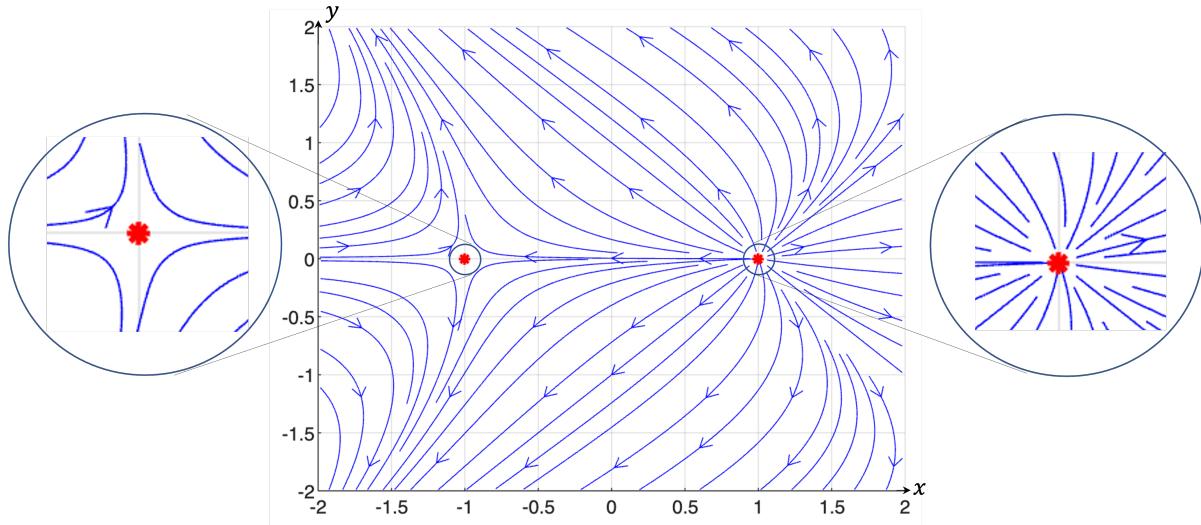


Figura 7: Bosquejo del retrato de fase para el sistema (a), con el zoom sobre cada estado estacionario: a la izquierda el estado $(-1, 0)$ y a la derecha el estado $(1, 0)$.

b) Para el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 + 2 \\ \dot{y} = x^2 - xy \end{cases}$$

los estados estacionarios fueron calculados en el Ejemplo 1, los cuales son:

$$(x^e, y^e) = (-1, -1), \quad (x^e, y^e) = (0, -2) \quad \text{y} \quad (x^e, y^e) = (2, 2)$$

Por otro lado, la Jacobiana en cuquier (x, y) es

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 2x - y & -x \end{pmatrix}.$$

* **Caracterización del estacionario** $(x^e, y^e) = (-1, -1)$:

Evaluamos la matriz Jacobiana en dicho punto para obtener

$$J(-1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz son

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ya que

$$\Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_2) = \frac{3}{2} > 0,$$

entonces el estado estacionario es un **foco inestable** a nivel local.

- * **Caracterización del estacionario** $(x^e, y^e) = (0, -2)$:

Evaluamos la matriz Jacobiana en dicho punto para obtener

$$J(0, -2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz son $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ y $\lambda_2 = \sqrt{2}$. Ya que λ_1 y λ_2 son reales distintos, uno positivo y otro negativo, entonces el estado estacionario es un **punto silla inestable** a nivel local.

- * **Caracterización del estacionario** $(x^e, y^e) = (2, 2)$:

Evaluamos la matriz Jacobiana en dicho punto para obtener

$$J(2, 2) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz son

$$\lambda_1 = -3 + \sqrt{3} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -3 - \sqrt{3}.$$

Ya que λ_1 y λ_2 tienen partes reales iguales y negativas, entonces el estado estacionario es un **nodo asintóticamente estable** a nivel local.

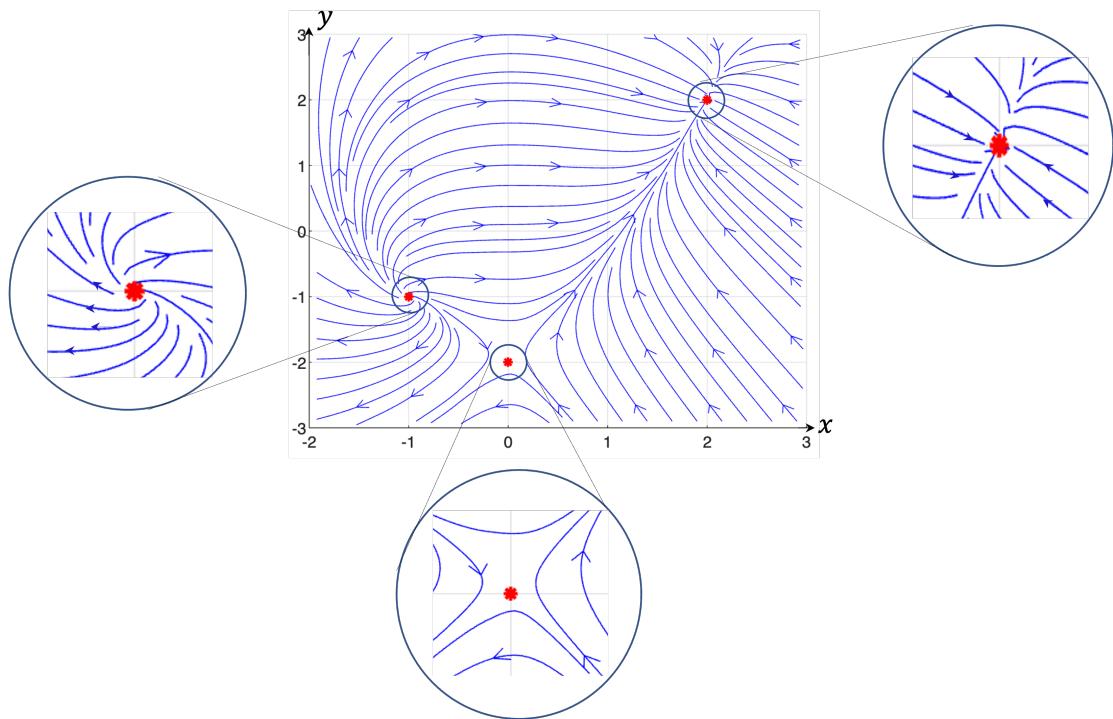


Figura 8: Bosquejo del retrato de fase para el sistema (b), con el zoom sobre cada estado estacionario: a la izquierda el estado $(-1, -1)$, al centro el estado $(0, -2)$ y a la derecha el estado $(2, 2)$.

4 Ecuación diferencial de las trayectorias

Para modelos autónomos no lineales en \mathbb{R}^2 la pendiente de las trayectorias:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)} \quad \text{ó} \quad f_2(x, y)dx - f_1(x, y)dy = 0,$$

determina una ecuación diferencial ordinaria (EDO) en las variables x, y , a condición de que $f_1(x, y) \neq 0$, que en ciertos casos puede ser resuelta con algún método analítico. A dicha ecuación se le denomina **EDO de las trayectorias**, y su solución general $\varphi(x, y) = K$, con K una constante, proporciona la familia de trayectorias en el retrato de fase para el sistema no lineal distintas a las soluciones constantes.

Ejemplo 3.

Dibujar el retrato de fase para el sistema autónomo no lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2 \\ \dot{y} = -xy \end{cases}$$

hallando las trayectorias mediante su EDO.

Solución:

- **Estados estacionarios:**

Los estados estacionarios de este sistema se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas no lineales

$$\begin{aligned}[y^e]^2 - [x^e]^2 &= 0 \\ -x^e y^e &= 0\end{aligned}$$

Es claro que la solución única de este sistema es el origen $(x^e, y^e) = (0, 0)$.

- **Estabilidad del estado estacionario:**

Empleando la linealización, se tiene que la matriz Jacobiana de este sistema en cualquier (x, y) viene dada por

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & 2y \\ -y & -x \end{pmatrix}$$

Entonces, en al evaluarla en el estado estacionario $(x^e, y^e) = (0, 0)$ se tiene que

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la cual tiene como valores propios $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Esto indica que el estado estacionario $(x^e, y^e) = (0, 0)$ es un estado estacionario **no hiperbólico**. Por lo tanto, con la linealización no es posible definir la estabilidad de este estado estacionario. Para esto, por ahora, se recurre al bosquejo del retrato de fase.

- **Bosquejo del retrato de fase:**

Se pide bosquejar el retrato de fase mediante la solución general de la EDO asociada a las trayectorias:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{y^2 - x^2}.$$

Note que esta EDO es de primer orden y de tipo **homogénea**. En efecto, para cualquier parámetro $s \neq 0$ se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(sx)(sy)}{(sy)^2 - (sx)^2} = -\frac{s^2 xy}{s^2 y^2 - s^2 x^2} = -\frac{xy}{y^2 - x^2}$$

Entonces, empleando el método de solución de EDO's de primer orden tipo homogénea, se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{x^2 \left[\left(\frac{y}{x} \right)^2 - 1 \right]} = -\frac{y}{x \left[\left(\frac{y}{x} \right)^2 - 1 \right]} = -\frac{\left(\frac{y}{x} \right)}{\left(\frac{y}{x} \right)^2 - 1} = G\left(\frac{y}{x}\right).$$

Entonces, haciendo el cambio $v = \frac{y}{x}$, la solución general de esta EDO viene dada, para cualquier constante arbitraria C , por

$$H(v) - \ln|x| = C,$$

con

$$H(v) = \int \frac{dv}{G(v) - v},$$

donde

$$G(v) = -\frac{v}{v^2 - 1}.$$

Entonces, al resolver la integral en términos de v se encuentra que

$$H(v) = -\ln|v| - \frac{1}{2v^2}.$$

Reemplazando en la expresión para la solución general y devolviendo el cambio de variable de v a x, y se encuentra que la familia de trayectorias en el retrato de fase para este sistema viene dada por

$$\frac{x^2}{2y^2} + \ln|y| = K,$$

siendo K la constante arbitraria que queda de todo el proceso de resolución analítica de la EDO.

Empleando un software de graficación (DESMOS, por ejemplo) el bosquejo de las trayectorias para $K = 20$ se muestra en la Figura 9.

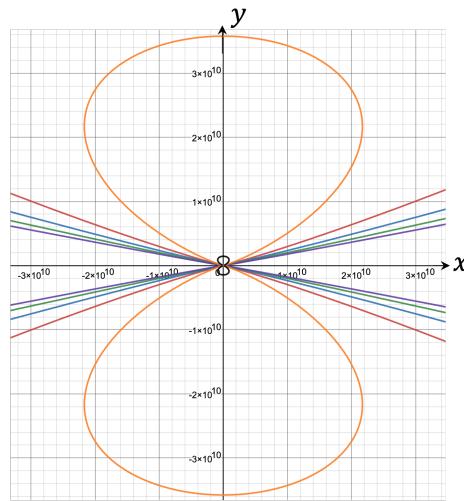


Figura 9: Bosquejo de las trayectorias del sistema en el plano de fase, usando la solución de la EDO osaciada.

Un bosquejo del retrato de fase y la trayectoria par $K = 1$, realizado en MATLAB, se muestra en la Figura 10. Esta evidencia numérica indica que, posiblemente, el estado estacionario es un ***asintóticamente estable***.

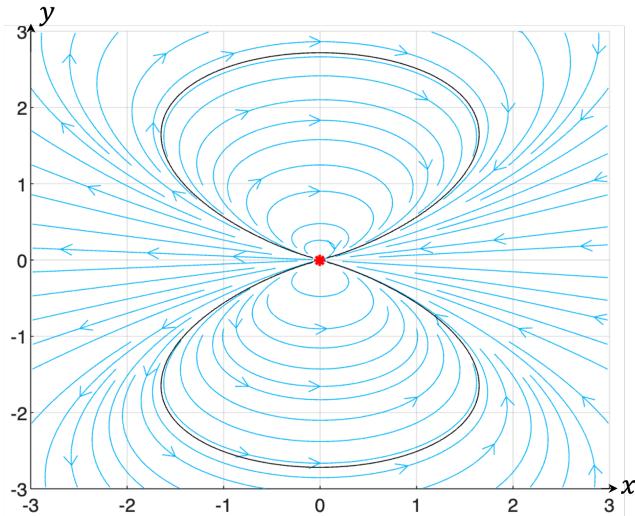


Figura 10: Bosquejo del retrato de fase y la trayectoria par $K = 1$, realizado en MATLAB.

5 Estabilidad local versus estabilidad global

Mediante un ejemplo concreto, a continuación analizaremos la caracterización de los estados estacionarios de un sistema autónomo no lineal en \mathbb{R}^2 , tanto a nivel local como a nivel global.

Hablar de una caracterización global implica que la condición inicial \mathbf{x}_0 , para el arranque de una trayectoria $\mathbf{x}(t)$, se puede tomar en **cualquier parte** del plano de fase y no necesariamente en una vecindad del estado estacionario \mathbf{x}^e como en el caso local.

Antes de realizar el ejemplo, consideraremos el siguiente resultado y su corolario

Teorema 5 (Teorema de la variedad estable local y la variedad inestable local). *Sean $I_u = (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $I_v = (-\varepsilon, \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$ pequeño, intervalos al rededor del origen para las variables u y v , respectivamente, en el plano de fase para el sistema linealizado (8). Consideremos una vecindad del origen $(u, v) = (0, 0)$ dada por $B_\varepsilon = I_u \times I_v$.*

*Entonces, existe una **variedad local estable** del sistema no lineal (1)-(2), sobre el origen del retrato de fase u, v , denotada y definida por*

$$W_{s,loc}((0, 0)) = \{(u, v) \in B_\varepsilon; v = \mathcal{S}(u)\},$$

donde $\mathcal{S} : I_u \rightarrow I_v$ define una curva de clase C^k con las propiedades siguientes:

- i) Pasa por el origen. Es decir: $\mathcal{S}(0) = 0$.
- ii) Es tangente a la variedad estable E_s del sistema linealizado (10) en el origen. Es decir: $\mathcal{S}'(0) = 0$.
- iii) Es localmente invariante en el sentido de que cualquier trayectoria $(x(t), y(t))$ que arranca en un punto inicial $(x_0, y_0) \in W_{s,loc}$ se aproximará al origen $(0, 0)$ a una **tasa exponencial** cuando $t \rightarrow +\infty$, y sale de B_ε cuando $t \rightarrow -\infty$.

Además, esta curva es única.

Similarmente, existe una **variedad local inestable** del sistema no lineal (1)-(2), sobre el origen del retrato de fase u, v , denotada y definida por

$$W_{u,loc}((0, 0)) = \{(u, v) \in B_\varepsilon; u = \mathcal{U}(v)\},$$

donde $\mathcal{U} : I_v \rightarrow I_u$ define una curva de clase C^k con las propiedades siguientes:

- i) Pasa por el origen. Es decir: $\mathcal{U}(0) = 0$.
- ii) Es tangente a la variedad inestable E_u del sistema linealizado (10) en el origen. Es decir: $\mathcal{U}'(0) = 0$.
- iii) Es localmente invariante en el sentido de que cualquier trayectoria $(x(t), y(t))$ que arranca en un punto inicial $(x_0, y_0) \in W_{u,loc}$ se aproximará al origen $(0, 0)$ a una **tasa exponencial** cuando $t \rightarrow -\infty$, y sale de B_ε cuando $t \rightarrow +\infty$.

Además, esta curva también es única.

Estas variedades locales son las “semillas” para las variedades globales que vienen definidas en el siguiente corolario.

Corolario 6 (Variedad global estable y variedad global inestable). *Sea $\phi_t(\cdot)$ el **flujo generado** por el sistema autónomo no lineal (1)-(2). Entonces las variedades globales estable e inestable del origen $(0, 0)$ se denotan y definen como*

$$W_s((0, 0)) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(W_{s,loc}(0, 0)) \quad y \quad W_u((0, 0)) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_{u,loc}(0, 0)),$$

respectivamente.

Consideremos el sistema autónomo no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y - x^2\end{aligned}$$

El único estado estacionario de este sistema es $(x^e, y^e) = (0, 0)$ y su matriz Jacobiana en dicho estado estacionario es

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, el sistema no lineal es topológicamente equivalente al sistema lineal

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -u \\ \dot{v} &= v\end{aligned}$$

Ya que los valores propios de $J(0, 0)$ son

$$\lambda_1 = -1 < 0 \quad y \quad \lambda_2 = 1 > 0,$$

entonces el estado estacionario $(x^e, y^e) = (0, 0)$ es un **punto silla inestable**. Además, para $\lambda_1 = -1$ el correspondiente vector propio es $w_1 = (1, 0)^T$. Así, la variedad estable de la linealización es

$$E_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\},$$

es decir: “el eje X ”. Análogamente, el vector propio correspondiente al valor propio $\lambda_2 = 1$ es $w_2 = (0, 1)^T$. Por lo tanto, la variedad inestable de la linealización es

$$E_u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\},$$

es decir: “el eje Y ”. En la Figura 11 se muestra un bosquejo del campo del sistema no lineal a nivel local.

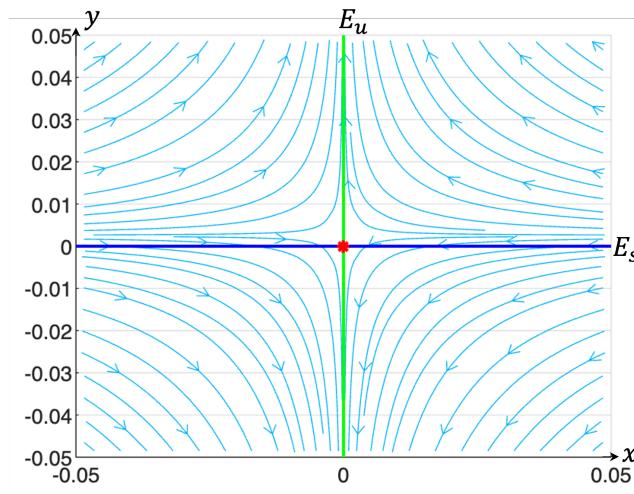


Figura 11: Bosquejo del retrato de fase para el sistema no lineal a nivel local, realizado en MATLAB, con las variedades E_s y E_u de la linealización.

En conclusión, se puede afirmar que el sistema autónomo no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y - x^2\end{aligned}$$

tiene un estado estacionario tipo **silla inestable** a nivel local: para toda solución $(x(t), y(t))$ con condición inicial (x_0, y_0) cercana a el estado estacionario $(0, 0)$.

Ahora, estudiaremos el comportamiento de la solución $(x(t), y(t))$ a **nivel global**. Es decir, cuando la condición inicial (x_0, y_0) se toma en cualquier parte del plano de fase \mathbb{R}^2 . Para ello, hallamos la solución del sistema dada la condición inicial (x_0, y_0) . Es decir, resolver el PVI

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x; \quad x(t_0) = x_0 \\ \dot{y} &= y - x^2; \quad y(t_0) = y_0\end{aligned}$$

Sin ninguna pérdida de generalidad, suponemos que $t_0 = 0$. Entonces, de la primera EDO con su condición inicial se obtiene que

$$x(t) = x_0 e^{-t}; \quad t \geq 0.$$

Sustituyendo este resultado en la segunda EDO y resolviéndola con su condición inicial, se obtiene

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{x_0^2}{3} \right) e^t + \frac{x_0^2}{3} e^{-2t}; \quad t \geq 0.$$

Estas dos expresiones proporcionan la parametrización $(x(t), y(t))$, $t \geq 0$, de las trayectorias en el plano de fase ó, de manera equivalente, el flujo $\phi_t(x, y)$ del sistema. Entonces las variedades globales estables e inestables se obtienen a partir de este flujo considerando la combinación de condiciones iniciales x_0 y y_0 tales que se satisfaga el Teorema 5. Así:

- **Variedad inestable:** Para esta variedad se requiere que $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ cuando $t \rightarrow -\infty$. Entonces, esto puede ocurrir si $x_0 = 0$ y y_0 es cualquier valor arbitrario. En efecto

$$(x(t), y(t)) = (0, y_0 e^t) \rightarrow (0, 0) \quad \text{cuando } t \rightarrow -\infty.$$

Esta trayectoria describe al semi-eje Y positivo si $y_0 > 0$ y al semi-eje Y negativo si $y_0 < 0$. Además, cuando $t \rightarrow +\infty$ dicha trayectoria se aleja exponencialmente del estado estacionario $(0, 0)$, tanto para $y_0 > 0$ como para $y_0 < 0$, pues

$$y_0 e^t \rightarrow \infty \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty.$$

Por lo tanto, el eje Y es la **variedad inestable** del sistema no lineal. Es decir

$$W_u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\} = E_u.$$

- **Variedad estable:** Para esta variedad se requiere que $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Entonces, esto puede ocurrir si x_0 y y_0 se eligen tales que

$$y_0 = \frac{x_0^2}{3}$$

En efecto

$$(x(t), y(t)) = (x_0 e^{-t}, y_0 e^{-2t}) \rightarrow (0, 0) \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty.$$

Para hallar la ecuación de la curva que describe dicha solución en el retrato de fase XY , eliminamos el parámetro t . Entonces, de la primera componente se tiene que

$$e^{-t} = \frac{x}{x_0}$$

y de la segunda se tiene

$$y = y_0 (e^{-t})^2.$$

Combinando estas dos expresiones se encuentra que

$$y = \frac{1}{3} x^2.$$

Luego, la **variedad estable** a nivel global del sistema no lineal es

$$W_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2/3\}.$$

Como esta variedad es diferente a la variedad estable E_s de la linealización, entonces el estado estacionario $(0, 0)$ **no es tipo silla** a nivel global. Sin embargo, este estado estacionario sigue siendo inestable si la condición inicial (x_0, y_0) no se toma sobre la parábola $y = \frac{1}{3} x^2$.

En la Figura 12 se muestra el bosquejo del retrato de fase a nivel global del sistema autónomo no lineal.

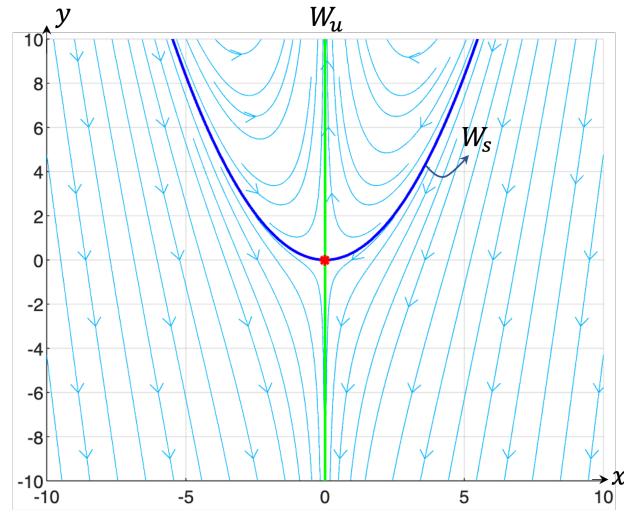


Figura 12: Bosquejo del retrato de fase para el sistema no lineal a nivel global, realizado en MATLAB, con las variedades globales W_s y W_u .
