MI3 Sección A Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano Aux: William Hernández

CLASE 09/02/2021

MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

ECUACIONES HOMOGÉNEAS

ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Si una función f(x,y) tiene la propiedad $f(tx,ty) = t^{\alpha}f(x,y)$ para un numero real α , se dice que es una función homogénea de grado α .

Una E.D. de primer orden

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Se dice que es **homogenea** si las funciones M(x,y) y N(x,y) son ambas funciones homogéneas de grado α

SIM(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 es una ED homogénea de grado α , entonces se puede realizar una sustitución

$$y = vx$$

$$dy = vdx + xdv$$

Se usa esta sustitucion si N(x,y)es mas simple

$$x = vy$$

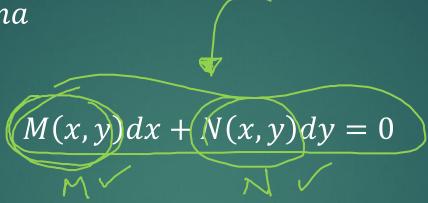
$$dx = vdy + ydv$$

Se usa esta sustitucion si M(x,y)es mas simple

La sustitución anterior transforma la ED dada en una ED separable en las variables v y x ó v y y

PASOS A SEGUIR

1. Llevar la ED a la forma



2. Identificar M(x, y) y N(x, y)

3. Verificar si M(x,y)y N(x,y)son funciones homogéneas del mismo grado

$$M(tx, ty) = t^{\alpha}M(x, y)$$

$$N(tx, ty) = t^{\alpha}N(x, y)$$

4. Si son homogéneas del mismo grado α, entonces la ecuacion es homogenea y se utiliza la sustitución

Si
$$N(x, y)$$
 es más simple
$$y = vx$$

$$dy = vdx + xdv$$

Si M(x, y) es más simple

$$(x = vy)$$

$$dx = vdy + ydv$$

5. Sustituir en la ED y simplificar

6. Separar variables y resolver para v

7. Regresar a variables originales

Ejemplo

Resolver

$$xy' = xe^{-\frac{y}{x}} + y \quad sujeto \ a \ y(1) = 0$$

$$dy \quad -\frac{y}{x}$$

$$x\frac{dy}{dx} = xe^{-\frac{y}{x}} + y$$

$$xdy = \left(xe^{-\frac{y}{x}} + y\right)dx$$

$$M(x,y) = xe^{-\frac{y}{x}} + y$$

$$\left(xe^{-\frac{y}{x}} + y\right) dx - xdy = 0$$

$$M(tx,ty) = \underline{txe} \, \underline{tx} + \underline{ty} \qquad \qquad \mathcal{L} = 1$$

$$M(tx, ty) \stackrel{\sim}{=} \stackrel{\sim}{t} \left(xe^{-\frac{y}{x}} + y \right)$$
 Funcion homogenea grado 1

$$N(tx, ty) = -tx$$

$$N(tx, ty) = t(-x)$$

Funcion homogenea grado 1

Por lo tanto la Ecuacion Diferencial es homogenea grado 1,

Como N(x, y)es mas simple

omo
$$N(x, y)$$
es mas simple
$$y = vx$$

$$(xe^{-\frac{v}{x}} + vx) dx - xdy = 0$$

$$(xe^{-v} + vx) dx - x(vdx + xdv) = 0$$

$$(xe^{-v} + vx) dx - x(vdx + xdv) = 0$$

$$(xe^{-v} + v) dx - x(vdx + xdv) = 0$$

$$(xe^{-v} + v) dx - x(vdx + xdv) = 0$$

$$(e^{-v} + v) dx - (vdx + xdv) = 0$$

$$(e^{-v} + v) dx - vdx - xdv = 0$$

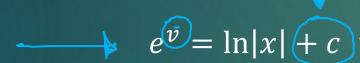
$$(e^{-v} + v) dx - xdv = 0$$

$$e^{-v}dx = xdv$$

$$e^{-v}dx = xdv$$

$$\frac{dv}{e^{-v}} = \frac{dx}{x}$$

$$\int e^{v} dv = \int \frac{dx}{x}$$



Recordar la sustitucion

$$y = vx$$

$$v = \frac{y}{x}$$

$$e^{\frac{y}{x}} = \ln|x| + c$$

$$y(1) = 0 \quad \begin{pmatrix} 4, 0 \\ \times \end{pmatrix}$$

Condicion inicial
$$y(1) = 0 \qquad (4, 0)$$

$$e^{\frac{0}{1}} = \ln |\widehat{1}| + c$$

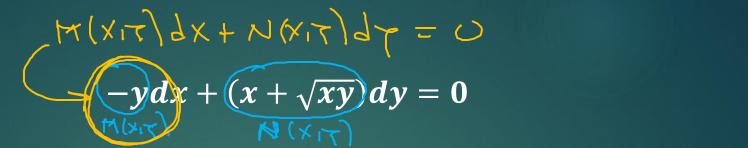
$$c = 1$$

$$e^{\frac{y}{x}} = \ln|x| + 1$$

Solucion implícita Solución particular

Ejemplo

Resolver



$$M(x,y) = -y$$

$$M(tx, ty) = -ty$$

$$M(tx, ty) \stackrel{\alpha}{=} \stackrel{\circ}{t}(-y)$$

Funcion homogenea grado 1

$$N(x,y) = x + \sqrt{xy}$$

$$N(tx, ty) = tx + \sqrt{(tx)(ty)} = tx + \sqrt{t^2(xy)}$$

$$N(tx, ty) = tx + t\sqrt{xy} = t(x + \sqrt{xy})$$

Funcion homogenea grado 1

Por lo tanto la Ecuacion Diferencial es homogenea grado 1

Como M(x, y)es mas simple

$$x = vy$$

$$dx = vdy + ydv$$

$$-ydx + (x + \sqrt{xy})dy = 0$$

$$-y(vdy + ydv) + (vy + \sqrt{(vy)y}) dy = 0$$

$$-y(vdy + ydv) + (vy + \sqrt{vy^2}) dy = 0$$

$$-y(vdy + ydv) + (vy + \sqrt{v}\sqrt{y^2}) dy = 0$$

$$-y(vdy + ydv) + (vy + y\sqrt{v}) dy = 0$$

$$-y(vdy + ydv) + (vy + y\sqrt{v}) dy = 0$$

$$-y(vdy + ydv) + (vy + \sqrt{v}) dy = 0$$

$$-y(vdy + ydv) + y(v + \sqrt{v})dy = 0$$

$$-(vdy + ydv) + (v + \sqrt{v})dy = 0$$

$$-vdy - ydv + (v + \sqrt{v})dy = 0$$

$$(-v + v + \sqrt{v})dy - ydv = 0$$

Var. Serf.

$$\sqrt{v}dy = ydv$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dv}{\sqrt{v}}$$

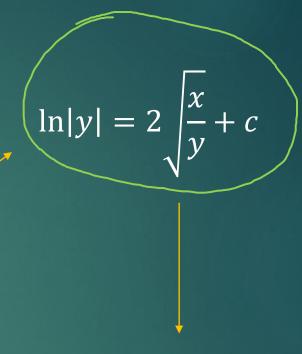
$$\frac{dy}{y} = v^{-\frac{1}{2}} dv$$

JATA - NO.

$$\frac{dy}{y} = v^{-\frac{1}{2}}dv$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int v^{-\frac{1}{2}} dv$$

$$\ln|y| = 2\sqrt{v} + c$$



Solucion implícita

Recordar la sustitucion

$$x = vy$$

$$v = \frac{x}{v}$$

Prueba de conocimiento

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$xy^{2} \frac{dy}{dx} = y^{3} - 2x^{3}$$

$$xy^{2} \frac{dy}{dx} = y^{3} - 2x^{3}$$

$$xy^{2} \frac{dy}{dx} = y^{3} - 2x^{3}$$

$$xy^{3} \frac{dy}{dx} = y^{3} - 2x^{3}$$

Prueba de conocimiento

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$xy^2 \frac{dy}{dx} = y^3 - 2x^3$$

Respuesta

$$2\ln|x| = -\frac{1}{3}\left(\frac{y^3}{x^3}\right) + C$$

Solución

$$xy^{2}\frac{dy}{dx} = y^{3} - 2x^{3}$$

$$(y^{3} - 2x^{3})dx - xy^{2}dy = 0$$

$$M(x,y) = y^3 - 2x^3$$

$$M(tx, ty) = (ty)^3 - 2(tx)^3 = t^3y^3 - 2t^3x^3$$
$$M(tx, ty) = t^3(y^3 - 2x^3)$$

Funcion homogenea grado 3

$$N(x,y) = -xy^2$$

$$N(tx, ty) = -(tx)(ty)^{2} = -(tx)(t^{2}y^{2})$$
$$N(tx, ty) = t^{3}(-xy^{2})$$

Funcion homogenea grado 3

Por lo tanto la Ecuacion Diferencial es homogenea grado 3

Como N(x, y)es mas simple

$$(y = vx)$$

$$(y^3 - 2x^3)dx - xy^2dy = 0$$

$$((vx)^3 - 2x^3)dx - x(vx)^2(vdx + xdv) = 0$$

$$(v^3x^3 - 2x^3)dx - x(v^2x^2)(vdx + xdv) = 0$$

$$(x^3(v^3-2)dx - (x^3)v^2(vdx + xdv) = 0$$

$$(v^3 - 2)dx - v^2(vdx + xdv) = 0$$

$$(v^3 - 2)dx - v^3 dx - xv^2 dv = 0$$

$$(v^3 - 2)dx - v^3 dx - xv^2 dv = 0$$

$$(v^3 - 2 - v^3)dx - xv^2dv = 0$$

$$-2dx - xv^2dv = 0$$

$$xv^2dv = -2dx$$

$$v^2 dv = -2\frac{dx}{x}$$

$$\int v^2 \, dv = -2 \int \frac{dx}{x}$$

Recordar la sustitucion

$$y = vx$$

$$v = \frac{y}{x}$$

$$\int v^2 \, dv = -2 \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{\cancel{v}^3}{3} = -2ln|x| + c$$

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^3}{3} = -2ln|x| + c$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{y^3}{x^3} \right) = -2ln|x| + c$$

$$2\ln|x| = -\frac{1}{3}\left(\frac{y^3}{x^3}\right) + c$$