## MI3 Sección A Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano Aux: William Hernández

# CLASE 19/02/2021

### MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

### **Ejemplo**

El isótopo radioactivo del Plomo Pb-209 decae a una rapidez proporcional a la cantidad presente en el tiempo t y tiene una vida media de 3.3 horas ¿Cuánto tiempo tarda en decaer 90% del Plomo?

Z = cantidad presente del isótopo <math>Pb - 209

$$t = tiempo(h)$$

	1
$\frac{d(\widehat{Z})}{d(\widehat{t})} = kZ$	*

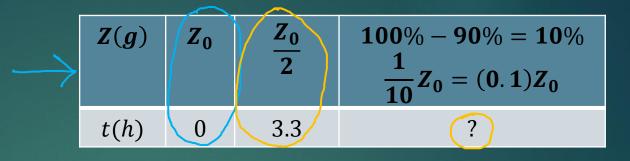
			7	
	Z	$(Z_0)$	$\overline{Z_0}$	100% - 90% = 10%
,			2	$\frac{1}{10}Z_0 = (0.1)Z_0$
	<i>t</i> ( <i>h</i> )	0	3.3	?

$$\int \frac{dZ}{Z} = \int kdt$$

$$|\ln|Z| = \int kt + c_1$$

$$\times Z(t) = Ce^{kt}$$

### Aplicando Condicion Inicial



Para 
$$Z(0) = Z_0$$
 (0,  $Z_0$ )
$$Z(t) = Ce^{kt}$$

$$Z_0 = Ce^0$$

$$C = Z_0$$

$$Z(t) = Z_0 e^{kt}$$

$$Para Z(3.3) = \frac{Z_0}{2}$$

$$Z(t) = Z_0 e^{kt}$$

$$\frac{Z_0}{2} = Z_0 e^{k(3.3)} +$$

$$\left| \frac{1}{2} \right| = e^{k(3.3)}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln e^{k(3.3)}$$

Para 
$$Z(3.3) = \frac{Z_0}{2}$$
 (3.3,  $\frac{Z_0}{2}$ )  $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 3.3k$ 

$$k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3.3} \approx -0.2100446002$$

$$z(t) = Z_0 e^{\left[\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3.3}\right]t}$$

$$z(t) = Z_0 e^{\frac{\left|\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{3.3}t}$$

$$Para Z = (0.1)Z_0 \quad t = ?$$

$$ln(0.1) = lne^{\left[\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3.3}\right]t}$$

$$(0.1)Z_0 = Z_0 e^{\left[\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3.3}\right]t}$$

$$t = \frac{\ln(0.1)}{\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3.3}\right)}$$

Decae el 90% aproximadamente en 10.96 ho ras

$$t \approx 10.96 horas$$

### **Ejemplo**

La población de bacterias en un cultivo crece a una tasa proporcional al número de baterías presentes en el tiempo t. Después de 3 horas se observo que están presentes 400 hacterias. Después de 10 horas hay 2000 hacterias. ¿Cuál fue el numero inicial de bacterias?

$$B = población de baterias$$

$$t = tiempo en horas$$

>	dB	LD
	dt	=kB

B(bacterias)	$B_0$	400	2000
t(h)	0	3	10

$$\frac{dB}{dt} = kB$$

$$\int \frac{dB}{B} = kdt$$

$$|\mathbf{h}|B| = kt + c_1$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{C}e^{kt}$$

$$B(t) = Ce^{kt}$$

## B(bacterias) $B_0$ 400 2000 t(h) 0 3 10

#### Aplicando Condiciones Iniciales

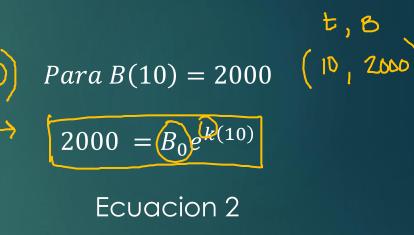
$$Para B(0) = B_0$$

$$B_0 = Ce^{0}$$

$$C = B_0$$

$$B(t) = B_0 e^{kt}$$

Para 
$$B(3) = 400$$
 (3, 400)
$$400 = B_0 e^{R(3)}$$
Ecuacion 1



$$400 = B_0 e^{3k} \quad Ecuacion 1$$

De ecuacion 1

$$B_0 = \frac{400}{e^{3k}}$$

Ecuacion 3

Sustituyendo Ec 3 en Ec 2

$$2000 = B_0 e^{10k}$$

$$2000 = \left(\frac{400}{e^{3k}}\right)e^{10k}$$

$$\frac{2000}{400} = \frac{e^{10k}}{e^{3k}}$$

$$\sqrt{5} = e^{7k}$$

$$\ln(5) = \ln e^{7k}$$

$$ln(5) = 7k$$

$$k = \frac{\ln(5)}{7}$$

$$B_0 = \frac{400}{e^{3k}}$$

$$B_0 = \frac{400}{e^{3\left(\frac{\ln 5}{7}\right)}}$$

$$B_0 = 20067$$

Inicialmente habían aproximadamente 200 bacterias

Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton

### Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton

La rapidez a la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio circundante (denominada temperatura ambiente)

$$\frac{dT}{dt} = rapidez \ a \ la \ cual \ cambia \ la \ temperatura \ del \ cuerpo$$

T = temperatura del cuerpo

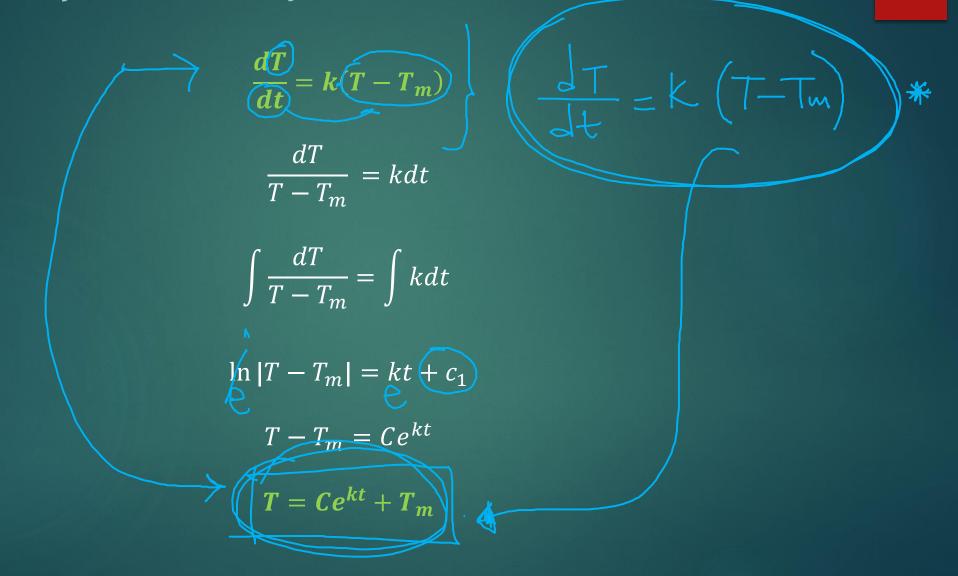
 $T_m = temperatura del medio circundante$ 

t = tiempo

k = constante de proporcionalidad

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

### Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton



### **Ejemplo**

Una barra metálica cuya temperatura inicial fue de 20°C se sumerge en un gran recipiente de agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo tarda la barra en alcanzar 90°C si se sabe que su temperatura aumenta 2°C en un segundo?¿Cuánto le toma a la barra llegar a 98°C?

 $T = temperatura \ del \ barra \ (^{\circ}C)$   $T_m = temperatura \ del \ agua$  t(s)  $T(^{\circ}C)$   $t = tiempo \ (s)$   $T(^{\circ}C)$   $t = tiempo \ (s)$