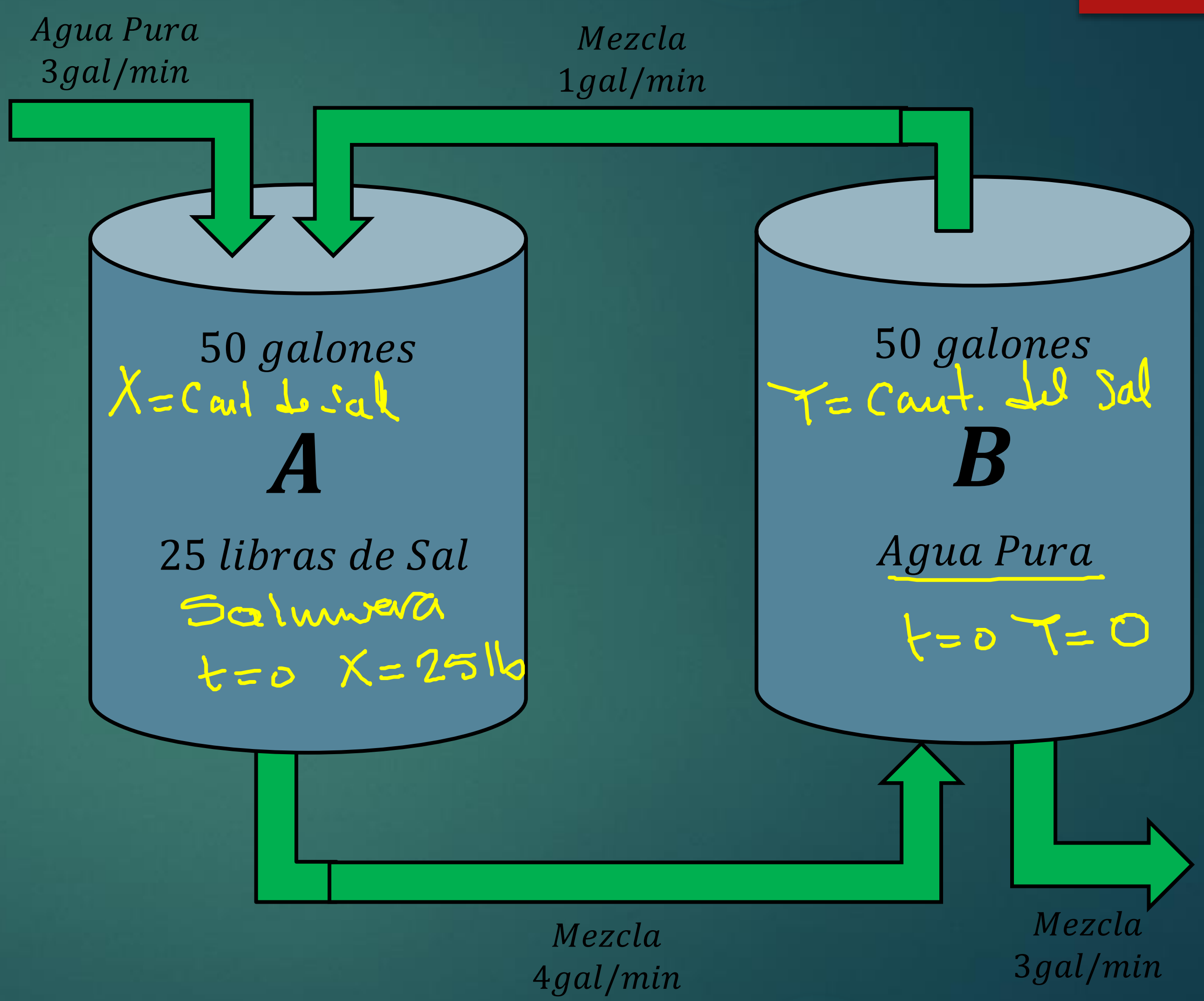
MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 13/04/2021

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES POR ELIMINACIÓN

Considere los dos tanques que se muestran en la siguiente figura. Suponga que el tanque A contiene 50 galones de agua en los que hay disueltas 25 libras de sal y el tanque B contiene 50 galones de agua pura. Determine la cantidad de libras de sal en los tanques A y B. Aplique el método de eliminación para resolver dicho sistema.



TA

Vol constante

$fe = 3\frac{gal}{min} + 1\frac{gal}{min} = 4\frac{gal}{min}$

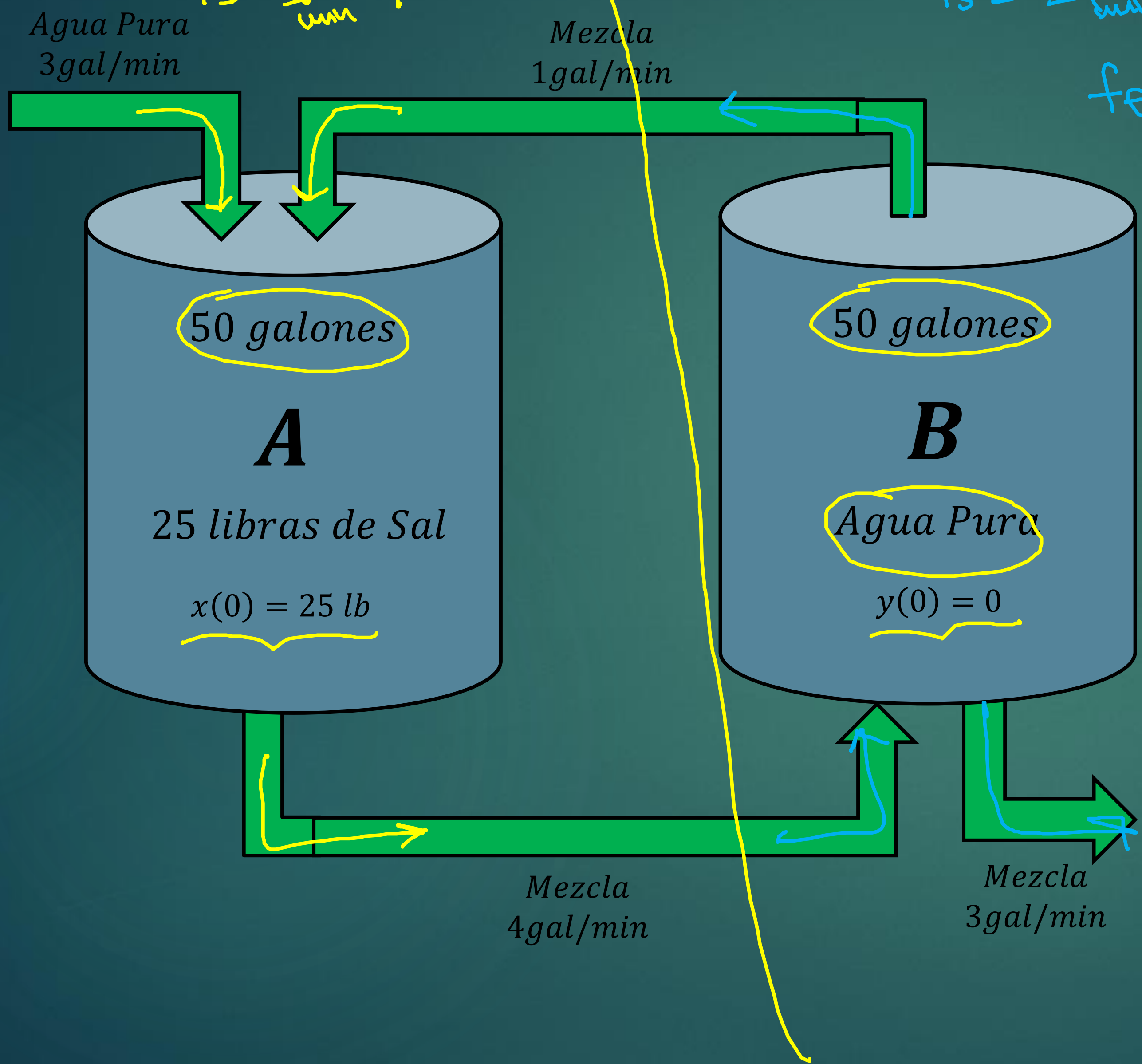
$fs\ 4\frac{gal}{min} \Rightarrow fe = fs$

TB

$fe = 4\frac{gal}{min}$

$fs = 1\frac{gal}{min} + 3\frac{gal}{min} = 4\frac{gal}{min}$

$fe = fs \Rightarrow$ vol constante



$x = cantidad\ de\ sal\ en\ el\ tanque\ A$ (lb)

$y = cantidad\ de\ sal\ en\ el\ tanque\ B$ (lb)

Condiciones Iniciales

$x(0) = 25$ lb

$y(0) = 0$ lb

Tanque A

$x =$ *cantidad de sal en el tanque A* (lb)

$f_e = f_s$ *Volumen constante*

$$\frac{dx}{dt} = E - S$$

$$\frac{dx}{dt} = c_e f_e - c_s f_s$$

$$\frac{dx}{dt} = [(c_{e1} f_{e1}) + (c_{e2} f_{e2})] - c_s f_s$$

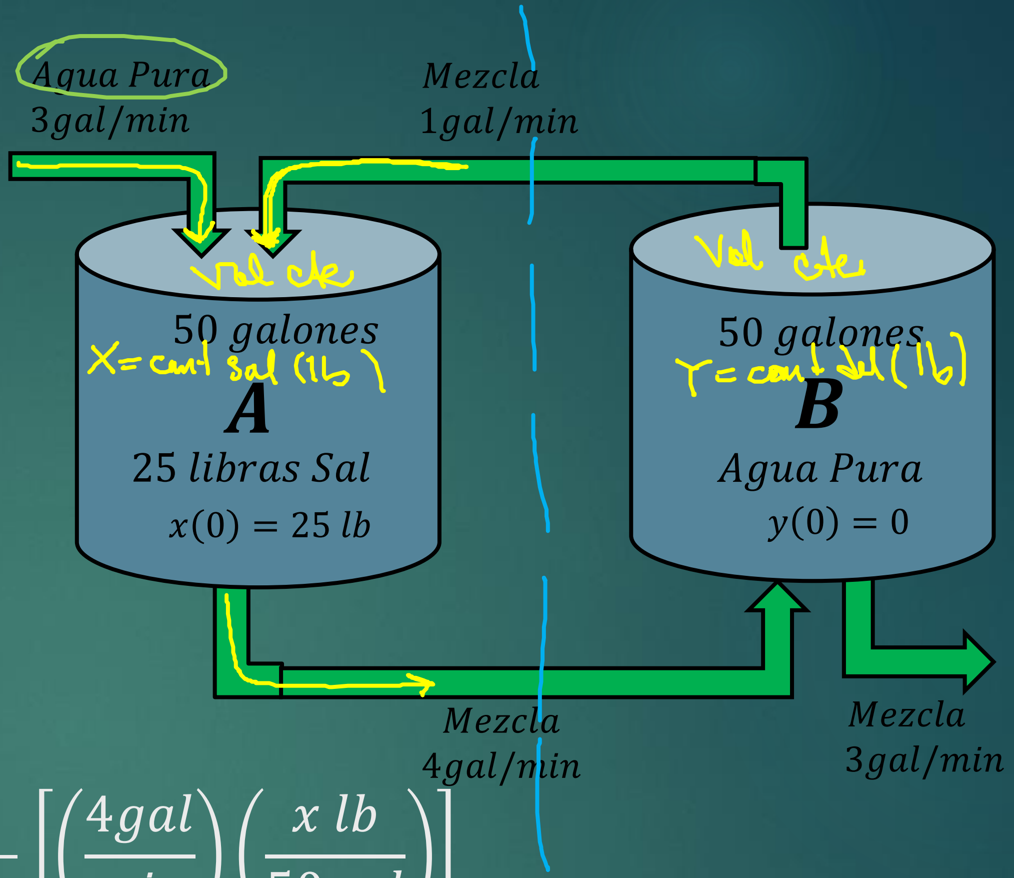
$$\frac{dx}{dt} = \left[\left(\frac{3gal}{min}\right)\left(\frac{0\ lb}{gal}\right) + \left(\frac{1gal}{min}\right)\left(\frac{y\ lb}{50gal}\right)\right] - \left[\left(\frac{4gal}{min}\right)\left(\frac{x\ lb}{50gal}\right)\right]$$

$$\frac{dx}{dt} = \left[\left(\frac{1gal}{min}\right)\left(\frac{y\ lb}{50gal}\right)\right] - \left[\left(\frac{4gal}{min}\right)\left(\frac{x\ lb}{50gal}\right)\right]$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{50} y - \frac{4}{50} x$$

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{25} x + \frac{1}{50} y} \rightarrow$$

$x(t) = ?$
$Y(t) = ?$



$X(t) = ?$ lb/min
$Y(t) = ?$ lb/min

Tanque B

y = cantidad de sal en el tanque B (16)

$f_e = f_s$ Volumen constante

$$\frac{dy}{dt} = E - S$$

$$\frac{dy}{dt} = c_e f_e - c_s f_s$$

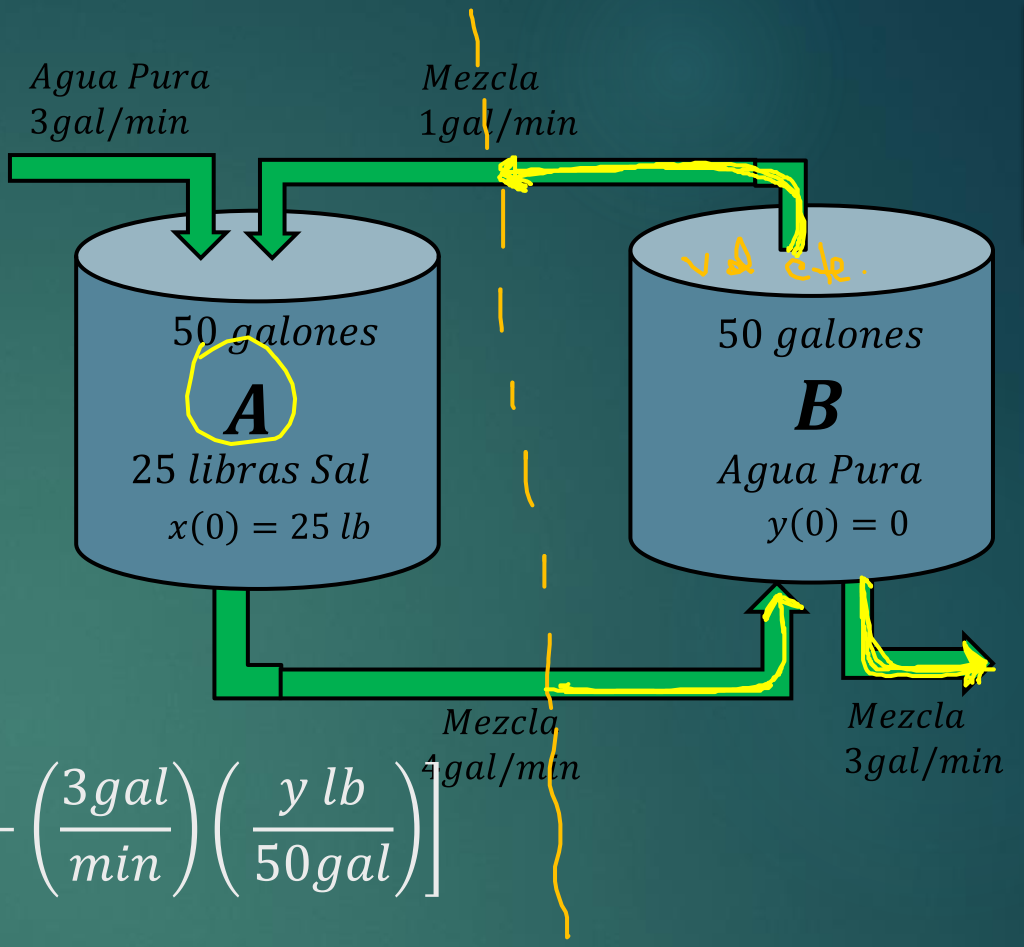
$$\frac{dy}{dt} = c_e f_e - [(c_{s1} f_{s1}) + (c_{s2} f_{s2})]$$

$$\frac{dy}{dt} = \left[\left(\frac{4gal}{min}\right)\left(\frac{x\ lb}{50gal}\right)\right] - \left[\left(\frac{1gal}{min}\right)\left(\frac{y\ lb}{50gal}\right) + \left(\frac{3gal}{min}\right)\left(\frac{y\ lb}{50gal}\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{50}x - \left(\frac{1}{50}y + \frac{3}{50}y\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{50}x - \frac{4}{50}y$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{25}x - \frac{2}{25}y$$



$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\frac{2}{25}x + \frac{1}{50}y\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{2}{25}x - \frac{2}{25}y\end{aligned}}$$

$x(t) = ?$

$y(t) = ?$

Condiciones Iniciales

$x(0) = 25$ lb

$y(0) = 0$ lb

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{25}x - \frac{1}{50}y = 0$$

$$-\frac{2}{25}x + \frac{dy}{dt} + \frac{2}{25}y = 0$$

$$x' + \frac{2}{25}x - \frac{1}{50}y = 0$$

$$-\frac{2}{25}x + y' + \frac{2}{25}y = 0$$

$$Dx + \frac{2}{25}x - \frac{1}{50}y = 0$$

$$-\frac{2}{25}x + Dy + \frac{2}{25}y = 0$$

$$\left(D + \frac{2}{25}\right)x - \frac{1}{50}y = 0$$

$$-\frac{2}{25}x + \left(D + \frac{2}{25}\right)y = 0$$

PRUEBA DE CONOCIMIENTO

Tarea !!!

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{25}x + \frac{1}{50}y$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{25}x - \frac{2}{25}y$$

Condiciones Iniciales

$$x(0) = 25$$

$$y(0) = 0$$

Solución:

$$x(t) = \frac{25}{2}e^{-\frac{3}{25}t} + \frac{25}{2}e^{-\frac{1}{25}t}$$

$$y(t) = -25e^{-\frac{3}{25}t} + 25e^{-\frac{1}{25}t}$$

✓

Considere la siguiente ecuación diferencial, encuentre la forma de la función complementaria y_c y proponga la forma apropiada para la solución particular y_p sin calcular el valor de los parámetros.

$Y(x) = Y_c + Y_p$

$$y'' - 4y' = \underbrace{12x^2 + 5 - 8e^{4x}}_{g(x)}$$

Y_c:

Función complementaria y_c

E D Homogénea Asociada

$y'' - 4y' = 0$

Ecuacion Caracteristica

$r^2 - 4r = 0$

$r(r-4) = 0$

$r_c = 0, 4$

$Y_c = C_1 + C_2 e^{4x}$

$$y_c = c_1 + c_2 e^{4x}$$

Solución particular Y_p:

$g(x) = (12x^2 + 5) - 8e^{4x}$

$r_p = 0$ *multiplicidad* 3, 4

$y_p = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Exe^{4x}$

Considere la siguiente ecuación diferencial, encuentre la forma de la función complementaria y_c y proponga la forma apropiada para la solución particular y_p sin calcular el valor de los parámetros.

$Y(x) = Y_c + Y_p$

$$y^{(5)} + y''' = \overbrace{x^2cosx + xcosx}^{g(x)}$$

Función complementaria y_c

E D Homogénea Asociada

$$y^{(5)} + y''' = 0$$

Ecuacion Caracteristica

$$r^5 + r^3 = 0$$

$$r^3(r^2 + 1) = 0$$

$$r_c = 0\ multiplicidad\ 3,\ \pm i$$

$$y_c = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4cosx + c_5senx$$

$$Solución\ particular$$

$$g(x) = x^2cosx + xcosx$$

$$g(x) = (x^2 + x)cosx$$

$$r_p = \pm i\ multiplicidad\ 3$$

$$y_p = (Ax + Bx^2 + Cx^3)cosx + (Ex + Fx^2 + Gx^3)senx$$

$ó\ bien$

$$y_p = x(Acosx + Bsenx) + x^2(Ccosx + Esenx)$$
$$+x^3(Fcosx + Gsenx)$$

$ó\ bien$

$$y_p = \overbrace{Axcosx + Bxsenx}^{\pm i} + \overbrace{Cx^2cosx + Ex^2senx}^{\pm i}$$
$$\underbrace{+Fx^3cosx + Gx^3senx}_{\pm i}$$

La solución general de una ecuación diferencial es:

$$y(x) = c_1cos5x + c_2sen5x + \frac{1}{20}sen2x + \frac{1}{16}sen4x - \frac{1}{2}x$$ *

Encuentre la Ecuacion Diferencial No Homogenea que le dio origen a esta solución general

tarea !!!

$$Y_c = \underbrace{C_1 \cos 5x + C_2 \operatorname{Sen} 5X}_{r_c = \pm 5i}$$

$$r^2 + 25 = 0$$

$$Y'' + 25Y = g(x)$$