MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano

Aux: William Hernández

CLASE 22/02/2021

MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton

Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton

La rapidez a la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio circundante (denominada temperatura ambiente)

$$\frac{dT}{dt} = rapidez\ a\ la\ cual\ cambia\ la\ temperatura\ del\ cuerpo$$

$$T = temperatura\ del\ cuerpo$$

$$T_m = temperatura\ del\ medio\ circundante$$

$$t = tiempo$$

$$k = constante\ de\ proporcionalidad$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{T - T_m} = kdt$$

$$\int \frac{dT}{T - T_m} = \int kdt$$

$$\ln|T - T_m| = kt + c_1$$

e e

$$T - T_m = Ce^{kt}$$

$$\boxed{T = Ce^{kt} + T_m}$$ sol explicita

Ejemplo

Una barra metálica cuya temperatura inicial fue de 20°C se sumerge en un gran recipiente de agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo tarda la barra en alcanzar 90°C si se sabe que su temperatura aumenta 2°C en un segundo?¿Cuánto le toma a la barra llegar a 98°C?

$T = temperatura\ del\ barra\ (°C)$

$T_m = temperatura\ del\ agua$ hirviendo

$t = tiempo\ (s)$

T(°C)	20	22	90	98
$t(s)$	0	1	?	?

$$T_m = 100°C$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{T - T_m} = kdt$$

$$\int \frac{dT}{T - T_m} = \int kdt$$

$$\ln|T - T_m| = kt + c_1$$

e e

$$T - T_m = Ce^{kt}$$

$$\boxed{T = Ce^{kt} + T_m}$$

$T(°C)$	20	22	90	98
$t(s)$	0	1	?	?

$$T_m = 100°C$$

$$T = Ce^{kt} + T_m$$

$$\boxed{T = Ce^{kt} + 100}$$

$$Para\ T(0) = 20$$

t T
(0 , 20)

$$T = Ce^{kt} + 100$$

$$20 = Ce^{\cancel{0}\,1} + 100$$

$$C = -80$$

$$\boxed{T(t) = -80e^{kt} + 100}$$

$$T(t) = -80e^{kt} + 100$$

$$Para\ T(1) = 22$$

t T
(1 , 22)

$$22 = -80e^{(1)k} + 100$$

$$\ln e^{k} = \ln\left(\frac{-78}{-80}\right)$$

$$k = \boxed{\ln\left(\frac{39}{40}\right)}$$

$$\boxed{T(t) = -80e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)t} + 100}$$

*

$$\boldsymbol{T(t) = -80e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)t} + 100}$$

T(℃)	**20**	**22**	**90**	**98**
$t(s)$	0	1	?	?

Para $T = 90 \qquad t = ?$

$$90 = -80e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)t} + 100$$

$$\frac{-10}{-80} = e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)t}$$

$$ln\left(\frac{1}{8}\right) = ln\left[e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)t}\right]$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{8}\right)}{\ln\left(\frac{39}{40}\right)} \approx 82.13\ seg$$

La barra tarda aproximadamente 82.13 seg en alcanzar 90°

Para $T = 98 \qquad t = ?$

$$98 = -80e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)t} + 100$$

$$\frac{-2}{-80} = e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)t}$$

$$ln\left(\frac{1}{40}\right) = ln\left[e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)t}\right]$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{40}\right)}{\ln\left(\frac{39}{40}\right)} \approx 145.70\ seg$$

La barra tarda aproximadamente 145.70 seg en alcanzar 98°

Ejemplo

Un termómetro que marca $70°F$ se coloca en un horno precalentado a una temperatura constante. Por una ventana de vidrio en la puerta del horno un observador registra que después de medio minuto el termómetro marca $110°F$ y luego de un minuto la lectura es de $145°F$?Cual es la temperatura del horno?

$T = temperatura\ del\ termometro\ (°F)$

$T_m = temperatura\ del\ horno$ = ?

$t = tiempo\ (min)$

$T(°F)$	70	110	145
$t(min)$	0	$\frac{1}{2}$	1

$\boldsymbol{T_m = ?}$

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)}$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{T - T_m} = kdt$$

$$\int \frac{dT}{T - T_m} = \int kdt$$

$$\ln|T - T_m| = kt + c_1$$

e e

$$T - T_m = Ce^{kt}$$

$$\boldsymbol{T = Ce^{kt} + T_m}$$

$T_m = ?$

$T(°F)$	**70**	**110**	**145**
$t(min)$	0	$\frac{1}{2}$	1

$$\boxed{T = Ce^{kt} + T_m}$$

Para $T(0) = 70$ t , T (0 , 70)

$$T = Ce^{kt} + T_m$$

$$70 = Ce^{k(0)} + T_m$$

$$\boxed{C = 70 - T_m}$$

$$\boxed{T(t) = (70 - T_m)e^{kt} + T_m}$$

Para $T\left(\frac{1}{2}\right) = 110$ t , T (½ , 110)

$$T(t) = (70 - T_m)e^{kt} + T_m$$

$$110 = (70 - T_m)e^{k\left(\frac{1}{2}\right)} + T_m$$

$$110 - T_m = (70 - T_m)e^{k\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$ln\left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right) = ln\,e^{k\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$ln\left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right) = \cancel{lne}^{k\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$ln\left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right) = \frac{1}{2}k$$

$$\boxed{k = 2ln\left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right)}$$

$T_m = ?$

$$\boxed{T(t) = (70 - T_m)e^{kt} + T_m}$$

$$\boxed{k = 2ln\left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right)}$$

$T(°F)$	70	110	145
$t(min)$	0	$\frac{1}{2}$	1

$$T(t) = \underbrace{(70 - T_m)}_{c}e^{\overbrace{2ln\left(\frac{110-T_m}{70-T_m}\right)}^{k}t} + T_m$$

$Para\ T(1) = 145$ $\quad$ $t\ ,\ T$ $\quad (1\ \ 145)$

$$145 = (70 - T_m)e^{2ln\left(\frac{110-T_m}{70-T_m}\right)(1)} + T_m$$

$$145 - T_m = (70 - T_m)e^{2ln\left(\frac{110-T_m}{70-T_m}\right)}$$

$$145 - T_m = (70 - T_m)e^{2ln\left(\frac{110-T_m}{70-T_m}\right)}$$

$$\frac{145 - T_m}{70 - T_m} = e^{ln\left(\frac{110-T_m}{70-T_m}\right)^2}$$

$$\frac{145 - T_m}{70 - T_m} = \left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right)^2$$

$\boldsymbol{T_m} = ?$

$$\frac{145 - T_m}{70 - T_m} = \left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right)^2$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{145 - T_m}{70 - T_m} = \frac{(110 - T_m)^2}{(70 - T_m)^2}$$

$$\frac{(70 - T_m)^2(145 - T_m)}{70 - T_m} = (110 - T_m)^2$$

$$(70 - T_m)(145 - T_m) = 12100 - 220T_m + (T_m)^2$$

$$10150 - 215T_m + \cancel{(T_m)^2} = 12100 - 220T_m + \cancel{(T_m)^2}$$

$$220T_m - 215T_m = 12100 - 10150$$

$$5T_m = 1950$$

$$\boldsymbol{T_m = 390}\ °\text{F}$$

La temperatura del horno es de 390°F

PRUEBA DE CONOCIMIENTO

A las dos de la tarde un termómetro que marca 70°F es trasladado al exterior donde el aire tiene una temperatura de -10°F. A las 2:02 de la tarde la lectura es de 26°F. A las 2:05 de la tarde el termómetro se lleva adentro nuevamente donde el aire está a 70°F. ¿Cuál es la lectura del termómetro a las 2:09?