MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 10/02/2021

MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

REDUCCIÓN A SEPARACIÓN DE VARIABLES

REDUCCIÓN A SEPARACIÓN DE VARIABLE

Una ED de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + c)$$

Se reduce siempre a una ecuación con variables separables por medio de la sustitución

$$u = Ax + By + c$$

PASOS SUGERIDOS

$y' = f(Ax+By+c)$

$dy = f(Ax+By+c)dx$

$f(Ax+By+c)dx - dy = 0$

1. *Llevar la ED a la forma*

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$$

2. *Identificar la sustitución de u*
3. *Derivar la sustitución de u respecto a la variable independiente*
4. *Despejar para* $\frac{dy}{dx}$
5. *Aplicar la sustitución de u y* $\frac{du}{dx}$
6. *Resolver la ED de separación de variables en terminos de u y x*
7. *Regresar a vaiables originales*

Ejemplo

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{(1 + x + y)}_{u}$$

Sustitución

$$u = (1 + x + y)$$

$$\frac{du}{dx} = \overset{0}{\cancel{\frac{d}{dx}(1)}} + \overset{1}{\cancel{\frac{dx}{dx}}} + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

Recordar:

$$\frac{dy}{dx} = f\underbrace{(Ax + By + C)}_{u}$$

$$u = Ax + By + c$$

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x + y)$$

Sustitución

$$u = (1 + x + y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

$$\frac{du}{dx} - 1 = u$$

$$\frac{du}{dx} = u + 1$$

$$\frac{du}{u+1} = dx$$

$$\int \frac{du}{u+1} = \int dx$$

$$\rightarrow \quad \int \frac{du}{u+1} = \int dx$$

$$ln|u+1| = x + c$$

$$e \qquad\qquad e$$

$$e^{ln|u+1|} = e^{x+c}$$

$$u + 1 = ce^{x}$$

Regresando a la Sustitución

$$u = (1 + x + y)$$

$$(1 + x + y) + 1 = ce^{x}$$

$$2 + x + y = ce^{x}$$

$$y = ce^{x} - x - 2$$

Solución explícita

Ejemplo

$*\left(2+\sqrt{y-2x+3}\right)dx - dy = 0$

Resolver

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{\underbrace{y - 2x + 3}_{u}}$$

$\frac{du}{dx} + 2 = 2 + \sqrt{u}$

Sustitución

$$u = (y - 2x + 3)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - 2\,\cancel{\frac{dx}{dx}}^{\,1} + \cancel{\frac{d}{dx}(3)}^{\,0}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + 2$$

Recordar:

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$$

$$u = Ax + By + c$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$$

Sustitución

$$u = (y - 2x + 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + 2$$

$$\frac{du}{dx} + \cancel{2} = \cancel{2} + \sqrt{u}$$

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{u}$$

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = dx$$

$$\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = \int dx$$

$$\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = \int dx$$

$$2\sqrt{u} = x + c$$

Sustitución

$$\left(2\sqrt{y-2x+3}\right)^2 = (x+c)^2$$

$$u = (y - 2x + 3)$$

$$4(y-2x+3) \;= (x+c)^2$$

$$y - 2x + 3 \;= \frac{(x+c)^2}{4}$$

$$y = 2x - 3 + \frac{(x+c)^2}{4}$$

Solución explícita

Ejemplo

Resolver

$$y' = \frac{x+y-1}{x+y+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)-1}{(x+y)+1}$$

Sustitución

$$u = x + y$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

Recordar:

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$$

$$u = Ax + By + c$$

Sustitución

$$\boldsymbol{u = x + y}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y) - 1}{(x+y) + 1}$$

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{u-1}{u+1}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u-1}{u+1} + \frac{1}{1}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u - \cancel{1} + u + \cancel{1}}{u+1}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2u}{u+1}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2u}{u+1}$$

$$\frac{(u+1)}{u} du = 2dx$$

$$\left(1 + \frac{1}{u}\right) du = 2dx$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{u}\right) du = 2\int dx$$

$$\int du + \int \frac{du}{u} = 2\int dx$$

$$\int du + \int \frac{du}{u} = 2\int dx$$

$$u + ln|u| = 2x + c$$

Regresando a la Sustitución

$$u = x + y$$

$$(x + y) + ln|x + y| = 2x + c$$

$$y - x + ln|x + y| = c$$

Solución implícita

Prueba de conocimiento

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2$$

Prueba de conocimiento

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2$$

Sol explícita

Respuesta

$$y = tan(x + c) - x - 1$$

Prueba de conocimiento

Resuelva la siguientes ecuaciones diferenciales

Indique que método utiliza para resolverlas

1. $xy' - 2y = \dfrac{x^3}{sen^2(x)\sqrt[4]{cot(x)}}$

Lineal en "Y"

$F.I. = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

2. $(cosx + xcosy - y)dy + (seny - ysenx)dx = 0$

exacta !!!

SOLUCIÓN

1. $xy' - 2y = \dfrac{x^3}{sen^2(x)\sqrt[4]{cot(x)}}$

F.I $= x^{-2}$

Lineal en "y"

R// $y = \dfrac{-4x^2[cot(x)]^{3/4}}{3} + cx^2$ sol explícita, fam. uniparamétrica

2. $(cosx + xcosy - y)dy + (seny - ysenx)dx = 0$

$\underbrace{(seny - y\,senx)}_{M} dx + \underbrace{(cosx + xcosy - y)}_{N} dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ✓

$\frac{\partial M}{\partial y} = cosy - senx$

$\frac{\partial N}{\partial x} = -senx + cosy$

Exacta

$\frac{\partial f}{\partial x} = seny - y\,senx$

R// $xseny + ycosx - \dfrac{y^2}{2} = c$