MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 02/02/2021

MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

ECUACIÓN DE BERNOULLI

ECUACIÓN DE BERNOULLI

Una importante ecuación no lineal, que puede ser reducida a la forma lineal con una sustitución apropiada es la **Ecuación de Bernoulli**

Bernoulli en "y" (1)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \qquad para\ n \neq 0\ y\ n \neq 1$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones de "x" y/o constantes y el coeficiente que acompaña a y' es 1.

$$\boldsymbol{v = y^{1-n}}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d(y^{1-n})}{dx}$$

La sustitución genera un cambio de variable dependiente que reduce la ecuacion original a una ecuación lineal. Para cambiar el diferencial de la variable dependiente se deriva la sustitución establecida.

Ejemplo 1

Resolver

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^2y^2$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Bernoulli en "y"

$$y' + \frac{y}{x} = xy^2$$

$$donde:\ n = 2$$

$$v = y^{1-n}$$

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{y}{y^2 x} = \frac{xy^2}{y^2}$$

$$v = y^{1-2} = y^{-1}$$

$$v = y^{-1}$$

$$y^{-2}y' + \frac{y^{-1}}{x} = x$$

$$\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

$$v' = -y^{-2}y'$$

$$-v' + \frac{v}{x} = x$$

$$-v' = y^{-2}y'$$

$$-v' + \frac{v}{x} = x \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$v' - \frac{1}{x}v = -x$$

$P(x)$ $Q(x)$

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

lineal en "v"

$$donde: \; P(x) = -\frac{1}{x}$$

$$F.I. = V(x) = e^{\int P(x)dx}$$

$$F.I. = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-lnx}$$

$$F.I. = \cancel{e^{ln}}\,x^{-1} = x^{-1}$$

$$x^{-1}v = -\int x^{-1}x\,dx$$

$$x^{-1}v = -\int dx$$

$$x^{-1}v = -x + c$$

$$x^{-1}v = -x + c$$

$$v = \frac{-x + c}{x^{-1}}$$

$$v = cx - x^2$$

$$y^{-1} = cx - x^2$$

$$\frac{1}{y} = cx - x^2$$

$$y = \frac{1}{cx - x^2}$$

Recordar la sustitucion

$$v = y^{-1}$$

Solución explícita

Solucion general como una familia

Uniparametrica de soluciones

Ejemplo 2

Resolver

$$t^2\frac{dy}{dt}+y^2=ty$$

$$\frac{t^2y'}{t^2}-\frac{ty}{t^2}=\frac{-y^2}{t^2} \quad \Big| \div t^2$$

$$y'-\frac{ty}{t^2}=-\frac{y^2}{t^2}$$

$$y'-\frac{y}{t}=-\frac{y^2}{t^2}$$

$$Y'+P(t)Y=Q(t)Y^n$$

$$\frac{dy}{dt}+P(t)y=Q(t)y^n$$

Bernoulli en "y"

$Y' + P(t)Y = Q(t)Y^n$

$$\frac{y'}{Y^2} - \frac{y}{tY^2} = -\frac{y^2}{t^2 Y^2} \quad \Big| \div Y^2$$

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{y}{y^2 t} = -\frac{y^2}{y^2 t^2}$$

$$y^{-2}y' - \frac{y^{-1}}{t} = -\frac{1}{t^2}$$

$$-v' - v = -\frac{1}{t^2}$$

$$-v' - \frac{v}{t} = -\frac{1}{t^2} \quad \Big| * (-1)$$

$$v' + \frac{v}{t} = \frac{1}{t^2}$$

$donde\colon\ n = 2$

$v = y^{1-2}$

$v = y^{-1}$

$$\frac{dv}{dt} = -y^{-2}\frac{dy}{dt}$$

$v' = -y^{-2}y'$

$-v' = y^{-2}y'$

$v' + P(t)v = Q(t)$

$$\frac{dv}{dt} + P(t)v = Q(t)$$

Lineal en "v"

$v' + P(t)v = Q(t)$

lineal en "v"

$$v' + \underbrace{\frac{v}{t}}_{P(t)} = \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{Q(t)}$$

$$P(t) = \frac{1}{t}$$

$$Q(t) = \frac{1}{t^2}$$

$$F.I. = V(t) = e^{\int P(t)dt}$$

$$F.I. = e^{\int \frac{dt}{t}} = e^{\ln t} = t$$

$$t(v) = \int t\left(\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$tv = \int \frac{dt}{t}$$

$$tv = \ln t + C$$

$$v = \frac{\ln t + C}{t}$$

$$v = \frac{lnt + C}{t}$$

$$y^{-1} = \frac{lnt + C}{t}$$

$Recordar: v = y^{-1}$

$$\frac{1}{y} = \frac{lnt + C}{t}$$

$$y = \frac{t}{lnt + C}$$

Solución explícita

Solución general

Familia uniparametrica de soluciones

Ejemplo 3

Resolver

$$3y^2y' + xy^3 = x \qquad \Big|\div 3y^2$$

$$\frac{\cancel{3y^2}y'}{\cancel{3y^2}} + \frac{xy^3}{3y^2} = \frac{x}{3y^2}$$

1

$$y' + \frac{x}{3}y = \frac{x}{3y^2}$$

$$y' + \frac{x}{3}y = \frac{xy^{-2}}{3} \longrightarrow \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

Bernoulli en "y"

$y^{-2} \div \Big| \quad y' + \frac{x}{3}y = \frac{xy^{-2}}{3}$ $\quad\rightarrow\quad$ $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^{n}$

$Bernoulli\ en\ "y"$

$$\frac{y'}{y^{-2}} + \frac{xy}{3y^{-2}} = \frac{xy^{-2}}{3y^{-2}}$$

$donde:\ n = -2$

$v = y^{1-(-2)} = y^{1+2}$

$v = y^{3}$

$$y^{2}y' + \frac{xy^{3}}{3} = \frac{x}{3}$$

$$\frac{dv}{dx} = 3y^{2}\frac{dy}{dx}$$

$v' = 3y^{2}y'$

$$\frac{v'}{3} + \frac{xv}{3} = \frac{x}{3} \quad \Big| * (3)$$

$$\frac{v'}{3} = y^{2}y'$$

$$v' + \underbrace{x}_{P(x)}v = \underbrace{x}_{Q(x)}$$

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

$Lineal\ en\ "v"$

$P(x) \quad Q(x)$

$$\frac{dv}{dx} + xv = x \rightarrow lineal\ en\ "v"$$

$v' + P(x)v = Q(x)$

$P(x) = x$

$Q(x) = x$

$$F.I. = V(x) = e^{\int x dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} v = \int x e^{\frac{x^2}{2}} dx$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} v = e^{\frac{x^2}{2}} + c$$

$$v = 1 + ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y^3 = 1 + ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

Recordar: $v = y^3$

$$y = \sqrt[3]{1 + ce^{-\frac{x^2}{2}}}$$

→ *Solución explícita*

Solución general

Familia uniparametrica de soluciones

Prueba de conocimiento

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2 + 2r\theta}{\theta^2}$$