### MI3 Sección A Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano Aux: William Hernández

## CLASE 22/02/2021

# MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton

#### Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton

La rapidez a la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio circundante (denominada temperatura ambiente)

$$\frac{dT}{dt} = rapidez \ a \ la \ cual \ cambia \ la \ temperatura \ del \ cuerpo$$

T = temperatura del cuerpo

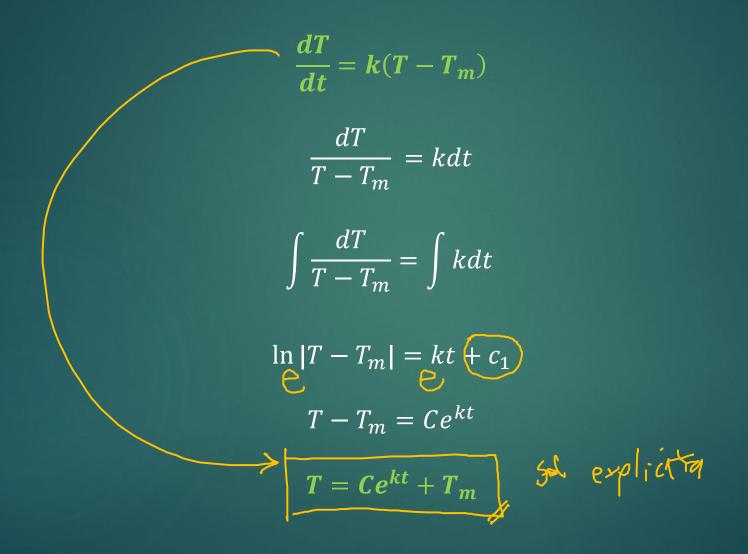
 $T_m = temperatura del medio circundante$ 

t = tiempo

k = constante de proporcionalidad

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

#### Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton



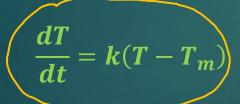
#### Ejemplo

Una barra metálica cuya temperatura inicial fue de 20°C se sumerge en un gran recipiente de agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo tarda la barra en alcanzar 90°C si se sabe que su temperatura aumenta 2°C en un segundo?¿Cuánto le toma a la barra llegar a 98°C?

T = temperatura del barra (°C)

 $T_m = temperatura del agua hirvendo$ 

t = tiempo(s)



<b>T</b> (°C)	20	22	90	98
t(s)	0	1	?	?

$$T_m = 100^{\circ}C$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{T - T_m} = kdt$$

$$\int \frac{dT}{T - T_m} = \int kdt$$

$$\ln |T - T_m| = kt + c_1$$

$$T - T_m = Ce^{kt}$$

$$T = Ce^{kt} + T_m$$

$$T_m = 100^{\circ}C$$

$$T = Ce^{kt} + T_m$$

$$T = Ce^{kt} + 100$$

$$Para T(0) = 20$$

$$T = Ce^{kt} + 100$$

$$20 = Ce^{9} + 100$$

$$C = -80$$

$$T(t) = -80e^{kt} + 100$$

$$Para T(0) = 20 \qquad \left(\begin{array}{c} t & T \\ 0 & 20 \end{array}\right)$$

$$T(t) = -80e^{kt} + 100$$
 $t$ 
 $T$ 
 $Para T(1) = 22$ 
 $t$ 
 $t$ 
 $t$ 
 $t$ 
 $t$ 

$$22 = -80e^{(1)k} + 100 \leftarrow$$

$$\frac{1}{1} = \frac{-78}{-80}$$

$$k = \ln\left(\frac{39}{40}\right)$$

$$T(t) = -80e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)t} + 100$$

$$T(t) = -80e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)t} + 100$$

<b>T</b> (°C)	20	22	90	98
$t(\underline{s})$	0	1	?	?

*Para* 
$$T = 90$$
  $t = ?$ 

$$90 = -80e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)t} + 100$$

$$\frac{-10}{-80} = e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)t}$$

$$ln\left(\frac{1}{8}\right) = ln\left[e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)t}\right]$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{8}\right)}{\ln\left(\frac{39}{40}\right)} \approx 82.13 \text{ seg}$$

La barra tarda aproximadamente 82.13 seg en alcanzar 90°

$$Para T = 98$$
  $t = ?$ 

$$98 = -80e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)} + 100$$

$$\frac{-2}{-80} = e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)t}$$

$$ln\left(\frac{1}{40}\right) = ln\left[e^{\ln\left(\frac{39}{40}\right)t}\right]$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{40}\right)}{\ln\left(\frac{39}{40}\right)} \approx 145.70 \text{ seg}$$

La barra tarda aproximadamente 145.70 seg en alcanzar 98°

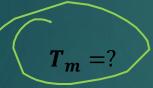
#### **Ejemplo**

Un termómetro que marca 70°F se coloca en un horno precalentado a una temperatura constante. Por una ventana de vidrio en la puerta del horno un observador registra que después de medio minuto el termómetro marca 110°F y luego de un minuto la lectura es de 145°F ?Cual es la temperatura del horno?

T = temperatura del termometro (°F)

 $T_m$  = temperatura del horno = ?

t = tiempo (min)



$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_{m})$$

<b>T</b> (°F)	70	110	145
t(min)	0	$\left(\frac{1}{2}\right)$	1

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{T - T_m} = kdt$$

$$\int \frac{dT}{T - T_m} = \int kdt$$

$$\ln|T - T_m| = kt + c_1$$

$$T - T_m = Ce^{kt}$$

$$T = Ce^{kt} + T_m$$

$$T_m = ?$$

$$T = Ce^{kt} + T_m$$

$$Para T(0) = 70 \quad \begin{pmatrix} t & T \\ 0 & 70 \end{pmatrix}$$

$$T = Ce^{kt} + T_m$$

$$70 = Ce^{k(0)} + T_m$$

$$C = 70 - T_m$$

$$T(t) = (70 - T_m)e^{kt} + T_m$$

<b>T</b> (°F)	70	110	145
t(min)	0	$\left(\frac{1}{2}\right)$	1
		Ť	

$$Para T\left(\frac{1}{2}\right) = 110 \qquad \left(\frac{1}{2}, 10\right)$$

$$T(t) = (70 - T_m)e^{kt} + T_m$$

$$110 = (70 - T_m)e^{k(\frac{1}{2})} + T_m$$

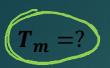
$$110 - T_m = (70 - T_m)e^{k\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left| \sqrt{\frac{110 - T_m}{70 - T_m}} \right| = \left| \frac{e^{k(\frac{1}{2})}}{n} \right|$$

$$ln\left(\frac{110-T_m}{70-T_m}\right) = lne^{k\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$ln\left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right) = \frac{1}{2}k$$

$$k = 2ln\left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right)$$



$$T(t) = (70 - T_m)e^{\mathbf{r}t} + T_m$$

$$k = 2ln\left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right)$$

$$T(t) = (70 - T_m)e^{2ln\left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right)t} + T_m$$

$$Para T(1) = 145$$
 (1 145)

145 = 
$$(70 - T_m)e^{2ln(\frac{110 - T_m}{70 - T_m})(1)} + T_m$$

$$145 - T_m = (70 - T_m)e^{2ln\left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right)}$$

$$T(^{\circ}F)$$
 70
 110
 145

  $t(min)$ 
 0
  $\frac{1}{2}$ 
 1

$$145 - T_m = (70 - T_m) e^{2in\left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right)}$$

$$\frac{145 - T_m}{70 - T_m} = e^{\ln\left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right)^2}$$

$$\frac{145 - T_m}{70 - T_m} = \left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right)^2$$

$$\frac{145 - T_m}{70 - T_m} = \left(\frac{110 - T_m}{70 - T_m}\right)^2$$

$$\frac{145 - T_m}{70 - T_m} = \frac{(110 - T_m)^2}{(70 - T_m)^2}$$

$$\frac{(70 - T_m)^2 (145 - T_m)}{(70 - T_m)} = (110 - T_m)^2$$

$$(70 - T_m)(145 - T_m) = 12100 - 220T_m + (T_m)^2$$

$$10150 - 215T_m + (T_m)^2 = 12100 - 220T_m + (T_m)^2$$

$$220T_m - 215T_m = 12100 - 10150$$

$$5T_m = 1950$$

$$T_m=390\,{
m °F}$$

La temperatura del horno es de 390°F

#### PRUEBA DE CONOCIMIENTO

A las dos de la tarde un termómetro que marca 70°F es trasladado al exterior donde el aire tiene una temperatura de -10°F. A las 2:02 de la tarde la lectura es de 26°F. A las 2:05 de la tarde el termómetro se lleva adentro nuevamente donde el aire está a 70°F. ¿Cuál es la lectura del termómetro a las 2:09?