MI3 Sección A Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 23/02/2021

MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton

PRUEBA DE CONOCIMIENTO

A las dos de la tarde un termómetro que marca 70°F es trasladado al exterior donde el aire tiene una temperatura de -10°F. A las 2:02 de la tarde la lectura es de 26°F. A las 2:05 de la tarde el termómetro se lleva adentro nuevamente donde el aire está a 70°F. ¿Cuál es la lectura del termómetro a las 2:09?

SOLUCION

A las dos de la tarde un termómetro que marca 70°F es trasladado al exterior donde el aire tiene una temperatura de -10°F. A las 2:02 de la tarde la lectura es de 26°F. A las 2:05 de la tarde el termómetro se lleva adentro nuevamente donde el aire está a 70°F. ¿Cuál es la lectura del termómetro a las 2:09

$T = temperatura\ del\ termómetro$ (°F)
$T_m = temperatura\ \ del\ medio$
$t = tiempo\ en\ minutos$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{T - T_m} = kdt$$

$$\int \frac{dT}{T - T_m} = \int kdt$$

$$\ln|T - T_m| = kt + c_1$$

e e

$$T - T_m = Ce^{kt}$$

* $$\boxed{T = Ce^{kt} + T_m}$$

$\boldsymbol{Proceso\ 1: de\ adentro\ hacia\ afuera}$

T(°F)	70	26	T_1 *
$t(min)$	0	2	5

$T_m = -10°F$ 2:00 2:02 2:05

$\boldsymbol{Proceso\ 2: de\ afuera\ hacia\ adentro}$

T(°F)	T_1 *	T_2 ?
$t(min)$	0	4

$T_m = 70°F$ 2:05 2:09

Proceso 1: de adentro hacia afuera

$T(°F)$	70	26	T_1 *
$t(min)$	0	2	5

$T_m = -10°F$ 2:00 2:02 2:05

$$T = T_m + Ce^{kt}$$

$$T = -10 + Ce^{kt}$$

t T

$Para\ T(0) = 70°F$ (0, 70)

$$T = T_m + Ce^{kt}$$

$$70 = -10 + Ce^{0}$$

$$C = 80°$$

$$\boxed{T(t) = -10 + 80e^{kt}}$$

t T

$Para\ T(2) = 26°F$ (2, 26)

$$26 = -10 + 80e^{k(2)}$$

$$\ln \frac{36}{80} = \ln e^{k(2)}$$

$$2k = \ln\left(\frac{9}{20}\right)$$

$$k = \left[\frac{\ln\left(\frac{9}{20}\right)}{2}\right]$$

$$\boxed{T = -10 + 80e^{\frac{\ln\left(\frac{9}{20}\right)}{2}t}}$$

$Para\ T(5) = T_1$ $T_1 = ?$ $t = 5$

$$T_1 = -10 + 80e^{\frac{\ln\left(\frac{9}{20}\right)}{2}(5)}$$

$$\boxed{T_1 = 0.867290°}$$

$T_1 = 0.867290°$

$$\boxed{T = T_m + Ce^{kt}}$$ ✓

$T = 70 + Ce^{kt}$

$\boldsymbol{Para\ T(0) = 0.867290°F}$

$0.867290 = 70 + \boldsymbol{C}\cancel{e^0}$ 1

$C = -69.132710$

$T(t) = 70 - 69.132710e^{kt}$

$$\boldsymbol{k} = \boxed{\frac{\boldsymbol{ln\left(\frac{9}{20}\right)}}{\boldsymbol{2}}}$$

Proceso 2: de afuera hacia adentro

$T(t)$	$0.867290°$	T_2 ?
t	**0**	**4**

$\boldsymbol{T_m = 70°F}$ **2:05** **2:09**

$T(t) = 70 - 69.132710e^{\frac{ln\left(\frac{9}{20}\right)}{2}t}$

$\boldsymbol{Para\ T(4) = T_2}$

$T_2 = 70 - 69.132710e^{\frac{ln\left(\frac{9}{20}\right)}{2}(4)}$

$T_2 = 56.00062$ °F

R//

A las 2:09 de la tarde
la temperatura es de 56°F

Mezclas

1. *Volumen Constante*

2. *Volumen Variable*

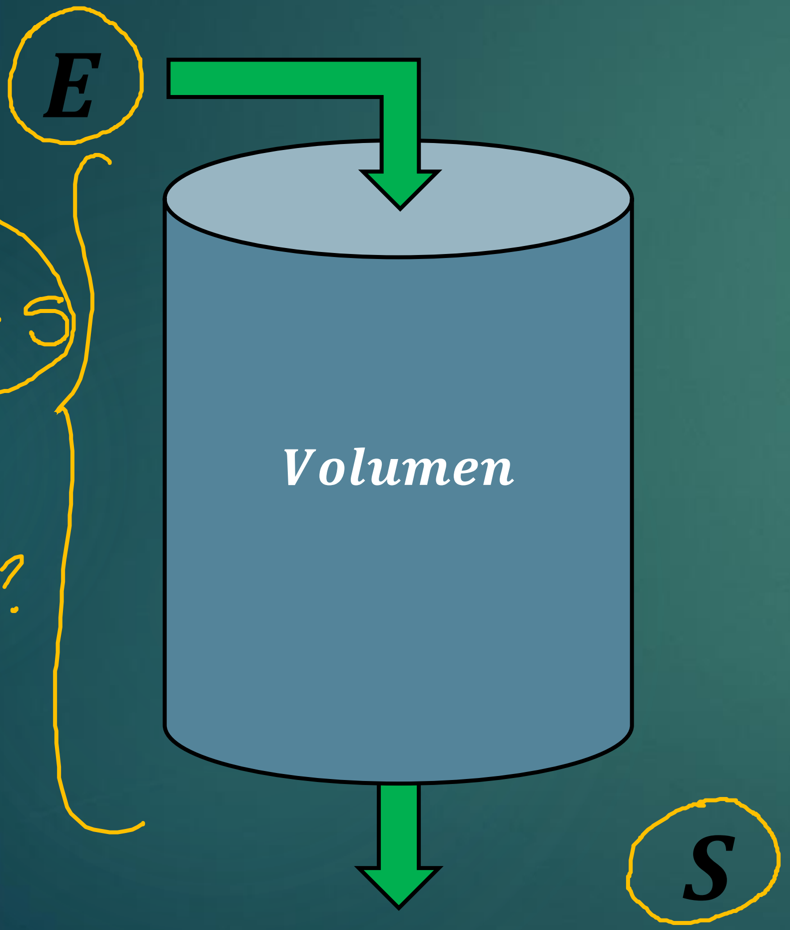
3. *En cascada*

MEZCLAS

El mezclado de dos soluciones de diferente concentración da lugar a una ED de primer orden para la cantidad de soluto con tenida en la mezcla .

$$\frac{dx}{dt} = E - S$$

$x(t) = ?$



Contiene una solución (soluto+solvente)

Por ejemplo:
Sal disuelta en agua (salmuera)

Hay tanto flujo que entra como flujo que sale

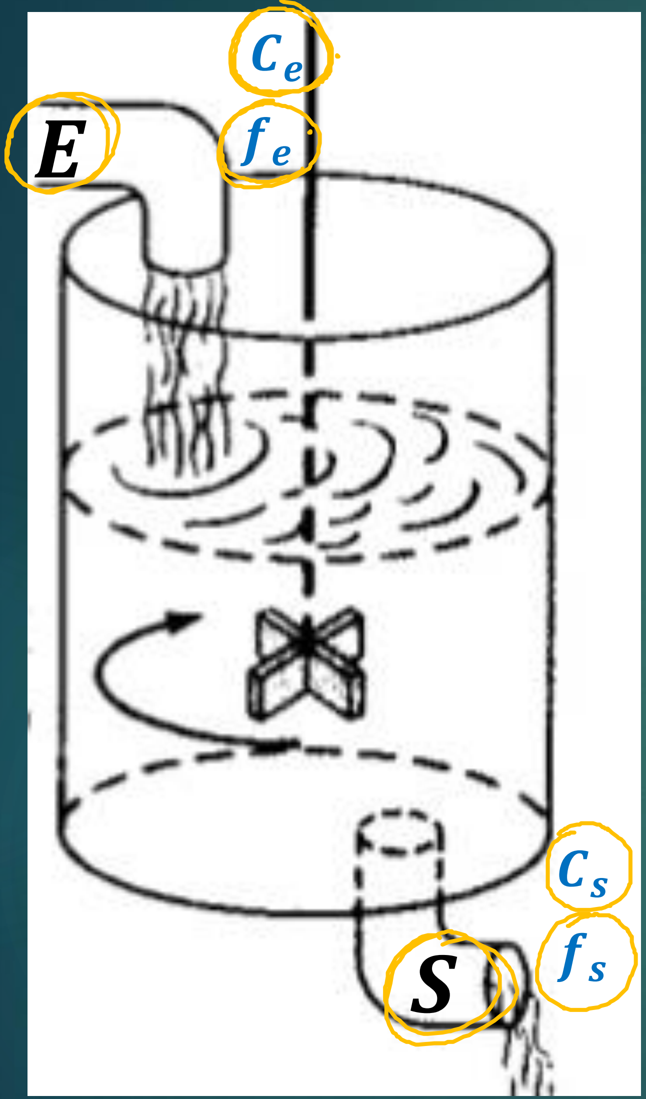
$x = cantidad\ de\ soluto\ en\ el\ tanque$

$t = tiempo$

$x(t) = cantidad\ de\ soluto\ en\ el\ tanque$
$en\ cualquier\ instante\ t$

$$\frac{dx}{dt} = E - S$$

$x(t) = ?$



x = *cantidad de soluto en el tanque*

t = *tiempo*

$\frac{dx}{dt}$ = *tasa o razon de cambio de la cantidad de soluto en el tanque*

E = *Tasa de flujo de Entrada*
S = *Tasa de flujo de Salida*

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = E - S}$$

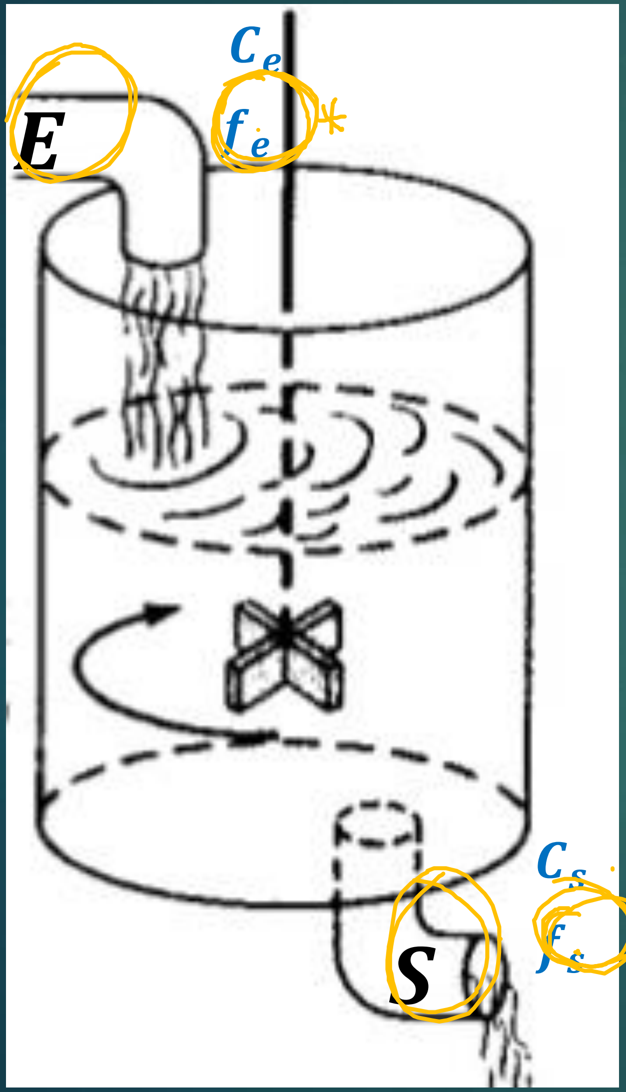
$$\frac{dx}{dt} = C_e f_e - C_s f_s$$

$\underbrace{x(t) = ?}$

C_e = *concentración de entrada*
f_e = *flujo de entrada*

C_s = *concentración de salida*
f_s = *flujo de salida*

MEZCLA CON VOLUMEN CONSTANTE



$$\frac{dx}{dt} = E - S$$

$$\frac{dx}{dt} = C_e f_e - C_s f_s$$

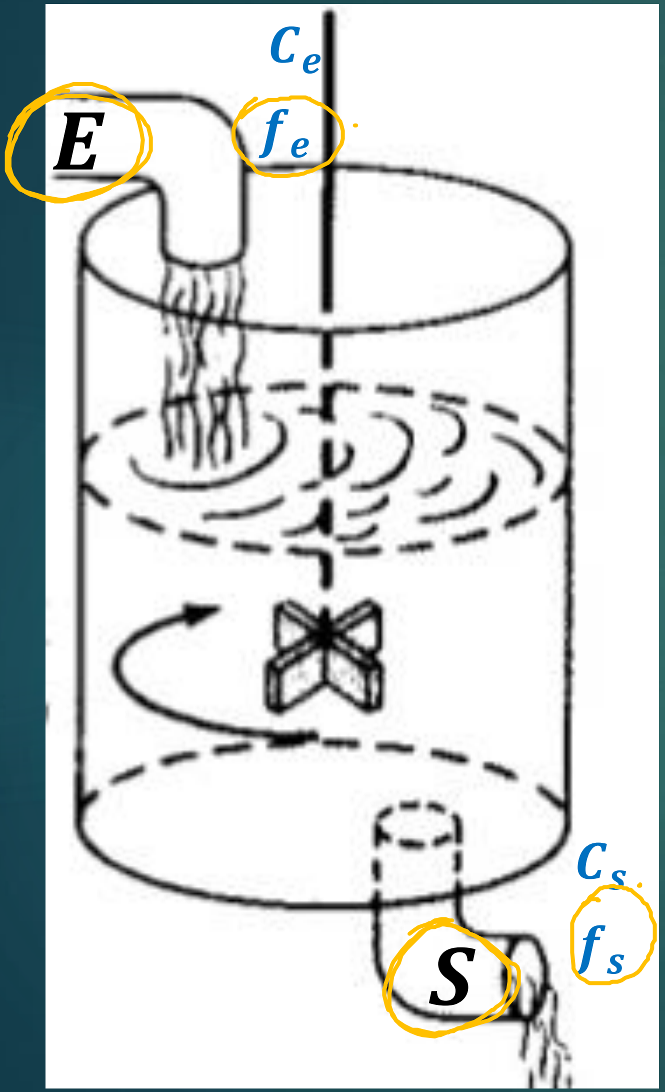
$$\boxed{f_e = f_s} \ *$$

El volumen del tanque es constante

Para calcular la concentración de salida

$$C_s = \frac{Cantidad\ de\ soluto\ en\ el\ tanque}{Volumen\ total}$$

MEZCLA CON VOLUMEN VARIABLE



$$\frac{dx}{dt} = E - S$$

$$\frac{dx}{dt} = C_e f_e - C_s f_s$$

$$\boxed{f_e \neq f_s}$$

El volumen del tanque es variable

Para calcular la concentración de salida

$$\boxed{C_s = \frac{Cantidad\ de\ soluto\ en\ el\ tanque}{Volumen\ inicial + (f_e - f_s)t}}$$

✓

Ejemplo

Un tanque contiene 2000 litros de una solución que consta de 200 kg de sal disueltos en agua. Se bombea agua pura hacia el tanque a razón 10 L/s y la mezcla se extrae a la misma razón. ¿Cuánto tiempo pasará antes que queden solamente 20 kg de sal en el tanque?

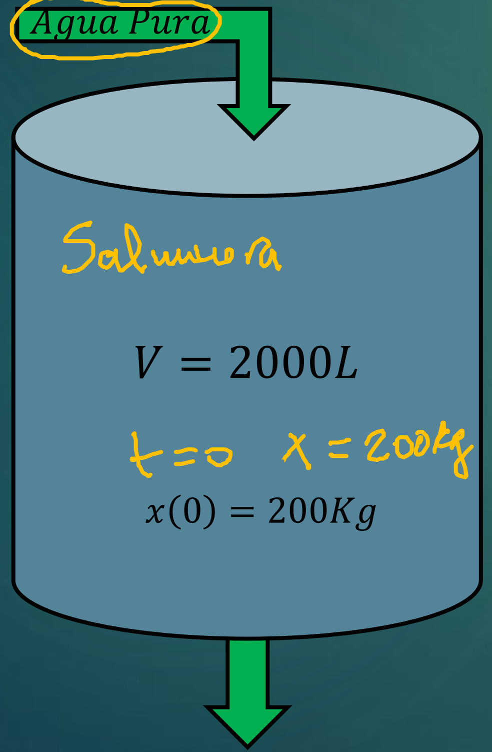
$x = cantidad\ de\ sal\ en\ el\ tanque\ (kg)$

$t = tiempo\ (s)$

* $f_e = 10\frac{L}{s}$

$C_e = \frac{0kg}{L}$

E



$f_s = 10\frac{L}{s}$ *

$C_s = ?$

S

$$\frac{dx}{dt} = E - S$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = C_e f_e - C_s f_s}$$

Para calcular C_s

$$f_e = f_s$$

volumen constante

$$C_s = \frac{Cantidad\ de\ soluto\ en\ el\ tanque}{Volumen\ total}$$

$$\boxed{C_s = \frac{x\ kg}{2000\ L}}$$