MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 09/04/2021

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGENEAS

MÉTODO VARIACIÓN DE PARÁMETROS

MÉTODO VARIACIÓN DE PARÁMETROS

El método se utiliza para resolver EDO de orden superior no homogéneas con coeficientes constante y cualquier expresión de $g(x)$, en especial para expresiones como $\tan(x)$, $\csc(x)$, $\ln x$ o expresiones racionales

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = g(x)$$

Recordando que la solución general de una E D No Homogénea es

$$y(x) = y_c + y_p$$

En variación de parámetros se plantea y_p como

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

Donde u_1 y u_2 son funciones desconocidas que deber ser determinadas.

PROCEDIMIENTO

1. Estandarizar la E D $y'' + P(x)y' + Q(x) = g(x),$

   "**<u>El coeficiente de la mayor derivada debe ser uno.</u>**"

2. Encontrar la E D Homogénea Asociada

$$y'' + P(x)y' + Q(x) = 0$$

3. Resolver la ED Homogénea Asociada para obtener la función complementaria y_c
4. Identificar las funciones y_1 y y_2 se obtienen de y_c $(y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2)$
5. Plantear $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$
6. Encontrar los wronskianos $(w, w_1\ y\ w_2)$

$$Para\ w \qquad w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$Para\ w_1 \qquad w_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$Para\ w_2 \qquad w_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix}$$

7. Encontrar las funciones $u_1\ y\ u_2$, utilizando los wronskianos encontrados.

$$u_1 = \int \frac{w_1}{w} dx; \quad u_2 = \int \frac{w_2}{w} dx$$

8. Encontrar $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$

9. Dar la solución general.

$$y(x) = y_c + y_p$$

Si la EDO es de orden 3

Se tendrían y_1 , y_2 y y_3 por lo tanto $(y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3)$

La solución particular

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3$$

$$u_1 = \int \frac{w_1}{w}dx \quad , \qquad u_2 = \int \frac{w_2}{w}dx \quad , \qquad u_3 = \int \frac{w_3}{w}dx$$

Encontrar los wronskianos (w, w_1, w_2, w_3)

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} \quad w_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ g(x) & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} \quad w_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & g(x) & y_3'' \end{vmatrix} \quad w_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & g(x) \end{vmatrix}$$

"Variación Parámetros"

$Y(x) = Y_c + Y_p$

Resuelva

$2y'' + 8y = 2\sec 2x$ $\div 2$

Estandarizar la E D, el coeficiente de la mayor derivada "debe ser uno."

$$2y'' + 8y = 2\sec 2x$$

$$y'' + 4y = \boxed{\sec 2x} \longleftarrow g(x)$$

Y_c:

Encontrar la E D Homogénea Asociada

$y'' + 4y = 0$

Ecuacion Caracteristica

$r^2 + 4 = 0$

$r_c = \pm 2i$

$y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$

$Y_c = C_1 Y_1 + C_2 Y_2$

Identificar las funciones y_1 y y_2 de y_c $(y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2)$

$$y_1 = \cos 2x \qquad y_2 = \operatorname{sen} 2x$$

Plantear $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$

? ?

$$y_p = u_1 \cos 2x + u_2 \operatorname{sen} 2x$$

$\rightarrow u_1 = \int \frac{w_1}{w} dx$

$\rightarrow u_2 = \int \frac{w_2}{w} dx$

Encontrar los wronskianos $(w, w_1\ y\ w_2)$

$y_1 = \cos 2x \quad y_2 = \operatorname{sen} 2x \quad g(x) = \sec 2x$

Para w

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$w = \begin{vmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}$$

$$w = 2\cos^2(2x) + 2\operatorname{sen}^2(2x)$$

$w = 2(\cos^2 2x + \operatorname{sen}^2 2x)$

$$w = 2$$

Para w_1

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} 2x \\ \sec 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}$$

$$w_1 = \cancel{0 * (2\cos 2x)} - \operatorname{sen} 2x * \sec 2x$$

$$w_1 = -\tan 2x$$

Para w_2

$$w_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix}$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\operatorname{sen} 2x & \sec 2x \end{vmatrix}$$

$$w_2 = \cos 2x * \sec 2x - \cancel{0 * (-2\operatorname{sen} 2x)}$$

$w_2 = \cos 2x \left(\frac{1}{\cos 2x}\right)$

$$w_2 = 1$$

$w = 2$ $\qquad w_1 = -\tan 2x$ $\qquad w_2 = 1$

Encontrar las funciones u_1 y u_2, utilizando los wronskianos encontrados.

$$u_1 = \int \frac{w_1}{w} dx \quad , \qquad u_2 = \int \frac{w_2}{w} dx$$

$$u_1 = \int \frac{w_1}{w} dx = \int -\frac{\tan 2x}{2} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\text{sen } 2x}{\cos 2x} dx = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|$$

$$u_2 = \int \frac{w_2}{w} dx = \int \frac{1}{2} dx = \frac{x}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{\text{sen}2x}{\cos 2x} dx$$

$$z = \cos 2x$$

$$dz = -2\,\text{sen}2x\,dx$$

$$\frac{dz}{-2} = \text{sen}2x\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{dz}{z}$$

$$\frac{1}{4}\ln z = \frac{1}{4}\ln \cos 2x$$

Encontrando y_p

$$u_1 = \frac{1}{4}\ln|cos\ 2x| \quad , \qquad u_2 = \frac{x}{2}$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$y_p = u_1 cos2x + u_2 sen2x$$

$$y_p = \frac{1}{4}\ln|cos\ 2x|\cos 2x + \frac{x}{2}\text{sen } 2x$$ ✓ solución particular

$$y(x) = y_c + y_p$$

$$y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \text{ sen } 2x$$

$$y(x) = \underbrace{c_1 \cos 2x + c_2 \text{ sen } 2x}_{y_c} + \underbrace{\frac{1}{4}\ln|cos\ 2x|\cos 2x + \frac{x}{2}\text{sen } 2x}_{y_p}$$

"Variación de Parámetros"

$Y(x) = Y_c + Y_p$

Resuelva

$3y'' + 3y = 3\tan x \mid \div 3$

Estandarizar la E D, el coeficiente de la mayor derivada debe ser uno.

$$3y'' + 3y = 3\tan x$$

$$* \quad y'' + y = \boxed{\tan x} \leftarrow g(x)$$

Y_c:

Encontrar la E D Homogénea Asociada

$y'' + y = 0$

Ecuacion Caracteristica

$r^2 + 1 = 0$

$r_c = \pm i$

$y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$

$Y_c = C_1 Y_1 + C_2 Y_2$

Identificar las funciones y_1 y y_2 de y_c $\quad (y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2)$

$$y_1 = \cos x \qquad y_2 = \operatorname{sen} x$$

Y_c:

Plantear $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$

$$y_p = u_1 cosx + u_2 senx$$

$\checkmark$ $u_1 = \int \frac{w_1}{w}\,dx$

$\checkmark$ $u_2 = \int \frac{w_2}{w}\,dx$

Encontrar los wronskianos $(w, w_1\ y\ w_2)$

$y_1 = \cos x \qquad y_2 = \operatorname{sen} x \qquad g(x) = \tan x$

Para w

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$w = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\,senx & \cos x \end{vmatrix}$$

$$w = cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)$$

$$w = 1$$

Para w_1

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix}$$

$$w_1 = 0 * (\cos x) - \operatorname{sen} x * \tan x$$

$$w_1 = -senx * \tan x$$

Para w_2

$$w_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix}$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \tan x \end{vmatrix}$$

$$w_2 = \cos x * \tan x - 0 * (-\operatorname{sen} x)$$

$w = \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$

$$w_2 = senx$$

$w = 1$ $\qquad$ $w_1 = -senx * tanx$ $\qquad$ $w_2 = senx$

Encontrar las funciones $u_1\ y\ u_2$, utilizando los wronskianos encontrados.

$sen^2x + cos^2x = 1$

$sen^2x = 1 - cos^2x$

$$u_1 = \int \frac{w_1}{w}dx \quad , \qquad u_2 = \int \frac{w_2}{w}dx$$

$$u_1 = \int \frac{w_1}{w}dx = \int \frac{-senx * tanx}{1}dx = -\int senx\left(\frac{senx}{cosx}\right)dx = -\int \frac{sen^2x}{cosx}dx = -\int \frac{(1-cos^2x)}{cosx}dx$$

$$u_1 = -\int \frac{(1-cos^2x)}{cosx}dx = -\int \frac{1}{cosx}dx + \int \frac{cos^2x}{cosx}dx = -\int secxdx + \int cosxdx$$

$$u_1 = -\ln|secx + tanx| + senx$$

$$u_2 = \int \frac{w_2}{w}dx = \int \frac{senx}{1}dx = \int senxdx = -cosx$$

$Y_p = U_1 Y_1 + U_2 Y_2$

Encontrando y_p

$$u_1 = -\ln|secx + tanx| + senx \qquad u_2 = -cosx$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$y_p = u_1 cosx + u_2 senx$$

$$y_p = (-\ln|secx + tanx| + senx)(cosx) - cosx(senx)$$

$$y_p = -\ln|secx + tanx|cosx + \cancel{senx(cosx)} - \cancel{senx(cosx)}$$

$$y_p = -\ln|secx + tanx|cosx$$

$$y(x) = y_c + y_p$$

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

$$y(x) = \underbrace{c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x}_{y_c} \underbrace{- \ln|secx + tanx|cosx}_{y_p}$$

PRUEBA DE CONOCIMIENTO

Determine la solucion general de la siguiente Ecuacion Diferencial

" Variación de parametros "

Resuelva

$$2y''' + 8y' = 2\sec 2x \quad \Big| \div 2$$

$$\boxed{y''' + 4y' = \underbrace{\sec 2x}_{g(x)}}$$

y_c:

$y''' + 4y' = 0$

$r^3 + 4r = 0$

$r(r^2+4) = 0$

$r_c = 0, \pm 2i$

$y_c = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \operatorname{sen} 2x$

$y_1 = 1$ $\quad y_2 = \cos 2x$ $\quad y_3 = \operatorname{sen} 2x$

$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3$

$y_p = u_1(1) + u_2 \cos 2x + u_3 \operatorname{sen} 2x$

$u_1 = \int \frac{w_1}{w} dx$; $u_2 = \int \frac{w_2}{w} dx$; $u_3 = \int \frac{w_3}{w} dx$

w $\quad w_1$ $\quad w_2$ $\quad w_3$

PRUEBA DE CONOCIMIENTO

Determine la solucion general de las siguiente Ecuacion Diferencial

$$2y''' + 8y' = 2\,sec\,2x$$

$$y''' + 4y' = sec\,2x \quad g(x)$$

$$y_c = c_1 + c_2\cos 2x + c_3\,\mathrm{sen}\,2x$$

$$y_1 = 1 \quad y_2 = \cos 2x \quad y_3 = sen2x \quad g(x) = sec2x$$

$$w = 8 \qquad w_1 = 2\sec 2x \qquad w_2 = -2 \qquad w_3 = -2\frac{sen2x}{cos2x}$$

$$u_1 = \frac{1}{8}\ln|\sec 2x + \tan 2x| \qquad u_2 = -\frac{x}{4} \qquad u_3 = \frac{1}{8}\ln|\cos 2x|$$

$$y_p = \frac{1}{8}\ln|\sec 2x + \tan 2x| - \frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\ln|\cos 2x|\,\mathrm{sen}\,2x$$

$$y(x) = \underbrace{c_1 + c_2\cos 2x + c_3\,\mathrm{sen}\,2x}_{Y_c} + \underbrace{\frac{1}{8}\ln|\sec 2x + \tan 2x| - \frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\ln|\cos 2x|\,\mathrm{sen}\,2x}_{Y_p} \quad \checkmark$$