# MI3 Sección A
# Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

# CLASE 22/03/2021

# ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

# ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGENEAS

# ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGENEAS



$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$ es no homógenea.

La solución general de una ecuación No Homogénea es la suma de su función complementaria $y_c$ y una solución particular $y_p$ de la ecuación.

$$\boxed{y(x) = y_c + y_p}$$

- MÉTODO COEFICIENTES INDETERMINADOS
- MÉTODO ANULADOR
- MÉTODO VARIACIÓN DE PARÁMETROS

# MÉTODO COEFICIENTES INDETERMINADOS

# MÉTODO COEFICIENTES INDETERMINADOS



1. Encontrar la ED Homogénea Asociada

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

2. Resolver la ED Homogénea Asociada, con esto se determina la función complementaria $y_c$
3. Establecer la solución particular $y_p$
4. Solución final

$$\boxed{y(x) = y_c + y_p}$$

El método de coeficientes indeterminados se usa para encontrar una solución particular de una ecuación diferencial con coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

Y $g(x)$ puede ser una de las siguientes

- $g(x) =$ polinomio de $x$; $g(x) = x^2 + 3x - 5$, $g(x) = x^3 - 2x + 1$
- $g(x) = exponecial = e^{rx}$; $g(x) = \underbrace{5e^{-3x}}_{r=-3}$, $g(x) = \underbrace{-2e^{-x}}_{r=-1}$
- $g(x) = \cos \beta x$ ó $\sin \beta x$ ó $cualquier\ funcion\ de\ estas\ clases$;

  $g(x) = \underset{r=\pm 2i}{3 \cos 2x}$, $g(x) = \underbrace{\sin 5x}_{r=\pm 5i}$, $g(x) = \underbrace{-e^{x} \cos 7x}_{r=1\pm 7i}$

La forma $y_p$ no se puede determinar con solo ver la función de forzamiento $g(x)$

La solución de la ecuación homogénea (las raíces del polinomio caracteristico) también deben tomarse en cuenta

La idea fundamental que sustenta este método es una conjetura acerca de la forma de $y_p$, en realidad es una suposicion informada, motivada por las clases de funciones que constituyen la función de entrada $g(x)$

* No es aplicable a ecuaciones en donde la forma: $g(x) = lnx$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = secx$, $g(x) = tanx$, $etc.$

La forma $y_p$ no se puede determinar con solo ver la función de forzamiento $g(x)$

La solución de la ecuación homogénea (las raíces del polinomio caracteristico) también deben tomarse en cuenta

# Ejemplo

$$\boxed{y(x) = y_c + y_p}$$

✓ ?

Resuelva

1) $y'' + 16y = e^{3x}$ g(x)

*Funcion complementaria* $(y_c)$

*Ecuacion homogenea asociada*

$y'' + 16y = 0$

*Ecuacion caracteristica*

$r^2 + 16 = 0$

$r^2 = -16$

$r_c = \pm 4i$

$\alpha = 0, \beta = 4$

$$y_c = e^{\cancel{0}x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$$

$$\boxed{y_c = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x}$$

$$y'' + 16y = e^{3x}$$ g(x)

*Funcion complementaria*

$$\boldsymbol{y_c = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x}$$

$r_c = \pm 4i$

* *Solución particular* $Y_p$

$$g(x) = e^{3x}$$

$r = 3$

$$r_p = 3$$

$$\boxed{y_p = Ae^{3x}}$$

$$y'_p = 3Ae^{3x}$$

$$y''_p = 9Ae^{3x}$$

$$y''_p + 16y_p = e^{3x}$$

$$9Ae^{3x} + 16Ae^{3x} = e^{3x}$$

$$25Ae^{3x} = e^{3x}$$

$$25A = 1$$

$$A = \frac{1}{25}$$

$e^{3x}$:

$$25A = 1$$

$$A = \frac{1}{25}$$

*Por lo tanto:*
*la solución particular*

$$y_p = Ae^{3x}$$

$$\boxed{y_p = \frac{1}{25}e^{3x}}$$

$$\boxed{y(x) = y_c + y_p}$$

$$y(x) = \underbrace{\boldsymbol{c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x}}_{Y_c} + \underbrace{\frac{1}{25}e^{3x}}_{Y_p}$$

# Ejemplo

Resuelva

2) $y'' + 4y = 12x \quad ; y(0) = 5, \quad y'(0) = 7$

g(x)

$$\boxed{y(x) = y_c + y_p}$$

*Funcion complementaria*

*Ecuacion homogenea asociada*

$y'' + 4y = 0$

*Ecuacion caracteristica*

$r^2 + 4 = 0$

$r^2 = -4$

$r_c = \pm 2i$

$$\boldsymbol{y_c = e^{0x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x}}$$

$$y'' + 4y = 12x$$ $g(x)$

*Funcion complementaria*

$$\boldsymbol{y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x}$$ $r_c = \pm 2i$

*Solución particular* $y_p$

$g(x) = 12x$

$r_p = 0, 0$ ó *bien*

$r_p = 0$ *multipliciad* 2

$y_p = Ae^{0x} + Bxe^{0x}$

$\boxed{y_p = A + Bx}$

$y'_p = B$

$y''_p = 0$

$y''_p + 4y_p = 12x$

$0 + 4(A + Bx) = 12x$

$4A + 4Bx = 12x$

$x$:

$4B = 12$

$B = \dfrac{12}{4}$

$B = 3$

$4A = 0$

$A = 0$

*Por lo tanto:*
*la solución particular*

$y_p = A + Bx$

$y_p = 0 + 3x$

$\boxed{y_p = 3x}$

$y(x) = y_c + y_p$

$$\left.\begin{aligned} &y(x) = \underbrace{\boldsymbol{c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x}}_{y_c} + \underbrace{3x}_{y_p} \end{aligned}\right\} \text{Sol, general}$$

$$y'' + 4y = 12x \quad ; y(0) = 5, \ \underline{y'(0) = 7}$$

$$y(0) = 5 \quad (0,5)$$

$$y(x) = \underbrace{c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x}_{y_p} + \underbrace{3x}_{y_c}$$

$$5 = c_1$$

$$y'(0) = 7 \quad (0,7)$$

$$y'(x) = -2c_1 \, sen\, 2x + 2c_2 \cos 2x + 3$$

$$7 = 2c_2 + 3$$

$$4 = 2c_2$$

$$c_2 = 2$$

$$y(x) = y_c + y_p$$

$$y(x) = \overbrace{c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x}^{y_c} + \overbrace{3x}^{y_p}$$

$$\boxed{y(x) = 5 \cos 2x + 2 \sin 2x + 3x}$$

# Ejemplo



Para las siguientes ecuaciones diferenciales, sin resolver completamente, encuentre $y_c$ y plantee $y_p$

1. $y'' - 3y' + 2y = 5x^2 - 1$

$y_c$ :

$y_p$ :