MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 05/03/2021

MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

LEY DE TORRICELLI

(DRENADO DE UN DÉPOSITO)

PRUEBA DE CONOCIMIENTO

Un tanque tiene la forma de un cubo de 12 pies de arista. Debido a un pequeño orificio situado en el fondo del tanque de 2 pulgadas cuadradas de área, presenta un escape. Si el tanque esta inicialmente lleno hasta las tres cuartas partes de su capacidad, determine:

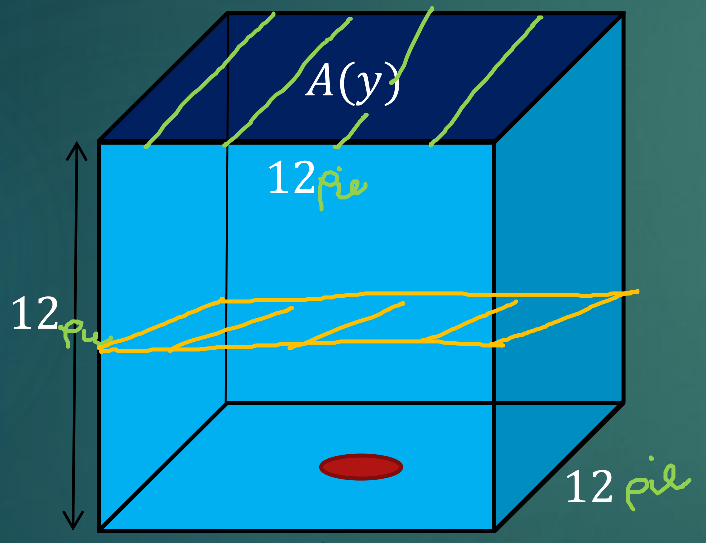
a) Cuando el tanque estará a la mitad de su capacidad

b) Cuando el tanque estará totalmente vacío

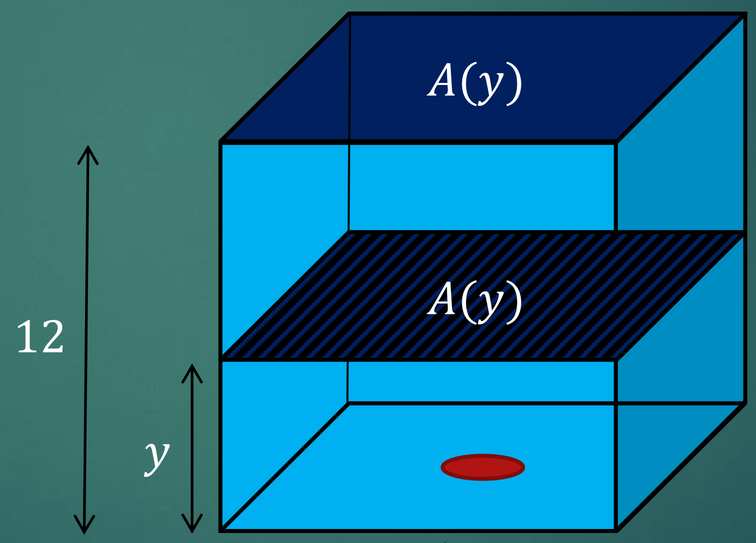
condiciones iniciales

$t = 0 \quad Y = 9$ pies

$t = ? \quad Y = 0 \quad t = ? \quad Y = 6$ pies



$a = 2pulgadas^2$



$a = 2pulgadas^2$

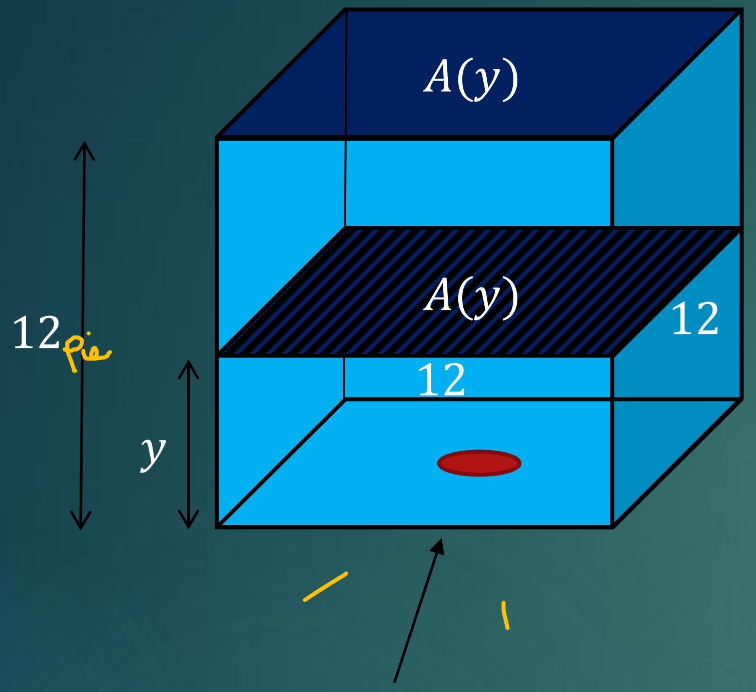
$$A(y)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$$

$$g = 32\ {}^{pie}/_{s^2}$$

$g = 32\ pie/s^2$

$$A(y) = ?$$

$$a = ?$$



$$a = 2pulgadas^2$$

$$a = 2\cancel{pulgadas^2} * \frac{1\,pie^2}{(12)^2\cancel{pulgadas^2}}$$

$$a = \frac{2}{144}pie^2$$

$$a = \frac{1}{72}pie^2$$

$$A(y) = Area\ cuadrado$$

$$A(y) = (12)(12)$$

$$A(y) = 144pie^2$$

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$$

$$(144)\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{1}{72}\right)\sqrt{2(32)y}$$

$$(144)\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{1}{72}\right)(8)\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = -\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{144}\right)dt$$

$$\boxed{y^{-1/2}dy = -\frac{1}{1296}dt}$$

$$y^{-1/2}dy = -\frac{1}{1296}dt$$

$$\int y^{-1/2}\,dy = -\frac{1}{1296}\int dt$$

$$\boxed{2y^{1/2} = -\frac{1}{1296}t + C}$$

$$t = 0 \qquad y = 9\,pie$$

$$2(9)^{1/2} = -\cancel{\frac{1}{1296}}(0) + C$$

0

$$C = 6$$

$$\boxed{2y^{1/2} = -\frac{1}{1296}t + 6}$$

a) Cuando el tanque estará a la mitad de su capacidad

$$t = ? \qquad y = 6$$ pie

$$2y^{1/2} = -\frac{1}{1296}t + 6$$

$$2(6)^{1/2} = -\frac{1}{1296}t + 6$$

$$\frac{1}{1296}t = 6 - 2\sqrt{6}$$

$$t = \frac{\left(6 - 2\sqrt{6}\right)}{\frac{1}{1296}}$$

$$t = 1,426.92\ segundos$$

b) Cuando el tanque estará totalmente vacío

$$t = ? \qquad y = 0$$

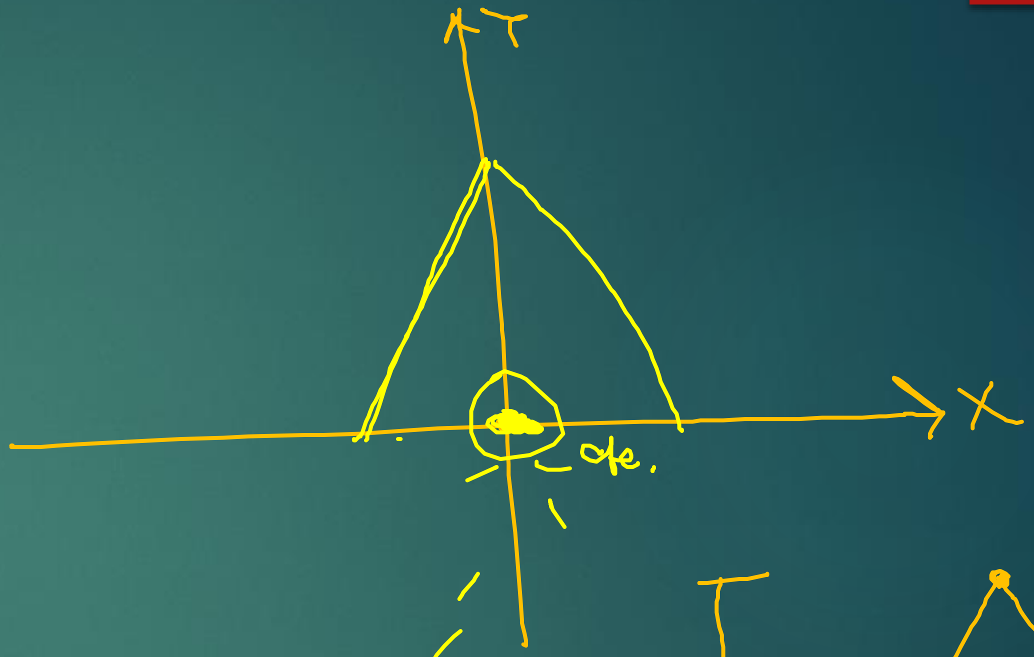
$$2y^{1/2} = -\frac{1}{1296}t + 6$$

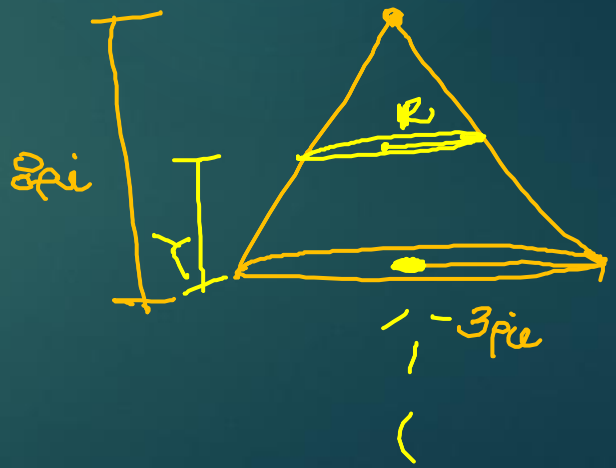
$$2(0)^{1/2} = -\frac{1}{1296}t + 6$$

$$\frac{1}{1296}t = 6$$

$$t = \frac{6}{\frac{1}{1296}}$$

$$t = 7,776\ segundos$$





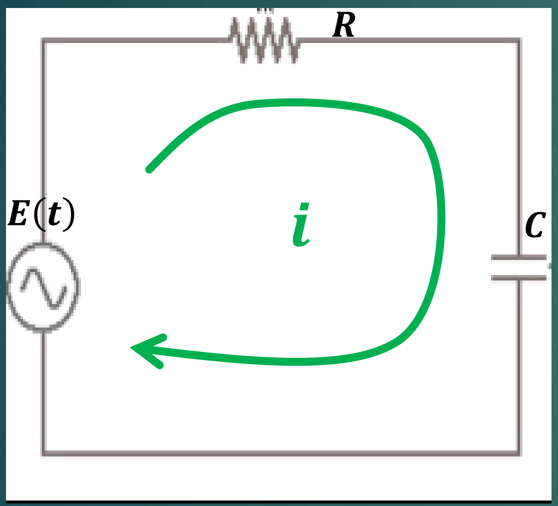
CIRCUITOS EN SERIE

RC Y RL

CIRCUITO RC

La Segunda Ley de Kirchhoff establece que la suma de las caidas de voltaje a través de un capacitor de capacitancia c es q(t)/c donde q es la carga del capacitor y el resistor iR es igual al voltaje aplicado E(t)

$$\boxed{Ri + \frac{q}{c} = E(t)}$$



La corriente i y la carga q se relacionan mediante

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$\boxed{R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = E(t)}$$

$q(t) = ?$ *Ecuacion Diferencial para la carga* $q(t)$

donde

C = *capacitancia en faradios* (f)

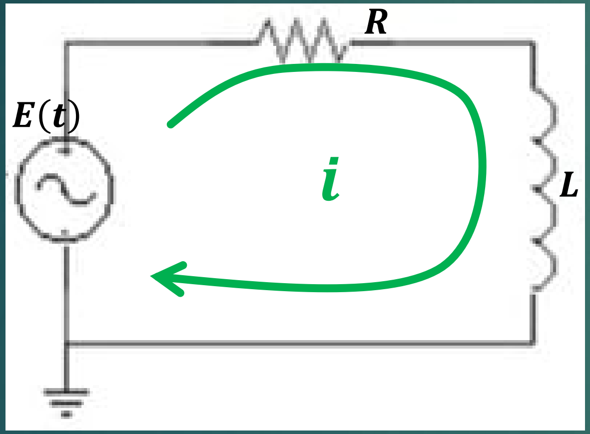
R = *resistencia en ohms* (Ω)

E = *voltaje aplicado* (V)

t = *tiempo en segundos*

CIRCUITO RL

La Segunda Ley de Kirchhoff establece que la suma de las caidas de voltaje através de un inductor de inductancia L es L(di/dt) donde di/dt es la variación de la corriente respecto aun tiempo y el resistor iR es igual al voltaje aplicado E(t)



$$\boxed{\boldsymbol{L\frac{di}{dt}+Ri=E(t)}}$$

$i(t) = ?$

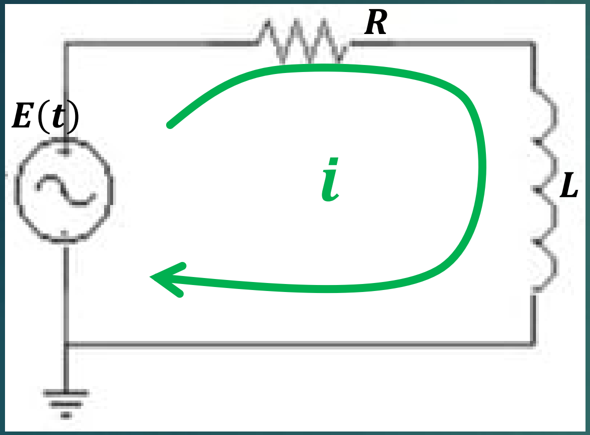
Ecuacion Diferencial para la corriente $i(t)$

donde

$L =$ *inductacia en Henrios* (h)
$R =$ *resistencia en ohms* (Ω)
$E =$ *voltaje aplicado* (V)
$t =$ *tiempo en segundos*

Ejemplo

Se aplica una fuerza electromotriz de 30 voltios a un circuito LR en serie en el que la inductancia es de 0.1 h y la resistencia es de 50 ohms. Calcule la corriente i(t), sí i(0)=0. Determine la corriente cuando $t \to \infty$



$$\boxed{L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)}$$

$$(0.1)\frac{di}{dt} + (50)i = 30 \quad \div 0.1$$

$$\frac{di}{dt} + P(t)i = Q(t)$$

$$i' + P(t)i = Q(t)$$

$$\frac{di}{dt} + 500i = 300 \to lineal\ en\ i$$

$P(t)$ $\quad$ $Q(t)$

$$P(t) = 500$$
$$Q(t) = 300$$
$$F.I. = e^{500t}$$

$E(t) = 30\ V$

$L = 0.1\ h$

$R = 50\Omega$

$$e^{500t}i = \int 300e^{500t}\,dt$$

$$e^{500t}i = \frac{3}{5}e^{500t} + c$$

$$e^{500t} i = \frac{3}{5} e^{500t} + c$$

$$\boxed{i(t) = \frac{3}{5} + c e^{-500t}}$$

Condiciones iniciales

$$i(0) = 0$$

t, i
(0, 0)

$$0 = \frac{3}{5} + c \cancel{e^0}\ 1$$

$$c = -\frac{3}{5}$$

$$\boxed{\boldsymbol{i(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} e^{-500t}}}$$

Corriente para cualquier instante t

$\boldsymbol{i = ?}$ ***cuando t*** $\rightarrow \infty$

$$\boldsymbol{i(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} e^{-500t}}$$

0

$$i(\infty) = \boldsymbol{\frac{3}{5} - \frac{3}{5} e^{-500(\infty)}}$$

$$i(\infty) = \boldsymbol{\frac{3}{5} - \frac{3}{5}(0)}$$

$$i(\infty) = \boldsymbol{\frac{3}{5}}$$ Amperes

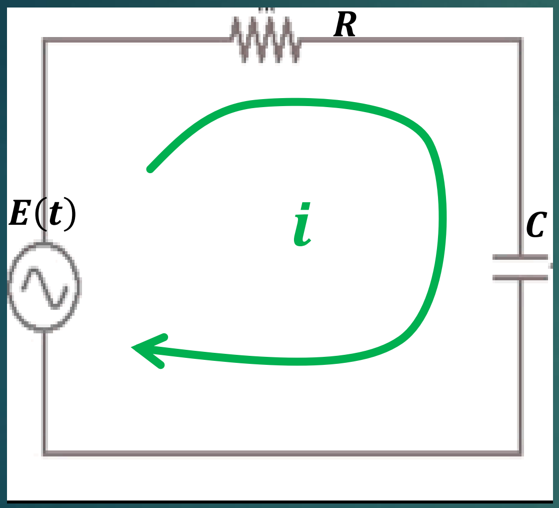
cuando el tiempo tiende al infinito

se tiene una corriente de $\frac{3}{5}$ *Amperios*

Ejemplo

Un circuito en serie RC con una resistencia de 10 ohms una capacitancia de 0.02 faradios se le aplica una tensión de $100e^{-5t}$ voltios. La carga inicial es cero $q(0)=0$.
Determine:

a) Determine $q(t)$ e $i(t)$
b) Cual es la máxima carga del capacitor para $t \geq 0$ y en que momento ocurre



$$E(t) = 100e^{-5t}\ V$$
$$R = 10\Omega$$
$$C = 0.02\ f$$

$$\boldsymbol{Ri + \frac{q}{c} = E(t)}$$

La corriente i y la carga q se relacionan mediante

$$\boldsymbol{i = \frac{dq}{dt}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = E(t)}}$$

$$\boldsymbol{10\frac{dq}{dt} + \frac{1}{0.02}q = 100e^{-5t}} \quad *$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dq}{dt} + 5q = 10e^{-5t}}}$$

$\frac{dq}{dt} + 5q = 10e^{-5t} \rightarrow$ *lineal en q*

$q' + P(t)q = Q(t)$

$P(t)$ $Q(t)$

$q(t) = ?$

$P(t) = 5$
$Q(t) = 10e^{-5t}$
$F.I. = e^{5t}$

$$e^{5t}q = \int (e^{5t})10e^{-5t}\,dt$$

$$e^{5t}q = 10\int dt$$

$$e^{5t}q = 10t + C$$

$$q = \frac{10t}{e^{5t}} + \frac{C}{e^{5t}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{q(t) = 10te^{-5t} + Ce^{-5t}}}$$

Condiciones iniciales

t, q

$$q(0) = 0 \quad (0, 0)$$

$$\boldsymbol{q(t) = 10te^{-5t} + Ce^{-5t}}$$

$$0 = \cancel{10(0)e^{0}} + C\cancel{e^{0}}$$

0 1 1

$$\boldsymbol{C = 0}$$

$q(t) = ?$
$i(t) = ?$

$$\boxed{\boldsymbol{q(t) = 10te^{-5t}}}$$

Carga para cualquier instante t

Para la ecuacion de la corriente

Recordar

La corriente y la carga se relacionan mediante

$$\boldsymbol{i = \frac{dq}{dt}}$$

$$\boldsymbol{q(t) = 10te^{-5t}}$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = q'(t) = -50te^{-5t} + 10e^{-5t}$$

$$\boldsymbol{i(t) = 10e^{-5t} - 50te^{-5t}}$$

Corriente para cualquier instante t

Cual es la maxima carga del capacitor? Y en que momento ocurre ?