MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 16/04/2021

MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

MOVIMIENTO LIBRE NO AMORTIGUADO (Movimiento Armónico Simple)

CONDICIONES INICIALES PARA DETERMINAR LAS CONSTANTES C1 Y C2

MAS $\left\{ m\frac{d^2x}{dt^2} + KX = 0 \right.$

Cuando se emplean condiciones iniciales para determinar las constantes c_1 y c_2 en $\boxed{x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t}$ se dice que la solución particular resultante o respuesta es la ecuación de movimiento

- Si $x_0 > 0$, $x_1 < 0$

  La masa parte de un punto abajo de la posición de equilibrio con una velocidad impartida hacia arriba.

Posicion

- Si x' (0)=0 $x'(0)=0$

  Se dice que la masa se libera desde el reposo

$\uparrow \ominus$

P.E

$\downarrow \oplus$

- Si $x_0 < 0$, $x_1 = 0$

  La masa se libera desde el reposo de un punto arriba de la posición de equilibrio

FRECUENCIA CIRCULAR: Medida en radianes por segundo.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ó} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

PERÍODO: Tiempo medido en Segundos que tarda una masa en ejecutar un ciclo de movimiento. Un ciclo es una oscilacion completa de la masa (desde el punto de vista grafico es la longitud del intervalo de tiempo entre dos maximos o minimos sucesivos de $x(t)$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

FRECUENCIA: Es el número de ciclos completado cada segundo.

$\left(\frac{ciclos}{s} = Hertz = Hz\right)$

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega_0}}$$

Un objeto de 20 Kg de masa oscila en el extremo de un resorte con periodo de 2 segundos. ?Cual es la constante del resorte?

$k = ?$

Datos

$\boxed{m = 20\ kg}$

$\boxed{T = 2\ s}$

Se sabe que:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow \omega_0 = \pi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{2}$$

$$\boldsymbol{\omega_0 = \pi}$$

Ademas:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}}$$

$$\boldsymbol{\omega_0^2 = \frac{k}{m}} \longrightarrow \boldsymbol{k = \omega_0^2\, m}$$

$k = \omega_0^2 m$

$$\boldsymbol{k = (\pi)^2\,(20)}$$

$$\boldsymbol{k = 20\pi^2}$$

- Una masa de 1kg se sujeta del extremo de un resorte suspendido de un cielo raso y el sistema se pone en movimiento. El período de oscilación resultante es de 2 segundos. Posteriormente se retira la masa de 1kg y se reemplaza por una masa desconocida M. El nuevo sistema se pone en movimiento y se encuentra que el nuevo periodo de oscilación es de 4 segundos. ¿Cuál es el valor de la masa M?

Datos

$$m_1 = 1kg$$
$$T_1 = 2seg$$
$$\boxed{m_2 = M}$$
$$T_2 = 4seg$$

Recordar:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Ademas:

$$\boldsymbol{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

Encontrando el ω_{0_1}

$$\omega_{0_1} = \frac{2\pi}{T_1}$$
$$\omega_{0_1} = \frac{2\pi}{2}$$
$$\boxed{\boldsymbol{\omega_{0_1} = \pi\frac{rad}{s}}}$$

Encontrando k

$$\omega_{0_1}^2 = \frac{k}{m_1}$$
$$k = \omega_{0_1}^2 m_1$$
$$\boxed{k = (\pi)^2(1)}$$
$$\boldsymbol{k = \pi^2}$$

Encontrando el ω_{0_2}

$$\omega_{0_2} = \frac{2\pi}{T_2}$$
$$\omega_{0_2} = \frac{2\pi}{4}$$
$$\boldsymbol{\omega_{0_2} = \frac{\pi}{2}\frac{rad}{s}}$$ ✓

Encontrando M

$$\omega_{0_2}^2 = \frac{k}{m_2}$$
$$m_2 = \frac{k}{\omega_{0_2}^2}$$
$$M = \frac{(\pi^2)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$$
$$M = \frac{\pi^2}{\frac{\pi^2}{4}}$$
$$\boxed{M_2 = \boldsymbol{M = 4kg}}$$ ✓

MOVIMIENTO LIBRE NO AMORTIGUADO
MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

Ecuación Diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Kx}{m} = 0 \quad \Big| \div m$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m}$$

$$\omega_o^2 = \frac{k}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0$$

$$x'' + \omega_0^2 x = 0 \longrightarrow$$

Ec. auxiliar

$$r^2 + \omega_0^2 = 0 \longrightarrow r = 0 \pm \omega_0 i$$

parte real

parte imaginaria

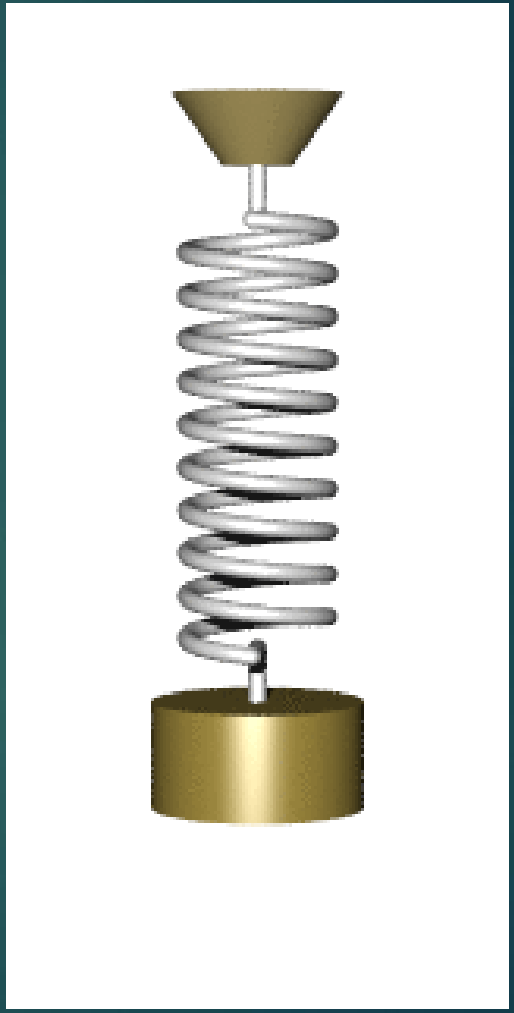
Ecuación del movimiento

$$\boxed{x(t) = c_1 \cos \omega_o t + c_2 \operatorname{sen} \omega_o t}$$

Condiciones Iniciales

$x(0) = x_0$ posicion inicial

$x'(0) = x_1$ vel. inicial



MOVIMIENTO LIBRE NO AMORTIGUADO
ECUACIÓN ALTERNATIVA

$x(t) = C_1 \cos w_0 t + C_2 \operatorname{sen} w_0 t$

Ecuación del movimiento

$$\boxed{x(t) = c_1 \cos \omega_o t + c_2 \operatorname{sen} \omega_o t}$$

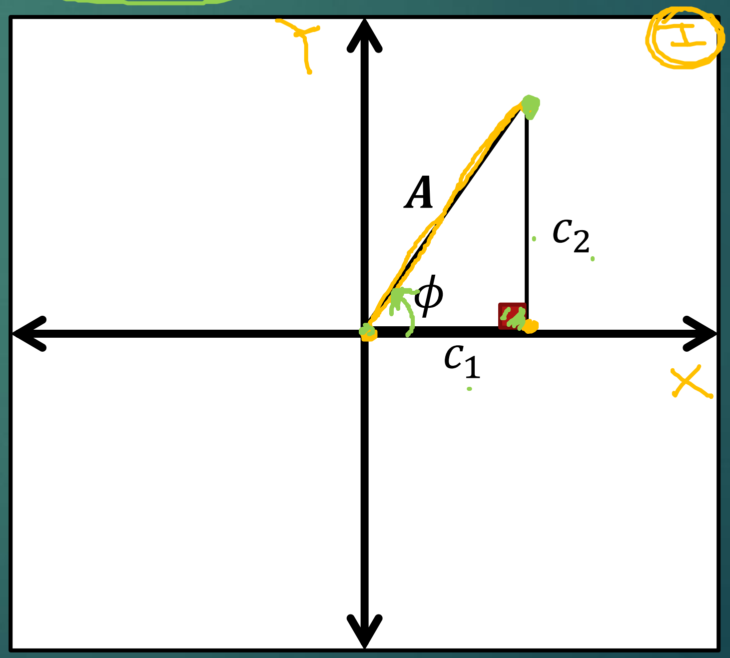
$\omega_o = frecuencia\ circular\ del\ sistema$

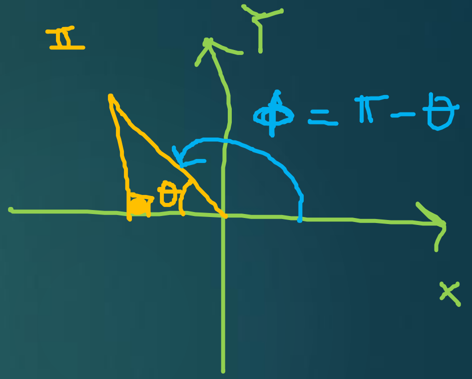
Ecuación Alternativa

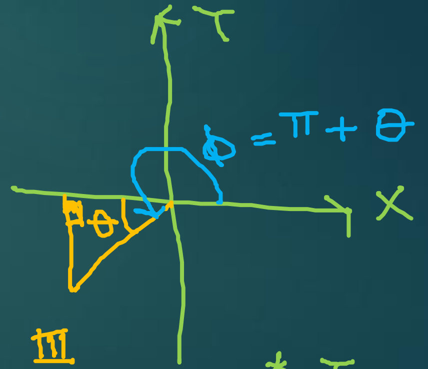
$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = A\cos(\omega_o t - \phi)}}$$

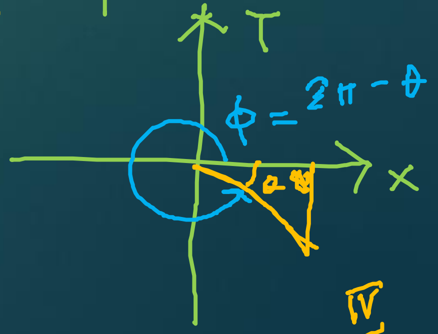
corrimiento de fase hacia la derecha.

$c_1, c_2 > 0$









$A = amplitud$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$\phi = angulo\ de\ fase$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right); radianes$$

MOVIMIENTO LIBRE NO AMORTIGUADO
ECUACIÓN ALTERNATIVA

Ecuación de movimiento

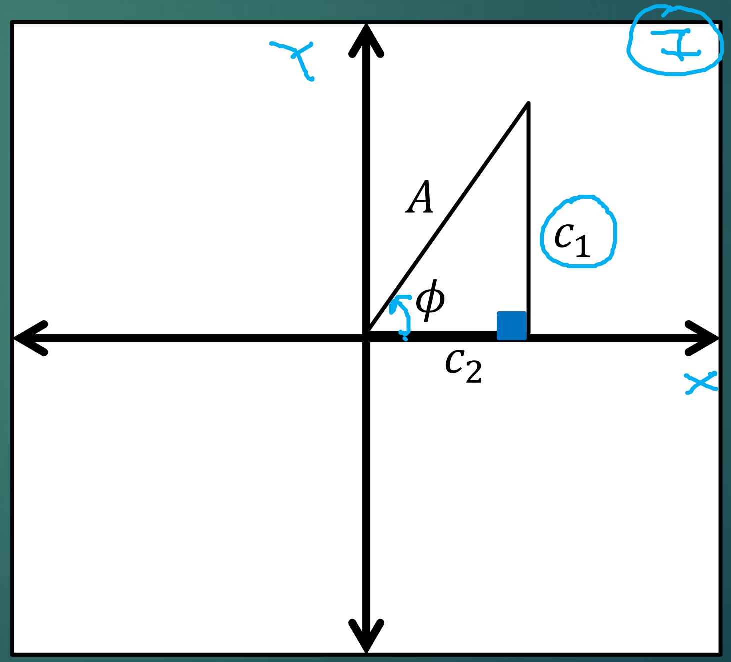
$$\boxed{x(t) = c_1 \cos \omega_o\, t + c_2 \operatorname{sen} \omega_o t}$$

Otra forma Ecuacion alternativa

$$\boxed{x(t) = \boldsymbol{A} \,\mathbf{sen}(\boldsymbol{\omega_o t} + \boldsymbol{\phi})}$$

corrimiento de fase es hacia la izquierda

$$c_1, c_2 > 0$$



$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$$\phi = angulo\ de\ fase$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right);\ radianes$$

Ecuación Alternativa

Comienzo de fase

$$x(t) = A\cos(\omega_o t - \phi)$$

$$x(t) = A\cos\omega_0\left(t - \frac{\phi}{\omega_0}\right)$$

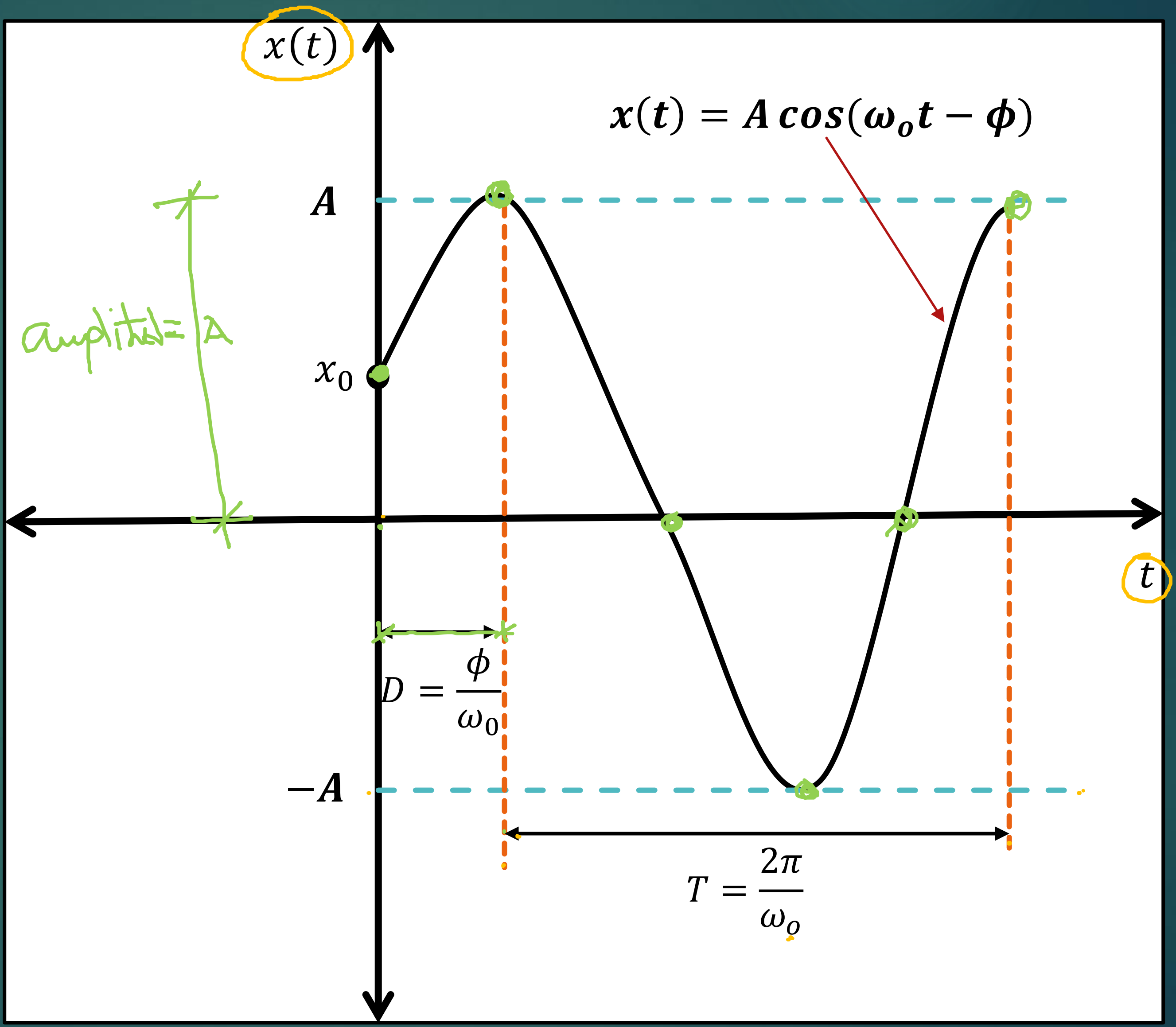
$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$$\phi = angulo\ de\ fase$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$$

$$D = Desface$$

$$D = \frac{\phi}{\omega_0}$$



Una masa que pesa 4 libras se une a un resorte cuya constante es de 16 lb/pie. Encuentre la ecuación del movimiento, ¿Cuál es el periodo del movimiento armónico simple?

movimiento Libre No amortiguado

movimiento armonico simple

Datos:

$$\boxed{w = 4\,lb}$$

$$k = 16\,\frac{lb}{pie}$$

✓

Tarea !!!

Encontrando la masa

$$w = mg$$

$$m = \frac{w}{g}$$

$$m = \frac{4lb}{32\,\frac{pie}{seg^2}}$$

$$\boxed{m = \frac{1}{8}\,slug}$$

?

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0}$$

$$\frac{1}{8}x'' + 16x = 0 \quad *(8)$$

$$\boxed{x'' + 128x = 0}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x(t) = ? \\ T = ? \end{array}}$$