MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 19/04/2021

MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

MOVIMIENTO LIBRE NO AMORTIGUADO (Movimiento Armónico Simple)

* Una masa que pesa 4 libras se une a un resorte cuya constante es de 16 lb/pie. Encuentre la ecuación del movimiento, ¿Cuál es el periodo del movimiento armónico simple?

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$x(t) = C_1 \cos w_0 t + C_2 \operatorname{sen} w_0 t$$

Datos:

$$w = 4\ lb$$

$$k = 16\,\frac{lb}{pie}$$

Encontrando la masa

$$w = mg$$

$$m = \frac{w}{g}$$

$$m = \frac{4\,lb}{32\,\frac{pie}{seg^2}}$$

$$m = \frac{1}{8}\ slug$$

$$g = 32\,\frac{pie}{seg^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{w_0}$$

Periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\omega_0 = 8\sqrt{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

$$T = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\ s$$

Ecuacion Diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\frac{1}{8}x'' + 16x = 0 \quad \Big|\ *(8)$$

$$\boxed{x'' + \overset{w_0^2}{128}x = 0}$$

$$r^2 + 128 = 0$$

$$r^2 = -128$$

$$r = \pm 8\sqrt{2}i$$

$$\boldsymbol{\omega_0^2 = 128}$$

$$\omega_o = \sqrt{\mathbf{128}}$$

$$\omega_o = \sqrt{\mathbf{64(2)}}$$

$$\omega_o = \mathbf{8\sqrt{2}}$$

Ecuación de movimiento

$$x(t) = c_1 \cos 8\sqrt{2}t + c_2 \operatorname{sen} 8\sqrt{2}t$$

sol. general

Una masa que pesa 32 libras alarga 2 pie un resorte. Determine la amplitud y el periodo de movimiento si "la masa se libera inicialmente desde un punto situado 1 pie arriba de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 2 pie/s", ¿Cuantos ciclos enteros habrá completado la masa al final de 4π segundos?

Datos:

$w = 32\ lb$

$x = 2pie$

Encontrando la masa

$$w = mg$$
$$m = \frac{w}{g}$$
$$m = \frac{32lb}{32\frac{pie}{seg^2}}$$
$$m = 1\ slug$$

Encontrando la constante del resorte

$$F = kx$$
$$k = \frac{F}{x}$$
$$k = \frac{32lb}{2\ pie}$$
$$k = 16\ {}^{lb}/_{pie}$$

$$g = 32\frac{pie}{seg^2}$$

Condiciones iniciales

$$x(0) = x_0 = -1\ pie$$
$$x'(0) = x_1 = -2\ pie/s$$

Ecuacion Diferencial
Movimiento armonico simple

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

ω_0^2

$$x'' + 16x = 0$$

$$r^2 + 16 = 0$$
$$r^2 = -16$$
$$r = \pm 4i$$

$$\boldsymbol{\omega_0^2 = 16}$$
$$\omega_o = \sqrt{\mathbf{16}}$$
$$\omega_o = \mathbf{4}$$

Ecuación del movimiento

$$x(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$$

¿Cuantos ciclos enteros habrá completado la masa al final de 4π segundos?

Condiciones iniciales

$$x(0) = x_0 = -1\ pie$$

$$\boxed{x'(0) = x_1 = -2\ pie/s}$$

$$x(0) = -1\ pie \quad (0, -1)$$

$$x(t) = c_1 \cos 4t + c_2\ \text{sen}\ 4t$$

$$\boxed{-1 = c_1}$$

$$x'(0) = -2\ pie/s \quad (0, -2)$$

$$x'(t) = -4c_1\ \text{sen}\ 4t + 4c_2 \cos 4t$$

$$-2 = 4c_2$$

$$\boxed{c_2 = -\frac{1}{2}}$$

Ecuación del movimiento

$$x(t) = -\cos 4t - \frac{1}{2}\text{sen}\ 4t$$

Ecuación del movimiento

$$x(t) = c_1 \cos \overset{\omega_0}{4}t + c_2\ \text{sen}\ 4t$$

Período

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\omega_0 = 4\ rad/s.$$

$$T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ segundos$$

$$T = \frac{\pi}{2}\ segundos$$

Cuantos ciclos enteros habrá completado la masa al final de 4π s

$$\frac{4\cancel{\pi}\ s}{\frac{\cancel{\pi}}{2}\ s} = 8 ciclos$$

8 ciclos enteros completa la masa al final de $4\pi s$

* Una masa de 2 slug se coloca en un resorte con una constante de 8lb/pie. Al inicio la masa se libera desde un punto que está 3 pies debajo de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 8 pie/seg.
  a) Encuentre la ecuación de movimiento.
  b) ¿Cuál es la amplitud y el período del movimiento?
  c) ¿En qué momento la masa pasa por la posición de equilibrio por primera vez?

$Datos:$

$m = 2\,slug$

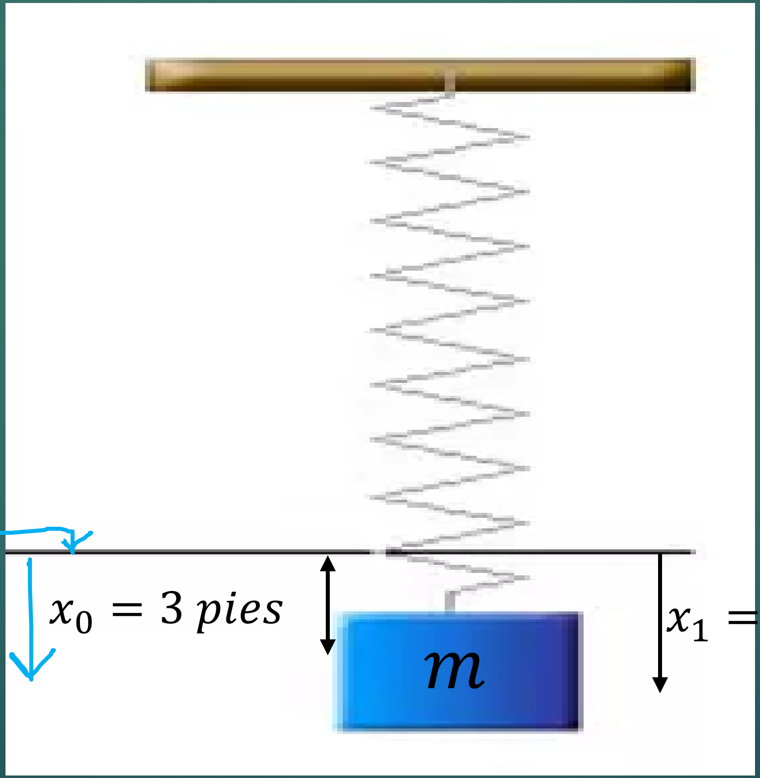
$k = 8\,\frac{lb}{pie}$

Ecuacion Diferencial movimiento libre no amortiguado

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$P.E.$

$+$



$+$

Condiciones Iniciales

$x(0) = 3pie$

$x'(0) = 8\,\frac{pie}{seg}$

velocidad

a) Encuentre la ecuación de movimiento

Datos:

$m = 2\ slug$

$k = 8\frac{lb}{pie}$

Condiciones Iniciales

$x(0) = 3pie$

$x'(0) = 8\frac{pie}{seg}$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 8x = 0 \quad \div 2$$

$\omega_0^2 = 4$

$\omega_0 = 2\ rad/s$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$$

ω_0^2

$$r^2 + 4 = 0$$

$$r = \pm 2i$$

Ecuación de movimiento

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t$$

Aplicando Condiciones Iniciales

Para $x(0) = 3$ $(0,3)$

$$\boxed{x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t}$$

$$3 = c_1 \cos 2(0) + c_2 \operatorname{sen} 2(0)$$

$$\boxed{c_1 = 3}$$

Para $x'(0) = 8$ $(0,8)$

$$x'(t) = -2c_1 \operatorname{sen} 2t + 2c_2 \cos 2t$$

$$8 = -2c_1 \operatorname{sen} 2(0) + 2c_2 \cos 2(0)$$

$$8 = 2c_2$$

$$\boxed{c_2 = 4}$$

$T = ?$

$A = ?$

Por lo tanto la Ecuación de movimiento es:

$$x(t) = 3\cos 2t + 4 \operatorname{sen} 2t$$

b) ¿Cuál es la amplitud y el período del movimiento?

Ecuación de movimiento

$$x(t) = 3\cos 2t + 4 \operatorname{sen} 2t$$

$\omega_0 = 2\ \mathrm{rad/s}$

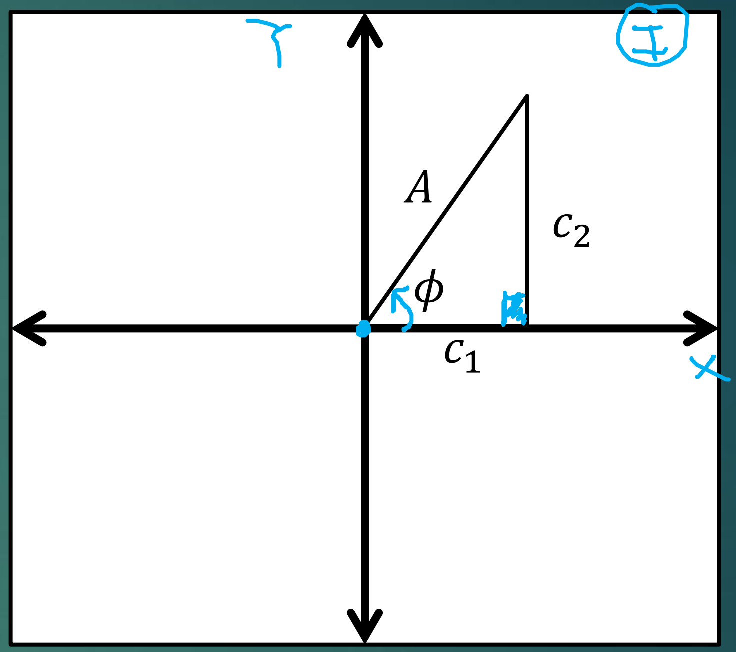
$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_0 t$

Datos:

$c_1 = 3$

$c_2 = 4$

$c_1, c_2 > 0$



Amplitud

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$$A = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$

$$A = 5\ pie$$

Período

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$T = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}$$

$$T = \pi\ s$$

$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$

Encontrando ϕ

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\phi = 0.927295218$$

$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi)$

c) ¿En qué momento la masa pasa por la posición de equilibrio por primera vez.

$Datos$:

$A = 5\, pie$

$\phi = 0.927295\, radianes$

$T = \pi\, segundos$

$\omega_o = 2\, rad/s$

Ecuación Alternativa

$x(t) = A\cos(\omega_o t - \phi)$

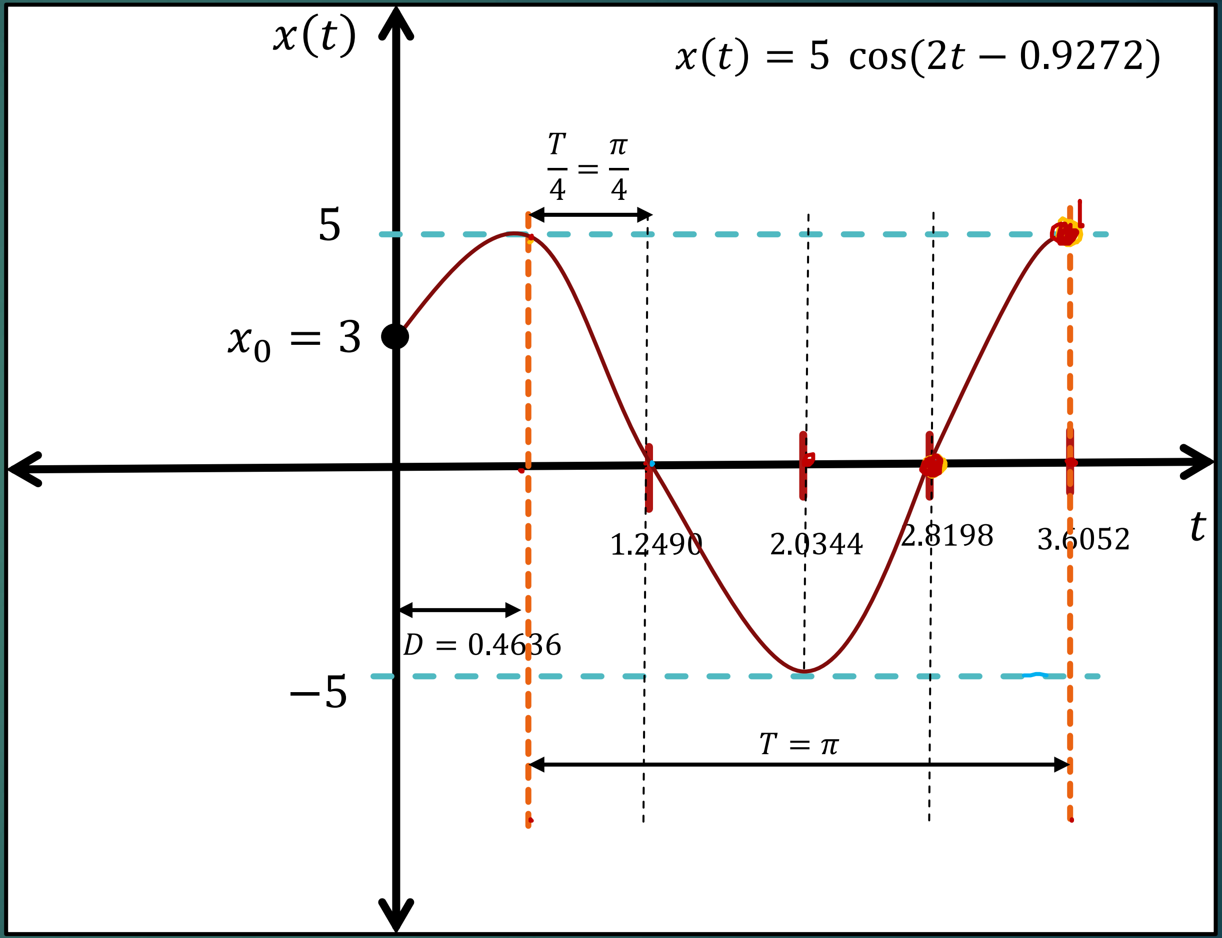
$x(t) = 5\ \cos(2t - 0.9272)$

$x(t) = 5\cos 2\left(t - \frac{0.9272}{2}\right)$

$A = 5$

$T = \pi$

$$D = \frac{\phi}{\omega_0} = \frac{0.927295}{2} = 0.4636475$$



$$Pasa\ por\ primera\ vez = D + \frac{\pi}{4} = 0.4636 + \frac{\pi}{4} = 1.2490\ seg$$

¿En qué momento la masa pasa por la posición de equilibrio por primera vez?

Ecuación de movimiento

$$x(t) = 3\cos 2t + 4\,\text{sen}\,2t$$

Ec. alternativa

$x(t) = A\,\text{sen}(w_0 t + \phi)$

graficar !!!

Tarea !!!!

$A =$ ✓

$w_0 =$ ✓

$T =$ ✓

$\phi = ?$