MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernandez

CLASE 29/01/2021

MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Ecuaciones Lineales

Ejemplo 3

Resuelva

$$\frac{x^2 y' + 3xy}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}\cos x}{x^2}$$

$Y' + P(x)Y = Q(x)$

Lineal en "Y"

$$x^2 y' + 3xy = \frac{1}{x}\cos x$$

$$\frac{\cancel{x^2} y'}{\cancel{x^2}} + \frac{3\cancel{x}y}{x^{\cancel{2}}} = \frac{\cos x}{x(x^2)}$$

$$y' + \underbrace{\frac{3y}{x}}_{P(x)} = \underbrace{\frac{\cos x}{x^3}}_{Q(x)}$$

$$y' + \frac{3y}{x} = \frac{\cos x}{x^3}$$ $Q(x)$

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Lineal en "y"

$$F.I. = V(x) = e^{\int P(x)dx}$$

$$P(x) = \frac{3}{x}$$

$$F.I. = e^{3\int\frac{dx}{x}} = e^{3\ln x} = \cancel{e}^{\ln x^3} = x^3$$

$$x^3 \cdot y = \int x^3 \frac{\cos x}{x^3} dx$$

$$(F.I.)y = \int (F.I.)Q(x)dx$$

$$x^3 y = \int \cancel{x^3}\left(\frac{\cos x}{\cancel{x^3}}\right) dx$$

$$x^3y = \int \cancel{x^3}\left(\frac{\cos x}{\cancel{x^3}}\right)dx$$

1

$$x^3y = \int \cos x \, dx$$

$$x^3y = \operatorname{sen}x + c$$

$$y = \frac{\operatorname{sen}x + c}{x^3}$$

$$y = x^{-3}(\operatorname{sen}x + c)$$

Solución explícita

Solución general

Resuelva

Lineal en "y"

$$y' + P(x)\,y = Q(x)$$

$$(1-4xy^2)\,y' = y^3$$

$$(1-4xy^2)\frac{dy}{dx} = y^3 \quad \Big|\ \div (1-4xy^2)$$

$$\frac{y^3}{1-4xy^2}$$

$$y' = \frac{y^3}{1-4xy^2}$$

no es lineal en y

Resolver

$$(1-4xy^2)\frac{dy}{dx}=y^3$$

$$(1-4xy^2)=y^3\frac{dx}{dy}$$

$$y^3\frac{dx}{dy}+4xy^2=1 \quad \Big|\div y^3$$

$$\frac{y^3}{y^3}\frac{dx}{dy}+\frac{4xy^2}{y^3}=\frac{1}{y^3}$$

$$\frac{dx}{dy}+\frac{4x}{y}=\frac{1}{y^3}$$

$$x'+\underbrace{\frac{4x}{y}}_{P(y)}=\underbrace{\frac{1}{y^3}}_{Q(y)}$$

Lineal en "x"

$x'+P(y)x=Q(y)$

$$x' + \frac{4x}{y} = \frac{1}{y^3}$$

P(Y) Q(Y)

$$\longrightarrow \quad x' + P(y)x = Q(y)$$

Lineal en "x"

$$F.I. = V(y) = e^{\int P(y)dy}$$

$$P(y) = \frac{4}{y}$$

$$F.I. = V(y) = e^{4\int \frac{dy}{y}} = e^{4lny} = e^{lny^4} = y^4$$

$$Y^4 X = \int Y^4 \left(\frac{1}{Y^3}\right) dY$$

$$(F.I.)x = \int (F.I.)Q(y)dy$$

$$y^4 x = \int y^4 \left(\frac{1}{y^3}\right) dy$$

$$y^4 x = \int y^4\left(\frac{1}{y^3}\right) dy$$

$$y^4 x = \int y \, dy$$

$$y^4 x = \frac{y^2}{2} + c$$

$$x = \frac{y^{-2}}{2} + cy^{-4}$$

Solución explícita

Solución general

ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES DISCONTINUOUS

Estas ecuaciones están compuestas por funciones por partes en algunos de los coeficientes de la ED

EJEMPLO

Resuelva el problema con valores iniciales de tal forma que la Solución sea continua

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}, \qquad sujeto\ a\ y(0) = 2$$

x, y

$(0, 2)$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}, \qquad sujeto\ a\ y(0) = 2$$

$PARA\ \ 0 \leq x < 1$

$f(x) = x$

$P(x)$ $Q(x)$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x \rightarrow lineal\ en\ y$$

$y' + P(x)y = Q(x)$

$P(x) = 2x$

$Q(x) = x$

Factor de integración

$V(x) = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$ = F.I.

$$e^{x^2} y = \int x e^{x^2} dx$$

$$e^{x^2}y = \int xe^{x^2}dx$$

$$u = x^2$$
$$du = 2xdx$$
$$\frac{du}{2} = xdx$$

$$e^{x^2}y = \int \frac{e^u}{2}du$$

$$e^{x^2}y = \frac{e^u}{2} + c$$

$$e^{x^2}y = \frac{e^{x^2}}{2} + c$$

$$y = \frac{1}{2} + ce^{-x^2}$$

Aplicando Condicion Inicial

$$y(0) = 2$$

(0, 2)
x, T

$$2 = \frac{1}{2} + ce^{-(0)^2}$$

1

$$c = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$C = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} + ce^{-x^2}$$

$$c = \frac{3}{2}$$

$[0, 1)$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2} \rightarrow 0 \leq x < 1$$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}, \qquad sujeto\ a\ y(0) = 2$$

$PARA\ \ x \geq 1$ $\quad [1, \infty)$

$f(x) = 0$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0 \rightarrow lineal\ en\ y$$

$\} \ y' + P(x)y = Q(x)$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0 \rightarrow lineal\ en\ y$$

Separación de variables

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int xdx$$

$$\ln|y| = -x^2 + c_1$$

e e

$$y = e^{-x^2+c_1}$$

$$y = ce^{-x^2}$$

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}, & 0 \leq x < 1 \\ (\frac{1}{2}e + \frac{3}{2})\, e^{-x^2}, & x \geq 1 \end{cases}$$

[0, 1)

[1, ∞)

Existe Continuidad en $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} y = \lim_{x\to 1^+} y$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(ce^{-x^2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-(1)^2}\right) = ce^{-(1)^2}$$

$$\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-1}}{e^{-1}}\right) = c$$

$$c = \frac{1}{2}e + \frac{3}{2}$$

c

$$y = (\frac{1}{2}e + \frac{3}{2})e^{-x^2} \rightarrow x \geq 1$$

[1, ∞)

ECUACIÓN DE BERNOULLI

ECUACIÓN DE BERNOULLI

Una importante ecuación no lineal, que puede ser reducida a la forma lineal con una sustitución apropiada es la **Ecuación de Bernoulli**

$Y' + P(x)Y = Q(x)Y^n \rightarrow$ Bernoulli en "Y"

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n} \qquad para\; n \neq 0 \; y \; n \neq 1$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones de "x" y/o constantes y el coeficiente que acompaña a y' es 1.

$$\boldsymbol{v = y^{1-n}}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d(y^{1-n})}{dx}$$

La sustitución genera un cambio de variable dependiente que reduce la ecuacion original a una ecuación lineal. Para cambiar el diferencial de la variable dependiente se deriva la sustitución establecida.