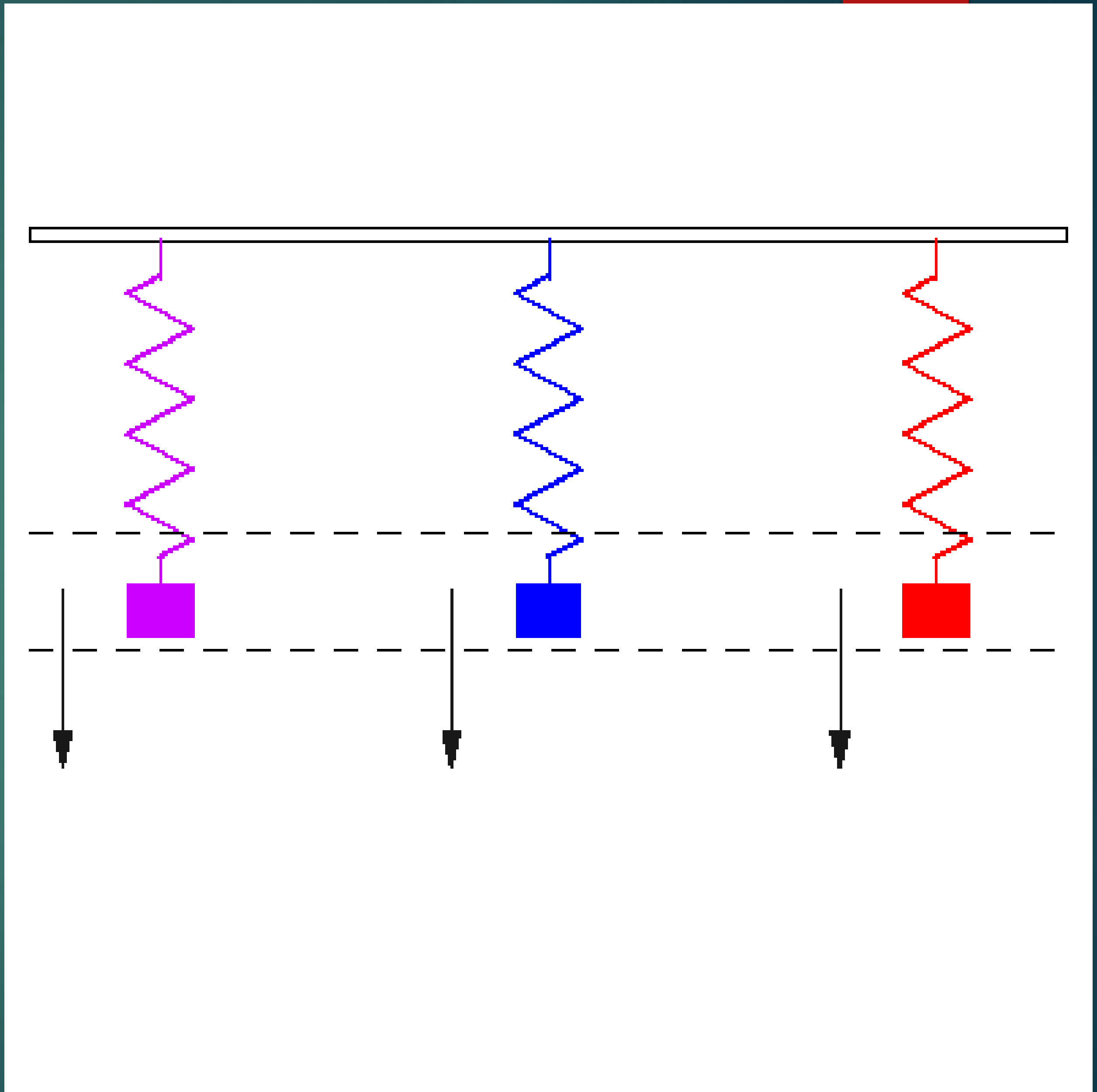
# MI3 Sección A
# Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

# CLASE 26/04/2021

# MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

# MOVIMIENTO LIBRE AMORTIGUADO



Una masa que pesa de 4 libras esta unida a un resorte cuya constante es de 2 lb/pie. El medio ofrece una fuerza de amortiguamiento que es numéricamente igual a la velocidad instantánea. La masa inicialmente se libera desde un punto localizado 1 pie por encima de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 8 pie/s

mov. libre Amortiguado

$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0$

Encuentre:

a) El desplazamiento del peso como función del tiempo
b) El tiempo al cual la masa cruza la posición de equilibrio
c) El momento en el cual la masa logra su desplazamiento extremo a partir de la posición de equilibrio. ?Cual es la posición de la masa en ese instante?
d) La grafica

*Datos*:

$w = 4lb$

$k = 2lb/pie$ ✓

$\beta = 1$ ✓

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)\frac{d^2x}{dt^2} + (1)\frac{dx}{dt} + (2)x = 0 \quad \Big| *8$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0}$$

*Encontrando la masa*

$$w = mg$$

$$g = 32\frac{pie}{seg^2}$$

$$m = \frac{w}{g}$$

$$m = \frac{4lb}{32pie/s^2}$$

$$m = \frac{1}{8}\ slug$$

*Condiciones Iniciales*

$$x(0) = -1\ pie$$

$$x'(0) = 8\ pie/s$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0$$

$$r^2 + 8r + 16 = 0$$
$$(r+4)^2 = 0$$
$$(r+4)(r+4) = 0$$
$$r = -4 \quad multiplicidad\ 2$$

*Raices Reales Repetidas*
*Movimiento Criticamente Amortiguado*

*Ecuacion de movimiento*

$$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2te^{-4t}$$

*Condiciones Iniciales*

$$x(0) = -1 \quad (0,-1)$$

$$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2te^{-4t}$$
$$-1 = c_1\cancel{e^{-4(0)}}^{\,1} + \cancel{c_2(0)e^{-4(0)}}^{\,0}$$

$$c_1 = -1$$

*Condiciones Iniciales*

$$x'(0) = 8 \quad (0,8)$$

$$x'(t) = -4c_1e^{-4t} - 4c_2te^{-4t} + c_2e^{-4t}$$

$$8 = -4c_1\cancel{e^{-4(0)}}^{\,1} - \cancel{4c_2(0)e^{-4(0)}}^{\,0} + c_2\cancel{e^{-4(0)}}^{\,1}$$
$$8 = -4c_1 + c_2$$
$$c_2 = 8 + 4c_1$$
$$c_2 = 8 + 4(-1)$$
$$c_2 = 8 - 4$$

$$c_2 = 4$$

*Por lo tanto la Ecuacion del movimiento criticamente amortiguado:*

$$x(t) = c_1e^{-4t} + te^{-4t}$$

$$\boxed{x(t) = -e^{-4t} + 4te^{-4t}}$$

a) El desplazamiento del peso como función del tiempo

$Ecuacion\ del\ movimiento$
$criticamente\ amortiguado$:
$x(t) = -e^{-4t} + 4te^{-4t}$

b) El tiempo al cual la masa cruza la posición de equilibrio ¿será que cruza la P.E.?

$Cruza\ la\ posicion\ de\ equilibrio\ cuando \quad x(t) = 0$

$$x(t) = -e^{-4t} + 4te^{-4t}$$
$$-e^{-4t} + 4te^{-4t} = 0$$
$$(4t - 1)e^{-4t} = 0$$
$$4t - 1 = 0$$
$$t = \frac{1}{4}s$$

c) El momento en el cual la masa logra su desplazamiento extremo a partir de la posición de equilibrio. ?Cual es la posición de la masa en ese instante?

$El\ desplazamiento\ extremo\ ocurre\ cuando \quad x'(t) = 0$

c) El momento en el cual la masa logra su desplazamiento extremo a partir de la posición de equilibrio. ?Cual es la posición de la masa en ese instante?

$El\ desplazamiento\ extremo\ ocurre\ cuando\ \ x'(t) = 0$

$x(t) = -e^{-4t} + 4te^{-4t}$

$x'(t) = 4e^{-4t} - 16te^{-4t} + 4e^{-4t}$

$4e^{-4t} - 16te^{-4t} + 4e^{-4t} = 0$

$8e^{-4t} - 16te^{-4t} = 0$

$e^{-4t}(8 - 16t) = 0$

$(8 - 16t) = 0$

$16t = 8$

$t = \frac{1}{2} s$

$x(t) = -e^{-4t} + 4te^{-4t}$

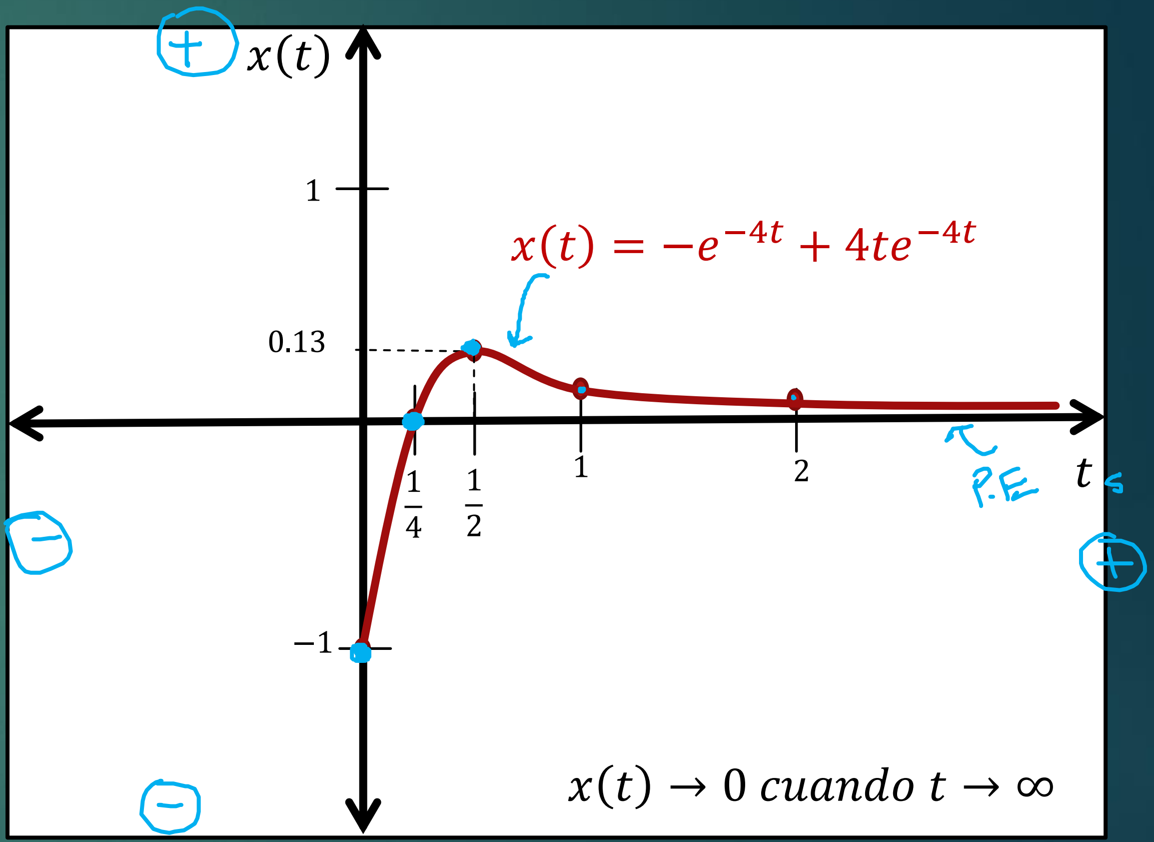
$x\left(\frac{1}{2}\right) = -e^{-4\left(\frac{1}{2}\right)} + 4\left(\frac{1}{2}\right)e^{-4\left(\frac{1}{2}\right)}$

$x = -e^{-2} + 2e^{-2}$

$x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

$x \approx 0.1353352832$ pd

d) La grafica




| $x(t)$ | $-1$ | $0$ | $0.13$ | $0.054$ | $0.0023$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 |

Una masa de 2 slug se coloca en un resorte con una constante de 40 lb/pie. El movimiento ocurre en un medio que presenta una fuerza de amortiguamiento igual a 16 veces la velocidad instantánea. El sistema se pone en movimiento a 5 pies debajo de la posición de equilibrio, con una velocidad dirigida hacia abajo de 4 pie/s

* mov. Libre Amortiguado

Encuentre:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + Kx = 0$$

a) La ecuación del movimiento e identifique tipo de movimiento se trata
b) La amplitud y el periodo
c) La grafica
d) En que momento pasa la masa por la posición de equilibrio por primera vez

*Datos*:

$m = 2\ slug$

$k = 40\ lb/pie$

$\beta = 16$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 16\frac{dx}{dt} + 40x = 0 \quad \Big|\div 2$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 20x = 0}$$

*Condiciones Iniciales*

$x(0) = 5\ pie$

$x'(0) = 4\ pie/s$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 20x = 0$$

$$r^2 + 8r + 20 = 0$$
$$(r^2 + 8r + 16) + 4 = 0$$
$$(r+4)^2 + 4 = 0$$
$$(r+4)^2 = -4$$
$$r = \underbrace{-4}_{a} \pm \underbrace{2}_{b}i$$

*Raices Complejas*

*Movimiento Sub Amortiguado*

*Ecuacion de movimiento*

$$x(t) = e^{-4t}(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t)$$

*Condiciones Iniciales*

$x(0) = 5$ (0, 5)

$$x(t) = e^{-4t}(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t)$$
$$5 = \underbrace{e^{-4(0)}}_{1}(c_1 \underbrace{\cos 2(0)}_{1} + c_2 \underbrace{\operatorname{sen} 2(0)}_{0})$$
$$\boxed{c_1 = 5}$$

*Condiciones Iniciales*

$x'(0) = 4$ (0, 4)

$$x'(t) = e^{-4t}(-2c_1 \operatorname{sen} 2t + 2c_2 \cos 2t) - 4e^{-4t}(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t)$$

$$4 = \underbrace{e^{-4(0)}}_{1}(-2c_1 \underbrace{\operatorname{sen} 2(0)}_{0} + 2c_2 \underbrace{\cos 2(0)}_{1}) - 4\underbrace{e^{-4(0)}}_{1}(c_1 \underbrace{\cos 2(0)}_{1} + c_2 \underbrace{\operatorname{sen} 2(0)}_{0})$$
$$4 = 2c_2 - 4c_1$$
$$c_2 = \frac{4 + 4c_1}{2}$$
$$c_2 = \frac{4 + 4(5)}{2}$$
$$\boxed{c_2 = 12}$$

*Por lo tanto la Ecuacion del movimiento sub amortiguado*:

$$x(t) = e^{-4t}(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t)$$

$$\boxed{x(t) = e^{-4t}(5 \cos 2t + 12 \operatorname{sen} 2t)}$$

Parte real

parte imaginaria

$r = -4 \pm 2i$

*Raices Complejas*
*Movimiento Sub Amortiguado*

a) *Ecuacion del movimiento sub amortiguado*:

$$x(t) = e^{-4t}(5\cos 2t + 12\,\mathrm{sen}\,2t)$$

$c_1 = 5$

$c_2 = 12$

b) Amplitud

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$$A = \sqrt{(5)^2 + (12)^2}$$

$$A = \sqrt{25 + 144}$$

$$A = \sqrt{169}$$

$$A = 13\ pie$$

Periodo

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

$$T = \frac{2\pi}{2}$$

$$T = \pi\ \mathrm{s}$$

$r = -4 \pm 2i$

a b

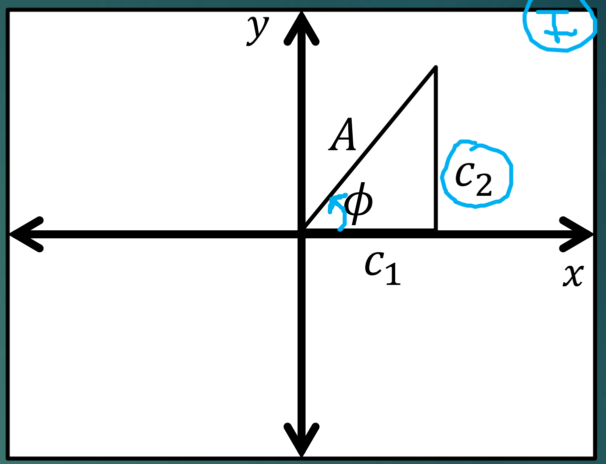
A=13pie
T=πs

*Raices Complejas*
*Movimiento Sub Amortiguado*

$c_1 = 5$

$c_2 = 12$

$c_1, c_2 > 0$




*Ecuacion del movimiento sub amortiguado*:

$$x(t) = e^{-4t}(5\cos 2t + 12\,\mathrm{sen}\,2t)$$

$A = 13\ pie$

$T = \pi\ \mathrm{s}$

Ecuación alternativa

$$\boxed{x(t) = Ae^{at}\cos(bt - \phi)}$$

$$\boxed{x(t) = 13e^{-4t}\cos(2t - 1.176)}$$

Angulo de fase

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$$

$$\phi = 1.176\ radianes$$

Ecuación alternativa

$A = 13\ pie$ $T = \pi\ s$



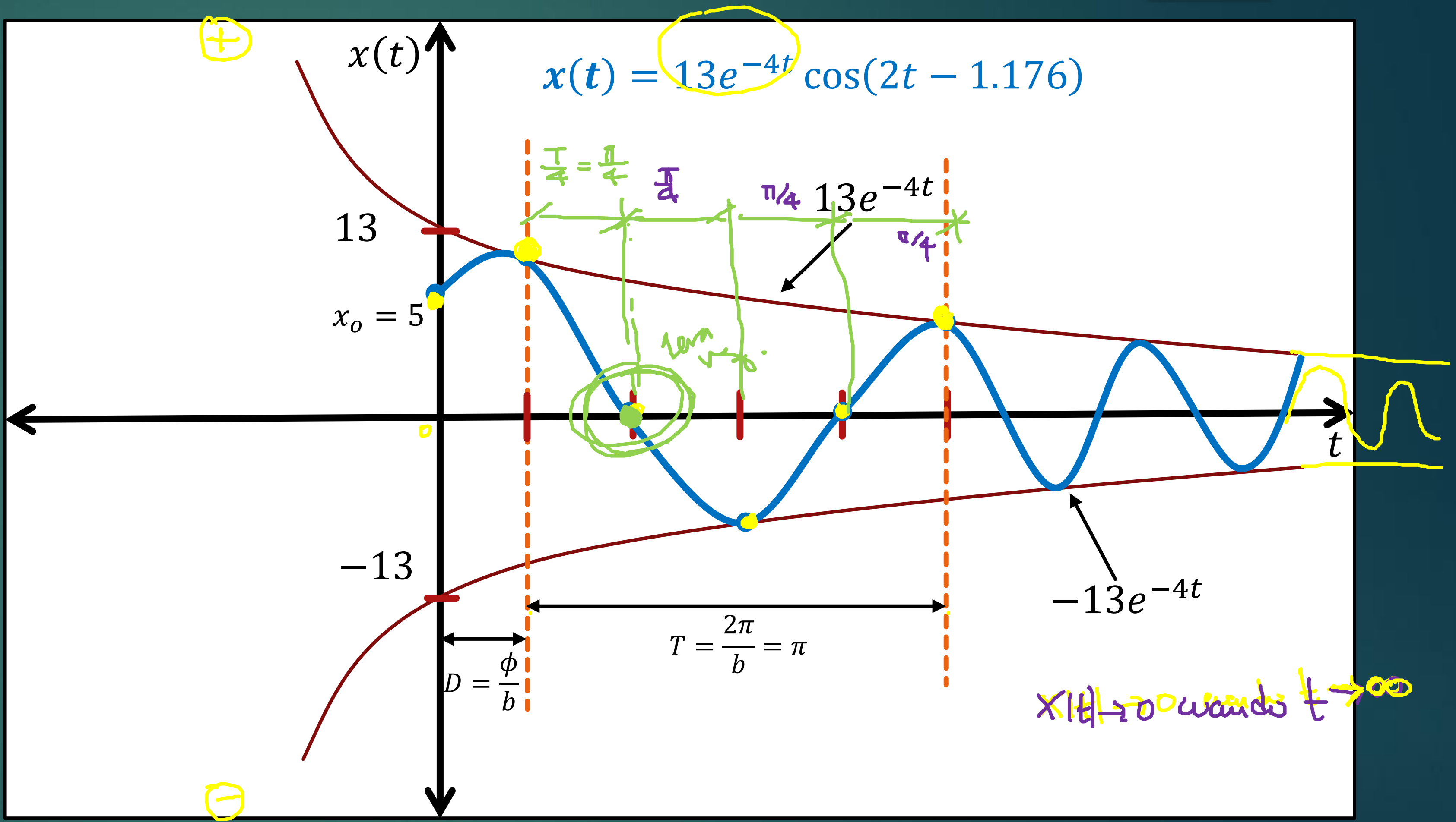
$x(t) = 13e^{-4t}\cos(2t - 1.176)$

$x(t) = 13e^{-4t}\cos 2\left(t - \frac{1.176}{2}\right)$

$D = \frac{\phi}{b}$

$D = \frac{1.176}{2}$

$D = 0.58\ s$




En que momento pasa la masa por la posición de equilibrio por primera vez?

$D + \frac{\pi}{4} = 0.58 + \frac{\pi}{4} = 1.36\ s$