MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 08/02/2021

MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

ECUACIONES REDUCIBLES A EXACTAS

Ejemplo 2

Resolver

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$$\underbrace{y}_{M}dx + \underbrace{(3 + 3x - y)}_{N}dy = 0$$

$M(x,y) = y$

$N(x,y) = 3 + 3x - y$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 3$

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

$y\,dx \cdot$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 3$

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ *, por lo tanto es NO ES EXACTA*

Se buscará un factor de integración (F.I.) que lleve la ED a ser Exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = M_y = 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = N_x = 3$$

Recordar que:

$$\frac{My - Nx}{N} = f(x) \quad \text{ó} \quad \frac{Nx - My}{M} = f(y)$$

$$\frac{My - Nx}{N} = f(x)$$

$$\frac{1 - 3}{3 + 3x - y} = f(x)$$

$$f(x) = \frac{-2}{3 + 3x - y}$$

$$\frac{Nx - My}{M} = f(y)$$

$$f(y) = \frac{3 - 1}{y}$$

$$f(y) = \frac{2}{y}$$

Se obtiene una funcion con respecto a una sola variable, en este caso una funcion con respecto a la variable y

$$f(y) = \frac{2}{y}$$

Por lo tanto

$$F.I. = e^{\int f(y)dy} = e^{2\int\frac{dy}{y}} = e^{2lny} = \cancel{e}^{lny^2} = y^2$$

$$F.I. = y^2$$

$$y^2(y)dx + y^2(3 + 3x - y)dy = 0$$

$$y^2(y)dx + y^2(3 + 3x - y)dy = 0$$

$$\underbrace{y^3}_{M}dx + \underbrace{(3y^2 + 3xy^2 - y^3)}_{N}dy = 0$$

$$M(x, y) = y^3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2$$

$$N(x, y) = \cancelto{0}{3y^2} + 3xy^2 - \cancelto{0}{y^3}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$ *, por lo tanto es EXACTA*

Se toma la expresion $M(x,y)$ dado a que la expresion es mas simple (mas sencilla)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\underbrace{y^3}_{M}dx + \underbrace{(3y^2 + 3xy^2 - y^3)}_{N}dy = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3$$

$$\partial f = y^3 \partial x$$

$$\int \partial f = \int (y^3)\partial x$$

$$\boxed{f = xy^3 + g(y)}$$

?

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 + g'(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 + g'(y) = N(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

$$\cancel{3xy^2} + g'(y) = 3y^2 + \cancel{3xy^2} - y^3$$

$$g'(y) = 3y^2 - y^3$$

$$g'(y) = 3y^2 - y^3$$

$$g(y) = y^3 - \frac{y^4}{4}$$

f(x,y) = C

$$\boldsymbol{f = xy^3 + g(y)}$$

$$f = xy^3 + y^3 - \frac{y^4}{4}$$

R//

$$\boldsymbol{xy^3 + y^3 - \frac{y^4}{4} = C}$$

Solución implícita

Prueba de conocimiento

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$xydy + (x^2 + y^2 + x)dx = 0$$

$f(x,y) = C$

$(x^2+y^2+x)dx + xydy = 0$

$x(x^2+y^2+x)dx + x(xy)dy = 0$

$$\underbrace{(x^3+xy^2+x^2)}_{M}dx + \underbrace{x^2y}_{N}dy = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$ $\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$ Exacta!!!

Respuesta

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy$

$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x^2y$

$$\frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} = c$$

ECUACIONES HOMOGÉNEAS

ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Si una función $f(x, y)$ tiene la propiedad $f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y)$ para un numero real α, se dice que es una función homogénea de grado α.

Una E.D. de primer orden

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Se dice que es **homogenea** si las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son ambas funciones homogéneas de grado α

Si $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es una ED homogénea de grado α, entonces se puede realizar una sustitución

$$y = vx$$
$$dy = vdx + xdv$$

Se usa esta sustitucion si $\mathrm{N}(x,y)$ *es mas simple*

$$x = vy$$
$$dx = vdy + ydv$$

Se usa esta sustitucion si $\mathrm{M}(x,y)$ *es mas simple*

La sustitución anterior transforma la ED dada en una ED separable en las variables v y x ó v y y

PASOS A SEGUIR

$1.\ Llevar\ la\ ED\ \ a\ la\ forma$

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$2.\ \ Identificar\ M(x,y)\ y\ N(x,y)$

$3.\ Verificar\ si\ M(x,y)\ y\ N(x,y)\ son\ funciones\ homogéneas\ del\ mismo\ grado$

$$M(tx,ty) = t^{\alpha}M(x,y)$$

$$N(tx,ty) = t^{\alpha}N(x,y)$$

4. $Si\ son\ homogéneas\ del\ mismo\ grado\ \alpha,$

$entonces\ la\ ecuacion\ es\ homogenea\ y\ se\ utiliza\ la\ sustitución$

$Si\ N(x,y)\ es\ más\ simple$	$Si\ M(x,y)\ es\ más\ simple$
$y = vx$ $dy = vdx + xdv$	$x = vy$ $dx = vdy + ydv$

5. $Sustituir\ en\ la\ ED\ \ y\ simplificar$

6. $Separar\ variables\ y\ resolver\ para\ v$

7. $Regresar\ a\ variables\ originales$

EJEMPLO

Para verificar si una funcion es homogenea

Recordar que:

$f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y)$

$f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y)$

1. $f(x, y) = x^3 + y^3$

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + (ty)^3 = \underbrace{t^3 x^3 + t^3 y^3}_{} = t^{\overset{\alpha}{3}}(x^3 + y^3)$$

$t^{\alpha} f(x, y)$

Por lo tanto se verifica que la funcion es homogenea de grado 3

2. $f(x,y) = x^3 + x^2y$

$f(tx,ty) = (tx)^3 + (tx)^2(ty) = t^3x^3 + (t^2x^2)(ty)$

$f(tx,ty) = t^3x^3 + t^3x^2y = t^3(x^3 + x^2y)$

$t^\alpha f(x,y)$

Por lo tanto se verifica que la funcion es homogenea de grado 3

④ $f(x,y) = x + y - 1$

$\downarrow$

no es homogenea

3. $f(x,y) = \sqrt{x-y}$

$f(tx,ty) = \sqrt{tx-ty} = \sqrt{t(x-y)} = \sqrt{t}\sqrt{x-y} = t^{\frac{1}{2}}\sqrt{x-y}$

α

$t^\alpha f(x,y)$

Por lo tanto se verifica que la funcion es homogenea de grado 1/2