MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 01/03/2021

MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Mezclas

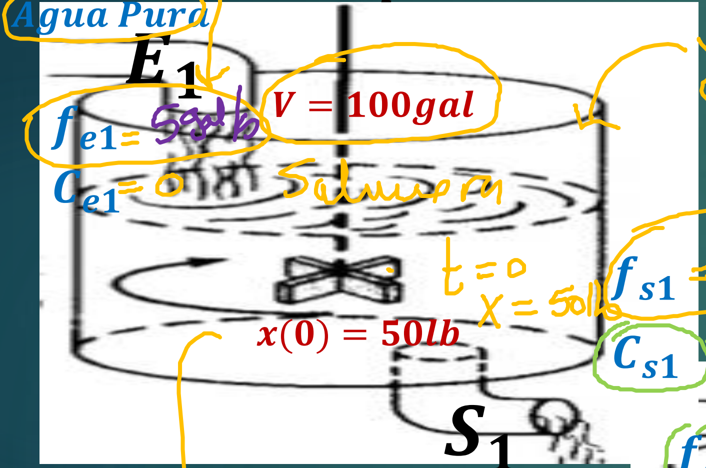
Ejemplo

Considere la cascada de los dos tanques con V1=100 galones y V2 =200 galones, cada uno contiene salmuera. Cada tanque contiene inicialmente 50 lb de sal. Las tres tasas de los flujos son de 5 gal/s cada uno, con agua pura fluyendo al tanque 1.

a) determine la cantidad de sal en cada tanque en cualquier instante t.

b) determine la cantidad máxima de sal que llega a tener el tanque 2

Tanque 1



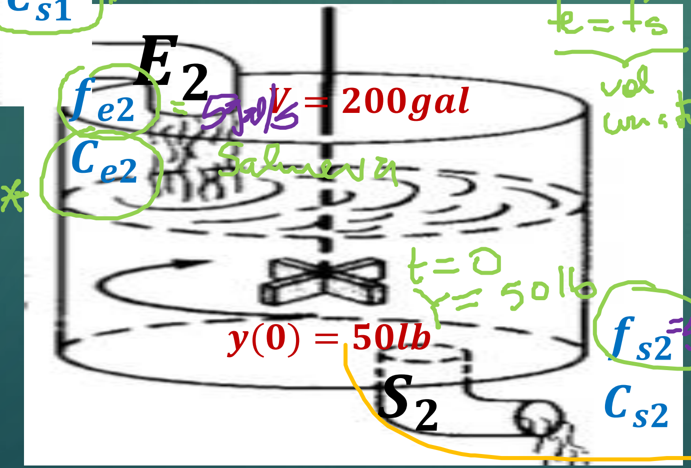
x(t) = ?

$x = cantidad\ de\ sal\ en\ el\ tanque\ 1\ (lb)$

$t = tiempo\ (s)$

$$\frac{dx}{dt} = tasa\ o\ razon\ de\ cambio\ de\ la\ cantidad\ de\ \ sal\ en\ el\ tanque 1$$

Tanque 2.



$f_e = f_s$

vol constante

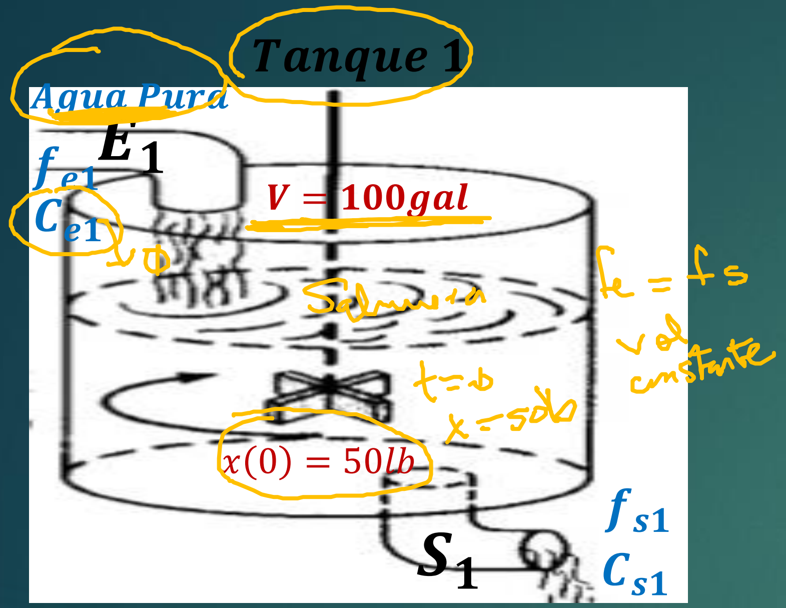
$y = cantidad\ de\ sal\ en\ el\ tanque\ 2\ (lb)$

$t = tiempo\ (s)$

$$\frac{dy}{dt} = tasa\ o\ razon\ de\ cambio\ de\ sal\ en\ el\ tanque\ 2$$

Y(t) = ?

Ymax = ? lb



Tanque 1

$x = cantidad\ de\ sal\ en\ el\ tanque\ 1\ (lb)$

$t = tiempo\ (s)$

$$\frac{dx}{dt} = E_1 - S_1$$

$$\frac{dx}{dt} = \cancel{C_{e1}} f_{e1} - C_{s1} f_{s1}$$

0 ✓ ? ✓

$$\frac{dx}{dt} = \cancel{(0)(5)} - \frac{x\ lb}{100\ \cancel{gal}}\left(5\,\frac{\cancel{gal}}{s}\right)$$

$$* \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{20}$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{1}{20}dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -\frac{dt}{20}$$

$$\ln|x| = -\frac{t}{20} + c_1$$

e e

$$e^{\ln|x|} = e^{-\frac{t}{20} + c_1}$$

$$\boxed{x(t) = Ce^{-\frac{t}{20}}}$$

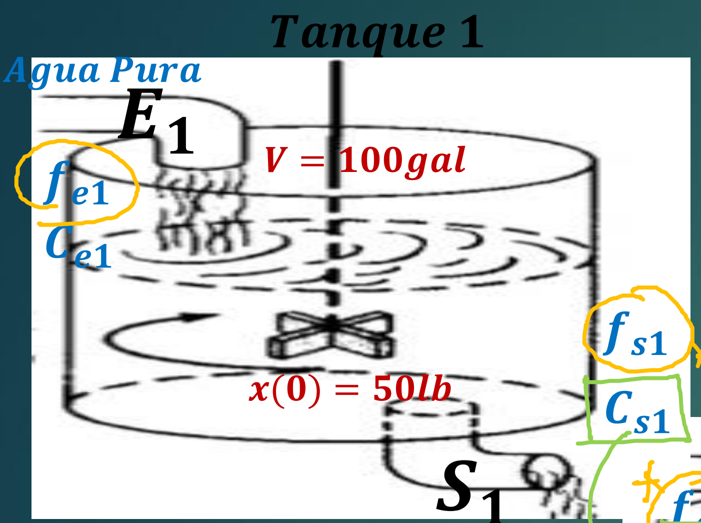
$Encontrando\ C_s$

$f_e = f_s$

$volumen\ constante$

$$C_s = \frac{Cantidad\ de\ soluto\ en\ el\ tanque}{Volumen\ total}$$

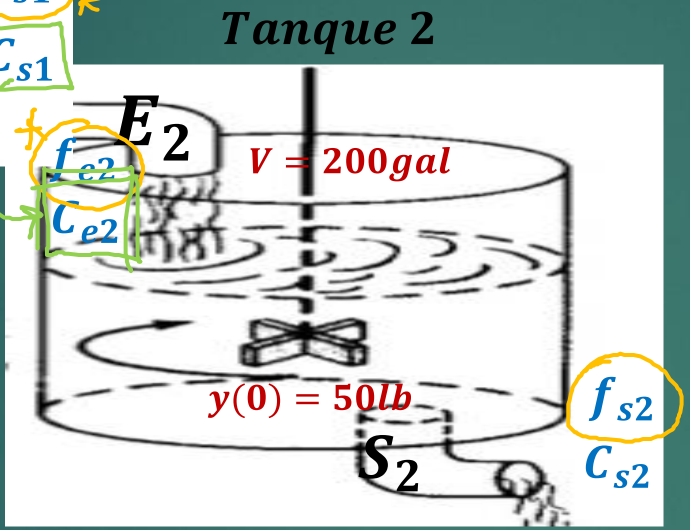
$$\boxed{C_s = \frac{x\ lb}{100\ gal}}$$



a)

$x(t) = ?$

$y(t) = ?$



$$f_{e1} = f_{s1} = f_{e2} = f_{s2}$$

$$C_{s1} = C_{e2}$$

$$\boxed{C_{e2} = \frac{x\,lb}{100\,gal}}$$

$$C_{e2} = \frac{50e^{-\frac{t}{20}}}{100}$$

Tanque 1

$$x = Ce^{-\frac{t}{20}}$$

Condicion Inicial

Para $x(0) = 50lb$

(t, x)

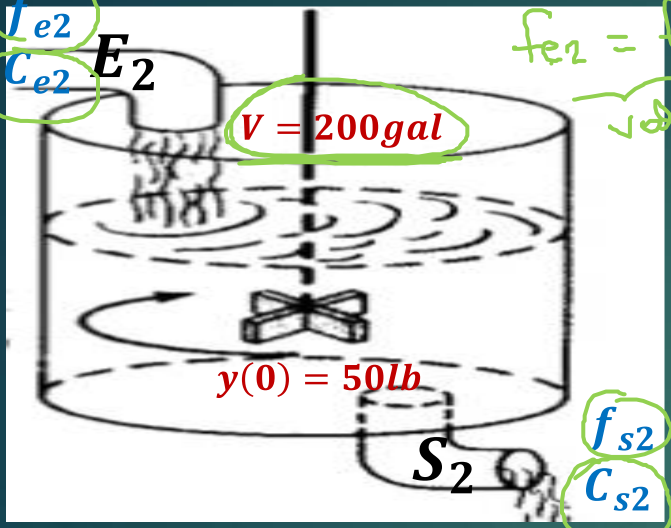
$(0, 50)$

$$50 = Ce^{0}$$

$$C = 50$$

$$x(t) = 50e^{-\frac{t}{20}}$$

Tanque 2



$f_{e2} = f_{s2}$

vol constante

$$C_{e2} = \frac{x\ lb}{100\ gal}$$

Para encontrar C_s

$f_e = f_s$

volumen constante

$$C_s = \frac{Cantidad\ de\ soluto\ en\ el\ tanque}{Volumen\ total}$$

$$\boxed{C_s = \frac{y\ lb}{200\ gal}}$$

Tanque 2

y = cantidad de sal en el tanque 2 (lb)

t = tiempo (s)

$$\frac{dy}{dt} = E_2 - S_2$$

$$\frac{dy}{dt} = C_{e2} f_{e2} - C_{s2} f_{s2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{x\ lb}{100\ \cancel{gal}}\right)\left(5\frac{\cancel{gal}}{s}\right) - \left(\frac{y\ lb}{200\ \cancel{gal}}\right)\left(5\frac{\cancel{gal}}{s}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{20} - \frac{y}{40}$$

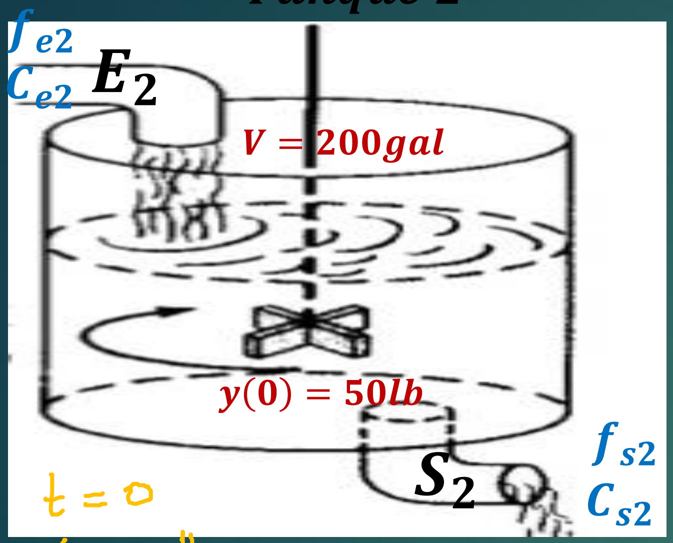
$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{40} = \frac{x}{20}$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{40} = \frac{\mathbf{50}\boldsymbol{e}^{-\frac{t}{20}}}{20}$$

cantidad de sal en tanque 1

$$\boldsymbol{x(t) = 50e^{-\frac{t}{20}}}$$

Tanque 2



Y = 50lb

Tanque 2

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{40} = \frac{5\cancel{0}e^{-\frac{t}{20}}}{2\cancel{0}}$$

Y' + P(t) Y = Q(t)

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{40} = \frac{5}{2}e^{-\frac{t}{20}}$$

lineal en y } Y(t) = ?

$$P(t) = \frac{1}{40}$$

$$Q(t) = \frac{5}{2}e^{-\frac{t}{20}}$$

$$F.I. = e^{\int \frac{1}{40}dt} = e^{\frac{1}{40}t}$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{40} = \frac{5}{2}e^{-\frac{t}{20}}$$

F.I   F.I Q(t) dt

$$\left(e^{\frac{1}{40}t}\right)y = \int \left(e^{\frac{1}{40}t}\right)\frac{5}{2}e^{-\frac{t}{20}}\,dt$$

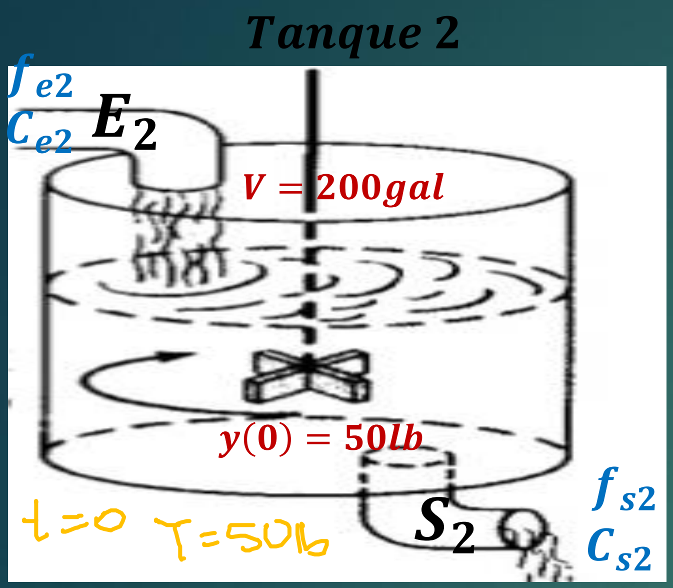
$$\left(e^{\frac{1}{40}t}\right)y = \frac{5}{2}\int \left(e^{-\frac{t}{40}}\right)dt$$

$$\left(e^{\frac{1}{40}t}\right)y = \frac{5}{2}\int \left(e^{-\frac{t}{40}}\right)dt$$

$$\left(e^{\frac{1}{40}t}\right)y = \frac{5}{2}(-40)e^{-\frac{t}{40}} + C$$

$$\left(e^{\frac{1}{40}t}\right)y = -100e^{-\frac{t}{40}} + C$$

$$\boxed{y = -100e^{-\frac{t}{20}} + Ce^{-\frac{t}{40}}}$$



$$y = -100e^{-\frac{t}{20}} + Ce^{-\frac{t}{40}}$$

Condicion Inicial

t, Y

Para $y(0) = 50lb$ (0, 50)

$$50 = -100\cancel{e^0}^{1} + C\cancel{e^0}^{1}$$

$$C = 150$$

$$y(t) = -100e^{-\frac{t}{20}} + 150e^{-\frac{t}{40}}$$ cantidad de sal en tanque 2

Determine la cantidad máxima de sal que llega a tener el tanque 2

Ymax = ?

Y'(t) = 0

$$y'(t) = 0$$

$$y'(t) = -10\cancel{0}\left(-\frac{1}{2\cancel{0}}\right)e^{-\frac{t}{20}} + 15\cancel{0}\left(-\frac{1}{4\cancel{0}}\right)e^{-\frac{t}{40}} = 0$$

$$* \quad 5e^{-\frac{t}{20}} - \frac{15}{4}e^{-\frac{t}{40}} = 0$$

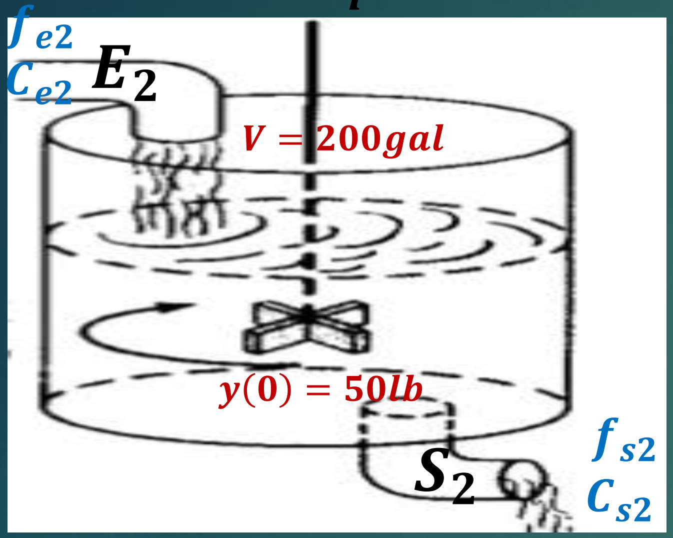
$$\frac{e^{-\frac{t}{20}}}{e^{-\frac{t}{40}}} = \frac{15}{4}\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$e^{-\frac{t}{40}} = \frac{15}{20}$$

$$e^{-\frac{t}{40}} = \frac{3}{4}$$

Determine la cantidad máxima de sal que llega a tener el tanque 2

Tanque 2



$Y_{max} = ?$

$$\boxed{y(t) = -100e^{-\frac{t}{20}} + 150e^{-\frac{t}{40}}}$$

$$\ln e^{-\frac{t}{40}} = \ln \frac{3}{4}$$

$$\ln e^{-\frac{t}{40}} = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$-\frac{t}{40} = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$t = \ln\left(\frac{3}{4}\right)(-40)$$

$$\boldsymbol{t = 11.50s}$$

$$y(11.50) = -100e^{-\frac{11.50}{20}} + 150e^{-\frac{11.50}{40}}$$

$$\boldsymbol{y(11.50) = 56.25\ lb}$$

La cantidad máxima de sal que llega a tener el tanque 2 es de 56.25 libras

PRUEBA DE CONOCIMIENTO

Un gran tanque inicialmente tiene 500 galones de agua pura. Le entra salmuera que tiene 2 libras de sal por galon a razón de 5 galones/minuto. La solución bien mezclada sale del tanque con una razón de 10 galones/minuto.

Determine

a) La cantidad de libras de sal que hay en el tanque para cualquier tiempo t
b) ?En cuanto tiempo se vacía el tanque ?