MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 09/03/2021

MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

TRAYECTORIAS ORTOGONALES

PRUEBA DE CONOCIMIENTO

Encuentre las trayectorias ortogonales a la familia de parábolas con vertice en el origen y foco sobre el eje x

Encuentre las trayectorias ortogonales a la familia de parábolas con vertice en el origen y foco sobre el eje x

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

Derivando implicitamente con respecto a la variable x

$$2yy' = 4p$$

Si sabemos que $y^2 = 4px$ *entonces se puede despejar p*

$$p = \frac{y^2}{4x}$$

$$2yy' = \cancel{4}\left(\frac{y^2}{\cancel{4}x}\right)$$

$$2yy' = \frac{y^2}{x}$$

$$y' = \frac{y^{\cancel{2}}}{2\cancel{y}x}$$

$$\boxed{y' = \frac{y}{2x}} \rightarrow \textit{ED asociada a la familia de parabolas con vertice en el origen y foco sobre eje } x.$$

$$f(x,y) = \frac{y}{2x}$$

$Encontrando\ la\ ED\ de\ la\ familia\ 2\ que\ es\ ortogonal\ a\ la\ familia\ 1$

$$y' = -\frac{1}{f(x,y)}$$

$$y' = -\frac{1}{\left(\frac{y}{2x}\right)}$$

$$\boxed{y' = -\frac{2x}{y}} \rightarrow ED\ asociada\ a\ las\ trayectorias\ ortogonales\ (familia\ 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

$$ydy = -2xdx$$

$$\int ydy = -2\int xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\cancel{2}\left(\frac{x^2}{\cancel{2}}\right) + C$$

$$\frac{y^2}{2} = -\cancel{2}\left(\frac{x^2}{\cancel{2}}\right) + C$$

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C$$

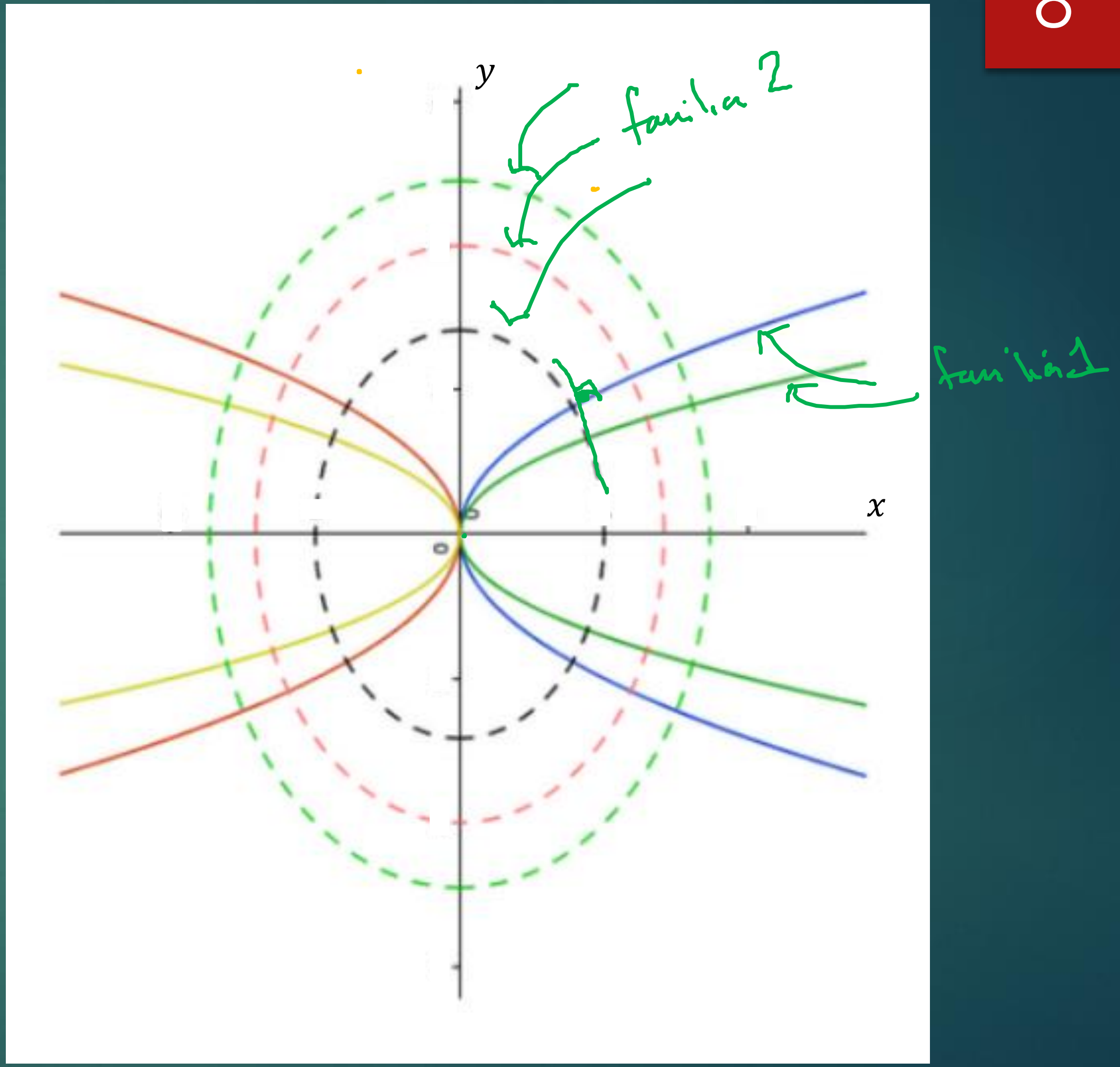
$$y^2 = -2x^2 + C$$

$$\boxed{\mathbf{2x^2 + y^2 = C}}$$

$$\downarrow$$

Trayectoria ortogonal

Familia 2 ortogonal a la familia 1
Familia de elipses



ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Ecuación Diferencial Lineal de orden n

$$\boxed{a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Ecuación Diferencial Lineal de orden n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0,\text{ es }\textbf{homógenea}.$$

$mientras\ que\ una\ ecuacion\ del\ tipo$

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x),\text{ es }\textbf{no homógenea}.$$

$con\ g(x)\neq 0$

Ejemplos

1. $4y'' + 6y' - 10y = 0$ — $EDO, orden\ 2, lineal,$ homógenea
2. $y''' + 9y'' = 12e^{x}$ — $EDO, orden\ 3, lineal, no\ homógenea$
3. $2y^{(5)} - y^{(4)} + 2y''' = 3 + 7cos2x$ — $EDO, orden\ 5, lineal, no$ homógena

La palabra Homogenea en este contexto no se refiere a los coeficientes que son "funciones homogéneas" como se consideró en el estudio de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden.

Mas adelante veremos que para resolver una ED lineal de Orden Superior No Homogenea, primero se debe resolver la ecuación homogénea relacionada.

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \quad \Big\} \text{Homogenea.}$$

ECUACIONES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

ECUACIONES HOMOGENEAS

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$$

Principio de superposición

$$\boxed{y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n}$$

Toda solución de una ED Lineal de orden n es una combinación lineal

Sean $y_1, y_2, \ldots\ y_n,\ \ n$ soluciones de la ecuación lineal sobre el intervalo I.
Sí $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes, entonces la combinación lineal
$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ también es una solución sobre I.

El Principio de superposición solo se cumple para soluciones linealmente independientes (ninguna es múltiplo constante de otra)

Se debe verificar si las funciones son linealmente independientes, con el método WRONSKIANO (W)

Independencia lineal de dos funciones

Dos funciones definidas en un intervalo I se dice que son linealmente independientes en I, si se cumple que ninguna es múltiplo constante de la otra.

WRONSKIANO

Método para determinar la linealidad de las funciones solucion $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Si la ED es de orden 2, se tienen dos soluciones y_1 , y_2

$$\boxed{W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

Si la E.D es de orden 3, se tienen tres soluciones $y_1, \ y_2, \ y_3$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & {y_3}' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

Si el determinante $W = 0$ las funciones tiene dependencia lineal, por lo tanto no son linealmente independientes

$W \neq 0$ para que exista independencia lineal

Ejemplo

Determine la linealidad de las siguientes funciones

$$y_1 = \cos(x) \qquad y_2 = sen(x)$$

El determinante es de 2x2 porque se tienen dos funciones solucion y_1 y y_2 (el determinante es siempre cuadrado)

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos(x) * \cos(x) - sen(x) * (-sen(x))$$

$$w = \cos^2(x) + sen^2(x)$$

$w = 1$ Existe independencia lineal

Como $w \neq 0$, $las\ funciones\ y_1,\ y_2$ son linealmente independientes.

Ejemplo

Determine la linealidad de las siguientes funciones

$$y_1 = x \qquad\qquad y_2 = 2x$$

El determinante es de 2x2 porqué se tienen dos funciones solución

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = x * 2 - 2x * (1) = 2x - 2x$$

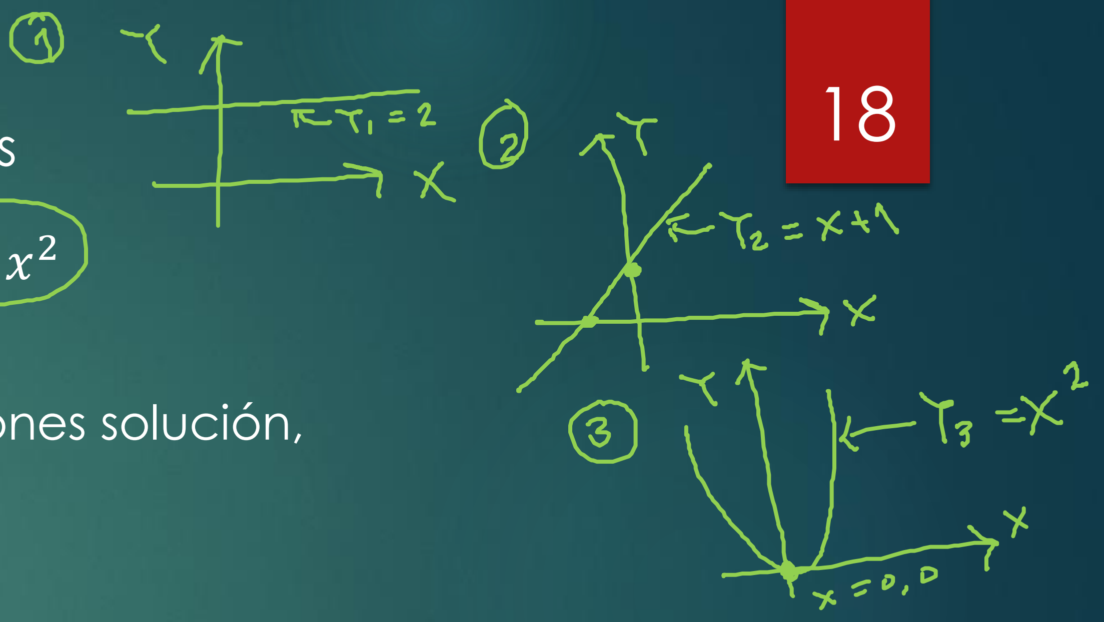
$$w = 2x - 2x$$

$w = 0$ Existe dependencia lineal

Como $w = 0, las\ funciones\ \ y_1, y_2$ no son linealmente independientes

Ejemplo

Determine la linealidad de las siguientes funciones



$$y_1 = 2 \qquad y_2 = x + 1 \qquad y_3 = x^2$$

$m = 1$ $\quad b = 1$ $(0, 1)$

El determinante es de 3x3 porqué se tienen tres funciones solución,

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x+1 & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$w = 2\big((1 * 2) - (2x * 0)\big) - (x+1)\big((0 * 2) - (2x * 0)\big) + x^2((0 * 0) - (1 * 0))$$

$$w = 2(2 - 0) - (x+1)(0 - 0) + x^2(0 - 0)$$

$$w = 2(2)$$

$w = 4$ Existe independencia lineal

Como $w \neq 0$, $\;las\ funciones\ y_1, y_2, y_3$ son linealmente independientes

Ejemplo

Dada la siguiente E.D Lineal homogénea de segundo orden $y'' - 9y = 0$ con $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-3x}$. Encuentre una solución particular que satisfaga las condiciones dadas $y(0) = -1$, $y'(0) = 15$.

$* \quad \boxed{y'' - 9y = 0}$

$\boxed{y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2}$

Se verifica que las funciones son soluciones de la ED

$Para\ y_1$

$y_1 = e^{3x}$ ✓
$y_1' = 3e^{3x}$
$y_1'' = 9e^{3x}$

$Sustituyendo$
$y'' - 9y = 0$
$9e^{3x} - 9e^{3x} = 0$
$0 = 0$ ✓

$y_1\ es\ una\ función\ solución\ de\ la\ ED$

$Para\ y_2$

$y_2 = e^{-3x}$ ✓
$y_2' = -3e^{-3x}$
$y_2'' = 9e^{-3x}$

$Sustituyendo$
$y'' - 9y = 0$
$9e^{-3x} - 9e^{-3x} = 0$
$0 = 0$ ✓

$y_2\ es\ una\ función\ solución\ de\ la\ ED$

verificar si las funciones son linealmente independientes

$Y_1 = e^{3x}$

$Y_2 = e^{-3x}$

$$w = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cc} Y_1 & Y_2 \\ \end{array}$$

$$w = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix}$$

$$w = e^{3x} * (-3e^{-3x}) - e^{-3x} * (3e^{3x})$$

$$w \ = -3 - 3$$

$$w = -6$$

$w \neq 0,\ \ y_1, y_2$,son linealmente independientes

Por el principio de superposición (el cual solo se cumple para soluciones que son linealmente indenpendientes), la solución general es:

$$\boxed{y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2}$$

$$y(x) \ = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$