MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 09/02/2021

MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

ECUACIONES HOMOGÉNEAS

ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Si una función $f(x,y)$ tiene la propiedad $f(tx,ty) = t^{\alpha} f(x,y)$ para un numero real α, se dice que es una función homogénea de grado α.

Una E.D. de primer orden

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Se dice que es **homogenea** si las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son ambas funciones homogéneas de grado α

Si $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es una ED homogénea de grado α, entonces se puede realizar una sustitución

$$y = vx$$
$$dy = vdx + xdv$$

Se usa esta sustitucion si $\mathrm{N}(x,y) es\ mas\ simple$

$$x = vy$$
$$dx = vdy + ydv$$

Se usa esta sustitucion si $\mathrm{M}(x,y) es\ mas\ simple$

La sustitución anterior transforma la ED dada en una ED separable en las variables v y x ó v y y

PASOS A SEGUIR

$1.\ Llevar\ la\ ED\ \ a\ la\ forma$

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

M ✓ N ✓

$2.\ \ Identificar\ M(x,y)\ y\ N(x,y)$

$3.\ Verificar\ si\ M(x,y) y\ N(x,y) son\ funciones\ homogéneas\ del\ mismo\ grado$

$$M(tx,ty) = t^{\alpha}M(x,y)$$

$$N(tx,ty) = t^{\alpha}N(x,y)$$

4. *Si son homogéneas del mismo grado* α,

entonces la ecuacion es homogenea y se utiliza la sustitución

Si $N(x, y)$ *es más simple*

$$y = vx$$
$$dy = vdx + xdv$$

Si $M(x, y)$ *es más simple*

$$x = vy$$
$$dx = vdy + ydv$$

5. *Sustituir en la ED y simplificar*

6. *Separar variables y resolver para* v

7. *Regresar a variables originales*

Ejemplo

Resolver

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$$\boldsymbol{xy' = xe^{-\frac{y}{x}} + y \quad sujeto\ a\ \ y(1) = 0}$$

$$x\frac{dy}{dx} = xe^{-\frac{y}{x}} + y$$

$$xdy = \left(xe^{-\frac{y}{x}} + y\right)dx$$

$$\underbrace{\left(xe^{-\frac{y}{x}} + y\right)}_{M}dx \underbrace{- x}_{N}dy = 0$$

$$M(x,y) = xe^{-\frac{y}{x}} + y$$

$$M(tx,ty) = txe^{-\frac{ty}{tx}} + ty$$

$\alpha = 1$

$$M(tx,ty) = t^{\alpha}\left(xe^{-\frac{y}{x}} + y\right) \quad \textit{Funcion homogenea grado 1}$$

$$N(x,y) = -x$$

$\alpha = 1$

$$N(tx,ty) = -tx$$

$$N(tx,ty) = t^{\alpha}(-x) \quad \textit{Funcion homogenea grado 1}$$

Por lo tanto la Ecuacion Diferencial es homogenea grado 1.

$Como\ N(x,y) es\ mas\ simple$

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

$\longrightarrow y = vx$

$\longrightarrow dy = vdx + xdv$

$$\left(xe^{-\frac{y}{x}} + y\right) dx - xdy = 0$$

$$\left(xe^{-\frac{vx}{\cancel{x}}} + vx\right)dx - x(\underbrace{vdx + xdv}) = 0$$

$$(\underbrace{xe^{-v} + vx})dx - x(vdx + xdv) = 0$$

$$\underbrace{x(e^{-v} + v)dx} - \underbrace{x(vdx + xdv)} = 0 \quad \Big|\div x$$

$$(e^{-v} + v)dx - (vdx + xdv) = 0$$

$$(\underbrace{e^{-v} + v})dx - \underbrace{vdx} - xdv = 0$$

$$\longrightarrow (e^{-v} \cancel{+ v} \cancel{- v})dx - xdv = 0$$

$$e^{-v}dx = xdv$$

$$e^{-v}dx = xdv$$

$$\frac{dv}{e^{-v}} = \frac{dx}{x}$$

$$\int e^{v}dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$e^{v} = \ln|x| + c$$

Recordar la sustitucion

$$y = vx$$

$$v = \frac{y}{x}$$

$$\boxed{e^{\frac{y}{x}} = \ln|x| + c}$$

Sol general

Condicion inicial

$$y(1) = 0$$

(1, 0)

x, y

$$e^{\frac{0}{1}} = \ln|1| + c$$

$$e^{0} = c$$

$$c = 1$$

$$e^{\frac{y}{x}} = \ln|x| + 1$$

Solucion implícita

Solución particular

Ejemplo

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

Resolver

$$-y\,dx + (x + \sqrt{xy})\,dy = 0$$

$M(x,y)$ $N(x,y)$

$$M(x,y) = -y$$

$$N(x,y) = x + \sqrt{xy}$$

$$M(tx,ty) = -ty$$

$$M(tx,ty) \overset{\alpha}{=} t^{1}(-y)$$

Funcion homogenea grado 1

$$N(tx,ty) = tx + \sqrt{(tx)(ty)} = tx + \sqrt{t^2(xy)}$$

$$N(tx,ty) = tx + t\sqrt{xy} \overset{\alpha}{=} t^{1}(x + \sqrt{xy})$$

Funcion homogenea grado 1

Por lo tanto la Ecuacion Diferencial es homogenea grado 1

Como $M(x, y)$ *es mas simple*

$$x = vy$$

$$dx = vdy + ydv$$

$$\boldsymbol{-ydx + (x + \sqrt{xy})dy = 0}$$

$$-y(vdy + ydv) + \left(vy + \sqrt{(vy)y}\right)dy = 0$$

$$-y(vdy + ydv) + \left(vy + \sqrt{vy^2}\right)dy = 0$$

$$-y(vdy + ydv) + \left(vy + \sqrt{v}\sqrt{y^2}\right)dy = 0$$

$$-y(vdy + ydv) + (vy + y\sqrt{v})dy = 0$$

$$-y(vdy + ydv) + y(v + \sqrt{v})dy = 0 \quad \div y$$

$$-y(vdy + ydv) + y(v + \sqrt{v})dy = 0 \quad \Big| \div y$$

$$-(vdy + ydv) + (v + \sqrt{v})dy = 0$$

$$-vdy - ydv + (v + \sqrt{v})dy = 0$$

$$(\cancel{-v} \cancel{+ v} + \sqrt{v})dy - ydv = 0$$

Var. Sep.

$$\sqrt{v}dy = ydv$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dv}{\sqrt{v}}$$

$$\frac{dv}{v^{1/2}} = v^{-1/2}dv$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int v^{-\frac{1}{2}}dv$$

$$\frac{dy}{y} = v^{-\frac{1}{2}}dv$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int v^{-\frac{1}{2}}dv$$

$$\ln|y| = 2\sqrt{v} + c$$

$$\ln|y| = 2\sqrt{\frac{x}{y}} + c$$

Solucion implícita

Recordar la sustitucion

$$x = vy$$

$$v = \frac{x}{y}$$

Prueba de conocimiento

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$xy^2\frac{dy}{dx} = y^3 - 2x^3$$

EDO homogenea de grado α

$$xy^2\,dy = (y^3 - 2x^3)\,dx$$

de grado 3 ?

$$\underbrace{(y^3 - 2x^3)}_{M}\,dx \underbrace{- xy^2}_{N}\,dy = 0$$

Prueba de conocimiento

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$xy^2\frac{dy}{dx} = y^3 - 2x^3$$

Respuesta

$$2ln|x| = -\frac{1}{3}\left(\frac{y^3}{x^3}\right) + C$$

Solución

$$xy^2\frac{dy}{dx} = y^3 - 2x^3$$

$$\underbrace{(y^3 - 2x^3)dx}_{M} \underbrace{- xy^2 dy}_{N} = 0$$

$$M(x,y) = y^3 - 2x^3$$

$$M(tx,ty) = (ty)^3 - 2(tx)^3 = t^3y^3 - 2t^3x^3$$

$$M(tx,ty) = t^3(y^3 - 2x^3)$$

Funcion homogenea grado 3

$$N(x,y) = -xy^2$$

$$N(tx,ty) = -(tx)(ty)^2 = -(tx)(t^2y^2)$$

$$N(tx,ty) = t^3(-xy^2)$$

Funcion homogenea grado 3

Por lo tanto la Ecuacion Diferencial es homogenea grado 3

$Como\ N(x,y)es\ mas\ simple$

$y = vx$

$dy = vdx + xdv$

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$$(y^3 - 2x^3)dx - xy^2 dy = 0$$

$$((vx)^3 - 2x^3)dx - x(vx)^2(vdx + xdv) = 0$$

$$(v^3x^3 - 2x^3)dx - x(v^2x^2)(vdx + xdv) = 0$$

$$x^3(v^3 - 2)dx - x^3v^2(vdx + xdv) = 0 \quad | \div x^3$$

$$(v^3 - 2)dx - v^2(vdx + xdv) = 0$$

$$(v^3 - 2)dx - v^3dx - xv^2dv = 0$$

$$\underline{(v^3-2)}dx-\underline{v^3}dx-xv^2dv=0$$

$$(\cancel{v^3}-2-\cancel{v^3})dx-xv^2dv=0$$

$$\longrightarrow\quad -2dx-xv^2dv=0$$

$$xv^2dv=-2dx$$

$$v^2dv=-2\frac{dx}{x}$$

$$\int v^2\,dv=-2\int\frac{dx}{x}$$

Recordar la sustitucion

$$y = vx$$

$$v = \frac{y}{x}$$

$$\int v^2\, dv \;= -2\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{v^3}{3} = -2ln|x| + c$$

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^3}{3} = -2ln|x| + c$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{y^3}{x^3}\right) = -2ln|x| + c$$

$$\mathbf{2ln|x| = -\frac{1}{3}\left(\frac{y^3}{x^3}\right) + c}$$