MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 16/03/2021

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

ECUACIONES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

ECUACIONES HOMOGENEAS

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

Principio de superposición

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

Toda solución de una ED Lineal de orden n es una combinación lineal

El Principio de superposición solo se cumple para soluciones linealmente independientes (ninguna es múltiplo constante de otra)

Se debe verificar si las funciones son linealmente independientes, con el método WRONSKIANO (W)

Ejemplo

Dada la siguiente E D Lineal homogénea de segundo orden $y'' - 9y = 0$ con $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-3x}$. Encuentre una solución particular que satisfaga las condiciones dadas $y(0) = -1,\ \ y'(0) = 15.$

$Y(x) = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 \Big\}$ familia biparamétrica

Se verifica que las funciones son soluciones de la ED

Para y_1

$y_1 = e^{3x}$
$y_1' = 3e^{3x}$
$y_1'' = 9e^{3x}$

Sustituyendo
$y'' - 9y = 0$
$9e^{3x} - 9e^{3x} = 0$
$0 = 0$

y_1 *es una función solución de la ED*

Para y_2

$y_2 = e^{-3x}$
$y_2' = -3e^{-3x}$
$y_2'' = 9e^{-3x}$

Sustituyendo
$y'' - 9y = 0$
$9e^{-3x} - 9e^{-3x} = 0$
$0 = 0$

y_2 *es una función solución de la ED* verificar si las funciones son linealmente independientes

$$w = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix}$$

$$w = e^{3x} * (-3e^{-3x}) - e^{-3x} * (3e^{3x})$$

$$w = -3 - 3$$

$$w = -6$$

$w \neq 0,\ \ y_1, y_2$,son linealmente independientes

Por el principio de superposición (el cual solo se cumple para soluciones que son linealmente indenpendientes), la solución general es:

? ?

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}}$$

Familia biparamétrica de soluciones

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$

Para encontrar la solución particular deben aplicarse condiciones iniciales

✓ $Para\ y(0) = -1$ (0, -1)

x, Y

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$

$$-1 = c_1 \cancel{e^{3(0)}} + c_2 \cancel{e^{3(0)}}$$

$$\boxed{-1 = c_1 + c_2}$$

Ecuacion 1

✓ $Para\ y'(0) = 15$ (0, 15)

$$y'(x) = 3c_1 e^{3x} - 3c_2 e^{-3x}$$

$$15 = 3c_1 \cancel{e^{3(0)}} - 3c_2 \cancel{e^{-3(0)}}$$

$$15 = 3c_1 - 3c_2 \quad | \div 3$$

$$\boxed{5 = c_1 - c_2}$$

Ecuacion 2

Resolviendo el sistema Ec1 y Ec2

$$-1 = c_1 + c_2$$

$$5 = c_1 - c_2$$

$$4 = 2c_1$$

$$\boxed{c_1 = 2}$$

$$\boxed{c_2 = -3}$$

$$\boxed{y(x) = 2e^{3x} - 3e^{-3x}}$$

Solucion particular

ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (*)$

$donde\ a, b\ y\ c\ son\ constantes$

$\boxed{ar^2 + br + c = 0}$ $\qquad$ *Ecuacion caracteristica de la ED lineal homogenea*

$y = e^{rx}$, para que sea una solución de la E D se debe sustituir en cada una de las derivadas de y.

$$y = e^{rx}$$
$$y' = re^{rx}$$
$$y'' = r^2e^{rx}$$

Sustituyendo en la ED $(*)$

$$a(r^2e^{rx}) + b(re^{rx}) + c(e^{rx}) = 0$$
$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$
$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

e^{rx} nunca será cero para valores reales de x

$y(x) = e^{rx}$ cumplirá con la ecuación diferencial$(*)$ cuando r sea una raíz o solución de la ecuación polinomial (algebraica)

Por lo tanto la ecuación diferencial

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Tiene como ecuación característica

$$ar^2 + br + c = 0$$

Donde la ecuación carácteristica puede tener:

1. Raices Reales distintas ✓
2. Raices Reales Repetidas ✓
3. Raices Complejas o imaginarias. ✓

$ay'' + by' + cy = 0$

$ar^2 + br + c = 0$

1. Raices Reales distintas (r_1, r_2)

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

2. Raices Reales Repetidas $(r_1 = r_2)$

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} \\ y(x) &= (c_1 + c_2 x) e^{r_1 x} \end{aligned}}$$

$y(x) = c_1 e^{r_1 x} \cancel{+ c_2 e^{r_1 x}}$

$r_1 \; r_1 \rightarrow r_1$ mult. 2

$Y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x}$

3. Raices Complejas o imaginarias $(r = \alpha \pm \beta i)$

parte imaginaria

parte real

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)}$$

Ejemplo

Determine las soluciones generales de las siguientes Ecuaciones Diferenciales

Resolver

1) $y'' + 7y' = 0$

$ay'' + by' + cy = 0$

característica

$ar^2 + br + c = 0$

Ecuación Caracteristica

$\boxed{r^2 + 7r = 0}$

$r(r+7) = 0$

$r = 0$ $\qquad$ $r + 7 = 0$

$r = -7$

raíces distintas

$y(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-7x}$

$y(x) = C_1 + C_2 e^{-7x}$

Raices reales diferentes

Por lo tanto la solución de la E D Homogénea es:

$$y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-7x}$$

$$y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-7x}$$

Resolver

2) $4y'' - 2y' - 2y = 0$

Ecuación Caracteristica

$4r^2 - 2r - 2 = 0$

$(4r + 2)(r - 1) = 0$

$r = 1, r = -\frac{1}{2}$

$Y(x) = C_1 e^{1x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}$ ó bien $Y(x) = C_1 e^{-1/2x} + C_2 e^{x}$

Raices reales diferentes

Por lo tanto la solución de la ED Homogénea es:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}$$

Resolver

3) $25y'' + 10y' + y = 0$

Ecuación Caracteristica

$25r^2 + 10r + 1 = 0$

$(5r+1)^2 = 0$

$(5r+1)(5r+1) = 0$

$r = -\frac{1}{5}$ multiplicidad 2 ó $r = -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}$

Raices reales repetidas

$Y(x) = C_1 e^{-\frac{1}{5}x} + C_2 X e^{-1/5x}$

ó bien

$Y(x) = (C_1 + C_2 X) e^{-1/5X}$

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{5}x} + c_2 x e^{-\frac{1}{5}x}$$

Resolver

4) $y'' + 8y' + 25y = 0$

Ecuación Cáracteristica

$$r^2 + 8r + 25 = 0$$
$$r^2 + 8r + 16 + 9 = 0$$
$$(r+4)^2 + 9 = 0$$
$$(r+4)^2 = -9$$
$$r + 4 = \pm 3i$$
$$r = \underbrace{-4}_{\alpha} \pm \underbrace{3}_{\beta} i$$

$Y(x) = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \,\text{sen}\, 3x)$

ó bien

$Y(x) = C_1 e^{-4x} \cos 3x + C_2 e^{-4x} \,\text{sen}\, 3x$

Raices complejas

Por lo tanto la solución de la E D Homogénea es:

$$y(x) = e^{-4x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$ ✓

Resolver

$5)\ y'' + 25y = 0$

$\alpha \pm \beta i$

Ecuación Carácteristica

$r^2 + 25 = 0$

$r^2 = -25$

$r = \pm 5i$

$\alpha = 0,\beta = 5$

$\alpha = 0 \quad \beta = 5$

$Y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$

$Y(x) = \underbrace{\cancel{e^{0x}}}_{1}(c_1 \cos 5x + c_2 \operatorname{sen} 5x)$

$Y(x) = c_1 \cos 5x + c_2 \operatorname{sen} 5x$

Raices imaginarias

Por lo tanto la solución de la E D Homogénea es:

$$y(x) = e^{0x}(c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x)$$

$$y(x) = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x$$

Resolver

6) $y''' + 3y'' = 0$

Ecuación Caracteristica

$r^3 + 3r^2 = 0$

$r^2(r+3) = 0$

$r = 0 \ multiplicidad\ 2$ ó bien $r = 0, 0$

$r + 3 = 0$

$r = -3$

$r = 0, 0, -3$

$Y(x) = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 e^{-3x}$

$Y(x) = C_1 + C_2 X + C_3 e^{-3X}$

Por lo tanto la solución de la E D Homogénea es:

o bien:

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{0x} + c_3 x e^{0x}$$

$$Y(x) = C_1 e^{-3X} + C_2 e^{0X} + C_3 X e^{0X}$$

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 + c_3 x$$

$$Y(x) = C_1 e^{-3X} + C_2 + C_3 X$$