MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 02/03/2021

MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Mezclas

PRUEBA DE CONOCIMIENTO

Un gran tanque inicialmente tiene 500 galones de agua pura. Le entra salmuera que tiene 2 libras de sal por galon a razón de 5 galones/minuto. La solución bien mezclada sale del tanque con una razón de 10 galones/minuto.

Determine

a) La cantidad de libras de sal que hay en el tanque para cualquier tiempo t

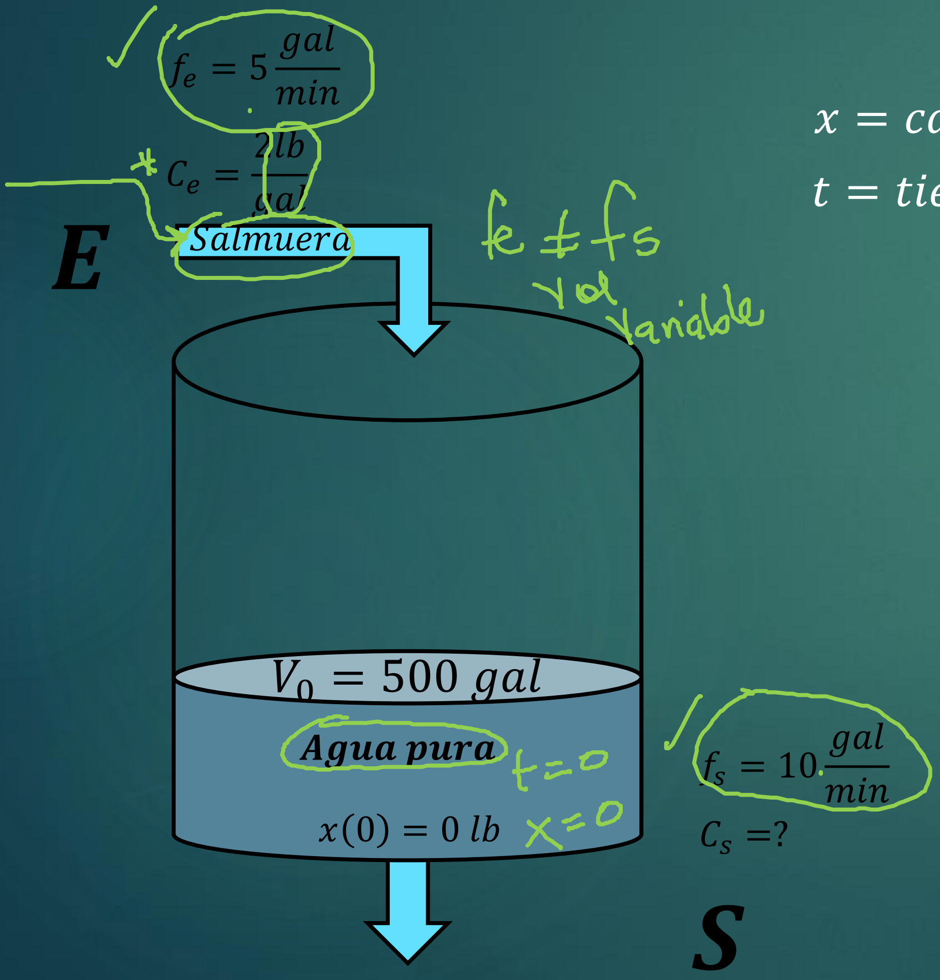
b) ?En cuanto tiempo se vacía el tanque ?

Un gran tanque inicialmente tiene 500 galones de agua pura. Le entra salmuera que tiene 2 libras de sal por galon a razón de 5 galones/minuto. La solución bien mezclada sale del tanque con una razón de 10 galones/minuto.

Determine

a) La cantidad de libras de sal que hay en el tanque para cualquier tiempo t

b) ?En cuanto tiempo se vacía el tanque ?



$x = cantidad\ de\ sal\ en\ el\ tanque\ (lb)$

$t = tiempo\ (min)$

$$\frac{dx}{dt} = E - S$$

$$\underbrace{\frac{dx}{dt} = C_e f_e - C_s f_s}$$

$Para\ encontrar\ C_s$

$$C_s = \frac{Cantidad\ de\ sal\ en\ el\ tanque}{Volumen\ inicial + (f_e - f_s)t}$$

$f_e \neq f_s$

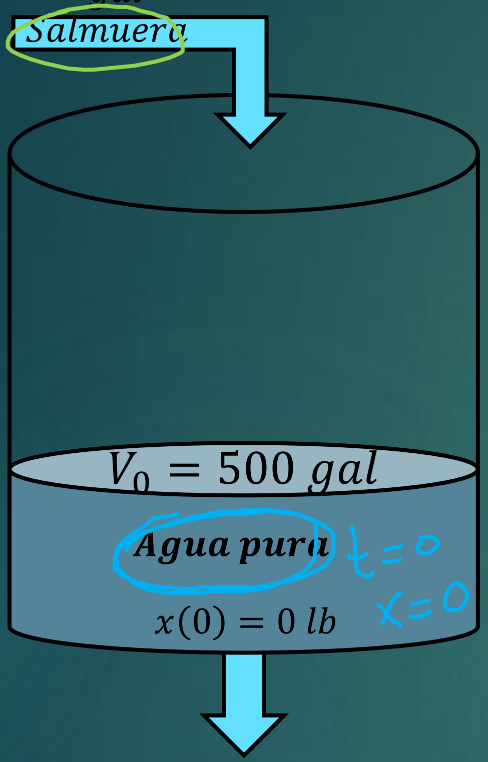
$volumen\ \ variable$

$$C_s = \frac{x}{500 + (5-10)t} = \frac{x\ lb}{(500-5t)\ gal}$$

$$f_e = 5\,\frac{gal}{min}$$

$$C_e = \frac{2lb}{gal}$$

E



S

$$f_s = 10\,\frac{gal}{min}$$

$$C_s = \frac{x\ lb}{(500-5t)gal}$$

$$C_s = \frac{x\ lb}{(500-5t)gal}$$

$$\frac{dx}{dt} = E - S$$

$$\frac{dx}{dt} = C_e f_e - C_s f_s$$

$$\left.\frac{dx}{dt} = \left(2\,\frac{lb}{\cancel{gal}}\right)\left(5\,\frac{\cancel{gal}}{min}\right) - \left(\frac{x\ lb}{500-5t\ \cancel{gal}}\right)\left(10\,\frac{\cancel{gal}}{min}\right)\right\}$$

x(t) = ?

lb/min

$$\frac{dx}{dt} + \frac{10}{500-5t}x = 10 \rightarrow \underline{lineal\ en\ x}$$

$$P(t) = \frac{10}{500-5t}$$

$$Q(t) = 10$$

$$F.I. = e^{\int \frac{10}{500-5t}dt} = e^{-2\ln|500-5t|}$$

$$F.I. = (500-5t)^{-2}$$

$$* \quad (500-5t)^{-2}x = \int 10(500-5t)^{-2}dt$$

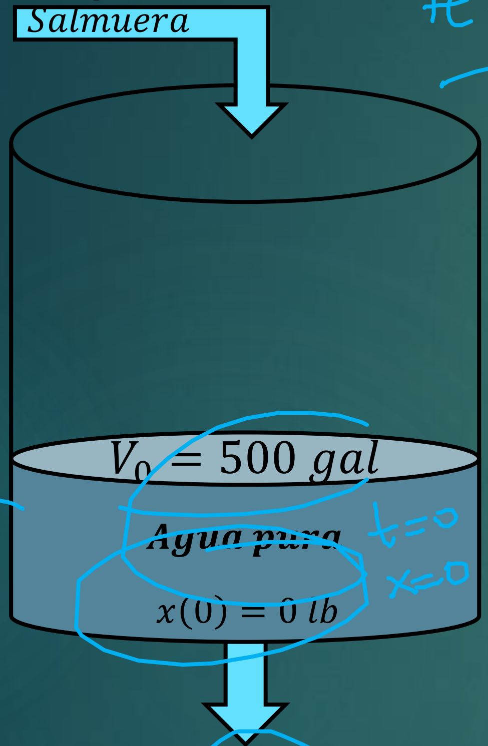
$$(500-5t)^{-2}x = 2(500-5t)^{-1} + C$$

$$\boxed{x(t) = 2(500-5t) + C(500-5t)^2}$$

$f_e = 5\dfrac{gal}{min}$

$C_e = \dfrac{2lb}{gal}$

E



S

$f_s = 10\dfrac{gal}{min}$

$C_s = \dfrac{x\ lb}{(500-5t)gal}$

$fe \neq fs$

Vol Variable

$C_s = \dfrac{cant.sal}{V_0 + (fe - fs)t}$

$t=0$ $x=0$

$V = V_0 - 5t$

$0 = 500 - 5t$

$500 = 5t$

$t = 100$ min

$$\boldsymbol{x(t) = 2(500-5t) + C(500-5t)^2}$$

Condiciones Iniciales

Para $x(0) = 0$

t x

(0, 0)

$$\boldsymbol{0 = 2(500-5(0)) + C(500-5(0))^2}$$

$$\boldsymbol{0 = 2(500) + C(500)^2}$$

$$\boldsymbol{C = -\frac{1}{250}}$$

a) $$\boxed{\boldsymbol{x(t) = 2(500-5t) - \frac{1}{250}(500-5t)^2}}$$

Cantidad de sal en el tanque para cualquier instante t

b) En cuanto tiempo se vacía el tanque?

$V = V_0 - 5t$

$0 = 500 - 5t$

$t = 100\ min$

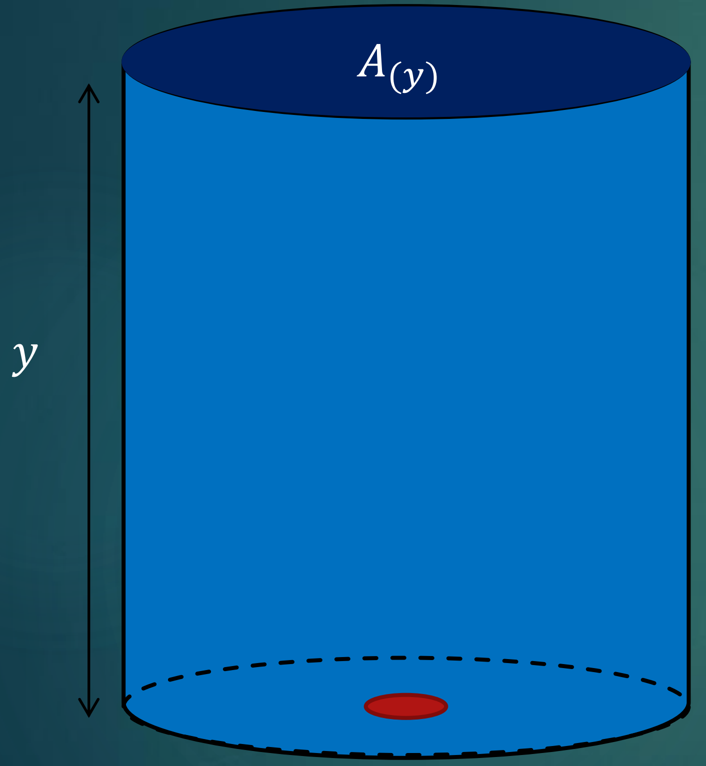
El tanque se vacía en 100 minutos

LEY DE TORRICELLI

(DRENADO DE UN DÉPOSITO)

LEY DE TORRICELLI (DRENADO DE UN DÉPOSITO)

Indica que la tasa de cambio con respecto al tiempo del volumen V del agua ~~del agua~~ en un tanque que se vacía es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad Y del agua en el tanque



$V(t) = volumen\ del\ tanque\ en\ el\ instante\ t$

$y(t) = profundidad\ del\ agua\ en\ el\ tanque\ en\ el\ instante\ t$

$t = tiempo$

$\frac{dV}{dt} = variación\ del\ volumen$

vol. disminuye

$volumen\ disminuye\ dentro\ del\ tanque$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = -av}$$

$$\mathbf{\frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gy}}$$

$donde$

$k = a\sqrt{2g}$

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{y}$$

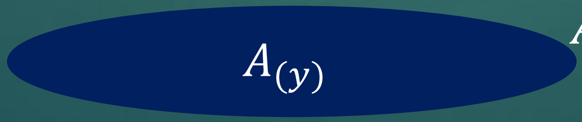
$velocidad\ del\ agua\ que\ sale\ del\ agujero$

$$E_{nergia\ cinetica} = E_{nergia\ potencial}$$

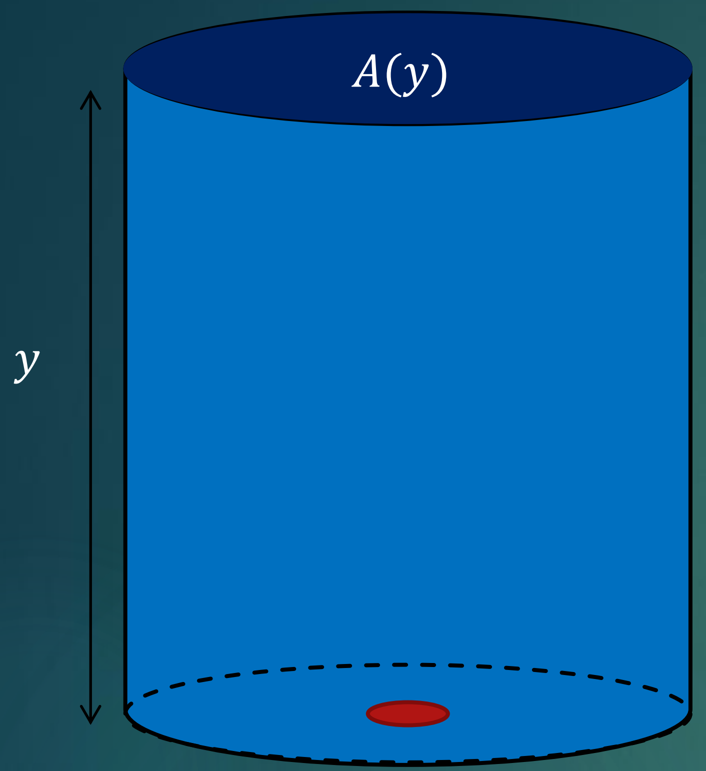
$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \cancel{m}gy$$

$$v = \sqrt{2gy}$$

$a = área\ del\ agujero$



$A_{(y)} = Denota\ el\ area\ de\ la\ seccion\ transversal\ horizontal\ del\ tanque\ a\ la\ altura\ y\ por\ encima\ del\ agujero$



$V(t) = volumen\ del\ tanque\ en\ el\ instante\ t$

$y(t) = profundidad\ del\ agua\ en\ el\ tanque\ en\ el\ instante\ t$

$t = tiempo$

$$\frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gy}$$

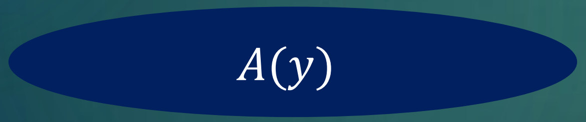
$$A(y)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$$

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$$

área del agujero

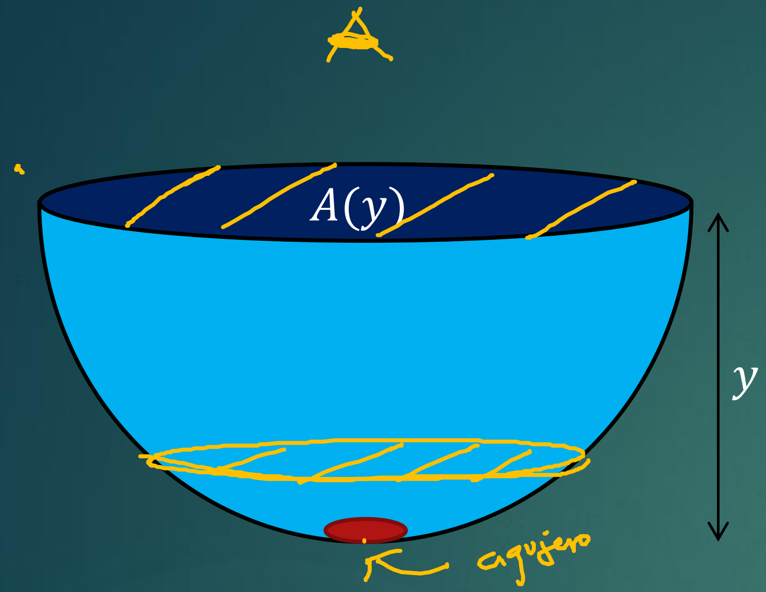
área de la seccion transversal

a = área del agujero

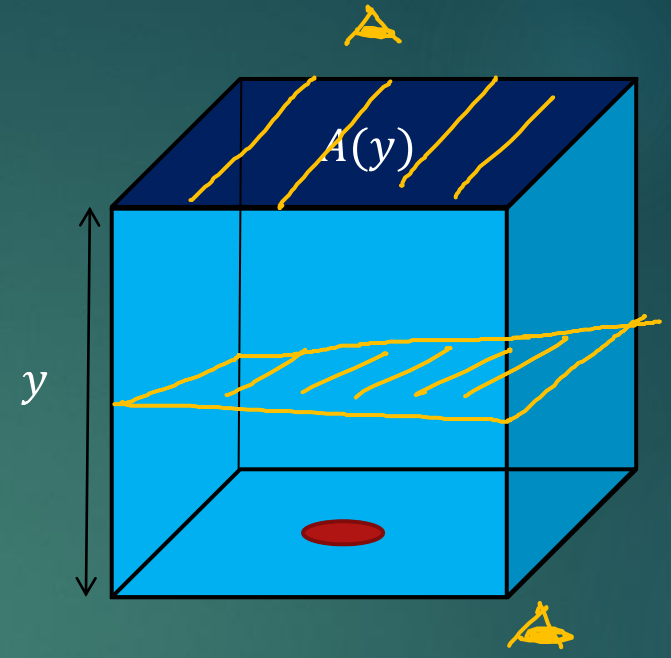


$A(y)$ = área del espejo del agua en términos de la altura, medida por encima del agujero

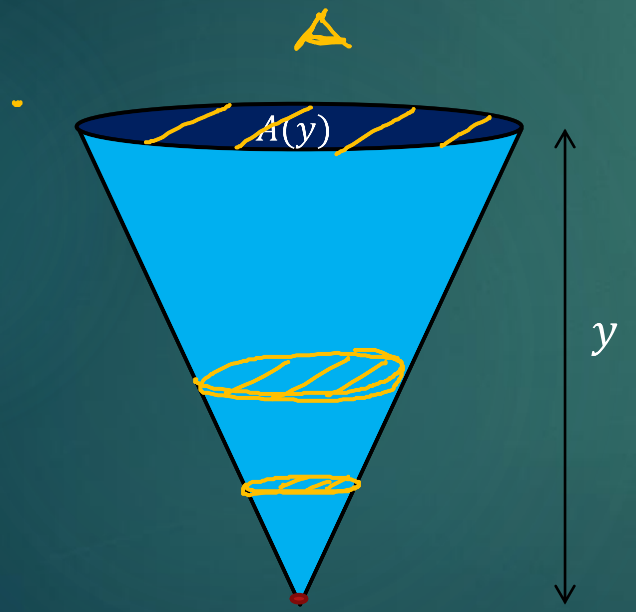
1



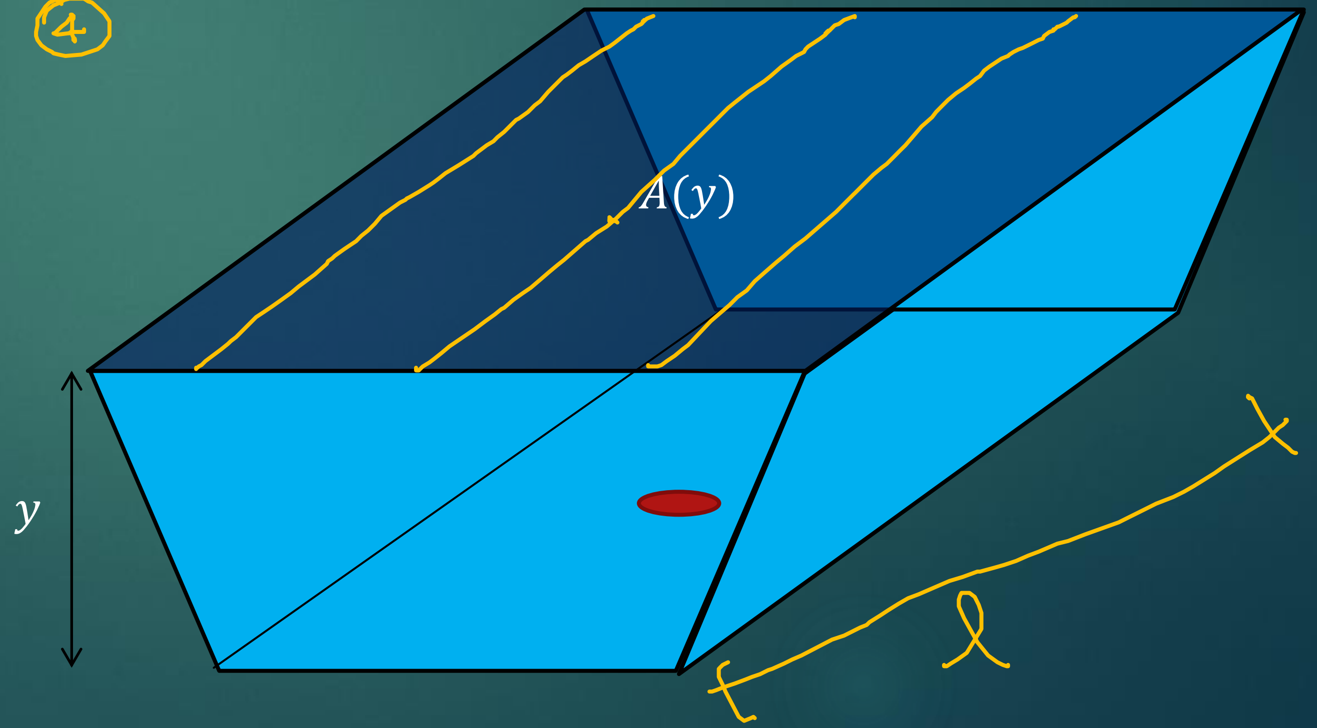
2



3

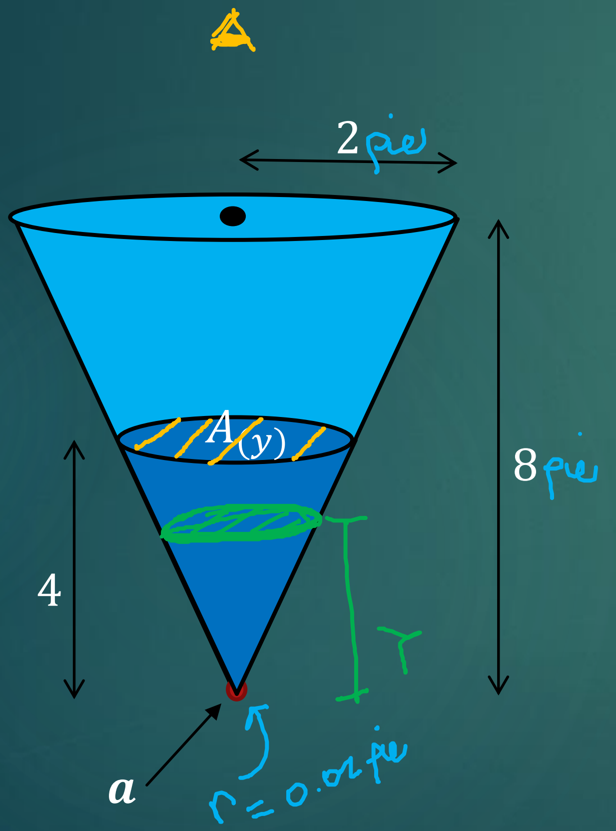


4



Ejemplo:

Un tanque con forma cónica de 8 pie de altura y 2 pie de radio, se encuentra colocado con su vértice hacia abajo. En el instante en que el tanque se encuentra lleno hasta una altura de 4 pies se abre un agujero de radio 0.02 pies en el fondo. ¿Cuánto tiempo pasará para que se vacíe el tanque?



$y = profundidad\ del\ agua\ en\ el\ tanque$ (pie)

$t = tiempo$ (segundos)

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$$ $y(t) = ?$

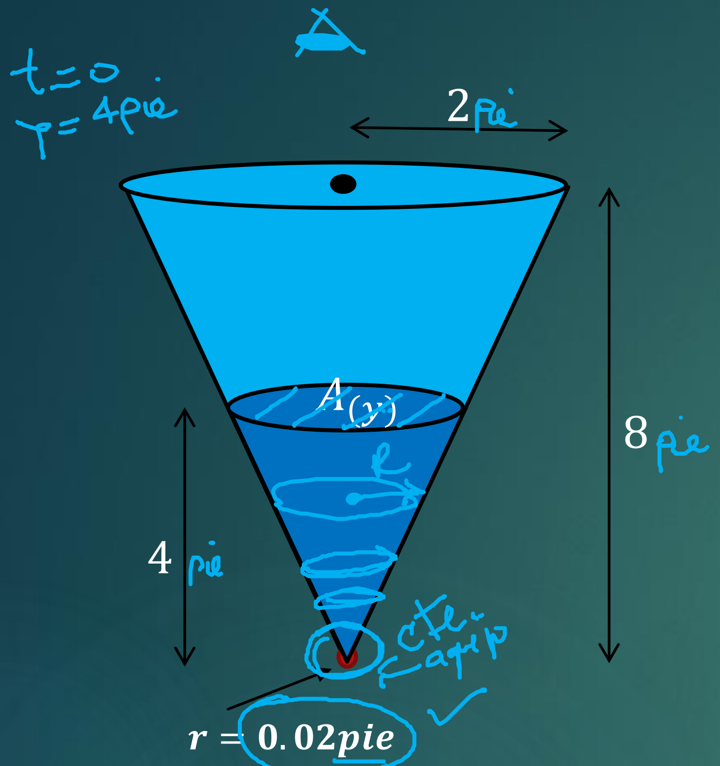
$$g = 32\ {}^{pie}/_{s^2}$$

$A(y) = ?$

$a = ?$

$A(y)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$

$g = 32\ pie/s^2$



$$a = \pi r^2$$

$$\boxed{a = \pi(0.02)^2}$$

$$a = \frac{\pi}{2500} pie^2$$

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$$

$$\boxed{A(y) = \pi R^2}$$

$$a = \pi r^2$$