MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 06/04/2021

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGENEAS

OPERADORES DIFERENCIALES

Encuentre el operador diferencial que anule la funcion que se proporciona.

4. $e^{-x} + 2xe^{x} - x^{2}e^{x}$ $= e^{-x} + (2x - x^2)e^{1x}$

$e^{-x} + (2x - x^{2})e^{x}$

$r = -1 \rightarrow D+1$ $\quad r = 1$ mult. 3 $\rightarrow (D-1)^3$ $\quad (D+1)(D-1)^3$

$Operador\ Diferencial : (D+1)(D-1)^{3}$

5. $9 + e^{x}\cos 2x$ $\quad D(D^2-2D+5)$

$r=0 \rightarrow D$ $\quad r = 1 \pm 2i \rightarrow D^2-2D+5$

$Operador\ Diferencial : D(D^{2} - 2D + 5)$

raiz c	Factor $D-c$
$1+2i$	$D-(1+2i) = (D-1-2i)$
$1-2i$	$D-(1-2i) = (D-1+2i)$

$[(D-1)-2i][(D-1)+2i] = (D-1)^2 + 2^2 = D^2-2D+1+4 = D^2-2D+5$

6. $x^{4} - 1$

$Operador\ Diferencial : D^{5}$

Encuentre el operador diferencial que anule la funcion que se proporciona.

7. $\underbrace{xsen2x}$

$r = \pm 2i$ mult. 2

$$Operador\ Diferencial: (D^2+4)^2$$

c	D - C
Raiz	Factor
$2i$	$D-2i$
$-2i$	$D+2i$

$(D-2i)(D+2i) = D^2+2^2$
$= D^2+4$

8. $\underbrace{5x} + \underbrace{e^{-x}sen3x}$

$r = 0$ mult. 2 $\rightarrow D^2$

$r = -1 \pm 3i \rightarrow D^2+2D+10$

$$Operador\ Diferencial: D^2(D^2+2D+10)$$ ✓

raiz	Factor
$-1+3i$	$D-(-1+3i) = D+1-3i$
$-1-3i$	$D-(-1-3i) = D+1+3i$

$((D+1)-3i)((D+1)+3i) =$
$(D+1)^2+3^2 = D^2+2D+1+9$
$= D^2+2D+10$

9. $\underbrace{2x^2cos4x}$

$r = \pm 4i$ mult. 3

$$Operador\ Diferencial: (D^2+16)^3$$ ✓

Determine el operador diferencial que anule la siguiente expresion

$$\underbrace{2x^3 - 4x}_{0\ mult.\ 4} + \underbrace{x^2e^{-x}}_{-1\ mult.\ 3} + \underbrace{xsen2x}_{\pm 2i\ mult.\ 2} - \underbrace{xe^{-2x}cos3x}_{-2 \pm 3i\ mult.\ 2}$$

$$0\ mult.\ 4 \rightarrow D^4$$

$$-1\ mult.\ 3 \rightarrow (D+1)^3$$

$$\pm 2i\ mult.\ 2 \rightarrow (D^2+4)^2$$

$$-2 \pm 3i\ mult.\ 2 \rightarrow (D^2+4D+13)^2$$

$$Operador\ Diferencial : D^4(D+1)^3(D^2+4)^2(D^2+4D+13)^2$$

MÉTODO ANULADOR

MÉTODO ANULADOR

Recordando que la solución general de una E D No Homogénea es:

$$\boldsymbol{y(x) = y_c + y_p}$$

una ED se puede representar en forma de Operador Diferencial

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

Notación de Operador Diferencial

$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + a_1 D y + a_0 y = g(x)$$

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0) y = g(x)$$

$$L(y) = g(x)$$

$$L \text{ denota el operador diferencial polinomial lineal de } n - \text{ésimo orden}$$

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)$$

PROCEDIMIENTO

1. Encontrar la E D Homogénea Asociada

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

2. Resolver la ED Homogénea Asociada, para obtener la función complementaria y_c
3. **Cambiar la ED original a notación de Operador Diferencial**
4. **Encontrar el Operador Anulador de la función g(x) y aplicar a la E D original en notación de Operador Diferencial (Al aplicar el Operador Anulador se genera una ecuación homogénea)**
5. **Establecer la ecuación auxiliar(m) y resolver la ecuación auxiliar**
6. **Plantear la solución general.**
7. **Identificar los términos de y_c de la solución general.**
8. **Los términos restantes serán los que corresponden a la y_p**
9. Encontrar los valores de y_P
10. La solución general es:

$$y(x) = y_c + y_p$$

Ejemplo

Determine las soluciones generales de las siguientes Ecuaciones Diferenciales utilizando el método anulador.

$$\underbrace{Y(x) = Y_c + Y_p}$$

$$\boldsymbol{y'' + 3y' + 2y = 4x^2}$$

Encontrar la E D Homogénea Asociada

$y'' + 3y' + 2y = 0$

Función complementaria y_c

Ecuacion Caracteristica

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

$$(r+1)(r+2) = 0$$

$$r_c = -1, -2$$

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} \checkmark$$

Y_c:

$$y'' + 3y' + 2y = 4x^2$$

ED original en términos de Operador Diferencial

$$D^2y + 3Dy + 2y = 4x^2$$

$$(D^2 + 3D + 2)y = 4x^2$$

$g(x)$

Identificar el Operador Anulador de $g(x)$

$$g(x) = 4x^2$$

$$Operador\ Diferencial = D^3$$

$4x^2$

$r = 0$

mult. 3

y_c

$r_c = -1, -2$

$$y'' + 3y' + 2y = 4x^2$$

$$(D^2 + 3D + 2)y = 4x^2$$

$$\boldsymbol{D^3}(D^2 + 3D + 2)y = \boldsymbol{D^3}(\cancel{4x^2}) \rightarrow 0$$

$$(D^5 + 3D^4 + 2D^3)y = 0$$

Ecuación auxiliar

$$m^5 + 3m^4 + 2m^3 = 0$$

$$m^3(m^2 + 3m + 2) = 0$$

$$m^3(m + 1)(m + 2) = 0$$

$m^3 = 0$
$\underbrace{m = 0 \; multiplicidad \; 3}$

$m + 1 = 0$
$m = -1$

$m + 2 = 0$
$m = -2$

Asi la solucion general debe ser:

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + c_3 + c_4x + c_5x^2$$

Identificamos y_c y y_p

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

$$y = \boldsymbol{c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}} + \underbrace{\boldsymbol{c_3 + c_4 x + c_5 x^2}}_{y_p}$$

Cambiamos las constantes de y_p

$$y_p = A + Bx + Cx^2$$

$$y_p' = B + 2Cx$$

$$y_p'' = 2C$$

Sustituimos y_p y sus derivadas en la E D original

$$y'' + 3y' + 2y = 4x^2$$

$$2C + 3(B + 2Cx) + 2(A + Bx + Cx^2) = 4x^2$$

$$2C + 3B + 6Cx + 2A + 2Bx + 2Cx^2 = 4x^2$$

$$(2A + 2C + 3B) + (2Bx + 6Cx) + 2Cx^2 = 4x^2$$

$$(2A + 2C + 3B) + (2Bx + 6Cx) + 2Cx^2 = 4x^2$$

Para x^2

$$2C = 4$$

$$C = 2$$

Para x

$$2B + 6C = 0$$

$$B = -3C$$

$$B = -6$$

$$2A + 3B + 2C = 0$$

$$A = \frac{-3B - 2C}{2}$$

$$A = \frac{18 - 4}{2}$$

$$A = 7$$

$A = 7$

$B = -6$

$C = 2$

(A) Resuelva por el método de superposición

$y'' + 3y' + 2y = 4x^2$

(1) " Superposición" ✗

(2) Anulador ✗

$g(x)$

(B) $y'' + 3y' + 2y = \tan^2 2x$

Variación de parámetros

$$y_p = A + Bx + Cx^2$$

$$y_p = 7 - 6x + 2x^2$$

$$y(x) = y_c + y_p$$

$$\boldsymbol{y(x) = \underbrace{c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}}_{y_c} + \underbrace{7 - 6x + 2x^2}_{y_p}}$$