MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 05/02/2021

MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

ECUACIONES EXACTAS

Ejemplo 2

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$ Recordar de la diferencial total

Resolver

$$\underbrace{\overset{\frac{\partial f}{\partial x}}{(x^2+y^2)}}_{M}dx + \underbrace{\overset{\frac{\partial f}{\partial y}}{2xy}}_{N}dy = 0 \rightarrow M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

$$M(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$$

$$N(x,y) = 2xy$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$ *, por lo tanto es EXACTA*

Se toma la expresion $N(x, y)$ *dado a que la expresion es mas simple (mas sencilla)*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

$$(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$$

$$\partial f = 2xy\partial y$$

$$\int \partial f = \int (2xy)\partial y$$

$$\boxed{f = xy^2 + g(x)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + g'(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + g'(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$$

$$\cancel{y^2} + g'(x) = x^2 + \cancel{y^2}$$

$$g'(x) = x^2$$

$$g'(x) = x^2$$

$$g(x) = \frac{x^3}{3}$$

$f(x,y) = C$

$$\boldsymbol{f = xy^2 + g(x)}$$

$$f = \boldsymbol{xy^2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\boldsymbol{xy^2 + \frac{x^3}{3} = C}$$ $\longrightarrow$ *Solución implícita*

Prueba de conocimiento

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$3x(xy-2)dx+(x^3+2y)dy=0$$

$$(3x^2y-6x)dx+(x^3+2y)dy=0 \Leftrightarrow M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

$M(x,y)$ $\quad$ $N(x,y)$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ $\quad$ $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y-6x$$

$$\partial f=(3x^2y-6x)\partial x$$

$$\int \partial f=\int(3x^2y-6x)\partial x$$

$$f=\frac{\cancel{3}x^3y}{\cancel{3}}-\frac{6x^2}{2}+g(y)$$

$$\boxed{f=x^3y-3x^2+g(y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\cancel{x^3}+g'(y)=\cancel{x^3}+2y$$

$$g'(y)=2y$$

$$g(y)=y^2$$

$$f=x^3y-3x^2+y^2$$

R// $\boxed{x^3y-3x^2+y^2=C}$

Prueba de conocimiento

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$3x(xy-2)dx + (x^3+2y)dy = 0$$

$$\underbrace{(3x^2y-6x)}_{M}dx + \underbrace{(x^3+2y)}_{N}dy = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2y$

$\int \partial f = \int (x^3+2y)\,\partial y$?

$$\boxed{f = x^3y + y^2 + g(x)}$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + g'(x)$

$\cancel{3x^2y} + g'(x) = \cancel{3x^2y} - 6x$

$g'(x) = -6x$

$g(x) = -3x^2$

$f = x^3y + y^2 - 3x^2$

Respuesta

$$x^3y + y^2 - 3x^2 = c$$

R// $x^3y + y^2 - 3x^2 = C$

ECUACIONES REDUCIBLES A EXACTAS

ECUACIONES REDUCIBLES A EXACTAS

Algunas veces una ED de primer orden puede ser reducida a una exacta, multiplicando la ED por una expresión llamada **factor de integración** que la reduce a exacta.

Para la ecuacion diferencial $\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$, si no es exacta, puede ser reducida a exacta

Para saber si la ED es reducible a exacta se realizan las siguientes operaciones

1. Sí $\frac{My-Nx}{N} = f(x) \text{------}\!\!\rightarrow F.I. = e^{\int f(x)dx}$

2. Sí $\frac{Nx-My}{M} = f(y) \text{------}\!\!\rightarrow F.I. = e^{\int f(y)dy}$

Recordar que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = M_y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = N_x$$

Luego de comprobar que puede ser reducida a exacta y habiendo encontrado el F.I. se multiplica $\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$ por el factor integrante y se resuelve la ecuacion exacta.

$$\boldsymbol{(F.I.)M(x,y)dx + (F.I.)N(x,y)dy = 0}$$

PASOS A SEGUIR

1. *Llevar la ED a la forma*

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$$

2. *Identificar* $M(x,y)$ *y* $N(x,y)$
3. *Comprobar*

a b

$$\frac{My - Nx}{N} = f(x) \quad \text{ó} \quad \frac{Nx - My}{M} = f(y)$$

4. *Si existe una función de* $f(x)$ *ó* $f(y)$ *se encuentra el factor de integración*

Si es $f(x)$	Si es $f(y)$
$\downarrow$	$\downarrow$
$F.I. = e^{\int f(x)dx}$	$F.I. = e^{\int f(y)dy}$

5. $Multiplicar\ el\ F.I.por\ la\ ecuación\ diferencial$

$$F.I * M(x,y)dx + F.I.* N(x,y)dy = 0$$

6. $Verificar\ que\ la\ ecuacion\ del\ paso\ anterior\ es\ exacta.$

7. $Resolver\ la\ ecuacion\ exacta$

Ejemplo 1

Resolver

$$2xydy + (3y^2 + 4x)dx = 0$$

$$\underbrace{(3y^2 + 4x)}_{M}dx + \underbrace{2xy}_{N}dy = 0$$

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$M(x,y) = 3y^2 + 4x$

$N(x,y) = 2xy$

$M_y = \dfrac{\partial M}{\partial y} = 6y$

$N_x = \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ *, por lo tanto es NO ES EXACTA*

Se buscará un factor de integración (F.I.) que lleve la ED a ser Exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = M_y = 6y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = N_x = 2y$$

Recordar que:

$$\frac{My - Nx}{N} = f(x) \qquad \text{ó} \qquad \frac{Nx - My}{M} = f(y)$$

$$\frac{My - Nx}{N} = f(x)$$

$$\frac{6y - 2y}{2xy} = f(x)$$

$$f(x) = \frac{4y}{2xy} = \frac{2}{x}$$

Se obtiene una funcion con respecto a una sola variable, en este caso una funcion con respecto a la variable x

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

Por lo tanto

$$F.I. = e^{\int f(x)dx} = e^{2\int \frac{dx}{x}} = e^{2lnx} = \cancel{e}^{lnx^2} = x^2$$

$$F.I. = x^2$$

$$x^2(3y^2 + 4x)dx + x^2(2xy)dy = 0$$

$$x^2(3y^2 + 4x)dx + x^2(2xy)dy = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\longrightarrow \underbrace{(3x^2y^2 + 4x^3)}_{M}dx + \underbrace{(2x^3y)}_{N}dy = 0$$

$$M(x, y) = 3x^2y^2 + 4x^3$$

$$N(x, y) = 2x^3y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x^2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x^2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad ,por\ lo\ tanto\ es\ EXACTA$$

Se toma la expresion $N(x,y)$ dado a que la expresion es mas simple (mas sencilla)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y$$

$$\partial f = 2x^3y\partial y$$

$$\int \partial f = \int (2x^3y)\partial y$$

$$\Rightarrow \boxed{f = x^3y^2 + g(x)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + g'(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + g'(x) = M(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\cancel{3x^2y^2} + g'(x) = \cancel{3x^2y^2} + 4x^3$$

$$g'(x) = 4x^3$$

$$g'(x) = 4x^3$$

$$g(x) = x^4$$

$$f = x^3y^2 + g(x)$$?

$f(x,y) = C$

$$f = x^3y^2 + x^4$$

$$x^3y^2 + x^4 = C \longrightarrow \textit{Solución implícita}$$

Ejemplo 2

Resolver

$$\underbrace{y}_{M}dx + \underbrace{(3 + 3x - y)}_{N}dy = 0$$