MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernandez

CLASE 25/01/2021

PROBLEMA CON VALOR INICIAL (PVI)

Es aquel que está sujeto a condiciones prescritas, es decir, condiciones impuestas sobre una $y(x)$ desconocida o sus derivadas sobre algún intervalo I

Ejemplo:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1})$$

$$sujeto\ a$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y_1$$

$$y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$$

Donde $\mathrm{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}}$ son constantes reales arbitrarias dadas

Con un problema de valor inicial se obtiene una solución particular

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$
$$sujeto$$
$$y(x_0) = y_0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y')$$
$$sujeto$$
$$y(x_0) = y_0$$
$$y'(x_0) = y_1$$

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Para resolver

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

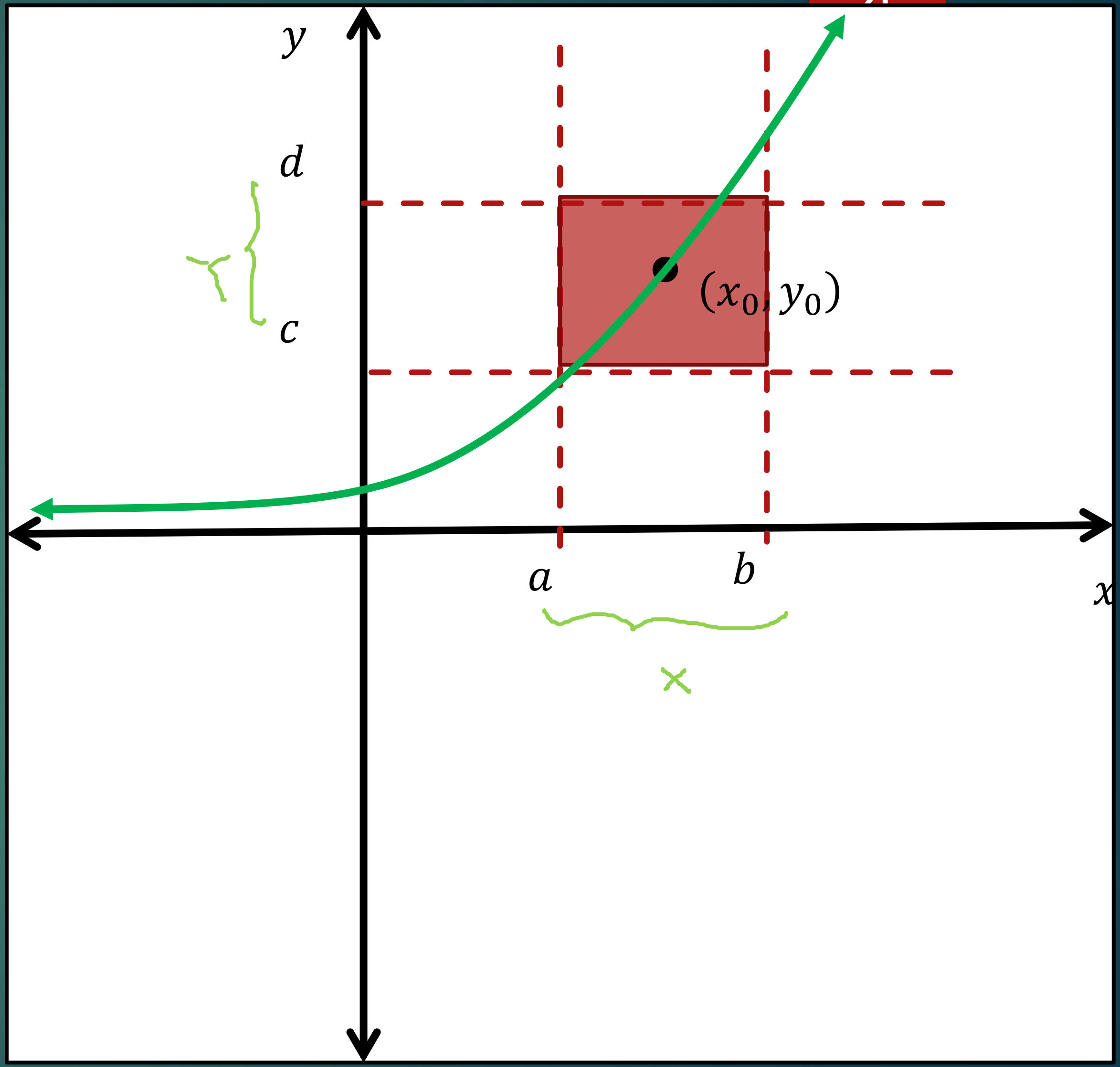
$$\text{sujeto}$$

$$y(x_0) = y_0$$

EXISTENCIA DE UNA SOLUCIÓN ÚNICA

Bajo las condiciones especificadas un problema de valor inicial tiene una única solución

Sea R una región rectangular en el plano xy por $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$ que contiene el punto (x_0, y_0) en su interior. Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R, entonces existe algún intervalo I_0 que es solución del problema de valores iniciales.



EJEMPLO

$y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ es una familia biparamétrica de soluciones de $\boxed{y'' - y = 0}$

Encontrar una solución del problema con valores iniciales para $y(1) = 0$ y $y'(1) = e$

$Verificar\ la\ Solución$

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

$$y' = c_1e^x - c_2e^{-x}$$

$$y'' = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

$Sustituyendo\ en$ $\quad y'' - y = 0$

$$c_1e^x + c_2e^{-x} - (c_1e^x + c_2e^{-x}) = 0$$

$$\cancel{c_1e^x} + \cancel{c_2e^{-x}} - \cancel{c_1e^x} - \cancel{c_2e^{-x}} = 0$$

√ $0 = 0$

$se\ comprueba\ que\ la\ funcion\ y\ dada\ es\ solución\ de\ la\ ED$

Para encontrar los valores de c_1 *y* c_2

Se aplican las condiciones iniciales

Para $y(1) = 0$ $\quad x, Y \; (1, 0)$

$$\boxed{y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}}$$

$$0 = c_1 e^{1} + c_2 e^{-1}$$

$$c_1 e = -c_2 e^{-1} \rightarrow C_1 = -\frac{C_2 e^{-1}}{e}$$

$$\boxed{c_1 = -c_2 e^{-2}} \quad \textit{Ecuacion 1}$$

Para $y'(1) = e$ $\quad x, Y \; (1, e)$

$$y'(x) = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x}$$

$$\boxed{e = c_1 e^{1} - c_2 e^{-1}} \quad \textit{Ecuacion 2}$$

Sustituyendo Ec 1 en Ec 2

$$e = (-c_2 e^{-2}) e^{1} - c_2 e^{-1}$$

$$e = -c_2 e^{-1} - c_2 e^{-1}$$

$$e = -2 c_2 e^{-1}$$

$$c_2 = \frac{e}{-2e^{-1}}$$

$$\boxed{c_2 = -\frac{e^2}{2}}$$

Para encontrar c_1 sustituir c_2 en ecuacion 1

$$c_1 = -c_2 e^{-2}$$

$$c_1 = -\left(-\frac{e^2}{2}\right) e^{-2}$$

$$c_1 = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo c_1 *y* c_2

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

$$y = \frac{1}{2} e^{x} - \frac{e^2}{2} e^{-x}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2} e^{x} - \frac{1}{2} e^{2-x}}$$

Solución particular

MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

LOS MÉTODOS SON

- Método Cualitativo

  Curvas solución sin la solución

  Campos direccionales e isoclinas

- Método Cuantitativo

1. Ecuaciones con variables separables
2. Ecuaciones Lineales
3. Ecuaciones de Bernoulli
4. Ecuaciones Exactas
5. Ecuaciones Reducible a exactas
6. Ecuaciones homogéneas
7. Ecuaciones que pueden reducirse a separacion de variables

CAMPOS DIRECCIONALES

E ISOCLINAS

MÉTODO CUALITATIVO

Una ECUACION DIFERENCIAL representa un lugar geométrico (puntos conectados por una curva continua) en el plano cartesiano

Por el momento supongamos que no conocemos la solución general de la sencilla ecuación $y' = y$ la ecuación diferencial nos dice en forma especifica que la pendiente de la tangente a la curva solución esta dada por la función $f(x, y) = y$ cuando se mantiene constante $f(x, y)$ esto es $y = C$. Donde C es una constante cualquiera.

Estamos afirmando que: la pendiente de las tangentes a las curvas solución mantienen el mismo valor constante a lo largo de una recta horizontal.

En general a los miembros de una familia $f(x, y) = C$ se les llama ISOCLINAS "Curva a lo largo de la cual la inclinación de las tangentes es la misma"

A la totalidad de estos elementos lineales se llama CAMPO DE DIRECCIONES ó campo de pendientes ó campo de elementos lineales ó campo direccional de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$

El campo de direcciones indica el "patrón de flujo" de la familia de curvas solución.

ISÓCLINAS: Curvas sobre las cuales todos los puntos tienen una pendiente igual correspondiente a una Ecuación Diferencial

El CAMPO DE DIRECCIONES es la representación gráfica de todas las isóclinas en un plano xy en el cual se visualiza el trayecto de una solución

PROCEDIMIENTO PARA EL ANÁLISIS

$Paso\ 1$

$Identificar\ la\ función\ f(x, y)$

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y)$$

$Paso\ 2$

$Se\ iguala\ la\ función\ f(x, y)\ a\ una\ contante$ "C" $que\ representa\ el\ valor\ de\ la\ pendiente$
$a\ lo\ largo\ de\ toda\ la\ isóclina$

$$f(x, y) = C$$

$Se\ deben\ graficar\ todas\ las\ isóclinas\ para\ formar\ el\ campo\ de\ direcciones.$

Ejemplo 1

Trace el campo de direcciones para la siguiente ecuación diferencial y los valores de " C " dados, construya la tabla identificando las isoclinas y su respectiva pendiente e indique una posible curva solución en el campo direccional

$y' = y$ $f(x,y)$ $\qquad$ $C = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

Recordar que:

$y' = f(x,y)$

Además que:

$f(x,y) = c$

Identificar la función $f(x,y)$

$$f(x,y) = y$$

Igualar la función $f(x,y)$ a una constante que representa el valor de la pendiente a lo largo de toda la isoclina

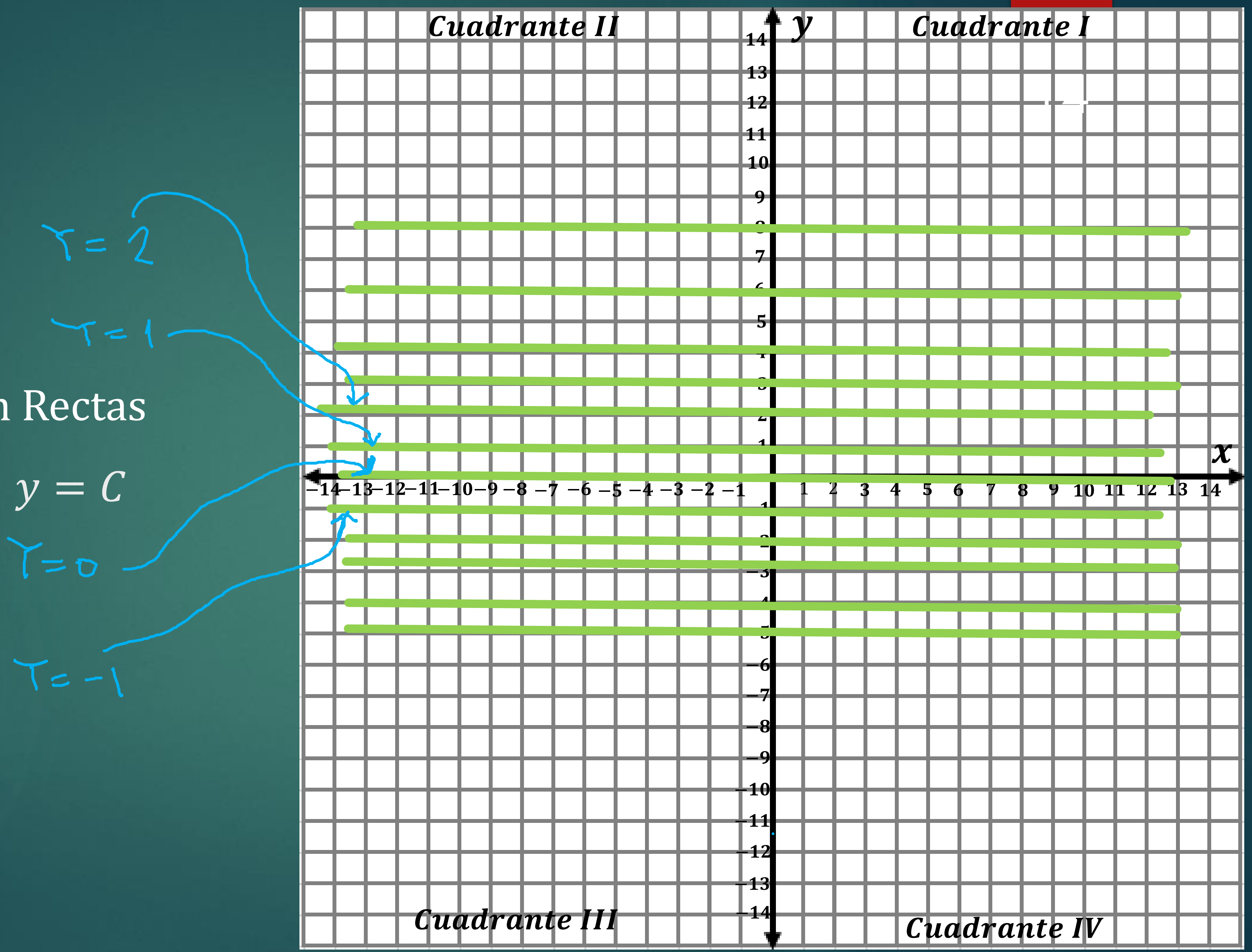
$$\boxed{y = c} \longrightarrow$$

La ecuación de la Isoclina es una **recta horizontal**

Graficar todas las isoclinas para formar el campo de direcciones

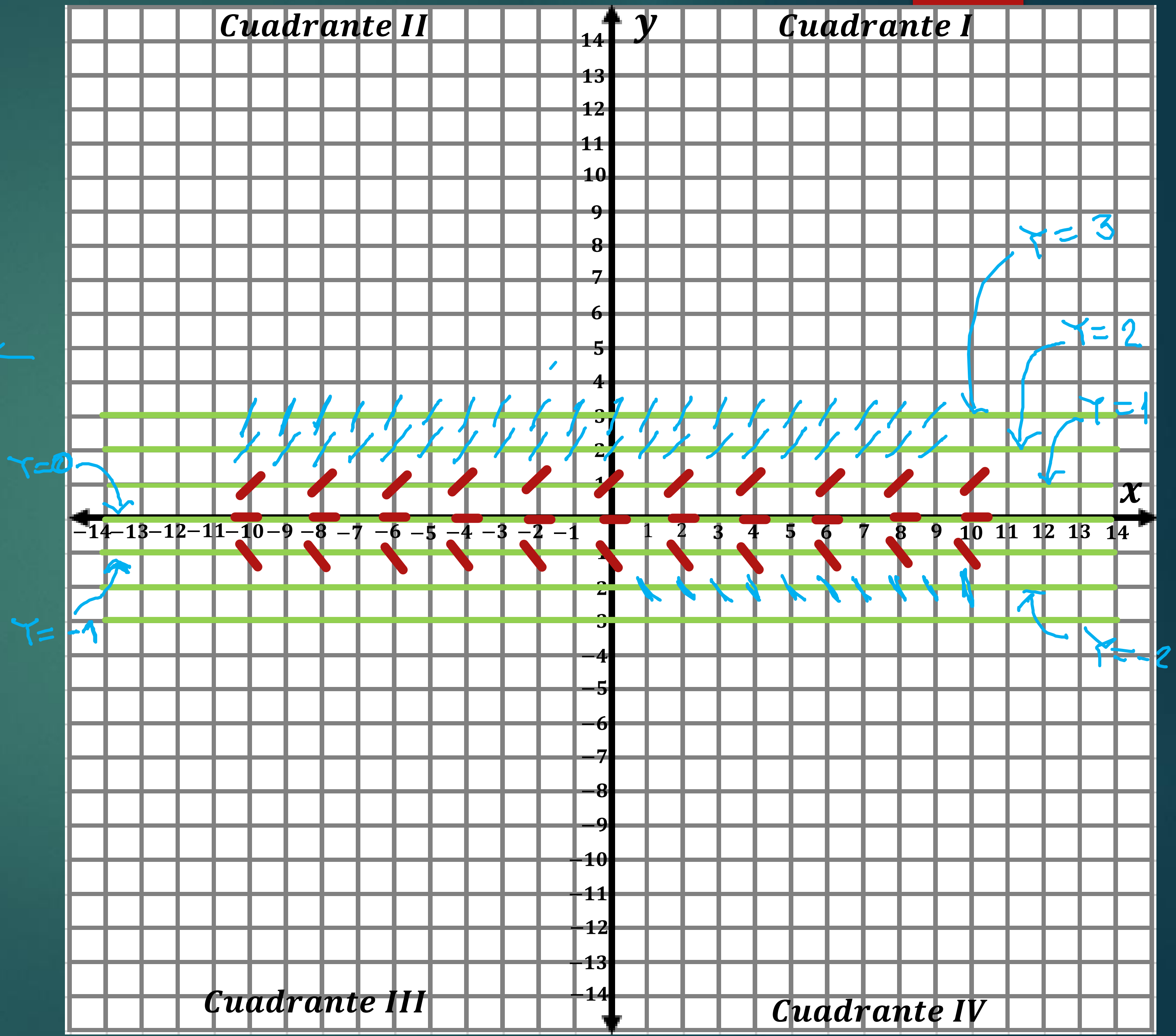
Las isoclinas son Rectas

Horizontales $y = C$



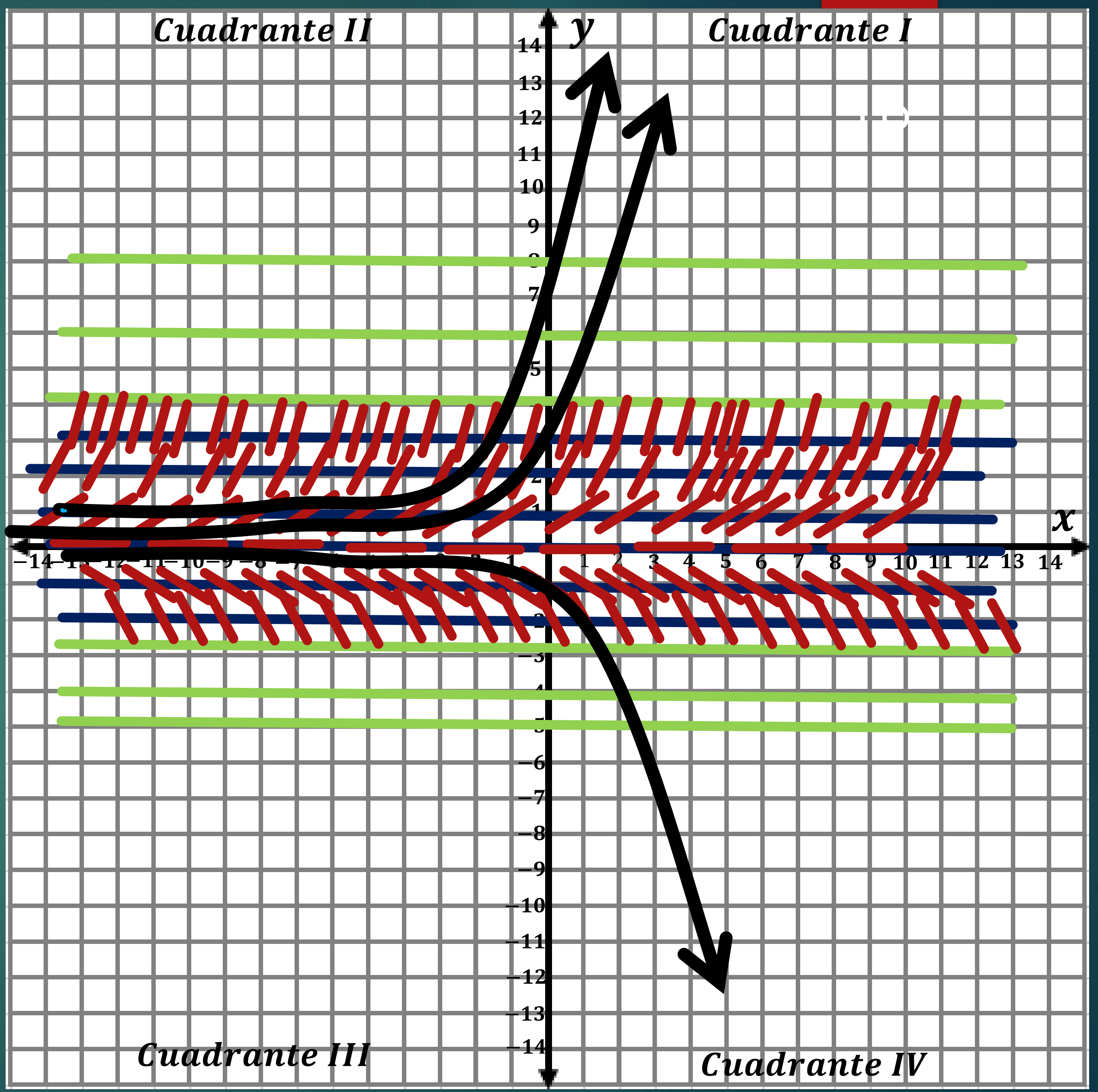
$m =$ *pendiente* $m = c$	*Inclinación de la pendiente*	*Ecuacion isoclina* $y = c$
-3		$y = -3$
-2		$y = -2$
-1		$y = -1$
0		$y = 0$
1		$y = 1$
2		$y = 2$
3		$y = 3$

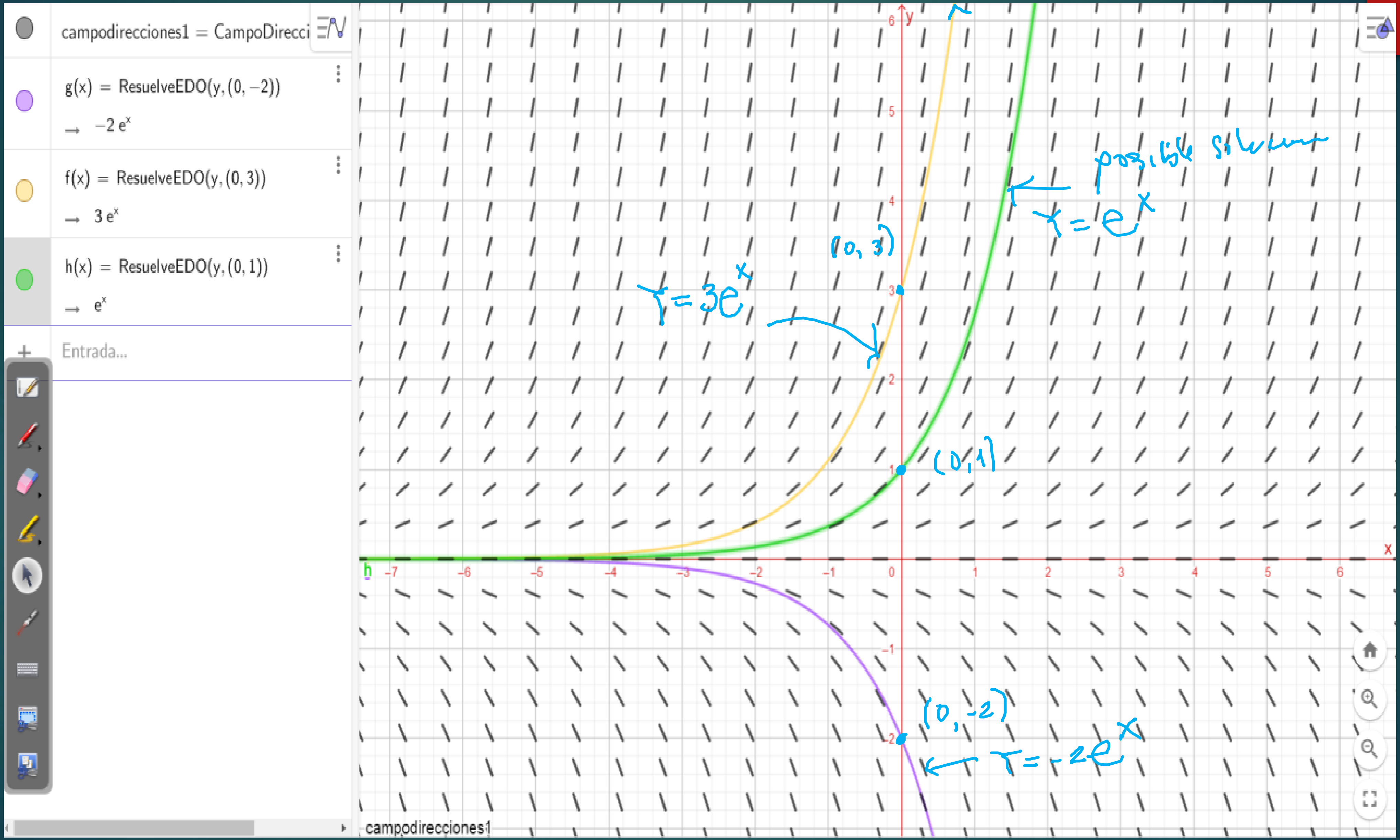
"Las pendientes de las tangentes a la curva solución mantiene el mismo valor constante a lo largo de la recta horizontal"



La solución general es una familia infinita de soluciones, cada una correspondiente a una condición inicial.

El segmento de recta es la tangente en cada punto a la solución que pase por ese punto





campodirecciones1 = CampoDirecci
g(x) = ResuelveEDO(y, (0, −2))
→ −2 e^x
f(x) = ResuelveEDO(y, (0, 3))
→ 3 e^x
h(x) = ResuelveEDO(y, (0, 1))
→ e^x
Entrada...
campodirecciones1
possible solution
y = e^x
(0, 3)
y = 3e^x
(0, 1)
(0, -2)
y = -2e^x

Ejemplo 2

Trace el campo de direcciones para la siguiente ecuación diferencial y los valores de " C " dados, construya la tabla identificando las isoclinas y su respectiva pendiente e indique una posible curva solución en el campo direccional

$y' = x + 1$

$$\frac{dy}{dx} = x + 1 \quad f(x,y)$$

$C = -2, -1, 0, 1, 2, 3$

$f(x,y) = C$

Identificar la función $f(x,y)$

$$f(x,y) = x + 1 \quad f(x,y)$$

Igualar la función $f(x,y)$ *a una constante que representa el valor de la pendiente a lo largo de toda la isoclina*

si $c = 0$ Isoclina $x = -1$

si $c = 1$ $x = 0$

$$x + 1 = c$$

$$\boxed{x = c - 1}$$

La ecuación de la Isoclina es una **recta vertical**

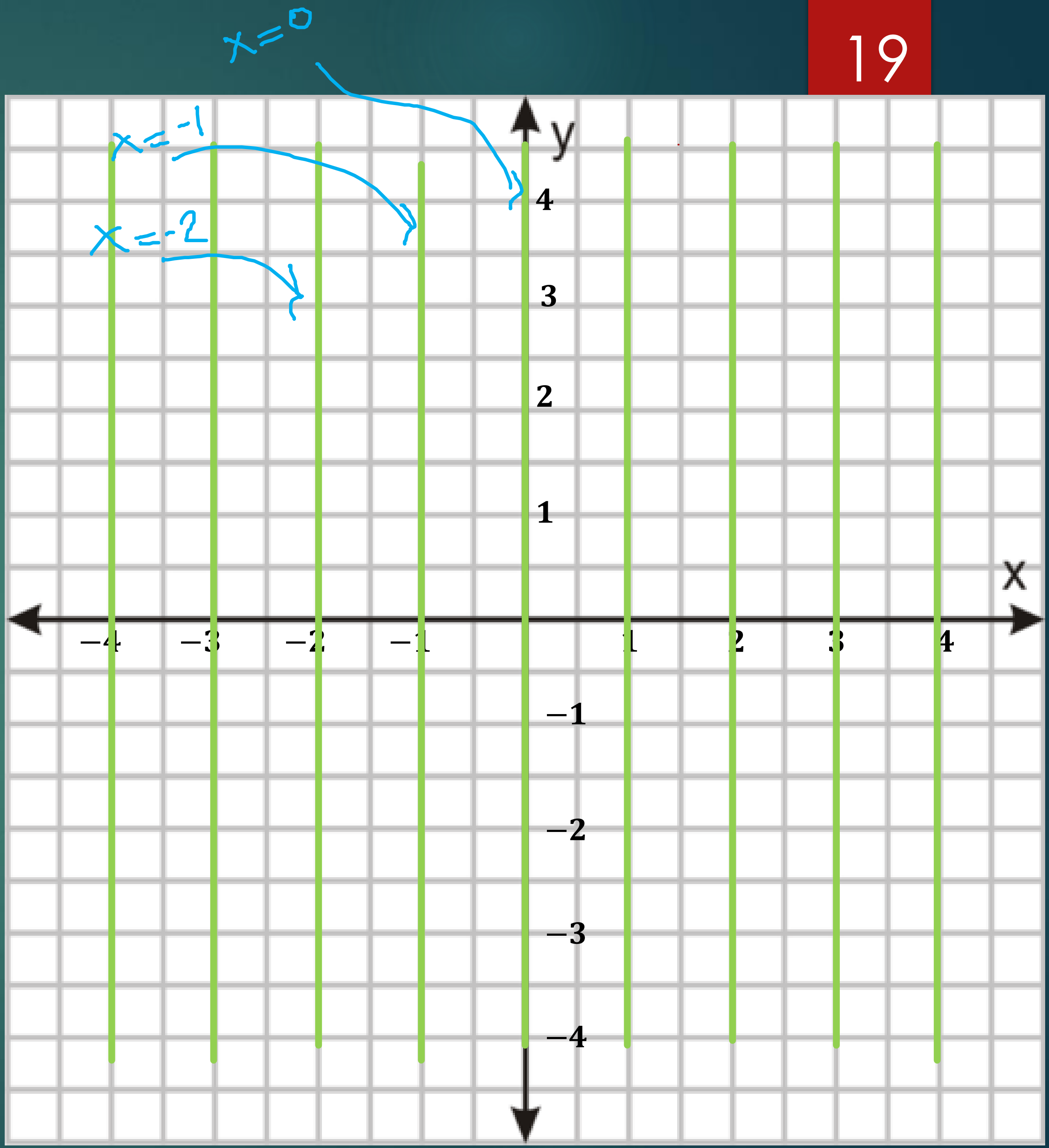
Graficar todas las isoclinas para formar el campo de direcciones

$C: -2, -1, 0, 1, 2, 3$

$C = -2 \rightarrow x = -3$
$C = -1 \rightarrow x = -2$
$C = 0 \rightarrow x = -1$
$C = 1 \rightarrow x = 0$

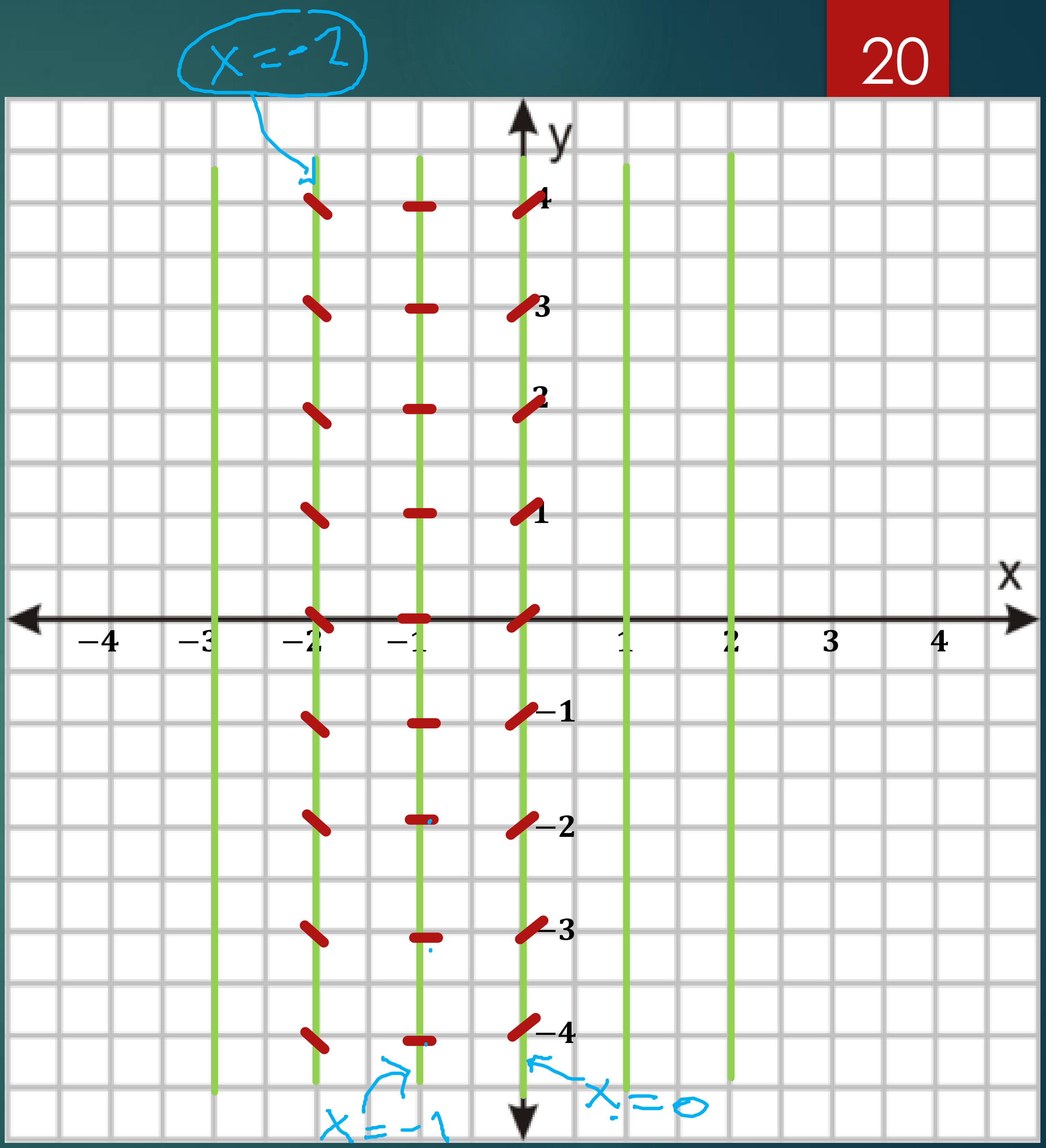
Las isoclinas son Rectas

Verticales $\quad x = c - 1$



m = c	Inclinación de la m	Isoclina $x = c - 1$
-2		$x = -3$
-1		$x = -2$
0		$x = -1$
1		$x = 0$
2		$x = 1$
3		$x = 2$

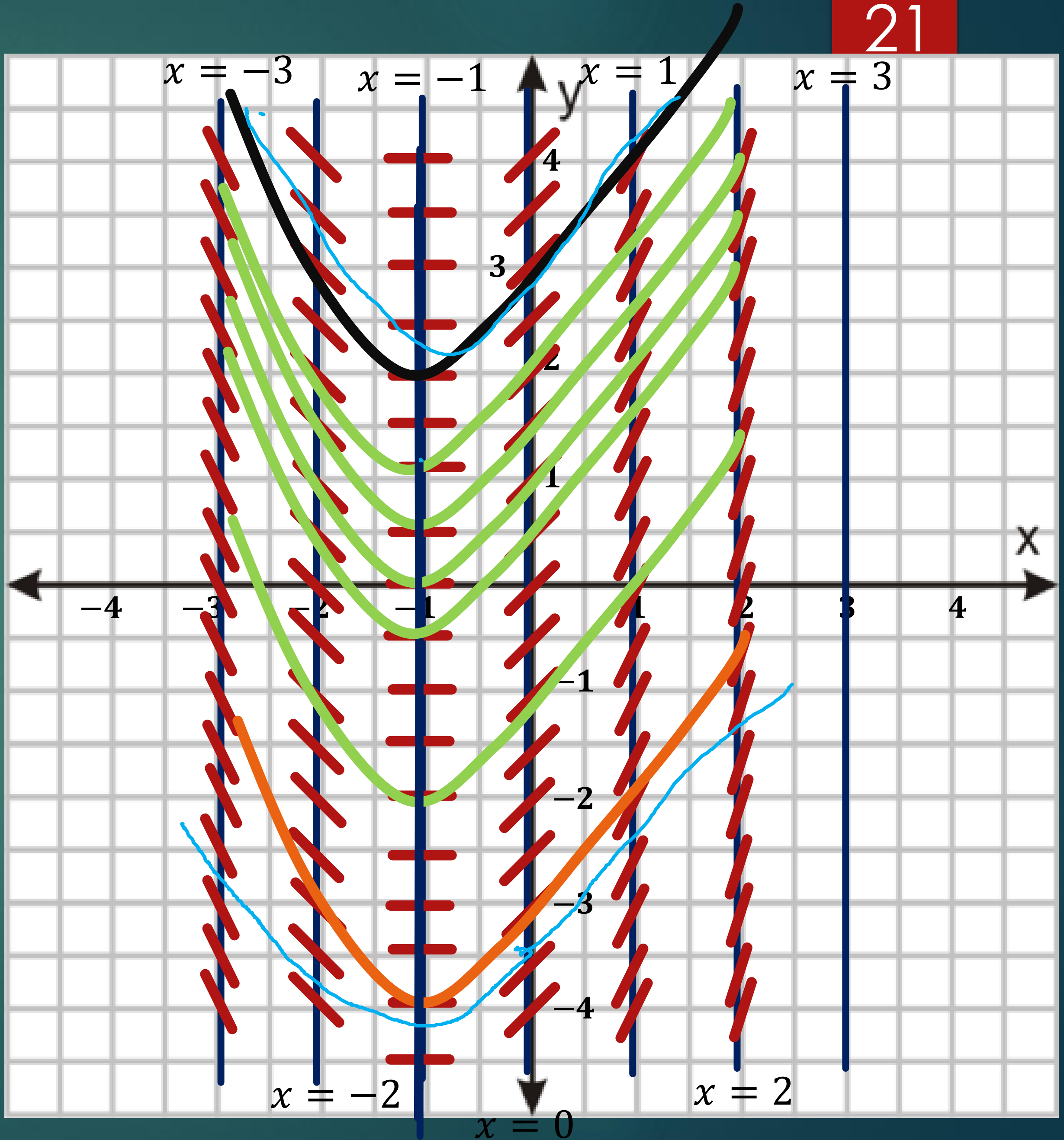
"Las pendientes de las tangentes a la curva solución mantiene el mismo valor constante a lo largo de la recta vertical"

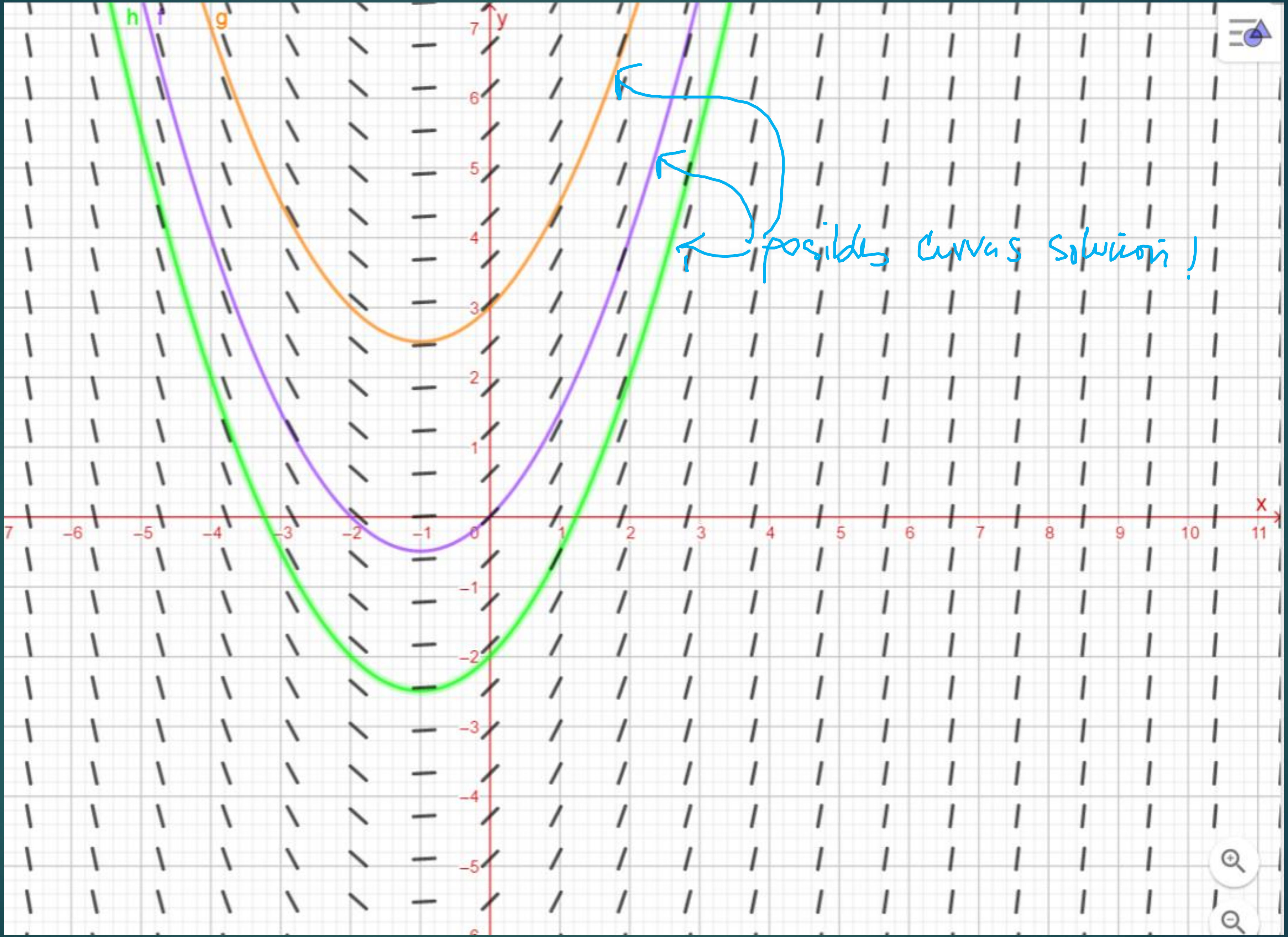


$\mathbf{m = c}$	*Inclinación de la m*	***Isoclina*** $\boldsymbol{x = c - 1}$
-2	╲	$x = -3$
-1	╲	$x = -2$
0	—	$x = -1$
1	╱	$x = 0$
2	╱	$x = 1$
3	╱	$x = 2$

La solución general es una familia infinita de soluciones, cada una correspondiente a una condición inicial.

El segmento de recta es la tangente en cada punto a la solución que pase por ese punto




h
f
g
y
x
possibles curvas solución!