MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 19/02/2021

MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Ejemplo

El isótopo radioactivo del Plomo Pb-209 decae a una rapidez proporcional a la cantidad presente en el tiempo t y tiene una vida media de 3.3 horas. ¿Cuánto tiempo tarda en decaer 90% del Plomo?

$$Z = cantidad\ presente\ del\ isótopo\ Pb - 209$$

$$t = tiempo\ (h)$$

Z	Z_0	$\frac{Z_0}{2}$	$100\% - 90\% = 10\%$ $\frac{1}{10}Z_0 = (0.1)Z_0$
$t(h)$	0	3.3	?

$$\boxed{\frac{dZ}{dt} = kZ} *$$

$$\frac{dZ}{dt} = kZ$$

$$\int \frac{dZ}{Z} = \int k dt$$

$$\ln|Z| = kt + c_1$$

e e

$$* \boxed{Z(t) = Ce^{kt}}$$

Aplicando Condicion Inicial

$Z(g)$	Z_0	$\frac{Z_0}{2}$	$100\% - 90\% = 10\%$ $\frac{1}{10}Z_0 = (0.1)Z_0$
$t(h)$	0	3.3	?

$Para\ \ Z(0) = Z_0$ $(0, Z_0)$

$$\boxed{Z(t) = Ce^{kt}}$$

$$Z_0 = C\cancel{e^0}^{\,1}$$

$$C = Z_0$$

$$\boxed{Z(t) = Z_0e^{kt}}$$

$Para\ Z(3.3) = \frac{Z_0}{2}$ $\left(3.3, \frac{Z_0}{2}\right)$

$$Z(t) = Z_0e^{kt}$$

$$\frac{\cancel{Z_0}}{2} = \cancel{Z_0}e^{k(3.3)} \ast$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln e^{k(3.3)}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \cancel{\ln e}^{\,1}\,k(3.3)$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 3.3k$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3.3} \approx -0.2100446002$$

$$\boxed{z(t) = Z_0e^{\left[\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3.3}\right]t}}$$

$$z(t) = Z_0 e^{\left[\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3.3}\right]t}$$

c

t

$Z(g)$	Z_0	$\frac{Z_0}{2}$	$100\% - 90\% = 10\%$ $\frac{1}{10}Z_0 = (0.1)Z_0$
$t(h)$	0	3.3	?

$Para\ Z = (0.1)Z_0 \quad t = ?$

$$(0.1)\cancel{Z_0} = \cancel{Z_0} e^{\left[\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3.3}\right]t}$$

$$\ln(0.1) = \ln e^{\left[\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3.3}\right]t}$$

$$\boldsymbol{ln}(0.1) = \boldsymbol{ln}\, e^{\left[\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3.3}\right]t}$$

$$t = \frac{\boldsymbol{ln}(0.1)}{\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3.3}\right)}$$

$$t \approx 10.96 horas$$

Decae el 90% aproximadamente en 10.96 ho ras

Ejemplo

La población de bacterias en un cultivo crece a una tasa proporcional al número de baterías presentes en el tiempo t. Después de $3\ horas$ se observo que están presentes $400\ bacterias$. Después de $10\ horas$ hay $2000\ bacterias$. ¿Cuál fue el numero inicial de bacterias?

$B =$ población de baterias

$t =$ tiempo en horas

$B(bacterias)$	B_0	400	2000
$t(\mathrm{h})$	0	3	10

$$\frac{dB}{dt} = kB$$

$$\frac{dB}{dt} = kB$$

$$\int \frac{dB}{B} = \int k\,dt$$

$$\ln|B| = kt + c_1$$

e e

$$\boxed{B(t) = Ce^{kt}}$$

$B(t) = Ce^{kt}$

$B(bacterias)$	B_0	400	2000
t(h)	0	3	10

Aplicando Condiciones Iniciales

Para $B(0) = B_0$

(0, B_0)

$B_0 = Ce^{0}$

$C = B_0$

$\boxed{B(t) = B_o e^{kt}}$

t, B

(3, 400)

Para $B(3) = 400$

$\boxed{400 = B_0 e^{k(3)}}$

Ecuacion 1

t, B

(10, 2000)

Para $B(10) = 2000$

$\boxed{2000 = B_0 e^{k(10)}}$

Ecuacion 2

$$\mathbf{400} = \boldsymbol{B_0 e^{3k}}$$ *Ecuacion* 1

De ecuacion 1

$$\boldsymbol{B_0} = \frac{\mathbf{400}}{\boldsymbol{e^{3k}}}$$ *Ecuacion* 3

Sustituyendo Ec 3 *en Ec* 2

$$\mathbf{2000} = \boldsymbol{B_0 e^{10k}}$$

$$2000 = \left(\frac{400}{e^{3k}}\right) e^{10k}$$

$$\frac{2000}{400} = \frac{e^{10k}}{e^{3k}}$$

$$\ln 5 = \ln e^{7k}$$

$$\ln(5) = \ln e^{7k}$$

$$\ln(5) = 7k$$

$$\mathrm{k} = \left[\frac{\ln(5)}{7}\right]$$

$$\boldsymbol{B_0} = \frac{\mathbf{400}}{\boldsymbol{e^{3k}}}$$

$$B_0 = \frac{400}{e^{3\left(\frac{ln5}{7}\right)}}$$

$$B_0 = 200.67$$

R//

Inicialmente habían aproximadamente 200 bacterias

Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton

Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton

La rapidez a la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio circundante (denominada temperatura ambiente)

$$\frac{dT}{dt} = rapidez\ a\ la\ cual\ cambia\ la\ temperatura\ del\ cuerpo$$

$$T = temperatura\ del\ cuerpo$$

$$T_m = temperatura\ del\ medio\ circundante$$

$$t = tiempo$$

$$k = constante\ de\ proporcionalidad$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_m\right) \quad *$$

$$\frac{dT}{T - T_m} = kdt$$

$$\int \frac{dT}{T - T_m} = \int kdt$$

$$\ln|T - T_m| = kt + c_1$$

$e \qquad e$

$$T - T_m = Ce^{kt}$$

$$\boxed{T = Ce^{kt} + T_m}$$

Ejemplo

Una barra metálica cuya temperatura inicial fue de 20°C se sumerge en un gran recipiente de agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo tarda la barra en alcanzar 90°C si se sabe que su temperatura aumenta 2°C en un segundo?¿Cuánto le toma a la barra llegar a 98°C?

$T_m = ?$

$T = temperatura\ del\ barra\ (°C)$

$T_m = temperatura\ del\ agua$ hirviendo

$t = tiempo\ (s)$

$\boldsymbol{T}(°C)$	**20**	**22**	**90**	**98**
$t(s)$	0	1	?	?

$$\boldsymbol{T_m = 100°C}$$