# MI3 Sección A
# Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

# CLASE 17/03/2021

# ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

# ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Resolver

7) $y^{(4)} - 9y''' = 0$

Ecuación Cárácteristica

$r^4 - 9r^3 = 0$

$r^3(r-9) = 0$

$r = 0 \quad multiplicidad\ 3$

$r - 9 = 0$

$r = 9$

$r = 0, 0, 0, 9$

$Y(x) = C_1 e^{0x} + C_2 X e^{0x} + C_3 X^2 e^{0x} + C_4 e^{9x}$

$Y(x) = C_1 + C_2 X + C_3 X^2 + C_4 e^{9x}$

ó bien

$Y(x) = \underbrace{C_1 e^{9x}}_{r=9} + \underbrace{C_2 + C_3 X + C_4 X^2}_{r=0,0,0}$

Por lo tanto la solución de la E D Homogénea es:

$$y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 x^2 e^{0x} + c_4 e^{9x}$$

$$\boldsymbol{y(x)} = \underbrace{\underbrace{\boldsymbol{c_1}}_{r=0} + \underbrace{\boldsymbol{c_2 x}}_{r=0} + \underbrace{\boldsymbol{c_3 x^2}}_{r=0}}_{r=\text{mult. } 3} + \underbrace{\boldsymbol{c_4 e^{9x}}}_{r=9}$$

# Ejemplo

Resolver

$y'' - 4y' + 3y = 0 \qquad y(0) = 7, \qquad y'(0) = 11$

Ecuación Caracteristica

$r^2 - 4r + 3 \ = 0$

$(r - 3)(r - 1) = 0$

$r - 3 = 0$

$r = 3$

$r - 1 = 0$

$r = 1$

*Raices reales diferentes*

$\boldsymbol{y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^x}$

*Condiciones iniciales*

$y(0) = 7$ (0, 7)

$\boldsymbol{y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^x}$

$\boxed{\boldsymbol{7 = c_1 + c_2}}$ *Ecuacion 1*

$y'(0) = 11$ (0, 11)

$y'(x) = 3c_1 e^{3x} + c_2 e^x$

$\boxed{\boldsymbol{11 = 3c_1 + c_2}}$ *Ecuacion 2*

*Resolviendo Ec1 y Ec2*

$\boldsymbol{c_1 = 2}$

$\boldsymbol{c_2 = 5}$

*Por lo tanto*

la solucion particular es

$\boldsymbol{y(x) = 2e^{3x} + 5e^x}$

# Ejemplo

Determine una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de la siguiente solución general dada:

Solución $y(x) = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-2x}$ ; $Y(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + C_3x^2e^{-2x}$

$r = -2$ mult. 3

$$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + c_3x^2e^{-2x}$$

$$r = -2 \quad multiplicidad\ 3$$

| raíz | factor |
| --- | --- |
| $c$ | $r - c$ |
| $-2$ mult. 3 | $(r+2)^3$ |
| $1$ | $r - 1$ |
| $0$ | $r$ |
| $-1$ | $r + 1$ |
| $-1$ mult. 2 | $(r+1)^2$ |

$$(r + 2)^3 = 0$$

$$r^3 + 6r^2 + 12r + 8 = 0$$

$y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$

Resuelva

$$y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$$

$r^3 + 6r^2 + 12r + 8 = 0$

# Ejemplo



Determine una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de la siguiente solución general dada:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 x e^{3x} + e^{x}(c_4 \cos 2x + c_5 \sin 2x)$$

$$r = 0, \qquad r = 3 \; multiplicidad \; 2, \qquad r = 1 \pm 2i$$

$r^2 - 2r + 5$

$$(r-0)(r-3)^2\big(r-(1+2i)\big)\big(r-(1-2i)\big) = 0$$

$$r(r-3)^2((r-1)^2 - (2i)^2) = 0$$

$$r(r^2 - 6r + 9)(r^2 - 2r + 1 + 4) = 0$$

$$(r^3 - 6r^2 + 9r)(r^2 - 2r + 5) = 0$$

$$r^5 - 6r^4 + 9r^3 - 2r^4 + 12r^3 - 18r^2 + 5r^3 - 30\,r^2 + 45r = 0$$

* $r^5 - 8r^4 + 26r^3 - 48r^2 + 45r = 0 \longrightarrow y^{(5)} - 8y^{(4)} + 26y''' - 48y'' + 45y' = 0$

Resuelva :

$$y^{(5)} - 8y^{(4)} + 26y''' - 48y'' + 45y' = 0$$

característica:

$r^5 - 8r^4 + 26r^3 - 48r^2 + 45r = 0$

# Ejemplo

Cual es la solución general de una ecuación diferencial cuya ecuación auxiliar tiene raíces

$\alpha \pm \beta i$

$2, \quad -1, \quad 0, \quad 0, \quad \boxed{3 \pm 5i,} \quad 2, \quad 0, \quad \boxed{3 \pm 5i}$

*Raices*

$0$ *multiplicidad* $3$

$2$ *multiplicidad* $2$

$-1$

$3 \pm 5i$ *multiplicidad* $2$

$$Y(x) = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 x^2 e^{0x} + C_4 e^{2x} + C_5 x e^{2x} + C_6 e^{-x} + e^{3x}(C_7 \cos 5x + C_8 \operatorname{sen} 5x) + x e^{3x}(C_9 \cos 5x + C_{10} \operatorname{sen} 5x)$$

$$y(x) = \underbrace{c_1 + c_2 x + c_3 x^2}_{r=0 \text{ mult. } 3} + \underbrace{c_4 e^{2x} + c_5 x e^{2x}}_{r=2 \text{ mult. } 2} + \underbrace{c_6 e^{-x}}_{r=-1} + \underbrace{e^{3x}(c_7 \cos 5x + c_8 \sin 5x) + x e^{3x}(c_9 \cos 5x + c_{10} \sin 5x)}_{r=3\pm 5i \text{ mult. } 2}$$

# Ejemplo



Cual es la solución general de una ecuación diferencial cuya ecuación auxiliar tiene raices

$-5, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad -7, \quad 9i, \quad 2, \quad 8, \quad 2-3i$

$-9i$ $\quad 2+3i$

*Raices*

$0$ *multiplicidad* $2$

$1$

$2$

$8$

$-5$

$-7$

$0 \pm 9i$

$2 \pm 3i$

$z \quad \bar{z}$

$2-3i \quad 2+3i$

$\alpha \quad \beta$

$\alpha \pm \beta i$

$Y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)$

$z \quad \bar{z}$

$\rightarrow 0+9i \quad 0-9i$

$\alpha \quad \beta$

$Y(x) = \cancel{e^{0x}}(C_1 \cos 9x + C_2 \operatorname{sen} 9x)$

$Y(x) = C_1 \cos 9x + C_2 \operatorname{sen} 9x$

$$y(x) = \underbrace{c_1 + c_2 x}_{r=0,0} + \underbrace{c_3 e^{x}}_{r=1} + \underbrace{c_4 e^{2x}}_{r=2} + \underbrace{c_5 e^{8x}}_{r=8} + \underbrace{c_6 e^{-5x}}_{r=-5} + \underbrace{c_7 e^{-7x}}_{r=-7} + \underbrace{c_8 \cos 9x + c_9 \sin 9x}_{r=\pm 9i} + \underbrace{e^{2x}(c_{10} \cos 3x + c_{11} \sin 3x)}_{r=2\pm 3i}$$