MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 20/04/2021

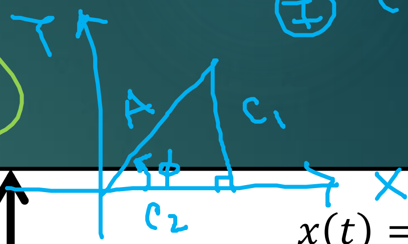
MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

MOVIMIENTO LIBRE NO AMORTIGUADO (Movimiento Armónico Simple)

¿En qué momento la masa pasa por la posición de equilibrio por primera vez?

$X(t) = A\,\text{Sen}(W_0 t + \phi)$

I $\quad c_1, c_2 > 0$



Ecuación de movimiento

$$x(t) \ = \ 3\cos 2t + 4\,\text{sen}\,2t$$

Datos:

$$A \ = \ 5pie$$
$$\phi = 0.6435 radianes$$
$$T = \pi \ s$$
$$\omega_o = 2 \ rad/s$$

$$\phi = angulo \ de \ fase$$
$$\phi \ = \tan^{-1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$$
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$\phi = 0.6435 \ radianes$$

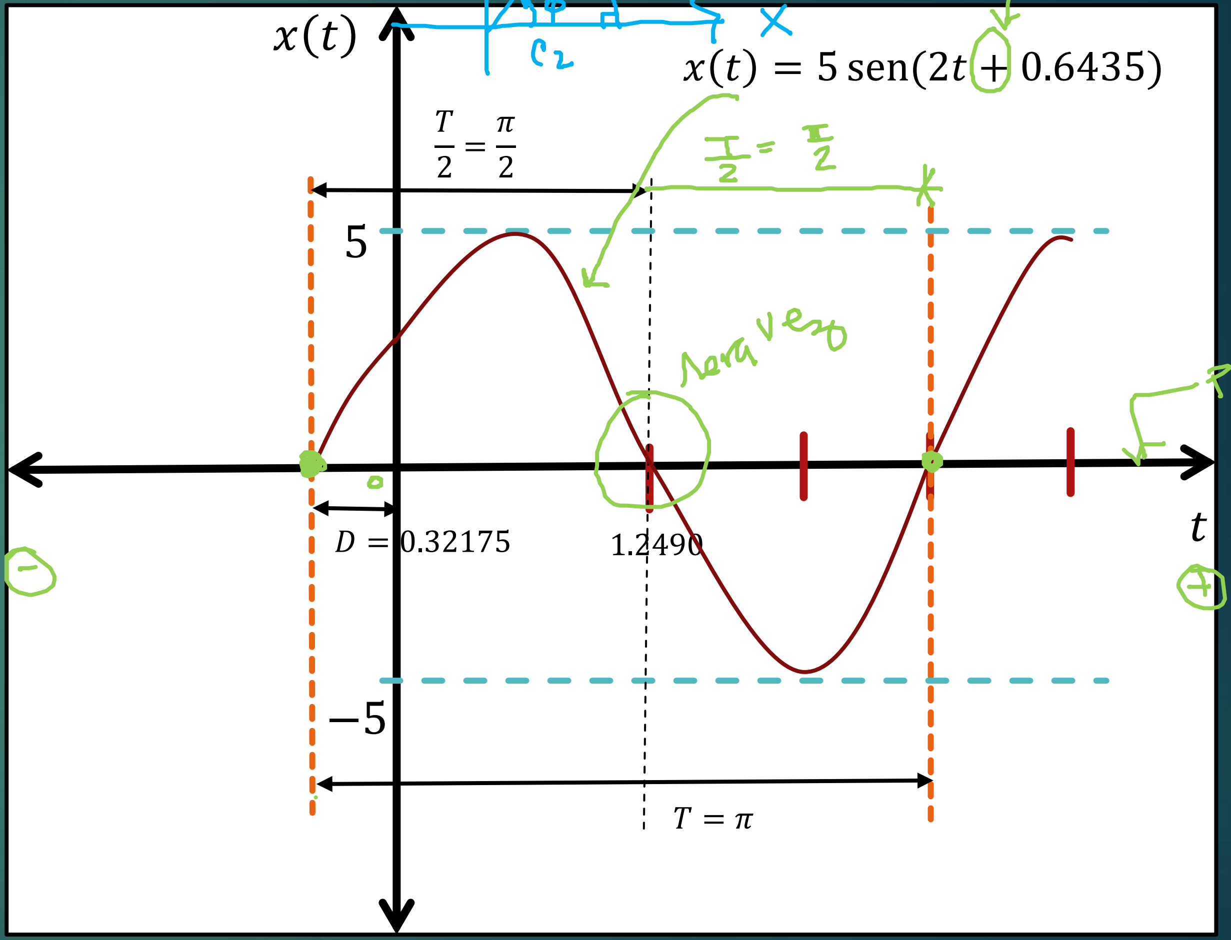
Ecuacion alternativa

$$x(t) = A\,\text{sen}(\omega_o t + \phi)$$

$$x(t) \ = 5\,\text{sen}(2t + 0.6435)$$

$$x(t) = 5\,\text{sen}\,2\left(t + \frac{0.6435}{2}\right)$$

$$D = \frac{\phi}{\omega_0} = \frac{0.6435}{2} = 0.32175$$



$$Pasa \ por \ primera \ vez = \frac{\pi}{2} - D$$

$$Pasa \ por \ primera \ vez \ = \frac{\pi}{2} - 0.32175 = 1.2490 \ seg$$

Una masa de 3 kg se sujeta al extremo de un resorte y lo estira 20 centímetros por medio de una fuerza de $15N$. Se pone en movimiento desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $10\ m/s$ mov. armonico simple

Determine:

a) La ecuación de movimiento

b) El periodo y la amplitud

c) En que momento esta por segunda vez en la posición de equiibrio

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Datos:

$m = 3\ kg$

$x = 20cm = 0.2m$

$F = 15N$

$$F = kx$$
$$k = \frac{F}{x}$$
$$k = \frac{15\ N}{0.2\ m}$$
$$k = 75\ N/m$$

Condiciones Iniciales

$X_0 = x(0) = 0$ P.E.

$X_1 = x'(0) = -10\ m/s$

Movimiento armonico simple

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$3x'' + 75x = 0 \quad \div 3$$

$$x'' + 25x = 0$$

w_0^2

$$r^2 + 25 = 0$$

$w_0^2 = 25$

$w_0 = 5\ rad/s$

$$r^2 = -25$$

$$r = \pm 5i$$

a) Ecuación de movimiento

$$\boxed{x(t) = c_1 \cos 5t + c_2 \operatorname{sen} 5t}$$

$x(0) = 0$ $(0, 0)$

Ecuación de movimiento

$x(t) = c_1 \cancelto{1}{\cos 5t} + c_2 \cancelto{0}{\operatorname{sen} 5t}$

$\boxed{0 = c_1}$

$x'(0) = -10$ $(0, -10)$

Ecuación de la velocidad

$x'(t) = -5c_1 \cancelto{0}{\operatorname{sen} 5t} + 5c_2 \cancelto{1}{\cos 5t}$

$-10 = 5c_2$

$-10 = 5c_2$

$c_2 = -\dfrac{10}{5}$

$c_2 = -2$

a)

Ecuacion de movimiento

$x(t) = -2 \operatorname{sen} 5t$ ✓

b) El periodo y la amplitud

Período

$\omega_0 = 5 \text{ rad/s}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{5}\, s}$$

Graficar

$x(t) = -2 \operatorname{sen} 5t$

$T = \frac{2}{5}\pi\, s$

$A = 2m$

Amplitud

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$$A = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2}$$

$$\boxed{A = 2\ m}$$

Ecuacion de movimiento

$x(t) = -2\,\mathrm{sen}\,5t$

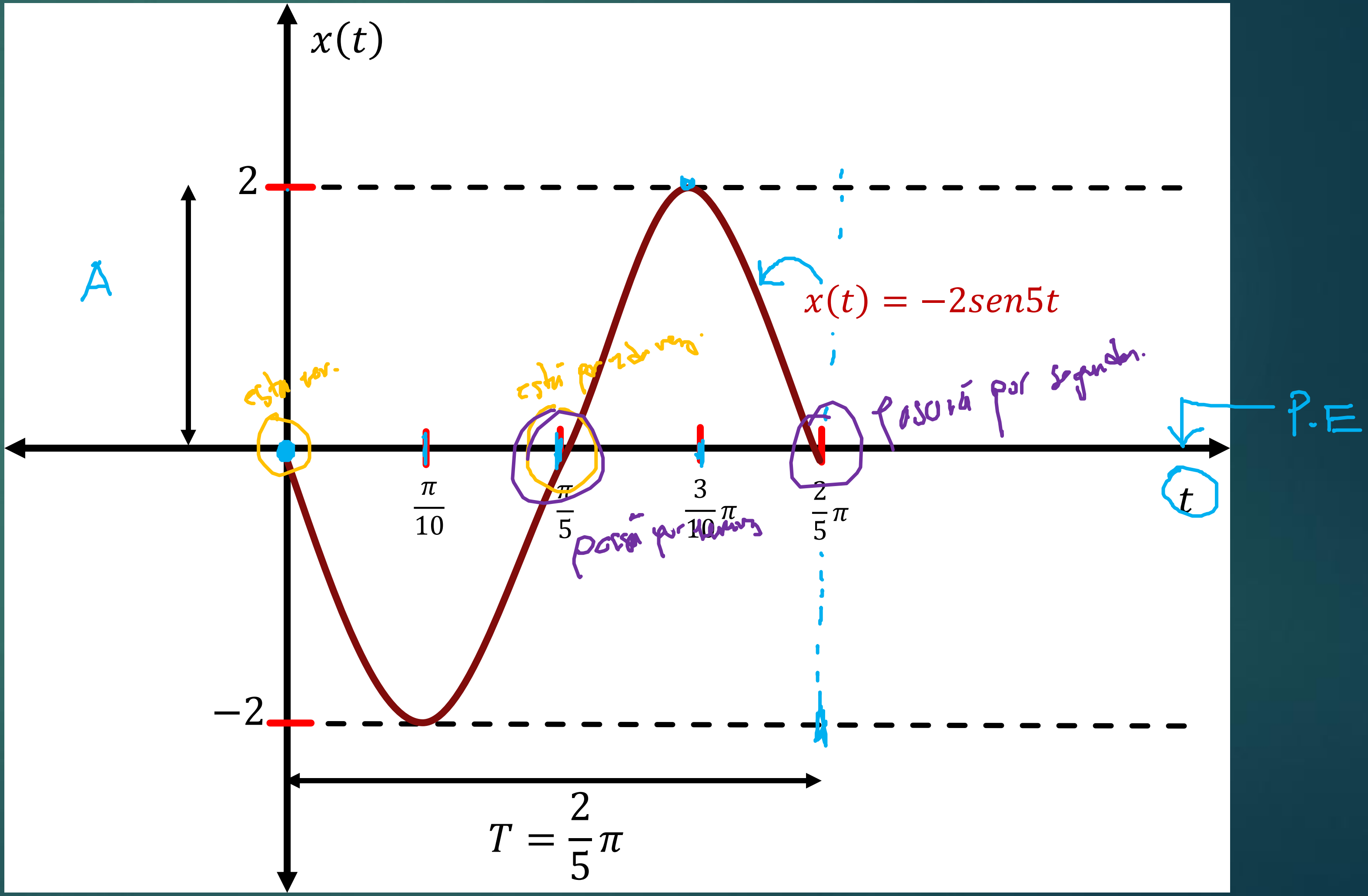
$A = 2\ m$

$T = \dfrac{2\pi}{5}\, s$

* En que momento esta por segunda vez en la posición de equiibrio

$$\frac{\frac{2}{5}\pi}{2} = \frac{\pi}{5}\,segundos$$

* En que momento pasa por la posicion de equilibrio por segunda vez. $\frac{2}{5}\pi$ seg.



MOVIMIENTO LIBRE AMORTIGUADO

MOVIMIENTO LIBRE AMORTIGUADO

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$\beta = constante\ de\ amortiguamiento\ positiva$

El signo negativo es una consecuencia del hecho de que la fuerza de amortiguamiento actúa en dirección opuesta al movimiento

"En el estudio de la mecánica las fuerzas de amortiguamiento que actúan sobre un cuerpo se consideran proporcionales a una potencia de la velocidad instantánea."

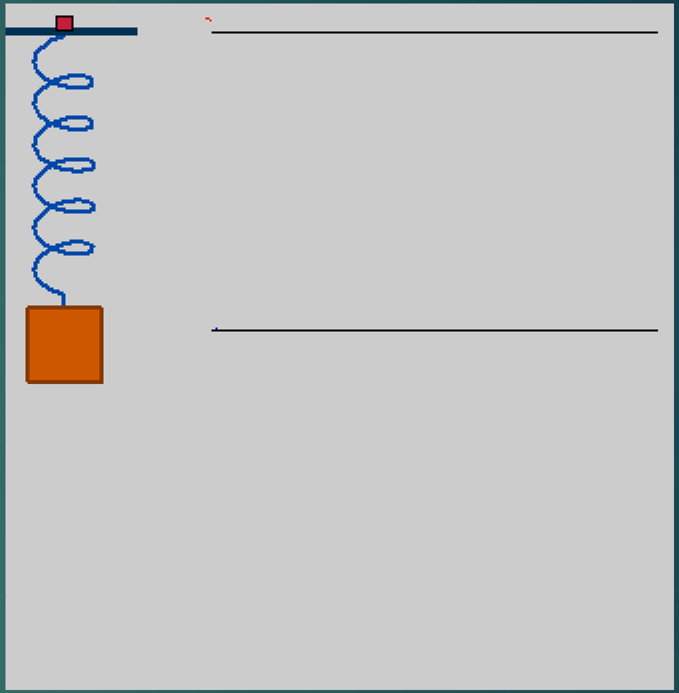
Se supone que esta fuerza esta dada por un múltiplo constante de $\frac{dx}{dt}$. Cuando ninguna otra fuerza actúa sobre el sistema, se tiene de la segunda ley de Newton

$$\boxed{\boldsymbol{m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0}}$$

caso I

caso II

caso III



Donde:

$m = Masa$

$\beta = Constante\ de\ amortiguamiento$

$k = Constante\ del\ resorte$

MOVIMIENTO LIBRE AMORTIGUADO

Caso I: Movimiento sobre amortiguado

raices reales diferentes

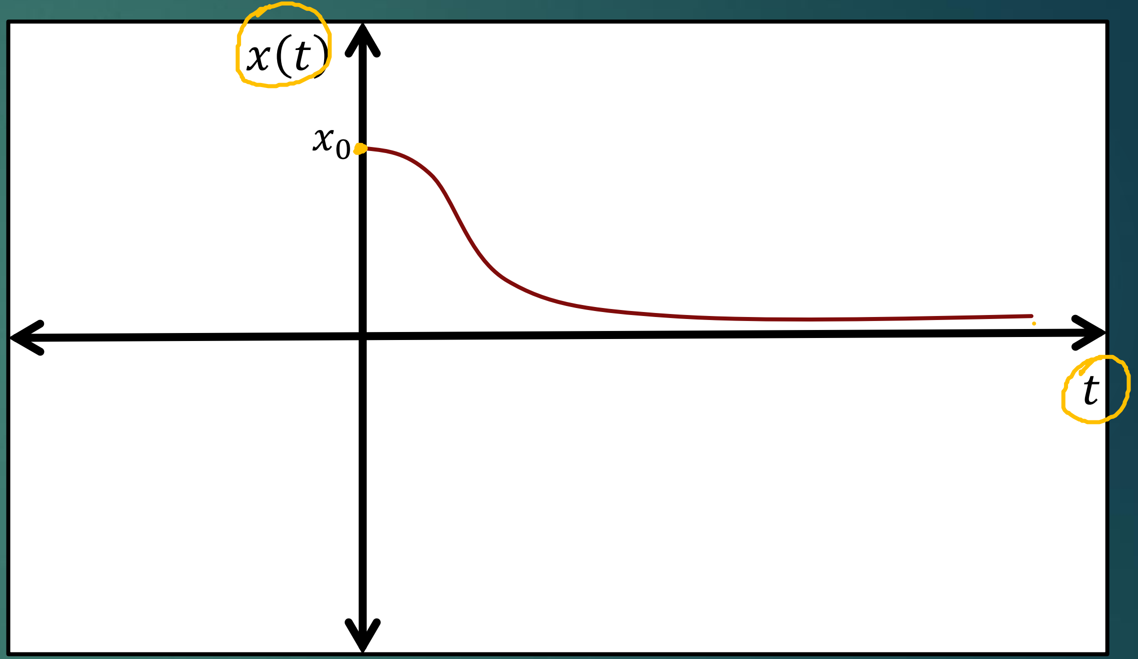
Ecuación Diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Raices Reales Distintas

$$r_1 \; y \; r_2$$

$$\boxed{x(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}}$$



$x(t) \rightarrow 0 \; cuando \; t \rightarrow \infty$

El cuerpo permanece en su posición de equilibrio sin oscilación alguna

MOVIMIENTO LIBRE AMORTIGUADO

Caso II: Movimiento críticamente amortiguado

Raices repetidas

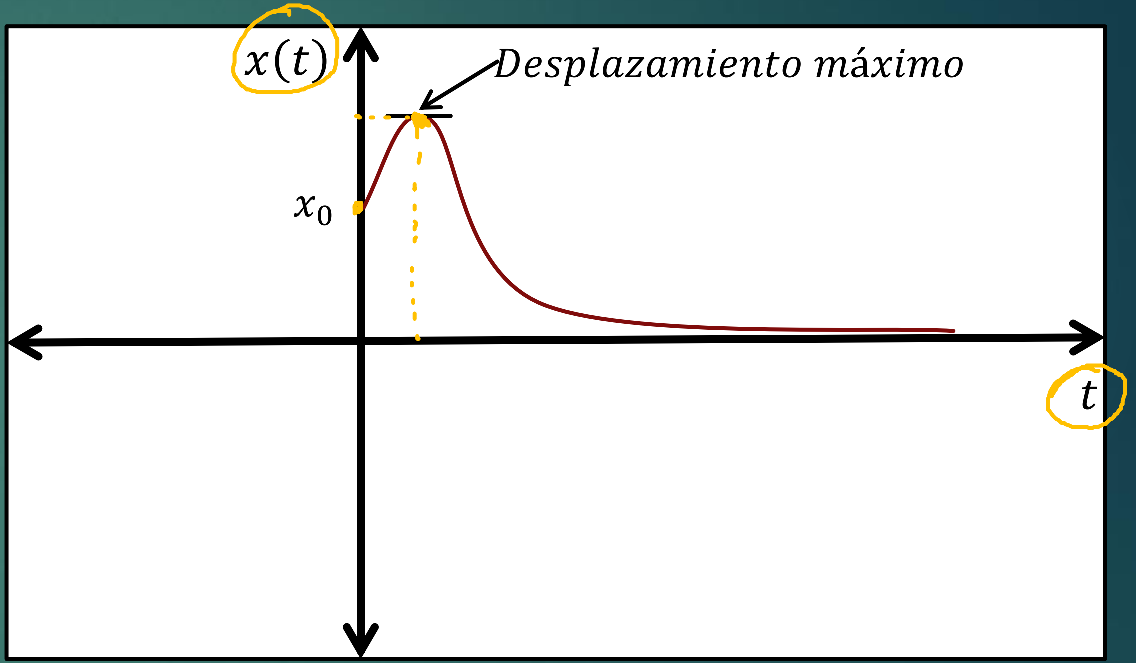
Ecuación Diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=0$$

Raices Reales Repetidas

$$r_1 = r_2$$

$$\boxed{x(t) = c_1e^{r_1t}+c_2te^{r_1t}}$$



$x(t)\rightarrow 0$ *cuando* $t\rightarrow\infty$

La masa puede pasar por la posición de equilibrio una vez

Movimiento Libre Amortiguado

Caso III: Movimiento sub amortiguado } raíces imaginarias

Ecuación Diferencial

$$\rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Raices Complejas

parte real

$$r = a \pm bi$$

parte imaginaria

$b = pseudoperiodo$

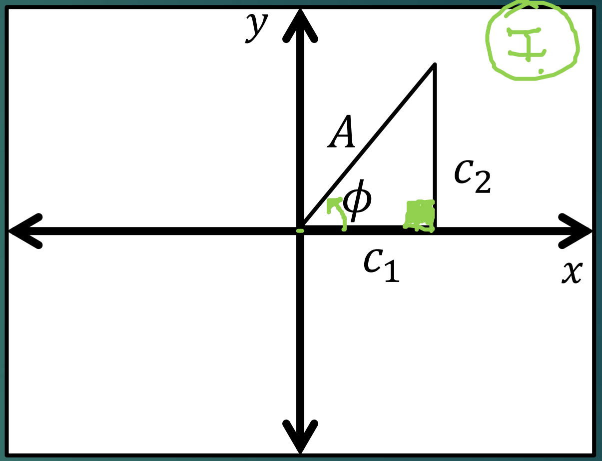
$$\boxed{x(t) = e^{at}(c_1 \cos bt + c_2 \sin bt)}$$

Ecuación alternativa

$$\boxed{x(t) \ = Ae^{at}\cos(bt - \phi)}$$

$$x(t) = Ae^{at}\cos b\left(t - \frac{\phi}{b}\right)$$

$c_1, c_2 > 0$



$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$$\phi \ = \tan^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right), radianes$$

Caso III: Movimiento sub amortiguado

$r = a \pm bi$

parte real

parte imaginaria

Ecuación alternativa

$$x(t) = Ae^{at}\cos(bt - \phi)$$

$x(t) = Ae^{at}\cos b\left(t - \frac{\phi}{b}\right)$

$x(t) \to 0$

$t \to \infty$