MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernandez

CLASE 27/01/2021

MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Ecuaciones con variables separables

Prueba de conocimiento

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$(x+\sqrt{x})\frac{dy}{dx}=(y+\sqrt{y})$$

Solución

$$(x+\sqrt{x})\frac{dy}{dx}=(y+\sqrt{y})$$

$$\frac{dy}{(y+\sqrt{y})}=\frac{dx}{(x+\sqrt{x})}$$

$$\int\frac{dy}{\left(y+y^{1/2}\right)}=\int\frac{dx}{\left(x+x^{1/2}\right)}$$

$$\int\frac{dy}{y^{1/2}\left(y^{1/2}+1\right)}=\int\frac{dx}{x^{1/2}\left(x^{1/2}+1\right)}$$

$$\int \frac{dy}{y^{1/2}\left(y^{1/2}+1\right)} = \int \frac{dx}{x^{1/2}\left(x^{1/2}+1\right)}$$

$$u = y^{1/2}+1$$

$$du = \frac{1}{2} y^{-1/2} dy$$

$$2du = \frac{dy}{y^{1/2}}$$

$$w = x^{1/2}+1$$

$$dw = \frac{1}{2} x^{-1/2} dx$$

$$2dw = \frac{dx}{x^{1/2}}$$

$$2\int \frac{du}{u} = 2\int \frac{dw}{w}$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dw}{w}$$

$$\longrightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{dw}{w}$$

$$ln|u| = ln|w| + c$$

$$\boxed{ln|\sqrt{y} + 1| = ln\left|\sqrt{x} + 1\right| + c}$$

Solución implícita

Solución de forma general

Familia uniparametrica de soluciones

$$\underbrace{\ln|\sqrt{y}+1| - \ln|\sqrt{x}+1|}_{\ln\left|\frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{x}+1}\right| = C} = C$$

$$e^{\ln\left|\frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{x}+1}\right|} = e^{C}$$

sol explícita !!!

Ecuaciones Lineales

ECUACIONES LINEALES

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Una ED lineal de primer orden y primer grado tiene la forma

$a_1(x) \div$

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$a_1(x)$ $a_1(x)$ $a_1(x)$

x', z', v' etc.

Para llevarla a la forma estandar se debe dividir toda la ecuacion por el factor $a_1(x)$ para obtener como coeficiente de la primera derivada a la unidad. **El coeficiente de y' debe ser 1.**

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \underbrace{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)} \\ y' + P(x)y = Q(x) \end{array}}$$

lineal en "Y"

$Y' + P(x)Y = Q(x)$

Forma estandar de una ED lineal de primer orden. ***Lineal en "y"***

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones en términos de la variable independiente "x" y/o constantes.

Este método consiste en encontrar el factor de integración que al multiplicarlo con la ED en forma estándar, genera la derivada de un producto

PROCEDIMIENTO

1. *Lleve la Ecuacion Diferencial a la forma estandar*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$\underbrace{Y' + P(x)Y = Q(x)}_{\text{lineal en "Y"}}$$

El coeficiente que acompaña a y´ debe ser 1.

2. *Identifique $P(x)$ y calcule el Factor de Integración*

$$\longrightarrow F.I. = V(x) = e^{\int P(x)dx}$$

3. *Multiplique la Ecuación en forma estandar por el F.I*

4. *Integre ambos lados de la ecuacion modificada y resuelva para la variable y*

$Si\ fuera$

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$$

$x' + P(y)x = Q(y)$

$\underbrace{x' + P(y)x = Q(y)}_{\text{lineal en "}x\text{"}}$

$$x' + P(y)x = Q(y) \longrightarrow$$ *Forma estandar de una ED lineal de primer orden.* ***Lineal en "x"***

$Por\ lo\ tanto$

$$F.I. = V(y) = e^{\int P(y)dy}$$

RECORDANDO CALCULO

- *La derivada de un producto es*

$$\frac{d(f(x) * g(x))}{dx} = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

El método de ecuaciones lineales se basa en encontrar el factor faltante en la ED para obtener el resultado de la derivada de un producto

Ejemplo 1

Resuelva $\quad y' - 2y = 3e^{2x}$

$P(x) \quad Q(x)$

$$y' - 2y = 3e^{2x} \longrightarrow y' + P(x)y = Q(x)$$

Lineal en "y"

$Reconocer\ P(x)$

$P(x) = -2$

$$F.I. = V(x) = e^{\int P(x)dx}$$

$$F.I. = e^{\int -2dx} = e^{-2\int dx} = e^{-2x}$$

$$\boxed{Y' - 2Y = 3e^{2x}}$$

Lineal en "Y"

$$F.I. = e^{-2x}$$

$$e^{-2x}y' - 2e^{-2x}y = 3e^{-2x}e^{2x}$$

$$\underbrace{e^{-2x}y' - 2e^{-2x}y} = 3$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}y\right) = 3$$

$$\int d\left(e^{-2x}y\right) = \int 3dx$$

$$\int d\left(e^{-2x}y\right) = 3\int dx$$

$$\int d(e^{-2x}y) = 3\int dx$$

$$e^{-2x}y = 3x + c$$

$$y = \frac{3x + c}{e^{-2x}}$$

$$y = 3xe^{2x} + ce^{2x}$$

Solución explícita

Solución de forma general

Familia uniparametrica de soluciones

En resumen

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Lineal en "y" $\longrightarrow$ $F.I. = V(x) = e^{\int P(x)dx}$

$$(\boldsymbol{F.I.})\boldsymbol{y} = \int (\boldsymbol{F.I.})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$$

Regresando al ejemplo 1

$$\boxed{y' - 2y = 3e^{2x}} \quad Q(x)$$

$$P(x) = -2$$

$$F.I. = e^{-2x}$$

$$\boldsymbol{e^{-2x}y} = \int \boldsymbol{e^{-2x}(3e^{2x})\,dx}$$

$$e^{-2x}y = 3\int dx$$

$$e^{-2x}y = 3x + c$$

Sol explícita

$$\boxed{\boldsymbol{y = 3xe^{2x} + ce^{2x}}}$$

$Si\ es\ lineal\ en\ "x"$

$$\underbrace{x' + P(y)x = Q(y)}$$

$$F.I. = V(y) = e^{\int P(y)dy}$$

$Lineal\ en\ "x"$

$$(F.I.)x = \int (F.I.)Q(y)dy$$

Ejemplo 2

Resuelva

$$y' - 2y = 3e^{2x} \qquad y(0) = 0$$

x, y

$(0, 0)$

$$\boldsymbol{y = 3xe^{2x} + ce^{2x}}$$

$$0 = 3(0)e^{2(0)} + ce^{(0)}$$

$$c = 0$$

$$\boxed{y = 3xe^{2x}}$$

Solución particular

Ejemplo 3

Resuelva $\quad x^2y' + 3xy = \frac{1}{x}cosx$

$$x^2y' + 3xy = \frac{1}{x}cosx \;\Big|\; \div x^2$$

$$1 \qquad \frac{\cancel{x^2}y'}{\cancel{x^2}} + \frac{3\cancel{x}y}{x^{\cancel{2}}} = \frac{cosx}{x(x^2)}$$

$$y' + \underbrace{\frac{3y}{x}}_{P(x)} = \underbrace{\frac{cosx}{x^3}}_{Q(x)}$$

$Y' + P(x)Y = Q(x)$

lineal en "Y"