MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernandez

CLASE 22/01/2021

INTERVALO DE DEFINICIÓN

Ejemplo

$$\boxed{y' = 2xy}$$

$$y = e^{x^2}$$

$$y' = 2xe^{x^2}$$

$Dominio$

$(-\infty, \infty)$

$Sustituyendo\ la\ derivada\ y\ la\ función$

$$2xe^{x^2} = 2x\left(e^{x^2}\right)$$

$$2xe^{x^2} = 2xe^{x^2}$$

$\boldsymbol{Por\ lo\ tanto}$: $y = e^{x^2} \rightarrow \boldsymbol{se\ verifica\ que\ la\ funcion\ dada\ es\ solución\ de\ la\ ED}$

VERIFICACIÓN DE UNA SOLUCIÓN

Verifique que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial en el intervalo de (- ∞, ∞)

Ejemplo

$\boxed{y' = 9x}$ $\qquad$ $y = x^3 + 7$

$$y' = 3x^2$$

$$\textit{Sustituyendo}$$

$$y' = 9x$$

$$3x^2 \neq 9x$$ X

$$\textit{Por lo tanto}: \quad y = x^3 + 7 \rightarrow \textit{no es solución de la ED}$$

VERIFICACIÓN DE UNA SOLUCIÓN

Verifique que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada

Ejemplo

$$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{1}{16}x^4$$

$$(y)^{1/2} = \left(\frac{1}{16}x^4\right)^{1/2}$$

$$y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{4}$$

$$y^{1/2} = \sqrt{\frac{x^4}{16}} = \frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{16}} = \frac{x^2}{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{16} = \frac{x^3}{4}$$

Sustituyendo

$$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{x^3}{4} = x\left(\frac{x^2}{4}\right)$$

$$\frac{x^3}{4} = \frac{x^3}{4} \checkmark$$

Por lo tanto: $y = \frac{1}{16}x^4 \rightarrow$ *se verifica que la funcion dada es solución de la ED*

VERIFICACIÓN DE UNA SOLUCIÓN

Verifique que la función indicada es un solución de la ecuación diferencial y determine el intervalo de definición

Ejemplo

$$x^2y'' + xy' - y = \ln x \qquad Intervalo\ (0,\infty)$$

$y_2 = \frac{1}{x} - \ln x$

$$y_1 = x - \ln x \qquad y_2 = \frac{1}{x} - \ln x$$

Para y_1

$$y_1' = 1 - \frac{1}{x}$$

$$y_1'' = \frac{1}{x^2}$$

Sustituyendo en E.D.

$$x^2\left(\frac{1}{x^2}\right) + x\left(1 - \frac{1}{x}\right) - (x - \ln x) = \ln x$$

$$\cancel{1} + \cancel{x} - \cancel{1} - \cancel{x} + \ln x = \ln x$$

$$\ln x = \ln x \ \checkmark$$

$$y_1 = x - \ln x \rightarrow es\ solución$$

Para y_2

$$y_2' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$y_2'' = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}$$

Sustituyendo en E.D.

$$x^2\left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) = \ln x$$

$$\cancel{\frac{2}{x}} + \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{x}} - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{x}} + \ln x = \ln x$$

$$\ln x = \ln x \ \checkmark$$

$$y_2 = \frac{1}{x} - \ln x \ \rightarrow es\ solución$$

CURVA SOLUCIÓN

La gráfica de una solución ∅(x) de una una EDO se llama curva solución. Puesto que ∅ es una función derivable y continua en su intervalo de definición I

1. $y' = y$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\ln y = x + c_1$$

$$y = ce^x$$

Solución general
Familia de soluciones

Condición inicial

$$y(0) = 7$$

$$7 = ce^0$$

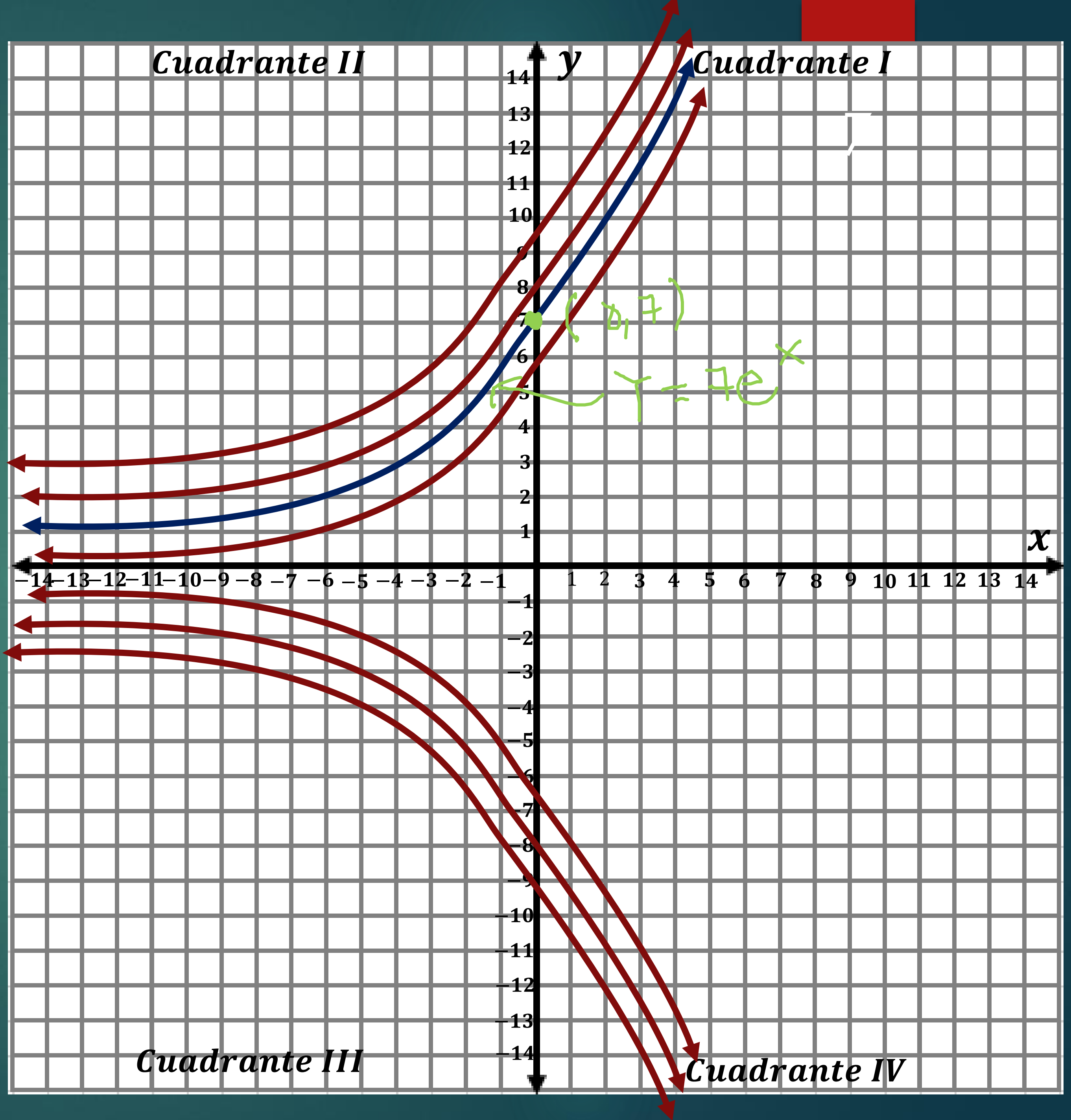
$$c = 7$$

$$\boxed{y = 7e^x}$$

Solución particular

(0,7)
(x,y)

Familia uniparamétrica de $y' = y$ en $(-\infty, +\infty)$



SOLUCIONES EXPLÍCITAS E IMPLÍCITAS

SOLUCIÓN EXPLÍCITA

- Es la solución en la que la variable dependiente se expresa tan solo en términos de la variable independiente y constantes. $y = \emptyset(x)$
- Una solución explícita de una ED que es idéntica a cero en un intervalo I, se llama solución trivial.

$\frac{dy}{dx} = y'$

- La variable dependiente "y" esta expresada en términos de la variable independiente "x"

Ejemplo

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad ; \quad y(0) = 1$$

$$\downarrow$$

$$y = e^{x^2} \rightarrow \text{Sol explicita}$$

SOLUCIÓN IMPLÍCITA

- Se dice que una relación $G(x,y)=0$ es una solución implícita de una EDO en un intervalo I, siempre y cuando existe al menos una función ∅ que satisfaga tanto la relación como la ecuación diferencial en I:
- En las soluciones implícitas: "y" no queda expresada directamente en términos de "x".
- $G(x,y)=0$ define implícitamente a la función ∅.

La relación

$x^2+y^2=4$

$$x^2+y^2-4=0$$

es una solución implícita de

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \quad en\ -2<x<2$$

Derivando implícitamente la relación obtenemos

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)-\cancel{\frac{d}{dx}(4)}=0$$

$$2x\cancel{\frac{dx}{dx}}+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}=-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}y}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

FAMILIA DE SOLUCIONES

- Al resolver una ED de primer orden $F(x, y, y') = 0$ se obtiene una solución con una constante arbitraria o parámetro c que representa un conjunto $G(x, y, c) = 0$ y se obtiene una familia uniparámetrica de soluciones.

- Al resolver una ED de orden n $F\left(x, y, y', \ldots y^{(n)}\right) = 0$ se obtiene una familia n_paramétrica de soluciones que representa un conjunto $G\left(x, y, c_1, c_2, \ldots c_n\right) = 0$

Esto quiere decir que una sola ED puede tener una cantidad infinita de soluciones que corresponden a las elecciones ilimitadas del parámetro o parámetros.

Ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

$$dy = dx$$

$$\int dy = \int dx$$

$$y = x + c$$

$$y = x + c$$

$Intervalo\ de\ definición$

$$(-\infty, \infty)$$

$Aplicando\ C.I.$

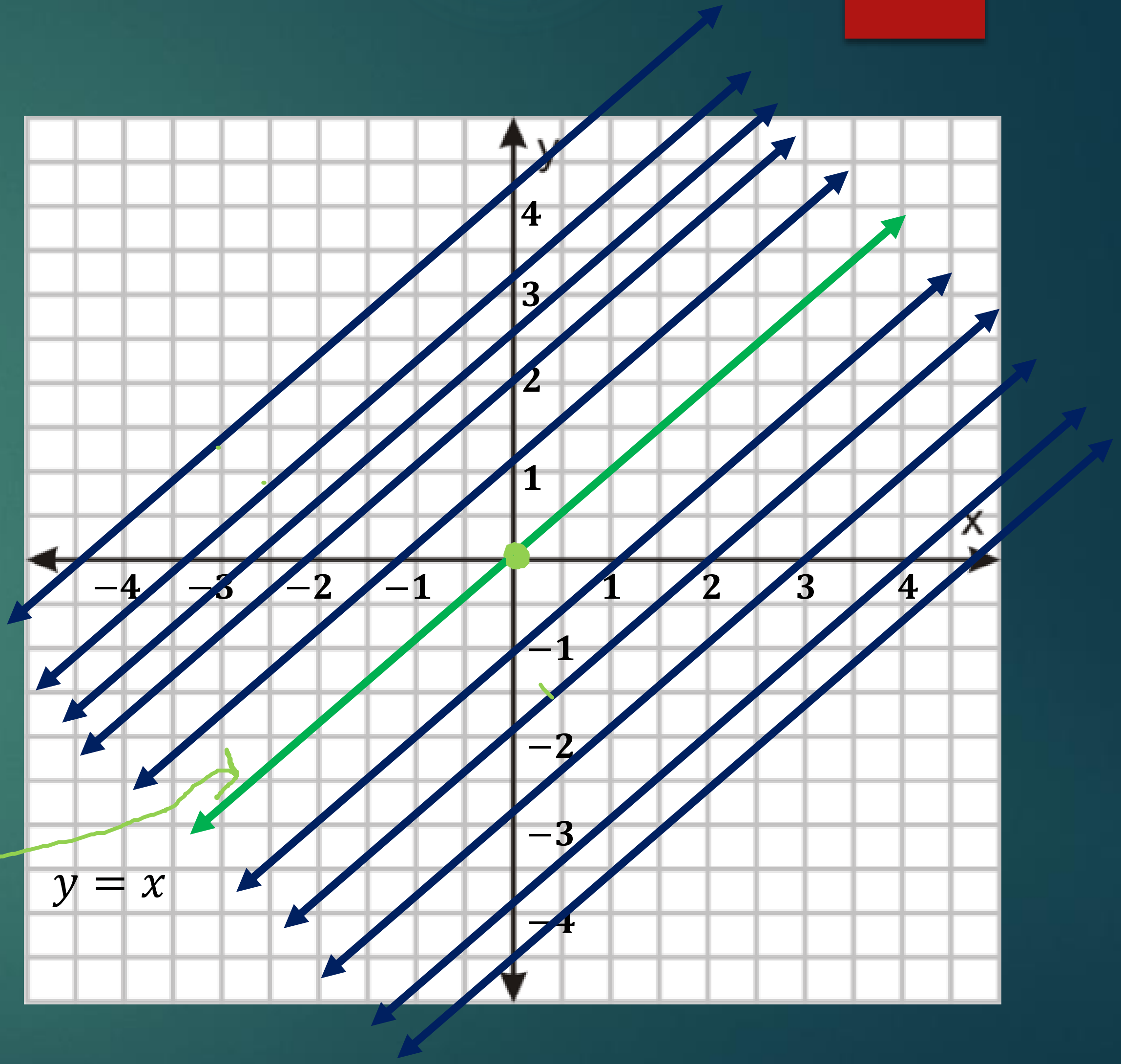
$$y(0) = 0$$

(0, 0)
(x, y)

$$0 = 0 + c$$

$$c = 0$$

$$y = x$$



PROBLEMA CON VALOR INICIAL (PVI)

Es aquel que está sujeto a condiciones prescritas, es decir, condiciones impuestas sobre una $y(x)$ desconocida o sus derivadas sobre algún intervalo I

Ejemplo:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1})$$

$$sujeto\ a$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y_1$$

$$y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$$

Donde $\mathrm{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}}$ son constantes reales arbitrarias dadas

Con un problema de valor inicial se obtiene una solución particular

1

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$
$$sujeto$$
$$y(x_0) = y_0$$

2

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y')$$
$$sujeto$$
$$y(x_0) = y_0$$
$$y'(x_0) = y_1$$