MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 12/04/2021

SISTEMAS
DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES
POR ELIMINACIÓN

Escriba los sistemas dados en términos de operador diferencial

1) $$\left.\begin{aligned} 5x' - 2y &= 3 \\ 2x + 4y' &= 7 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 5Dx - 2y &= 3 \\ 2x + 4Dy &= 7 \end{aligned}$$

2) $$\left.\begin{aligned} x' - x + 2y &= 0 \\ 3x + y' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} Dx - x + 2y &= 0 \\ 3x + Dy &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} (D-1)x + 2y &= 0 \\ 3x + Dy &= 0 \end{aligned}$$

3) $$\left.\begin{aligned} x'' - 4y' &= 0 \\ x'' + x' + y'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} D^2x - 4Dy &= 0 \\ D^2x + Dx + D^2y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} D^2x - 4Dy &= 0 \\ (D^2 + D)x + D^2y &= 0 \end{aligned}$$

Escriba los sistemas dados en términos de operador diferencial

4)
$$\left.\begin{array}{l} x'' + x' + y' + y = 0 \\ x''' + y'' + y = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} (D^2x + Dx) + (Dy + y) = 0 \\ D^3x + (D^2y + y) = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} (D^2+D)x + (D+1)y = 0 \\ D^3x + (D^2+1)y = 0 \end{array}\right\} \checkmark$$

5)
$$\left.\begin{array}{l} x' + y + z = 0 \\ -x + y' + z = 0 \\ x + y + z' = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} Dx + y + z = 0 \\ -x + Dy + z = 0 \\ x + y + Dz = 0 \end{array}$$

6)
$$\left.\begin{array}{l} x' = 2x - 6y \\ y' = y - x \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x' - 2x + 6y = 0 \\ x + y' - y = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} (Dx - 2x) + 6y = 0 \\ x + (Dy - y) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (D-2)x + 6y = 0 \\ x + (D-1)y = 0 \end{array}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES POR ELIMINACIÓN

Se utiliza la notación de Operador Diferencial para la resolución de sistemas de ED y se obtiene la solución de las dos variables dependientes respecto a la misma variable independiente.

PROCEDIMIENTO

1. Trasladar el Sistema de Ecuaciones a notación de Operador Diferencial.
2. Utilizar eliminación para obtener una E D (en notación de Operador Diferencial) de una sola variable dependiente.
3. Resolver la E D anterior utilizando la ecuación auxiliar, para encontrar la solución de la primera variable dependiente.
4. Obteniendo la solución anterior se determina la ecuación de la otra variable dependiente.

Resuelva el siguiente sistema

variables dependientes x y y

variable independiente t

x(t) = ?

y(t) = ?

(1) $\frac{dx}{dt} - x + 2y = 0$

(2) $3x + \frac{dy}{dt} = 0$

$x' - x + 2y = 0$

$3x + y' = 0$

Sistema de Ecuaciones a notación de Operador Diferencial

$$Dx - x + 2y = 0$$
$$3x + Dy = 0$$

$$(D-1)x + 2y = 0$$
$$3x + Dy = 0$$

$(D-1)x + 2y = 0$
$3x + Dy = 0$

Utilizar eliminación para obtener una E D, encontraremos la solución para la variable dependiente x.

$x(t) = ?$
$y(t) = ?$

$$\begin{aligned} (D-1)x + 2y &= 0 \mid * (D) \\ 3x \quad + \quad Dy &= 0 \mid * (-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(D-1)x + \cancel{2Dy} &= 0 \\ -6x \quad - \cancel{2Dy} &= 0 \end{aligned}$$

$+$

$$D(D-1)x - 6x = 0$$

$(D^2 - D)x - 6x = 0$

$$(D^2 - D - 6)x = 0$$

Ecuación auxiliar

$$m^2 - m - 6 = 0$$
$$(m+2)(m-3) = 0$$
$$m + 2 = 0 \quad m - 3 = 0$$
$$m = -2 \qquad m = 3$$

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}}$$

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}$$

Para encontrar y(t) utilizamos la ecuación 1 del sistema.

1 $$x' - x + 2y = 0 \longrightarrow \boxed{y = \frac{x - x'}{2}}$$

$$y = \frac{x - x'}{2}$$

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}$$

$$x'(t) = -2c_1 e^{-2t} + 3c_2 e^{3t}$$

$$y = \frac{(c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}) - (-2c_1 e^{-2t} + 3c_2 e^{3t})}{2}$$

$$y = \frac{c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t} + 2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{3t}}{2}$$

$$y = \frac{3c_1 e^{-2t} - 2c_2 e^{3t}}{2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{2} c_1 e^{-2t} - c_2 e^{3t}}$$

Respuesta:

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}$$

$$y(t) = \frac{3}{2} c_1 e^{-2t} - c_2 e^{3t}$$

Para comprobar si la ecuacion $x(t)$ y $y(t)$ encontradas son correctas, se puede verificar en ecuacion 1 o ecuacion 2 y se debe obtener una ecuacion identidad

$$3x + y' = 0$$

$$3(c_1e^{-2t} + c_2e^{3t}) - 3c_1e^{-2t} - 3c_2e^{3t} = 0$$

$$3c_1e^{-2t} + \cancel{3c_2e^{3t}} - 3c_1e^{-2t} - \cancel{3c_2e^{3t}} = 0$$

$$0 = 0$$

$$x(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{3t}$$

$$y(t) = \frac{3}{2}c_1e^{-2t} - c_2e^{3t}$$

$$y'(t) = -3c_1e^{-2t} - 3c_2e^{3t}$$

Resuelva el siguiente sistema

$x(t) = ?$

$y(t) = ?$

(1) $$\frac{dx}{dt} = -3x + 2y$$

(2) $$\frac{dy}{dt} = -3x + 4y$$

$$x(0) = 0$$

$$y(0) = 2$$

$$\frac{dx}{dt} + 3x - 2y = 0 \longrightarrow x' + 3x - 2y = 0$$

$$\frac{dy}{dt} + 3x - 4y = 0$$

$$3x + (y' - 4y) = 0$$

Sistema de Ecuaciones a notación de Operador Diferencial

$$(Dx + 3x) - 2y = 0$$
$$Dy + 3x - 4y = 0$$

$$(D + 3)x - 2y = 0$$
$$3x + (D - 4)y = 0$$

*

Utilizar eliminación para obtener una E D, encontraremos la solución para la variable dependiente x.

$$(D+3)x - 2y = 0| * (D-4)$$
$$3x + (D-4)y = 0| * 2$$

$$(D-4)(D+3)x - \cancel{2(D-4)y} = 0$$
$$\underline{6x \quad + \quad \cancel{2(D-4)y} \quad = \quad 0}$$
$$(D-4)(D+3)x + 6x = 0$$
$$(D^2 - D - 12)x + 6x = 0$$
$$(D^2 - D - 12 + 6)x = 0$$

$$(D^2 - D - 6)x = 0$$

Ecuación auxiliar
$$m^2 - m - 6 = 0$$

$$(m+2)(m-3) = 0$$

$x(t) = ?$ ✓

$y(t) = ?$

$m = -2 \qquad m = 3$

$$x(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{3t}$$

Para encontrar y(t) utilizamos la ecuación 1 del sistema.

$$\frac{dx}{dt} = -3x + 2y$$

$$y = \frac{3x + x'}{2}$$

$$y = \frac{3(c_1e^{-2t} + c_2e^{3t}) + (-2c_1e^{-2t} + 3c_2e^{3t}\ )}{2}$$

$$y = \frac{3c_1e^{-2t} + 3c_2e^{3t} - 2c_1e^{-2t} + 3c_2e^{3t}}{2}$$

$$y = \frac{c_1e^{-2t} + 6c_2e^{3t}}{2}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}c_1e^{-2t} + 3c_2e^{3t}$$

$$x(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{3t}$$

$$x'(t) = -2c_1e^{-2t} + 3c_2e^{3t}$$

Respuesta:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= c_1e^{-2t} + c_2e^{3t} \\ y(t) &= \frac{1}{2}c_1e^{-2t} + 3c_2e^{3t} \end{aligned}\right\}$$

Sol general

Respuesta:

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} c_1 e^{-2t} + 3c_2 e^{3t}$$

$x(0) = 0$ (0, 0)

$y(0) = 2$ (0, 2)

$$x(0) = 0$$

$$0 = c_1 + c_2 \quad \text{A}$$

$$y(0) = 2$$

$$2 = \frac{1}{2} c_1 + 3c_2 \quad \text{B}$$

$$c_1 = -\frac{4}{5}$$

$$c_2 = \frac{4}{5}$$

Solución:

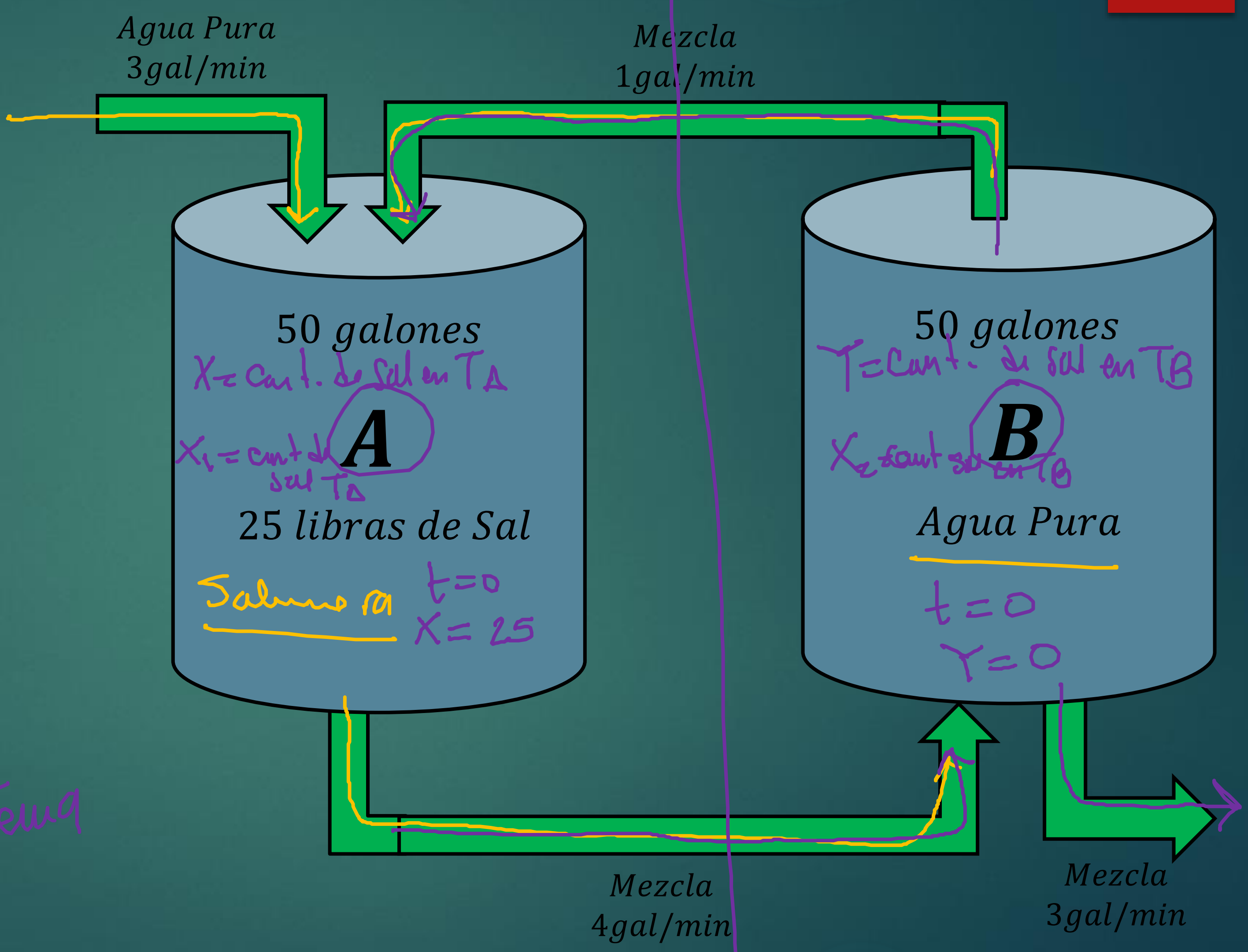
$$x(t) = -\frac{4}{5} e^{-2t} + \frac{4}{5} e^{3t} \checkmark$$

$$y(t) = -\frac{2}{5} e^{-2t} + \frac{12}{5} e^{3t} \checkmark$$

Sol particular

Tarea!!!

Considere los dos tanques que se muestran en la siguiente figura. Suponga que el tanque A contiene 50 galones de agua en los que hay disueltas 25 libras de sal y el tanque B contiene 50 galones de agua pura. Determine la cantidad de libras de sal en los tanques A y B. Aplique el método de eliminación para resolver dicho sistema.



Planteo del sistema