MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 03/02/2021

MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Prueba de conocimiento

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2 + 2r\theta}{\theta^2}$$

Respuesta

$$r = \frac{\theta^2}{C - \theta}$$

Sol explícita
Sol general

ECUACIONES EXACTAS

MÉTODO DE ECUACIONES EXACTAS

Recordando cálculo se tiene que la diferencial total de una función de dos variables $z = f(x, y)$ está dada por

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Conocer la diferencial total de una funcion z es suficiente para determinar la funcion con una constante arbitraria

DEFINICION

La ecuación diferencial de primer orden $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, se dice que si $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es la diferencial total de alguna función $f(x, y)$

$f(x, y) = C$ $\longrightarrow$ Solución en forma implícita, cuando se iguala a C ésta define una solución implícita

Es exacta si y solo sí

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$M_y = N_x$

La derivada parcial de M con respecto a la variable "y" es igual a la derivada parcial de N con respecto a la variable "x".

Nota Importante: "Recordar que la derivada parcial se calcula respecto a una variable considerando las otras variables como constantes"

PASOS A SEGUIR

1. Se escribe la ED en la forma

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

2. Se cacula $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ *y* $\dfrac{\partial N}{\partial x}$

Y sí $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, *entonces la ecuacion es* ***exacta***

3. Por lo tanto la derivada parcial de la funcion $f(x,y)$ *está dada por:*

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ *ó bien* *b)* $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$

4. $Se\ toma\ a)\ \text{ó}\ b)\ la\ expresión\ más\ sencilla\ y\ se\ integra$

$\frac{\partial f}{\partial x} = M$

$\frac{\partial f}{\partial y} = N$

1

$$\int \partial f = \int M(x,y)\partial x$$

$$\boxed{f = \text{términos integrados respecto de } x + g(y)}$$

2

$$\int \partial f = \int N(x,y)\partial y$$

$$\boxed{f = \text{términos integrados respecto de } y + g(x)}$$

5. $Derivar\ parcialmente\ la\ función\ anterior\ respecto\ a\ la\ variable\ contraria\ a\ la\ cual\ se\ integro\ y\ se\ iguala\ a\ la\ expresión\ N(x,y)\ \text{ó}\ M(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \underset{\text{parcialmente respecto a } y}{\text{términos derivados}} + g'(y)$$

$$\underset{\text{parcialmente respecto a } y}{\text{términos derivados}} + g'(y) = N(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underset{\text{parcialmente respecto a } x}{\text{términos derivados}} + g'(x)$$

$$\underset{\text{parcialmente respecto a } x}{\text{términos derivados}} + g'(x) = M(x,y)$$

6. $Luego\ se\ integra\ para\ encontra\ la\ expresión\ de\ la\ función\ g(y)$ ó $g(x)$

$Se\ integra\ con\ respecto\ a\ la\ variable\ y, obteniendo\ asi\ la\ constante\ arbitraria\ g(y);$

$Ó\ bien\ se\ integra\ con\ respecto\ a\ la\ variable\ x, obteniendo\ asi\ la\ constante\ arbitraria\ g(x)$

a

7. $Por\ último\ recordar\ que\ f(x,y) = C$

$Sustituir\ la\ función\ g(y)$ ó $g(x)\ en\ la\ función\ de\ f$

b

$\boxed{f = \underset{respecto\ de\ x}{términos\ integrados} + g(y) = C}$

$\boxed{f = \underset{respecto\ de\ y}{términos\ integrados} + g(x) = C}$

$Dando\ una\ solución\ en\ forma\ implícita$

Ejemplo 1

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \quad \text{Recordar de la diferencial total}$$

Resolver

$$\overbrace{\underbrace{(2xy + 3y)}_{M}}^{\frac{\partial f}{\partial x}}dx + \overbrace{\underbrace{(4y^3 + x^2 + 3x + 4)}_{N}}^{\frac{\partial f}{\partial y}}dy = 0$$

$$M(x,y) = 2xy + 3y$$

$$N(x,y) = 4y^3 + x^2 + 3x + 4$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 3$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 3$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad , por\ lo\ tanto\ es\ EXACTA$$

Se toma la expresion $M(x,y)$ *dado a que la expresion es mas simple (mas sencilla)*

$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$$

$f(x,y) = C$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3y$$

$$\int \partial f = \int (2xy + 3y)\partial x$$

$$\int \partial f = \int (2xy + 3y)\partial x$$

$$\boxed{f = x^2y + 3xy + g(y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3x + g'(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3x + g'(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{3x} + g'(y) = 4y^3 + \cancel{x^2} + \cancel{3x} + 4$$

$$g'(y) = 4y^3 + 4$$

$$g'(y) = 4y^3 + 4$$

$$g(y) = y^4 + 4y$$

$$\boldsymbol{f = x^2y + 3xy + g(y)}$$

$$f = x^2y + 3xy + y^4 + 4y = C$$

$$x^2y + 3xy + y^4 + 4y = C \longrightarrow \textit{Solución implícita}$$