

MI3 Sección A

Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano

Aux: William Hernández

CLASE

19/01/2021

ECUACIONES DIFERENCIALES

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x)$$

Handwritten annotations in the image:

- Green circles around $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$, and $g(x)$.
- Blue circles around y in $\frac{d^n y}{dx^n}$ and y in $a_0(x)y$.
- Blue circles around dx in $\frac{d^n y}{dx^n}$ and dx in $\frac{dy}{dx}$.
- Green arrows pointing to y in $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$, $\frac{dy}{dx}$, and y in $a_0(x)y$.
- Blue handwritten text "VAR. DEP." with an arrow pointing to y in $\frac{d^n y}{dx^n}$.
- Blue handwritten text "VAR. INDEP." with an arrow pointing to dx in $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Una ecuación diferencial es aquella que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

En cálculo

Encontrar la primera derivada

de

$$y = e^{x^2}$$

función

y

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

Ecuación
Diferencial

En cálculo dada la función $y = \phi(x)$

Se determina la derivada

MI3

7

Ecuación
Diferencial

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2xy \\ \int \frac{dy}{y} &= \int 2x dx \\ \ln y &= x^2 + c_1 \\ y &= e^{x^2 + c_1} \\ y &= e^{c_1} e^{x^2} \\ y &= C e^{x^2} \\ \text{Aplicando Condición Inicial} \\ y(0) &= 1 \quad (0, 1) \\ 1 &= C e^{(0)^2} \\ C &= 1 \\ y &= e^{x^2}\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$$

$$\ln y = x^2 + c_1$$

$$y = e^{x^2 + c_1}$$

$$y = e^{c_1} e^{x^2}$$

$$y = C e^{x^2}$$

Aplicando Condición Inicial

$$y(0) = 1 \quad (0, 1)$$

$$1 = C e^{(0)^2}$$

$$C = 1$$

$$y = e^{x^2}$$

Función

Dada la ED encontrar la función desconocida

$$y = \phi(x)$$

Existe un vínculo entre las ecuaciones diferenciales y el mundo real

- ¿ Qué tan rápido cambia la población ?
- ¿ Qué tan rápido se propaga una enfermedad ?
- ¿ Qué tan rápido se vacía un tanque ?

Implican razones de cambio o derivadas. Así la descripción matemática o modelo matemático de experimentos, observaciones y teorías puede ser una ECUACION DIFERENCIAL

DEFINICIÓN

ECUACIÓN DIFERENCIAL: Ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

CLASIFICACIÓN

Las ecuaciones diferenciales (ED) se clasifican por tipo, orden, grado y linealidad.

CLASIFICACIÓN POR TIPO

Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)

Contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente.

$$\textcircled{1} \frac{dy}{dx} + 7y = x^3 e^{-x}, \quad \textcircled{2} y'' - 2y' + y = 0, \quad \textcircled{3} \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0$$

$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$

Ecuación Diferencial Parcial (EDP)

Contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a dos o más variables independientes

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \textcircled{2} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - 5 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \textcircled{3} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

Ejemplos

11

Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales por tipo

$a) \frac{dy}{dx} + 9y = x^2 e^{5x} \longrightarrow EDO$

V.D. (pointing to dy)
V.I. (pointing to dx)

$b) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow EDP$

V.D. (pointing to u)
V.I. (pointing to x)
V.I. (pointing to y)

$c) y''' - 6y = 0 \longrightarrow EDO$

$d) \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = x + y \longrightarrow EDO$

V.D. (pointing to dx)
V.D. (pointing to dy)
V.I. (pointing to dt)

Notación Leibniz

Tiene la ventaja de que muestra con claridad a las variables dependiente e independiente

Notación Primas

Se usa la notación de primas para indicar solo las 3 primeras derivadas y a partir de la cuarta derivada se escribe

$$y^{(4)} \longrightarrow \frac{d^4 y}{dx^4} \Rightarrow y^{(4)}$$

$$\frac{dy}{dx}$$

$$y'$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$y''$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3}$$

$$y'''$$

$$\frac{d^n y}{dx^n}$$

$$y^{(n)}$$

En general así se representa la n - ésima derivada,

La ventaja de la notación de Leibniz es que puede observarse claramente cual es la variable dependiente y la variable independiente

The diagram illustrates the advantage of Leibniz notation by comparing it with Newton notation. It features two equations connected by a green arrow pointing from the Leibniz form to the Newton form.

The top equation is in Leibniz notation: $\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$. Handwritten annotations in green and black identify the variables: a green circle around x is labeled "V.D." (Variable Dependiente) with a green arrow; a green circle around dt is labeled "V.I." (Variable Independiente) with a green arrow. A black arrow points from the x in the denominator to the x in the term $16x$, also labeled "V.I."

The bottom equation is in Newton notation: $x'' + 16x = 0$. This equation is underlined in green.

CLASIFICACIÓN POR ORDEN

El orden de una EDO o EDP es la máxima derivada que aparece en la Ecuación Diferencial

11

$$a) \frac{dy}{dx} + 9y = x^2 e^{5x} \longrightarrow \text{EDO, Orden 1}$$

$$b) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow \text{EDP, Orden 3}$$

$$c) y^{(4)} - 6y = \text{sen}x \longrightarrow \text{EDO, Orden 4}$$

$$d) \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 0 \longrightarrow \text{EDO, Orden 2}$$

$\partial \rightarrow$ simbolo que representa una derivada parcial

CLASIFICACIÓN POR GRADO

12

El grado es la potencia a la cuál está elevada la mayor derivada.

$$a) \left(\frac{dy}{dx} \right)^1 + 9y = x^2 e^{5x} \longrightarrow \text{EDO, Orden 1, grado 1}$$

$$b) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow \text{EDP, Orden 3, grado 2}$$

$$c) y''' - 6y^2 = 3e^{2x} \longrightarrow \text{EDO, Orden 3, grado 1}$$

$$d) \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^3 + \frac{dx}{dt} = 8 \longrightarrow \text{EDO, Orden 2, grado 3}$$

NOTA:

13

Una EDO de n -ésimo orden con una variable dependiente por la forma general $F(\underline{x}, \underline{y}, \underline{y}', \dots, \underline{y}^{(n)}) = 0$ donde F es una función con valores reales de $n + 2$ variables $x, y, y', \dots, y^{(n)}$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(\underline{x}, \underline{y}, \underline{y}', \dots, \underline{y}^{(n-1)})$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = f(\underline{x}, \underline{y})$$

$$\rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = f(\underline{x}, \underline{y}, \underline{y}')$$