# MI3 Sección A
# Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

# CLASE 14/04/2021

# ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

La solución general de una ecuación diferencial es:

$$y(x) = c_1 cos5x + c_2 sen5x + \frac{1}{20} sen2x + \frac{1}{16} sen4x - \frac{1}{2} x$$

Encuentre la Ecuacion Diferencial No Homogenea que le dio origen a esta solución general

La solución general de una ecuación diferencial es:

$$y(x) = \underbrace{c_1 cos5x + c_2 sen5x}_{y_c} + \underbrace{\frac{1}{20} sen2x + \frac{1}{16} sen4x - \frac{1}{2} x}_{y_p}$$

Función complementaria $y_c$

$r_c = \pm 5i$

Ecuacion Caracteristica

$r^2 + 25 = 0$

$y'' + 25y = 0$

$Por\ lo\ tanto:$

$y'' + 25y = g(x)$

La solución general de una ecuación diferencial es:

$$y(x) = \underbrace{c_1 cos5x + c_2 sen5x}_{y_c} + \underbrace{\frac{1}{20} sen2x + \frac{1}{16} sen4x - \frac{1}{2}x}_{y_p}$$

$$\boxed{(*)\ y'' + 25y = g(x)}$$

$$y_p = \frac{1}{20} sen2x + \frac{1}{16} sen4x - \frac{1}{2}x$$

$$y'_p = \frac{1}{10} cos2x + \frac{1}{4} cos4x - \frac{1}{2}$$

$$y''_p = -\frac{1}{5} sen2x - sen4x$$

Para encontrar $g(x)$ se sustituye a $y_p$ y a sus derivadas en la ecuación $(*)$

$$y'' + 25y = g(x)$$

$$-\frac{1}{5} sen2x - sen4x + 25\left(\frac{1}{20} sen2x + \frac{1}{16} sen4x - \frac{1}{2}x\right) = g(x)$$

$$-\frac{1}{5} sen2x - sen4x + \frac{5}{4} sen2x + \frac{25}{16} sen4x \boxed{- \frac{25}{2}x} = g(x)$$

$$\frac{21}{20} sen2x + \frac{9}{16} sen4x - \frac{25}{2}x = g(x)$$

$$y'' + 25y = g(x)$$

$$g(x) = \frac{21}{20} sen2x + \frac{9}{16} sen4x - \frac{25}{2} x$$

Por lo tanto la Ecuacion Diferencial No Homogenea que le dió origen a la solución general dada es:

$$\boldsymbol{y'' + 25y = \frac{21}{20} sen2x + \frac{9}{16} sen4x - \frac{25}{2} x}$$

Encuentre la solucion general de la siguiente ecuacion diferencial por el metodo de coeficientes indeterminados por superposicion

$$y''' - 2y'' = 8 - 2e^{2x}$$

$$y(x) = y_c + y_p$$

$Y_c$:

*Funcion complementaria*

$r_c = 0, 0, 2$

$Y_c = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x}$

*Ecuacion homogenea asociada*

$$y''' - 2y'' = 0$$

*Ecuacion caracteristica*

$$r^3 - 2r^2 = 0$$

$$r^2(r-2) = 0$$

$$r_c = 0 \; multiplicidad \; 2, 2$$

$$\boldsymbol{y_c = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x}}$$

$$y''' - 2y'' = 8 - 2e^{2x}$$ $g(x)$

*Funcion complementaria*

$r_c = 0, 0, 2$

$$\boldsymbol{y_c = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x}}$$

*Solución particular*

$$g(x) = 8 - 2e^{2x}$$

$$r_p = 0, 2$$

$$y_p = Ax^2 + Bxe^{2x}$$

$$y'_p = 2Ax + 2Bxe^{2x} + Be^{2x}$$

$$y''_p = 2A + 4Bxe^{2x} + 2Be^{2x} + 2Be^{2x}$$

$$\boxed{y''_p = 2A + 4Bxe^{2x} + 4Be^{2x}}$$

$$y'''_p = 8Bxe^{2x} + 4Be^{2x} + 8Be^{2x}$$

$$\boxed{y'''_p = 8Bxe^{2x} + 12Be^{2x}}$$

$$y'''_p - 2y''_p = 8 - 2e^{2x}$$

$$8Bxe^{2x} + 12Be^{2x} - 2(2A + 4Bxe^{2x} + 4Be^{2x}) = 8 - 2e^{2x}$$

$$\cancel{8Bxe^{2x}} + 12Be^{2x} - 4A - \cancel{8Bxe^{2x}} - 8Be^{2x} = 8 - 2e^{2x}$$

$$* \quad \boxed{4Be^{2x} - 4A = 8 - 2e^{2x}}$$

$$y'''_p - 2y''_p = 8 - 2e^{2x}$$

$$4Be^{2x} - 4A = 8 - 2e^{2x}$$

$e^{2x}$:

$$4B = -2$$

$$B = -\frac{1}{2}$$

$$-4A = 8$$

$$A = -2$$

*Por lo tanto:*
*la solución particular*

$$y_p = Ax^2 + Bxe^{2x}$$

$$\boldsymbol{y_p = -2x^2 - \frac{1}{2}xe^{2x}}$$

$Y(x) = Y_c + Y_p$

$$\boldsymbol{y_c = c_1 + c_2x + c_3e^{2x}}$$

$$y(x) = y_c + y_p$$

$$y(x) = \underbrace{\boldsymbol{c_1 + c_2x + c_3e^{2x}}}_{y_c} \underbrace{\boldsymbol{- 2x^2 - \frac{1}{2}xe^{2x}}}_{y_p}$$

sol general

# MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

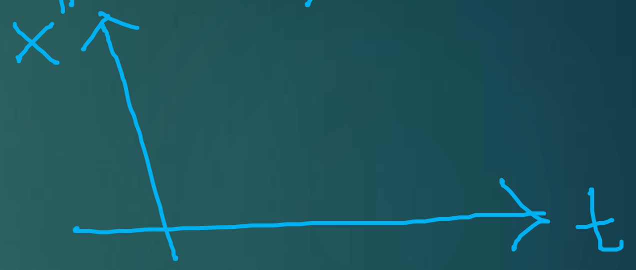
# MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Sistemas Resorte-masa (modelos lineales)

1. Movimiento Libre No Amortiguado (movimiento armonico Simple = MAS)

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0}$$

x(t) = ?




2. Movimiento Libre Amortiguado

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=0}$$

- Caso I: Movimiento Sobre Amortiguado (Raices reales distintas)
- Caso II: Movimiento Criticamente Amortiguado (Raices reales repetidas)
- Caso III: Movimiento Sub Amortiguado (Raices Complejas)

# MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR



3. Movimiento Forzado:
   - Forzado sin Amortiguamiento

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=f(t)}$$

   - Forzado con Amortiguamiento

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=f(t)}$$

4. Circuito LRC en serie.

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}q=E(t); \qquad i=\frac{dq}{dt}$$

$$\boxed{L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t)}$$

# MOVIMIENTO LIBRE NO AMORTIGUADO (Movimiento Armónico Simple)

(MAS)

# MOVIMIENTO LIBRE NO AMORTIGUADO



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

*Indica que la fuerza restauradora del resorte actúa opuesta a la direccion de movimiento*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad | \div m$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}x = 0}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o{}^2x = 0}$$

*Ecuacion que describe el movimiento armonico simple*

Frecuencia circular del Sistema

$$\boldsymbol{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

$$\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

MDS

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

$Notacion\ de\ primas$

$$x'' + \omega_0^2 x = 0$$

$Ecuacion\ auxiliar$

$$r^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$r = \pm\omega_0 i$$

$$\boxed{x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t}$$

Ecuación de movimiento

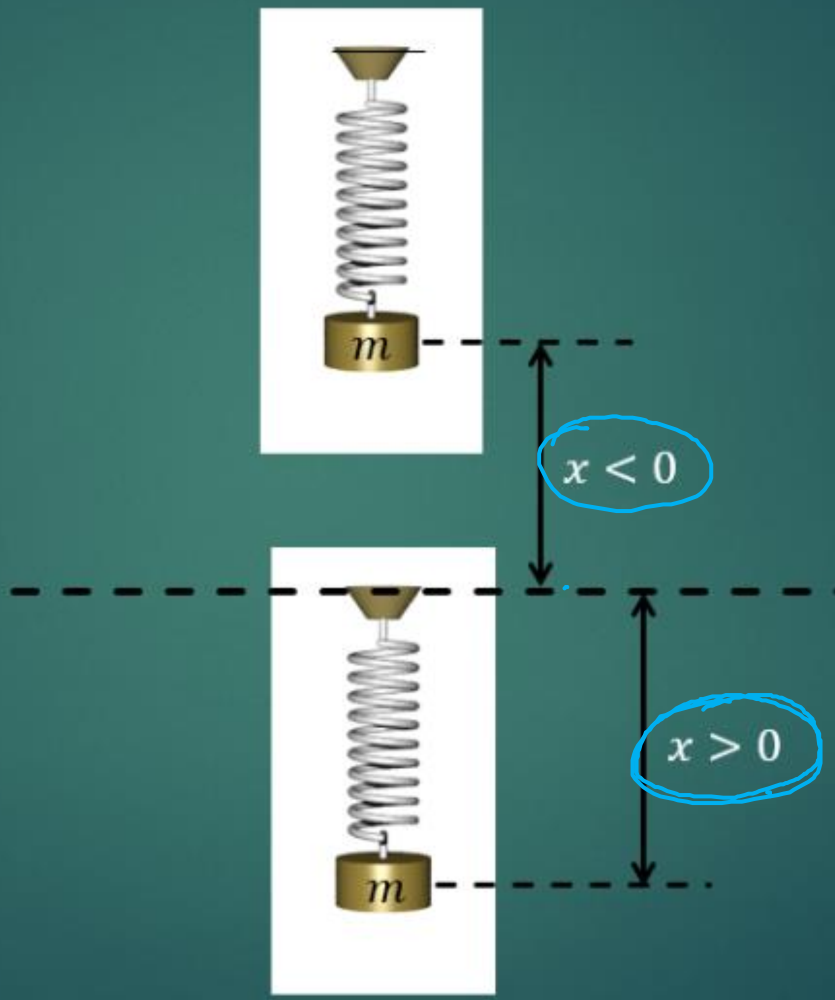
*Condiciones Iniciales*

*Desplazamiento inicial*

$$x(0) = x_0$$

*Velocidad inicial de la masa*

$$x'(0) = x_1$$




Posición

P.E.

*Posición de equilibrio*

*La direccion hacia abajo de la posicion de equilibrio es positiva*

$-$

$+$