MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 16/02/2021

MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Las ecuaciones diferenciales de primer orden como modelos matemáticos se utilizan en el estudio del crecimiento poblacional, el decaimiento radiactivo, el interés compuesto continuo, el enfriamiento de cuerpos, reacciones químicas, mezclas, drenado del fluido de un tanque, la corriente de un circuito en serie, la velocidad de un cuerpo que cae, etc, etc.

Construya una ecuación diferencial de las siguientes situaciones

1. La tasa de cambio con respecto al tiempo de una población de abejas es proporcional a la raíz cuadrada de la población.

   Identificar variables

   $\frac{da}{dt}$

   $a = población\ \ de\ abejas$
   $t = tiempo$

   cte de proporcionalidad

   $$\boxed{\frac{da}{dt} = k\sqrt{a}}$$

2. La población de bacterias B en un cultivo crece a una tasa proporcional al número de bacterias presentes en el tiempo t.

   $B\ = población\ de\ baterias$
   $t\ = tiempo$

   $$\frac{dB}{dt} = kB$$

Construya una ecuación diferencial de las siguientes situaciones

3. La tasa de cambio con respecto al tiempo de una población de ballenas en el océano es proporcional al cuadrado de la población.

$$B = población\ de\ ballenas$$
$$t = tiempo$$

$$\boxed{\frac{dB}{dt} = kB^2}$$

4. La razón de cambio con respecto al tiempo de la velocidad v de un bote de motor es proporcional al cuadrado de la velocidad.

$$v = velocidad\ del\ motor\ del\ bote$$
$$t = tiempo$$

$$\frac{dv}{dt} = kv^2$$

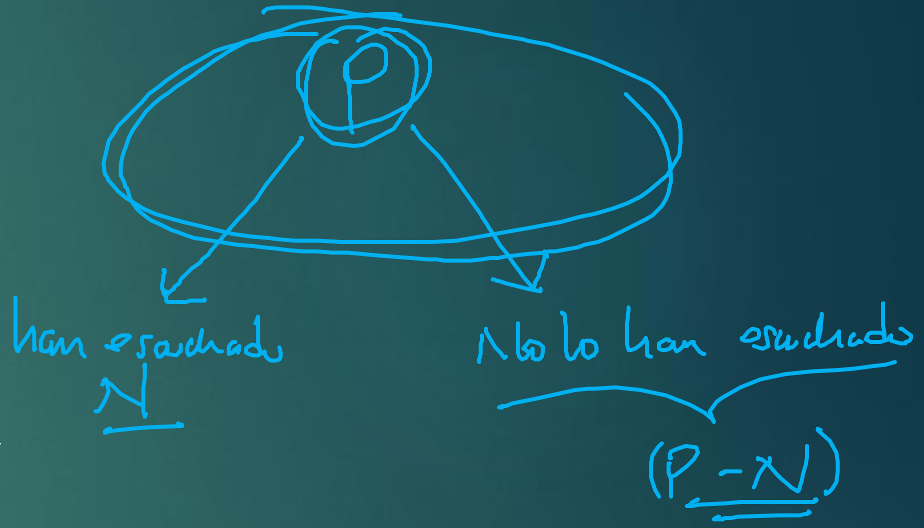
5. La aceleración de un Ferrari es proporcional a la diferencia entre $250\frac{km}{h}$ y la velocidad del automóvil.

$$a = aceleración\ del\ Ferrari$$
$$t = tiempo$$
$$v = velocidad\ del\ Ferrari$$

$$aceleración = \frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = k(250 - v)}$$

6. En una ciudad que tiene una población fija de P personas, la tasa de cambio con respecto al tiempo del numero de personas N que han oído cierto rumor es proporcional al numero de personas que aun no lo han escuchado



$$P = población\ fija\ de\ personas$$
$$N = numero\ de\ personas\ que\ han\ oido\ cierto\ rumor$$
$$t = tiempo$$

$$Numero\ de\ personas\ que\ aun\ no\ lo\ han\ escuchado = P - N$$

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = k(P - N)}$$

MODELADO DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

1. *Crecimiento y decaimiento exponencial*
2. *Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton*
3. *Mezclas*
   1. *Volumen Constante*
   2. *Volumen Variable*
   3. *En cascada*
4. *Ley de Torricelli*
5. *Circuitos RC y RL*
6. *Trayectorias ortogonales*

Crecimiento y decaimiento exponencial

Crecimiento y decaimiento exponencial

La rapidez con la que la población de un país crece en cierto tiempo es proporcional a la población del país en ese tiempo.

Identificar variables

$P = Población$
$t = tiempo$

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int k\,dt$$

$$\ln P = kt + C$$

$$\boxed{P = Ce^{kt}}$$

Solución explícita

$k = constante\ de\ proporcionalidad$

$k > 0$ *modelo será de crecimiento*

$k < 0$ *modelo será de decaimiento*

Crecimiento y decaimiento exponencial

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int kdt$$

$$\ln|P| = kt + c_1$$

$$e \qquad e$$

$$P = Ce^{kt}$$

Condicion Inicial

$$P(0) = P_0 \qquad (0, P_0)$$

$$P_0 = C\cancel{e^0}\ 1$$

$$\boldsymbol{C = P_0}$$

$$P = P_0 e^{kt}$$

Ejemplo

El isótopo radioactivo del Plomo Pb-209 decae a una rapidez proporcional a la cantidad presente en el tiempo t y tiene una vida media de 3.3 horas. ¿Cuánto tiempo tarda en decaer 90% del Plomo?

$$Z = cantidad\ presente\ del\ isótopo\ Pb - 209$$

$$t = tiempo\ (h)$$

$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z_0}$	$\boldsymbol{\frac{Z_0}{2}}$	$\mathbf{100\% - 90\% = 10\%}$ $\boldsymbol{\frac{1}{10} Z_0 = (0.1) Z_0}$
$t(h)$	0	3.3	?