MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 20/01/2021

CLASIFICACIÓN POR LINEALIDAD

Una EDO de orden n es lineal si se puede escribir de la siguiente forma

VD

$$\underbrace{a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)}$$

VI

Propiedades Caracteristicas de una ED lineal

- La variable dependiente "y" y todas sus derivadas son de primer grado; esto es el exponente de todo termino donde aparece "y" debe ser uno.
- Cada coeficiente $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$ solo dependen de la variable independiente "x" o es una constante.

La función g (x) debe estar en términos de la variable independiente o bien puede ser una constante.

Ejemplos

Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales por tipo, orden, grado y linealidad

a) $\frac{dy}{dx} + 9y = x^2e^{5x}$ $\longrightarrow$ $\boldsymbol{EDO, Orden\ 1, grado\ 1, Lineal}$

b) $\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $\longrightarrow$ $\boldsymbol{EDP, Orden\ 3, grado\ 2, No\ Lineal}$

c) $y''' - 6y^2 = 3e^{2x}$ $\longrightarrow$ $\boldsymbol{EDO, Orden\ 3, grado\ 1, No\ Lineal}$

d) $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^3 + \frac{dx}{dt} = 8$ $\longrightarrow$ $\boldsymbol{EDO, Orden\ 2, grado\ 3, No\ Lineal}$

NOTA IMPORTANTE:

Una EDO de primer orden y primer grado se puede representar como

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Ejemplo

Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales

Recordar como puede representarse también una EDO de primer orden y primer grado

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

1. $(y-x)dx + 4xdy = 0| \div dx$

$$y - x + 4x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$4x\frac{dy}{dx} + y = x \longrightarrow \boldsymbol{EDO, orden\ 1, grado\ 1, lineal}$$

$$4xy' + y = x$$

Otra forma de reescriir la ecuacion

$$(y-x)dx + 4xdy = 0| \div dy$$

$$(y-x)\frac{dx}{dy} + 4x = 0 \longrightarrow \boldsymbol{ED0, orden\ 1, grado\ 1, No\ lineal}$$

$$(y-x)x' + 4x = 0$$

2. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 = \sqrt[4]{y+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}^{\,4}$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 = y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y = 0 \longrightarrow$$

EDO, orden 2, grado 4, no lineal

PRUEBA DE CONOCIMIENTO

Clasifique las siguientes Ecuaciones Diferenciales indicando: Tipo, orden, grado y linealidad. Si considera que alguna es no lineal encierre con un circulo que la hace no lineal.

1. $\frac{dy}{dx} = 4x - 2xy$

2. $\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^4 = 0$

3. $(y'')^3 + 3xy' = 5x^2$

4. $\left(\frac{d^4 x}{dt^4}\right)^3 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^6 = 0$

SOLUCION: PRUEBA DE CONOCIMIENTO

1. $\frac{dy}{dx} = 4x - 2xy$ → $EDO, orden\ 1, grado\ 1, lineal$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$$

2. $\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^4 = 0$ → $EDP, orden\ 3, grado\ 2, no\ lineal$

3. $(y'')^3 + 3xy' = 5x^2$ → $EDO, orden\ 2, grado\ 3, no\ lineal$

4. $\left(\frac{d^4 x}{dt^4}\right)^3 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^6 = 0$ → $EDO, orden\ 4, grado\ 3, no\ lineal$

5. $yy' = 6x^4 + 4y$

6. $5x^2y^{(6)} + 3y = 8tanx$

7. $\frac{d^2y}{d\theta^2} - y\frac{dy}{d\theta} = sen\theta$

8. $6t\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = 3cos2t$

9. $y'' = 69x - 23y^2$

10. $x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x^2}$

SOLUCION: PRUEBA DE CONOCIMIENTO

5. $yy' = 6x^4 + 4y$ $\longrightarrow$ $\boldsymbol{EDO, orden\ 1, grado\ 1, no\ lineal}$

$yy' - 4y = 6x^4$ $\rightarrow$ $Y\frac{dY}{dX} - 4Y = 6x^4$

g(x)

6. $5x^2y^{(6)} + 3y = 8tanx$ $\longrightarrow$ $\boldsymbol{EDO, orden\ 6, grado\ 1, lineal}$

7. $\frac{d^2y}{d\theta^2} - y\frac{dy}{d\theta} = sen\theta$ $\longrightarrow$ $\boldsymbol{EDO, orden\ 2, grado\ 1, no\ lineal}$

8. $6t\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = 3cos2t$ $\longrightarrow$ $\boldsymbol{EDO, orden\ 2, grado\ 1, lineal}$

9. $y'' = 69x - 23y^2$

$y'' + 23y^2 = 69x$ $\longrightarrow$ $\boldsymbol{EDO, orden\ 2, grado\ 1, no\ lineal}$

10. $x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x^2}$ $\longrightarrow$ $\boldsymbol{EDO, orden\ 1, grado\ 1, lineal}$

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Cualquier función $\emptyset$ definida en un intervalo I que posee al menos n derivadas continuas en I que al sustituirse en una EDO de orden n reduce la ecuación a una identidad, es una solución de la ecuación en el intervalo I

$$Resolver\ una\ ED\ es\ encontrar\ la(s)\ funcion(es) que\ verifiquen\ la\ ED$$

Ecuaciones

$12x - 24 = 0$ $\quad x = 2$

$1\ solución$

$x^2 - x - 6 = 0$ $\quad x = -2, \quad x = 3$

$2\ soluciones$

Ecuaciones diferenciales

$y' = 6y$ $\quad \boxed{y = ce^{6x}}$

Familia uniparametrica de soluciones

$y'' - 5y + 6y = 0$ $\quad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

Familia biparametrica de soluciones

Si la ED es de orden n, la solución será una familia n-paramétrica (o con n parámetros)

INTERVALO DE DEFINICIÓN

Se le conoce como intervalo de existencia, intervalo de validez ó dominio de la solución y puede ser un intervalo abierto (a,b), intervalo cerrado [a,b], intervalo infinito (a,∞), etc.

Ejemplo

EDO $2y' = -y$

$y = e^{-\frac{x}{2}}$

$y' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$

Dominio

$(-\infty, \infty)$

Sustituyendo la derivada y la función

$$2\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right) = -e^{-\frac{x}{2}}$$

$$-e^{-\frac{x}{2}} = -e^{-\frac{x}{2}} \quad \checkmark$$

Por lo tanto: $y = e^{-\frac{x}{2}} \rightarrow$ ***se verifica que la funcion dada es solución de la ED***