MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 03/05/2021

MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

MOVIMIENTO FORZADO

MOVIMIENTO FORZADO

- Movimiento Forzado No Amortiguado

$$\boldsymbol{m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = f(t)}$$

fuerza externa que actua sobre la masa

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{f(t)}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = F(t)$$

- Movimiento Forzado Amortiguado

$$\boldsymbol{m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t)}$$

fuerza externa que actua sobre la masa

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{f(t)}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F(t)$$

MOVIMIENTO FORZADO

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = F(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = F(t)$$

No Homogenea

Ecuacion de movimiento

$$x(t) = x_c + x_p$$

Termino permanente
ó solucion permanente
ó estado estacionario
"solucion de estado estable"

Parte de la solucion
que permanece despues
de un intervalo de tiempo

Termino transitorio
"solucion transitoria"

Un peso de 4 libras se suspende de un resorte cuya constante es de 8 lb/pie. Suponga que una fuerza externa dada por $f(t) = 4cos4t$ se aplica al resorte y que no existe amortiguamiento. Describa el movimiento que resulta y encuentre su ecuación, si se sabe que inicialmente el peso parte del reposo desde la posición de equilibrio

$Datos:$

$w \;\; = 4lb$

$k \;\; = 8\; lb/pie$

$f(t) = 4cos4t$

$Movimiento\; forzado\; no\; amortiguado$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = f(t)$$

$$\frac{1}{8}\frac{d^2x}{dt^2} + 8x = 4cos4t \quad |*(8)$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 32cos4t}$$

$Encontrando\; la\; masa$

$$w \;\; = mg$$

$$g = 32\,\frac{pie}{seg^2}$$

$$m = \frac{w}{g}$$

$$m = \frac{4lb}{32pie/s^2}$$

$$m = \frac{1}{8}\; slug$$

$Condiciones\; Iniciales$

$$x(0) \;\; = \;\; 0$$

$$x'(0) = 0$$

Movimiento forzado no amortiguado

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 32cos4t$$

$$x'' + 64x = 32cos4t$$

Ecuacion No Homogenea

$$\boxed{x(t) = \boldsymbol{x_c} + \boldsymbol{x_p}}\ ?$$

Condiciones Iniciales

$$x(0) = 0$$

$$x'(0) = 0$$

Solucion transitoria x_c

x_c:

$$x'' + 64x = 0$$

$$r^2 + 64 = 0$$

$$r^2 = -64$$

$$r = \pm 8i$$

$$x_c(t) = C_1 \cos 8t + C_2 \operatorname{sen} 8t$$

$$\boldsymbol{x_c = c_1 \cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t}$$

$x'' + 64x = 32cos4t$ $\quad r = \pm 4i$

Solucion estado estable X_p

x_p:

$x_p = A\cos 4t + B\,\text{sen}\,4t$

$x'_p = -4Asen4t + 4Bcos4t$

$x''_p = -16Acos4t - 16Bsen4t$

$x''_p + 64x_p = 32cos4t$

$-16Acos4t - 16Bsen4t + 64(A\cos 4t + B\,\text{sen}\,4t) = 32cos4t$

$-16Acos4t - 16Bsen4t + 64Acos4t + 64Bsen4t = 32cos4t$

* $48Acos4t + 48Bsen4t = 32cos4t$

Solucion transitoria

$\boldsymbol{x_c = c_1 \cos 8t + c_2\,\text{sen}\,8t}$

x_p:

$x_p = A\cos 4t + B \operatorname{sen} 4t$

$48A\cos 4t + 48B\operatorname{sen} 4t = 32\cos 4t$

$\cos 4t$:	$\operatorname{sen} 4t$:
$48A = 32$	$48B = 0$
$A = \frac{2}{3}$	$B = 0$

$x_p = A\cos 4t + \cancel{B \operatorname{sen} 4t}^{\,0}$

$\boldsymbol{x_p = \frac{2}{3}\cos 4t}$ Sol Estado Estable

Solucion transitoria

$\boldsymbol{x_c = c_1 \cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t}$

Ecuacion de movimiento $X(t) = X_c + X_p$

$x(t) = \boldsymbol{x_c} + \boldsymbol{x_p}$

$$x(t) = \underbrace{c_1 \cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t}_{\boldsymbol{x_c}} + \underbrace{\frac{2}{3}\cos 4t}_{x_p}$$

Ecuacion de movimiento

$$x(t) = \underbrace{c_1 \cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t}_{x_c} + \underbrace{\frac{2}{3} \cos 4t}_{x_p}$$

$$x(0) = 0 \quad (0,0)$$

$$0 = c_1 \cos 8(0) + c_2 \cancel{\operatorname{sen} 8(0)} + \frac{2}{3} \cos 4(0)$$

$$0 = c_1 + \frac{2}{3}$$

$$c_1 = -\frac{2}{3}$$

$$x'(0) = 0 \quad (0,0)$$

$$x'(t) = -8c_1 \operatorname{sen} 8t + 8c_2 \cos 8t - \frac{8}{3} \operatorname{sen} 4t$$

$$0 = -8c_1 \cancel{\operatorname{sen} 8(0)} + 8c_2 \cos 8(0) - \frac{8}{3} \cancel{\operatorname{sen} 4(0)}$$

$$0 = 8c_2$$

$$c_2 = 0$$

Condiciones Iniciales

$$x(0) = 0$$

$$x'(0) = 0$$

Ecuacion de movimiento forzado no amortiguado

$$x(t) = -\frac{2}{3} \cos 8t + \cancel{(0) \operatorname{sen} 8t} + \frac{2}{3} \cos 4t$$

$$\boldsymbol{x(t) = \underbrace{-\frac{2}{3} \cos 8t}_{\textit{Solucion transitoria}} + \underbrace{\frac{2}{3} \cos 4t}_{\textit{Solucion estacionaria}}}$$

Un peso de 32 libras estira un resorte 16 pie. Suponga que una fuerza externa dada por $f(t) = 5sent + 15cost$ se aplica al resorte y la fuerza de amortiguamiento es igual a 3 veces la velocidad instantánea. Describa el movimiento que resulta y encuentre su ecuación, si se sabe que inicialmente el peso parte del reposo a 3 pies por debajo de la posición de equilibrio

Movimiento forzado amortiguado

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

Datos:

$$w = 32lb$$
$$x = 16\,pie$$
$$\beta = 3$$
$$f(t) = 5sent + 15cost$$

Condiciones Iniciales

$$x(0) = 3$$
$$x'(0) = 0$$

Encontrando la masa

$$w = mg$$
$$g = 32\frac{pie}{seg^2}$$
$$m = \frac{w}{g}$$
$$m = \frac{32lb}{32pie/s^2}$$
$$m = 1\ slug$$

Encontrando k

$$w = kx$$
$$k = \frac{32}{16}\ \frac{lb}{pie}$$
$$k = 2\frac{lb}{pie}$$

Ecuacion diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 5sent + 15cost}$$

Movimiento forzado amortiguado

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 5sent + 15cost \longrightarrow$$

Ecuacion No Homogenea

$$x(t) = \boldsymbol{x_c} + \boldsymbol{x_p}$$

Solucion transitoria x_c

x_c:

$$x'' + 3x' + 2x = 0$$

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

$$(r + 2)(r + 1) = 0$$

$$r = -2, -1$$

$$\boldsymbol{x_c = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}}$$

Movimiento forzado amortiguado

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 5sent + 15cost$$

$rp = \pm i$

Solucion estado estable x_p:

$$x_p = A\cos t + B\,\text{sen}\,t$$

$X_p(t) = A\cos t + B\,\text{sen}\,t$

Tarea!!!

Solucion transitoria

$$\boldsymbol{x_c = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}}$$