MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 05/04/2021

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGENEAS

OPERADORES DIFERENCIALES

En cálculo la derivación se denota mediante la letra D y es decir:

$$\frac{dy}{dx} = Dy$$

El símbolo D se denomina operador diferencial (debido a que transforma una función diferenciable en otra función)

EJEMPLO:

$$D(5x^3 - 2x^2) = 15x^2 - 4x$$

$$D(e^{2x} - 4\,sen\,4x\,) = 2e^{2x} - 16\cos 4x$$

Las derivadas de orden superior se expresan en términos de D

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = D(Dy) = D^2y$$

En general podemos representar la n-ésima derivada en forma de operador diferencial

$$\frac{d^ny}{dx^n} = D^ny$$

Las ED Lineales pueden expresarse en términos de la notación de operador diferencial D

EJEMPLO:

1. $y'' + 5y' + 6y = 3x - 1$

   $D^2y + 5Dy + 6y = 3x - 1$

   $(D^2 + 5D + 6)y = 3x - 1$

2. $y''' - 25y'' = 2cosx$

   $D^3y - 25D^2y = 2cosx$

   $(D^3 - 25D^2)y = 2\ cosx$

PROPIEDAD BÁSICAS DE LA DIFERENCIACIÓN

- $D\big(cf(x)\big) = cDf(x)\,, \qquad c\ es\ una\ constante$

- $D\{f(x) + g(x)\} = Df(x) + Dg(x)$

El operdador diferencial L tiene una propiedad de linealidad

- $L\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha Lf(x) + \beta Lg(x),$

$donde\ \alpha\ y\ \beta\ \ son\ constantes$

OPERADOR ANULADOR

Si L es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes y f es una función suficientemente diferenciable tal que $L\big(f(x)\big) = 0$, entonces se dice que L es un anulador de la función.

- Escriba la E D en la forma $\boxed{L(y) = g(x),}$ donde L es un operador Diferencial lineal con coeficientes constantes.

1. $16y'' - 9y = \sin 5x$

   Utilizamos la notación de operador diferencial, es el cambio de la derivada por D, el orden de la derivada indica la potencia del operador diferencial, si no hay derivada el termino queda igual

   $16D^2y - 9y = \sin 5x$

   $(16D^2 - 9)y = \sin 5x$

   $(4D - 3)(4D + 3)y = \sin 5x$

2. $y''' + 10y'' + 25y' = e^{-x}$

   $D^3y + 10D^2y + 25\,Dy = e^{-x}$

   $(D^3 + 10D^2 + 25\,D)y = e^{-x}$

   $D(D + 5)^2y = e^{-x}$

   $D(D + 5)(D + 5)y = e^{-x}$

3. $y^{(4)} + 8y' = 7$

$$D^4 y + 8Dy = 7$$

$$(D^4 + 8D)y = 7$$

$$D(D^3 + 8)y = 7$$

$$D(D + 2)(D^2 - 2D + 4)y = 7$$

4. $y''' + 16y' = 9e^{-3x}$

$$D^3 y + 16\, Dy = 9e^{-3x}$$

$$D(D^2 + 16)y = 9e^{-3x}$$

Compruebe que el operador diferencial anula las funciones indicadas.

1. $\boxed{y = 9e^{4x}}$ *Operador Diferencial* $(D-4)$

$Y = 9e^{4x}$

raiz 4

c	x - c
Raiz	factor
4	x - 4
	0 - 4

Al aplicar el operador de ambos lados

$$(D-4)y = (D-4)(9e^{4x})$$

Se desarrolla el producto del lado derecho y se aplica la deriva donde esta el operador diferencial (recordando que $D = \frac{d}{dx}$) .

$$(D-4)y = D(9e^{4x}) - 36e^{4x}$$
$$(D-4)y = 36e^{4x} - 36e^{4x}$$
$$(D-4)y = 0$$

Y al dar como resultado cero del lado derecho se comprueba que el Operador Diferencial es un Operador Anulador de la funcion dada

- Compruebe que el Operador diferencial anula las funciones indicadas.

2. $y = \cos 2x$ $r = \pm 2i$ $\qquad$ *Operador Diferencial* $(D^2 + 4)$

Al aplicar el operador de ambos lados

$$(D^2 + 4)y = (D^2 + 4)\cos 2x$$
$$(D^2 + 4)y = D^2(\cos 2x) + 4\cos 2x$$
$$(D^2 + 4)y = -4\cos 2x + 4\cos 2x$$
$$(D^2 + 4)y = 0$$

$\cos 2x$

$r = \pm 2i$

raiz c	$x - c$ factor $D - c$
$2i$	$D - 2i$
$-2i$	$D - (-2i)$

$(D - 2i)(D + 2i) =$

$D^2 + 2Di - 2Di - (2i)^2$

$D^2 - 2^2 i^2 = D^2 + 4$ $\quad (i^2 = -1)$

Y al dar del lado derecho como resultado cero se comprueba que el Operador Diferencial es un Operador Anulador

Compruebe que el Operador diferencial anula las funciones indicadas.

3. $y = e^{2x} + 3e^{-5x}$ $\qquad$ $Operador\ Diferencial\ (D-2)(D+5)$

Al aplicar el operador de ambos lados

$$(D-2)(D+5)y = (D-2)(D+5)(e^{2x} + 3e^{-5x})$$
$$(D-2)(D+5)y = (D^2 + 3D - 10)(e^{2x} + 3e^{-5x})$$
$$(D-2)(D+5)y = D^2(e^{2x}) + 3D(e^{2x}) - 10e^{2x} + D^2(3e^{-5x}) + 3D(3e^{-5x}) - 10(3e^{-5x})$$
$$(D-2)(D+5)y = D(2e^{2x}) + 3(2e^{2x}) - 10e^{2x} + D(-15e^{-5x}) + 3(-15e^{-5x}) - 30e^{-5x}$$
$$(D-2)(D+5)y = \cancel{4e^{2x}} + \cancel{6e^{2x}} - \cancel{10e^{2x}} + \cancel{75e^{-5x}} - \cancel{45e^{-5x}} - \cancel{30e^{-5x}}$$
$$(D-2)(D+5)y = 0$$

$\underbrace{e^{2x}}_{r=2} + \underbrace{3e^{-5x}}_{-5}$

$D-2$ $\qquad$ $D+5$

Y al dar del lado derecho como resultado cero se comprueba que el Operador Diferencial es un Operador Anulador

* Encuentre el operador diferencial que anule la funcion que se proporciona.

1. $1 + 6x - 2x^3$

$r = 0$ mult. 4

$$\textit{Operador Diferencial}: D^4$$
$$D^4(1 + 6x - 2x^3) = 0$$
$$D^3(6 - 6x^2) = 0$$
$$D^2(-12x) = 0$$
$$D(-12) = 0$$
$$0 = 0$$

2. $1 + 7e^{2x}$

$r=0 \rightarrow D$ $\quad r=2 \rightarrow (D-2)$

$$\textit{Operador Diferencial}: D(D-2)$$

3. $sen3x$

$r = \pm 3i$

$$\textit{Operador Diferencial}: (D^2 + 9)$$

c	D - c
raiz	factor
3i	D - 3i
- 3i	D + 3i

$(D-3i)(D+3i) = D^2+9$