MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 04/05/2021

MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

MOVIMIENTO FORZADO

Un peso de 32 libras estira un resorte 16 pie. Suponga que una fuerza externa dada por $f(t) = 5sent + 15cost$ se aplica al resorte y la fuerza de amortiguamiento es igual a 3 veces la velocidad instantánea. Describa el movimiento que resulta y encuentre su ecuación, si se sabe que inicialmente el peso parte del reposo a 3 pies por debajo de la posición de equilibrio

$Movimiento\ forzado\ amortiguado$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

$Datos:$

$$w = 32lb$$
$$x = 16\,pie$$
$$\beta = 3$$
$$f(t) = 5sent + 15cost$$

$Condiciones\ Iniciales$

$$x(0) = 3$$
$$x'(0) = 0$$

$Encontrando\ la\ masa$

$$w = mg$$
$$g = 32\frac{pie}{seg^2}$$
$$m = \frac{w}{g}$$
$$m = \frac{32lb}{32pie/s^2}$$
$$m = 1\ slug$$

$Encontrando\ k$

$$w = kx$$
$$k = \frac{32}{16}$$
$$k = 2\ \frac{lb}{pie}$$

$Ecuacion\ diferencial$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 5sent + 15cost$$

Movimiento forzado amortiguado

$$* \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 5sent + 15cost \longrightarrow$$

Ecuacion No Homogenea

$x(t) = \boldsymbol{x_c} + \boldsymbol{x_p}$

Solucion transitoria x_c

x_c:

$x'' + 3x' + 2x = 0$

$r^2 + 3r + 2 = 0$

$(r + 2)(r + 1) = 0$

$r = -2, -1$

$$\boldsymbol{x_c = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}}$$

Movimiento forzado amortiguado

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 5sent + 15cost$$

$r = \pm i$

Solucion transitoria

$$\boldsymbol{x_c = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}}$$

$r_c = -1, -2$

Solucion estado estable x_p:

$$x_p = A\cos t + B \operatorname{sen} t$$

$$x'_p = -Asent + Bcost$$

$$x''_p = -Acost - Bsent$$

$$x''_p + 3x'_p + 2x_p = 5sent + 15cost$$

$$-Acost - Bsent + 3(-Asent + B\cos t) + 2(A\cos t + B\operatorname{sen} t) = 5sent + 15cost$$

$$-Acost - Bsent - 3Asent + 3Bcost + 2Acost + 2Bsent = 5sent + 15cost$$

$$* \quad Acost + Bsent - 3Asent + 3Bcost = 5sent + 15cost$$

Solucion estado estable x_p

$$\underline{A cost} + \underline{Bsent} - \underline{3Asent} + \underline{3Bcost} = \underline{5sent} + \underline{15cost}$$

$sent:$

$$B - 3A = 5$$

$Ecuacion\ a$

$cost:$

$$A + 3B = 15$$

$Ecuacion\ b$

$Resolviendo\ Ec\ a\ y\ Ec\ b$

$$A = 0$$

$$B = 5$$

$$x_p = \cancelto{0}{A\cos t} + B\,\mathrm{sen}\,t$$

$$\boxed{x_p = 5\,\mathrm{sen}\,t}$$

Solucion transitoria

$$\boldsymbol{x_c = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}}$$

Ecuacion de movimiento

$$x(t) = \boldsymbol{x_c + x_p}$$

$$\boxed{x(t) = \underbrace{\boldsymbol{c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}}}_{\boldsymbol{x_c}} + \underbrace{5sent}_{x_p}}$$

Ecuacion de movimiento

$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + 5sent$$

$x(0) = 3$ (0, 3)

$$3 = c_1\underbrace{e^{-(0)}}_{1} + c_2\underbrace{e^{-2(0)}}_{1} + 5\underbrace{sen(0)}_{0}$$

* $3 = c_1 + c_2$

Ecuacion 1

$x'(0) = 0$ (0 , 0)

$$x'(t) = -c_1e^{-t} - 2c_2e^{-2t} + 5cost$$

$$0 = -c_1\underbrace{e^{-(0)}}_{1} - 2c_2\underbrace{e^{-2(0)}}_{1} + 5\underbrace{cos(0)}_{1}$$

$$0 = -c_1 - 2c_2 + 5$$

* $5 = c_1 + 2c_2$

Ecuacion 2

Resolviendo Ec 1 y Ec 2

$c_1 = 1$

$c_2 = 2$

Condiciones Iniciales

$x(0) = 3$

$x'(0) = 0$

Ecuacion de movimiento
forzado amortiguado

$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + 5sent$$

$$x(t) = \underbrace{\boldsymbol{e^{-t} + 2e^{-2t}}}_{Solucion\ transitoria} + \underbrace{5sent}_{Solucion\ estacionaria}$$

CIRCUITOS EN SERIE LRC

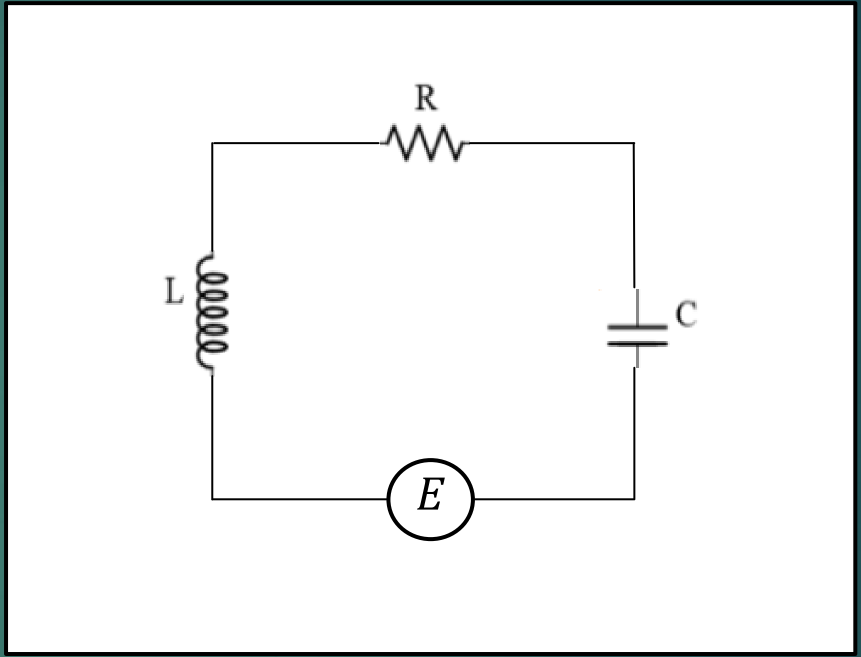
Ecuación Diferencial

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E(t)$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$\boxed{L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)}$$

$$Condiciones\ Iniciales$$
$$q(0)$$
$$i\,(0) = q'(0)$$



Si $E(t) = 0$, se dice que las vibraciones eléctricas del circuito están libres

- Cuando hay un voltaje $E(t)$ aplicado en el circuito se dice que las vibraciones electricas son forzadas
- $q_c(t) = \textit{Solucion transitoria}$
- Si $E(t)$ es periódico o una constante, la solución particular $q_p(t)$ es una solución de estado estable

$$q(t) = \underbrace{q_c}_{\textit{Carga transitoria}} + q_p \longrightarrow \textit{Carga estacionaria}$$

$$i(t) = \underbrace{i_c}_{\textit{Corriente transitoria}} + i_p \longrightarrow \textit{Corriente estacionaria}$$

En un circuito en serie LRC con $R = 10\ Ohms, L = \frac{1}{2}\ henrios, C = 0.01\ faradios$;
$E(t) = 150\ voltios$, $q(0) = 1\ C$ e $i(0) = 0\ A$.
Encuentre:

a. La Ecuación de la carga.
b. La ecuación de la corriente
c. ¿Cuál es la carga en el capacitor después de un largo tiempo?

Datos:

$$\left.\begin{aligned} R &= 10\ \Omega \\ L &= \frac{1}{2} h \\ C &= 0.01\ f \\ E(t) &= 150\ V \end{aligned}\right\}$$

Ecuacion Diferencial

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)$$

Condiciones Iniciales

$$q(0) = 1\ C$$
$$i(0) = 0\ A$$

Datos:

$R = 10\ \Omega$

$L = \frac{1}{2} h$

$C = 0.01\ f$

$E(t) = 150\ V$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2q}{dt^2} + 10\frac{dq}{dt} + \frac{q}{0.01} = 150 \quad *(2)$$

$$\underbrace{\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 20\frac{dq}{dt} + 200q = 300}}_{q(t)}$$

$$q(t) = q_c + q_p \ ?$$

Encontrando la carga transitoria q_c

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 20\frac{dq}{dt} + 200q = 0$$

$$r^2 + 20r + 200 = 0$$

parte real

$$r = -10 \pm 10i$$

parte imaginaria

$$q_c = e^{-10t}(c_1 \cos 10t + c_2 \operatorname{sen} 10t)$$

$$q_c(t) = e^{-10t}(C_1 \cos 10t + C_2 \operatorname{sen} 10t)$$

$$q_c(t) = C_1 e^{-10t} \cos 10t + C_2 e^{-10t} \operatorname{sen} 10t$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 20\frac{dq}{dt} + 200q = 300$$

Encontrando la carga estacionaria q_p

$$q_p = A$$
$$q_p' = 0$$
$$q_p'' = 0$$

$$\cancel{q''_p}^{0} + \cancel{20q'_p}^{0} + 200q_p = 300$$

$$\cancel{0}^{0} + \cancel{20(0)}^{0} + 200(A) = 300$$

$$200A = 300$$

$$A = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto la carga estacionaria q_p *es*

$$q_p = \frac{3}{2}$$

$$q(t) = q_c + q_p$$

$$q(t) = \underbrace{e^{-10t}(c_1 \cos 10t + c_2 \sin 10t)}_{Carga\ transitoria} + \underbrace{\frac{3}{2}}_{Carga\ estacionaria}$$

Condiciones Iniciales

$q(0) = 1$

$i(0) = q'(0) = 0$

$$q(t) = e^{-10t}(c_1 \cos 10t + c_2 \sin 10t) + \frac{3}{2}$$

$Para \;\; q(0) = 1\,C$ (0, 1)

$$q(t) = e^{-10t}(c_1 \cos 10t + c_2 \sin 10t) + \frac{3}{2}$$

$$1 = e^{(0)}(c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)) + \frac{3}{2} \Rightarrow 1 = c_1 + \frac{3}{2}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}$$ *

$Para\; q'(0) = 0$ (0, 0)

$$q(t) = e^{-10t}(c_1 \cos 10t + c_2 \sin 10t) + \frac{3}{2}$$

$$q'(t) = e^{-10t}(-10c_1 \sin 10t + 10c_2 \cos 10t) - 10e^{-10t}(c_1 \cos 10t + c_2 \sin 10t)$$

$$0 = e^{(0)}(-10c_1 \sin(0) + 10c_2 \cos(0)) - 10e^{(0)}(c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0))$$

$$0 = 10c_2 - 10c_1 \rightarrow 10c_2 = 10c_1 \Rightarrow c_2 = c_1$$

$$c_2 = c_1$$

$$c_2 = -\frac{1}{2}$$ *

$$q(t) = e^{-10t}(c_1 \cos 10t + c_2 \sin 10t) + \frac{3}{2} \qquad c_1 = -\frac{1}{2} \qquad c_2 = -\frac{1}{2}$$

a. La Ecuación de la carga. $q(t) = ?$

$$* \; q(t) = \cancel{e^{-10t}}\left(-\frac{1}{2}\cos 10t - \frac{1}{2}\sin 10t\right) + \frac{3}{2}$$

b. La ecuación de la corriente $q'(t) = \frac{dq}{dt} = i(t)$

$$q'(t) = e^{-10t}(5\sin 10t - 5\cos 10t) - 10e^{-10t}\left(-\frac{1}{2}\cos 10t - \frac{1}{2}\sin 10t\right)$$

$$q'(t) = e^{-10t}(5\sin 10t - 5\cos 10t) + e^{-10t}(5\cos 10t + 5\sin 10t)$$

$$* \; i(t) = q'(t) = 10e^{-10t}\sin 10\,t$$

c. ¿Cuál es la carga en el capacitor después de un largo tiempo?

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = \lim_{t\to\infty} \cancel{e^{-10t}}\left(-\frac{1}{2}\cos 10t - \frac{1}{2}\sin 10t\right) + \frac{3}{2}$$

$$q(t\to\infty) = \frac{3}{2}C$$