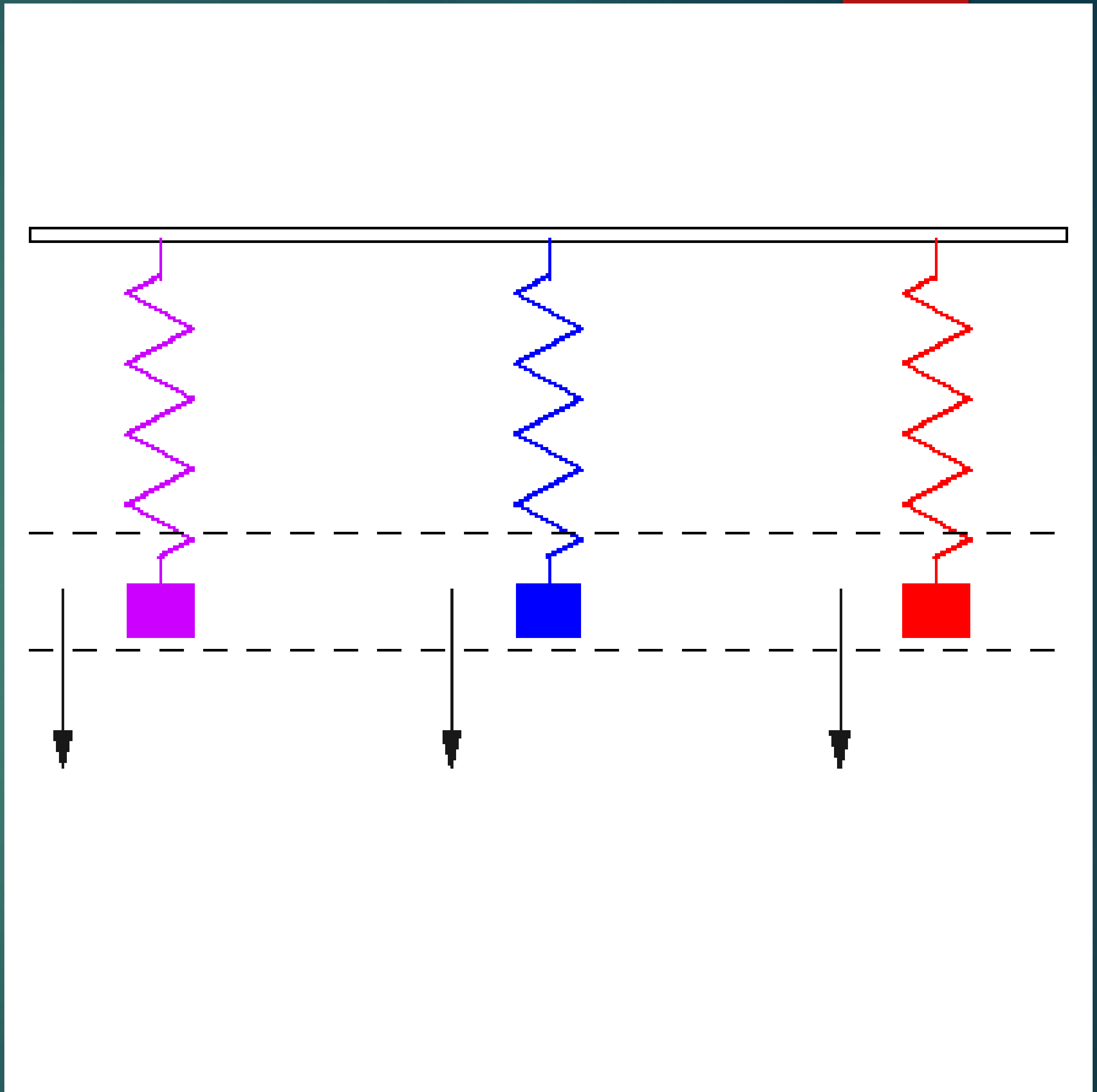
MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 21/04/2021

MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

MOVIMIENTO LIBRE AMORTIGUADO



- Una pesa de 32 libras estira un resorte 16 pies. Al principio, parte del reposo a 3 pies debajo de la posición de equilibrio. El movimiento ocurre en un medio que presenta una fuerza de amortiguamiento igual a 3 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación del movimiento e identifique tipo de movimiento se trata.

$w = mg$ $\quad$ $F = kx$

$m = \frac{w}{g}$ $\quad$ $k = \frac{F}{x}$

mov. Libre Amortiguado

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Datos:

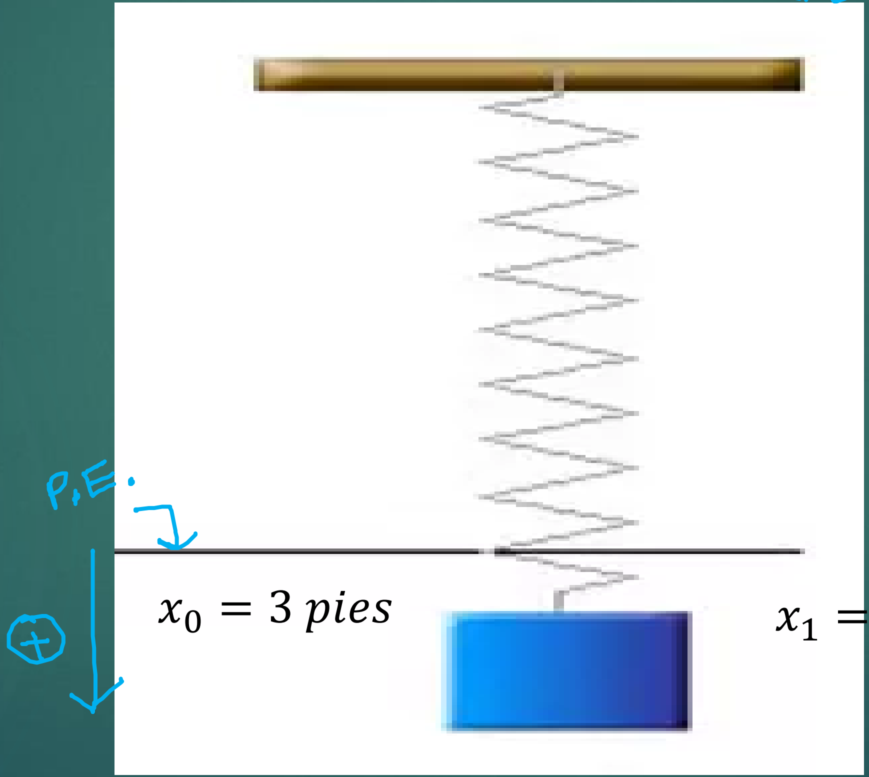
$w = 32lb$

$x = 16pies$

$\beta = 3$

$E.D.$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0$$



$x_1 = 0\frac{pie}{seg}$

Condiciones Iniciales

$x(0) = 3$

$x'(0) = 0$

Una pesa de 32 libras estira un resorte 16 pies. Al principio, parte del reposo a 3 pies debajo de la posición de equilibrio. El movimiento ocurre en un medio que presenta una fuerza de amortiguamiento igual a 3 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación del movimiento e identifique tipo de movimiento se trata.

mov. Libre Amortiguado →
- mov. sobre Amortiguado
- mov. críticamente Amortiguado
- mov. sub amortiguado

Datos:

$w = 32lb$

$x = 16pies$

$\beta = 3$

Condiciones Iniciales

$x(0) = 3$

$x'(0) = 0$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

$r^2 + 3r + 2 = 0$

$(r+1)(r+2) = 0$

$r = -1 \quad r = -2$

Raices Reales Distintas

Movimiento Sobre Amortiguado

$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}$$

Encontrando la masa

$w = mg$

$$g = 32\frac{pie}{seg^2}$$

$$m = \frac{w}{g}$$

$$m = \frac{32}{32}\frac{lb}{pie/s^2}$$

$m = 1\ slug$

Encontrando k

$w = kx$

$32 = k(16)$

$$k = \frac{32\ lb}{16\ pie}$$

$$k = 2\frac{lb}{pie}$$

Movimiento Sobre Amortiguado

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

Aplicando Condiciones Iniciales

Para $x(0) = 3$ *pies* (0, 3)

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$
$$3 = c_1 e^{0} + c_2 e^{0}$$
$$\boxed{3 = c_1 + c_2} \quad Ec1$$

Para $x'(0) = 0$ (0, 0)

$$x'(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$$
$$0 = -c_1 e^{0} - 2c_2 e^{0}$$
$$\boxed{c_1 = -2c_2} \quad Ec2$$

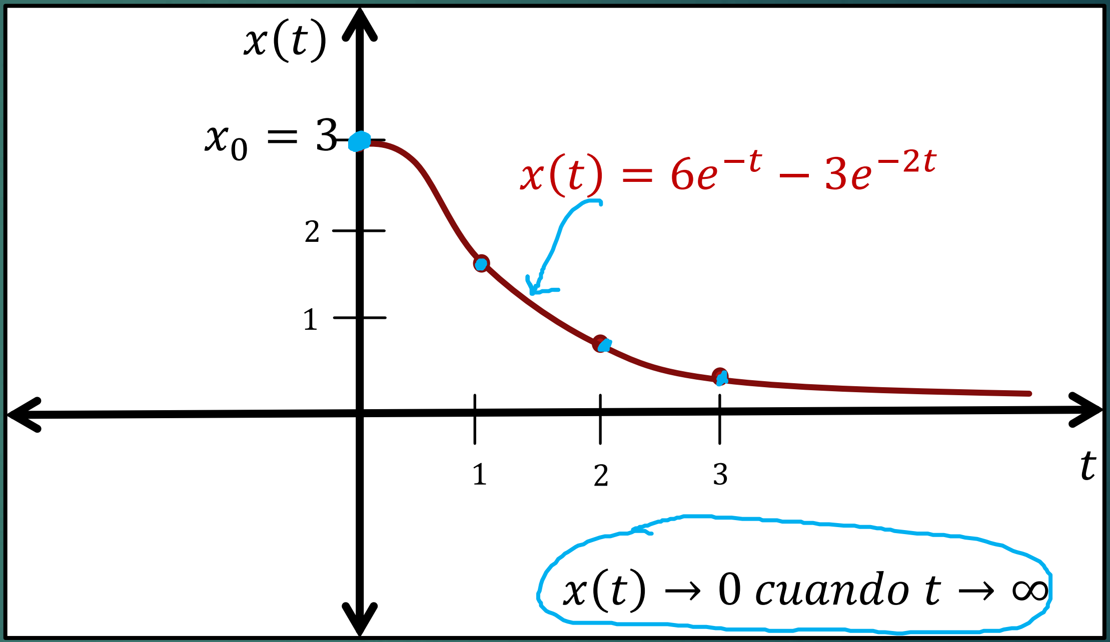
Sustituyendo Ec 2 en Ec1

$$3 = -2c_2 + c_2$$
$$c_2 = -3$$
$$c_1 = 6$$

Ecuación de movimiento
Movimiento Sobre Amortiguado

$$\boxed{x(t) = 6e^{-t} - 3e^{-2t}}$$

Gráficar



$x(t)$	3	1.79	0.76	0.28
t	0	1	2	3

* Una masa que pesa de 4 libras esta unida a un resorte cuya constante es de 2 lb/pie. El medio ofrece una fuerza de amortiguamiento que es numéricamente igual a la velocidad instantánea. El sistema se lleva a la posición de equilibrio y se le imprime una velocidad dirigida hacia abajo de 1 pie/s

Encuentre:

a) El desplazamiento del peso como función del tiempo
b) El máximo desplazamiento del peso desde la posición de equilibrio
c) La grafica

mov. Libre Amortiguado

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=0$$

?

Datos:

$w = 4lb$

$k = 2lb/pie$

$\beta = 1$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=0$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)\frac{d^2x}{dt^2}+(1)\frac{dx}{dt}+(2)x = 0 \quad \Big|\ *(8)$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+8\frac{dx}{dt}+16x=0}$$

Encontrando la masa

$$w = mg$$

$$g = 32\frac{pie}{seg^2}$$

$$m = \frac{w}{g}$$

$$m = \frac{4lb}{32pie/s^2}$$

$$m = \frac{1}{8}\ slug$$

Condiciones Iniciales

$X_0 = x(0) = 0$ ✓

$X_1 = x'(0) = 1\ pie/s$ ✓

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0$$

$r^2 + 8r + 16 = 0$

$(r+4)^2 = 0$

$(r+4)(r+4) = 0$

$r = -4$ *multiplicidad 2*

Raices Reales Repetidas

Movimiento Criticamente Amortiguado

Ecuacion de movimiento

$$\boxed{x(t) = c_1e^{-4t} + c_2te^{-4t}}$$

Condiciones Iniciales

$x(0) = 0$ (0, 0)

$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2te^{-4t}$

$0 = c_1\cancel{e^{-4(0)}} + c_2(0)\cancel{e^{-4(0)}}$

$\boxed{c_1 = 0}$

Condiciones Iniciales

$x'(0) = 1$ (0, 1)

$x'(t) = -4c_1e^{-4t} - 4c_2te^{-4t} + c_2e^{-4t}$

$1 = -4c_1\cancel{e^{-4(0)}} - 4c_2\cancel{(0)}e^{-4(0)} + c_2\cancel{e^{-4(0)}}$

$1 = -4c_1 + c_2$

$c_2 = 1 + 4c_1$

$c_2 = 1 + 4\cancel{(0)}$

$\boxed{c_2 = 1}$

Por lo tanto la Ecuacion del movimiento criticamente amortiguado:

a)

$$\boxed{x(t) = te^{-4t}}$$

a) El desplazamiento del peso como función del tiempo

Ecuacion del movimiento

$$x(t) = te^{-4t}$$

b) Encuentre el máximo desplazamiento del peso desde la posición de equilibrio

c) Grafica

c) Gráfica !!!

$$x'(t) = 0$$

$$\rightarrow \quad -4te^{-4t} + e^{-4t} = 0$$

$$e^{-4t}(-4t+1) = 0$$

$$-4t + 1 = 0$$

$$t = \frac{1}{4}s$$

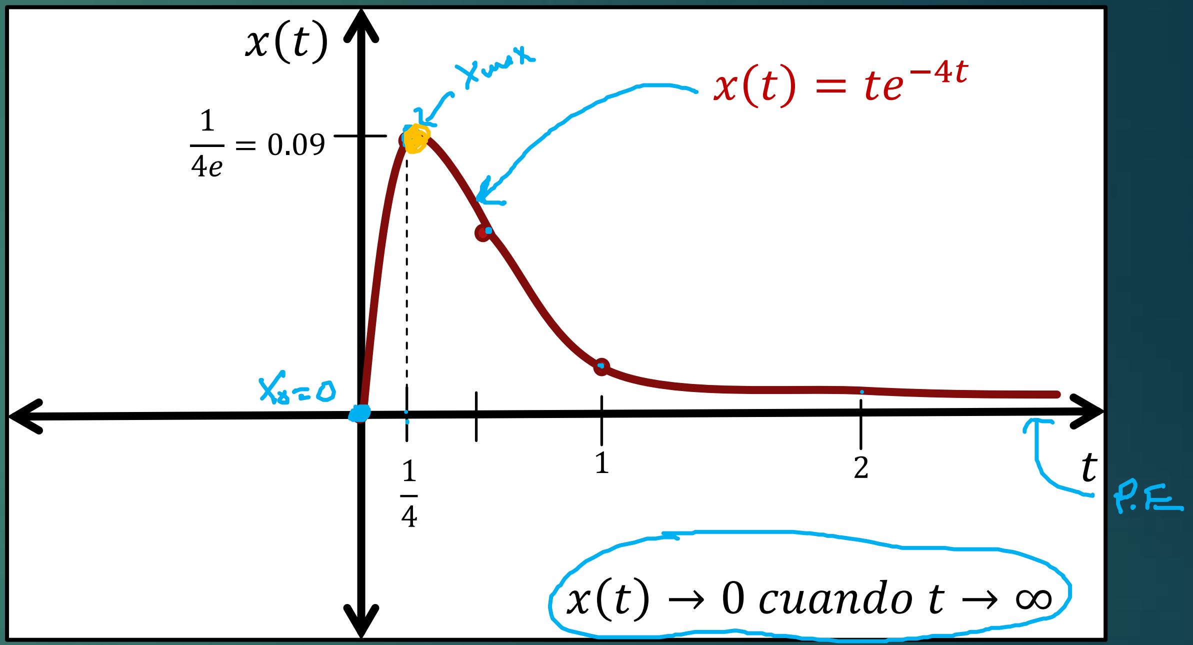
$$x(t) = te^{-4t}$$

$$x\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)e^{\cancel{-4}\left(\frac{1}{\cancel{4}}\right)}$$

$$x = \left(\frac{1}{4}\right)e^{-1}$$

$$x = \frac{1}{4e}pie$$

$$x \approx 0.0919698602\ pie$$



$x(t)$	0	$\frac{1}{4e}$	0.06	0.02	0.0007
t	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2

Una masa que pesa de 4 libras esta unida a un resorte cuya constante es de 2 lb/pie. El medio ofrece una fuerza de amortiguamiento que es numéricamente igual a la velocidad instantánea. La masa inicialmente se libera desde un punto localizado 1 pie por encima de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 8 pie/s

mov. Libre Amortiguado

Encuentre:

a) "El desplazamiento del peso como función del tiempo"

b) El tiempo al cual la masa cruza la posición de equilibrio ¿ serÍa que cruza la P.E ?

c) El momento en el cual la masa logra su desplazamiento extremo a partir de la posición de equilibrio. ?Cual es la posición de la masa en ese instante?

Tarea !!!

d) La grafica

Condiciones Iniciales

$X_0 = x(0) = -1\ pie$

$X_1 = x'(0) = 8\ pie/s$