MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano

Aux: William Hernández

CLASE 24/02/2021

MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Mezclas

Ejemplo

Un tanque contiene 2000 litros de una solución que consta de 200 kg de sal disueltos en agua. Se bombea agua pura hacia el tanque a razón 10 L/s y la mezcla se extrae a la misma razón. ¿Cuánto tiempo pasará antes que queden solamente 20 kg de sal en el tanque?

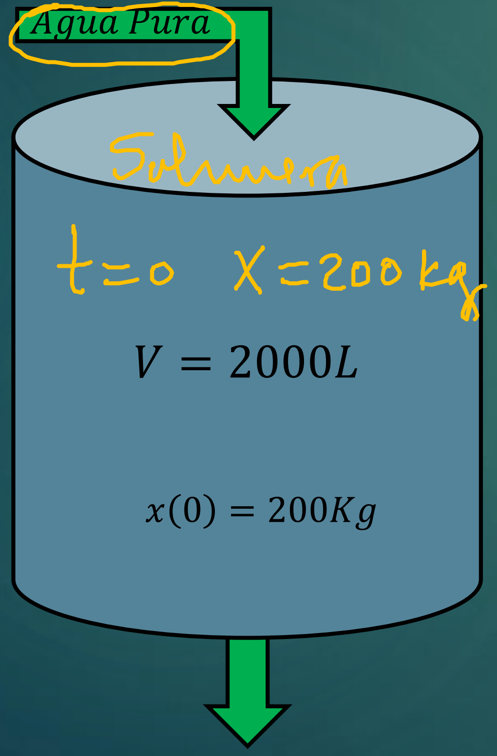
$x = cantidad\ de\ sal\ en\ el\ tanque\ (kg)$

$t = tiempo\ (s)$

$f_e = 10\frac{L}{s}$

$C_e = \frac{0kg}{L}$

E



$f_s = 10\frac{L}{s}$

$C_s = ?$

S

$$\frac{dx}{dt} = E - S$$

$$\frac{dx}{dt} = C_e f_e - C_s f_s$$

$Para\ calcular\ C_s$

$$C_s = \frac{Cantidad\ de\ soluto\ en\ el\ tanque}{Volumen\ total}$$

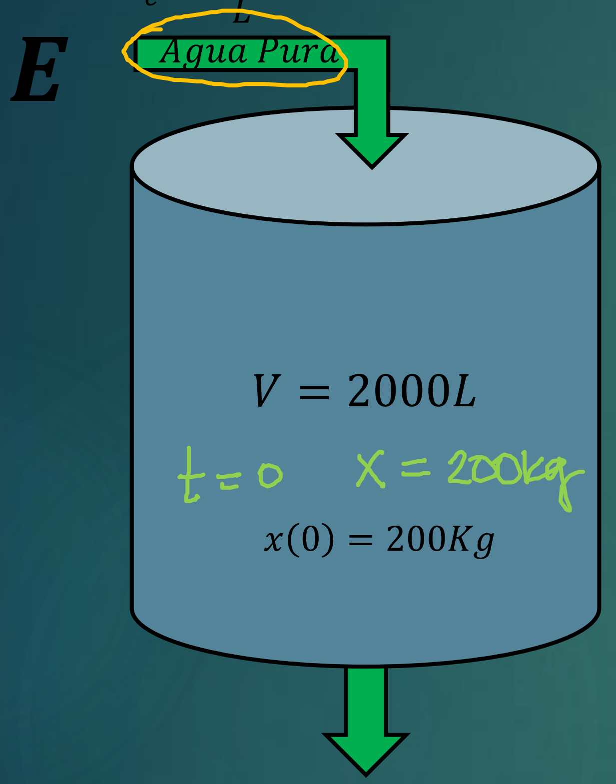
$f_e = f_s$

$volumen\ constante$

$$\boxed{C_s = \frac{x\ kg}{2000\ L}}$$

$f_e = 10\frac{L}{s}$

$C_e = \frac{0kg}{L}$



$f_s = 10\frac{L}{s}$

$C_s = \frac{\boldsymbol{x\ kg}}{\boldsymbol{2000\ L}}$

S

$$\frac{dx}{dt} = E - S$$

$$\frac{dx}{dt} = C_e f_e - C_s f_s$$

$$\frac{dx}{dt} = \cancel{(0)(10)} - \frac{x\,Kg}{2000\,\cancel{L}}\left(10\,\frac{\cancel{L}}{s}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{200}$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{1}{200}dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -\frac{dt}{200}$$

$$\ln|x| = -\frac{t}{200} + c_1$$

e e

$$\cancel{e}^{\ln|x|} = e^{-\frac{t}{200}+c_1}$$

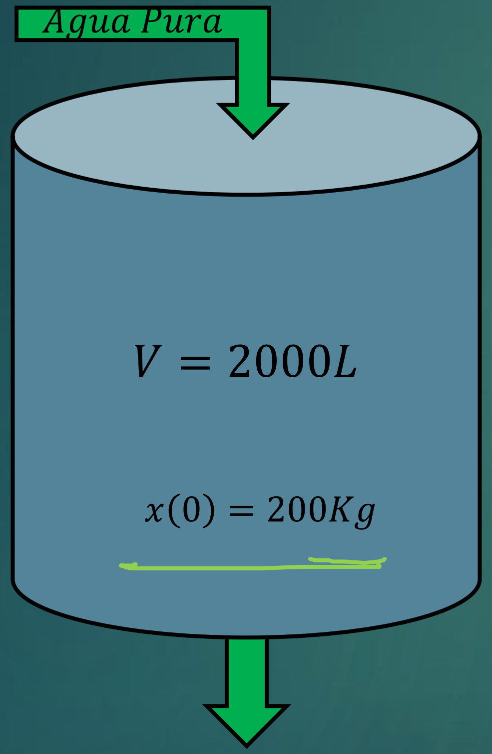
$$\boxed{x = Ce^{-\frac{t}{200}}}$$

$$x = Ce^{-\frac{t}{200}}$$

$f_e = 10\frac{L}{s}$

$C_e = \frac{0kg}{L}$

E



$f_s = 10\frac{L}{s}$

$C_s = \frac{\boldsymbol{x\ kg}}{\mathbf{2000\ L}}$

S

Condiciones Iniciales

$$Para\ x(0) = 200\ kg$$

t , x
(0 200)

$$200 = C\cancel{e^{0}}\ 1$$

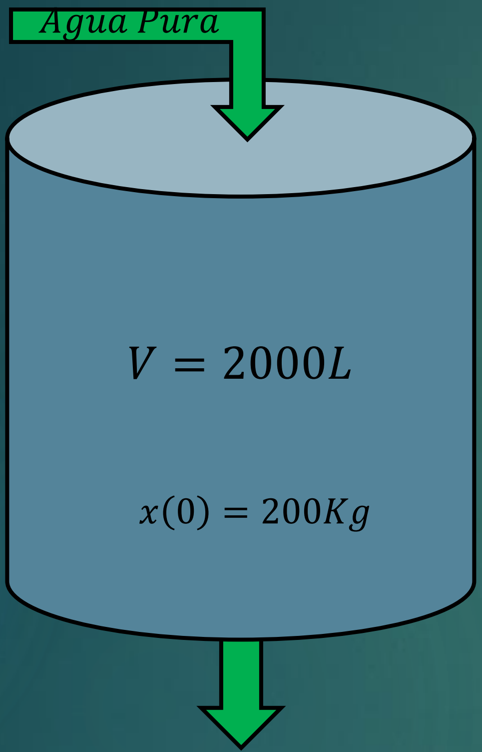
$$C = 200$$

$$\boxed{x(t) = 200e^{-\frac{t}{200}}}$$

$f_e = 10\frac{L}{s}$

$C_e = \frac{0kg}{L}$

E



$f_s = 10\frac{L}{s}$

$C_s = \frac{\boldsymbol{x\ kg}}{\boldsymbol{2000\ L}}$

S

$$x(t) = 200e^{-\frac{t}{200}}$$

$Para\ x = 20kg \quad t = ?$

$$20 = 200e^{-\frac{t}{200}}$$

$$\frac{20}{200} = e^{-\frac{t}{200}}$$

$$\ln\left(\frac{1}{10}\right) = e^{-\frac{t}{200}}$$

$$ln\left(\frac{1}{10}\right) = ln\left(e^{-\frac{t}{200}}\right)$$

$$t = \ln\left(\frac{1}{10}\right)(-200)$$

R//

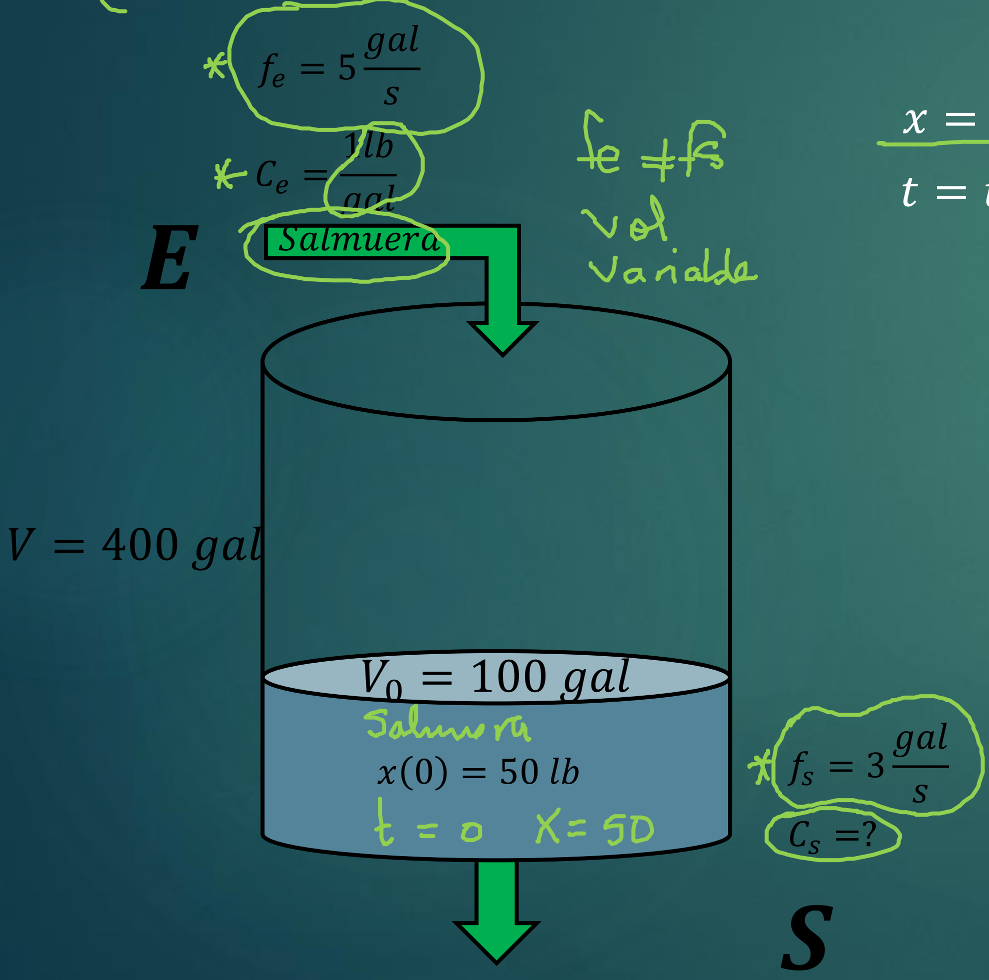
$$t \approx 460.5170\ s$$

$t \approx 460.52$ seg

Pasarán aproximadamente 460.5172 segundos para que queden 20 kg de sal en el tanque

Ejemplo

Un tanque de 400 galones contiene inicialmente 100 gal de salmuera, la cual consta a su vez de 50 libras de sal. Entra salmuera, cuya concentración es de 1 lb de sal por galón a razón de 5 gal/s y la salmuera bien mezclada en el tanque se derrama a razón de 3 gal/s. ?Qué cantidad de sal contendrá el tanque cuando este lleno de salmuera?



$x =$ *cantidad de sal en el tanque* (lb)

$t =$ *tiempo* (s)

$$\frac{dx}{dt} = E - S$$

$$\frac{dx}{dt} = C_e f_e - C_s f_s$$

✓ ✓ ? ✓

Para encontrar C_s

$$C_s = \frac{\text{Cantidad de sal en el tanque}}{\text{Volumen inicial} + (f_e - f_s)t}$$

$$f_e \neq f_s$$

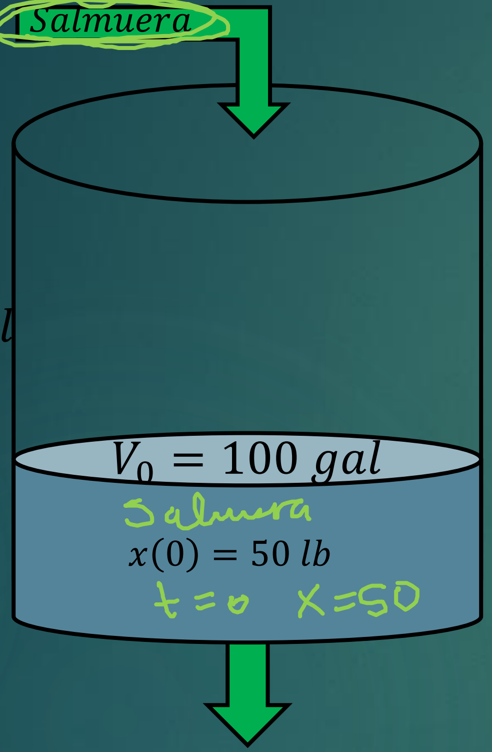
volumen variable

$$* \ C_s = \frac{x}{100 + (5-3)t} = \frac{x\ lb}{(100 + 2t)\ gal}$$

* $f_e = 5\frac{gal}{s}$

$C_e = \frac{1\,lb}{gal}$

E



$V = 400\ gal$

*$f_s = 3\frac{gal}{s}$

$C_s = \frac{x\ \ lb}{(100+2t)gal}$

S

$C_s = \frac{x\ \ lb}{(100+2t)gal}$

$$\frac{dx}{dt} = E - S$$

$$\frac{dx}{dt} = C_e f_e - C_s f_s$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(1\frac{lb}{\cancel{gal}}\right)\left(5\frac{\cancel{gal}}{s}\right) - \left(\frac{x\ lb}{100+2t\ \cancel{gal}}\right)\left(3\frac{\cancel{gal}}{s}\right)$$

$x(t) = ?$

lb/s.

$$\frac{dx}{dt} + \underbrace{\frac{3}{100+2t}}_{P(t)}x = \underbrace{5}_{Q(t)} \rightarrow \underline{lineal\ en\ x}$$

$$F.I. = e^{\int\frac{3}{100+2t}dt} = e^{\frac{3}{2}\ln|100+2t|}$$

$$P(t) = \frac{3}{100+2t}$$

$$Q(t) = 5$$

$$F.I. = (100+2t)^{\frac{3}{2}}$$

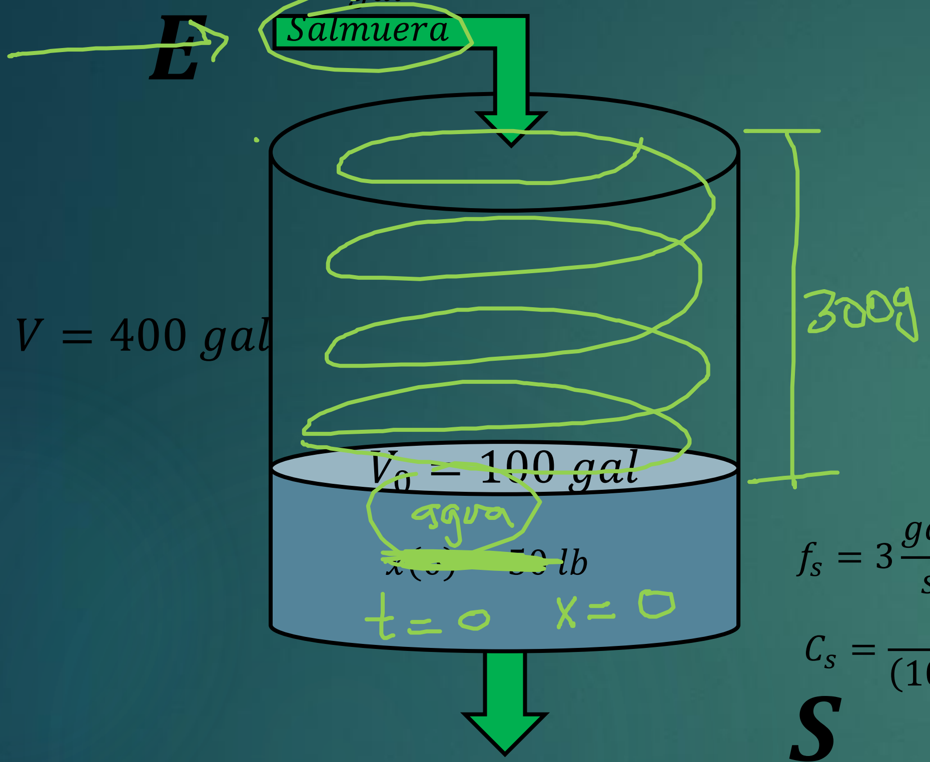
$$(100+2t)^{\frac{3}{2}}x = \int 5(100+2t)^{\frac{3}{2}}dt$$

$$(100+2t)^{\frac{3}{2}}\boxed{x} = (100+2t)^{\frac{5}{2}} + C$$

$$* \quad \boxed{x = (100+2t) + C(100+2t)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$f_e = 5\frac{gal}{s}$$

$$C_e = \frac{1lb}{gal}$$



$$f_s = 3\frac{gal}{s}$$

$$C_s = \frac{x\ lb}{(100+2t)gal}$$

$$\frac{dx}{dt} = E - S$$

$$Q = \frac{V}{t}$$

$$V = 300gal$$

$$Q = f_e - f_s = 5 - 3 = 2\ gal/s$$

$$t = \frac{V}{Q} = \frac{300gal}{2\ gal/s} = 150\ s$$

$$x = (100+2t) + C(100+2t)^{-\frac{3}{2}}$$

Condiciones Iniciales

Para $x(0) = 50lb$

$$50 = (100+2(0)) + C(100+2(0))^{-\frac{3}{2}}$$

$$C = -50{,}000$$

$$\boxed{\boldsymbol{x(t) = (100+2t) - 50{,}000(100+2t)^{-\frac{3}{2}}}}$$

*

?Qué cantidad de sal contendrá el tanque cuando este lleno de salmuera?

x = ?

cuando está lleno de salmuera ?

t = 150 seg.

$$t = 150s \quad x = ?$$

$$x(150) = \left(100+2(150)\right) - 50{,}000(100+2(150))^{-\frac{3}{2}}$$

$$x(150) = 393.75lb$$

Cuando el tanque esté lleno tendrá 393.75 lb de sal