MI3 Sección A
Primer Semestre 2021

Profesora: Inga. Ericka Cano
Aux: William Hernández

CLASE 07/04/2021

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGENEAS

MÉTODO ANULADOR

PROCEDIMIENTO

1. Encontrar la E D Homogénea Asociada

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

2. Resolver la ED Homogénea Asociada, para obtener la función complementaria y_c
3. **Cambiar la ED original a notación de Operador Diferencial**
4. **Encontrar el Operador Anulador de la función g(x) y aplicar a la E D original en notación de Operador Diferencial (Al aplicar el Operador Anulador se genera una ecuación homogénea)**
5. **Establecer la ecuación auxiliar(m) y resolver la ecuación auxiliar**
6. **Plantear la solución general.**
7. **Identificar los términos de y_c de la solución general.**
8. **Los términos restantes serán los que corresponden a la y_p**
9. Encontrar los valores de y_P
10. La solución general es:

$$y(x) = y_c + y_p$$

Resuelva utilizando el método anulador.

$Y(x) = Y_c + Y_p$

$$\boldsymbol{y'' + 4y' + 4y = 2x + 6}$$

Homogénea Asociada, para obtener la función complementaria y_c

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Ecuacion Caracteristica

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$(r+2)^2 = 0$$

$$(r+2)(r+2) = 0$$

$$r_c = -2\ multiplicidad\ 2$$

$$\boldsymbol{y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}}$$

ED original a notación de Operador Diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$$

$$D^2y + 4Dy + 4y \;= 2x + 6$$

$$(D^2 + 4D + 4)y = 2x + 6$$

Identificar Operador Anulador de $g(x)$

$$g(x) = 2x + 6$$

$$Operador\ Diferencial\ = D^2$$

$$y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$$

$$(D^2 + 4D + 4)y = 2x + 6$$

$$D^2(D^2 + 4D + 4)y = D^2(2x + 6) \to 0$$

$$(D^4 + 4D^3 + 4D^2)y = 0$$

Ecuación auxiliar

$$m^4 + 4m^3 + 4m^2 = 0$$

$$m^2(m^2 + 4m + 4) = 0$$

$r_c = -2, -2$

$$m = 0\ multiplicidad\ 2$$

$$m^2 + 4m + 4 = 0$$
$$(m + 2)^2 = 0$$
$$(m + 2)(m + 2) = 0$$
$$m = -2 multiplicidad\ 2$$

y_c $\quad$ y_p

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \underbrace{c_3}_{r=0} + \underbrace{c_4 x}_{r=0}}$$

Identificamos y_c y y_p

$$y_c = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$$

$$\rightarrow \quad y(x) = \boldsymbol{c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}} + \underbrace{\boldsymbol{c_3 + c_4x}}_{y_p}$$

Cambiamos las constantes de y_p

$$y_p = A + Bx$$

$$y_p' = B$$

$$y_p'' = 0$$

$$y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$$

$$0 + 4B + 4(A + Bx) = 2x + 6$$

$$(4A + 4B) + 4Bx = 2x + 6$$

x:

$$4B = 2$$

$$B = \frac{1}{2}$$

$$4A + 4B = 6$$

$$A = \frac{6 - 4B}{4} = \frac{6-2}{4}$$

$$A = 1$$

$$y_p = 1 + \frac{1}{2}x$$

$$y(x) = y_c + y_p$$

$$\boldsymbol{y(x) = \underbrace{c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}}_{y_c} + \underbrace{1 + \frac{1}{2}x}_{y_p}}$$

Ejemplo

Determine las soluciones generales de las siguientes Ecuaciones Diferenciales utilizando el método anulador.

$Y(x) = Y_c + Y_p$

$$y'' - y' - 12y = e^{4x}$$

Encontrar la E D Homogénea Asociada

$$y'' - y' - 12y = 0$$

Función complementaria y_c

Ecuacion Caracteristica

$$r^2 - r - 12 = 0$$

$$(r+3)(r-4) = 0$$

$$r_c = -3{,}4$$

$$y_c = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{4x}$$

$$y'' - y' - 12y = e^{4x}$$

ED original en términos de Operador Diferencial

$$D^2y - Dy - 12y = e^{4x}$$

$$(D^2 - D - 12)y = e^{4x}$$

g(x)

Identificar el Operador Anulador de $g(x)$

$$g(x) = e^{4x}$$

$$Operador\ Diferencial = (D - 4)$$

$$y'' - y' - 12y = e^{4x}$$

$$(D^2 - D - 12)y = e^{4x}$$

$$(D-4)(D^2 - D - 12)y = \cancel{(D-4)e^{4x}} \to 0$$

$$(D-4)(D^2 - D - 12)y = 0$$

Ecuación auxiliar

$$(m-4)(m^2 - m - 12) = 0$$

$$(m-4)(m+3)(m-4) = 0$$

$$m = -3, \qquad \underbrace{4\ multiplicidad}\ 2$$

Asi la solucion general debe ser:

$$y(x) = \underbrace{c_1 e^{-3x} + c_2 e^{4x}}_{Y_c} + \underbrace{c_3 x e^{4x}}_{Y_p}$$

Identificamos y_c y y_p

$$y_c = c_1e^{-3x} + c_2e^{4x}$$

$$y = \underbrace{c_1e^{-3x} + c_2e^{4x}}_{y_c} + \underbrace{c_3xe^{4x}}_{y_p}$$

Cambiamos las constantes de y_p

$$y_p = Axe^{4x}$$

$$y_p' = 4Axe^{4x} + Ae^{4x}$$

$$y_p'' = 16Axe^{4x} + 8Ae^{4x}$$

Sustituimos y_p y sus derivadas en la E D original

$$y'' - y' - 12y = e^{4x}$$

$$16Axe^{4x} + 8Ae^{4x} - (4Axe^{4x} + Ae^{4x}) - 12Axe^{4x} = e^{4x}$$

$$\cancel{16Axe^{4x}} + 8Ae^{4x} - \cancel{4Axe^{4x}} - Ae^{4x} - \cancel{12Axe^{4x}} = e^{4x}$$

$$7Ae^{4x} = e^{4x}$$

$$7Ae^{4x} = e^{4x}$$

$Para \quad e^{4x}$:

$$7A = 1$$

$$A = \frac{1}{7}$$

$$y_p = Axe^{4x}$$

$$y_p = \frac{1}{7}xe^{4x}$$

$$y(x) = y_c + y_p$$

$$\boldsymbol{y(x) = \underbrace{c_1e^{-3x} + c_2e^{4x}}_{y_c} + \underbrace{\frac{1}{7}xe^{4x}}_{y_p}}$$

PRUEBA DE CONOCIMIENTO

Determine la solucion general de las siguiente Ecuacion Diferencial, resolviendo por el metodo del anulador

$$y'' + 4y' = \overset{D^3}{x^2} + \overset{D^2+1}{\sin x}$$

$D^3(D^2+1)$

$Y(x) = Y_c + Y_p$

$Y_c = C_1 + C_2 e^{-4x}$

$Y_p = Ax + Bx^2 + Cx^3 + E\cos x + F\,\text{sen}\,x$

Solución

$$y(x) = \underbrace{c_1 + c_2 e^{-4x}}_{Y_c} + \underbrace{\frac{1}{32}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{4}{17}\cos x - \frac{1}{17}\sin x}_{Y_p}$$

MÉTODO VARIACIÓN DE PARÁMETROS

MÉTODO VARIACIÓN DE PARÁMETROS

El método se utiliza para resolver EDO de orden superior no homogéneas con coeficientes constante y cualquier expresión de $g(x)$, en especial para expresiones como $\tan(x)\,, \csc(x), \ln x$ o expresiones racionales

$$(1)\; y'' + P(x)y' + Q(x)y = g(x)$$

Cuidado!!!

Recordando que la solución general de una E D No Homogénea es

$$y(x) = y_c + y_p$$

En variación de parámetros se plantea y_p como

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

Donde u_1 y u_2 son funciones desconocidas que deber ser determinadas.