Programación II

Recursión

Universidad Nacional de Rosario.
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.

Breve repaso de funciones

Una función es un fragmento de código que permite efectuar una operación determinada. `abs`, `max`, `min` y `len` son ejemplos de funciones *built-in* o incluidas en Python.

- la función `abs` permite calcular el valor abosluto de un número.
- la función `len` permite obtener la longitud de una cadena de texto.
- las funciones `min` y `max` permiten obtener el mínimo y el máximo en un conjunto de números.

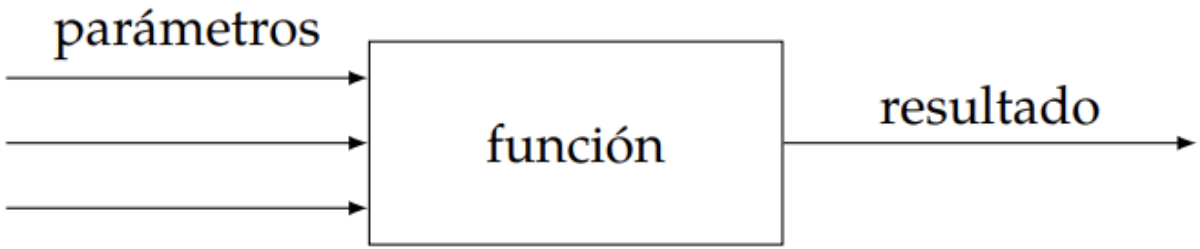
Breve repaso de funciones

Una función es un fragmento de código que permite efectuar una operación determinada. `abs`, `max`, `min` y `len` son ejemplos de funciones *built-in* o incluidas en Python.

- la función `abs` permite calcular el valor abosluto de un número.
- la función `len` permite obtener la longitud de una cadena de texto.
- las funciones `min` y `max` permiten obtener el mínimo y el máximo en un conjunto de números.

Una función puede recibir 0 o más *parámetros* o *argumentos* (expresados entre paréntesis, y separados por comas), efectúa una operación y devuelve un *resultado*. Por ejemplo, la función `abs` recibe un único parámetro (un número) y su resultado es el valor absoluto del número.

Breve repaso de funciones



Breve repaso de funciones

Obviamente, además de las funciones incluidas en Python podemos definir nuestras propias funciones utilizando la siguiente sintaxis.

```
def nombre_función(parámetros):
        código
        return retorno
```

Por ejemplo:

```
def f(x: int) -> int:
    return 2*x
y = f(3)
print(y) # 6
```

Breve repaso de funciones

- El **principio de reusabilidad**, que nos dice que si por ejemplo tenemos un fragmento de código usado en muchos sitios, la mejor solución sería pasarlo a una función. Esto nos evitaría tener código repetido, y que modificarlo fuera más fácil, ya que bastaría con cambiar la función una vez.

Breve repaso de funciones

- El **principio de reusabilidad**, que nos dice que si por ejemplo tenemos un fragmento de código usado en muchos sitios, la mejor solución sería pasarlo a una función. Esto nos evitaría tener código repetido, y que modificarlo fuera más fácil, ya que bastaría con cambiar la función una vez.
- El **principio de modularidad**, que defiende que en vez de escribir largos trozos de código, es mejor crear módulos o funciones que agrupen ciertos fragmentos de código en funcionalidades específicas, haciendo que el código resultante sea más fácil de leer

Breve repaso de funciones

Argumentos por posición

```
def resta(a: float, b: float) -> float:
    return a - b

resta(5, 3) # 2
```

Breve repaso de funciones

Argumentos por nombre

```
def resta(a: float, b: float) -> float:
    return a - b

resta(a=5, b=3) # 2
resta(a=5, c=3) # Error!
```

Breve repaso de funciones

Argumentos por defecto

```
def suma(a: float, b: float, c: float =0) -> float:
    return a + b + c

resta(a=5, b=3) # 8
resta(a=5, b=2, c=3) # 10
```

Breve repaso de funciones

La sentencia `return`

El uso de la sentencia return permite realizar dos cosas:

Breve repaso de funciones

La sentencia `return`

El uso de la sentencia return permite realizar dos cosas:

- Salir de la función y transferir la ejecución de vuelta a donde se realizó la llamada. Cuando se ejecuta la sentencia `return`, se detiene la ejecución de la función y se "vuelve.º retorna al punto donde fue llamada. Por ello, sólo llamamos a `return` una vez hemos acabado de hacer lo que teníamos que hacer en la función.

Breve repaso de funciones

La sentencia `return`

El uso de la sentencia return permite realizar dos cosas:

- Salir de la función y transferir la ejecución de vuelta a donde se realizó la llamada. Cuando se ejecuta la sentencia `return`, se detiene la ejecución de la función y se "vuelve.º retorna al punto donde fue llamada. Por ello, sólo llamamos a `return` una vez hemos acabado de hacer lo que teníamos que hacer en la función.
- Devolver uno o varios resultados", fruto de la ejecución de la función. Es posible devolver mas de una variable, separadas por comas.

Imprimir versus devolver

Supongamos que tenemos una medida de tiempo expresada en horas, minutos y segundos, y queremos calcular la cantidad total de segundos. Cuando nos disponemos a escribir una función en Python para resolver este problema nos enfrentamos con dos posibilidades:

1. Devolver el resultado con la instrucción `return`.
2. Imprimir el resultado llamando a la función `print`.

Opción 1: Imprimir

```
def imprimir_segundos(
    horas: int, minutos: int, segundos: int
) -> None:
    """Transforma en segundos una medida de tiempo
    horas, minutos y segundos"""
    print (
        3600 * horas
        + 60 * minutos
        + segundos
    )
```

Opción 2: Devolver

```
def devolver_segundos(
    horas: int, minutos: int, segundos: int
) -> int:
    """Transforma en segundos una medida de tiempo
    horas, minutos y segundos"""
    return (
        3600 * horas
        + 60 * minutos
        + segundos
    )
```

Imprimir versus devolver

```
>>> imprimir_segundos(1, 10, 10)
4210
>>> devolver_segundos(1, 10, 10)
4210
```

Ambas funciones parecen comportarse igual, pero hay una gran diferencia. La función `devolver_segundos` nos permite hacer esto:

```
>>> s1 = devolver_segundos(1, 10, 10)
>>> s2 = devolver_segundos(2, 32, 20)
>>> s1 + s2
13350
```

En cambio, la función `imprimir_segundos` nos impide utilizar el resultado de la llamada para hacer otras operaciones; lo único que podemos hacer es mostrarlo en pantalla

Imprimir versus devolver

Una función es más reutilizable si devuelve un resultado (utilizando `return`) en lugar de imprimirlo (utilizando `print`). Análogamente, una función es más reutilizable si recibe parámetros en lugar de leer datos mediante la función `input`.

Funciones que llaman a otras funciones

Naturalmente, dentro de una función podemos llamar a otras funciones.

```
def f() -> None:
    x = 50
    a = 20
    print("En f, x vale", x)

def g() -> None:
    x = 10
    b = 45
    print("En g, antes de llamar a f, x vale", x)
    f()
    print("En g, después de llamar a f, x vale", x)
```

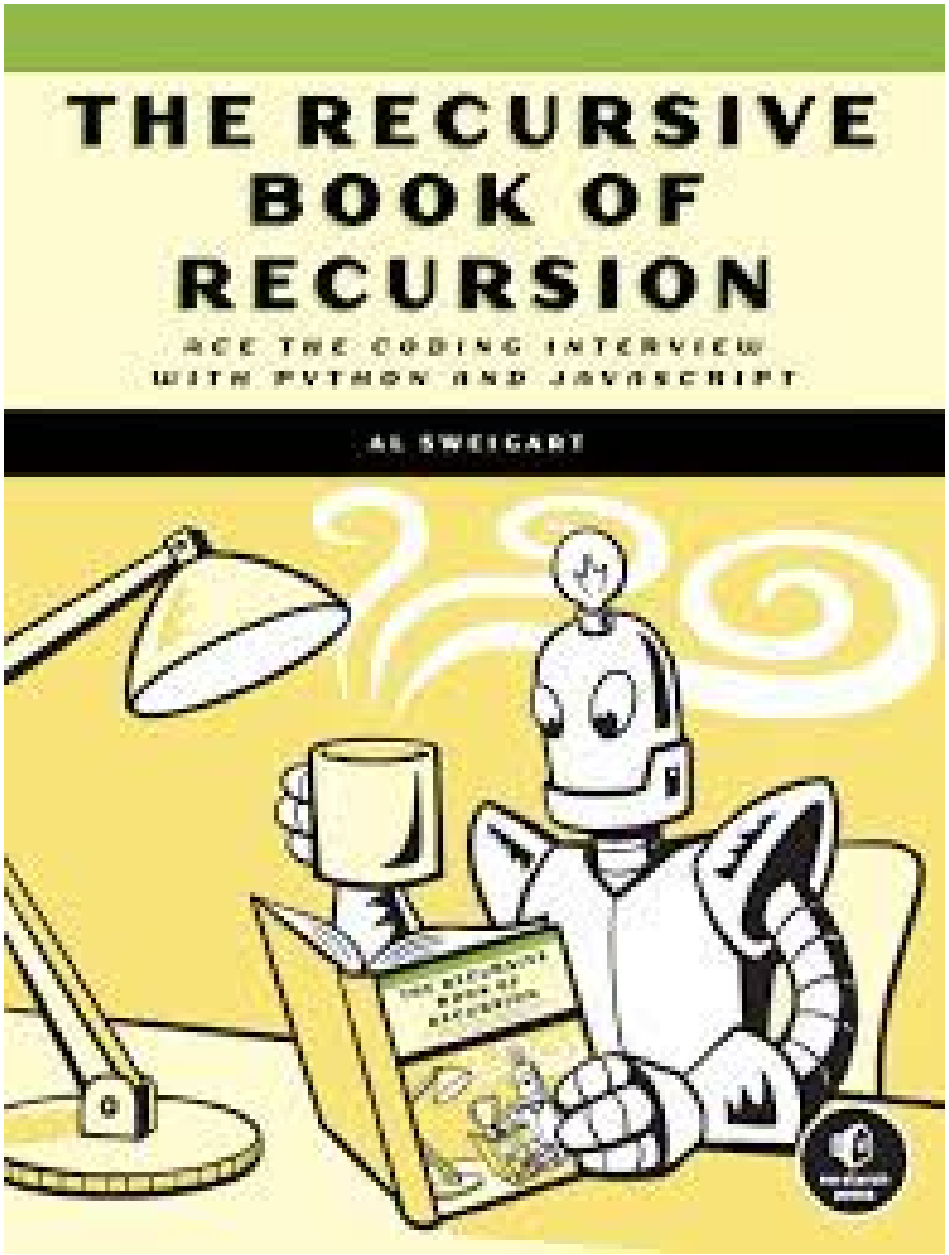
Scope de variables

Las variables y los parámetros que se declaran dentro de una función no existen fuera de ella, y por eso se las denomina **variables locales**. Fuera de la función se puede acceder únicamente al valor que devuelve mediante `return`.

La recursión y cómo puede ser que funcione

Estamos acostumbrados a escribir funciones que llaman a otras funciones. Pero lo cierto es que nada impide que en Python (y en muchos otros lenguajes) **una función se llame a sí misma**.

Y lo más interesante es que esta propiedad, que se llama **recursión**, permite en muchos casos encontrar soluciones muy elegantes para determinados problemas.


THE RECURSIVE BOOK OF RECURSION
ACE THE CODING INTERVIEW WITH PYTHON AND JAVASCRIPT
AL SWEIGART

Caso base y caso recursivo

Cualquier función recursiva tiene dos secciones de código claramente divididas:

- Por un lado, tiene que existir siempre una condición en la que la función retorna sin volver a llamarse. Es muy importante porque de lo contrario, la función se llamaría de manera indefinida. A este se lo llama **caso base** de la recursión.
- Por otro lado tenemos la sección en la que la función se llama a sí misma, con alguna variación en sus argumentos. A esto se lo llama **caso recursivo** de la recursión.

Una función recursiva matemática

Es muy común tener definiciones inductivas de operaciones, como por ejemplo la operación factorial.

Una función recursiva matemática

Es muy común tener definiciones inductivas de operaciones, como por ejemplo la operación factorial.

El factorial de un número entero no negativo n, denotado como $n!$, es el producto de todos los enteros positivos desde 1 hasta n.

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Este tipo de definición se traduce naturalmente en una función en Python:

```
def factorial(n: int) -> int:
    """Precondición: n entero >= 0
    Devuelve: n!"""
    if n == 0:
        return 1
    return n * factorial(n - 1)
```

Factorial

Este tipo de definición se traduce naturalmente en una función en Python:

```
def factorial(n: int) -> int:
    """Precondición: n entero >= 0
    Devuelve: n!"""
    if n == 0:
        return 1
    return n * factorial(n - 1)
```

Esta es la ejecución del factorial para $n = 0$ y para $n = 3$.

```
>>> factorial(0)
1
>>> factorial(3)
6
```

Factorial

```
def factorial(n: int) -> int:
    """Precondición: n entero >= 0
    Devuelve: n!"""
    if n == 0:
        return 1
    return n * factorial(n - 1)
```

El sentido de la instrucción `n * factorial(n - 1)` es exactamente el mismo que el de la definición inductiva: para calcular el factorial de `n` se debe multiplicar `n` por el factorial de `n - 1`.
Dos piezas fundamentales para garantizar el funcionamiento de este programa son:

- Que se defina un caso base (en este caso la indicación no recursiva de cómo calcular `factorial(0)`.
- Que el argumento de la función respete la precondición de que `n` debe ser un entero mayor o igual que 0.

Algoritmos recursivos y algoritmos iterativos

Llamaremos **algoritmos recursivos** a aquellos que realizan llamadas recursivas para llegar al resultado, y **algoritmos iterativos** a aquellos que llegan a un resultado a través de una iteración mediante un ciclo definido o indefinido.

Todo algoritmo recursivo puede expresarse como iterativo y viceversa. Sin embargo, según las condiciones del problema a resolver podrá ser preferible utilizar la solución recursiva o la iterativa.

Factorial iterativo

Una posible implementación iterativa de la función factorial podría ser la siguiente:

```
def factorial(n: int) -> int:
    """Precondición: n entero >= 0
    Devuelve: n!"""
    fact = 1
    for num in range(n, 1, -1):
        fact *= num
    return fact
```

Un ejemplo de recursion eficiente

La función `potencia(b, n)` puede escribirse del siguiente modo:

$$b^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ b^{\frac{n}{2}} \cdot b^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ es par} \\ b^{\frac{n}{2}} \cdot b^{\frac{n}{2}} \cdot b & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Antes de programar una función recursiva, es importante distinguir cual es el caso base y cual es el caso recursivo. En este caso, tomaremos 0 como el caso base, y el caso recursivo tendra dos partes, una para cuando n es par y una para cuando n es impar.

Un ejemplo de recursion eficiente

```
def potencia(b: int ,n: int) -> int:
  """Precondición: n >= 0
  Devuelve: b^n."""
  if n == 0:
    # caso base
    return 1
  if n % 2 == 0:
    # caso n par
    p = potencia(b, n // 2)
    return p * p
  else:
    # caso n impar
    p = potencia(b, (n - 1) // 2)
    return p * p * b
```

Un ejemplo de recursion eficiente

Comparando con la versión iterativa para calcular la potencia, vemos que la recursión es mas eficiente, pues hay que multiplicar menos veces

```
def potencia(b: int, n: int) -> int:
    """Precondición: n >= 0
    Devuelve: b^n."""
    p = 1
    for _ in range(n):
        p *= b
    return p
```

Un ejemplo de recursión poco eficiente

Del ejemplo anterior se podría deducir que siempre es mejor utilizar algoritmos recursivos; sin embargo, como ya se dijo, cada situación debe ser analizada por separado.

Un ejemplo clásico en el cual la recursión tiene un resultado muy poco eficiente es el de los números de Fibonacci. La sucesión de Fibonacci está definida por la siguiente relación:

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 1$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \quad \text{para } n > 1$$

Los primeros números de esta sucesión son:
$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$.

Definición Recursiva de Fibonacci

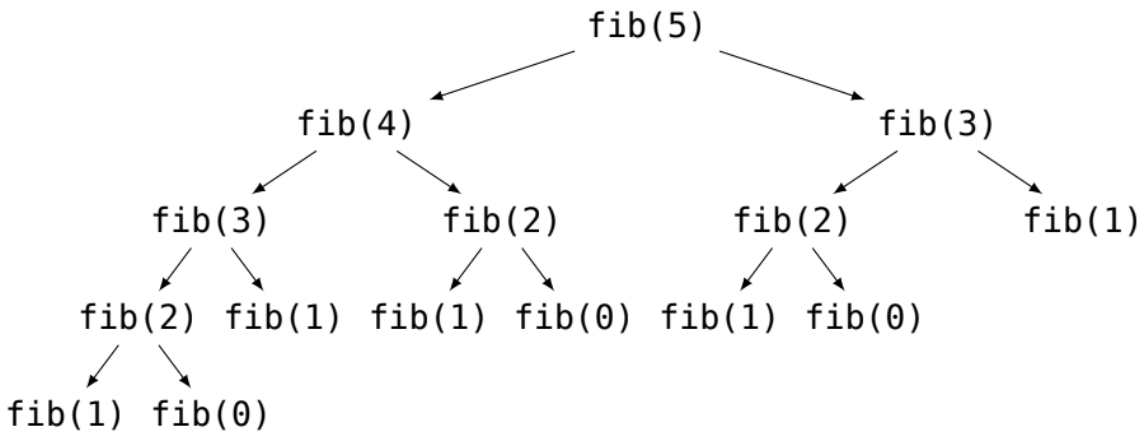
Dada la definición recursiva de la sucesión, puede resultar muy tentador escribir una función que calcule en valor de `fib(n)` de la siguiente forma:

```
def fib(n: int) -> int:
    """Precondición: n >= 0.
    Devuelve: el número de Fibonacci número n."""
    if n == 0 or n == 1:
        return n
    return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

Si bien esta implementación es muy sencilla y elegante, también es **extremadamente poco eficiente**: para calcular `fib(n - 1)` es necesario calcular `fib(n - 2)`, que luego volverá a ser calculado para obtener el valor `fib(n)`.

Árbol de llamadas

Se pueden ubicar las llamadas recursivas en un diagrama de arbol, lo que hace explicito que es poco eficiente.



Definición Iterativa de Fibonacci

Resulta más conveniente en este caso definir una versión iterativa:

```
def fib(n: int) -> int:
    """Precondición: n >= 0.
    Devuelve: el número de Fibonacci número n."""
    if n == 0 or n == 1:
        return n
    ant2 = 0
    ant1 = 1
    for i in range(2, n + 1):
        fibn = ant1 + ant2
        ant2 = ant1
        ant1 = fibn
    return fibn
```

En el caso iterativo se calcula el número de Fibonacci de forma incremental, de modo que para obtener el valor de `fib(n)` se harán `n - 1` iteraciones.

Iteración vs Recursión

En definitiva, vemos que un algoritmo recursivo **no** es mejor que uno iterativo, ni viceversa. En cada situación será conveniente analizar cuál algoritmo provee la solución al problema de forma más clara y eficiente.

Diseño de funciones recursivas

Ejercicio Escribir una función recursiva que sume los elementos de una lista de números enteros en Python.

- Lo primero que debemos hacer es encontrar un caso base. El caso base debe ser sencillo de calcular, muchas veces ni siquiera es necesario calcular nada. Si la lista es vacía, es obvio que la suma de sus elementos será 0.
- Luego, debemos pensar como reducir una lista no vacía para que llegue a tener 0 elementos eventualmente. Hay muchas formas de hacer eso. La forma mas sencilla es quitar un elemento de la lista en cada llamada recursiva

```
def sumar(lista: list[int]) -> int:
  if len(lista) == 0:
    return 0
  return lista[0] + sumar(lista[1:])
```

Errores comunes

Los errores mas comunes al escribir funciones recursivas son dos:

- No escribir un caso base para la recursión.
- No asegurarse de que el caso recursivo converja a un caso base.

En ambos casos, es usual que el interprete de Python nos muestre un error: RecursionError: maximum recursion depth exceeded

Conclusiones

- La **recursión** es el proceso en el cual una función se invoca a sí misma. Este proceso **permite crear un nuevo tipo de ciclos**.

- Siempre que se escribe una función recursiva es importante considerar el **caso base** (el que detendrá la recursión) y el **caso recursivo** (el que realizará la llamada recursiva). **Una función recursiva sin caso base es equivalente a un bucle infinito**.

- **Una función no es mejor ni peor por ser recursiva**. En cada situación a resolver puede ser conveniente utilizar una solución recursiva o una iterativa. Para elegir una o la otra será necesario analizar las características de elegancia y eficiencia.

¿PREGUNTAS?

Referencias


Apunte de la Facultad de Ingeniería de la UBA, 2da Edición, 2016.
Algoritmos y Programación I: Aprendiendo a programar usando Python como herramienta.
Unidad 17


https://ellibrodepython.com/