Programación II

Tecnicatura Universitaria en Inteligencia Artificial

2023

Teoría de grafos

1. Grafos simples

1.1. Ejemplo motivador

La Figura 1 muestra un recorte de un mapa de la provincia de Santa Fe, particularmente, de Rosario y alrededores. Dicho mapa señala algunas ciudades del sur de la provincia, junto con algunas de las rutas más importantes que las conectan.

Figura 1: Mapa de Rosario y sus alrededores

Supongamos que, como parte de un proyecto de mejoramiento del estado de los caminos, la provincia de Santa Fe desea recorrerlos para determinar en dónde sería conveniente invertir en luminaria y señalética. Una cuestión a resolver es cómo armar el recorrido que se hará, de modo que sea lo más económico posible (en tiempo y nafta). Siendo que el recorrido comienza en Rosario (porque el equipo de trabajo vive allí), lo ideal sería recorrer cada camino exactamente una vez y regresar de nuevo al punto de partida. Lo que no sabe el encargado del proyecto (porque desgraciadamente nunca estudió teoría de grafos) es que, en este caso, hacer eso es imposible. Analicemos esta situación.

Este problema puede *modelarse* como un **grafo**. Los grafos son diagramas con dos componentes fundamentales: puntos y líneas (que conectan dichos puntos). Los puntos se llaman *vértices* o *nodos*, mientras que las líneas se llaman *aristas*. En la Figura 2 se muestra el mismo mapa representado como un grafo. Los nodos representan a las ciudades, mientras que las aristas indican la existencia de una ruta entre las ciudades que une. Notemos que las rutas que no unían ciudades indicadas no aparecen en el grafo (porque no son pertinentes al problema), y que, tanto Granadero Baigorria como Villa Gobernador Galvez, se representan en el mismo punto que Rosario.

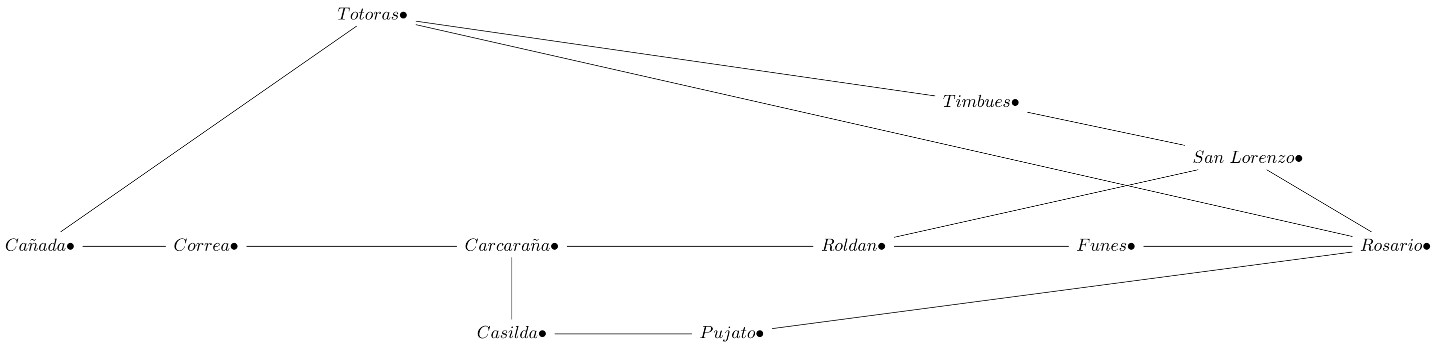


Figura 2: Rosario y sus alrededores representado como grafo

Lo primero que debe notarse es que en un grafo solo se está representando la existencia de ciertos nodos, y las conexiones entre ellos. Existen otros aspectos del grafo que podríamos observar en la figura de arriba. Por ejemplo, la posición relativa de los nodos (Roldán está a la izquierda de Funes), o la longitud de las distintas aristas (Pujato está más cerca de Casilda que de Rosario). Sin embargo, estos aspectos no aportan información significativa al modelo (¡ni son pertinentes para nuestro problema, por eso un grafo es útil para resolverlo!). Recordemos que lo que queremos encontrar es un recorrido que comience en Rosario, recorra cada arista una única vez, y retorne al punto de partida. Así, por ejemplo, el grafo de la Figura 3 es igualmente válido para representar el problema en cuestión (aunque Roldán ya no esté a la izquierda de Funes, o Pujato ya no no esté más cerca de Casilda que de Rosario).

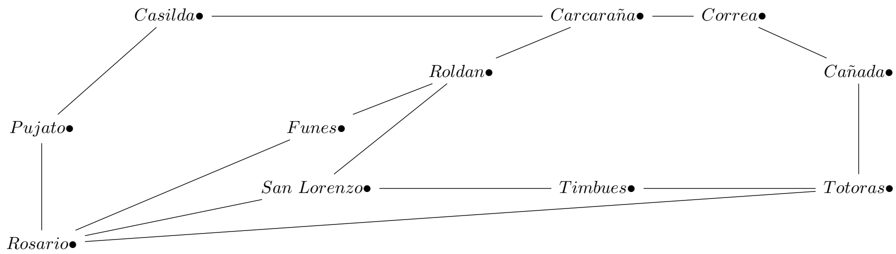


Figura 3: Rosario y sus alrededores representado como grafo (alternativa)

Gracias a la teoría de grafos, es posible demostrar que tal recorrido que estamos buscando es imposible de lograr en una situación como la que tenemos. Volveremos a esto en futuras secciones.

A lo largo de este apunte veremos definiciones y conceptos fundamentales de la teoría de grafos, algunos algoritmos famosos, y una librería de `python` muy útil para trabajar con ellos.

1.2. Conceptos básicos sobre grafos

Definición. Un **grafo** (también llamado grafo no dirigido o grafo simple) G consiste en un conjunto de vértices (o nodos) y un conjunto E de aristas (o arcos) tal que cada arista $e \in E$ se asocia con un **par no ordenado** de vértices. Si la arista e está asociada con los vértices v y w, se escribe $e = (v, w)$ o $e = (w, v)$. Es importante notar que ambas son exactamente la misma arista.

El grafo de la Figura 3 es un grafo simple: *Casilda* y *Pujato* son ejemplos de nodos, y el par no ordenado $(Casilda, Pujato)$ es una arista del grafo.

Definición Se dice que una arista $e = (v, w)$ en una grafo es *incidente* sobre v y w. A su vez, se dice que los vértices v y w son incidentes sobre e y que son **adyacentes** (o *vecinos*) entre ellos.

Por ejemplo, $Funes$ y $Roldan$ son vértices vecinos, mientras que $Pujato$ y $Totoras$ no lo son.

Si G es un grafo con vértices V y aristas E, se escribe $G = (V, E)$. Usualmente, se pide que los conjuntos E y V sean finitos, y que V sea no vacío.

El grafo de la Figura 3 se puede definir como $G = (V, E)$, donde

- $V = \{Casilda, Caracaraña, Correa, Roldan, Cañada, Pujato, Funes, San\ Lorenzo, Timbues, Totoras, Rosario\}$
- $E = \{(Casilda, Caracaraña), (Carcaraña, Correa), (Casilda, Pujato), (Carcaraña, Roldan), (Correa, Cañada), (Cañada, Totoras), (Roldan, Funes), (Pujato, Rosario), (Funes, Rosario), (Funes, San\ Lorenzo), (San\ Lorenzo, Timbues), (Timbues, Totoras), (Rosario, San\ Lorenzo), (Rosario, Totoras)\}$

Definición. Sea un grafo $G = (V, E)$, un **camino** en dicho grafo es una sucesión de vértices $v_0, v_1, ..., v_n$, y aristas $l_0, l_1, ..., l_{n-1}$, tales que $l_i = (v_i, v_{i+1})$ para todo $i \in \{0, 1, ...n\}$. La **longitud** del camino se determina por la cantidad de aristas que recorre, en este caso, n.

En la Figura 4 se muestra el camino formado por la sucesión de vértices *Rosario*, *Funes*, *Roldán*, *San Lorenzo*, *Timbues*, *Totoras*, y las aristas (*Rosario*, *Funes*), (*Funes*, *Roldán*), (*Roldán*, *San Lorenzo*), (*San Lorenzo*, *Timbues*), (*Timbues*, *Totoras*). La longitud de dicho camino es 5.

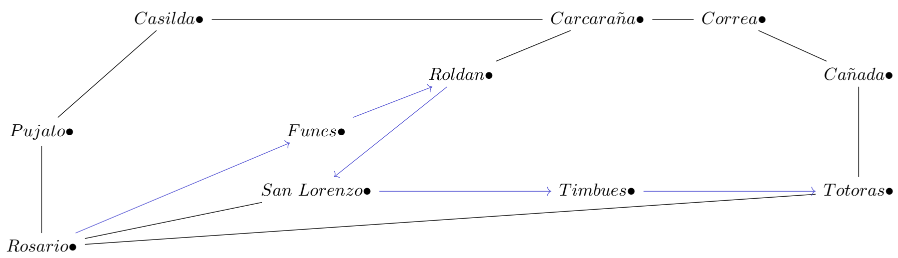


Figura 4: Camino

1.3. Retomando el ejemplo motivador

Ahora que sabemos conceptos básicos sobre teoría de grafos, podemos escribir el problema del ejemplo introductorio formalmente como: ¿Existe un camino desde Rosario hacia Rosario que pase por cada arista exactamente una vez?

Es posible demostrar que, para desgracia del encargado el proyecto, no es posible construir un camino tal. Para convencernos de esto intuitivamente, supongamos que existe tal trayectoria, y consideremos el vértice *Funes*. Cada vez que se llega a *Funes* por alguna arista, se debe salir de *Funes* por una arista diferente. Más aún, cada arista que toca *Funes* se debe usar. Entonces las aristas en *Funes* ocurren en pares. Se concluye que un número par de aristas debe tocar *Funes*. Como tres aristas tocan a *Funes*, se tiene una contradicción. Por lo tanto, no existe un camino del vértice *Rosario* al vértice *Rosario* en el grafo que pase por cada arista una única vez. El mismo razonamiento se puede aplicar a un grafo arbitrario.

2. Grafos dirigidos

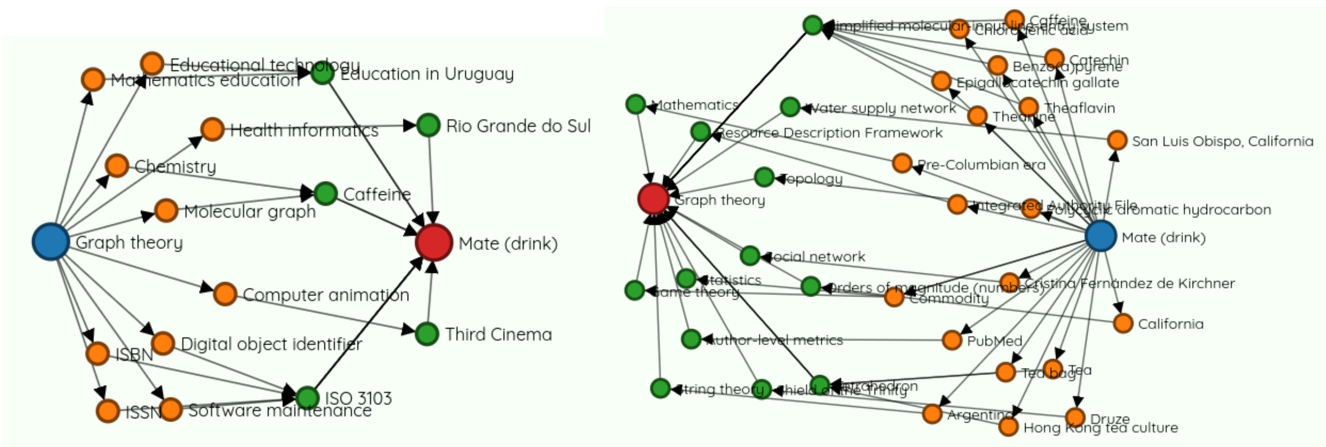
2.1. Ejemplo motivador

Wikipedia es una enciclopedia libre, políglota y editada de manera colaborativa. Fue creada el 15 de enero de 2001, y es la mayor y más popular obra de consulta en Internet. Una de las características que hace tan fácil la navegación a través de sus artículos son sus enlaces (o *links*) internos. Los enlaces internos son hipervínculos a otro recurso (por ejemplo, un artículo) dentro del mismo dominio. Además de permitir a los usuarios navegar de un tema a otro de manera rápida y sencilla, los enlaces entre artículos conectan conceptos, lo que permite a los lectores profundizar en un tema específico o explorar temas relacionados.

El *wiki juego*[1], también conocido como la *carrera de Wikipedia*, es un juego en donde los participantes (uno o más) comienzan posicionados en el mismo artículo seleccionado arbitrariamente, y deben navegar hasta otro artículo pre-seleccionado. El objetivo es llegar al artículo destino en la menor cantidad de clicks. ¿Nos suena a algo?

El wiki juego puede modelarse como la búsqueda de un camino de longitud mínima entre dos vértices determinados de un grafo, en donde los vértices representan artículos y, las aristas, un enlace interno entre ellos. Sin embargo, hay algo novedoso a observar sobre los enlaces internos: son direccionales. A diferencia de las rutas de Santa Fe, que son bidireccionales (o doble-mano), los enlaces internos tienen un sentido definido. Así, por ejemplo, que el artículo Mate (infusión) de la Wikipedia en Español, tenga un enlace interno al artículo Estratificación social, no significa que necesariamente también pase a la inversa.

A modo de ejemplo, en la Figura 5 se muestra una representación de los enlaces internos de Wikipedia como grafos dirigidos. En particular, se muestran todos los caminos mínimos (de longitud 3) desde el artículo *Mate (drink)* hasta el artículo *Graph Theory*, y viceversa (ambos artículos de la Wikipedia en inglés).



(a) Caminos mínimos desde Graph Theory a Mate (b) Caminos mínimos desde Mate a Graph Theory

Figura 5: Representación de enlaces internos de Wikipedia como grafos dirigidos.

2.2. Conceptualización formal

Definición. Un **grafo dirigido** G consiste en un conjunto V de vértices y un conjunto E de aristas tal que cada arista $e \in E$ se asocia con un **par ordenado** de vértices. Si la arista e está asociada con los vértices u y w, se escribe $e = (v, w)$. Es importante considerar que en este contexto las aristas (v, w) y (w, v) representan cosas distintas. La Figura 6 muestra un grafo dirigido.

[1] Disponible para jugar en `https://www.thewikigame.com/`.

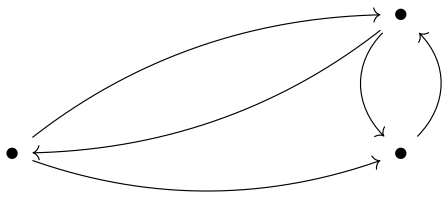
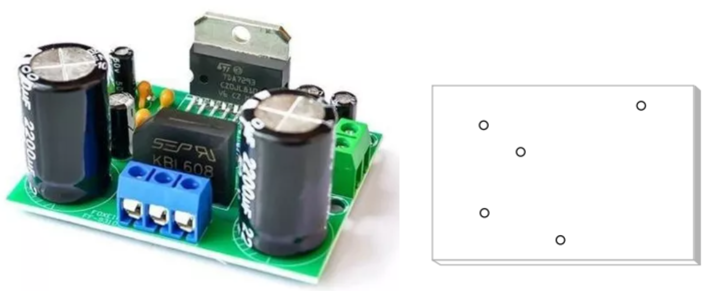


Figura 6: Grafo dirigido

3. Grafos ponderados

3.1. Ejemplo motivador

A menudo, en la manufactura, es necesario hacer agujeros en hojas de material específico para luego atornillar componentes a estas placas. Supongamos que una fábrica está diseñando un nuevo tipo de módulo amplificador. Como parte de este proceso, se deben diseñar las plaquetas electrónicas correspondientes. Dichas plaquetas necesitarán contar con ciertos agujeros, dispuestos en lugares específicos para, por ejemplo, la colación de las borneras requeridas. Los agujeros se perforan utilizando un taladro controlado por computadora. Para ahorrar tiempo y dinero, el taladro debe moverse tan rápido como sea posible. En la figura 7 se muestra un ejemplo de módulo amplificador junto con una representación simplificada del mismo.



(a) Ejemplo (b) Representación simplificada

Figura 7: Módulo amplificador

Para analizar el problema de minimización (o al menos, disminución) del tiempo utilizado en hacer todos los hoyos necesarios podemos utilizar un **grafo ponderado** como modelo. Los vértices del grafo corresponden a los agujeros. Cada par de vértices se conecta por una arista. En cada arista se escribe el tiempo que toma mover el taladro entre los hoyos correspondientes. En la Figura 8 se presenta dicho grafo.

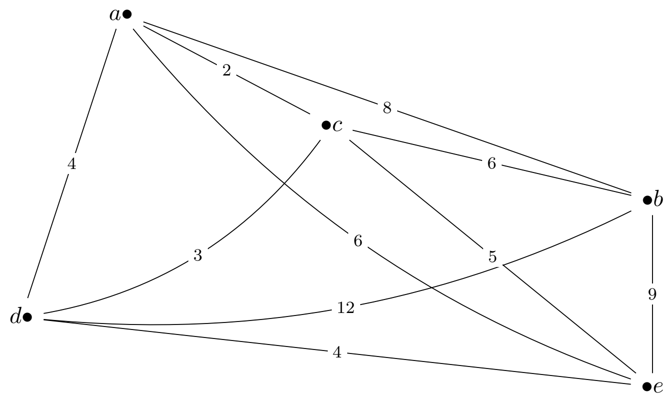


Figura 8: Módulo amplificador representado como grafo

Es interesante notar que este problema es muy distinto al analizado en la sección 1.1. Allí se buscaba encontrar un camino que comenzara y terminara en Rosario, y recorriera exactamente una vez cada una de las rutas de Santa Fe. Ahora no estamos interesado en un camino que recorra todas las aristas, sino en un camino que recorra todos los vértices exactamente una vez. Además, cada arista tiene un costo que hay que considerar, puesto que queremos encontrar el recorrido óptimo.

La tabla 1 muestra todas las rutas que comienzan en a y terminan en e, pasando por todos los nodos intermedios una vez.

Camino	Costo
a, b, c, d, e	21
a, b, d, c, e	28
a, c, b, d, e	24
a, c, d, b, e	26
a, d, b, c, e	27
a, d, c, b, e	22

Cuadro 1: Costos de recorrer todos los nodos comenzando en a y terminando en e

De todas las rutas presentadas, la que visita los vértices a, b, c, d, e, en ese orden, es la de longitud mínima. Por supuesto, un par diferente de vértices de inicio y fin podría producir una ruta aún más corta. Numerar todas las trayectorias posibles es un método muy ineficiente para encontrar el camino de longitud mínima que visita todos los vértices exactamente una vez. Por desgracia, nadie conoce un método que sea mucho más práctico para grafos arbitrarias. Este problema es una versión del *problema del agente viajero*. Se investiga actualmente para producir mejores aproximaciones a la respuesta, dado que la respuesta óptima es muy difícil de conseguir.

3.2. Conceptualización formal

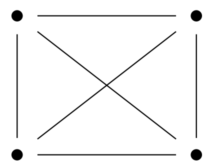
Definición. Llamamos **grafo ponderado** o **grafo con pesos** a un grafo $G = (V, E)$ que cuenta con una función $w : E \to \mathbb{R}$, tal que $w(e)$ corresponde al peso de la arista e para todo $e \in E$. Es decir, un grafo ponderado es aquel para el que cada arista tiene asignado un peso. Notamos $w(i, j)$ al peso de la arista que va de i a j, si esta existe.

Definición. La **longitud de un camino** en un grafo con pesos es la suma de los pesos de las aristas que recorre dicho camino. Es importante notar que la definición es distinta a la dada para grafos simples.

4. Grafos especiales

Algunos grafos aparecen con tal frecuencia que se les ha dado un nombre.

Definición El grafo completo de n vértices, notado como K_n, es el grafo simple con n vértices y una arista entre cada par de vértices distintos. A modo de ejemplo, se muestra el grafo K_4.



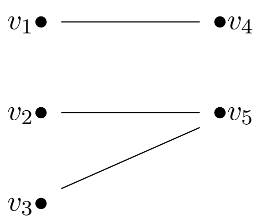
Definición Un grafo $G = (V, E)$ es un **bipartito** si existen subconjuntos V_1 y V_2 de V tales que:

1. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

2. $V_1 \cup V_2 = V$

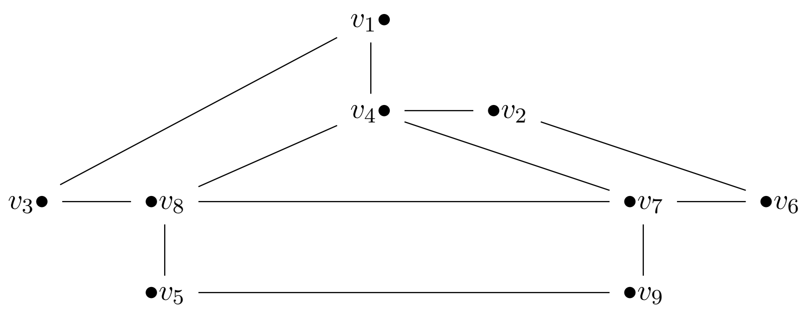
3. Cada arista en E es incidente en un vértice V_1 y un vértice en V_2.

Por ejemplo, el grafo de la siguiente figura es bipartito con $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $V_2 = \{v_4, v_5\}$.

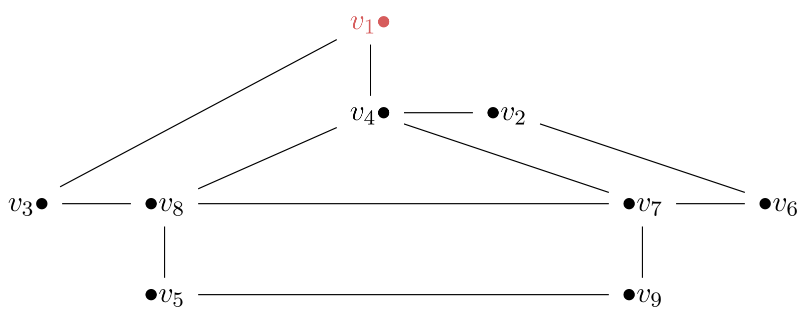


Para identificar si un grafo es bipartito, conviene proceder por *coloreo* de dos colores de los vértices del grafo. La idea es pintar los vértices vecinos del grafo con colores progresivamente. Si al finalizar hemos pintado todo el grafo, concluimos que es bipartito, y los colores nos dan la asignación de V_1 y V_2 que necesitamos para que se cumpla la definición. Si, por el contrario, en algún momento encontramos un vértice que no podemos pintar de ninguno de los dos colores (porque tiene vecinos de ambos colores), hemos de concluir que el grafo no es bipartito.

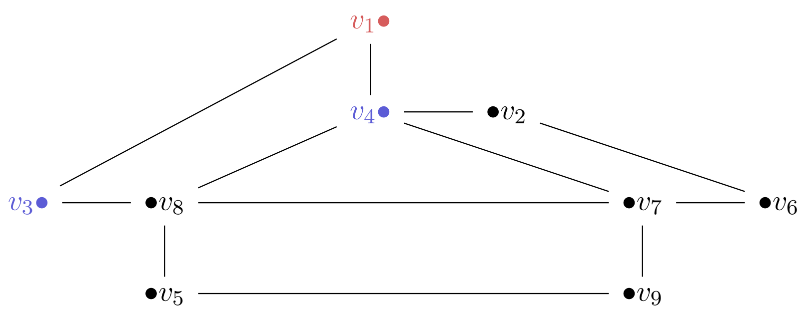
Utilicemos esta idea para decidir si el siguiente grafo es bipartito:



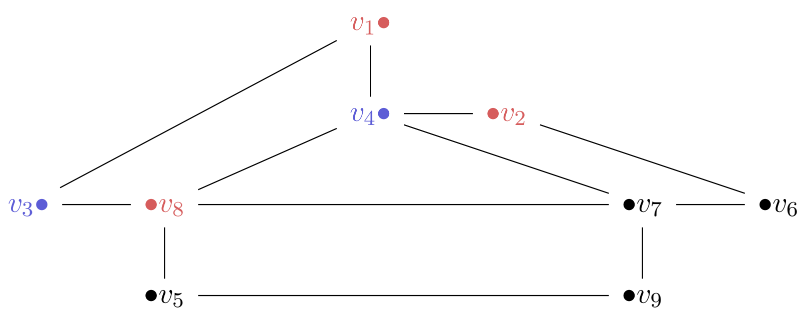
Comenzamos pintando cualquier vértice de un color.



En un segundo paso, pintamos todos sus vecinos de un color distinto:



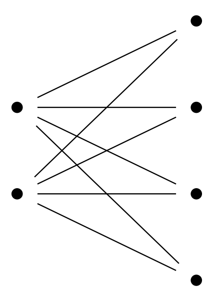
Continuando con este procedimiento, pintamos los vecinos de aquellos que acabamos de pintar del color original



¿Que ocurre con el vértice v_7? Tiene vecinos de ambos colores, por lo tanto, no podemos pintarlo de ningun color. Concluimos que el grafo no es bipartito

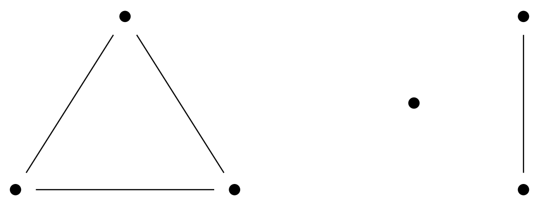
Definición El grafo bipartito completo de m y n, denotado $K_{m,n}$ vértices es el grafo simple donde el conjunto de vértices puede particionarse en V_1 con m vértices y V_2 con n vértices, y donde el conjunto de aristas consiste en todas las aristas de la forma (v_1, v_2) con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$.

Se muestra como ejemplo el grafo $K_{2,4}$.



5. Más conceptos sobre grafos

Definición Un **grafo conexo** es un grafo donde, dado cualesquiera dos vértices, siempre existe un camino que comienza en uno y termina en el otro. Todos los ejemplos que grafos que hemos visto hasta ahora son conexos. A continuacion, se da un ejemplo de un grafo **no conexo**.



Intuitivamente, un grafo conexo es aquel “de una sola pieza”. Mientras que los grafos no conexos parecen, a simple vista, estar formado por varias partes. A cada una de estas “partes”se la llama **componente conexa**. Se nota con $\kappa(G)$ a la cantidad de componentes conexas del grafo. En el ejemplo, $\kappa(G) = 3$.

Definición Sea $G = (V, E)$ un grafo. $G' = (V', E')$ es un subgrafo de G si se cumple:

1. $V' \subseteq V$
2. $E' \subseteq E$
3. Para toda arista $e \in E'$, si e incide en los vértices v y w, entonces $v, w \in V'$

Esta definición nos dice que un grafo es subgrafo de otro cuando esta compuesto por algunos de sus vértices (posiblemente todos), algunas de sus aristas (posiblemente todas) y añadiendo la condición especial de que todas las aristas del subgrafo deben tener sus correspondientes vértices en el subgrafo.

Definición Sea $G = (V, E)$. Si $U \subseteq V$, el **subgrafo de G inducido por U** es el subgrafo cuyo conjunto de vértices es U y que contiene todas las aristas de G de la forma (v, w) donde $v, w \in U$.

Definición Un subgrafo G' de un grafo $G = (V, E)$ es un **subgrafo inducido** si existe un conjunto $U \subset V$ tal que G' es el subgrafo de G inducido por U.

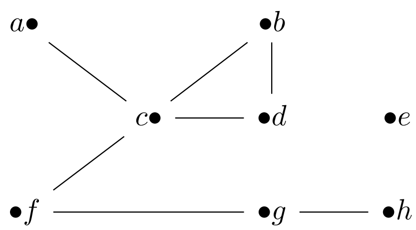
Definición Sea v un vértice en un grafo (dirigido o no dirigido) $G = (V, E)$. El subgrafo de G denotado por $G - v$ tiene el conjunto de vértices $V' = V - \{v\}$ y el conjunto de aristas $E' \subset E$, donde E' contiene todas las aristas en E, excepto aquellas que son incidentes en el vértice v.

Observación El grafo $G - v$ es el subgrafo inducido por $V - \{v\}$.

Definición De manera similar, si e es un arista en un grafo (dirigido o no dirigido) $G = (V, E)$, el subgrafo $G - e$ es el subgrafo que contiene todas las aristas de G, excepto e, y el mismo conjunto de vértices.

Definición Sea G un grafo dirigido o no dirigido, o un multigrafo. Para cada vertice v de G, el **grado** de v, denotado por $\delta(v)$ es el número de aristas incidentes en v.

Por ejemplo, en el siguiente grafo, $\delta(a) = 1$, $\delta(b) = 2$, $\delta(c) = 4$, $\delta(d) = 2$, $\delta(e) = 0$, $\delta(f) = 2$, $\delta(g) = 2$ y $\delta(h) = 1$

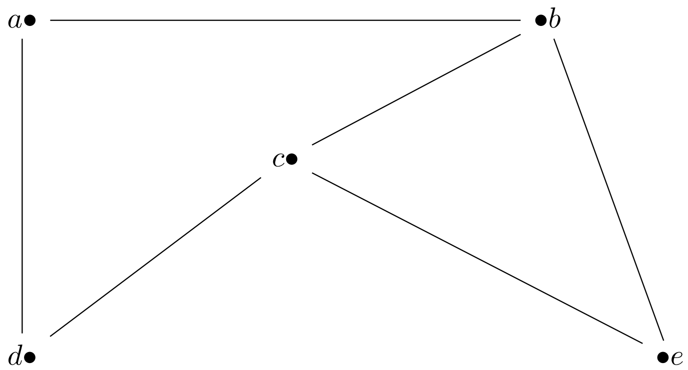


Si $G = (V, E)$ es un grafo no dirigido o un multigrafo, luego $\sum_{e\in V} \delta(v) = 2|E|$. Esto se debe a que cada arista de la forma $(a, b) \in E$ suma 1 al grado de a y uno al grado de b, es decir, suma 2 a la sumatoria $\sum_{e\in V} \delta(v)$. Entonces $2|E|$ es el resultado de sumar los grados de todos los vértices en V. Esto implica que el número de vértices de grado impar debe ser par.

6. Representación de grafos

En las secciones anteriores se representó un grafo con un dibujo. En ocasiones, como por ejemplo al usar una computadora para analizar un grafo, se necesita una representación más formal. El primer método de representación de una gráfica usa la matriz de adyacencia.

Considere el siguiente grafo



Para obtener la **matriz de adyacencia**, primero se elige un orden para los vértices, por ejemplo (a, b, c, d, e). Después, se construye una matriz tal que el elemento en la posición i, j tiene un 1 si los vértices en las posiciones i, j son adyacentes y 0 si no. Si $i == j$, ponemos un 0. La matriz de adyacencia para este grafo es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Propiedades

- El grado de un vértice v se puede obtener sumando el renglón o la columna que corresponda al vértice v.
- Es una matriz simétrica respecto a la diagonal.
- El elemento i, j de la matriz A^n es igual al número de caminos desde el vértice que corresponde a la posición i al vértice que corresponde a la posición j.

Para obtener la **matriz de incidencia**, se etiquetan los renglones con los vértices y las columnas con las aristas en algún orden arbitrario. El elemento en el renglón v y la columna e tiene un 1 si e es incidente en v, o un 0 si no. La matriz de incidencia para el grafo de ejemplo es:

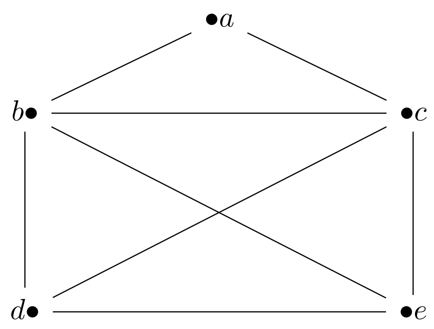
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

7. Ejercicios - introducción

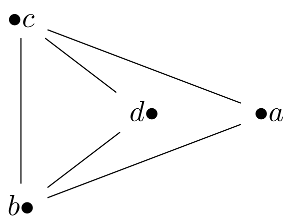
1. Para cada uno de los siguientes grafos:

   - decidir si existe un camino del vértice a al vértice a que pase por cada arista exactamente una vez.
   - dar su matriz de adyacencia.
   - dar su matriz de incidencia.

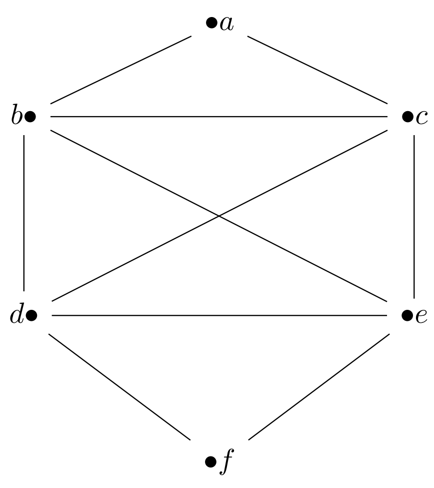
   a)

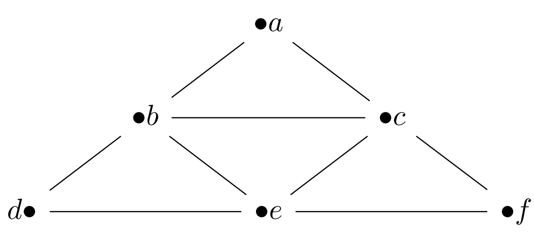
   b)

   c)

   d)

2. Dibujar los grafos K_6 y K_7.

3. Encontrar una fórmula para la cantidad de aristas del grafo K_n (en función de n).

4. Para cada una de las siguientes matrices de adyacencia, dibujar el grafo correspondiente:

   a)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   b)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   c)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   d)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Para cada grafo dibujado en el punto anterior, dar su matriz de incidencia.

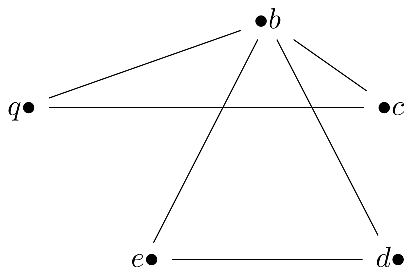
6. Para cada una de las siguientes matrices de incidencia, dibujar el grafo correspondiente:

   a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   b)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Para cada grafo dibujado en la sección anterior, dar su matriz de adyacencia.

8. ¿Es posible dibujar el siguiente grafo de forma que sus aristas no se crucen entre si?



9. En cierto edificio de la ciudad, los vecinos se llevan bastante mal entre ellos. Sabemos que el edificio es de 25 departamentos, y en cada departamento vive una familia. Cada familia se lleva bien con exactamente otras 5 familias del edificio. ¿Es posible esta situación?

10. Definimos el doble de un grafo como dos copias de dicho grafo con aristas adicionales uniendo los vértices correspondientes. La mejor forma de verlo es con un ejemplo. En la siguiente figura se puede ver un grafo A y su doble, el grafo B.

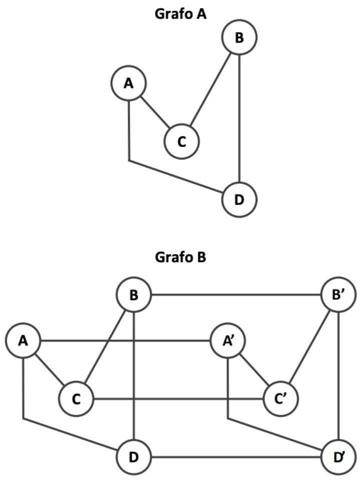
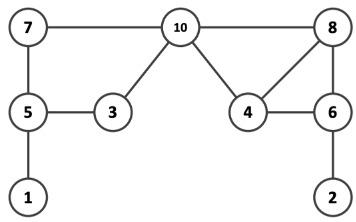


Figura 9: Grafos dobles

   a) ¿Es el grafo A bipartito?

   b) ¿Es el grafo B bipartito?

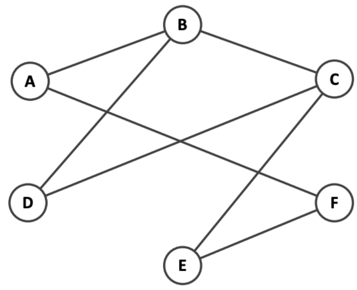
11. En la siguiente figura representamos un serie de edificios en Venecia, junto con puentes que los unen:



a) ¿Es el grafo bipartito?

b) Un inspector de puentes, que vive en el edificio número 10, esta encargado de revisar el estado de los puentes que se ven en la figura. ¿Existe forma de que recorra cada puente exactamente una vez, partiendo de su edificio y regresando al mismo? Justifique.

12. Dado G = (V, E), diremos que la **distancia** de un vértice a otro es la longitud del menor camino posible entre ambos vértices. El **diámetro** de un grafo es la mayor distancia entre todos los pares de vértices del mismo. Dado el siguiente grafo:



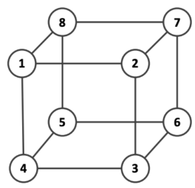
a) ¿Cual es la distancia de B a F?

b) Encuentre el diámetro del grafo.

c) Decida si existe un camino que pase por cada vértice exactamente una vez.

d) Decida si existe un camino que pase por cada arista exactamente una vez.

13. Observe el siguiente grafo:



a) Decida si existe un camino que pase por cada vértice exactamente una vez.

b) Decida si existe un camino que pase por cada arista exactamente una vez.

c) ¿Es el grafo bipartito?

d) ¿Cual es el diametro de este grafo?