Representaciones irreductibles de grupo SO(n)

Representaciones de grupos compactos
57 congreso nacional sociedad Matemática Mexicana.

Roberto García Antonio

Universidad Veracruzana.
Facultad de matemáticas.

Universidad Veracruzana

Representaciones

Definición

Sea G un grupo topológico y V un espacio vectorial no nulo sobre un campo $\mathbb{F}$. Una representación de G sobre V es un homomorfismo

$$\pi : G \to Aut(V)$$

donde $Aut(V) = \{T : V \to V | T \text{ es lineal e invertible}\}$.
Cuando V es un espacio de Hilbert podemos restringirnos a homomorfismos sobre el grupo de operadores unitarios $\mathcal{U}(V)$., esto se llamara una representación unitaria del grupo G sobre V.

La teoría de representaciones de grupos compactos fue ampliamente estudiada y desarrollada por los matemáticos **Hermann Weyl** y **Fritz Peter**, es debido a estos matemáticos varias de las técnicas estándar en teoría de representaciones de grupos de Lie compactos y el Teorema de Peter-Weyl.

Figure: Hermann Weyl

Pequeños ejemplos

Ejemplo (Representación estándar)

Sea $\boldsymbol{G}$ *alguno de los siguientes grupos de matrices* $\mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$, $\boldsymbol{SU}(n)$ *u* $\boldsymbol{SO}(n)$.
La representación estándar es la representación de $\boldsymbol{G}$ *sobre* $\mathbb{C}^n$ *donde* $\pi(g)$ *es dada por la multiplicación izquierda por la matriz* g.

Ejemplo

Consideremos el grupo $\mathbb{R}$ *bajo la adición, y el espacio* $\mathbb{R}^2$ *bajo el producto interno usual, definimos la representación* $\pi : \mathbb{R} \to \mathcal{U}(H)$ *mediante*

$$\pi(x) = \begin{bmatrix} cos(x) & -sen(x) \\ sen(x) & cos(x) \end{bmatrix}.$$

Subrepresentaciones y subrepresentaciones irreductibles

Definición

Sea $\mathcal{M}$ un subespacio cerrado de H_π. Se dira que $\mathcal{M}$ es invariante para π si

$$\pi(x)\mathcal{M} \subset \mathcal{M} \quad (\forall x \in G)$$

, es decir, si es un subespacio invariante de cada operador $\pi(x)$.

Definición

Sea $\mathcal{M} \neq \{0\}$ subespacio invariante, la restricción de π a $\mathcal{M}$

$$\pi^{\mathcal{M}}(x) = \pi(x)|_{\mathcal{M}}$$

define una representación de G en $\mathcal{M}$, llamada subrepresentación de π.

Definición

*Si π tiene un subespacio invariante no trivial, la representación se llamara **reductible**, en caso contrario se llamara **irreductible**.*

Definición

Si $\{\pi_i\}_{i\in I}$ es una familia de representaciones unitarias, su suma directa $\pi = \bigoplus_{i\in I} \pi_i$ es la representación de G en el espacio de Hilbert $H = \bigoplus H_\pi$ dada por

$$\pi(g) = \bigoplus_{i\in I} \pi_i(g).$$

Teoremas centrales.

Teorema

Cada representación de un grupo de Lie compacto es unitaria.

Teorema

Si G es un grupo compacto, entonces

1. *Cada representación irreductible de G es de dimensión finita.*
2. *Cada representación unitaria de G es suma directa de representaciones irreductibles.*

Equivalencia de representaciones.

Definición

Sean π_1 y π_2 representaciones unitarias de G, un operador de entrelace para π_1 y π_2 es un operador lineal acotado $T : H_{\pi_1} \to H_{\pi_2}$ tal que

$$\pi_2(g) \circ T = T \circ \pi_1(g) \quad (\forall g \in G).$$

Nos interesa estudiar hasta equivalencia las representaciones irreductibles de los grupos compactos. Donde equivalencia significa que exista un operador de entrelace biyectivo.

Grupos de Lie

Definición

Un grupo de Lie es un grupo topológico G que además tienen una estructura diferencial que hace la operación y la función inversa funciones continuas.

Ejemplo

El grupo de matrices ortogonales cuadradas de tamaño n de determinante 1

$$SO(n) = \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) : detA = 1 \quad y \quad AA^T = I\}.$$

Ejemplo

El grupo de matrices unitarias nxn de determinante 1, es decir,

$$SU(n) = \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) : detA = 1 \quad y \quad AA^* = I\}.$$

En el caso del grupo SU(2) se conoce una forma explicita para los elementos esta es

$$U_{a,b} = \begin{bmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{bmatrix} \quad a, b \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad ||a||^2 + ||b||^2 = 1$$

De modo que topológicamente $SU(2) \cong \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$.

El ejemplo clásico de representaciones irreductibles es el de $SU(2)$ sobre los polinomios homogéneos en 2 variables.

Teorema

Los grupos $SU(n)$ y $SO(n)$ son compactos y conexos.

Espacio de polinomios homogéneos y armónicos

Definición

Sea $\mathcal{P}$ el espacio de polinomios en 2 variables complejas z,w, y sea $\mathcal{P}_m$ el espacio de polinomios homogéneos de grado m

$$\mathcal{P}_m = \left\{ P : P(z,w) = \sum_{j=0}^{m} c_j z^j w^{m-j}; c_0, \cdots, c_m \in \mathbb{C} \right\}.$$

Se define una acción del grupo $SU(2)$ sobre el espacio $\mathcal{P}_m$ mediante la acción natural de $SU(2)$ en $\mathbb{C}^2$, es decir,

$$[\pi(U_{a,b})P](z,w) = P(U_{a,b}^{-1}(z,w)) = P(\overline{a}z - bw, \overline{b}z + aw).$$

esto es un cambio de variable.

veamos que para $P(z,w) = z^2 + zw \in \mathcal{P}_2$ y la matriz

$$U_{i,0} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

tenemos que la representación toma la forma

$$[\pi(U_{i,0})P](z,w) = P(-iz, iw) = -z^2 + zw.$$

Hasta equivalencia estas son todas las representaciones irreductibles de $SU(2)$.

Espacio de polinomios armónicos

Definición

Denotemos por $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ es espacio de polinomios armónicos de grado m, es decir,

$$\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) = \{p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n), \Delta P = 0\}$$

donde $\Delta P = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} P$.

Se define una representación de $SO(n)$ sobre este espacio de la misma manera que $SU(2)$ define una en $\mathcal{P}_m$, es decir,

$$[\pi(g)P](x) = P(g^{-1}x).$$

La representación de $SO(n)$ sobre $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$, es irreductible para cada $m \in \mathbb{N}$.

Tomando el polinomio

$$P(x,y,z) = x^2 - y^2 \in \mathcal{H}_2(\mathbb{R}^3)$$

y la matriz de rotación

$$g = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces la representación toma la forma

$$[\pi(g)P](x,y,x) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}y\right)^2.$$

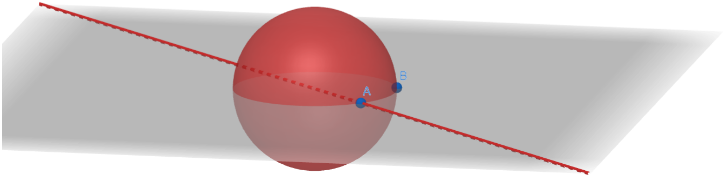

Figure: El efecto de g en un punto de la esfera.

Teorema

Para el grupo SO(3) todas sus representaciones irreductibles son sobre los espacios $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^3)$ con $m \in \mathbb{N}$.

Para n mayor a 3 estas representaciones son solo una subfamilia de representaciones, pero no todas. Para tratar de hallar más representaciones nos debemos de centrar en teoría de pesos.

Bibliografía

Algunos libros que recomiendo: [1] [2] [3]

[1] J. Faraut. *Analysis on Lie Groups: An Introduction*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2008.

[2] M.R. Sepanski. *Compact Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2007.

[3] G.B. Folland. *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. Textbooks in Mathematics. CRC Press, 2016.