Universidad Veracruzana

Facultad de Matemáticas.

Región: Xalapa.

Maestría en Matemáticas.

Espacios de Hilbert con núcleo reproductor y representaciones esféricas de los grupos SO(n) y U(n)

Tesis para obtener el grado de Maestro en Matemáticas

Presenta: **Roberto García Antonio**

Directores:

Dr. Josué Ramírez Ortega

Dra. Yessica Hernandez Eliseo

Noviembre de 2025.

“Lis de Veracruz: Arte, Ciencia, Luz”

Universidad Veracruzana.

Facultad de Matemáticas.

Región: Xalapa.

Maestría en Matemáticas.

Espacios de Hilbert con núcleo reproductor y representaciones esféricas de los grupos SO(n) y U(n)

Tesis para obtener el grado de Maestro en Matemáticas

Presenta:

Presenta: **Roberto García Antonio**

Directores:

Dr. Josué Ramírez Ortega

Dra. Yessica Hernandez Eliseo

Asesor:

Acknowledgements

This is perhaps the hardest part of this work, not due to abstract concepts, but because of the need to be fair to every person who contributed to this thesis. First, I would like to express special gratitude to the **Faculty of Mathematics (UV)** for allowing me to be part of an institution that enabled me to improve my knowledge and to meet many special people in my life. I also wish to thank **SECIHTI** for the generous financial support which made this work possible.

I also wish to thank my advisor, Dr. Josué Ramírez Ortega, and Yéssica Hernández Eliseo, who both taught me, provided assistance, and allowed me to be part of their work team. I wish to thank Dr. Armando Sánchez Nungaray and Dr. Francisco Hernández Zamora for their patience during my progress presentations and for asking excellent questions that allowed me to improve the final manuscript. Also, a special thank you to Dr. Matthew Glenn Dawson for his corrections that helped me give this thesis work a more professional style and form.

All the professors at the Faculty of Mathematics have provided tremendous assistance, but I must give honorific mention to Dr. Porfirio Toledo Hernández and Dr. Carlos Alberto Hernández Linares for teaching me and guiding me throughout this journey. I also extend thanks to Dr. Martha Lorena Avendaño Garrido and Dr. Brenda Tapia Santos for their teaching and help.

Finally, my genuine and profound gratitude goes to my family, who were the emotional support that allowed me to keep working on the days I found most challenging. I similarly thank my friends for providing their companionship and allowing me to share the ideas of my thesis, and to Gaby, simply for everything that she is, I offer my deepest appreciation.

Abstract

Representation theory is a set of techniques present in diverse areas of mathematics. Essentially, it consists of obtaining information about a vector space through the action of a group, or gaining information about a group through a better-known group of transformations. This group can be finite or infinite and may also have additional structures such as topological or geometric ones.

Within the theory, the tools and techniques used to study the representations of a group depend essentially on the group's topology and its algebraic structure. The two types of topological groups for which their unitary representations are best studied are:

1. **Locally compact abelian groups**,

2. **Compact groups.**

During part of the twentieth century there was a push to study generalizations of Fourier analysis for non-abelian groups, such as matrix groups or Lie groups. Non-abelian groups are of great relevance in pure and applied mathematics, as they often represent invariants of differential operators or laws of nature.

A first step toward understanding the representations of non-abelian groups is to study the representations of compact groups. This is because several of the fundamental results from the case of finite group representations (a very well-studied case) have generalizations for compact groups. Furthermore, by knowing the representations of a compact group, we can provide a generalized definition of a Fourier transform over compact groups. We can even obtain information for a certain type of non-compact and non-abelian groups by knowing the structure of their maximal compact subgroups; these are more than sufficient reasons to motivate the study of unitary representations of compact groups.

In the present work, we aim to describe some families of irreducible representations of the groups $\mathrm{SO}(n)$ and $\mathrm{U}(n)$. Specifically, we refer to spherical representations. We will prove the irreducibility based on a criterion given in "Irreducibility of unitary group representations and reproducing kernels Hilbert spaces",Bekka, de la Harpe y Grigorchuk[BdG03], which relates the theory of Reproducing Kernel Hilbert Spaces to the irreducibility of certain representations.

The work is organized into the following chapters:

Preliminaries: To study general notions of operators on Hilbert spaces and differential geometry, in order to understand the concepts of unitary representations and homogeneous spaces.[Con94], [Lee12], [Fol94], [War83], [Tu10].

Reproducing Kernel Hilbert Spaces: To study the concept of a reproducing kernel Hilbert space, provide examples, and state some fundamental results. [HIL72], [Aro50].

Representation Theory: To give a general introduction to representation theory, focusing particularly on unitary representations of compact groups. [Her17], [Sep07] and [Fol94], [BdG03].

The Spherical Representations of the Groups $\mathrm{SO}(n)$ and $\mathrm{U}(n)$: To give a concrete example of an irreducible unitary representation using the reproducing kernel technique.[VK13], [BdG03].

Resumen

La teoría de representaciones de grupos es un conjunto de técnicas presentes en diversas áreas de las matemáticas. Esencialmente, consiste en obtener información de un espacio vectorial por medio de la acción de un grupo, o conseguir información de un grupo por medio de un grupo de transformaciones mejor conocido. Este grupo puede ser finito o infinito y, además, puede contar con estructuras adicionales, díganse topológicas o geométricas.

Dentro de la teoría, las herramientas y técnicas utilizadas para estudiar las representaciones de un grupo dependen esencialmente de la topología del grupo y la estructura algebraica de este. Los dos tipos de grupos topológicos para los cuales sus representaciones unitarias están mejor estudiadas son

1. **Grupos abelianos localmente compactos**,
2. **Grupos compactos.**

Durante una parte del siglo **XX**, se buscó estudiar generalizaciones del análisis de Fourier para grupos no abelianos, como grupos de matrices o grupos de Lie. Los grupos no abelianos son de gran relevancia en matemáticas puras y aplicadas, ya que estos suelen representar invariantes de operadores diferenciales o leyes de la naturaleza. Un primer paso para entender las representaciones de grupos no abelianos es estudiar las representaciones de grupos compactos, debido a que varios de los resultados fundamentales del caso de representaciones de grupos finitos,(un caso muy bien estudiado), tienen generalizaciones para grupos compactos. Más aún, conociendo las representaciones de un grupo compacto, podemos dar una definición generalizada de una transformada de Fourier sobre grupos compactos. Incluso podemos conseguir información para cierto tipo de grupos no compactos y no abelianos, conociendo la estructura de subgrupos compactos maximales, las cuales son razones más que suficientes para motivar el estudio de representaciones unitarias de grupos compactos.

En el presente trabajo buscamos describir algunas familias de representaciones irreducibles de los grupos $\mathrm{SO}(n)$ y $\mathrm{U}(n)$. Concretamente nos referimos a las representaciones esféricas. Demostraremos la irreducibilidad basándonos en un criterio dado en [BdG03], el cual relaciona la teoría de **espacios de Hilbert con núcleo reproductor** con las representaciones cuasiregulares del grupo.

El trabajo se organiza en los siguientes capítulos.

Preliminares: Estudiar nociones generales de operadores en espacios de Hilbert y geometría diferencial, para poder entender los conceptos de representaciones unitarias y espacios homogéneos. [Con94], [Lee12], [Fol94], [War83], [Tu10].

Espacios de Hilbert con núcleo reproductor: Estudiar el concepto de espacio de Hilbert con núcleo reproductor, dar ejemplos y enunciar algunos resultados fundamentales. [HIL72], [Aro50].

Teoría de representaciones: Dar una introducción general de la teoría de representaciones, estudiando particularmente representaciones unitarias de grupos compactos. [Her17], [Sep07] y [Fol94], [BdG03].

Las representaciones esféricas del grupo $\mathrm{SO}(n)$**y** $\mathrm{U}(n)$: Dar un ejemplo concreto de una representación unitaria irreducible usando la técnica de núcleos reproductores. [VK13], [BdG03].

Objetivos

En el presente trabajo buscamos presentar los conceptos y resultados básicos de teoría de representaciones. Esto lo haremos con el propósito de estudiar las representaciones esféricas de los grupos SO(n) y U(n). Buscamos destacar el papel que juega la teoría de espacios de Hilbert con núcleo reproductor, en la teoría de representaciones de grupos compactos.

Índice general

1 Preliminares

Para poder estudiar las representaciones de grupos compactos y obtener resultados similares a los de grupos finitos, utilizaremos algunas herramientas de análisis funcional. Igualmente, para poder estudiar grupos de Lie debemos contar con ciertas nociones de geometría diferencial. Por este motivo, dedicamos nuestra primera sección a enunciar una serie de resultados necesarios para el resto del trabajo.

1.1 Teoría básica de espacios de Hilbert

En el presente trabajo estaremos recurriendo constantemente a resultados de la teoría de espacios de Hilbert. Recordemos que un **espacio de Hilbert** es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ normado completo en el cual su norma es inducida por un producto interno (forma sesquilineal, hermítica y definida positiva).

Definición 1.1.1. *Sean $\mathscr{H}, \mathscr{W}$ espacios de Hilbert, un* ***operador lineal acotado*** *de $\mathscr{H}$ en $\mathscr{W}$ es una transformación lineal $L : \mathscr{H} \to \mathscr{W}$ para la cual existe $C \geq 0$ tal que*

$$||Lx|| \leq C||x|| \quad \text{para todo } \ x \in \mathscr{H}.$$

Al conjunto de operadores lineales acotados de $\mathscr{H}$ en $\mathscr{W}$ lo denotaremos como $B(\mathscr{H}, \mathscr{W})$; en el caso particular de $\mathscr{W} = \mathscr{H}$ escribimos $B(\mathscr{H})$ en lugar de $B(\mathscr{H}, \mathscr{H})$.

En el presente trabajo, cuando se haga referencia al Teorema de representación de Riesz, nos estaremos refiriendo al Teorema de representación de Riesz-Frechet, el cual enunciamos a continuación.

Teorema 1.1.2 (Teorema de representación de Riesz). *[[Con94, Cap. 1, Sec. 3]] Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $F : \mathscr{H} \to \mathbb{F}$ un funcional lineal acotado. Existe un único vector, $h_0 \in \mathscr{H}$ tal que*

$$F(h) = \langle h, h_0 \rangle \quad \text{para todo } h \in \mathscr{H}.$$

Más aun, se tiene que $||F|| = ||h_0||$.

Este resultado nos permite definir una involución en el espacio $B(\mathscr{H})$.

Definición 1.1.3. *Sean $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ espacios de Hilbert y $L \in B(\mathscr{H}, \mathscr{K})$. El* ***adjunto*** *del operador L, denotado por L^*, se define como un elemento de $B(\mathscr{K}, \mathscr{H})$ tal que*

$$\langle Lx, y \rangle_{\mathscr{K}} = \langle x, L^* y \rangle_{\mathscr{H}}.$$

El adjunto de un operador siempre existe; la demostración de existencia y unicidad se sigue del Teorema de Riesz y puede consultarse en [Con94, Teorema II.2.2].

Recordemos que el adjunto tiene las siguientes propiedades.

Proposición 1.1.4. *Sean $L_1, L_2 \in B(\mathscr{H})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$, entonces*

- $(\alpha L_1 + L_2)^* = \overline{\alpha} L_1^* + L_2^*$,

- $(L_1L_2)^* = L_2^*L_1^*$,
- $L_1^{**} = L_1$,
- *si L_1 es invertible y L_1^{-1} es su inversa, entonces $(L_1^{-1})^* = (L_1^*)^{-1}$.*

Con esta involución el espacio $B(\mathscr{H})$ se convierte en un álgebra C^* con identidad. Al ser un álgebra podemos considerar el conjunto de elementos invertibles.

Definición 1.1.5. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert. Un operador $L \in B(\mathscr{H})$ es invertible si existe un operador $J \in B(\mathscr{H})$ tal que*

$$J \circ L = L \circ J = Id.$$

Al conjunto de todos los elementos invertibles de $B(\mathscr{H})$ lo denotaremos por $\mathrm{GL}(\mathscr{H})$.

Proposición 1.1.6. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert. El conjunto $GL(\mathscr{H})$ es un grupo con la composición y es un conjunto abierto de $B(\mathscr{H})$.*

Demostración. La demostración de que es un conjunto abierto puede consultarse en [Zhu93, Proposición 2.2]. Por otro lado, como se satisface que

$$(L^{-1})^{-1} = L \quad \text{y} \quad (L \circ J)^{-1} = J^{-1} \circ L^{-1},$$

$\mathrm{GL}(\mathscr{H})$ es un grupo.■

En este trabajo estaremos refiriéndonos a ciertos tipos especiales de operadores los cuales definimos a continuación.

Definición 1.1.7. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $L \in B(\mathscr{H})$.*

- *L es hermitiano o autoadjunto si $L^* = L$,*
- *L es normal si $LL^* = L^*L$,*
- *L es unitario si $LL^* = L^*L = Id$,*

donde Id es el operador identidad en $B(\mathscr{H})$.

Definición 1.1.8. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, denotaremos con $\mathcal{U}(\mathscr{H})$ el conjunto de operadores unitarios sobre $\mathscr{H}$.*

Proposición 1.1.9. *El conjunto $\mathcal{U}(\mathscr{H})$ es un subgrupo de* $\mathrm{GL}(\mathscr{H})$.

Demostración. Es resultado de aplicar la Proposición 1.1.4.■

1.2 Topologías fuertes y débiles en espacios de operadores

El espacio de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ tiene muchas topologías. Dos topologías necesarias en el estudio de representaciones unitarias son la topología débil de operadores y la topología fuerte de operadores.

Definición 1.2.1. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert,* ***la topología fuerte de operadores*** *en $B(\mathscr{H})$ es la topología más débil generada por la familia de seminormas*

$$\begin{aligned} P_x : B(\mathscr{H}) &\to \mathbb{R} \\ T &\mapsto \|Tx\| \end{aligned}$$

indexadas por $x \in \mathscr{H}$, de modo que esta topología tiene como sub-base a los conjuntos de la forma

$$B_\epsilon^{x_0}(T_0) = \{T \in B(\mathscr{H}) : P_{x_0}(T - T_0) \leq \epsilon\},$$

donde $x_0 \in \mathscr{H}$, $T_0 \in B(\mathscr{H})$ y $\epsilon > 0$. Esta topología tiene una base dada por los conjuntos

$$\begin{aligned} B_\epsilon^{x_0,\cdots,x_n}(T_0) &= \{T \in B(\mathscr{H}) : P_{x_i}(T - T_0) \leq \epsilon,\ i = 0, 1, \cdots, n\} \\ &= \{T \in B(\mathscr{H}) : \|(T_0 - T)(x_i)\| \leq \epsilon, i = 0, 1 \cdots, n\}. \end{aligned}$$

Por simplicidad usaremos la abreviación SOT para referirnos a la topología fuerte de operadores (strong operator topology).

Proposición 1.2.2. *[Con94, Proposición IX.1.3] Una red $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a un operador $T \in B(\mathscr{H})$ en la SOT si y solo si $\{T_\lambda(x)\} \to T(x)$ para cada $x \in H$, es decir,*

$$\|T_\lambda(x) - T(x)\| \to 0.$$

De manera similar se define la topología débil de operadores.

Definición 1.2.3. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert,* ***la topología débil de operadores*** *en $B(\mathscr{H})$ es la topología más débil generada por la familia de seminormas*

$$p_{x,y}(T) = |\langle Tx, y\rangle|,$$

indexadas por $x, y \in \mathscr{H}$. Abreviaremos la topología débil de operadores como WOT.

El nombre de estos conceptos parece indicar la siguiente proposición.

Lema 1.2.4. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, entonces la WOT es más débil que la SOT, esto es, toda red que converga en la SOT converge en la WOT.*

Demostración. Sea $\{T_\alpha\}$ una red convergente en la SOT a un operador T. Sean $h, k \in \mathscr{H}$. Notemos que

$$\|\langle T_\alpha h, k\rangle - \langle Th, k\rangle\| = \|\langle (T_\alpha - T)h, k\rangle\| \leq \|k\| \cdot \|(T_\alpha - T)h\|,$$

lo que demuestra que la red $\{\langle T_\alpha h, k\rangle\}$ converge a $\langle Th, k\rangle$. Por lo tanto la red converge en la topología débil de operadores. ■

Para algunas aplicaciones es más sencillo trabajar con la WOT, debido a que es más fácil estimar la convergencia en esta topología; sin embargo, en el espacio de operadores unitarios no tenemos este problema.

Teorema 1.2.5. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert. La WOT y la SOT coinciden en el conjunto de operadores unitarios $\mathcal{U}(\mathscr{H})$.*

Demostración. Basta demostrar que si una red de operadores en $\mathcal{U}(\mathscr{H})$ converge en la topología débil de operadores, entonces converge en la topología fuerte de operadores. Sea $\{T_\alpha\}$ una red de operadores unitarios que converge débilmente a T. Entonces para cada $u \in \mathscr{H}$ tenemos que

$$\|(T_\alpha - T)(u)\|^2 = \|T_\alpha u\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle T_\alpha u, Tu\rangle + \|Tu\|^2 = 2\|u\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle T_\alpha u, Tu\rangle\,.$$

como $2\,\mathrm{Re}\,\langle T_\alpha u, Tu\rangle$ converge a $2\|Tu\|^2 = 2\|u\|^2$, tenemos que

$$\|(T_\alpha - T)u\| \to 0.\blacksquare$$

1.3 Grupos, acciones y geometría

Las representaciones que deseamos estudiar no son de cualquier grupo, son representaciones de grupos con topología. De hecho nos interesan los grupos de Lie. Por este motivo debemos dedicarnos a entender ciertos conceptos de geometría diferencial como el de variedades, subvariedades y espacios homogéneos.

1.3.1 Grupos topológicos y grupos de Lie

Nos centraremos particularmente en grupos de Lie compactos, pues varios resultados de teoría de representaciones de grupos finitos siguen siendo válidos para grupos compactos y también porque las representaciones unitarias irreducibles del grupo SO(3) tienen aplicaciones directas a la física de partículas.

Definición 1.3.1. *Sea $(G, \cdot)$ un grupo. Si τ es una topología sobre G, se dirá que G es un grupo topológico si con la topología τ las siguientes operaciones son continuas*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\to G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \cdot g_2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} i : G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

Ejemplo 1. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert. El grupo $\mathcal{U}(\mathscr{H})$ con la topología débil de operadores es un grupo topológico.

Para definir qué es un grupo de Lie debemos contar con el concepto de variedad suave. Primeramente, definamos qué es una variedad topológica.

Definición 1.3.2 (Variedad topológica). *Sea M un espacio topológico. Se dirá que M es una variedad topológica de dimensión n si*

1. *M es Hausdorff y segundo numerable,*

2. *para todo $p \in M$ existe U vecindad de p y $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ tal que φ es un homeomorfismo entre U y $\varphi(U)$.*

*Nombraremos a la pareja (U, φ) como **carta**; al conjunto U, **vecindad coordenada**; y a la función φ, **sistema coordenado**.*

Para definir qué es una variedad suave debemos definir el concepto de **estructura diferencial** o suave.

Definición 1.3.3 (Cartas compatibles). *Sea M una variedad topológica y sean (U, ϕ), (V, ψ) cartas de M tales que $U \cap V \neq \emptyset$. A la siguiente función se le llamará **función de transición** de ϕ a ψ*

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V).$$

*Decimos que dos cartas son **suavemente compatibles** si se cumple alguna de las siguientes condiciones.*

1. *$U \cap V = \emptyset$,*

2. *las funciones de transición $\psi \circ \phi^{-1}$ y $\phi \circ \psi^{-1}$ son suaves.*

Definición 1.3.4. *Sea M una variedad topológica. Un **atlas para** M es un conjunto de cartas cuyo dominio cubre a M y un **atlas suave** es un atlas tal que cualesquiera dos cartas son suavemente compatibles. Un atlas suave es **maximal** si el único atlas suave en el que está contenido es el mismo. Para una variedad topológica, una **estructura suave** es un atlas maximal.*

Definición 1.3.5. *Una variedad M es suave si es una variedad topológica junto a una estructura suave.*

Antes de continuar, debemos considerar el siguiente ejemplo de una variedad suave.

Ejemplo 2. Denotamos por $M_n(\mathbb{F})$ al conjunto de todas las matrices cuadradas de tamaño n con entradas en $\mathbb{F}$. Se define

$$\begin{aligned} \varphi : M_n(\mathbb{F}) &\to \mathbb{F}^{n^2} \\ [a_{i,j}]_{i,j} &\mapsto (a_{1,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{n,n-1}, a_{n,n}) \end{aligned}$$

Esta función define una biyección, la cual nos permite dotar al espacio de matrices cuadradas de una topología. La topología se define como sigue. Un conjunto $U \subset M_n(\mathbb{F})$ es abierto si y solo $\varphi(U)$ es abierto en $\mathbb{F}^{n^2}$. Con esta topología se tiene que

$$M_n(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}^{n^2},$$

de modo que $M_n(\mathbb{F})$ con esta topología es una variedad topológica; más aún es una variedad suave.

Ahora contamos con los elementos necesarios para definir qué es un grupo de Lie.

Definición 1.3.6. *Un* ***grupo de Lie*** *G es una variedad diferencial G la cual cuenta con una estructura de grupo* $(G, \cdot)$ *de tal manera que el producto y la inversión*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\to G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \cdot g_2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} i : G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

sean funciones suaves.

En la definición anterior, basta pedir que el producto sea una función suave para obtener la estructura de grupo de Lie, para una solución parcial de esto vea el Problema 7-3 de [Lee12].

Ejemplo 3. $\mathbb{R}^n$ con la operación dada por la suma sus estructuras topológica y diferencial usual es un grupo de Lie.

Proposición 1.3.7. *El conjunto de matrices invertibles,* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$*, es un grupo de Lie.*

Demostración. El grupo general lineal $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ (con $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) es el conjunto de matrices invertibles junto con el producto usual de matrices. El hecho de que $GL(n, \mathbb{F})$ sea un grupo se sigue de que

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Además, el grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ es una variedad diferencial en efecto, notemos que la función

$$\det : \; M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$$

es una función suave,ya que es un polinomio en las entradas de la matriz en la que se evalúa, y que

$$GL(n, \mathbb{F}) = (\det)^{-1}(\mathbb{F} - \{0\}),$$

lo que demuestra que el grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ es un conjunto abierto de $M_n(\mathbb{F})$ y, por lo tanto, es una variedad. Finalmente, para ver que es un grupo de Lie, notemos que tanto el producto como la inversa de matrices se pueden expresar como polinomios en las entradas de las matrices en las que se evalúen, lo cual garantiza la suavidad de dichas funciones. ■

Los grupos de Lie que nos interesan en el presente trabajo son subgrupos del grupo de Lie $GL(n, \mathbb{F})$. Por lo tanto debemos probar que dichos subgrupos son variedades suaves. En la mayoría de los casos no es posible dar explícitamente cartas, razón por la cual puede ser complicado demostrar que algo es una variedad suave. Sin embargo, los siguientes resultados de geometría diferencial nos ayudan a demostrar que algo es una variedad, sin tener explícitamente un atlas.

Definición 1.3.8. *Sea* $F : N \to M$ *una función suave entre variedades suaves* M *y* N*. Un* ***conjunto de nivel*** *de la función* F *es el conjunto*

$$F^{-1}(\{c\}) = \{x \in N : F(x) = c\}$$

para algún $c \in M$*.*

Definición 1.3.9. *Sea* $F : N \to M$ *una función suave entre variedades. Un punto* $c \in M$ *es un* ***valor regular*** *si* $c \notin F(N)$ *o si para todo* $p \in F^{-1}(c)$ *el diferencial de* F *en* p *es sobreyectivo. Un* ***conjunto de nivel regular*** *es el conjunto de nivel de un valor regular.*

Los conjuntos de nivel regulares no vacíos de una variedad suave M son variedades diferenciables, y su estructura diferencial es compatible con la de M. Para dar sentido a esta compatibilidad, definimos qué es una **subvariedad**.

Definición 1.3.10. *Sean M, N variedades suaves y $F : M \to N$ una función suave. Diremos que F es*

- *una **inmersión** si el diferencial d_pF es inyectivo para cada $p \in M$,*
- *una **submersión** si el diferencial d_pF es sobreyectivo para cada $p \in M$,*
- *un **encaje suave** si es una inmersión y*

$$F : M \to F(M) \subseteq N$$

  es un homeomorfismo donde $F(M)$ tiene la topología del subespacio.

Definición 1.3.11. *Sea M una variedad suave. Una **subvariedad regular** (encajada) es un subconjunto $S \subset M$ que es una variedad suave con la topología del subespacio tal que la estructura suave satisface que la función inclusión*

$$\begin{aligned} i : S &\hookrightarrow M \\ P &\mapsto P \end{aligned}$$

es un encaje suave.

Con esta definición, solo consideramos los subconjuntos que son variedades suaves pero cuya topología y estructura suave son similares a las de la variedad M.

Teorema 1.3.12 (Teorema del valor regular). *[[Tu10, Teorema 9.9]] Sea $F : N \to M$ una función suave entre variedades. Entonces todo conjunto de nivel regular $F^{-1}(c)$ no vacío es una subvariedad regular de N.*

Teorema 1.3.13. *[[Tu10, Proposición 15.11]] Sea G un grupo de Lie, H un subgrupo y una subvariedad regular de G, entonces H es un subgrupo de Lie de G.*

Puede demostrarse que los siguientes ejemplos son grupos de Lie usando el Teorema 1.3.13.

Proposición 1.3.14. *El grupo ortogonal*

$$\mathrm{O}(n) := A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : AA^T = A^T A = I\}$$

y el grupo especial ortogonal

$$\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) : \det A = 1\}$$

son grupos de Lie.

Demostración. Notemos que la función

$$\begin{aligned} f : M_n(\mathbb{R}) &\to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto AA^T \end{aligned}$$

es suave, (donde $Sym_n(\mathbb{R})$ denota al conjunto de matrices simétricas reales), puesto que cada entrada es un polinomio en las variables de la matriz en la que se evalúa. Además,

$$\mathrm{O}(n) = f^{-1}\{Id\}.$$

Se afirma que la matriz Id es un valor regular de la función f. En efecto, fijando $A \in \mathrm{O}(n) = f^{-1}\{Id\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} d_A f(B) = \lim_{t \to 0} \frac{f(A + tB) - f(A)}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{AA^T + tAB^T + tBA^T - AAT}{t} \\ &= AB^T + BA^T. \end{aligned}$$

Dada cualquier matriz simétrica C, haciendo $B = \frac{CA}{2}$ se tiene que $d_A f(B) = C$, lo que demuestra que $d_A f$ es sobreyectiva para cada $A \in \mathrm{O}(n)$. Por el Teorema 1.3.12 es una variedad regular, y finalmente por el Teorema 1.3.13 es un grupo de Lie.

El grupo especial ortogonal $\mathrm{SO}(n)$ también es un grupo de Lie, esto se puede probar usando el mismo procedimiento que para el grupo $O(n)$ pero usando la función

$$\begin{aligned} g : M_n(\mathbb{R}) &\to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^* \\ A &\mapsto (AA^T, \mathrm{Det}(A)) \end{aligned}$$

con el valor regular $(Id, 1)$.■

Al ser $\mathrm{O}(n)$ un conjunto con estructura tanto geométrica como algebraica, cuenta con propiedades interesantes. A continuación se mencionan algunas propiedades algebraicas que utilizaremos.

Proposición 1.3.15. *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, y T la transformación lineal asociada a esa matriz, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

- $A \in \mathrm{O}(n)$,
- *las filas y columnas de A son ortonormales,*
- *T es una isometría respecto al producto interno usual de $\mathbb{R}^n$,*

Proposición 1.3.16. *El grupo* $\mathrm{SO}(n)$ *es conexo. Más aún, es la componente conexa de la identidad de* $\mathrm{O}(n)$.

Demostración. La prueba de que el grupo $\mathrm{SO}(n)$ es conexo puede hallarse en [WA67]. El hecho de que sea una componente conexa se sigue del hecho de que $\mathrm{SO}(n)$ es un subgrupo de índice 2 en $\mathrm{O}(n)$ y que la función determinante es continua. ■

Proposición 1.3.17. *Los grupos* $\mathrm{O}(n)$ *y* $\mathrm{SO}(n)$ *son compactos.*

Demostración. Por ser $\mathrm{SO}(n)$ una componente conexa de $\mathrm{O}(n)$, es un conjunto cerrado, y por lo tanto basta probar que $\mathrm{O}(n)$ es compacto. Ya probamos que el grupo $\Omega(n)$ es una subvariedad regular, de modo que la topología que tiene es la de subespacio heredada de la de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Debido al Teorema de Heine-Borel, basta probar que $\mathrm{O}(n)$ es cerrado y acotado con respecto a alguna norma. En particular lo haremos con la siguiente norma:

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Con esta norma y usando la ortogonalidad de las columnas, es evidente que para cada $A \in \mathrm{O}(n)$ se tiene que

$$\|A\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2 \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

Para ver que es cerrado consideremos nuevamente la función continua

$$\begin{aligned} f : GL(n,\mathbb{R}) &\to Sym_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto AA^T. \end{aligned}$$

Tenemos que $\mathrm{O}(n) = f^{-1}\{\mathrm{Id}\}$, por lo que $\mathrm{O}(n)$ es cerrado y en consecuencia compacto. ■

Recordemos que dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$, la notación A^* representa a la matriz transpuesta conjugada.

Proposición 1.3.18. *El grupo unitario*

$$\mathrm{U}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) : AA^* = A^*A = I\},$$

y el grupo especial unitario

$$\mathrm{SU}(n) := \{g \in \mathrm{U}(n) : \det g = 1\}$$

son grupos de Lie.

Demostración. La demostración es análoga a la de la Proposición 1.3.14.

Proposición 1.3.19. *Los grupos* $\mathrm{U}(n)$ *y* $\mathrm{SU}(n)$ *son compactos y conexos.*

Demostración. La demostración es análoga a la de la Proposición 1.3.17.

1.3.2 Espacios homogéneos y acciones de grupos.

Un espacio homogéneo es un espacio el cual localmente se ve de manera idéntica en cualquier punto. Nos interesa saber qué es un espacio homogéneo, pues sobre estos espacios se llevan a cabo las representaciones que estudiaremos. Hay al menos dos maneras de estudiar espacios homogéneos, una geométrica (variedades homogéneas) y otra en la que sólo nos quedamos en un nivel topológico. Para ambas es necesario contar con el concepto de acción de grupo.

Definición 1.3.20. *Sea G un grupo (no necesariamente topológico) y X un conjunto. Una* ***acción izquierda*** *de G sobre X es una función* $\varphi : G \times X \to X$*, la cual denotamos por* $(g, x) \mapsto g \cdot x$*, con las siguientes propiedades:*

- $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x \quad (\forall x \in X) \quad y \quad (\forall g_1, g_2 \in G),$
- $1 \cdot x = x \quad (\forall x \in X).$

Cuando tenemos una acción izquierda de un grupo G sobre un espacio X, diremos que G ***actúa por la izquierda sobre*** *X y lo denotaremos como* $G \curvearrowright X$*.*

En caso de que G sea un grupo topológico localmente compacto Hausdorff y X un espacio topológico localmente compacto Hausdorff, pediremos además que la función φ *sea continua y que*

$$\begin{aligned} \varphi_g : X &\to X \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

sea un homeomorfismo para cada $g \in G$

Nos interesa un tipo particular de acciones para poder definir un espacio homogéneo.

Definición 1.3.21. *Sea G un grupo que actúa por la izquierda sobre un espacio X. Diremos que la acción es* ***transitiva*** *si para cualesquiera* $x, y \in X$ *existe un* $g \in G$ *tal que*

$$x = g \cdot y.$$

Notemos que en la definición anterior no pedimos que el grupo fuese un grupo de Lie, ni siquiera un grupo topológico. Cuando el grupo G sea un grupo topológico y X sea un espacio topológico, pediremos que la acción sea una función continua. Para el caso de un grupo de Lie G y X una variedad suave, pediremos que la acción sea una función suave entre variedades.

Definición 1.3.22. *Sea G un grupo actuando sobre un espacio X y* $w \in X$ *fijo. Definimos* ***el grupo de isotropía de w*** *como*

$$G^w = \{g \in G : g \cdot w = w \quad \textit{para todo } g \in G\}.$$

Es posible demostrar que G^w en efecto es un grupo, dicho grupo nos será de utilidad más adelante para el resultado principal del trabajo. Ahora ya nos encontramos en condiciones de definir qué es un espacio homogéneo.

Definición 1.3.23. *Un* ***espacio homogéneo (suave)*** *es una variedad suave M junto con la acción suave y transitiva de un grupo de Lie G sobre M. Un* ***espacio homogéneo*** *es un espacio topológico localmente compacto M junto con la acción transitiva de un grupo topológico localmente compacto G, que cumple con la condición de que M sea homeomorfo a un espacio cociente* G/H*, con H algún subgrupo cerrado de G.*

Ejemplo 4. La acción del grupo $\mathrm{O}(n)$ en S^{n-1}, dada por multiplicación por la izquierda

$$A \cdot x = Ax,$$

es transitiva, puesto que dado un vector x de norma 1, podemos completar a una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ y definir una matriz ortogonal cuyas columnas sean los vectores de esta base, de manera que

$$A \cdot e_n = Ae_n = x.$$

Por lo tanto S^{n-1} es un espacio homogéneo de $\mathrm{O}(n)$.

Ejemplo 5. La acción del grupo $\mathrm{SO}(n)$ en S^{n-1} dada por multiplicación por la izquierda es nuevamente transitiva; por lo tanto S^{n-1} es un espacio homogéneo de $\mathrm{SO}(n)$. La prueba de que la acción es transitiva es análoga a la del ejemplo anterior.

Ejemplo 6. El grupo $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ actúa suavemente sobre el semi-plano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, por medio de transformaciones de Möbius, es decir,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Esta acción es transitiva, pues, dado un complejo $z = x + iy \in \mathbb{H}$, consideramos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{bmatrix}$$

la cual cumple que $A \cdot i = z$. Por lo tanto, la acción es transitiva y el semi-plano superior es un espacio homogéneo de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

El siguiente teorema nos da una manera de construir espacios homogéneos.

Teorema 1.3.24. *[Lee12, Teorema 21.17] Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado de G. El espacio cociente G/H es una variedad topológica y tiene una única estructura suave tal que la función cociente*

$$\begin{aligned} \pi : G &\to G/H \\ g &\mapsto gH \end{aligned}$$

es una submersión suave. La acción izquierda dada por

$$g_1 \cdot (g_2 H) = (g_1 g_2) \cdot H$$

vuelve al espacio G/H es un espacio homogéneo.

El teorema principal de espacios homogéneos nos dice que un espacio homogéneo puede ser identificado con un cociente de grupos de Lie.

Teorema 1.3.25. *[Lee12, Teorema 21.18] Sea G un grupo de Lie, M un espacio homogéneo de G y $p \in M$. El grupo de isotropía de G, G_p, es un grupo cerrado de G y además la transformación*

$$\begin{aligned} F : G/G_p &\to M \\ gG_p &\mapsto g \cdot p \end{aligned}$$

es un difeomorfismo.

Notemos que con este teorema podemos expresar a S^{n-1} como cociente de grupos de Lie.

Proposición 1.3.26. *Consideremos S^{n-1} y $\mathrm{SO}(n) \curvearrowright S^{n-1}$ actuando por multiplicación por la izquierda. El grupo de isotropía de $e_n = (0, \cdots, 1)$ es isomorfo a $\mathrm{SO}(n-1)$ y por lo tanto*

$$S^{n-1} \cong \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) \cong \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1).$$

Demostración. Es posible demostrar usando la Proposición 1.3.15 que

$$\mathrm{SO}(n)_{e_n} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in \mathrm{SO}(n-1) \right\} \cong \mathrm{SO}(n-1).$$

La igualdad $Ae_n = e_n$ implica que la última columna de A debe ser e_n. Usando la ortogonalidad de las filas, tenemos que la última fila debe ser $e_n^T = (0, \cdots, 1)$ y que el resto es una matriz ortogonal de tamaño $n-1$. Análogamente, se demuestra que

$$\mathrm{O}(n)_{e_n} \cong \mathrm{O}(n-1). \blacksquare$$

2 Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Como veremos más adelante, el problema de demostrar que una representación de un grupo G sobre un espacio vectorial V es irreducible no es sencillo. Sin embargo, para ciertos tipos de espacios vectoriales, existen condiciones muy concretas que garantizan que dicha representación es irreducible. Un ejemplo de estos espacios son los **espacios de Hilbert con núcleo reproductor**.

2.1 Definición y ejemplos

Definición 2.1.1. *Sea X un conjunto no vacío. Denotemos por $\mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ al espacio de funciones de X en $\mathbb{C}$. Diremos que un espacio de Hilbert $\mathscr{H} \subseteq \mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ es un* ***espacio de Hilbert con núcleo reproductor (EHNR)*** *si para cada $x_0 \in X$, el funcional de evaluación en x_0*

$$\begin{aligned} F_{x_0} : \mathscr{H} &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(x_0) \end{aligned}$$

es acotado.

Supongamos que $\mathscr{H} \subseteq \mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ es un EHNR, tomando $y \in X$ consideremos el funcional de evaluación en el punto $y \in X$:,

$$\begin{aligned} F_y : \mathscr{H} &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(y). \end{aligned}$$

Por el Teorema de representación de Riesz, existe un vector $k_y \in \mathscr{H} \subseteq \mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ tal que

$$F_y(f) = \langle f, k_y \rangle \quad \text{para todo } f \in \mathscr{H}.$$

Definimos el **núcleo reproductor** de $\mathscr{H}$ como la función

$$\begin{aligned} k : X \times X &\to \mathbb{C} \\ (x,y) &\mapsto k(x,y) = k_y(x). \end{aligned}$$

Ejemplo 7. Tomando $X = \{1, 2 \cdots n\}$ identificamos $\mathcal{F}(\{1,\cdots,n\},\mathbb{C})$ con $\mathbb{C}^n$. Sea $\mathscr{H} \subseteq \mathbb{C}^n$ arbitrario, $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor, puesto que todo funcional lineal en $\mathbb{C}^n$ es acotado. En particular, para $j \in X$ el funcional

$$F_j(x) = F_j((x_1, \cdots x_n)) = x_j$$

es acotado, desde luego $F_1, \cdots, F_n$ es la base dual de la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Además, notemos que

$$F_j(z) = \langle z, e_j \rangle.$$

Los vectores de $\mathscr{H} = \mathbb{C}^n$ son funciones definidas en el conjunto $X = \{1, ..., n\}$. Tomamos $j \in X$ y el funcional

$$F_j(z) = z_j = \langle z, e_j \rangle,$$

entonces $k_j = e_j$; por lo tanto, el núcleo reproductor es

$$\begin{aligned} k : X \times X &\to \mathbb{C} \\ (i, j) &\mapsto k_j(i) = e_j(i) = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Ejemplo 8. Sea $X = \mathbb{N}$ y $\mathrm{d}\mu$ la medida de conteo. Consideremos el espacio de Hilbert

$$\mathscr{H} = L^2(X, \mathrm{d}\mu) = \ell^2(X) \subseteq \mathscr{F}(X, \mathbb{C}),$$

es decir, el espacio de sucesiones cuadrado sumables; esto es, el espacio de sucesiones

$$X = (x_n)_{n=1}^{\infty} \quad \text{tales que} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

El producto interno está dado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$ definimos el vector $e_j \in \ell^2(\mathbb{N})$ como

$$e_j(i) = \delta_{ij}.$$

En el espacio $\mathscr{H}$, el funcional evaluación en j toma la forma

$$\begin{aligned} F_j : \ell^2(\mathbb{N}) &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto x(j) = x_j. \end{aligned}$$

Veamos que

$$F_j(x) = x_j = \langle x, e_j \rangle.$$

Por la unicidad en el Teorema de representación de Riesz, se tiene que $K_j(\cdot) = e_j(\cdot)$. Así, el núcleo reproductor es

$$\begin{aligned} K(i, j) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases} \\ &= e_j(i). \end{aligned}$$

Ejemplo 9. Consideremos $D \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo distinto de $\mathbb{C}$. Tenemos el espacio de funciones holomorfas sobre D al cual denotamos por $\mathbb{H}(D)$. Tomando una medida $\mathrm{d}\mu$ en D que puede ser, por ejemplo, la medida de Lebesgue $\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, definimos el **espacio de bergman** como la intersección

$$\mathbb{H}(D) \cap L^2(D, \mathrm{d}\mu).$$

El caso clásico es cuando la medida $\mathrm{d}\mu$ es la medida de Lebesgue, en este caso el espacio de bergman es un EHNR, el núcleo reproductor es llamado **núcleo de bergman** y es una función $K : D \times D \to \mathbb{C}$

tal que

$$f(z) = \int_D f(z)K(z,w)\mathrm{d}\mu(w) = \langle f, K_z\rangle,$$

donde $K_z(w) = K(w,z)$para todo $w \in D$.

Si $\mathrm{d}\mu$ es la medida de Lebesgue y D es el disco unitario, podemos expresar explícitamente el núcleo reproductor como

$$K(z,w) = -\frac{1}{\pi(1 - z\overline{w})^2}.$$

No todo espacio L^2 es un EHNR, para esto consideremos el siguiente contraejemplo.

Ejemplo 10. El espacio de Hilbert $L^2([0,1], d\mu)$ no es un EHNR, primeramente porque no es un espacio de Hilbert de funciones; sus elementos son clases de equivalencia de funciones; además, suponiendo que hubiera una forma de escoger un representante de cada clase, de tal modo que el funcional evaluación esté bien definido, es posible demostrar que este no sería continuo.

2.2 Resultados principales

El resultado principal que nos permite conectar la teoría de representaciones y la teoría de **EHNR**, reside en las propiedades reproductivas de este último, así como en el hecho de que estos espacios están determinados de manera única por su núcleo (Kernel).

Proposición 2.2.1. *Sea $\mathscr{H}$ un EHNR y $K(\cdot,\cdot)$ el núcleo reproductor. Para $x, y \in X$, el núcleo satisface*

1. $K_y := K(\cdot, y) \in \mathscr{H}$,
2. $\overline{K(x,y)} = K(y,x) = \langle K_x, K_y\rangle$,
3. $K(y,y) = \|K_y\|^2 = \|K(\cdot,y)\|^2$.

Demostración.

1. Dado $y \in X$, se tiene que $K(\cdot, y) = K_y \in \mathscr{H}$ por el Teorema de representación de Riesz.
2. $K(x,y) = K_y(x) = F_x(K_y) = \langle K_y, K_x\rangle = \overline{\langle K_x, K_y\rangle} = \overline{K_x(y)} = \overline{K(y,x)}$.
3. $\|K_y\|^2 = \langle K_y, K_y\rangle = K_y(y) = K(y,y)$.

A partir de los núcleos podemos obtener un conjunto total para el espacio de Hilbert.

Teorema 2.2.2. *Sea $\mathscr{H}$ un **EHNR** sobre el conjunto X y $K : X \times X \to \mathbb{C}$ el núcleo reproductor, entonces la colección*

$$\{K_y(\cdot) = K(\cdot, y) : y \in X\}$$

genera un subespacio denso en $\mathscr{H}$.

Demostración. Sea $H_0 = \text{span}\,\{K_y(\cdot)\}_{y\in X}$. Se afirma que $\overline{H_0} = \mathscr{H}$. Recordemos que

$$(\overline{H_0})^{\perp} = H_0^{\perp\perp\perp} = \overline{H_0^{\perp}} = H_0^{\perp},$$

por lo que basta probar que $H_0^{\perp} = \{0\}$. Sea $f \in H_0^{\perp}$, se cumple que para todo $y \in X$

$$f(y) = \langle f, K_y\rangle = 0 \quad \text{para todo } y \in X$$

y por lo tanto $f \equiv 0$.■

Una de las propiedades que tenemos en EHNR es que la convergencia en el espacio de Hilbert implica convergencia puntual.

Lema 2.2.3. *Sea $\mathscr{H}$ un EHNR sobre X. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f en $\mathscr{H}$, entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f, es decir, para cada $x \in X$ se tiene que*

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \to f(x).$$

Demostración. Sea $x \in X$, notemos que

$$|f(x) - f_n(x)| = |F_x(f - f_n)| = |\langle f - f_n, K_x\rangle| \leq \|f - f_n\|\|K_x\|$$

por la definición de núcleo y por la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Dado $\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{1+\|K_x\|}$, existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que $\|f_n - f\|<\epsilon_0$ para todo $n > N$. Por lo tanto,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{1 + \|K_x\|} \cdot \|K_x\|<\epsilon.$$

El siguiente resultado es una de las características destacables de la teoría de EHNR.

Teorema 2.2.4. *Sea $\mathscr{H}$ un EHNR y $\{e_i\}_{i\in I}$ una base ortogonal para $\mathscr{H}$. Entonces*

$$K(x, y) = \sum_{i\in I} e_i(x)\overline{e_i(y)},$$

donde la convergencia es convergencia puntual. También se cumple que

$$K_y = \sum_{i\in I} e_i\overline{e_i(y)},$$

donde la convergencia se da en la métrica de $\mathscr{H}$.

Demostración. Por ser una base ortonormal tenemos que

$$K(\cdot, y) = K_y = \sum_{j\in J}\langle K_y, e_j\rangle e_j = \sum_{j\in J} \overline{e_j}(y)e_j.$$

Como la convergencia en un EHNR implica convergencia puntual tenemos que

$$K(x, y) = K_y = \sum_{j\in J}\langle K_y, e_j\rangle e_j(x) = \sum_{j\in J} \overline{e_j}(y)e_j(x).■$$

Teorema 2.2.5. *Sea $\mathscr{H}$ un EHNR y $\mathscr{H}_0 \subseteq \mathscr{H}$ un subespacio cerrado. Se cumple que $\mathscr{H}_0$ es un EHNR y que el núcleo de $\mathscr{H}_0$, denotado por Φ, es*

$$\Phi(x, y) = \langle P_0 K_y, K_x\rangle \quad \textit{para todo } x, y \in X,$$

donde $P_0 : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ es la proyección ortogonal de $\mathscr{H}$ sobre $\mathscr{H}_0$.

Demostración. Para cada $x \in X$, el operador evaluación

$$\mathring{F}_x : \mathscr{H}_0 \to \mathbb{C}$$

es la restricción a $\mathscr{H}_0$ del operador evaluación F_x, el cual por hipótesis es continuo. Por ser $\mathscr{H}_0$ cerrado, el operador $\mathring{F}_x$ es continuo $\forall x \in X$; por lo tanto, $\mathscr{H}_0$ es un EHNR.

Ahora sea Φ el núcleo reproductor de $\mathscr{H}_0$. Notemos que

$$\mathring{F}_x(f) = \langle f, \Phi_x\rangle \quad \text{para todo } f \in \mathscr{H}_0 \text{ para todo } x \in X.$$

Por otro lado, para cada $f \in \mathscr{H}_0$ y $x \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned}\mathring{F}_x(f) = F_x(f) &= \langle f, K_x\rangle \\ &= \langle P_0 f, K_x\rangle = \langle f, P_0^* K_x\rangle = \langle f, P_0 K_x\rangle,\end{aligned}$$

pues P_0 es Hermitiano por ser una proyección ortogonal. Por la unicidad del Teorema de representación de Riesz-Frechet tenemos que

$$\Phi_x = P_0 K_x \quad \text{para todo } x \in X,$$

de donde se concluye que

$$\Phi(x, y) = \langle P_0 K_y, K_x\rangle. \blacksquare$$

Este último resultado es fundamental para la demostración del resultado principal de la siguiente sección.

Teorema 2.2.6. *Sean $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ espacios de Hilbert con núcleo reproductor sobre X, con productos internos $\langle , \rangle_1$ y $\langle , \rangle_2$ respectivamente, sean $K_1, K_2 : X \times X \to \mathbb{C}$ los respectivos núcleos reproductores, si*

$$K_1(x, y) = K_2(x, y) \quad \textit{para todo } x, y \in X,$$

entonces $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2$ y $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$.

Demostración. Definimos $K := K_1 = K_2$. Consideremos los espacios

$$W_i = \operatorname{span}\{K_{i_y}\}_{y \in X} \quad i = 1, 2.$$

Tenemos que $W_1 = W_2$. Además $\mathscr{H}_1 = \overline{W_1}$ y $\mathscr{H}_2 = \overline{W_2}$ con las respectivas topologías de los espacios $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$. Probaremos que ambos espacios tienen la misma norma y por lo tanto ambas cerraduras son idénticas; concluiremos que $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2$.

Notemos que cualquier $f \in W_1$ se expresa como

$$f = \sum_{j=1}^{m} a_j K_{y_j},$$

por lo que,

$$\|f\|_1^2 = \langle f, f\rangle_1 = \left\langle \sum_{j=1}^{m} a_j K_{y_j}, \sum_{k=1}^{m} a_k K_{y_k} \right\rangle_1 = \sum_{j,k=1}^{m} a_j \overline{a_k} K(y_k, y_j).$$

De manera análoga, tenemos

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j,k=1}^{m} a_j \overline{a_k} K(y_k, y_j).$$

De modo que $\|f\|_1 = \|f\|_2$ para todo $f \in W_1 = W_2$.

Ahora bien, para cada $f \in \mathscr{H}_1$ existe una sucesión de elementos en W_1, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0.$$

En particular $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en $\|\cdot\|_1$ y, por lo tanto, también en $\|\cdot\|_2$, de modo que existe $g \in \mathscr{H}_2$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|g - f_n\|_2 = 0.$$

Como la convergencia en un EHNR implica convergencia puntual, tenemos que

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad (\forall x \in X),$$

por lo tanto f y g son idénticas.

Finalmente, la continuidad de la norma nos garantiza que

$$\|f\|_1 = \|\lim_{n\to\infty} f_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2. \blacksquare$$

3 Teoría de representaciones

3.1 Teoría de representaciones de grupos compactos

La teoría de representaciones de grupos compactos fue ampliamente estudiada y desarrollada por los matemáticos **Hermann Weyl** y **Fritz Peter**. Se deben a estos matemáticos varias de las técnicas estándar en teoría de representaciones de grupos de Lie compactos así como varios teoremas fundamentales, como el Teorema de representación de Riesz.

Figura 3.1: Hermann Weyl

Definición 3.1.1. *Sea G un grupo y V un espacio vectorial no nulo sobre un campo $\mathbb{F}$. Una representación de G sobre V es un homomorfismo de grupos*

$$\pi : G \to Aut(V),$$

*donde $Aut(V) = \{T : V \to V : \ T \text{ es lineal e invertible}\}$. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, diremos que **la representación es de dimensión finita**, en caso contrario diremos que **la representación es dimensión infinita**.*

En el presente trabajo nos centramos en las llamadas **representaciones unitarias**, para esto consideraremos siempre a G como un grupo topológico y $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert. Una **representación unitaria** de G en $\mathscr{H}$ es un homomorfismo de grupos

$$\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H}).$$

Si además, el homomorfismo es una función continua cuando $\mathcal{U}(\mathscr{H})$ tiene la topología fuerte de operadores, diremos que la representación es **fuertemente unitaria**.

Ejemplo 11 (**Representación estándar**). Sea $G = \mathrm{SO}(n)$. La representación estándar es la representación de G sobre $\mathbb{R}^n$, donde $\pi(g)$ es dada por la multiplicación por la izquierda por la matriz g, es decir,

$$\pi(g)(x) = gx.$$

Ejemplo 12. Consideremos el grupo $\mathbb{R}$ bajo la adición, y al espacio de Hilbert $\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual. Definimos la representación unitaria $\pi : \mathbb{R} \to \mathcal{U}(\mathbb{R}^2)$ mediante

$$\pi(x) = \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}.$$

El siguiente ejemplo es relevante para la teoría general de representaciones de grupos compactos, y guarda relación con el **Teorema de Peter-Weyl.**

Ejemplo 13 (Representación regular). Sea G un grupo compacto y ρ la medida de Haar izquierda asociada al grupo. Se define **la representación regular izquierda** sobre el espacio de Hilbert $L^2(G, \rho)$ mediante traslaciones, es decir,

$$[\pi_L(g)f](h) = L_g f(h) = f(g^{-1}h) \quad (\forall g, h \in G)(\forall f \in L^2(G, \rho)).$$

Esto está bien definido pues dado $f \in L^2(G, \rho)$ tenemos que

$$\int_G |\pi_L(g)f(h)|^2 d\rho(h) = \int_G |L_g f(h)|^2 d\rho(h) \int_G |f(g^{-1}h)|^2 d\rho(h) = \int_G |f(h)|^2 d\rho(h) < \infty$$

por la invarianza de la medida de Haar.

Fijo $g \in G$ tenemos que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f_1, f_2 \in L^2(G, \rho)$ se tiene que

$$L_g(\alpha f_1 + f_2)(h) = \alpha f_1(g^{-1}h) + f_2(g^{-1}h) = \alpha L_g f_1(h) + L_g f_2(h) \quad \text{para todo } h \in G,$$

por lo que $\pi_L(g)$ es una transformación lineal para cada $g \in G$. Además tiene una inversa dada por $\pi_L(g^{-1})$ lo que demuestra que en efecto π_L es una representación. Mas aún, es una representación unitaria.

De manera similar al estudio de operadores buscamos entender una representación por medio de su comportamiento en espacios más pequeños, esto con el propósito de facilitar el estudio de la representación. Esto da lugar al concepto de espacios invariantes de la representación.

Definición 3.1.2. *Sea $\mathcal{M}$ un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $\mathscr{H}_\pi$. Se dirá que $\mathcal{M}$ es invariante para una representación $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H}_\pi)$ o G-invariante si*

$$\pi(x)\mathcal{M} \subset \mathcal{M} \quad \textit{para todo } x \in G,$$

es decir, si es un subespacio invariante del operador $\pi(x)$ para todo $x \in G$.

Sea $\mathcal{M} \neq \{0\}$ subespacio cerrado e invariante para la representación π, la restricción de la representación π a $\mathcal{M}$ denotado por $\pi^{\mathcal{M}}$ es el homomorfismo $\pi^{\mathcal{M}} : G \to \mathcal{U}(\mathcal{M})$ definido mediante

$$\pi^{\mathcal{M}}(g) = \pi(g)|_{\mathcal{M}}.$$

Es evidente que esta restricción es nuevamente una representación.

Lema 3.1.3. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert. Si $\mathcal{W}$ es un subespacio invariante de una representación unitaria $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$, entonces $\mathcal{W}^\perp$ también es un subespacio invariante de la representación.*

Demostración. Sea $w \in W$, $v \in W^{\perp}$ y $g \in G$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \pi(g)(v), w\rangle &= \langle v, \pi^{*}(g)(w)\rangle \\ &= \langle v, \pi(g)^{-1}(w)\rangle \\ &= \langle v, \pi(g^{-1})(w)\rangle = 0. \blacksquare\end{aligned}$$

Sobre el tipo de subespacios invariantes sobre el cual nos centraremos, son los subespacios **irreducibles** de la representación.

Definición 3.1.4. *Sea π una representación de un grupo G sobre un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, la representación se dice* ***irreducible*** *si no tiene subespacios cerrados e invariantes distintos de* $\{0\}$ *Y* $\mathscr{H}$.

Sea $\mathscr{A}$ un subespacio de $\mathscr{H}$. Diremos que $\mathscr{A}$ es un ***submodulo irreductible*** *si la representación $\pi^{\mathscr{A}}$ es irreductible.*

Una representación de un grupo de Lie se le llamará ***completamente reductible*** *o totalmente reductible si es la suma directa de submódulos irreducibles.*

Aun cuando en la bibliografía existen definiciones particulares de operadores de entrelace, dependiendo de si la representación es unitaria o de dimensión finita, podemos dar una definición más general.

Definición 3.1.5. *Sean (π_1, V_1) y (π_2, V_2) representaciones de G. Un operador de entrelace de π_1 a π_2 es un operador lineal $T : V_1 \to V_2$ tal que*

$$\pi_2(g) \circ T = T \circ \pi_1(g) \quad (\forall g \in G),$$

es decir, hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\pi_1(g)} & V_1 \\ \downarrow{\scriptstyle T} & & \downarrow{\scriptstyle T} \\ V_2 & \xrightarrow{\pi_2(g)} & V_2 \end{array}$$

Definición 3.1.6. *Sean (π_1, V_1) y (π_2, V_2) representaciones de un grupo G.*

1. *Denotaremos por* $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ *al conjunto de operadores de entrelace entre la representación (π_1, V_1) y (π_2, V_2).*

2. *Diremos que las representaciones π_1 y π_2 son equivalentes si existe un operador biyectivo en* $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$.

3. *En el caso de que (π_1, V_1) y (π_2, V_2) sean representaciones unitarias denotamos por $\boldsymbol{C}(V_1, V_2)$ al conjunto de operadores de entrelace que son también operadores lineales acotados.*

4. *Diremos que las representaciones unitarias (π_1, V_1) y (π_2, V_2) son unitariamente equivalentes si existe un operador unitario en $\boldsymbol{C}(V_1, V_2)$.*

Sobre el conjunto de representaciones de un grupo de Lie se puede definir una relación donde, dadas dos representaciones (V_1, π_1) y (V_2, π_2), $\pi_1 \sim \pi_2$ si son equivalentes. Esta relación es una relación de equivalencia. De manera análoga, se define una relación de equivalencia sobre el conjunto de representaciones unitarias.

A partir de ahora todas nuestras representaciones las consideraremos en espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{C}$.

Definición 3.1.7 (Dual unitario)**.** *El dual unitario de un grupo G se define como el conjunto de clases de equivalencia de representaciones unitarias sobre $\mathbb{C}$ irreducibles del grupo G, y se denota como $\widehat{G}$.*

Una de las razones principales por la cual estudiamos grupos compactos es que sus representaciones irreducibles siempre tienen dimensión finita. Este hecho nos da muchas caracterizaciones para las representaciones irreducibles.

Teorema 3.1.8. *Si G es un grupo compacto, entonces*

1. *Cada representación irreducible de G es de dimensión finita.*
2. *Cada representación unitaria de G es suma directa de representaciones irreducibles.*

Demostración. La demostración de este resultado puede hallarse en el Teorema 5.2 de [Fol94].

Teorema 3.1.9. *Cada representación de dimensión finita de un grupo de Lie compacto es unitaria en el sentido de que se puede definir un producto interno que la haga unitaria.*

Demostración. Por ser G compacto existe una medida de Haar izquierda dg, de modo que definiendo $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ como

$$\langle v, w \rangle_1 = \int_G \langle \pi(g)(v), \pi(g)(w) \rangle dg.$$

Esto es una función bien definida pues $g \mapsto \langle \pi(g)(v), \pi(g)(w) \rangle$ es una función continua y por lo tanto integrable. Además es positiva, bilineal y satisface que

$$0< \int_G \langle \pi(g)(v), \pi(g)(v) \rangle \, dg \; = \langle v, v \rangle_1 \quad \text{para todo } v \neq 0,$$

ya que

$$0<\langle \pi(g)(v), \pi(g)(v) \rangle \text{ para todo } g \in G.$$

Finalmente, como la medida de Haar es invariante bajo la acción del grupo, es inmediato que el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ es G-invariante.■

La siguiente proposición es fundamental en el desarrollo de la teoría de representaciones, es el conocido **Lema de Schur.**

Lema 3.1.10. *Sean* $(\pi_1, V), (\pi_2, W)$ *representaciones de dimensión finita del grupo de Lie compacto G. Si V y W son irreducibles, entonces*

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1 & si \quad V \cong W \\ 0 & si \quad V \ncong W. \end{cases}$$

Demostración. Sea $T \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$. Si $T \neq 0$, notemos que $\ker T$ es un subespacio G-invariante distinto de V. En efecto, sea $v \in \ker T$ tenemos que

$$T\pi_1(g)(v) = \pi_2(g)T(v) = 0 \quad \text{para todo } g \in G$$

por lo tanto $\pi_1(g)(v) \in \ker T$ $(\forall g \in G)$. Por ser (π_1, V) irreducible tenemos que $\ker T = 0$ y por lo tanto T es biyectivo, concluyendo así que $V \cong W$; por lo tanto, existe un operador de entrelace no nulo si y solo si $V \cong W$.

Ahora procedemos a probar que $\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = 1$ si $V \cong W$. Sea $T_0 \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ biyectivo y fijo. Para cada $T \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ el operador

$$T_0^{-1}T : V \to V$$

pertenece a $\mathrm{Hom}_G(V, V)$. En efecto, notemos que

$$(T_0^{-1}T)\pi_1(g) = T_0^{-1}\pi_2(g)T = \pi_1(g)(T_0^{-1}T) \quad \text{para todo } g \in G,$$

como V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita el operador $T_0^{-1}T$ tiene un valor propio λ; por lo tanto,

$$\ker(T_0^{-1}T - \lambda I) \neq 0.$$

Podemos probar que el subespacio $\ker(T_0^{-1}T - \lambda I)$ es G-invariante de manera análoga a como probamos que $\ker T$ es G-invariante. Finalmente, por ser V irreducible tenemos que

$$\ker(T_0^{-1}T - \lambda I) = V$$

y por lo tanto

$$T = \lambda T_0. \blacksquare$$

Teorema 3.1.11. *Sea G un grupo compacto y $\pi : G \to GL(H)$ una representación irreducible. Si H tiene 2 productos internos G-invariantes $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$, entonces existe un escalar positivo α tal que*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_1 = \alpha\langle\cdot,\cdot\rangle_2.$$

Demostración. Para enfatizar el producto interno denotaremos

$$\pi : G \to \mathrm{GL}(H)$$

para H con el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ y

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(H)$$

para H con el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$. Es evidente que el operador identidad $R = Id$ es un operador de entrelace para las representaciones π y ρ

$$\begin{tikzcd}
(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \arrow[r, "\pi(g)"] \arrow[d, "R"] & (H, \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \arrow[d, "R"] \\
(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_2) \arrow[r, "\rho(g)"] & (H, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)
\end{tikzcd}$$

puesto que $\rho = \pi$. Veamos que $R^*R : (H, \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \to (H, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ es un operador de entrelace para la representación π, puesto que

$$R^*R\pi(g) = R^*\rho(g)R = \pi(g)R^*R.$$

Donde se toma el adjunto con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$. Dado que π es irreducible, por el Lema de Schur tenemos que

$$R^*R = \lambda Id : (H, \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \to (H, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$$

con $0 < \lambda$, sabemos que existe una única raíz positiva, la cual debe de ser $\sqrt{\lambda} Id$. Como R^*R conmuta con los $\pi(g)$, entonces $\sqrt{R^*R}$ conmuta con los $\pi(g)$, además, $\sqrt{R^*R}$ es invertible. Consideremos la descomposición polar de R

$$R = U\sqrt{R^*R},$$

donde $U : (H, \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \to (H, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ es unitario. El operador U es de entrelace, en efecto

$$U\pi(g) = R(\sqrt{R^*R})^{-1}\pi(g) = R\pi(g)(\sqrt{R^*R})^{-1} = \rho(g)R(\sqrt{R^*R})^{-1}\rho(g)U.$$

Notemos que

$$U = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}R = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}Id : (H, \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \to (H, \langle \cdot, \cdot \rangle_2).$$

Finalmente, para $x, y \in H$, tenemos

$$\langle Ux, Uy \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1;$$

esto es,

$$\frac{1}{\lambda}\langle x, y \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1 \quad \text{para todo } x, y \in H. \blacksquare$$

3.1.1 Teorema de Peter-Weyl

Uno de los teoremas principales en la teoría de representaciones para grupos compactos es el Teorema de Peter-Weyl, este teorema nos dice dónde se encuentran las representaciones irreducibles de un grupo compacto.

Definición 3.1.12 (Entradas de matriz)**.** *Sea π una representación unitaria de G. Para $u, v \in \mathscr{H}_\pi$, definimos la función*

$$\phi_{u,v}(x) = \langle \pi(x)u, v \rangle$$

*a dichas funciones se les llama **entradas de matrices** de π.*

En el caso de que π sea una representación irreducible, sabemos que $\mathscr{H}_\pi$ es un espacio de dimensión finita, de modo que podemos escoger una base ortogonal $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^{d_\pi}$ para $\mathscr{H}_\pi$, donde $\dim \mathscr{H}_\pi = d_\pi$. En este caso, la entrada de matriz $\phi_{u,v}(x)$ es en efecto una entrada de la matriz del operador $\pi(x)$ en la base $\mathcal{B}$, denotemos por $\pi_{ij}(x)$ la entrada (i, j) de la matriz de $\pi(x)$ en la base $\mathcal{B}$. Sabemos que

$$\pi_{i,j}(x) = \left\langle \pi(x)e_j, e_i \right\rangle = \phi_{e_j,e_i}(x). \tag{3.1}$$

Denotaremos por E_π al espacio lineal generado por las entradas de matriz asociadas a la representación π.

Proposición 3.1.13. *[Fol94, Proposición 5.6] El espacio E_π depende solo de la clase de equivalencia unitaria de π. Además, es invariante bajo la traslación izquierda y derecha y es un ideal bilateral de $L^1(G)$. Finalmente, si $\dim \mathscr{H}_\pi = d_\pi$ es finita, entonces $\dim E_\pi = d_\pi^2$.*

Las entradas de matrices de representaciones irreductibles pueden ser usadas para construir una base del espacio $L^2(G)$ con su medida de Haar.

Teorema 3.1.14 (Relaciones de ortogonalidad de Schur)**.** *[Fol94, Teorema 5.8] Sean π, π′ dos representaciones unitarias irreducibles del grupo compacto G, consideremos los espacios E_π y $E_{\pi'}$ como subespacios de $L^2(G)$.*

- *Si $[\pi] \neq [\pi']$ entonces $E_\pi \perp E_{\pi'}$.*
- *Si $\{e_j\}_{j=1}^{d_\pi}$ es una base ortogonal de $\mathscr{H}_\pi$ y definimos*

  $$\pi_{i,j}(x) = \left\langle \pi(x)e_j, e_i \right\rangle \textit{para todo } x \in G.$$

  Entonces el conjunto $\left\{ \sqrt{d_\pi}\pi_{ij} : i, j = 1 \cdots d_\pi \right\}$ es una base ortogonal de E_π.

Teorema 3.1.15. *Sea π una representación unitaria e irreducible, sean $\pi_{i,j}$ las funciones definidas como en (3.1). Para $i = 1, \cdots, d_\pi$, definimos los espacios*

$$\mathcal{R}_i = \operatorname{span}\{\pi_{i,1}, \cdots, \pi_{i,d_\pi}\},$$

$$C_j = \operatorname{span}\{\pi_{1,j}, \cdots, \pi_{d_\pi,j}\}.$$

Entonces el espacio $\mathcal{R}_i$ es invariante bajo la representación regular derecha, y el espacio C_j es invariante bajo la representación regular izquierda. Finalmente, la restricción de la representación regular izquierda al espacio $\mathcal{R}_i$ es equivalente a π.

Denotemos por $\mathcal{B}$ la base ortogonal con la que definimos las funciones $\pi_{i,j}$ en (3.1), en esta base la matriz que representa a $\pi(x)$ es

$$\begin{bmatrix} \langle \pi(x)e_1, e_1 \rangle & \cdots & \langle \pi(x)e_{d_\pi}, e_1 \rangle \\ \langle \pi(x)e_1, e_2 \rangle & \cdots & \langle \pi(x)e_{d_\pi}, e_2 \rangle \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle \pi(x)e_1, e_{d_\pi} \rangle & \cdots & \langle \pi(x)e_{d_\pi}, e_{d_\pi} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{1,1}(x) & \cdots & \pi_{1,d_\pi}(x) \\ \pi_{2,1}(x) & \cdots & \pi_{2,d_\pi}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \pi_{d_\pi,1}(x) & \cdots & \pi_{d_\pi,d_\pi}(x) \end{bmatrix}.$$

Variando x, obtenemos las funciones $\pi_{i,j}$ como funciones coordenadas de una función de G en $M_{d_\pi}(\mathbb{C})$,

$$x \mapsto [\pi(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \pi_{1,1}(x) & \cdots & \pi_{1,d_\pi}(x) \\ \pi_{2,1}(x) & \cdots & \pi_{2,d_\pi}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \pi_{d_\pi,1}(x) & \cdots & \pi_{d_\pi,d_\pi}(x). \end{bmatrix}$$

De esta expresión matricial, podemos ver que el espacio $\mathcal{R}_i$ es el espacio generado por las funciones coordenadas de la i-ésima fila, y el espacio C_j es el espacio lineal generado por las funciones coordenadas de la j-ésima columna.

Teorema 3.1.16. *Sea G un grupo compacto, definimos el espacio ϵ como*

$$E := \operatorname{span}\left\{\bigcup_{[\pi]\in\widehat{G}} E_\pi\right\}.$$

Este espacio es uniformemente denso en $C(G)$, además,

$$L^2(G) = \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} E_\pi.$$

Finalmente el conjunto $\{\sqrt{d_\pi}\pi_{i,j} : i, j = 1, \cdots d_\pi,\ con\ \pi \in \widehat{G}\}$ es una base ortogonal para el espacio $L^2(G)$.

Aquí la suma directa es suma directa ortogonal de espacios de Hilbert

$$L^2(G) = \overline{\operatorname{span}\left\{\bigcup_{[\pi]\in\widehat{G}} E_\pi\right\}}.$$

3.2 Núcleos reproductores y subrepresentaciones irreducibles

Terminaremos este capítulo con un criterio que nos será útil para demostrar la irreductibilidad de ciertas representaciones, esta técnica es presentada en [BdG03].

Definición 3.2.1 (**Representación cuasi-regular**). *Sea X un conjunto no vacío y G un grupo actuando sobre X. Existe una acción del grupo G sobre el espacio de funciones de X a $\mathbb{C}$, esta acción nos permite definir una representación, la cual denotamos por π y es definida mediante la siguiente regla de correspondencia*

$$[\pi(g)f](x) = f(g^{-1} \cdot x) \quad \textit{para todo } x \in X \textit{ y para todo } g \in G$$

para cada $f : X \to \mathbb{C}$. Esta representación es conocida como la representación ***cuasi-regular*** *de G en $\mathbb{C}^X = \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$.*

Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert de funciones en el espacio X con núcleo reproductor $K(\cdot, \cdot)$ tal que $\mathscr{H}$ es un subespacio invariante de la representación cuasi-regular y tal que π restringida a $\mathscr{H}$ es unitaria. Definimos el conjunto

$$\mathscr{H}^F = \{\psi \in \mathscr{H} : \pi(k)(\psi) = \psi \text{ para todo } k \in F\},$$

donde F es un subgrupo de G.

Teorema 3.2.2 (Proposition 2, [BdG03]). *Con la notación anteriormente usada, tenemos que los siguientes enunciados se cumplen*

1. $\pi(g)K_x = K_{gx}$,
2. $K(gx, gy) = K(x, y)$ *para todo $g \in G$ y para todo $x, y \in X$*
3. *supongamos que G actúa de manera transitiva sobre X (i.e. X es un espacio homogéneo), y tomamos $w \in X$ arbitrario pero fijo. Consideremos su grupo de isotropía $F := G^w$, entonces se cumple que:*
   - *Si $\mathscr{H} \neq \{0\}$, entonces $\mathscr{H}^F \neq \emptyset$.*
   - *Si $\dim \mathscr{H}^F = 1$, entonces la representación π es irreducible.*

Demostración.

1. Sea $g \in G$ y $x \in X$. Por ser π unitaria tenemos que

$$\langle \psi, \pi(g)K_x \rangle = \langle \pi(g^{-1})\psi, K_x \rangle = \pi(g^{-1})\psi(x) = \psi(gx) = \langle \psi, K_{gx} \rangle \text{ para todo } \psi \in \mathscr{H},$$

de modo que $\pi(g)K_x = K_{gx}$ para todo $g \in G$ y para todo $x \in X$. Además, notemos que

$$\begin{aligned} K(gx, gy) &= \langle K_{gy}, K_{gx} \rangle \\ &= \langle \pi(g)K_y, \pi(g)K_x \rangle \\ &= \langle K_y, K_x \rangle = K(x, y). \end{aligned}$$

2. Si $\mathscr{H} \neq \{0\}$, tenemos que $K(x_0, x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in X$. Como G actúa de manera transitiva sobre X, para cada $x \in X$ existe $g \in G$ tal que $x_0 = g \cdot x$, por lo que

$$K(x, x) = K(g \cdot x_0, g \cdot x_0) = K(x_0, x_0) \neq 0.$$

Ahora bien, definamos la función φ como sigue

$$\begin{aligned} \varphi : X &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto K(x, w). \end{aligned}$$

Por el inciso 1 del Teorema 2.2.1 tenemos que $\varphi \in \mathscr{H}$. Además, esta función es no nula, pues $\varphi(w) = K(w, w) \neq 0$. Finalmente, notemos que es un elemento de $\mathscr{H}^F$ con F el subgrupo de isotropía del elemento w. En efecto

$$\pi(g)(\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x) = K(g^{-1}\cdot x, w) = K(x, g\cdot w) = K(x, w) \quad \text{para todo } g \in F \text{ para todo } x \in X.$$

3. Sea $\mathscr{H}_0$ un subespacio G-invariante no nulo y cerrado de $\mathscr{H}$. Sabemos que $\mathscr{H}_0$ es un EHNR. Sea K_0 el núcleo de $\mathscr{H}_0$. La función

$$\begin{aligned} \varphi : X &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto K_0(x, w) \end{aligned}$$

pertenece a $\mathscr{H}_0^F$ y por lo tanto es un elemento de $\mathscr{H}^F$. Si $\dim \mathscr{H}^F = 1$, existe un escalar $c \neq 0$ tal que $K_0(x, w) = cK(x, w) \quad (\forall x \in X)$. Ahora bien, veamos que en realidad tenemos

$$K_0(x, y) = K(x, y) \text{ para todo } x, y \in X.$$

En efecto, sean $x, y \in X$, entonces

$$\begin{aligned} K_0(x, y) = K_0(x, g \cdot w) &= K_0(g^{-1} \cdot x, w) \\ &= cK(g^{-1} \cdot x, w) = cK(x, g \cdot w) = cK(x, y). \end{aligned}$$

Ahora bien, tomemos $f \in \mathscr{H}_0$ no nulo y $y \in X$ tal que $f(y) \neq 0$, de modo que

$$f(y) = \langle f, K_0(\cdot, y)\rangle = \overline{c}\langle f, K(\cdot, y)\rangle = \overline{c}f(y),$$

por lo que $c = 1$. De donde se sigue que $K_0 = K$, y por Teorema 2.2.6 tenemos que $\mathscr{H}_0 = \mathscr{H}$, lo que demuestra que π es irreducible. ■

4 Representaciones esféricas del grupo $\mathrm{SO}(n)$ y $\mathrm{U}(n)$.

Finalmente, en este último capítulo presentamos dos familias de representaciones unitarias e irreducibles de los grupos $\mathrm{SO}(n)$ y $\mathrm{U}(n)$. Estas se realizan sobre ciertos subespacios vectoriales de polinomios con coeficientes complejos.

4.1 Representaciones esféricas del grupo $\mathrm{SO}(n)$

4.1.1 Esféricos armónicos

Como ya se comentó anteriormente, los grupos $\mathrm{O}(n)$ y $\mathrm{SO}(n)$ actúan de manera transitiva en la esfera S^{n-1} por medio de multiplicación por la izquierda, de modo que podemos definir las representaciones cuasi-regulares. El objetivo de la presente sección es demostrar que el espacio $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ de los polinomios homogéneos de grado m es un subespacio $\mathrm{SO}(n)$-irreducible bajo la representación cuasi-regular. A lo largo de la sección usaremos la notación de multi-índices.

Definición 4.1.1. *Un **multi-índice** con n componentes es un elemento de $\mathbb{Z}_+^n$, donde $\mathbb{Z}_+$ denota a los enteros no negativos. Sea $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ un multi-índice. La **longitud** o **altura** del multi-índice la definimos como el número*

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Denotaremos por $\alpha!$ al número $\alpha_1! \cdots \alpha_n!$

Dado $x \in \mathbb{R}^n$ y un multi-índice α con n componentes y altura m, decimos que

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

*es el **monomio** de grado m en n variables. Finalmente, definimos el operador diferencial ∂^α por medio de la fórmula*

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial^{\alpha_1} x_1} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial^{\alpha_n} x_n}.$$

4.1.2 Algunos espacios de polinomios

Definición 4.1.2. *Denotamos por $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ al conjunto de polinomios homogéneos de grado m, en n variables reales, con coeficientes complejos, esto es, el espacio de polinomios de la forma*

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha \quad a_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Denotamos por $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de polinomios armónicos homogéneos, es decir, los polinomios P tales que $\Delta P = 0$, donde Δ es el operador Laplaciano.

Notemos el comportamiento de estos polinomios con respecto a restricciones.

Proposición 4.1.3. *La función de restricción*

$$\begin{aligned} R : \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) &\to \mathcal{P}_m(S^{n-1}) \\ p &\mapsto p|_{S^{n-1}} \end{aligned}$$

donde $\mathcal{P}_m(S^{n-1}) = \{p|_{S^{n-1}} : p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)\}$*, es inyectivo.*

Demostración. Sean $p, q \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ tales que coincidan en todos los vectores de S^{n-1}, entonces para todo $x \neq 0$ tenemos que

$$p(x) = p\left(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^m p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^m q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = q(x).$$

En el caso $x = 0$, la proposición es trivial. ■

Análogamente definimos

$$\mathcal{H}_m(S^{n-1}) = \{p|_{S^{n-1}} : p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)\},$$

este conjunto es de importancia en varias áreas de las matemáticas y la física.

Definición 4.1.4 (**Esféricos armónicos**). *Llamaremos esféricos armónicos de grado m a los elementos del conjunto* $\mathcal{H}_m(S^{n-1})$*.*

Nuevamente el operador restricción es inyectivo, de modo que podemos identificar ambos espacios.

Definición 4.1.5 (**Representación cuasi-regular.**). *Los grupos* $\mathrm{O}(n)$ *y* $\mathrm{SO}(n)$ *actúan en* $\mathbb{R}^n$ *y* S^{n-1} *por medio de multiplicación izquierda. Esta acción genera representaciones de dichos grupos sobre los espacios de funciones* $\mathbb{C}^{\mathbb{R}^n} = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\}$ *y* $\mathbb{C}^{S^{n-1}} = \{f : S^{n-1} \to \mathbb{C}\}$*, por medio de*

$$\pi(g)f(x) = f(g^{-1} \cdot x).$$

A esta representación la llamaremos ***representación cuasi-regular*** *de* $\mathrm{O}(n)$ *en* $\mathbb{C}^{\mathbb{R}^n}$ *y de* $\mathrm{SO}(n)$ *en* $\mathbb{C}^{S^{n-1}}$*.*

Los espacios de polinomios anteriormente definidos son subespacios de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}^n}$, y sus restricciones a la esfera son subespacios de $\mathbb{C}^{S^{n-1}}$. Más aún, son subespacios invariantes de la representación cuasi-regular.

Proposición 4.1.6. *El espacio* $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ *es un subespacio invariante de la representación cuasi-regular de* $\mathrm{O}(n)$ *en* $\mathbb{C}^{\mathbb{R}^n}$*.*

Demostración. Por la linealidad de la representación basta demostrar la invarianza solamente para los monomios x^{α_0}, con $|\alpha_0| = m$. Primero veamos que para cualquier matriz $g \in \mathrm{O}(n)$ se tiene que

$$g^{-1}x = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

de modo que

$$\pi(g)x^{\alpha_0}(x) = x^{\alpha_0}(g^{-1}x) = y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n} = \left(\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\sum_{i=1}^n a_{ni}x_i\right)^{\alpha_n}. \tag{4.1}$$

Por la fórmula multinomial tenemos que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^{\alpha_i} = \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{Z}_+^n\\|\beta|=\alpha_i}} \frac{\alpha_i}{\beta!}x^{\beta} \quad 1 \leq i \leq n,$$

de modo que cada factor en el lado derecho de 4.1 es combinación lineal de polinomios homogéneos de grado α_i, $1 \leq i \leq n$. Por la definición del producto de polinomios tendremos que 4.1 es combinación lineal de monomios de grado $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m$ y por lo tanto los monomios son invariantes bajo la acción del grupo $\mathrm{O}(n)$.■

Proposición 4.1.7. *El espacio $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio invariante de la representación cuasi-regular de* $\mathrm{O}(n)$ *en* $\mathbb{C}^{\mathbb{R}^n}$.

Demostración. Sea $g = [g_{ij}]_{ij} \in O(n)$. Sabemos que por la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f \circ L_g) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} y_i = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f \cdot g_{ij},$$

donde $y_i = \sum_{k=1}^{n} g_{ik}x_k$. Volviendo a derivar tenemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(f \circ L_g) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \partial_i f g_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} g_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(\partial_i f) = \sum_{i=1}^{n} g_{ij}\sum_{k=1}^{n} \partial_k\partial_i f g_{kj} = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ij}g_{kj}\partial_k\partial_i f.$$

Ahora calculando el Laplaciano tenemos que

$$\Delta(f \circ L_g) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(f \circ L_g) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i,k=1}^{n} g_{ij}g_{kj}\partial_k\partial_i f\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i,k=1}^{n} g_{ij}g_{jk}^T\partial_k\partial_i f\right).$$

Del hecho de que g sea ortogonal tenemos que $\sum_{j=1}^{n} g_{ij}g_{jk}^T = \delta_{ik}$, pues esta suma es la entrada (i,k) del producto $gg^T = Id_n$. Del comentario anterior tenemos que

$$\Delta(f \circ L_g) = \sum_{i,k=1}^{n} \delta_{ik}\partial_k\partial_i f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f = 0.■$$

Se cumplen resultados análogos para los espacios $\mathcal{H}_m(S^{n-1})$ y $\mathcal{P}_m(S^{n-1})$.

Si denotamos por ρ_m y π_m a las representaciones cuasi-regulares del grupo $\mathrm{SO}(n)$ sobre $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{P}_m(S^{n-1})$, respectivamente, tenemos que el operador de restricción es un operador de entrelace.

Proposición 4.1.8. *El operador restricción, R, es un operador de entrelace.*

Demostración. Veamos que para cada $g \in G$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\rho_m(g)} & \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \\ \big\downarrow R & & \big\downarrow R \\ \mathcal{P}_m(S^{n-1}) & \xrightarrow{\pi_m(g)} & \mathcal{P}_m(S^{n-1}), \end{array}$$

pues para cada $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$p|_{S^{n-1}} \circ L_{g^{-1}} = (p \circ L_{g^{-1}})|_{S^{n-1}}. \blacksquare$$

En particular, esto demuestra que estas representaciones son equivalentes. Una vez establecida la equivalencia de estas dos representaciones, basta probar la irreducibilidad de alguna de ellas para establecer la irreducibilidad de ambas. Esto lo haremos usando el Lema 3.2.2, pero para esto necesitamos definir productos internos adecuados sobre nuestros espacios de polinomios. Hay dos posibles productos internos para el espacio de esféricos armónicos, ambos con sus ventajas. Empezaremos definiendo el producto de la esfera.

Definición 4.1.9 (Producto interno de la esfera). *Sea $d\sigma$ la medida de probabilidad en S^{n-1} invariante respecto a* $\mathrm{SO}(n)$ *, i.e,*

$$d\sigma(S^{n-1}) = 1.$$

Dicha medida existe por la Proposición B.2.4. Respecto a esta medida, definimos el producto interno de la esfera como

$$\langle f, g\rangle_{S^{n-1}} = \int_{S^{n-1}} f\overline{g}d\sigma.$$

Notemos que este es el producto interno de $L^2(\mathbb{S}^{n-1}, d\sigma)$. Sabemos que por la continuidad de los polinomios y por tener soporte compacto, se tiene que

$$\mathcal{H}_m(S^{n-1}) \subset L^2(S^{n-1}, d\sigma),$$

más aún, al ser de dimensión finita, es un EHNR.

Proposición 4.1.10. *La representación cuasi-regular de* $\mathrm{SO}(n)$ *sobre $\mathcal{H}_m(S^{n-1})$ con el producto interno de la esfera es unitaria.*

Demostración. Al ser $\mathcal{H}_m(S^{n-1})$ un espacio de Hilbert de dimensión finita, basta probar que $\pi(g)$ conserva el producto interno $\forall g \in G$. Sean $p, q \in \mathcal{H}_m(S^{n-1})$, veamos que

$$\begin{aligned}\langle \pi(g)p, \pi(g)q\rangle_{S^{n-1}} &= \int_{S^{n-1}} \pi(g)p(x)\overline{\pi(g)p(x)}d\sigma(x)\\ &= \int_{S^{n-1}} \pi(g)p\overline{q}(x)d\sigma(x)\\ &= \int_{S^{n-1}} p(x)\overline{q(x)}d\sigma(x) = \langle p, q\rangle_{S^{n-1}},\end{aligned}$$

lo que demuestra que $\pi(g)$ es una isometría y, por lo tanto, un operador unitario. $\blacksquare$

Al ser $\mathcal{H}_m(S^{n-1})$ un subespacio vectorial de dimensión finita de $L^2(S^{n-1}, d\sigma)$, el siguiente resultado es evidente.

Proposición 4.1.11. *El espacio $\mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})$ con el producto interno de la esfera es un EHNR.*

También es posible definir un producto interno conocido como **producto de Fischer**. Con este producto interno, el espacio $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ se vuelve un EHNR.

Definición 4.1.12. *Dados $p, q \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ con*

$$p = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha,$$

definimos el producto de ***Fisher-Bomberri*** *como*

$$\langle p, q\rangle_F = p(\partial)(\overline{q}),$$

donde $p(\partial)$ o ∂_p es la notación para el operador diferencial

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \partial^\alpha.$$

Esto sigue siendo un producto interno cuando se restringe a los armónicos homogéneos. Además, tiene la ventaja de que es más sencillo de calcular que el producto de la esfera.

Lema 4.1.13. *Sean $p, q \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ con*

$$p = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha \quad y \quad q = \sum_{|\beta|=m} b_\beta x^\beta,$$

entonces

$$\langle p, q\rangle_F = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \overline{b_\alpha} \alpha! \tag{4.2}$$

Demostración. Primero notemos que

$$\partial^\alpha(x^\beta) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial^{\alpha_1} x_1} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial^{\alpha_n} x_n}(x^\beta) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha \neq \beta \\ \alpha! & \text{si} \quad \alpha = \beta. \end{cases}$$

Por la definición del producto de Fisher y la linealidad de los operadores diferenciales, tenemos que

$$\langle p, q\rangle_F = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \partial^\alpha \left(\sum_{|\beta|=m} \overline{b_\beta x^\beta} \right) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \sum_{|\beta|=m} \overline{b_\beta} \partial^\alpha(x^\beta) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \overline{b_\alpha} \alpha! \blacksquare$$

Proposición 4.1.14. *El producto de Fisher-Bomberri es un producto interno en el espacio $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ y en el espacio $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Se sigue directamente de (4.2) y la positividad de los coeficientes de la suma.■

En particular, nos interesa la restricción de este producto interno al espacio $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4.1.15. *Con el producto de Fisher, $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ es un EHNR.*

Esto se sigue por ser $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ un espacio vectorial de dimensión finita. Demostraremos que con este producto la representación cuasi-regular se vuelve unitaria.

Teorema 4.1.16. *El producto de Fisher en $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ es* SO(n)*-invariante.*

Demostración. Para $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ y $g \in \mathrm{SO}(n)$ se fija la notación

$$(g \cdot f)(x) = (\rho(g) \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x).$$

Dado un polinomio

$$p(x) = \sum_{|\alpha|} a_\alpha x^\alpha$$

establecemos la notación

$$p(\partial) = \partial_p = \sum_{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha.$$

Cada matriz $g \in \mathrm{SO}(n)$ la expresamos en términos de sus entradas y filas, lo mismo aplica a la matriz $A = g^{-1}$, entonces

$$g = (g_{jk})_{j,k=\overline{1,n}} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

con g_i la i-esima fila de la matriz g. Análogamente

$$g^{-1} = A = (a_{jk}) = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

con A_i la i-ésima fila de la matriz A.

Para $g \in \mathrm{SO}(n)$ y $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ suave, se cumple que

$$\partial_{x_k}(g \cdot f) = g \cdot \partial_{\langle g_k, x\rangle} f = g \cdot \partial_{g^{-1} \cdot x_k} f,$$

donde

$$\langle g_k, x\rangle = g_{k,1}x_1 + \cdots + g_{k,n}x_n.$$

Luego

$$\partial^\alpha(g \cdot f) = g \cdot (\partial^{\alpha_1}_{\langle g_1, x\rangle} \cdots \partial^{\alpha_n}_{\langle g_n, x\rangle} f),$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. En efecto, calculamos

$$\begin{aligned}
\partial_{x_k}((g \cdot f)(x)) &= \frac{\partial}{\partial x_k}(f(g^{-1} \cdot x)), \quad \text{con} \quad g^{-1} \cdot x = \begin{pmatrix} A_1 x \\ \vdots \\ A_n x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(g^{-1} \cdot x)\frac{\partial y_j}{\partial x_k}, \quad y_j = a_{j,1}x_1 + \cdots a_{j,n}x_n \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(g^{-1} \cdot x)a_{jk}, \quad a_{jk} = (g^{-1})_{jk} = (g^T)_{j,k} = g_{k,j} \\
&= \sum_{j=1}^n g_{kj}\frac{\partial f}{\partial x_j}(g^{-1} \cdot x),
\end{aligned}$$

esto se reescribe como

$$\partial_{x_k}(g\cdot f)(x) = (g\cdot \partial_{\langle g_k, x\rangle} f)(x)$$

o bien

$$\partial_{x_k}(g\cdot f) = g\cdot \partial_{\langle g_k, x\rangle} f.$$

Volviendo a aplicar en operador diferencial ∂_{x_k} al resultado anterior tenemos que

$$\partial^2_{x_k}(g\cdot f) = \partial_{x_k}[\partial_{x_k}(g\cdot f)] = \partial_{x_k}[g\cdot \partial_{\langle g_k, x\rangle} f] = g\cdot \partial_{x_k}[\partial_{x_k} f] = g\cdot \partial^2_{\langle g_k, x\rangle} f.$$

Continuando este proceso tenemos que para $l \in \mathbb{N}$,

$$\partial^l_{x_k}(g\cdot f) = g\cdot \partial^l_{\langle g_k, x\rangle} f,$$

por lo tanto,

$$\partial^\alpha(g\cdot f) = \partial^{\alpha_1}_{x_1}\cdots\partial^{\alpha_n}_{x_n}(g\cdot f) = g\cdot (\partial^{\alpha_1}_{\langle g_1, x\rangle}\cdots\partial^{\alpha_1}_{\langle g_n, x\rangle} f.$$

Notemos que la expresión del lado derecho es precisamente

$$\partial_{g^{-1}\cdot x^\alpha} f.$$

Ahora por la linealidad de la representación y por ser un producto interno basta demostrar la invarianza solo para monomios.

$$\langle g\cdot x^\alpha, g\cdot x^\beta\rangle = \partial^\alpha(g^{-1}\cdot(g\cdot x^\beta)) = g^{-1}\cdot \partial_{g\cdot x^\alpha}(g\cdot x^\beta) = g\cdot\langle g\cdot x^\alpha, g\cdot x^\beta\rangle = \langle x^\alpha, x^\beta\rangle.\blacksquare$$

Ahora que contamos con dos productos internos, cada uno de los cuales vuelve a los espacios $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{H}_m(S^{n-1})$ EHNR, podemos verificar la irreducibilidad de las representaciones usando el Teorema 3.2.2 en cualquiera de estos dos espacios de Hilbert. Antes de terminar, veamos que con el producto interno de Fisher es fácil demostrar que el espacio $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ no es irreducible.

Proposición 4.1.17. *Para $n \geq 2$ se tiene que el subespacio*

$$|\cdot|^2\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$$

es un subespacio propio $\mathrm{O}(n)$*-invariante de* $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sean $h_{m-2} \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathrm{O}(n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios. Ya que g es una matriz ortogonal y $\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ es $\mathrm{O}(n)$-invariante se cumple que

$$\begin{aligned}\rho_m(g)(|\cdot|^2 h_{m-2})(x) &= |g^{-1}x|^2 h_{m-2}(g^{-1}x)\\ &= |x|^2\rho_{m-2}(g)(h_{m-2})(x) = |x|^2 s_{m-2}(x),\end{aligned}$$

donde $s_{m-2} \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, concluimos que $\rho_m(g)(|\cdot|^2 h_{m-2}) \in |\cdot|^2\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$. $\blacksquare$

También tenemos la siguiente descomposición en suma directa ortogonal:

Proposición 4.1.18. $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \bigoplus |\cdot|^2\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Con el producto interno de Fisher para $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ demostramos que

$$\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)\perp|\cdot|^2\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n).$$

Primero probemos la contención $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \subset (|\cdot|^2\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n))^\perp$. Sea $h \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ arbitrario. Para cada $p_{m-2} \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$\langle |\cdot|^2 p_{m-2}, h\rangle_F = p_{m-2}(\partial)(|\partial|^2\overline{h}) = p_{m-2}(\partial)(\Delta\overline{h}) = 0,$$

luego $h \in (|\cdot|^2\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n))^\perp$. Ahora probemos la otra contención. Sea $h \in (|\cdot|^2\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n))^\perp$ arbitrario. Para cada $p_{m-2} \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$0 = \langle |\cdot|^2 p_{m-2}, h\rangle_F = p_{m-2}(\partial)(\Delta\overline{h}) = \langle p_{m-2}, \Delta h\rangle_F,$$

donde el último producto interno es el producto interno de Fisher en el espacio $\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$. Como $\Delta h \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ y p_{m-2} es arbitrario tenemos que $\Delta h = 0$.■

4.1.3 Armónicos de Legendre.

En vista del Teorema 3.2.2 y de que $\mathcal{H}_m(S^{n-1})$ es un EHNR basta que demostremos que el espacio $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)^F$, (donde $F = \mathrm{O}(n)^{e_n}$), es de dimensión 1. Esto lo haremos demostrando que todo polinomio $\mathrm{O}(n)^{e_n}$ *– invariante* es múltiplo escalar de un esférico armónico conocido como **armónico de Legendre**.

Lema 4.1.19. *Sea ρ_m con $m \geq 0$, la representación cuasi-regular de* $\mathrm{O}(n)$ *sobre $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ y $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\rho_m(g)p = p \quad \textit{para todo } g \in \mathrm{O}(n).$$

Entonces $p(x) = c \cdot \|x\|^m$ para algún $c \in \mathbb{C}$ si m es par, si m impar $p = 0$.

Demostración. El caso $x = 0$ es trivial. Si $x \neq 0$, entonces

$$p(x) = p\left(\|x\|\frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^m p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^m p(e_n)$$

puesto que $\mathrm{O}(n)$ actúa transitivamente sobre la esfera S^{n-1}. Finalmente, como $\|x\|^m$ es un polinomio solamente cuando m es par, se sigue que $c = 0$ en el caso m impar. Para el caso $m = 0$, los polinomios son constantes, y estos evidentemente cumplen la condición del lema anterior. ■

Lema 4.1.20. *Sea $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$. Entonces p es de la forma*

$$p(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{j=0}^{m} (x_n)^j h_{m-j}(x_1, \cdots, x_{n-1}) \quad \textit{con} \quad h_{m-j} \in \mathcal{P}_{m-j}(\mathbb{R}^{n-1}) \tag{4.3}$$

y se cumple la siguiente relación recursiva:

$$h_{m-j-2} = -\frac{1}{(j+2)(j+1)}\Delta_{n-1}h_{m-j} \quad (j = 0, \cdots, m-2), \tag{4.4}$$

donde Δ_{n-1} representa al operador Laplaciano en $\mathbb{R}^{n-1}$.

Demostración. Es fácil ver que para cada $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ se puede expresar como

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{m} (x_n)^j h_{m-j}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \quad \text{con} \quad h_{m-j} \in \mathcal{P}_{m-j}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Definimos $x_{(n-1)} := (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Aplicando el operador Δ a p obtenemos que

$$\Delta p(x_1 \ldots, x_n) = \Delta\left(\sum_{j=0}^{m} (x_n)^j h_{m-j}(x_{(n-1)})\right) = \sum_{j=0}^{m} \Delta[(x_n)^j h_{m-j}(x_{(n-1)})]. \tag{4.5}$$

Calculando las expresiones $\Delta[(x_n)^j h_{m-j}(x_{(n-1)})]$ tenemos que para $j = 0, 1$

$$\Delta[(x_n)^j h_{n-j}(x_{(n-1)})] = x_n^j \cdot \Delta_{n-1}[h_{m-j}](x_{(n-1)}), \tag{4.6}$$

y para $j \geq 2$,

$$\Delta[(x_n)^j h_{n-j}(x_{(n-1)})] = j(j-1)x_n^{j-2} \cdot h_{m-j}(x_{(n-1)}) + x_n^j \cdot \Delta_{n-1}[h_{m-j}](x_{(n-1)}), \tag{4.7}$$

donde Δ_{n-1} representa al Laplaciano de funciones en $\mathbb{R}^{n-1}$. Notemos que para $j = m$, $m-1$ los polinomios h_{m-j} en (4.7) son polinomios homogéneos de grado 0 y 1 respectivamente, de modo que su Laplaciano es igual a cero en ambos casos.

Sustituyendo las expresiones en (4.7) y (4.6) en la igualdad (4.5) y agrupando los términos que contienen al operador Δ_{n-1} y los que no, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
\Delta p(x_1 \cdots, x_n) &= \sum_{j=2}^{m} j(j-1)x_n^{j-2} h_{m-j}(x_{(n-1)}) + \sum_{j=0}^{m-2} x_n^j \Delta_{n-1}(h_{m-j})(x_{(n-1)}) \\
&= \sum_{j=0}^{m-2} (j+2)(j+1)x_n^j h_{m-j-2}(x_{(n-1)}) + \sum_{j=0}^{m-2} x_n^j \Delta_{n-1}(h_{m-j})(x_{(n-1)}) \\
&= \sum_{j=0}^{m-2} x_n^j [\Delta_{n-1} h_{m-j}(x_{(n-1)}) + (j+2)(j+1)h_{m-j-2}(x_{(n-1)})].
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Ahora bien si p es armónico y fijando las primeras $n-1$ entradas, la expresión 4.8 se vuelve un polinomio en x_n idénticamente cero y, por lo tanto,

$$\Delta_{n-1} h_{m-j}(x_{(n-1)}) + (j+2)(j+1)h_{m-j-2}(x_{(n-1)}) = 0 \quad \text{para todo } x_{(n-1)} \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ y } 0 \leq j \leq m-2$$

despejando, obtenemos la expresión

$$h_{m-j-2} = -\frac{1}{(j+2)(j+1)} \Delta_{(n-1)} h_{m-j} \quad (0 \leq j \leq m-2). \blacksquare \tag{4.9}$$

Ahora que ya tenemos los elementos necesarios, podemos demostrar la existencia del **armónico de Legendre**.

Teorema 4.1.21. *Existe una única función $L_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a la cual llamamos* ***el armónico de***

Legendre, *tal que*

1. $L_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$,
2. $L_m(AX) = L_n(X)$ *para todo* $A \in \mathrm{O}(n)^{e_n}$ *y* $X \in \mathbb{R}^m$,
3. $L_m(e_n) = 1$.

La tercera condición se puede entender como una condición de normalización.

Demostración. Cualquier elemento $A \in \mathrm{O}(n)^{e_n}$ es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde $A_1 \in \mathrm{O}(n-1)$. Ahora sea $A_1 \in \mathrm{O}(n-1)$ arbitrario. Usamos la invarianza bajo el grupo de isotropías y la expresión (4.3) para obtener

$$\sum_{j=0}^{m} x_n^j [h_{m-j}(A_1 x_{(n-1)}) - h_{m-j}(x_{(n-1)})] = 0.$$

Fijando $x_{(n-1)}$ obtenemos polinomios en la variable x_n idénticamente cero, de donde concluimos que

$$h_{m-j}(A_1 x_{(n-1)}) = h_{m-j}(x_{(n-1)}) \quad \text{para todo } A_1 \in \mathrm{O}(n-1) \text{ y para todo } x_{(n-1)} \in \mathbb{R}^{n-1},$$

es decir, cada $h_{m-j} \in \mathcal{P}_{m-j}(\mathbb{R}^{n-1})$ cumple las condiciones del Lema 4.1.3. De aquí se sigue que

$$h_{m-j} = \begin{cases} c_{m-j} \|x_{(n-1)}\|^{m-j} & \text{si} \quad m-j = \text{par} \\ 0 & \text{si} \quad m-j = \text{impar}, \end{cases}$$

donde $c_{m-j} \in \mathbb{C}$es alguna constante .Obtenemos que

$$L_m(x_1 \cdots, x_n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} c_k \|x_{(n-1)}\|^{2k} (x_n)^{m-2k}.$$

Completando con ceros obtenemos una expresión de la forma (4.3), de modo que

$$h_{m-j} = h_{2k} = c_k \|x_{(n-1)}\|^{2k},$$

y por las relaciones de recurrencia descritas en (4.9) tenemos que

$$c_{k-1} \|x_{n-1}\|^{2(k-1)} = -\frac{1}{(j+1)(j+2)} c_k (2k)(2k+n-3) \|x_{n-1}\|^{2k-2},$$

puesto que

$$\Delta(\|x_{n-1}\|^{2k}) = 2k(2k+n-3)\|x_{n-1}\|^{2k-2}.$$

Como $m - j = 2k$, tenemos que $j = m - 2k$. Substituyendo en la expresión anterior y despejando

c_k llegamos a la expresión

$$c_k = -\frac{(m-2k-2)(m-2k+1)}{2k(2k+n-3)}(c_{k-1}) = a_k c_{k-1} \quad \left(1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor\right),$$

de aquí concluimos que el polinomio L_m está completamente determinado por el valor c_0. De la condición $L_m(e_n) = 1$ podemos calcular el valor de c_0 :

$$1 = L_m(e_n) = c_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} c_k \|0_{(n-1)}\|^{2k} (x_n)^{m-2k} = c_0,$$

y como los coeficientes de L_m están determinados de manera única por el c_0, garantizamos la unicidad de L_m.■

La fórmula de recursividad y el hecho de que $c_0 = 1$ nos permiten dar una expresión explícita de los coeficientes de los armónicos de Legendre.

Proposición 4.1.22. *Usando la misma notación que el teorema anterior, tenemos que*

$$c_k = (-1)^k \frac{n!\Gamma(\frac{n-1}{2})}{4^k k!(m-2k)!\Gamma(k+\frac{n-1}{2})} \quad \left(0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor\right)$$

Demostración. La demostración puede consultarse en el Capítulo 2.1.2 de [AH12].

Además, cualquier polinomio que satisfaga las condiciones 2 y 3 del Teorema 4.1.21 debe ser salvo producto escalar L_m.

Proposición 4.1.23. *Sea p un polinomio tal que*

1. $p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$,
2. $p(AX) = p(x)$ *para todo* $A \in \mathrm{O}(n)^{e_n}$ *y para todo* $x \in \mathbb{R}^n$,

entonces p es múltiplo escalar del armónico de Legendre L_m.

Demostración. Sabemos por la primera parte de la demostración anterior que

$$p(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} c'_k \|x_{(n-1)}\|^{2k} (x_n)^{m-2k}$$

donde, los c'_k satisfacen

$$c'_k = a_k c'_{k-1} \quad \left(1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor\right)$$

de modo que

$$c'_k = c'_0 \prod_{i=1}^{k} a_i.$$

Por otro lado, el coeficiente c_k del armónico de Legendre es

$$c_k = \prod_{i=1}^{k} a_i.$$

De aquí se sigue que

$$p(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} c_0' c_k \|x_{(n-1)}\|^{2k} (x_n)^{m-2k} = c_0' L_m(x_1, \cdots, x_n).\blacksquare$$

Teorema 4.1.24. *La representación esférica de* $\mathrm{SO}(n)$ *en el espacio* $\mathcal{H}_m(S^{n-1})$ *es irreducible.*

Demostración. La representación es unitaria sobre $\mathcal{H}_m(S^{n-1})$ un EHNR. Además, la Proposición 4.1.23 nos demuestra que

$$\dim\ \mathcal{H}_m(S^{n-1})^{O(n)^{e_n}} = 1.$$

Por el Teorema 3.2.2 la representación es irreducible. $\blacksquare$

4.2 Representaciones esféricas del grupo $\mathrm{U}(n)$

Otro ejemplo que se puede tratar con la misma técnica es el grupo $\mathrm{U}(n)$. Este caso se puede tratar de una manera sencilla identificando el grupo $\mathrm{U}(n)$ con un subgrupo de $\mathrm{SO}(2n)$.

Las representaciones irreducibles del grupo $\mathrm{U}(n)$ se realizan sobre ciertos subespacios de

$$\mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n, \overline{z_1}, \cdots \overline{z_n}].$$

Empecemos definiendo estos espacios de polinomios.

Definición 4.2.1. *Denotamos por* $\mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$ *al espacio de polinomios* ***bi-homogéneos*** *de grado* (l, l') *en* n *variables complejas, es decir, el conjunto de polinomios en* $\mathbb{C}[z_1, \cdots z_n, , \overline{z_1}, \cdots \overline{z_n}]$ *que son homogéneos de grado* l *en la variable* $Z = (z_1, ..., z_n)$ *y homogéneos de grado* l' *en* $\overline{Z} = (\overline{z_1}, ..., \overline{z_n})$*, es decir, polinomios de la forma*

$$P(Z) = P(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ |\beta|=l'}} c_{\alpha,\beta} Z^{\alpha} \overline{Z}^{\beta}.$$

El operador Laplaciano en variables complejas se puede expresar considerando a la función como una en $2n$ *variables reales, o usando operadores de Wirtinger*

$$\Delta = 4 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z_i}} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \right).$$

Denotamos por $\mathcal{H}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$ *al espacio de polinomios* ***bi-homogéneos de grado*** (l, l') ***tales que su Laplaciano es cero****.*

En general, hay varias maneras de identificar los espacios $\mathbb{R}^{2n}$ y $\mathbb{C}^n$. Cada una de estas identificaciones nos permite estudiar funciones en n variables complejas como funciones en $2n$ variables reales, para el presente trabajo, consideraremos la siguiente.

Proposición 4.2.2. *La función*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}^n &\to \mathbb{R}^{2n} \\ Z = X + iY &\mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es un homeomorfismo, el cual nos permite identificar la esfera

$$S^{2n-1} := \{(X, Y) \in \mathbb{R}^{2n} : |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 + |y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2 = 1\}$$

con el conjunto

$$\{Z \in \mathbb{C}^n : \|z_1\|^2 + \cdots + \|z_n\|^2 = 1\},$$

el cual denotaremos como $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1}$.

De manera similar, los polinomios los restringimos a la esfera:

$$\mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1}) := \{P|_{\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1}} : P \in \mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)\},$$

$$\mathcal{H}_{(l,l')}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1}) := \{P|_{\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1}} : P \in \mathcal{H}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)\}.$$

A partir de esta identificación, podemos también ver cierto isomorfismo entre los espacios de polinomios bi-homogéneos y el de los homogéneos.

Proposición 4.2.3. *La función*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^{2n}) &\to \sum_{l+l'=m} \mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n) \\ f &\mapsto f \circ \phi \end{aligned}$$

define un isomorfismo, el cual corresponde al cambio de variables complejas a reales y la inversa es dada por

$$\begin{aligned} \Psi : \sum_{l+l'=m} \mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n) &\to \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^{2n}) \\ P &\mapsto P \circ \phi^{-1}. \end{aligned}$$

Demostración. Veamos que en efecto esta función está bien definida. Basta probarlo para los monomios $f_{\alpha,\beta}(X, Y) = X^\alpha Y^\beta$ por linealidad. Para cada $Z \in \mathbb{C}^n$ se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi(f_{\alpha,\beta})Z = f_{\alpha,\beta}(Z_1, Z_2) &= (\Re(z_1))^{\alpha_1} \cdots (\Re(z_n))^{\alpha_n} (\Im(z_1))^{\beta_1} \cdots (\Im(z_n))^{\beta_n} \\ &= \left(\frac{z_1 - \overline{z_1}}{2}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{z_n - \overline{z_n}}{2}\right)^{\alpha_n} \left(\frac{z_1 + \overline{z_1}}{2i}\right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{z_n + \overline{z_n}}{2i}\right)^{\beta_n}. \end{aligned}$$

Luego usando la fórmula multinomial, obtenemos que $\Phi(f_{\alpha,\beta}) \in \sum_{l+l'=m} \mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$. Es evidente que la función Φ es inyectiva por ser ϕ invertible, para ver que es sobreyectiva veamos que la función Ψ es su inversa derecha. Basta demostrarlo solo con un espacio $\mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$ pues para los demás es análogo. Tomamos

$$P \circ \phi^{-1}(X, Y) = P(X + iY) = \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ |\beta|=l'}} c_{\alpha,\beta}(X + iY)^{\alpha}(X - iY)^{\beta},$$

y usando la fórmula binomial obtenemos lo deseado. ■

Esto nos está diciendo que los espacios de polinomios bi-homogéneos de variable compleja pueden pensarse como subespacios del espacio de polinomios homogéneos de variable real. Además, podemos hallar un subgrupo de $\mathrm{SO}(2n)$ isomorfo al grupo $\mathrm{U}(n)$, de modo que la acción del grupo $\mathrm{U}(n)$ sobre $\mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$, se puede ver como la acción de un subgrupo de $\mathrm{SO}(n)$ sobre el espacio $\mathcal{P}_{l+l'}(\mathbb{R}^{2n})$.

Proposición 4.2.4. *La transformación*

$$\begin{aligned} j : \mathrm{U}(n) &\to \mathrm{SO}(2n) \\ u = u_1 + iu_2 &\mapsto \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde u_1, u_2 son las matrices de partes reales e imaginarias, respectivamente, es un homomorfismo de grupos continuo e inyectivo.

Demostración. La continuidad es consecuencia inmediata de la definición y de que la convergencia de sucesiones de matrices se dé coordenada a coordenada. Basta ver que conserva el producto y la involución. Primero veamos que conserva el producto sean $u, w \in \mathrm{U}(n)$. Notemos que

$$\begin{aligned} j(uw) =& j[(u_1 + iu_2)(w_1 + iw_2)] \\ =& j[u_1w_1 - u_2w_2 + i(u_1w_2 + u_2w_1)] \\ =& \begin{bmatrix} u_1w_1 - u_2w_2 & -(u_1w_2 + u_2w_1) \\ u_1w_2 + u_2w_1 & u_1w_1 - u_2w_2 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & -w_2 \\ w_2 & w_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Veamos que conserva la involución, pues

$$\begin{aligned} j(u^*) &= j(u_1^T - iu_2^T) \\ &= \begin{bmatrix} u_1^T & u_2^T \\ -u_2^T & u_1^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{bmatrix}^T = j(u)^T, \end{aligned}$$

lo que demuestra que es un homomorfismo de grupos que conserva la involución, y además manda la identidad en la identidad. Ahora probemos que su imagen cae en $\mathrm{SO}(n)$. sea $u \in \mathrm{U}(n)$, entonces—

$$Id = j(id) = j(uu^*) = j(u)j(u)^T,$$

lo que demuestra que $j(\mathrm{U}(n)) \subseteq \mathrm{SO}(2n)$. Finalmente como $\mathrm{U}(n)$ es conexo y j es continua, $j(U(n))$ debe de estar contenido en la componente conexa de la identidad de $\mathrm{O}(n)$, es decir, en $\mathrm{SO}(n)$.■

Por medio de esta función j podemos definir una acción del grupo $\mathrm{U}(n)$ en el espacio $\mathbb{R}^{2n}$ como sigue

$$(g, X) \mapsto M_{j(g)}X = j(g)X,$$

donde tenemos multiplicación por la izquierda por la matriz $j(g)$. Esta acción es equivalente a la acción del grupo $\mathrm{U}(n)$ sobre $\mathbb{C}^n$ por multiplicación por la izquierda.

Proposición 4.2.5. *Denotamos por M_g la multiplicación por la izquierda por la matriz g en $\mathbb{C}^n$ y por $M_{j(g)}$ la multiplicación por la izquierda por la matriz $j(g)$ en $\mathbb{R}^{2n}$. Con la notación anterior, el siguiente diagrama conmuta para cada $g \in \mathrm{U}(n)$*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^n \arrow[r, "M_g"] \arrow[d, "\phi"] & \mathbb{C}^n \arrow[d, "\phi"] \\
\mathbb{R}^{2n} \arrow[r, "M_{j(g)}"] & \mathbb{R}^{2n}.
\end{tikzcd}$$

Es decir,

$$gZ = \phi^{-1}(j(g)\phi(Z)) \quad \textit{para todo } Z \in \mathbb{C}^n. \tag{4.10}$$

Demostración. Primero calculemos el producto

$$M_{j(g)}(\phi(Z)) = \begin{bmatrix} g_1 & -g_2 \\ g_2 & g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1X - g_2Y \\ g_2X + g_1Y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\phi(gZ) = \phi(g_1X - g_2Y + i(g_1Y + g_2X)) = \begin{bmatrix} g_1X - g_2Y \\ g_1Y + g_2X \end{bmatrix},$$

es decir, $gZ = \phi^{-1}(j(g)\phi(Z))$.■

Notemos que además esta acción nos permite estudiar el conjunto $\mathbb{S}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ como un espacio homogéneo.

Proposición 4.2.6. *El grupo $U(n)$ actúa de manera transitiva sobre la esfera S^{2n-1}.*

Demostración. Demostraremos que dado $X \in S^{2n-1}$, existe una matriz $g \in \mathrm{U}(n)$ tal que

$$M_{j(g)}(X) = j(g)X = e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$$

Por ser ϕ homeomorfismo, existe $Z_0 \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1}$ tal que $\phi(Z_0) = X$. Como Z_0 es un vector unitario se puede completar a una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ y hallar una matriz $g \in \mathrm{U}(n)$ tal que

$$M_g(Z_0) = gZ_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Luego por (4.10) tenemos que

$$M_{j(g)}(X) = j(g)X = j(g)\phi(Z_0) = \phi(gZ_0) = e_n \in \mathbb{R}^{2n}$$

como se buscaba demostrar. ■

Por el resultado anterior debe existir una única medida de probabilidad en S^{2n-1} que sea invariante bajo la acción del grupo $\mathrm{U}(n)$. Esta medida coincide con la medida invariante bajo la acción del grupo $\mathrm{SO}(2n)$, pues esta medida también será $\mathrm{U}(n)$-invariante.

Definición 4.2.7. *Sobre el conjunto $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1}$ consideremos la σ álgebra de Borel y la medida sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ definido por*

$$\mu(E) := \sigma(\phi(E)),$$

donde σ es la medida invariante para la esfera S^{2n-1} bajo la acción del grupo $\mathrm{SO}(2n)$.

Proposición 4.2.8. *La función μ define una medida invariante bajo la acción del grupo* $\mathrm{U}(n)$ *en la esfera.*

Demostración. Por ser ϕ homeomorfismo, μ es medida. Para ver la invarianza notemos que para cada conjunto Borel medible tenemos que

$$\mu(g \cdot E) = \sigma(\phi(g \cdot E)) = \sigma(j(g) \cdot \phi(E)) = \sigma(\phi(E)) = \mu(E).■$$

Con esta medida invariante tenemos que

$$L^2(S^{2n-1}, d\sigma) = L^2(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1}, d\mu).$$

Además, podemos considerar a los espacios $\mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$ y $\mathcal{H}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$ como subespacios de $L^2(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1}, \mu)$.

Proposición 4.2.9. *Con el producto interno de* $L^2(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1},\mu)$ *tenemos que para* $(m,m')\neq(l,l')$,

$$\mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)\perp\mathcal{P}_{(m,m')}(\mathbb{C}^n)\quad y\quad \mathcal{H}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)\perp\mathcal{H}_{(m,m')}(\mathbb{C}^n).$$

Más aún,

$$\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^{2n})\cong\bigoplus_{l+l'=k}\mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n), \tag{4.11}$$

$$\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^{2n})\cong\bigoplus_{l+l'=k}\mathcal{H}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n). \tag{4.12}$$

Demostración. Ya probamos que la identidad (4.11) se cumple cambiando suma directa por suma, de modo que basta probar la ortogonalidad de los sumandos para tener suma directa. Supongamos que $(l,l')\neq(m,m')$ tenemos dos casos: $l+l'\neq m+m'$ y $l+l'=m+m'$. Para el primer caso, el hecho de que los espacios $\mathcal{P}_{l+l'}(\mathbb{R}^{2n})$ y $\mathcal{P}_{m+m'}(\mathbb{R}^{2n})$ sean ortogonales implica que los espacios $\mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$ y $\mathcal{P}_{(m,m')}(\mathbb{C}^n)$ también lo son. Para el segundo caso tenemos que la condición $l+l'=m+m'$ implica que $l-l'\neq m-m'$. Dado $\theta\in\mathbb{R}$ consideremos la matriz unitaria $U_\theta=\mathrm{Diag}(e^{i\theta},\cdots,e^{i\theta})$ y calculemos el producto interno entre $f_1\in\mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$ y $f_2\in\mathcal{P}_{(m,m')}(\mathbb{C}^n)$

$$\begin{aligned}\alpha=\langle f_1,f_2\rangle&=\int_{\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1}}f_1(Z)\overline{f_2(Z)}d\mu(Z)\\&=\int_{\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1}}f_1(U_\theta\cdot Z)\overline{f_2(U_\theta\cdot Z)}d\mu(Z)\\&=\int_{\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1}}f_1(e^{i\theta}Z)\overline{f_2(e^{i\theta}Z)}d\mu(Z)\\&=\int_{\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1}}e^{i\theta(l-l')}f_1(Z)\overline{e^{i\theta(m-m')}f_2(Z)}d\mu(Z)\\&=e^{i\theta(l-l'-m+m')}\alpha\end{aligned}$$

lo cual implica que $\alpha=0$ ya que θ era arbitrario. La ortogonalidad ya queda demostrada.

Ahora veamos que la identidad (4.12) se cumple. Sea $P\in\mathcal{H}_{l,l'}(\mathbb{C}^n)$este polinomio se puede expresar como

$$P=f_0+\cdots+f_m\ \text{, donde }\ f_i\in\mathcal{P}_{(i,m-i)}(\mathbb{C}^n)\text{ para }0\leq i\leq m.$$

Aplicando el Laplaciano tenemos que

$$0=\Delta f=\Delta f_0+\cdots\Delta f_m.$$

Pero cada $\Delta f_i\in\mathcal{P}_{(i-1,m-i-1)}(\mathbb{C}^n)$ y por lo tanto $\Delta f\in\bigoplus_{s+s'=m-2}\mathcal{P}_{(s,s')}(\mathbb{C}^n)$, y como cada uno de los sumandos está en uno solo de estos espacios, tenemos que

$$\Delta f_j=0\quad(\forall j=0,\cdots m),$$

lo que demuestra que en efecto se cumple la suma. La ortogonalidad de los espacios $\mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$ se sigue que es suma directa. ■

4.2.1 Representación cuasi-regular del grupo U(n)

Definición 4.2.10. *Definimos la representación π del grupo $U(n)$ sobre $L^2(\mathbb{S}^{n-1}_{\mathbb{C}}, \mu)$ como*

$$\pi(g)f(Z) = f(g^{-1}Z) \textit{para todo } f \in L^2(\mathbb{S}^{n-1}_{\mathbb{C}}, \mu), g \in G \textit{ y } Z \in \mathbb{S}^{n-1}_{\mathbb{C}}.$$

Como se comentó a principios del capítulo, los subespacios invariantes de esta representación son los de polinomios bi-homogéneos y armónicos bi-homogéneos.

Proposición 4.2.11. *El espacio $\mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$ es invariante en la representación cuasi regular.*

Demostración. Por la linealidad de la representación, basta probarlo solo para los monomios $P = z^{\alpha}\bar{z}^{\beta}$. Para cada $g \in \mathrm{U}(n)$ tenemos que

$$P(gZ) = P\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n g_{1j}z_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n g_{nj}z_j \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n g_{1j}z_j\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\sum_{j=1}^n g_{nj}z_j\right)^{\alpha_n} \left(\sum_{j=1}^n \overline{g_{1j}z_j}\right)^{\beta_1} \cdots \left(\sum_{j=1}^n \overline{g_{nj}z_j}\right)^{\beta_n}$$

cada uno de los factores del lado derecho se tiene monomios de grado α_i en Z, y β_j en $\bar{Z}$ lo que nos garantiza que nuevamente tendremos un polinomio homogéneo de grado $\sum_{j=1}^n \alpha_j$ en Z y de grado $\sum_{j=1}^n \beta_j$ en $\bar{Z}$.■

Antes de continuar, recordemos que podemos estudiar la representación cuasi regular del grupo $U(n)$ en $\mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$, como la de un subgrupo de $SO(n)$ en $\mathcal{P}_{(l+l')}(\mathbb{R}^{2n})$. Por lo cual los subespacios invariantes de la representación serán más pequeños.

Proposición 4.2.12. *El siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^{2n}) & \xrightarrow{L(j(g))} & \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^{2n}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \Phi^{-1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \Phi^{-1}} \\ \bigoplus_{l+l'=m} \mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n) & \xrightarrow{L(g)} & \bigoplus_{l+l'=m} \mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n) \end{array}$$

Demostración. Sea $P \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^{2n})$ arbitrario. Con las identidades de 4.10 podemos expresar nuestra acción del siguiente modo

$$\Phi \circ L(g^{-1})P = L(j(g)^{-1})\Phi^{-1}(P). \tag{4.13}$$

Pues para cada $Z \in \mathbb{C}^n$ se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi \circ L(j(g)^{-1}) \circ \Phi^{-1}(P)Z &= L(j(g)^{-1}) \circ \Phi^{-1}(P)(\phi(Z)) \\ &= \Phi^{-1}(P)(j(g)^{-1}\phi(Z) \\ &= P \circ \phi^{-1}(j(g)^{-1}\phi(Z)) \\ &= P(g^{-1}Z) \\ &= L(g^{-1})P(Z).■ \end{aligned}$$

Proposición 4.2.13. *El espacio $\mathcal{H}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$ es un subespacio invariante de la representación cuasi regular.*

Demostración. Veamos que por 4.13 tenemos que

$$\Phi^{-1} \circ L(g^{-1})P = L(j(g)^{-1}) \circ \Phi^{-1}P$$

aplicando el Laplaciano y el hecho de que el operador Δ conmuta con el operador $L(j(g)^{-1})$, tenemos que

$$\Delta[\Phi^{-1} \circ L(g^{-1})P] = 0$$

Lo cual implica que $L(g^{-1})P \in \mathcal{H}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$.■

Finalmente, para demostrar la irreductibilidad de esta representación, probaremos que el espacio $\left[\mathcal{H}_{(l,l')}(\mathbb{S}^{n-1}_{\mathbb{C}})\right]^F$, con F el grupo de isotropías del vector

$$e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n,$$

es unidimensional.

Teorema 4.2.14. *Existe una única función $L_m : \mathbb{S}^{n-1}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ tal que*

1. $L_m \in \mathcal{H}_{(l,l')}(\mathbb{S}^{n-1}_{\mathbb{C}})$.
2. $L_n(A \cdot Z) = L_n(Z) \quad (\forall A \in U(n)^{e_n})(Z \in \mathbb{S}^{n-1}_{\mathbb{C}})$.
3. $L_n(e_n) = 1$.

Demostración. Sabemos que por el inciso 2 de 3.2.2 existe al menos una de estas funciones, de modo que solo debemos demostrar que esta función es única. Primeramente, notemos que la invarianza

$$L(h)f(Z) = f(Z) \quad (\forall h \in \mathrm{U}(n)^{e_n})$$

implica que la función f debe ser de la forma

$$f(Z) = \sum_{j=0}^{\text{mín}(l,l')} c_j \|Z'\|^{2i} z_n^{l-j}\,\overline{z_n}^{l'-j}$$

donde $Z' = (z_1, \cdots, z_{n-1})$. Aplicando el operador Δ tenemos

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \overline{z_k}} f &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \overline{z_k}} \left[\sum_{j=0}^{\text{mín}(l,l')} c_j \|Z'\|^{2j} z_n^{l-j}\,\overline{z_n}^{l'-j} \right] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial z_n \partial \overline{z_n}} \left[\sum_{j=0}^{\text{mín}(l,l')} c_j \|Z'\|^{2j} z_n^{l-j}\,\overline{z_n}^{l'-j} \right] + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \overline{z_k}} \left[\sum_{j=0}^{\text{mín}(l,l')} c_j \|Z'\|^{2j} z_n^{l-j}\,\overline{z_n}^{l'-j} \right] \end{aligned}$$

Podemos calcular por separado cada uno de los sumandos del lado derecho,

$$\frac{\partial^2}{\partial z_n \partial \overline{z_n}}\left[\sum_{j=0}^{\text{mín}(l,l')} c_j \|Z'\|^{2i} z_n^{l-j}\,\overline{z_n}^{l'-j}\right] = c_0(l)(l')z_n^{l-1}\,\overline{z_n}^{l'-1} + \sum_{j=1}^{\text{mín}(l,l')-1} c_j(l-j)(l'-j)\|Z'\|^{2j} z_n^{l-j-1}\,\overline{z_n}^{l'-j-1} \quad (4.14)$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \overline{z_k}}\left[\sum_{j=1}^{\text{mín}(l,l')} c_j \|Z'\|^{2i} z_n^{l-j}\,\overline{z_n}^{l'-j}\right] &= \sum_{j=1}^{\text{mín}(l,l')} c_j z_n^{l-j}\,\overline{z_n}^{l'-j}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \overline{z_k}}\|Z'\|^{2j}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{\text{mín}(l,l')} c_j z_n^{l-j}\,\overline{z_n}^{l'-j}\Delta\|Z'\|^{2j}\\ &= \sum_{j=1}^{\text{mín}(l,l')} c_j z_n^{l-j}\,\overline{z_n}^{l'-j} j(j+n-2)\|Z'\|^{2j-2}.| \qquad (4.15)\end{aligned}$$

De 4.14 y 4.15 tenemos que

$$\begin{aligned}0 &= c_0(l)(l')z_n^{l-1}\,\overline{z_n}^{l'-1} + \sum_{j=1}^{\text{mín}(l,l')-1} c_j(l-j)(l'-j)\|Z'\|^{2j} z_n^{l-j-1}\,\overline{z_n}^{l'-j-1} + \sum_{j=1}^{\text{mín}(l,l')} c_j z_n^{l-j}\,\overline{z_n}^{l'-j} j(j+n-2)\|Z'\|^{2j-2}\\ &= (c_0 ll' + c_1(n-1))z_n^{l-1}\,\overline{z_n}^{l'-1} + \sum_{j=1}^{\text{mín}(l,l')-1}[c_{j+1}(j+1)(j+n-1) + c_j(l-j)(l'-j)]\|Z'\|^{2j} z_n^{l-j-1}\,\overline{z_n}^{l'-j-1}\\ &= \sum_{j=0}^{\text{mín}(l,l')-1}[c_{j+1}(j+1)(j+n-1) + c_j(l-j)(l'-j)]\|Z'\|^{2j} z_n^{l-j-1}\,\overline{z_n}^{l'-j-1}\end{aligned}$$

de modo que tenemos las siguientes relaciones recursivas

$$c_{j+1}(j+1)(j+n-1) + c_j(l-j)(l'-j) = 0 \quad 0 \leq j \leq \text{mín}(l,l').$$

como $c_0 = f(e_n) = 1$, la función f es única.■

Corolario 4.2.15. *Cualquier otra función que satisfaga 1 y 2 debe de ser múltiplo escalar de polinomio encontrado en el teorema anterior. De modo que*

$$\dim\left[\mathcal{H}_{(l,l')}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1})\right]^F = 1$$

Demostración. La prueba de esto es análoga a la que se hizo para el caso del armónico de Legendre.

Teorema 4.2.16. *Sean $l, l' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el espacio $\mathcal{H}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$ es un subespacio irreducible de la representación cuasi regular de* $\mathrm{U}(n)$.

A Teoremas espectrales y Teorema de la descomposición polar

Un conjunto de Teoremas necesarios en la teoría de representaciones son los Teoremas espectrales, tanto el caso de dimensión finita, como el caso de espacios de Hilbert para operadores acotados hermitianos.

Teorema A.0.1 (Teorema espectral complejo). *[[Axl23, proposiciones 7.24]] Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{C}$ de dimensión finita, y T un operador lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *T es normal.*
2. *V tiene una base ortonormal de vectores propios de T.*
3. *T es representado por una matriz diagonal respecto a una base ortonormal.*

Teorema A.0.2 (Teorema espectral real.). *[[Axl23, proposiciones 7.29].] Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ de dimensión finita y T un operador lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *T es hermitiano.*
2. *V tiene una base ortonormal de vectores propios de T.*
3. *T es representado por una matriz diagonal respecto a una base ortonormal.*

Los teoremas anteriores tienen una generalización a espacios de Hilbert para el caso de operadores compactos.

Definición A.0.3 (Operadores compactos). *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ un operador lineal acotado. Diremos que T es un operador compacto si $\overline{T(B_{\mathscr{H}})}$ es compacto en $\mathscr{H}$, donde $B_{\mathscr{H}}$ es la bola unitaria de $\mathscr{H}$.*

Ejemplo 14. Sea (X, Ω, μ) un espacio de medida y $K \in L^2(X \times X, \Omega \times \Omega, \mu \times \mu)$. El operador

$$T_K : L^2(X, \Omega, \mu) \to L^2(X, \Omega, \mu)$$

definida por

$$Kf(x) = \int K(x, y) f(y) d\mu(y) \text{ para todo } f \in L^2(X, \Omega, \mu) \text{ y } x \in X$$

es un operador acotado.

Teorema A.0.4. *[Con94, Lema II.5.9] Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert. Si $T \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ es normal hermitiano y compacto, entonces $\|T\|$ o $-\|T\|$ es un valor propio de T. Además, el espacio de vectores propios asociados a ese valor propio es de dimensión finita.*

Otro teorema importante de considerar es el de la descomposición polar, para este debemos definir un par de conceptos antes.

Definición A.0.5. *Un operador T en un espacio vectorial V, de dimensión finita, es positivo si es hermitiano y*

$$\langle Tv, v\rangle \geq 0 \quad \textit{para todo } v \in V.$$

Definición A.0.6. *Un operador R se le llamará raíz cuadrada de un operador T si*

$$R^2 = T.$$

Proposición A.0.7. *[Axl23, Proposición 7.36] Dado un espacio vectorial V de dimensión finita, cada operador positivo T tiene una única raíz cuadrada positiva y la denotamos como*

$$\sqrt{T}.$$

Teorema A.0.8 (Descomposición polar). *[Axl23, Proposición 7.45] Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y T un operador lineal en V. Entonces existe una isometría S tal que*

$$T = S\sqrt{T^*T}.$$

B Medidas de Haar

Dado un grupo localmente compacto, nos interesa definir medidas que sean invariantes bajo traslaciones izquierdas o derechas. Esto para poder trabajar con el espacio de Hilbert $L^2(G)$, espacio de Hilbert dentro del cual se pueden hallar todas las representaciones irreducibles de grupos compactos.

B.1 Medidas de Haar y de Radon

Definición B.1.1. *Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff. Una* ***medida de Radon*** *es una medida de Borel en X que es*

- *finita en conjuntos compactos,*
- *regular interna en abiertos y*
- *regular externa en Borelianos.*

Definición B.1.2. *Sea G un grupo localmente compacto Hausdorff. Una* ***medida de Haar izquierda*** *es una medida de Radon μ tal que*

$$\mu(xE) = \mu(E)$$

para cada Boreliano E, y cada $x \in G$.

Esta definición no nos garantiza existencia; sin embargo, resulta que para grupos localmente compactos las medidas de Haar siempre existen.

Teorema B.1.3. *[Fol94, Teorema 2.10] Cada grupo localmente compacto G tiene una medida de Haar izquierda y esta medida es única salvo un producto por un escalar.*

B.2 Funciones modulares

Dado un espacio homogéneo G/H, con G grupo localmente compacto, nos interesa "heredar" la medida de Haar de G al espacio homogéneo. Las condiciones para que esto pase se expresa en términos de funciones modulares.

Definición B.2.1 (Función modular). *Sea G un grupo localmente compacto con medida de Haar izquierda λ. Para cada $x \in X$ se define la función*

$$\lambda_x(E) = \lambda(Ex).$$

Esta es una nueva medida de Haar, ya que $y(Ex) = (yE)x$. Por la unicidad de la medida de Haar, existe un número $\Delta(x)>0$ tal que $\lambda_x = \Delta(x)\lambda$. La función

$$\begin{aligned} \Delta : G &\to R^+ \\ x &\mapsto \Delta(x) \end{aligned}$$

se llama la función modular de G.

La función modular esencialmente mide qué tan lejos está la medida de haar izquierda de ser una medida de Haar derecha.

Proposición B.2.2. *Si K es un subgrupo compacto de G entonces $\Delta_K \equiv 1$.*

Teorema B.2.3. *[Fol94, Teorema 2.51] Sea G un grupo localmente compacto Hausdorff y H un subgrupo cerrado de G. Existe una medida de Radon $G-$invariante μ en G/H si y solo si $\Delta_G|_H = \Delta_H$. Además, esta medida es única salvo multiplicación por un escalar.*

Un corolario de este teorema es el siguiente.

Proposición B.2.4. *Si H es compacto, G/H tiene una medida de Radon G-invariante.*

Bibliografía

[Aro50] N. Aronszajn. "Theory of reproducing kernels". en. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 68.3 (ene. de 1950), págs. 337-404. DOI: 10.1090/s0002-9947-1950-0051437-7. URL: http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9947-1950-0051437-7.

[WA67] Yung-Chow Wong y Yik-Hoi Au-Yeung. "An Elementary and Simple Proof of the Connectedness of the Classical Groups". En: *The American Mathematical Monthly* 74.8 (1967), págs. 964-966. ISSN: 00029890, 19300972. URL: http://www.jstor.org/stable/2315278 (visitado 16-06-2025).

[HIL72] EINAR HILLE. "INTRODUCTION TO GENERAL THEORY OF REPRODUCING KERNELS". En: *The Rocky Mountain Journal of Mathematics* 2.3 (1972), págs. 321-368. ISSN: 00357596, 19453795. URL: http://www.jstor.org/stable/44236268 (visitado 11-07-2025).

[War83] F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1983. ISBN: 9780387908946. URL: https://books.google.com.mx/books?id=iaeUqc2yQVQC.

[Zhu93] K. Zhu. *An Introduction to Operator Algebras*. Studies in Advanced Mathematics. Taylor & Francis, 1993. ISBN: 9780849378751. URL: https://books.google.com.mx/books?id=XHLj7bz8hOIC.

[Con94] J.B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1994. ISBN: 9780387972459. URL: https://books.google.com.mx/books?id=ix4P1e6AkeIC.

[Fol94] G.B. Folland. *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. Studies in Advanced Mathematics. Taylor & Francis, 1994. ISBN: 9780849384905. URL: https://books.google.com.mx/books?id=0VwYZI1DypUC.

[BdG03] M. Bachir Bekka, Pierre de la Harpe y Rostislav Grigorchuk. "Irreducibility of unitary group representations and reproducing kernels Hilbert spaces". En: *Expositiones Mathematicae* 21.2 (2003), págs. 115-149. ISSN: 0723-0869. DOI: https://doi.org/10.1016/S0723-0869(03)80014-2. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0723086903800142.

[Sep07] M.R. Sepanski. *Compact Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2007. ISBN: 9780387491585. URL: https://books.google.com.mx/books?id=MyZqW7I98sEC.

[Tu10] L.W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Universitext. Springer New York, 2010. ISBN: 9781441973993. URL: https://books.google.com.mx/books?id=br1KngEACAAJ.

[AH12] K. Atkinson y W. Han. *Spherical Harmonics and Approximations on the Unit Sphere: An Introduction*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2012. ISBN: 9783642259821. URL: https://books.google.com.mx/books?id=SLQxcgt2Xj0C.

[Lee12] J. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012. ISBN: 9781441999825. URL: https://books.google.com.mx/books?id=xygVcKGPsNwC.

[VK13] N.J. Vilenkin y A.U. Klimyk. *Representation of Lie Groups and Special Functions: Volume 2: Class I Representations, Special Functions, and Integral Transforms*. Mathematics and its Applications. Springer Netherlands, 2013. ISBN: 9789401728836. URL: https://books.google.com.mx/books?id=7UbrCAAAQBAJ.

[Her17] Yessica Hernández Eliseo. “Teorema de Peter Weyl, Wavelets y Operadores de Toeplitz en Grupos Compactos”. En: (2017).

[Axl23] S. Axler. *Linear Algebra Done Right*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2023. ISBN: 9783031410260. URL: https://books.google.com.mx/books?id=OdnfEAAAQBAJ.