Día 2- Teoría de representaciones

Presenta:
Roberto García Antonio
antonmaths35@outlook.com

Universidad Veracruzana.
Facultad de matemáticas.

10 de febrero del 2026

Objetivos día 2...y 3

Objetivos:

1. *Definir los G- espacios de Hilbert*
2. *dar el teorema fuerte que conecta la teoría de RKHS y la teoría de representaciones unitarias.*
3. *definir que es un par de Gelfand*
4. *definir las funciones esféricas*
5. *esféricos zonal y algunos polinomios clásicos*
6. *explicar los teoremas relacionados a este concepto*
7. *expresar algunos núcleos reproductores en términos de las funciones esféricas (esferico zonal).*

Contenido

Ejemplo 1

El grupo ortogonal

$$\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) : AA^T = A^TA = I\},$$

el grupo especial ortogonal

$$\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) : \det A = 1\},$$

y el **grupo unitario**

$$\mathrm{U}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) : AA^* = A^*A = I\},$$

son grupos de Lie.

Definición 1.1

Un ***espacio homogéneo (suave)*** *es una variedad suave M junto con la acción suave y transitiva de un grupo de Lie G sobre M. Un* ***espacio homogéneo*** *es un espacio topológico localmente compacto M junto con la acción transitiva de un grupo topológico localmente compacto G, que cumple con la condición de que M sea homeomorfo a un espacio cociente G/H, con H algún subgrupo cerrado de G.*

Ejemplo 2

La acción del grupo $\mathrm{O}(n)$ en S^{n-1}, dada por multiplicación por la izquierda

$$A \cdot x = Ax,$$

es transitiva, puesto que dado un vector x de norma 1, podemos completar a una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ y definir una matriz ortogonal cuyas columnas sean los vectores de esta base, de manera que

$$A \cdot e_n = Ae_n = x.$$

Por lo tanto S^{n-1} es un espacio homogéneo de $\mathrm{O}(n)$.

Ejemplo 3

La acción del grupo $\mathrm{SO}(n)$ en S^{n-1} dada por multiplicación por la izquierda es nuevamente transitiva; por lo tanto S^{n-1} es un espacio homogéneo de $\mathrm{SO}(n)$. La prueba de que la acción es transitiva es análoga a la del ejemplo anterior.

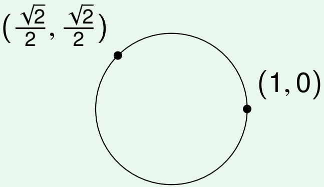
Ejemplo 4

La matriz

$$g = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

es ortogonal. Veamos que para un $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tenemos

$$g \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xcos(\theta) - ysen(\theta) \\ xsen(\theta) + ycos(\theta) \end{bmatrix}.$$



Ejemplo 5

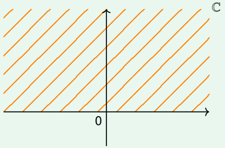
El grupo $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ actúa suavemente sobre el semi-plano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z > 0\}$, por medio de transformaciones de Möbius, es decir,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Esta acción es transitiva, pues, dado un complejo $z = x + iy \in \mathbb{H}$, consideramos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{bmatrix}$$

la cual cumple que $A \cdot i = z$. Por lo tanto, la acción es transitiva y el semi-plano superior es un espacio homogéneo de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.



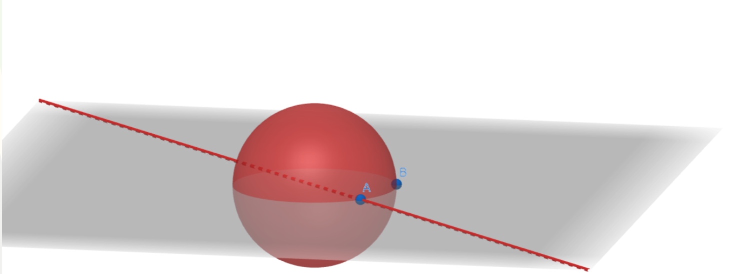


Figure: El efecto de g en un punto de la esfera.

El teorema principal de espacios homogéneos nos dice que un espacio homogéneo puede ser identificado con un cociente de grupos de Lie.

Teorema 1.2

[Lee12, Teorema 21.18] Sea G un grupo de Lie, M un espacio homogéneo de G y $p \in M$. El grupo de isotropía de G, G_p, es un grupo cerrado de G y además la transformación

$$\begin{aligned} F : G/G_p &\to M \\ gG_p &\mapsto g \cdot p \end{aligned}$$

es un difeomorfismo.

Notemos que con este teorema podemos expresar a S^{n-1} como cociente de grupos de Lie.

Proposición 1.3

Consideremos S^{n-1} *y* $\mathrm{SO}(n) \curvearrowright S^{n-1}$ *actuando por multiplicación por la izquierda. El grupo de isotropía de* $e_n = (0, \cdots, 1)$ *es isomorfo a* $\mathrm{SO}(n-1)$ *y por lo tanto*

$$S^{n-1} \cong \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) \cong \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1).$$

Demostración

Es posible demostrar usando la Proposición **??** que

$$\mathrm{SO}(n)_{e_n} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in \mathrm{SO}(n-1) \right\} \cong \mathrm{SO}(n-1).$$

La igualdad $Ae_n = e_n$ implica que la última columna de A debe ser e_n. Usando la ortogonalidad de las filas, tenemos que la última fila debe ser $e_n^T = (0, \cdots, 1)$ y que el resto es una matriz ortogonal de tamaño $n-1$. Análogamente, se demuestra que

$$\mathrm{O}(n)_{e_n} \cong \mathrm{O}(n-1). \blacksquare$$

Definición 1.4 (Función modular)

Sea G un grupo localmente compacto con medida de Haar izquierda λ. Para cada $x \in X$ se define la función

$$\lambda_x(E) = \lambda(Ex).$$

*Esta es una nueva medida de Haar, ya que $y(Ex) = (yE)x$. Por la unicidad de la medida de Haar (Teorema **??**), existe un número $\Delta(x) > 0$ tal que $\lambda_x = \Delta(x)\lambda$. La función*

$$\begin{aligned} \Delta : G &\to R^+ \\ x &\mapsto \Delta(x) \end{aligned}$$

se llama la función modular de G.

La función modular esencialmente mide qué tan lejos está la medida de haar izquierda de ser una medida de Haar derecha.

Proposición 1.5

Si K es un subgrupo compacto de G entonces $\Delta_K \equiv 1$. Donde Δ_K representa la medida de Haar del grupo K

Proposición 1.6

Si H es compacto, G/H tiene una medida de Radon G-invariante.

Notemos que, en particular, esto implica que existen medidas invariantes bajo la acción del grupo $\mathrm{SO}(n+1)$ en S^n

Contenido

Objetivos:

1. *Definir el concepto de RKHS*
2. *dar las propiedades reproductivas buenas*
3. *dar 2 ejemplos concretos, de estos ejemplos surgen algunas funciones especiales*

Definición 2.1

Sea X un conjunto no vacío. Denotemos por $\mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ al espacio de funciones de X en $\mathbb{C}$. Diremos que un espacio de Hilbert $\mathscr{H} \subseteq \mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ es un ***espacio de Hilbert con núcleo reproductor*** *(**EHNR**) si para cada $x_0 \in X$, el funcional de evaluación en x_0*

$$\begin{aligned} F_{x_0} : \mathscr{H} &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(x_0) \end{aligned}$$

es acotado.

Supongamos que $\mathscr{H} \subseteq \mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ es un EHNR, tomando $y \in X$ consideremos el funcional de evaluación en el punto $y \in X$:,

$$\begin{aligned} F_y :\mathscr{H} &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(y). \end{aligned}$$

Pero... ¿y el núcleo?

Por el Teorema de representación de Riesz, existe un vector $k_y \in \mathscr{H} \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ tal que

$$F_y(f) = \langle f, k_y \rangle \quad \text{para todo } f \in \mathscr{H}.$$

Definimos el **núcleo reproductor** de $\mathscr{H}$ como la función

$$\begin{aligned} k : X \times X &\to \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto k(x, y) = k_y(x). \end{aligned}$$

Ejemplo 6

Tomando $X = \{1, 2 \cdots n\}$ identificamos $\mathcal{F}(\{1, \cdots, n\}, \mathbb{C})$ con $\mathbb{C}^n$. Sea $\mathscr{H} \subseteq \mathbb{C}^n$ arbitrario, $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor, puesto que todo funcional lineal en $\mathbb{C}^n$ es acotado. En particular, para $j \in X$ el funcional

$$F_j(x) = F_j((x_1, \cdots x_n)) = x_j$$

es acotado. Además, notemos que $F_j(z) = \langle z, e_j \rangle$. Los vectores de $\mathscr{H} = \mathbb{C}^n$ son funciones definidas en el conjunto $X = \{1, ..., n\}$. Tomamos $j \in X$ y el funcional

$$F_j(z) = z_j = \langle z, e_j \rangle,$$

entonces $k_j = e_j$; por lo tanto, el núcleo reproductor es

$$\begin{aligned} k : X \times X &\to \mathbb{C} \\ (i, j) &\mapsto k_j(i) = e_j(i) = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Ejemplo 7

Sea $X = \mathbb{N}$ y $\mathrm{d}\mu$ la medida de conteo. Consideremos el espacio de Hilbert

$$\mathscr{H} = L^2(X, \mathrm{d}\mu) = \ell^2(X) \subseteq \mathscr{F}(X, \mathbb{C}),$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$ definimos el vector $e_j \in \ell^2(\mathbb{N})$ como $e_j(i) = \delta_{ij}$. En el espacio $\mathscr{H}$, el funcional evaluación en j toma la forma

$$\begin{aligned} F_j : \ell^2(\mathbb{N}) &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto x(j) = x_j. \end{aligned}$$

Veamos que

$$F_j(x) = x_j = \langle x, e_j \rangle.$$

Así, el núcleo reproductor es

$$\begin{aligned} K(i,j) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases} \\ &= e_j(i). \end{aligned}$$

Definición 2.2

*Un **multi-índice** con n componentes es un elemento de* $\mathbb{Z}_+^n$, *donde* $\mathbb{Z}_+$ *denota a los enteros no negativos, sea* $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ *un multi-índice con n componentes, definimos las siguientes notaciones:*

$\lvert\alpha\rvert = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$	*Altura del multi-índice*
$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!,$	*Factorial del multi-índice*
$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$	*monomio de grado* $\lvert\alpha\rvert$ *en n variables*

Espacio de polinomios homogéneos

Definición 2.3

Denotamos por $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$*, al espacio de polinomios que son de la forma*

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha \quad a_\alpha \in \mathbb{C},$$

y denotamos por $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$*, al conjunto de polinomios* P *tales que*

$$\Delta P = 0.$$

Definición 2.4 (Esféricos armónicos)

*Llamaremos **esféricos armónicos** de grado m a las restricciones a la esfera de polinomios armónicos homogéneos y lo denotaremos por $\mathcal{H}_m(S^{n-1})$.*

Producto interno de la esfera

Definición 2.5

Dados $p, q \in \mathcal{H}_m(S^{n-1})$ definimos el ***producto interno de la esfera*** *como*

$$\langle p, q\rangle_{S^{n-1}} = \int_{S^{n-1}} p(x)\overline{q(x)}d\mu(x),$$

donde $d\mu$ es una medida invariante bajo rotaciones normalizada.

Con este producto interno

- el espacio se vuelve un EHNR,

[Lee12] J. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012. ISBN: 9781441999825. URL: https://books.google.com.mx/books?id=xygVcKGPsNwC.