Espacios de Hilbert con núcleo reproductor y representaciones esféricas de los grupos $SO(n)$ y $\mathrm{U}(n)$

Presenta:
Roberto García Antonio
Directores:
Dr. Josué Ramírez Ortega
FACULTAD DE MATEMÁTICAS UV
Dra. Yessica Hernandez Eliseo
CIMAT-UNIDAD MÉRIDA

Universidad Veracruzana.
Facultad de matemáticas.

16 de octubre del 2025

Motivaciones

- Generar una referencia bibliográfica en la que se de una introducción a la teoría de representaciones unitarias y a la teoría de EHNR.
- La teoría de representaciones tiene aplicaciones a varias áreas del análisis matemático.
- Estudiar análisis armónico y aplicarlo a problemas en el área de teoría de operadores.
- Entender que es un EHNR pues una gran cantidad de espacios de interés para el área de teoría de operadores son EHNR.

Objetivos

Objetivos generales:

- Estudiar la teoría de representaciones unitarias de grupos topológicos compactos.

Objetivos particulares:

- Estudiar teoría de EHNR,
- dar un criterio para demostrar la irreductibilidad de ciertas representaciones unitarias
- aplicar el criterio para las representaciones esféricas de los grupos de Lie $\mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n)$ Y $\mathrm{U}(n)$.

Contenido

Grupos de Lie

Definición 1.1

*Un **grupo de Lie** G es una variedad diferencial G la cual cuenta con una estructura de grupo $(G, \cdot)$ de tal manera que el producto y la inversión*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\to G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \cdot g_2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} i : G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

sean funciones suaves.

Ejemplo 1

El grupo ortogonal

$$\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : AA^T = A^TA = I\},$$

el grupo especial ortogonal

$$\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) : \det A = 1\},$$

y el **grupo unitario**

$$\mathrm{U}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : AA^* = A^*A = I\},$$

son grupos de Lie.

Representaciones

Definición 1.2

*Sea G un grupo topológico y $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert no nulo sobre un campo $\mathbb{F}$. Una **representación unitaria** de G sobre $\mathscr{H}$ es un homomorfismo de grupos entre*

$$\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$$

donde $\mathcal{U}(\mathscr{H}) = \{T : \mathscr{H} \to \mathscr{H} \mid T \text{ es unitario}\}$ con la topología débil de operadores a $\mathcal{U}(\mathscr{H})$.

Ejemplo 2 (**Representación regular**)

Sea G un grupo compacto y ρ la medida de Haar izquierda asociada al grupo. Se define **la representación regular izquierda** sobre el espacio de Hilbert $L^2(G,\rho)$ mediante traslaciones, es decir,

$$[\pi_L(g)f](h) = f(g^{-1}h) \quad (\forall g, h \in G)(\forall f \in L^2(G,\rho)).$$

Esto está bien definido pues dado $f \in L^2(G,\rho)$ tenemos que

$$\int_G |\pi_L(g)f(h)|^2 d\rho(h) \int_G |f(g^{-1}h)|^2 d\rho(h) = \int_G |f(h)|^2 d\rho(h) < \infty$$

por la invarianza de la medida de Haar.

Subrepresentaciones irreducibles

Definición 1.3

*Sea $\mathcal{M}$ un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $\mathscr{H}_\pi$. Se dirá que $\mathcal{M}$ es **invariante** para una representación $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H}_\pi)$ o G-invariante si*

$$\pi(x)\mathcal{M} \subset \mathcal{M} \quad \text{para todo } x \in G,$$

es decir, si es un subespacio invariante del operador $\pi(x)$ para todo $x \in G$.

Definición 1.4

*Sea π una representación de un grupo G sobre un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, la representación se dice **irreducible** si no tiene subespacios cerrados e invariantes distintos de $\{0\}$ Y $\mathscr{H}$.*

Equivalencia de representaciones.

Definición 1.5

Sean (π_1, V_1) y (π_2, V_2) representaciones de G. Un operador de entrelace de π_1 a π_2 es un operador lineal $T : V_1 \to V_2$ tal que

$$\pi_2(g) \circ T = T \circ \pi_1(g) \quad \textit{para todo } g \in G,$$

es decir, hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\pi_1(g)"] \arrow[d, "T"] & V_1 \arrow[d, "T"] \\ V_2 \arrow[r, "\pi_2(g)"] & V_2 \end{tikzcd}$$

Contenido

Espacio de Hilbert con núcleo reproductor

Definición 2.1

*Sea X un conjunto. Diremos que un espacio de Hilbert $\mathscr{H} \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ es un **espacio de Hilbert con núcleo reproductor** (EHNR) si para cada $x_0 \in X$ el funcional de evaluación en x_0*

$$\begin{aligned} ev_{x_0} : \mathscr{H} &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(x_0) \end{aligned}$$

es acotado.

EHNR y representaciones irreducibles

Asumamos que un grupo G actúa de manera transitiva sobre un espacio X, esto induce una acción natural π, de G en $\mathbb{C}^X$, definida por la siguiente regla de correspondencia

$$\pi(g)f(x) = f(g^{-1} \cdot x).$$

Sea $\mathscr{H} \subset \mathbb{C}^X$ un EHNR tal que:

$$\pi(g)f \in \mathscr{H} \text{ para todo } g \in G \text{ y } f \in \mathscr{H} \quad \text{y} \quad \|\pi(g)f\| = \|f\|$$

Dados $F \subset G$ subgrupo cerrado, se denota por $\mathscr{H}^F$ al espacio vectorial

$$\mathscr{H}^F = \{\psi \in \mathscr{H} : \pi(k)(\psi) = \psi \text{ para todo } k \in F\}$$

de funciones F–invariantes.

Criterio de irreducibilidad

Teorema 2.2 (Proposition 2, Bekka et al. (2003))

Con la notación anterior y con la representación $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$. Sea $w \in X$ arbitrario pero fijo, definimos

$$F := G^w = \{g \in G : g \cdot w = w \quad (\forall g \in G)\},$$

***el grupo de isotropías de w**, entonces se cumple que:*

1. *Si $\mathscr{H} \neq \{0\}$ entonces $\mathscr{H}^F \neq \{0\}$,*
2. *Si $\dim \mathscr{H}^F = 1$, entonces la representación π es irreducible.*

Contenido

multi-índices

Definición 3.1

Un ***multi-índice*** *con n componentes es un elemento de* $\mathbb{Z}_+^n$*, donde* $\mathbb{Z}_+$ *denota a los enteros no negativos, sea* $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ *un multi-índice con n componentes, definimos las siguientes notaciones:*

$\lvert\alpha\rvert = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$	*Altura del multi-índice*
$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!,$	*Factorial del multi-índice*
$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$	*monomio de grado* $\lvert\alpha\rvert$ *en n variables*

Espacio de polinomios homogéneos

Definición 3.2

Denotamos por $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$, al espacio de polinomios que son de la forma

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha \quad a_\alpha \in \mathbb{C},$$

y denotamos por $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$, al conjunto de polinomios P tales que

$$\Delta P = 0.$$

Definición 3.3 (Esféricos armónicos)

*Llamaremos **esféricos armónicos** de grado m a las restricciones a la esfera de polinomios armónicos homogéneos y lo denotaremos por $\mathcal{H}_m(S^{n-1})$.*

Representación cuasi-regular de $\mathrm{SO}(n)$ en la esfera

Representaciones cuasi-regulares

El grupo $\mathrm{SO}(n)$ actúa de manera transitiva en

$$S^{n-1} \cong \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1),$$

por medio de multiplicación por la izquierda; esta acción genera una representación del grupo sobre el espacio de funciones

$$\mathbb{C}^{S^{n-1}} = \{f : S^{n-1} \to \mathbb{C}\}$$

por medio de la asignación

$$\pi(g)f(x) = f(g^{-1}x).$$

A esta representación la llamaremos **representación cuasi-regular** de $\mathrm{SO}(n)$ en $\mathbb{C}^{S^{n-1}}$.

Proposición 3.4

Los espacios $\mathcal{P}_m(S^{n-1})$ y $\mathcal{H}_m(S^{n-1})$, son subespacios invariantes de la representación cuasi-regular.

Producto interno de la esfera

Definición 3.5

Dados $p, q \in \mathcal{H}_m(S^{n-1})$ definimos el ***producto interno de la esfera*** *como*

$$\langle p, q\rangle_{S^{n-1}} = \int_{S^{n-1}} p(x)\overline{q(x)}d\mu(x),$$

donde $d\mu$ es una medida invariante bajo rotaciones normalizada.

Con este producto interno

- el espacio se vuelve un EHNR,
- la representación

$$\mathcal{H}_m(S^{n-1}) \xrightarrow{\pi(g)} \mathcal{H}_m(S^{n-1})$$

es unitaria.

Armonico de Legendre

Teorema 3.6 (Section 2.1.2 Atkinson and Han (2012))

*Para cada $m \in \mathbb{N}$ existe una única función $L_m : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ a la cual llamamos **el armónico de Legendre**, tal que*

1. $L_m \in \mathcal{H}_m(S^{n-1})$,
2. $L_m(AX) = L_m(X) \quad$ *para todo* $A \in \mathrm{O}(n)^{e_n}$ *y* $X \in S^{n-1}$,
3. $L_m(e_n) = 1$.

La tercera condición se puede entender como una condición de normalización.

Criterio de irreducibilidad aplicado a $\mathrm{SO}(n)$

Con la notación del Teorema 2.2 la representación cuasi-regular del grupo $\mathrm{SO}(n)$ en la esfera toma la forma

- $G = \mathrm{SO}(n)$
- $w = (0, \cdots, 1)$
- $F = \mathrm{SO}(n)^{e_n}$
- $\mathscr{H} = \mathcal{H}_m(S^{n-1})$ con el productor interno de la esfera
- $\mathscr{H}^F = \mathcal{H}_m(S^{n-1})^{O(n)^{e_n}}$

y la diapositiva anterior demuestra que

$$dim\, \mathcal{H}_m(S^{n-1})^{O(n)^{e_n}} = 1$$

Proposición 3.7

La representación cuasiregular

$$\begin{aligned} \pi : \mathrm{SO}(n) &\to \mathcal{U}(\mathcal{H}_m(S^{n-1})) \\ g &\mapsto \pi(g) \end{aligned}$$

es irreducible.

Esto último por el Teorema 2.2

Contenido

polinomios bi-homogéneos

Definición 4.1

Denotamos por $\mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$ al espacio de polinomios ***bi-homogéneos de grado*** (l, l') *en n variables complejas, es decir, el conjunto de polinomios en $\mathbb{C}[z_1, \cdots z_n, , \overline{z_1}, \cdots \overline{z_n}]$ que son homogéneos de grado l en la variable $Z = (z_1, ..., z_n)$ y homogéneos de grado l' en $\overline{Z} = (\overline{z_1}, ..., \overline{z_n})$, es decir, polinomios de la forma*

$$P(Z) = P(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ |\beta|=l'}} c_{\alpha,\beta} Z^{\alpha} \overline{Z}^{\beta}.$$

Denotamos por $\mathcal{H}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$ al espacio de polinomios ***bi-homogéneos de grado*** (l, l') ***tales que su Laplaciano es cero****.*

Proposición 4.2

La función

$$\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$$

$$Z = X + iY \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

es un homeomorfismo, el cual nos permite identificar la esfera

$$S^{2n-1} := \{(X, Y) \in \mathbb{R}^{2n} : |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 + |y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2 = 1\}$$

con el conjunto

$$\{Z \in \mathbb{C}^n : \|z_1\|^2 + \cdots + \|z_n\|^2 = 1\},$$

el cual denotaremos como $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1}$.

Cambio de variables complejas a reales

Proposición 4.3

La función

$$\Phi : \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^{2n}) \to \sum_{l+l'=m} \mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$$
$$f \mapsto f \circ \phi$$

Este cambio corresponde a hacer un cambio de las variables reales x_i, y_i por las variables complejas $z_i, \overline{z_i}$.

Encaje del grupo $U(n)$ en el grupo $SO(n)$

Proposición 4.4

La transformación

$$j : U(n) \to Im(j)SO(2n)$$

$$u = u_1 + iu_2 \mapsto \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{bmatrix}$$

donde u_1, u_2 son las matrices de partes reales e imaginarias, respectivamente. Es un homomorfismo de grupos continuo e inyectivo.

La transformación j no es sobreyectiva.

Acción inducida de $\mathrm{U}(n)$ en $\mathbb{R}^{2n}$

Por medio de esta función j podemos definir una acción del grupo $U(n)$ en el espacio $\mathbb{R}^{2n}$ como sigue

$$(g, X) \mapsto M_{j(g)}X = j(g)X$$

Por multiplicación por la izquierda por la matriz $j(g)$.

Equivalencia de dos acciones

Proposición 4.5

Denotamos por M_g la multiplicación por la izquierda por la matriz g en $\mathbb{C}^n$, por $M_{j(g)}$ la multiplicación por la izquierda por la matriz $j(g)$ en $\mathbb{R}^{2n}$. Con la notación anterior, el siguiente diagrama conmuta para cada $g \in U(n)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, "M_g"] \arrow[d, "\phi"] & \mathbb{C}^n \arrow[d, "\phi"] \\ \mathbb{R}^{2n} \arrow[r, "M_{j(g)}"] & \mathbb{R}^{2n} \end{tikzcd}$$

es decir,

$$\phi(gZ) = j(g)\phi(Z) \text{ para todo } Z \in \mathbb{C}^n. \tag{1}$$

Medida invariante

Por el resultado anterior debe existir una única medida de probabilidad en S^{2n-1} que sea invariante bajo la acción del grupo $\mathrm{U}(n)$. Esta medida coincide la medida invariante bajo la acción del grupo $\mathrm{SO}(2n)$, pues esta medida también será $\mathrm{U}(n)$-invariante.

Representación cuasi-regular de $\mathrm{U}(n)$

Definición 4.6

Definimos la representación cuasi regular del grupo $\mathrm{U}(n)$ sobre $L^2(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1}, \mu)$ como

$$\pi(g)f(Z) = f(g^{-1}Z).$$

Proposición 4.7

Los espacio $\mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$ y $\mathcal{H}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$ es un subespacio invariante de la representación cuasi regular.

Proposición 4.8

El siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^{2n}) \arrow[r, "\pi(j(g))"] \arrow[d, "\Phi^{-1}"] & \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^{2n}) \arrow[d, "\Phi^{-1}"] \\
\bigoplus_{l+l'=m} \mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n) \arrow[r, "\pi(g)"] & \bigoplus_{l+l'=m} \mathcal{P}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)
\end{tikzcd}
$$

Teorema 4.9

Existe una única función $L_m : \mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1} \to \mathbb{C}$ *tal que*

1. $L_m \in \mathcal{H}_{(l,l')}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1})$.
2. $L_m(A \cdot Z) = L_n(Z) \quad (\forall A \in U(n)^{e_n})(Z \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1})$.
3. $L_m(e_n) = 1$.

Irreducibilidad de la representación esférica

Corolario 4.10

Cualquier otra función que satisfaga las condiciones 1 y 2 del Teorema 4.9 debe de ser múltiplo escalar de polinomio encontrado en este teorema. De modo que

$$\dim\left[\mathcal{H}_{(l,l')}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^{n-1})\right]^{F} = 1$$

Teorema 4.11

Sean $l, l' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el espacio $\mathcal{H}_{(l,l')}(\mathbb{C}^n)$ es un subespacio irreducible de la representación cuasi regular de $\mathrm{U}(n)$.

Resultados y conclusiones

- La primera conclusión es que la teoría de EHNR tiene una estrecha conexión con la teoría de representaciones.
- Obtuvimos algunas representaciones unitarias irreducibles de los grupos $\mathrm{SO}(n)$ y $\mathrm{U}(n)$).
- El resultado principal del trabajo de tesis es un criterio para determinar la irreducibilidad de ciertos tipos de representaciones.
- Entregamos un trabajo que puede ser usado como material introductorio a la teoría de representaciones unitarias.

Trabajo a futuro

- Aplicar esta teoría para estudiar operadores de Toeplitz en la esfera.
- Tratar de contextualizar este trabajo dentro de la teoría de pares de Gelfand.

Referencias Bibliográficas I

Atkinson, K. and Han, W. (2012). *Spherical Harmonics and Approximations on the Unit Sphere: An Introduction*. Lecture Notes in Mathematics. Springer.

Bekka, M. B., de la Harpe, P., and Grigorchuk, R. (2003). Irreducibility of unitary group representations and reproducing kernels hilbert spaces. *Expositiones Mathematicae*, 21(2):115–149.

Folland, G. (1994). *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. Studies in Advanced Mathematics. Taylor & Francis.

Sepanski, M. (2007). *Compact Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York.