Simetría y análisis: De grupos de Lie hasta esféricos armónicos

Escritas por:
Roberto García Antonio

Índice general

1 Espacios homogéneos y grupos topológicos

Objetivo: Dar los conceptos básicos de

1. acciones de grupos
2. espacios homogéneos
3. medidas de Haar
4. homeomorfismo modular

El concepto de espacio homogéneo se puede encontrar en diversas áreas de las matemáticas. Desde la geometría diferencial, pasando por la geometría algebraica, hasta en áreas como el análisis armónico, los casos clásicos ($\mathbb{R}, \mathbb{S}^1$) pueden tratarse como ejemplos particulares de análisis armónico en espacios homogéneos y simetricos. Es justo está perspectiva la que nos interesa cubrir en estás notas, aunque se puede tomar desde una perspectiva muy general sobre una familia bastante grandes de grupos como lo son los localmente compactos, deseamos centrarnos en los ejemplos clasicos de grupos en los cuales tenemos grupos de Lie.

1.1 Grupos localmente compactos y grupos de Lie

Podemos empezar el tema desde la perspectiva de grupos topológicos localmente compactos (**LCG**), resulta que los grupos de Lie son casos particulares de este seting.

Definición 1.1.1 (Espacio Localmente Compacto)**.** *Un espacio de Hausdorff X se dice **localmente compacto** si todo punto $x \in X$ posee un entorno que es compacto.*

Equivalentemente, X es localmente compacto si para cada $x \in X$ y cada entorno abierto U de x, existe un conjunto abierto V con clausura compacta tal que:

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

Definición 1.1.2. *Sea $(G, \cdot)$ un grupo. Si τ es una topología sobre G, se dirá que G es un grupo topológico si con la topología τ las siguientes operaciones son continuas*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\to G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \cdot g_2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} i : G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

Definición 1.1.3. *Un **grupo de Lie** G es una variedad diferencial G la cual cuenta con una estructura de grupo $(G, \cdot)$ de tal manera que el producto y la inversión*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\to G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \cdot g_2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} i : G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

sean funciones suaves.

En la definición anterior, basta pedir que el producto sea una función suave para obtener la estructura de grupo de Lie, para una solución parcial de esto vea el Problema 7-3 de [Lee12].

Ejemplo 1. $\mathbb{R}^n$ con la operación dada por la suma sus estructuras topológica y diferencial usual es un grupo de Lie.

Proposición 1.1.4. *El conjunto de matrices invertibles,* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$*, es un grupo de Lie.*

Proposición 1.1.5. *El grupo ortogonal*

$$\mathrm{O}(n) := A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : AA^T = A^T A = I\}$$

y el grupo especial ortogonal

$$\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) : \det A = 1\}$$

son grupos de Lie.

Proposición 1.1.6. *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, y T la transformación lineal asociada a esa matriz, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

- *$A \in \mathrm{O}(n)$,*
- *las filas y columnas de A son ortonormales,*
- *T es una isometría respecto al producto interno usual de $\mathbb{R}^n$,*

Proposición 1.1.7. *El grupo $\mathrm{SO}(n)$ es conexo. Más aún, es la componente conexa de la identidad de $\mathrm{O}(n)$.*

Demostración. La prueba de que el grupo $\mathrm{SO}(n)$ es conexo puede hallarse en [WA67]. El hecho de que sea una componente conexa se sigue del hecho de que $\mathrm{SO}(n)$ es un subgrupo de índice 2 en $\mathrm{O}(n)$ y que la función determinante es continua. ■

Proposición 1.1.8. *Los grupos $\mathrm{O}(n)$ y $\mathrm{SO}(n)$ son compactos.*

Ejemplo 2. Definimos el grupo afin como

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

con la operación de grupo dada por:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, x_1 y_2 + y_1)$$

Este grupo se puede realizar como un grupo de matrices con la siguiente ”*representación*”

$$(x, y) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El elemento inverso es:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/x & -y/x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Medidas de Radon y de Haar

El concepto de medida de Haar nos permitirá conectar nuestros espacios homogéneos con la teoría del análisis funcional y análisis armónico.

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff. Una **medida de Radon** es una medida de Borel en X que es*

- *finita en conjuntos compactos,*
- *regular interna en abiertos y*
- *regular externa en Borelianos.*

Definición 1.2.2. *Sea G un grupo localmente compacto Hausdorff. Una **medida de Haar izquierda** es una medida de Radon μ tal que*

$$\mu(xE) = \mu(E)$$

para cada Boreliano E, y cada $x \in G$.

Ejemplo 3. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es una media de Haar para el grupo $(\mathbb{R}^n, +)$

Ejemplo 4. La medida de Dirac centrada en el origen no es una medida de Haar izquierda para el grupo $(\mathbb{R}^n, +)$.

Dado G un grupo topológico puede suceder que no exista una medida de Haar asociada a dicho grupo; sin embargo, resulta que para grupos localmente compactos las medidas de Haar siempre existen.

Teorema 1.2.3. A Course in Abstract Harmonic Analysis*[Fol94, Teorema 2.10] Cada grupo localmente compacto G tiene una medida de Haar izquierda y esta medida es única salvo un producto por un escalar.*

1.3 Espacios homogéneos y acciones de grupos.

Un espacio homogéneo es un espacio el cual localmente se ve de manera idéntica en cualquier punto. Nos interesa saber qué es un espacio homogéneo, pues sobre estos espacios se llevan a cabo las representaciones que estudiaremos. Hay al menos dos maneras de estudiar espacios homogéneos, una geométrica (variedades homogéneas) y otra en la que sólo nos quedamos en un nivel topológico. Para ambas es necesario contar con el concepto de acción de grupo.

Definición 1.3.1. *Sea G un grupo (no necesariamente topológico) y X un conjunto. Una* ***acción izquierda*** *de G sobre X es una función $\varphi : G \times X \to X$, la cual denotamos por $(g, x) \mapsto g \cdot x$, con las siguientes propiedades:*

- $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x \quad (\forall x \in X) \quad y \quad (\forall g_1, g_2 \in G),$
- $1 \cdot x = x \quad (\forall x \in X).$

Cuando tenemos una acción izquierda de un grupo G sobre un espacio X, diremos que G ***actúa por la izquierda sobre*** *X y lo denotaremos como $G \curvearrowright X$.*

En caso de que G sea un grupo topológico localmente compacto Hausdorff y X un espacio topológico localmente compacto Hausdorff, pediremos además que la función φ sea continua y que

$$\begin{aligned} \varphi_g : X &\to X \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

sea un homeomorfismo para cada $g \in G$

Nos interesa un tipo particular de acciones para poder definir un espacio homogéneo.

Definición 1.3.2. *Sea G un grupo que actúa por la izquierda sobre un espacio X. Diremos que la acción es* ***transitiva*** *si para cualesquiera $x, y \in X$ existe un $g \in G$ tal que*

$$x = g \cdot y.$$

Notemos que en la definición anterior no pedimos que el grupo fuese un grupo de Lie, ni siquiera un grupo topológico. Cuando el grupo G sea un grupo topológico y X sea un espacio topológico, pediremos que la acción sea una función continua. Para el caso de un grupo de Lie G y X una variedad suave, pediremos que la acción sea una función suave entre variedades.

Definición 1.3.3. *Sea G un grupo actuando sobre un espacio X y $w \in X$ fijo. Definimos* ***el grupo de isotropía de w*** *como*

$$G^w = \{g \in G : g \cdot w = w \quad \text{para todo } g \in G\}.$$

Es posible demostrar que G^w en efecto es un grupo, dicho grupo nos será de utilidad más adelante para el resultado principal del trabajo. Ahora ya nos encontramos en condiciones de definir qué es un espacio homogéneo.

Definición 1.3.4. *Un **espacio homogéneo (suave)** es una variedad suave M junto con la acción suave y transitiva de un grupo de Lie G sobre M. Un **espacio homogéneo** es un espacio topológico localmente compacto M junto con la acción transitiva de un grupo topológico localmente compacto G, que cumple con la condición de que M sea homeomorfo a un espacio cociente G/H, con H algún subgrupo cerrado de G.*

Ejemplo 5. La acción del grupo $O(n)$ en S^{n-1}, dada por multiplicación por la izquierda

$$A \cdot x = Ax,$$

es transitiva, puesto que dado un vector x de norma 1, podemos completar a una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ y definir una matriz ortogonal cuyas columnas sean los vectores de esta base, de manera que

$$A \cdot e_n = Ae_n = x.$$

Por lo tanto S^{n-1} es un espacio homogéneo de $O(n)$.

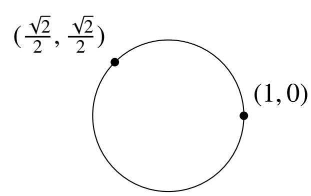
Ejemplo 6. La acción del grupo $SO(n)$ en S^{n-1} dada por multiplicación por la izquierda es nuevamente transitiva; por lo tanto S^{n-1} es un espacio homogéneo de $SO(n)$. La prueba de que la acción es transitiva es análoga a la del ejemplo anterior.

Ejemplo 7. La matriz

$$g = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

es ortogonal. Veamos que para un $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tenemos

$$g \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xcos(\theta) - ysen(\theta) \\ xsen(\theta) + ycos(\theta) \end{bmatrix}.$$



Ejemplo 8. El grupo $SL(2, \mathbb{R})$ actúa suavemente sobre el semi-plano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, por medio de transformaciones de Möbius, es decir,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Esta acción es transitiva, pues, dado un complejo $z = x + iy \in \mathbb{H}$, consideramos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{bmatrix}$$

la cual cumple que $A \cdot i = z$. Por lo tanto, la acción es transitiva y el semi-plano superior es un espacio homogéneo de $SL(2, \mathbb{R})$.

El siguiente teorema nos da una manera de construir espacios homogéneos.

Teorema 1.3.5. *[Lee12, Teorema 21.17] Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado de G. El espacio cociente G/H es una variedad topológica y tiene una única estructura suave tal que la*

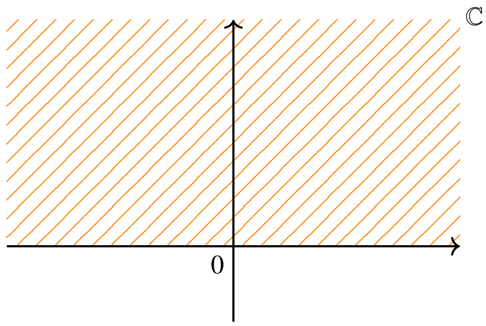


Figura 1.1: Cartesian plane with shaded upper area and diagonal lines.

función cociente

$$\begin{aligned} \pi : G &\to G/H \\ g &\mapsto gH \end{aligned}$$

es una submersión suave. La acción izquierda dada por

$$g_1 \cdot (g_2 H) = (g_1 g_2) \cdot H$$

vuelve al espacio G/H es un espacio homogéneo.

El teorema principal de espacios homogéneos nos dice que un espacio homogéneo puede ser identificado con un cociente de grupos de Lie.

Teorema 1.3.6. *[Lee12, Teorema 21.18] Sea G un grupo de Lie, M un espacio homogéneo de G y $p \in M$. El grupo de isotropía de G, G_p, es un grupo cerrado de G y además la transformación*

$$\begin{aligned} F : G/G_p &\to M \\ gG_p &\mapsto g \cdot p \end{aligned}$$

es un difeomorfismo.

Notemos que con este teorema podemos expresar a S^{n-1} como cociente de grupos de Lie.

Proposición 1.3.7. *Consideremos S^{n-1} y $\mathrm{SO}(n) \curvearrowright S^{n-1}$ actuando por multiplicación por la izquierda. El grupo de isotropía de $e_n = (0, \cdots, 1)$ es isomorfo a $\mathrm{SO}(n-1)$ y por lo tanto*

$$S^{n-1} \cong \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) \cong \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1).$$

Demostración. Es posible demostrar usando la Proposición 1.1.6 que

$$\mathrm{SO}(n)_{e_n} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in \mathrm{SO}(n-1) \right\} \cong \mathrm{SO}(n-1).$$

La igualdad $Ae_n = e_n$ implica que la última columna de A debe ser e_n. Usando la ortogonalidad de las filas, tenemos que la última fila debe ser $e_n^T = (0, \cdots, 1)$ y que el resto es una matriz ortogonal de tamaño $n-1$. Análogamente, se demuestra que

$$\mathrm{O}(n)_{e_n} \cong \mathrm{O}(n-1). \blacksquare$$

1.4 Funciones modulares

Dado un espacio homogéneo G/H, con G grupo localmente compacto, nos interesa “heredar” la medida de Haar de G al espacio homogéneo. Las condiciones para que esto pase se expresa en términos de funciones modulares.

Definición 1.4.1 (Función modular). *Sea G un grupo localmente compacto con medida de Haar izquierda λ. Para cada $x \in X$ se define la función*

$$\lambda_x(E) = \lambda(Ex).$$

Esta es una nueva medida de Haar, ya que $y(Ex) = (yE)x$. Por la unicidad de la medida de Haar (Teorema 1.2.3), existe un número $\Delta(x) > 0$ tal que $\lambda_x = \Delta(x)\lambda$. La función

$$\begin{aligned} \Delta : G &\to R^+ \\ x &\mapsto \Delta(x) \end{aligned}$$

se llama la función modular de G.

La función modular esencialmente mide qué tan lejos está la medida de haar izquierda de ser una medida de Haar derecha.

Proposición 1.4.2. *Si K es un subgrupo compacto de G entonces $\Delta_K \equiv 1$. Donde Δ_K representa la medida de Haar del grupo K*

Teorema 1.4.3. *[Fol94, Teorema 2.51] Sea G un grupo localmente compacto Hausdorff y H un subgrupo cerrado de G. Existe una medida de Radon $G-$invariante μ en G/H si y solo si $\Delta_G|_H = \Delta_H$. Además, esta medida es única salvo multiplicación por un escalar.*

Un corolario de este teorema es el siguiente.

Proposición 1.4.4. *Si H es compacto, G/H tiene una medida de Radon G-invariante.*

Aunque este ultimo resultado se puede obtener de una manera mucho mas sencilla, pero prefiero usar este teorema como excusa para presentar el morfismo modular.

Notemos que, en particular, esto implica que existen medidas invariantes bajo la acción del grupo $\mathrm{SO}(n+1)$ en $\mathbb{S}^n$ y para la acción del grupo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ en el semiplano superior.

2 Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Objetivos:

1. Definir el concepto de *RKHS*
2. dar las propiedades reproductivas buenas
3. dar 2 ejemplos concretos, de estos ejemplos surgen algunas funciones especiales

Como veremos más adelante, el problema de demostrar que una representación de un grupo G sobre un espacio vectorial V es irreducible no es sencillo. Sin embargo, para ciertos tipos de espacios vectoriales, existen condiciones muy concretas que garantizan que dicha representación es irreducible. Un ejemplo de estos espacios son los **espacios de Hilbert con núcleo reproductor**.

2.1 Definición y ejemplos

Definición 2.1.1. *Sea X un conjunto no vacío. Denotemos por $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ al espacio de funciones de X en $\mathbb{C}$. Diremos que un espacio de Hilbert $\mathscr{H} \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ es un* ***espacio de Hilbert con núcleo reproductor (EHNR)*** *si para cada $x_0 \in X$, el funcional de evaluación en x_0*

$$\begin{aligned} F_{x_0} : \mathscr{H} &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(x_0) \end{aligned}$$

es acotado.

Supongamos que $\mathscr{H} \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ es un EHNR, tomando $y \in X$ consideremos el funcional de evaluación en el punto $y \in X$:,

$$\begin{aligned} F_y : &\mathscr{H} \to \mathbb{C} \\ &f \mapsto f(y). \end{aligned}$$

Por el Teorema de representación de Riesz, existe un vector $k_y \in \mathscr{H} \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ tal que

$$F_y(f) = \langle f, k_y \rangle \quad \text{para todo } f \in \mathscr{H}.$$

Definimos el **núcleo reproductor** de $\mathscr{H}$ como la función

$$\begin{aligned} k : X \times X &\to \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto k(x, y) = k_y(x). \end{aligned}$$

Ejemplo 9. Tomando $X = \{1, 2 \cdots n\}$ identificamos $\mathcal{F}(\{1, \cdots, n\}, \mathbb{C})$ con $\mathbb{C}^n$. Sea $\mathscr{H} \subseteq \mathbb{C}^n$ arbitrario, $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor, puesto que todo funcional lineal en $\mathbb{C}^n$ es acotado. En particular, para $j \in X$ el funcional

$$F_j(x) = F_j((x_1, \cdots x_n)) = x_j$$

es acotado, desde luego $F_1, \cdots, F_n$ es la base dual de la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Además, notemos que

$$F_j(z) = \langle z, e_j \rangle.$$

Los vectores de $\mathscr{H} = \mathbb{C}^n$ son funciones definidas en el conjunto $X = \{1, ..., n\}$. Tomamos $j \in X$ y el funcional

$$F_j(z) = z_j = \langle z, e_j \rangle,$$

entonces $k_j = e_j$; por lo tanto, el núcleo reproductor es

$$\begin{aligned} k : X \times X &\to \mathbb{C} \\ (i, j) &\mapsto k_j(i) = e_j(i) = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Ejemplo 10. Sea $X = \mathbb{N}$ y dμ la medida de conteo. Consideremos el espacio de Hilbert

$$\mathscr{H} = L^2(X, \mathrm{d}\mu) = \ell^2(X) \subseteq \mathscr{F}(X, \mathbb{C}),$$

es decir, el espacio de sucesiones cuadrado sumables; esto es, el espacio de sucesiones

$$X = (x_n)_{n=1}^{\infty} \quad \text{tales que} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

El producto interno está dado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$ definimos el vector $e_j \in \ell^2(\mathbb{N})$ como

$$e_j(i) = \delta_{ij}.$$

En el espacio $\mathscr{H}$, el funcional evaluación en j toma la forma

$$\begin{aligned} F_j : \ell^2(\mathbb{N}) &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto x(j) = x_j. \end{aligned}$$

Veamos que

$$F_j(x) = x_j = \langle x, e_j \rangle.$$

Por la unicidad en el Teorema de representación de Riesz, se tiene que $K_j(\cdot) = e_j(\cdot)$. Así, el núcleo reproductor es

$$\begin{aligned} K(i, j) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases} \\ &= e_j(i). \end{aligned}$$

Ejemplo 11. Consideremos $D \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo distinto de $\mathbb{C}$. Tenemos el espacio de funciones holomorfas sobre D al cual denotamos por $\mathbb{H}(D)$. Tomando una medida dμ en D que puede ser, por ejemplo, la medida de Lebesgue dx dy, definimos el **espacio de bergman** como la intersección

$$\mathbb{H}(D) \cap L^2(D, \mathrm{d}\mu).$$

El caso clásico es cuando la medida dμ es la medida de Lebesgue, en este caso el espacio de bergman es un EHNR, el núcleo reproductor es llamado **núcleo de bergman** y es una función $K : D \times D \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \int_D f(z) K(z, w) \mathrm{d}\mu(w) = \langle f, K_z \rangle,$$

donde $K_z(w) = K(w, z)$para todo $w \in D$.

Si dμ es la medida de Lebesgue y D es el disco unitario, podemos expresar explícitamente el núcleo reproductor como

$$K(z, w) = -\frac{1}{\pi(1 - z\overline{w})^2}.$$

No todo espacio L^2 es un EHNR, para esto consideremos el siguiente contraejemplo.

Definición 2.1.2. *Un **multi-índice** con n componentes es un elemento de $\mathbb{Z}_+^n$, donde $\mathbb{Z}_+$ denota a los* *enteros no negativos. Sea $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ un multi-índice. La **longitud** o **altura** del multi-índice la definimos como el número*

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Denotaremos por $\alpha!$ al número $\alpha_1! \cdots \alpha_n!$

Dado $x \in \mathbb{R}^n$ y un multi-índice α con n componentes y altura m, decimos que

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

*es el **monomio** de grado m en n variables. Finalmente, definimos el operador diferencial ∂^α por medio de la fórmula*

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial^{\alpha_1} x_1} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial^{\alpha_n} x_n}.$$

2.1.1 Algunos espacios de polinomios

Definición 2.1.3. *Denotamos por $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ al conjunto de polinomios homogéneos de grado m, en n variables reales, con coeficientes complejos, esto es, el espacio de polinomios de la forma*

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha \quad a_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Denotamos por $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de polinomios armónicos homogéneos, es decir, los polinomios P tales que $\Delta P = 0$, donde Δ es el operador Laplaciano.

Notemos el comportamiento de estos polinomios con respecto a restricciones.

Proposición 2.1.4. *La función de restricción*

$$\begin{aligned} R : \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) &\to \mathcal{P}_m(S^{n-1}) \\ p &\mapsto p|_{S^{n-1}} \end{aligned}$$

donde $\mathcal{P}_m(S^{n-1}) = \{p|_{S^{n-1}} : p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)\}$, es inyectivo.

Demostración. Sean $p, q \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ tales que coincidan en todos los vectores de S^{n-1}, entonces para todo $x \neq 0$ tenemos que

$$p(x) = p\left(||x|| \cdot \frac{x}{||x||}\right) = ||x||^m p\left(\frac{x}{||x||}\right) = ||x||^m q\left(\frac{x}{||x||}\right) = q(x).$$

En el caso $x = 0$, la proposición es trivial. ■

Análogamente definimos

$$\mathcal{H}_m(S^{n-1}) = \{p|_{S^{n-1}} : p \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)\},$$

este conjunto es de importancia en varias áreas de las matemáticas y la física.

Definición 2.1.5 (Esféricos armónicos). *Llamaremos esféricos armónicos de grado m a los elementos del conjunto $\mathcal{H}_m(S^{n-1})$.*

Nuevamente el operador restricción es inyectivo, de modo que podemos identificar ambos espacios.

Definición 2.1.6 (Representación cuasi-regular.). *Los grupos $\mathrm{O}(n)$ y $\mathrm{SO}(n)$ actúan en $\mathbb{R}^n$ y S^{n-1} por medio de multiplicación izquierda. Esta acción genera representaciones de dichos grupos sobre los espacios de funciones $\mathbb{C}^{\mathbb{R}^n} = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\}$ y $\mathbb{C}^{S^{n-1}} = \{f : S^{n-1} \to \mathbb{C}\}$, por medio de*

$$\pi(g)f(x) = f(g^{-1} \cdot x).$$

*A esta representación la llamaremos **representación cuasi-regular** de $\mathrm{O}(n)$ en $\mathbb{C}^{\mathbb{R}^n}$ y de $\mathrm{SO}(n)$ en $\mathbb{C}^{S^{n-1}}$.*

Los espacios de polinomios anteriormente definidos son subespacios de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}^n}$, y sus restricciones a la esfera son subespacios de $\mathbb{C}^{S^{n-1}}$. Más aún, son subespacios invariantes de la representación cuasi-regular.

Proposición 2.1.7. *El espacio $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio invariante de la representación cuasi-regular de* $\mathrm{O}(n)$ *en* $\mathbb{C}^{\mathbb{R}^n}$.

Demostración. Por la linealidad de la representación basta demostrar la invarianza solamente para los monomios x^{α_0}, con $|\alpha_0| = m$. Primero veamos que para cualquier matriz $g \in \mathrm{O}(n)$ se tiene que

$$g^{-1}x = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

de modo que

$$\pi(g)x^{\alpha_0}(x) = x^{\alpha_0}(g^{-1}x) = y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n} = \left(\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\sum_{i=1}^n a_{ni}x_i\right)^{\alpha_n}. \tag{2.1}$$

Por la fórmula multinomial tenemos que

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)^{\alpha_i} = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\beta| = \alpha_i}} \frac{\alpha_i}{\beta!} x^\beta \quad 1 \leq i \leq n,$$

de modo que cada factor en el lado derecho de 2.1 es combinación lineal de polinomios homogéneos de grado α_i, $1 \leq i \leq n$. Por la definición del producto de polinomios tendremos que 2.1 es combinación lineal de monomios de grado $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m$ y por lo tanto los monomios son invariantes bajo la acción del grupo $\mathrm{O}(n)$.■

Proposición 2.1.8. *El espacio $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio invariante de la representación cuasi-regular de* $\mathrm{O}(n)$ *en* $\mathbb{C}^{\mathbb{R}^n}$.

Demostración. Sea $g = [g_{ij}]_{ij} \in O(n)$. Sabemos que por la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f \circ L_g) = \sum_{i=1}^n \partial_i f \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} y_i = \sum_{i=1}^n \partial_i f \cdot g_{ij},$$

donde $y_i = \sum_{k=1}^n g_{ik}x_k$. Volviendo a derivar tenemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(f \circ L_g) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^n \partial_i f g_{ij}\right) = \sum_{i=1}^n g_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}(\partial_i f) = \sum_{i=1}^n g_{ij} \sum_{k=1}^n \partial_k \partial_i f g_{kj} = \sum_{i,k=1}^n g_{ij} g_{kj} \partial_k \partial_i f.$$

Ahora calculando el Laplaciano tenemos que

$$\Delta(f \circ L_g) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(f \circ L_g) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i,k=1}^n g_{ij} g_{kj} \partial_k \partial_i f\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i,k=1}^n g_{ij} g_{jk}^T \partial_k \partial_i f\right).$$

Del hecho de que g sea ortogonal tenemos que $\sum_{j=1}^n g_{ij} g_{jk}^T = \delta_{ik}$, pues esta suma es la entrada (i, k) del producto $gg^T = Id_n$. Del comentario anterior tenemos que

$$\Delta(f \circ L_g) = \sum_{i,k=1}^n \delta_{ik} \partial_k \partial_i f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f = 0.■$$

Se cumplen resultados análogos para los espacios $\mathcal{H}_m(S^{n-1})$ y $\mathcal{P}_m(S^{n-1})$.

Si denotamos por ρ_m y π_m a las representaciones cuasi-regulares del grupo SO(n) sobre $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{P}_m(S^{n-1})$, respectivamente, tenemos que el operador de restricción es un operador de entrelace.

Proposición 2.1.9. *El operador restricción, R, es un operador de entrelace.*

Demostración. Veamos que para cada $g \in G$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\rho_m(g)"] \arrow[d, "R"] & \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "R"] \\ \mathcal{P}_m(S^{n-1}) \arrow[r, "\pi_m(g)"] & \mathcal{P}_m(S^{n-1}), \end{tikzcd}$$

pues para cada $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$p|_{S^{n-1}} \circ L_{g^{-1}} = (p \circ L_{g^{-1}})|_{S^{n-1}}. \blacksquare$$

En particular, esto demuestra que estas representaciones son equivalentes. Una vez establecida la equivalencia de estas dos representaciones, basta probar la irreducibilidad de alguna de ellas para establecer la irreducibilidad de ambas. Esto lo haremos usando el Lema 4.0.1, pero para esto necesitamos definir productos internos adecuados sobre nuestros espacios de polinomios. Hay dos posibles productos internos para el espacio de esféricos armónicos, ambos con sus ventajas. Empezaremos definiendo el producto de la esfera.

Definición 2.1.10 (Producto interno de la esfera). *Sea $d\sigma$ la medida de probabilidad en S^{n-1} invariante respecto a* SO(n) *, i.e,*

$$d\sigma(S^{n-1}) = 1.$$

Dicha medida existe por la Proposición 1.4.4. Respecto a esta medida, definimos el producto interno de la esfera como

$$\langle f, g\rangle_{S^{n-1}} = \int_{S^{n-1}} f\overline{g}d\sigma.$$

Notemos que este es el producto interno de $L^2(\mathbb{S}^{n-1}, d\sigma)$. Sabemos que por la continuidad de los polinomios y por tener soporte compacto, se tiene que

$$\mathcal{H}_m(S^{n-1}) \subset L^2(S^{n-1}, d\sigma),$$

más aún, al ser de dimensión finita, es un EHNR.

Proposición 2.1.11. *La representación cuasi-regular de* SO(n) *sobre $\mathcal{H}_m(S^{n-1})$ con el producto interno de la esfera es unitaria.*

Demostración. Al ser $\mathcal{H}_m(S^{n-1})$ un espacio de Hilbert de dimensión finita, basta probar que $\pi(g)$ conserva el producto interno $\forall g \in G$. Sean $p, q \in \mathcal{H}_m(S^{n-1})$, veamos que

$$\begin{aligned} \langle \pi(g)p, \pi(g)q\rangle_{S^{n-1}} &= \int_{S^{n-1}} \pi(g)p(x)\overline{\pi(g)p(x)}d\sigma(x) \\ &= \int_{S^{n-1}} \pi(g)p\overline{q}(x)d\sigma(x) \\ &= \int_{S^{n-1}} p(x)\overline{q(x)}d\sigma(x) = \langle p, q\rangle_{S^{n-1}}, \end{aligned}$$

lo que demuestra que $\pi(g)$ es una isometría y, por lo tanto, un operador unitario. $\blacksquare$

Al ser $\mathcal{H}_m(S^{n-1})$ un subespacio vectorial de dimensión finita de $L^2(S^{n-1}, d\sigma)$, el siguiente resultado es evidente.

Proposición 2.1.12. *El espacio $\mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})$ con el producto interno de la esfera es un EHNR.*

También es posible definir un producto interno conocido como **producto de Fischer**. Con este producto interno, el espacio $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ se vuelve un EHNR.

Definición 2.1.13. *Dados $p, q \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ con*

$$p = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha,$$

*definimos el producto de **Fisher-Bomberri** como*

$$\langle p, q\rangle_F = p(\partial)(\overline{q}),$$

donde $p(\partial)$ o ∂_p es la notación para el operador diferencial

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \partial^\alpha.$$

Esto sigue siendo un producto interno cuando se restringe a los armónicos homogéneos. Además, tiene la ventaja de que es más sencillo de calcular que el producto de la esfera.

Lema 2.1.14. *Sean $p, q \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ con*

$$p = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha \quad y \quad q = \sum_{|\beta|=m} b_\beta x^\beta,$$

entonces

$$\langle p, q\rangle_F = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \overline{b_\alpha} \alpha! \tag{2.2}$$

Demostración. Primero notemos que

$$\partial^\alpha(x^\beta) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial^{\alpha_1} x_1} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial^{\alpha_n} x_n}(x^\beta) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha \neq \beta \\ \alpha! & \text{si} \quad \alpha = \beta. \end{cases}$$

Por la definición del producto de Fisher y la linealidad de los operadores diferenciales, tenemos que

$$\langle p, q\rangle_F = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \partial^\alpha \left(\sum_{|\beta|=m} \overline{b_\beta x^\beta} \right) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \sum_{|\beta|=m} \overline{b_\beta} \partial^\alpha(x^\beta) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \overline{b_\alpha} \alpha! \blacksquare$$

Proposición 2.1.15. *El producto de Fisher-Bomberri es un producto interno en el espacio $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ y en el espacio $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Se sigue directamente de (2.2) y la positividad de los coeficientes de la suma.$\blacksquare$

En particular, nos interesa la restricción de este producto interno al espacio $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.1.16. *Con el producto de Fisher, $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ es un EHNR.*

Esto se sigue por ser $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ un espacio vectorial de dimensión finita. Demostraremos que con este producto la representación cuasi-regular se vuelve unitaria.

Teorema 2.1.17. *El producto de Fisher en $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ es* SO(n)*-invariante.*

Demostración. Para $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ y $g \in \mathrm{SO}(n)$ se fija la notación

$$(g \cdot f)(x) = (\rho(g) \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x).$$

Dado un polinomio

$$p(x) = \sum_{|\alpha|} a_\alpha x^\alpha$$

establecemos la notación

$$p(\partial) = \partial_p = \sum_{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha.$$

Cada matriz $g \in \mathrm{SO}(n)$ la expresamos en términos de sus entradas y filas, lo mismo aplica a la matriz $A = g^{-1}$, entonces

$$g = (g_{jk})_{j,k=\overline{1,n}} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

con g_i la i-esima fila de la matriz g. Análogamente

$$g^{-1} = A = (a_{jk}) = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

con A_i la i-ésima fila de la matriz A.

Para $g \in \mathrm{SO}(n)$ y $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ suave, se cumple que

$$\partial_{x_k}(g \cdot f) = g \cdot \partial_{\langle g_k, x\rangle} f = g \cdot \partial_{g^{-1}\cdot x_k} f,$$

donde

$$\langle g_k, x\rangle = g_{k,1}x_1 + \cdots + g_{k,n}x_n.$$

Luego

$$\partial^\alpha(g \cdot f) = g \cdot (\partial^{\alpha_1}_{\langle g_1, x\rangle} \cdots \partial^{\alpha_n}_{\langle g_n, x\rangle} f),$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. En efecto, calculamos

$$\begin{aligned}
\partial_{x_k}((g \cdot f)(x)) &= \frac{\partial}{\partial x_k}(f(g^{-1} \cdot x)), \quad \text{con} \quad g^{-1} \cdot x = \begin{pmatrix} A_1 x \\ \vdots \\ A_n x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(g^{-1} \cdot x) \frac{\partial y_j}{\partial x_k}, \quad y_j = a_{j,1}x_1 + \cdots a_{j,n}x_n \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(g^{-1} \cdot x) a_{jk}, \quad a_{jk} = (g^{-1})_{jk} = (g^T)_{j,k} = g_{k,j} \\
&= \sum_{j=1}^n g_{kj} \frac{\partial f}{\partial x_j}(g^{-1} \cdot x),
\end{aligned}$$

esto se reescribe como

$$\partial_{x_k}(g \cdot f)(x) = (g \cdot \partial_{\langle g_k, x\rangle} f)(x)$$

o bien

$$\partial_{x_k}(g \cdot f) = g \cdot \partial_{\langle g_k, x\rangle} f.$$

Volviendo a aplicar en operador diferencial ∂_{x_k} al resultado anterior tenemos que

$$\partial^2_{x_k}(g \cdot f) = \partial_{x_k}[\partial_{x_k}(g \cdot f)] = \partial_{x_k}[g \cdot \partial_{\langle g_k, x\rangle} f] = g \cdot \partial_{x_k}[\partial_{x_k} f] = g \cdot \partial^2_{\langle g_k, x\rangle} f.$$

Continuando este proceso tenemos que para $l \in \mathbb{N}$,

$$\partial^l_{x_k}(g \cdot f) = g \cdot \partial^l_{\langle g_k, x\rangle} f,$$

por lo tanto,

$$\partial^\alpha(g \cdot f) = \partial^{\alpha_1}_{x_1} \cdots \partial^{\alpha_n}_{x_n}(g \cdot f) = g \cdot (\partial^{\alpha_1}_{\langle g_1, x\rangle} \cdots \partial^{\alpha_1}_{\langle g_n, x\rangle} f.$$

Notemos que la expresión del lado derecho es precisamente

$$\partial_{g^{-1}\cdot x^{\alpha}} f.$$

Ahora por la linealidad de la representación y por ser un producto interno basta demostrar la invarianza solo para monomios.

$$\langle g \cdot x^{\alpha}, g \cdot x^{\beta} \rangle = \partial^{\alpha}(g^{-1} \cdot (g \cdot x^{\beta})) = g^{-1} \cdot \partial_{g \cdot x^{\alpha}}(g \cdot x^{\beta}) = g \cdot \langle g \cdot x^{\alpha}, g \cdot x^{\beta} \rangle = \langle x^{\alpha}, x^{\beta} \rangle. \blacksquare$$

Ahora que contamos con dos productos internos, cada uno de los cuales vuelve a los espacios $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{H}_m(S^{n-1})$ EHNR, podemos verificar la irreducibilidad de las representaciones usando el Teorema 4.0.1 en cualquiera de estos dos espacios de Hilbert. Antes de terminar, veamos que con el producto interno de Fisher es fácil demostrar que el espacio $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ no es irreducible.

Proposición 2.1.18. *Para $n \geq 2$ se tiene que el subespacio*

$$| \cdot |^2 \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$$

es un subespacio propio $\mathrm{O}(n)$*-invariante de* $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sean $h_{m-2} \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathrm{O}(n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios. Ya que g es una matriz ortogonal y $\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ es $\mathrm{O}(n)$-invariante se cumple que

$$\begin{aligned} \rho_m(g)(| \cdot |^2 h_{m-2})(x) &= |g^{-1}x|^2 h_{m-2}(g^{-1}x) \\ &= |x|^2 \rho_{m-2}(g)(h_{m-2})(x) = |x|^2 s_{m-2}(x), \end{aligned}$$

donde $s_{m-2} \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, concluimos que $\rho_m(g)(| \cdot |^2 h_{m-2}) \in | \cdot |^2 \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$. $\blacksquare$

También tenemos la siguiente descomposición en suma directa ortogonal:

Proposición 2.1.19. $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \bigoplus | \cdot |^2 \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Con el producto interno de Fisher para $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ demostramos que

$$\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \perp | \cdot |^2 \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n).$$

Primero probemos la contención $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \subset (| \cdot |^2 \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n))^{\perp}$. Sea $h \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ arbitrario. Para cada $p_{m-2} \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$\langle | \cdot |^2 p_{m-2}, h \rangle_F = p_{m-2}(\partial)(|\partial|^2 \overline{h}) = p_{m-2}(\partial)(\Delta \overline{h}) = 0,$$

luego $h \in (| \cdot |^2 \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n))^{\perp}$. Ahora probemos la otra contención. Sea $h \in (| \cdot |^2 \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n))^{\perp}$ arbitrario. Para cada $p_{m-2} \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$0 = \langle | \cdot |^2 p_{m-2}, h \rangle_F = p_{m-2}(\partial)(\Delta \overline{h}) = \langle p_{m-2}, \Delta h \rangle_F,$$

donde el último producto interno es el producto interno de Fisher en el espacio $\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$. Como $\Delta h \in \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$ y p_{m-2} es arbitrario tenemos que $\Delta h = 0$. $\blacksquare$

Ejemplo 12. El espacio de Hilbert $L^2([0,1], d\mu)$ no es un EHNR, primeramente porque no es un espacio de Hilbert de funciones; sus elementos son clases de equivalencia de funciones; además, suponiendo que hubiera una forma de escoger un representante de cada clase, de tal modo que el funcional evaluación esté bien definido, es posible demostrar que este no sería continuo.

2.2 Resultados principales

El resultado principal que nos permite conectar la teoría de representaciones y la teoría de **EHNR**, reside en las propiedades reproductivas de este último, así como en el hecho de que estos espacios están determinados de manera única por su núcleo (Kernel).

Proposición 2.2.1. *Sea $\mathscr{H}$ un EHNR y $K(\cdot,\cdot)$ el núcleo reproductor. Para $x, y \in X$, el núcleo satisface*

1. $K_y := K(\cdot, y) \in \mathscr{H}$,
2. $\overline{K(x,y)} = K(y,x) = \langle K_x, K_y \rangle$,
3. $K(y,y) = \|K_y\|^2 = \|K(\cdot,y)\|^2$.

Demostración.

1. Dado $y \in X$, se tiene que $K(\cdot, y) = K_y \in \mathscr{H}$ por el Teorema de representación de Riesz.
2. $K(x,y) = K_y(x) = F_x(K_y) = \langle K_y, K_x \rangle = \overline{\langle K_x, K_y \rangle} = \overline{K_x(y)} = \overline{K(y,x)}$.
3. $\|K_y\|^2 = \langle K_y, K_y \rangle = K_y(y) = K(y,y)$.

A partir de los núcleos podemos obtener un conjunto total para el espacio de Hilbert.

Teorema 2.2.2. *Sea $\mathscr{H}$ un **EHNR** sobre el conjunto X y $K : X \times X \to \mathbb{C}$ el núcleo reproductor, entonces la colección*

$$\{K_y(\cdot) = K(\cdot, y) : y \in X\}$$

genera un subespacio denso en $\mathscr{H}$.

Demostración. Sea $H_0 = \operatorname{span}\{K_y(\cdot)\}_{y \in X}$. Se afirma que $\overline{H_0} = \mathscr{H}$. Recordemos que

$$(\overline{H_0})^{\perp} = H_0^{\perp\perp\perp} = \overline{H_0^{\perp}} = H_0^{\perp},$$

por lo que basta probar que $H_0^{\perp} = \{0\}$. Sea $f \in H_0^{\perp}$, se cumple que para todo $y \in X$

$$f(y) = \langle f, K_y \rangle = 0 \quad \text{para todo } y \in X$$

y por lo tanto $f \equiv 0$.■

Una de las propiedades que tenemos en EHNR es que la convergencia en el espacio de Hilbert implica convergencia puntual.

Lema 2.2.3. *Sea $\mathscr{H}$ un EHNR sobre X. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f en $\mathscr{H}$, entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f, es decir, para cada $x \in X$ se tiene que*

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \to f(x).$$

Demostración. Sea $x \in X$, notemos que

$$|f(x) - f_n(x)| = |F_x(f - f_n)| = |\langle f - f_n, K_x \rangle| \leq \|f - f_n\| \|K_x\|$$

por la definición de núcleo y por la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Dado $\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{1+\|K_x\|}$, existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que $\|f_n - f\| < \epsilon_0$ para todo $n > N$. Por lo tanto,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{1 + \|K_x\|} \cdot \|K_x\| < \epsilon.$$

El siguiente resultado es una de las características destacables de la teoría de EHNR.

Teorema 2.2.4. *Sea $\mathscr{H}$ un EHNR y $\{e_i\}_{i \in I}$ una base ortogonal para $\mathscr{H}$. Entonces*

$$K(x,y) = \sum_{i \in I} e_i(x)\overline{e_i(y)},$$

donde la convergencia es convergencia puntual. También se cumple que

$$K_y = \sum_{i \in I} e_i \overline{e_i(y)},$$

donde la convergencia se da en la métrica de $\mathscr{H}$.

Demostración. Por ser una base ortonormal tenemos que

$$K(\cdot, y) = K_y = \sum_{j\in J} \langle K_y, e_j\rangle e_j = \sum_{j\in J} \overline{e_j}(y) e_j.$$

Como la convergencia en un EHNR implica convergencia puntual tenemos que

$$K(x, y) = K_y = \sum_{j\in J} \langle K_y, e_j\rangle e_j(x) = \sum_{j\in J} \overline{e_j}(y) e_j(x).\blacksquare$$

Teorema 2.2.5. *Sea $\mathscr{H}$ un EHNR y $\mathscr{H}_0 \subseteq \mathscr{H}$ un subespacio cerrado. Se cumple que $\mathscr{H}_0$ es un EHNR y que el núcleo de $\mathscr{H}_0$, denotado por Φ, es*

$$\Phi(x, y) = \langle P_0 K_y, K_x\rangle \quad \textit{para todo } x, y \in X,$$

donde $P_0 : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ es la proyección ortogonal de $\mathscr{H}$ sobre $\mathscr{H}_0$.

Demostración. Para cada $x \in X$, el operador evaluación

$$\mathring{F}_x : \mathscr{H}_0 \to \mathbb{C}$$

es la restricción a $\mathscr{H}_0$ del operador evaluación F_x, el cual por hipótesis es continuo. Por ser $\mathscr{H}_0$ cerrado, el operador $\mathring{F}_x$ es continuo $\forall x \in X$; por lo tanto, $\mathscr{H}_0$ es un EHNR.

Ahora sea Φ el núcleo reproductor de $\mathscr{H}_0$. Notemos que

$$\mathring{F}_x(f) = \langle f, \Phi_x\rangle \quad \text{para todo } f \in \mathscr{H}_0 \text{ para todo } x \in X.$$

Por otro lado, para cada $f \in \mathscr{H}_0$ y $x \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned}\mathring{F}_x(f) &= F_x(f) = \langle f, K_x\rangle \\ &= \langle P_0 f, K_x\rangle = \langle f, P_0^* K_x\rangle = \langle f, P_0 K_x\rangle,\end{aligned}$$

pues P_0 es Hermitiano por ser una proyección ortogonal. Por la unicidad del Teorema de representación de Riesz-Frechet tenemos que

$$\Phi_x = P_0 K_x \quad \text{para todo } x \in X,$$

de donde se concluye que

$$\Phi(x, y) = \langle P_0 K_y, K_x\rangle.\blacksquare$$

Este último resultado es fundamental para la demostración del resultado principal de la siguiente sección.

Teorema 2.2.6. *Sean $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ espacios de Hilbert con núcleo reproductor sobre X, con productos internos $\langle,\rangle_1$ y $\langle,\rangle_2$ respectivamente, sean $K_1, K_2 : X\times X \to \mathbb{C}$ los respectivos núcleos reproductores, si*

$$K_1(x, y) = K_2(x, y) \quad \textit{para todo } x, y \in X,$$

entonces $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2$ y $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$.

Demostración. Definimos $K := K_1 = K_2$. Consideremos los espacios

$$W_i = \operatorname{span}\{K_{i_y}\}_{y\in X} \quad i = 1, 2.$$

Tenemos que $W_1 = W_2$. Además $\mathscr{H}_1 = \overline{W_1}$ y $\mathscr{H}_2 = \overline{W_2}$ con las respectivas topologías de los espacios $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$. Probaremos que ambos espacios tienen la misma norma y por lo tanto ambas cerraduras son idénticas; concluiremos que $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2$.

Notemos que cualquier $f \in W_1$ se expresa como

$$f = \sum_{j=1}^{m} a_j K_{y_j},$$

por lo que,

$$\|f\|_1^2 = \langle f, f\rangle_1 = \left\langle \sum_{j=1}^{m} a_j K_{y_j}, \sum_{k=1}^{m} a_k K_{y_k} \right\rangle_1 = \sum_{j,k=1}^{m} a_j \overline{a_k} K(y_k, y_j).$$

De manera análoga, tenemos

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j,k=1}^{m} a_j \overline{a_k} K(y_k, y_j).$$

De modo que $\|f\|_1 = \|f\|_2$ para todo $f \in W_1 = W_2$.

Ahora bien, para cada $f \in \mathscr{H}_1$ existe una sucesión de elementos en W_1, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0.$$

En particular $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en $\|\cdot\|_1$ y, por lo tanto, también en $\|\cdot\|_2$, de modo que existe $g \in \mathscr{H}_2$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|g - f_n\|_2 = 0.$$

Como la convergencia en un EHNR implica convergencia puntual, tenemos que

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad (\forall x \in X),$$

por lo tanto f y g son idénticas.

Finalmente, la continuidad de la norma nos garantiza que

$$\|f\|_1 = \|\lim_{n\to\infty} f_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2. \blacksquare$$

3 Teoría de representaciones básica

Objetivos:

1. Formalizar la acción de un grupo sobre un espacio vectorial, ya sea un espacio de Hilbert o de Banach
2. definir que es una representación unitaria.
3. dar el ejemplo de la representación quasi-regular
4. quizá dar una motivación del estudio de las reps

3.1 Preliminares y representaciones unitarias

Definición 3.1.1. *Sea G un grupo y V un espacio vectorial no nulo sobre un campo $\mathbb{F}$. Una representación de G sobre V es un homomorfismo de grupos*

$$\pi : G \to Aut(V),$$

*donde $Aut(V) = \{T : V \to V : T \text{ es lineal e invertible}\}$. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, diremos que **la representación es de dimensión finita**, en caso contrario diremos que **la representación es dimensión infinita**.*

En el presente trabajo nos centramos en las llamadas **representaciones unitarias**, para esto consideraremos siempre a G como un grupo topológico y $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert. Una **representación unitaria** de G en $\mathscr{H}$ es un homomorfismo de grupos

$$\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H}).$$

Si además el homomorfismo es una función continua cuando $\mathcal{U}(\mathscr{H})$ tiene la topología fuerte de operadores, diremos que la representación es **fuertemente unitaria**.

Debemos de hacer énfasis en que este es solo un tipo de representación, se usa este tipo de representaciones para poder estudiar a los grupos topológicos y sus acciones con la teoria de *análisis funcional*.

Ejemplo 13 (Representación estándar). Sea $G = \mathrm{SO}(n)$. La representación estándar es la representación de G sobre $\mathbb{R}^n$, donde $\pi(g)$ es dada por la multiplicación por la izquierda por la matriz g, es decir,

$$\pi(g)(x) = gx.$$

Ejemplo 14. Consideremos el grupo $\mathbb{R}$ bajo la adición, y al espacio de Hilbert $\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual. Definimos la representación unitaria $\pi : \mathbb{R} \to \mathcal{U}(\mathbb{R}^2)$ mediante

$$\pi(x) = \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 15 (Representación regular). Sea G un grupo compacto y ρ la medida de Haar izquierda asociada al grupo. Se define **la representación regular izquierda** sobre el espacio de Hilbert $L^2(G, \rho)$ mediante traslaciones, es decir,

$$[\pi_L(g)f](h) = L_g f(h) = f(g^{-1}h) \quad (\forall g, h \in G)(\forall f \in L^2(G, \rho)).$$

Esto está bien definido pues dado $f \in L^2(G, \rho)$ tenemos que

$$\int_G |\pi_L(g)f(h)|^2 d\rho(h) = \int_G |L_g f(h)|^2 d\rho(h) \int_G |f(g^{-1}h)|^2 d\rho(h) = \int_G |f(h)|^2 d\rho(h) < \infty$$

por la invarianza de la medida de Haar.

Fijo $g \in G$ tenemos que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f_1, f_2 \in L^2(G,\rho)$ se tiene que

$$L_g(\alpha f_1 + f_2)(h) = \alpha f_1(g^{-1}h) + f_2(g^{-1}h) = \alpha L_g f_1(h) + L_g f_2(h) \quad \text{para todo } h \in G,$$

por lo que $\pi_L(g)$ es una transformación lineal para cada $g \in G$. Además tiene una inversa dada por $\pi_L(g^{-1})$ lo que demuestra que en efecto π_L es una representación. Mas aún, es una representación unitaria.

El siguiente ejemplo cumple un papel medular en la teoría de representaciones, por motivos pedagógicos solo me centrare en el caso de G un grupo de Lie aunque está representación se puede cumplir para el caso de G localmente compacto.

Ejemplo 16 (Representación cuasi-regular)**.** Sea G un grupo de Lie compacto y H un sub grupo cerrado. Sabemos por el Teorema 1.4.4 que el cociente G/H tiene una medida de Haar invariante μ, definimos una acción del grupo G sobre el espacio de Hilbert $L^2(G/H,\mu)$ como sigue

$$\begin{aligned} \pi : G &\to \mathcal{U}(L^2(G/H,\mu)) \\ g &\mapsto L_g \end{aligned}$$

donde $L_g f(xH) = f(gxH)$.

Una manera más sencilla (pero menos elemental) de decir esto es expresar la representación causi-regular como una representación inducida. De manera concreta esta representación es $\text{ind}_H^G(\rho)$ donde ρ es la representación trivial del grupo H en $\mathbb{C}$ (*A Course in Abstract Harmonic Analysis* [Fol94], page 165).

Podemos dar un ejemplo concreto con los espacios homogéneos que ya hemos tratado.

Ejemplo 17. Los grupos $\mathrm{O}(n+1)$ y $\mathrm{SO}(n+1)$ actúan en S^n transitivamente por medio de multiplicación izquierda. De modo que usando la medida invariante podemos definir la representación cuasi-regular de los grupos $\mathrm{O}(n)$ y $\mathrm{SO}(n)$ en $\mathbb{S}^n$

3.2 Representaciones irreducibles.

De manera similar al estudio de operadores buscamos entender una representación por medio de su comportamiento en espacios más pequeños, esto con el propósito de facilitar el estudio de la representación. Esto da lugar al concepto de espacios invariantes de la representación.

Definición 3.2.1. *Sea $\mathcal{M}$ un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $\mathscr{H}_\pi$. Se dirá que $\mathcal{M}$ es invariante para una representación $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H}_\pi)$ o G-invariante si*

$$\pi(x)\mathcal{M} \subset \mathcal{M} \quad \textit{para todo } x \in G,$$

es decir, si es un subespacio invariante del operador $\pi(x)$ para todo $x \in G$.

Sea $\mathcal{M} \neq \{0\}$ subespacio cerrado e invariante para la representación π, la restricción de la representación π a $\mathcal{M}$ denotado por $\pi^{\mathcal{M}}$ es el homomorfismo $\pi^{\mathcal{M}} : G \to \mathcal{U}(\mathcal{M})$ definido mediante

$$\pi^{\mathcal{M}}(g) = \pi(g)|_{\mathcal{M}}.$$

Es evidente que esta restricción es nuevamente una representación.

Sobre el tipo de subespacios invariantes sobre el cual nos centraremos, son los subespacios **irreducibles** de la representación.

Definición 3.2.2. *Sea π una representación de un grupo G sobre un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, la representación se dice **irreducible** si no tiene subespacios cerrados e invariantes distintos de $\{0\}$ Y $\mathscr{H}$.*

4 Representaciones en espacios de G-Hilbert

Objetivos:

1. Definir los G- espacios de Hilbert
2. dar el teorema fuerte que conecta la teoría de *RKHS* y la teoría de representaciones unitarias.
3. definir que es un par de Gelfand
4. definir las funciones esféricas
5. esféricos zonal y algunos polinomios clásicos
6. explicar los teoremas relacionados a este concepto
7. expresar algunos núcleos reproductores en términos de las funciones esféricas (esferico zonal).

Consideremos $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert de funciones en X con núcleo reproductor, y consideremos un grupo G actuando en el espacio X. Existe una acción canónica del grupo G sobre el espacio $\mathbb{C}^X$ definida mediante la siguiente formula

$$[\pi(g)f](x) = f(g^{-1} \cdot x) \quad \text{para todo } x \in X \text{ y para todo } g \in G$$

Definimos un $G-$espacio de Hilbert de funciones en X como un espacio de Hilbert de funciones en X, de tal modo que

$$\pi(g)\psi \in \mathscr{H} \quad \text{ y } \|\pi(g)\psi\| = \|\psi\|$$

Es evidente que con la anterior acción podemos restringir las

Teorema 4.0.1 (Proposition 2, [BdG03]). *Con la notación anteriormente usada, tenemos que los siguientes enunciados se cumplen*

1. $\pi(g)K_x = K_{gx}$,
2. $K(gx, gy) = K(x, y)$ *para todo* $g \in G$ *y para todo* $x, y \in X$
3. *supongamos que G actúa de manera transitiva sobre X (i.e. X es un espacio homogéneo), y tomamos $w \in X$ arbitrario pero fijo. Consideremos su grupo de isotropía $F := G^w$, entonces se cumple que:*
   - *Si* $\mathscr{H} \neq \{0\}$, *entonces* $\mathscr{H}^F \neq \emptyset$.
   - *Si* $\dim \mathscr{H}^F = 1$, *entonces la representación* π *es irreducible.*

Definición 4.0.2. *Una representación irreducible $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$ se llamara de clase uno respecto al subgruppo K si se cumple que*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{H}^K = 1$$

Hay un inverso parcial de este resultado que permanece valido para el caso de espacios de Hilbert. Sin embargo; debemos de definir un par de nociones antes de poder enunciar nuestra proposición.

4.1 funciones biinvariantes

Definición 4.1.1. *Sea G un grupo y K un subgrupo. Una función f se dice $K-$invariante si*

$$f(k_1 x k_2) = f(x)$$

para cada $k_1, k_2 \in K$ y $x \in G$.

*Denotamos por $C_c(G//K)$ al conjunto de las funciones bi-invariantes de soporte compacto. Este conjunto junto a la operación de convolución es un álgebra de funciones (no estoy seguro que sea un álgebra *), recordemos que la convolución para grupos se define como*

$$f * \psi(x) = \int_G f(xy^{-1})\psi(y)dy.$$

Es muy importante notar que el álgebra $C_c(G//K)$ es una sub-álgebra de $L^1(G)$. Sabemos que el álgebra $L^1(G)$ es abeliana si y solo si G es abeliano. Las álgebras abelianas del álgebra $L^1(G)$ son de importancia porque...

Definición 4.1.2. *Sean G un grupo localmente compacto, Hausdorff y K un subgrupo compacto. Decimos que (G, K) es un par de Gelfand si el álgebra $C_c(G//K)$ es abeliana.*

Aunque se pueden encontrar equivalencias de está definición por motivos didácticos nos quedaremos con está por lo que sigue del curso. También vale la pena mencionar que se pueden encontrar en la literatura definiciones de pares de Gelfand para otro tipo de grupos.

Teorema 4.1.3. *Sea $\pi : G \to \mathrm{GL}(\mathscr{H})$ una representación que es start closed en G y en K. Supongamos que $\mathscr{H}^k \neq 0$ y que $\mathscr{H}$ es igual a la clausura de $\pi(G)\mathscr{H}^k$. Entonces $\mathscr{H}^k$ es $C_c(G//K)$ irreducible si y solo si $\mathscr{H}$ es $C_c(G)$ irreducible*

El siguiente resultado es consecuencia casi inmediata del anterior teorema, la importancia de este es que nos muestra la fuerte relacioón entre el algebra $C_c(G//K$ con la teoría de representaciones unitarias.

Teorema 4.1.4. *Sea $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$ una representación unitaria e irreducible. Si el álgebra $C_c(G//K)$ es abeliana, entonces $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{H}^K \leq 1$*

Ahora que ya contamos con este teorema, podemos dar las condiciones para hallar el inverso del Teorema 4.0.1.

Teorema 4.1.5 (Teorema para el Doctor Francisco)**.** *Sea G un grupo **LC** y K un sub grupo compacto. Asumamos que (G, K) es un par de Gelfand. Asumamos que el espacio $\mathscr{H}^K$ es cíclico. Entonces el inverso del Teorema 4.0.1 se cumple.*

4.2 Funciones esféricas y su conexión con representaciones unitarias

Esta sección busca cumplir con los siguientes objetivos

1. Poder explicar en que casos se puede expresar un núcleo reproductor en términos de las funciones esféricas. (para Gera)
2. para poder explicar como las funciones especiales derivan de las representaciones (para los alumnos)
3. poder dar una ultima demostración de que este tema también se conecta con las representaciones unitarias y con las entradas de matrices

Siguiendo la estructura planteada por Lang en *SL2(R)* vamos a definir una función esférica como aquella función en G que tenga la propiedad esférica.

Definición 4.2.1 (La propiedad esférica)**.** *Sea G un grupo unimodular y $K \subset G$ un subgrupo compacto. Decimos que una función f es K-esférica, o esférica, si satisface las siguientes propiedades:*

1. *f es bi-invariante y continua.*

2. *f es una eigenfunción por la izquierda del álgebra $C_c(G//K)$ i.e*

$$f * \psi = \lambda(f,\psi) f \quad \forall \psi \in C_c(G//K)$$

3. *$f(e) = 1$*

Sea $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$ una representación unitaria del grupo G sobre el espacio de Hilbert $\mathscr{H}$. Sea $u \in \mathscr{H}^K$ unitario. Vamos a considerar la siguiente entrada de matriz

$$f(x) = \pi_{u,u}(x) = \langle \pi(x)u, u \rangle$$

esta función es bi-invariante y además cumple que $f(e) = 1$.

Teorema 4.2.2 (*SL2(R)*-Lang,Theorem 8)**.** *sea $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$ una representación unitaria. Supongamos que existe un vector $u \in \mathscr{H}^K$ que genera topologicamente al espacio $\mathscr{H}$ mediante π. Entonces se tiene que*

$$\dim \mathscr{H}^K = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \textit{la función } f(x) = \langle \pi(x)u, u \rangle \textit{ es esférica}$$

4.3 Núcleos reproductores y funciones esféricas

Vamos a cubrir la sección 5 del paper "Irreducibility of unitary group representations and reproducing kernels Hilbert spaces" de Bekka, de la Harpe y Grigorchuk. En dicha sección se aborda un caso en el cual podemos expresar el núcleo reproductor de un espacio en términos de funciones esféricas. En dicho trabajo se concentran solo en el caso en el que G es un grupo compacto y K es un subgrupo cerrado. Se considera el espacio homogéneo $X = G/K$ junto a una medida μ G-invariante y positiva en X, denotando por π la representación unitaria natural del grupo G en el espacio $L^2(X,\mu)$.

Supongamos que la representación es de clase uno respecto al subgrupo K. Se escoge un vector $\eta \in \mathscr{H}^K$. Se define la función esférico zonal respecto a η como

$$f(g) = \langle \pi(g)\eta, \eta \rangle$$

veamos que dicha función es $K-$biinvairante. Sea $\Phi : X \times X \to \mathbb{C}$ el núcleo reproductor del $G-$espacio de Hilbert $\mathscr{H}$. Denotemos w el punto de base canónico (la clase del grupo K) y definimos la función

$$\begin{aligned} \phi_w : X &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \Phi(x,w) \end{aligned}$$

ambas funciones ϕ_w, η están en $\mathscr{H}^K$ de modo que existe un complejo no nulo c tal que

$$\phi_w = c\eta$$

Teorema 4.3.1. *Con la notación anterior tenemos que*

$$\Phi(gw, g'w) = \frac{\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{H}}{\mu(X)} f(g^{-1}g') \quad y \quad \eta(gw) = \sqrt{\frac{\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{H}}{\mu(X)}} f(g^{-1})$$

Veamos que este teorema nos permite cubrir el caso del $\mathbb{S}^n = \mathrm{SO}(n)\mathrm{SO}(n-1)$

Ejemplo 18. Si $G = \mathrm{SO}(3)$ y $K = \mathrm{SO}(2)$ se tiene que la función f es un polinomio de Legendre.

Bibliografía

[WA67] Yung-Chow Wong y Yik-Hoi Au-Yeung. "An Elementary and Simple Proof of the Connectedness of the Classical Groups". En: *The American Mathematical Monthly* 74.8 (1967), págs. 964-966. ISSN: 00029890, 19300972. URL: http://www.jstor.org/stable/2315278 (visitado 16-06-2025).

[Lan85] S. Lang. *SL2(R)*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1985. URL: https://books.google.com.mx/books?id=GUxivQEACAAJ.

[Fol94] G.B. Folland. *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. Studies in Advanced Mathematics. Taylor & Francis, 1994. ISBN: 9780849384905. URL: https://books.google.com.mx/books?id=0VwYZI1DypUC.

[BdG03] M. Bachir Bekka, Pierre de la Harpe y Rostislav Grigorchuk. "Irreducibility of unitary group representations and reproducing kernels Hilbert spaces". En: *Expositiones Mathematicae* 21.2 (2003), págs. 115-149. ISSN: 0723-0869. DOI: https://doi.org/10.1016/S0723-0869(03)80014-2. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0723086903800142.

[Lee12] J. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012. ISBN: 9781441999825. URL: https://books.google.com.mx/books?id=xygVcKGPsNwC.