Cuando el álgebra lineal se vuelve análisis: una mirada a los teoremas espectrales

XVIII Foro de Matemáticas del Sureste.

Roberto García Antonio
Dr. Josue Ramírez Ortega

Universidad Veracruzana.
Facultad de matemáticas.

Contenido

Uno de los problemas centrales del álgebra lineal es la diagonalización de operadores, es decir, encontrar una base de vectores propios que permita representar un operador como una matriz diagonal. Esta propiedad no solo facilita los cálculos numéricos en aplicaciones, sino que también permite comprender de manera más profunda la acción del operador sobre el espacio.

Recordemos que un **espacio de Hilbert** es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ normado completo en el cual su norma es inducida por un producto interno (forma sesquilineal, hermítica y definida positiva).

Definición

*Sean $\mathscr{H}, \mathscr{W}$ espacios de Hilbert, un **operador lineal acotado** de $\mathscr{H}$ en $\mathscr{W}$ es una transformación lineal $L : \mathscr{H} \to \mathscr{W}$ para la cual existe $C \geq 0$ tal que*

$$||Lx|| \leq C||x|| \quad \textit{para todo} \;\; x \in \mathscr{H}.$$

Definición

*Sean $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ espacios de Hilbert y $L \in B(\mathscr{H}, \mathscr{K})$. El **adjunto** del operador L, denotado por L^*, se define como un elemento de $B(\mathscr{K}, \mathscr{H})$ tal que*

$$\langle Lx, y\rangle_{\mathscr{K}} = \langle x, L^* y\rangle_{\mathscr{H}}.$$

estaremos refiriéndonos a ciertos tipos especiales de operadores los cuales definimos a continuación.

Definición

Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $L \in B(\mathscr{H})$.

- *L es hermitiano o autoadjunto si $L^* = L$,*
- *L es normal si $LL^* = L^*L$,*
- *L es unitario si $LL^* = L^*L = Id$,*

donde Id es el operador identidad en $B(\mathscr{H})$.

Teorema (Espectral)

Sea V un espacio de Hilbert de dimensión finita sobre el campo $\mathbb{C}$ y T un operador auto-adjunto ($T = T^*$), existe una base ortogonal de vectores propios de T para el espacio V.

Ejemplo

Consideremos el operador $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ definido como $Tf(x) = xf(x)$. Este operador no tiene ningún valor propio.

El teorema espectral se puede reformular como: Sea $\sigma(T)$ el espectro del operador, es decir, el conjunto

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda Id \quad \text{es no invertible}\}$$

para cada $\lambda \in \sigma(T)$ sea P_λ la proyección ortogonal de V en el espacio de vectores propios asociados a λ. Se cumple que

$$P_\lambda P_\mu = 0 \quad \mu \neq \lambda, \quad Id = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} P_\lambda \quad , T = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda P_\lambda.$$

El teorema se generaliza para dimensión infinita, cambiando la suma por una integral adecuada.

Contenido

Definición

Sea X un conjunto y Ω una σ-algebra de subconjuntos de X, $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert. Una medida espectral o "projection valued measure" es una función $E : \Omega \to B(\mathscr{H})$ que cumple las siguientes condiciones:

- *Para cada $\Lambda \in \Omega$, $E(\Lambda)$ es una proyección ortogonal,*
- $E(\emptyset) = 0$ *y* $E(X) = Id$,
- $E(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = E(\Lambda_1)E(\Lambda_2)$ *para cada* $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \Omega$,
- *si* $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *conjuntos mutuamente disjuntos de* Ω, *entonces*

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Lambda_n).$$

Lema

Sea E una medida espectral para $(X, \Omega, \mathscr{H})$ *y* $g, h \in \mathscr{H}$, *entonces*

$$E_{g,h}(\Lambda) = \langle E(\Lambda)g, h \rangle$$

define una medida compleja para Ω *de variación total acotada.*

Fija una función ϕ acotada y Ω medible, se define la forma sesquilineal

$$B(g, h) = \int \phi dE_{g,h}$$

Por lo tanto debe existir un único elemento $A \in B(\mathscr{H})$, tal que

$$\int \phi dE_{g,h} = \langle Ag, h \rangle,$$

a dicha función la denotaremos como

$$\int \phi \, dE$$

Las propiedades de la integral pueden ser resumidas mediante el siguiente resultado

Proposición

Denotemos por $\mathscr{B}_\infty(X,\Omega)$ *al conjunto de funciones acotadas y* Ω *medibles. Si E es una medida espectral para* $(X,\Omega,\mathscr{H})$ *y* $\rho:\mathscr{B}_\infty(X,\Omega)\to B(\mathscr{H})$ *es definida mediante*

$$\rho(\phi)=\int \phi dE,$$

entonces ρ *es una* $*-$*representación.*

Teorema

Si $\rho : C(X) \to B(\mathscr{H})$ es una $*$ representación, existe una única medida espectral sobre los Borelianos de X tal que para cada $g, h \in \mathscr{H}$, $E_{g,h}$ es una medida regular y además

$$\rho(u) = \int u \, dE$$

para cada $u \in C(X)$.

Teorema espectral-Caso general

Dado un operador normal N, del cálculo funcional continuo obtenemos una representación del álgebra $C(\sigma(N))$ de modo que

Teorema

Si N es un operador normal en $B(\mathscr{H})$, existe una única medida espectral E en $(\sigma(N), \mathscr{B}(\sigma(N), \mathscr{H})$ tal que

$$N = \int z dE$$

Teorema espectral-Forma multiplicativa

Teorema

Si N es un operador normal en $\mathscr{H}$, entonces existe un espacio de medida (X, Ω, μ) y una función $\phi \in L^\infty(X, \Omega, \mu)$ tal que N es unitariamente equivalente a M_ϕ en $L^2(X, \Omega, \mu)$.

MUCHAS GRACIAS !!!!

Bibliografía

[Con94], [Fol16] [Hal17] [Kub12] [Sch12]

[Con94] J.B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1994.

[Fol16] G.B. Folland. *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. Textbooks in Mathematics. CRC Press, 2016.

[Hal17] P.R. Halmos. *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity: Second Edition*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2017.

[Kub12] C.S. Kubrusly. *Spectral Theory of Operators on Hilbert Spaces*. Birkhäuser Boston, 2012.

[Sch12] K. Schmüdgen. *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Netherlands, 2012.