Día 3- Mi momento ha llegado

Presenta:
Roberto García Antonio
antonmaths35@outlook.com

Universidad Veracruzana.
Facultad de matemáticas.

12 de febrero del 2026

Objetivos día 2...y 3

Objetivos:

1. *Definir los G- espacios de Hilbert*
2. *dar el teorema fuerte que conecta la teoría de RKHS y la teoría de representaciones unitarias.*
3. *definir que es un par de Gelfand*
4. *definir las funciones esféricas*
5. *esféricos zonal y algunos polinomios clásicos*
6. *explicar los teoremas relacionados a este concepto*
7. *expresar algunos núcleos reproductores en términos de las funciones esféricas (esferico zonal).*

Contenido

1. Núcleos reproductores
2. Teoría de representaciones
3. Representaciones en espacios de G-Hilbert

Definición 1.1

*Un **multi-índice** con n componentes es un elemento de $\mathbb{Z}_+^n$, donde $\mathbb{Z}_+$ denota a los enteros no negativos, sea $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ un multi-índice con n componentes, definimos las siguientes notaciones:*

$\|\alpha\| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$	*Altura del multi-índice*
$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!,$	*Factorial del multi-índice*
$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$	*monomio de grado $\|\alpha\|$ en n variables*

Definición 1.2

Denotamos por $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$*, al espacio de polinomios que son de la forma*

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha \quad a_\alpha \in \mathbb{C},$$

y denotamos por $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$*, al conjunto de polinomios* P *tales que*

$$\Delta P = 0.$$

Definición 1.3 (Esféricos armónicos)

Llamaremos ***esféricos armónicos*** *de grado m a las restricciones a la esfera de polinomios armónicos homogéneos y lo denotaremos por* $\mathcal{H}_m(S^{n-1})$.

Podemos determinar los valores de uno de estos polinomios sabiendo cuanto vale en una esfera de radio R.

Definición 1.4

Dados $p, q \in \mathcal{H}_m(S^{n-1})$ definimos el ***producto interno de la esfera*** *como*

$$\langle p, q \rangle_{S^{n-1}} = \int_{S^{n-1}} p(x)\overline{q(x)} d\mu(x),$$

donde $d\mu$ es una medida invariante bajo rotaciones normalizada.

Con este producto interno

- el espacio se vuelve un EHNR,

Contenido

1. Núcleos reproductores
2. Teoría de representaciones
3. Representaciones en espacios de G-Hilbert

Representaciones

Definición 2.1

Sea G un grupo topológico y $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert no nulo sobre un campo $\mathbb{F}$. Una ***representación unitaria*** *de G sobre $\mathscr{H}$ es un homomorfismo de grupos entre*

$$\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$$

donde $\mathcal{U}(\mathscr{H}) = \{T : \mathscr{H} \to \mathscr{H} \mid T \text{ es unitario}\}$ con la topología débil de operadores a $\mathcal{U}(\mathscr{H})$.

Buscamos estudiar teoría de grupos con herramientas de análisis funcional

Pequeños ejemplos

Ejemplo 1 (Representación estándar)

La representación estándar del grupo $O(n)$ es la representación de $O(n)$ sobre $\mathbb{R}^n$, donde $\pi(g)$ está dada por la multiplicación por la izquierda por la matriz g.

Ejemplo 2

Consideremos el grupo $\mathbb{R}$ bajo la adición y el espacio $\mathbb{R}^2$ bajo el producto interno usual. Definimos la representación $\pi : \mathbb{R} \to \mathcal{U}(\mathbb{R}^2)$ mediante

$$\pi(x) = \begin{bmatrix} cos(x) & -sen(x) \\ sen(x) & cos(x) \end{bmatrix}.$$

Una representación importante

Ejemplo 3 (**Representación regular**)

Sea G un grupo compacto y ρ la medida de Haar izquierda asociada al grupo. Se define **la representación regular izquierda** sobre el espacio de Hilbert $L^2(G,\rho)$ mediante traslaciones, es decir,

$$[\pi_L(g)f](h) = f(g^{-1}h) \quad (\forall g, h \in G)(\forall f \in L^2(G,\rho)).$$

Esto está bien definido, pues dado $f \in L^2(G,\rho)$ tenemos que

$$\int_G |\pi_L(g)f(h)|^2 d\rho(h) \int_G |f(g^{-1}h)|^2 d\rho(h) = \int_G |f(h)|^2 d\rho(h) < \infty$$

por la invarianza de la medida de Haar.

Mi ejemplo favorito (gracias a él me titule)

Ejemplo 4 (Representación cuasi-regular)

Sea G un grupo de Lie compacto y H un subgrupo cerrado. Sabemos por el Teorema del día anterior que el cociente G/H tiene una medida de Haar invariante μ, definimos una acción del grupo G sobre el espacio de Hilbert $L^2(G/H,\mu)$ como sigue

$$\begin{aligned} \pi : G &\to \mathcal{U}(L^2(G/H,\mu)) \\ g &\mapsto L_g \end{aligned}$$

donde $L_g f(xH) = f(g^{-1}xH)$.

Ejemplo 5

Los grupos $\mathrm{O}(n+1)$ y $\mathrm{SO}(n+1)$ actúan en S^n transitivamente por medio de multiplicación izquierda. De modo que usando la medida invariante podemos definir la representación cuasi-regular de los grupos $\mathrm{O}(n)$ y $\mathrm{SO}(n)$ en $\mathbb{S}^n$

Una manera más sencilla (pero menos elemental) de decir esto es expresar la representación causi-regular como una representación inducida. De manera concreta esta representación es $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ donde ρ es la representación trivial del grupo H en (*A Course in Abstract Harmonic Analysis* [Fol94], page 165).

Subrepresentaciones irreducibles

Definición 2.2

Sea $\mathcal{M}$ un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $\mathscr{H}_\pi$. Se dirá que $\mathcal{M}$ es ***invariante*** *para una representación $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H}_\pi)$ o G-invariante si*

$$\pi(x)\mathcal{M} \subset \mathcal{M} \quad \textit{para todo } x \in G,$$

es decir, si es un subespacio invariante del operador $\pi(x)$ para todo $x \in G$.

Definición 2.3

Sea π una representación de un grupo G sobre un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, la representación se dice ***irreducible*** *si no tiene subespacios cerrados e invariantes distintos de $\{0\}$ Y $\mathscr{H}$.*

Equivalencia de representaciones.

Definición 2.4

Sean (π_1, V_1) y (π_2, V_2) representaciones unitarias de G, un operador de entrelace para π_1 y π_2 es un operador lineal acotado $T : V_1 \to V_2$, tal que

$$\pi_2(g) \circ T = T \circ \pi_1(g) \quad (\forall g \in G),$$

es decir, hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\pi_1(g)} & V_1 \\ \downarrow T & & \downarrow T \\ V_2 & \xrightarrow{\pi_2(g)} & V_2 \end{array}$$

Contenido

1 Núcleos reproductores

2 Teoría de representaciones

3 Representaciones en espacios de G-Hilbert

¿G qué?

Consideremos $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert de funciones en X con núcleo reproductor, y consideremos un grupo G actuando en el espacio X. Existe una acción canónica del grupo G sobre el espacio ^{X} definida mediante la siguiente formula

$$[\pi(g)f](x) = f(g^{-1} \cdot x) \quad \text{para todo } x \in X \text{ y para todo } g \in G$$

Definimos un G–espacio de Hilbert de funciones en X como un espacio de Hilbert de funciones en X, de tal modo que

$$\pi(g)\psi \in \mathscr{H} \qquad \text{y } ||\pi(g)\psi|| = ||\psi||$$

Restringiendo esta acción a $\mathscr{H}$ obtenemos una rep. unitaria

Gracias a esto me titule

Teorema 3.1 (Proposition 2, [BdG03])

Con la notación anteriormente usada, tenemos que los siguientes enunciados se cumplen

1. $\pi(g)K_x = K_{gx}$,
2. $K(gx, gy) = K(x, y)$ *para todo* $g \in G$ *y para todo* $x, y \in X$
3. *supongamos que* G *actúa de manera transitiva sobre* X *(i.e.* X *es un espacio homogéneo), y tomamos* $w \in X$ *arbitrario pero fijo. Consideremos su grupo de isotropía* $F := G^w$, *entonces se cumple que:*
   - *Si* $\mathscr{H} \neq \{0\}$, *entonces* $\mathscr{H}^F \neq \emptyset$.
   - *Si* $\dim \mathscr{H}^F = 1$, *entonces la representación* π *es irreducible.*

Definición 3.2

Una representación irreducible $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$ *se llamara de clase uno respecto al subgruppo* K *si se cumple que*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{H}^K = 1$$

Representaciones cuasi-regulares

El grupo $SO(n)$ actúa de manera transitiva en $\mathbb{S}^{n-1} \cong SO(n)/SO(n-1)$ (espacio homogéneo), por medio de multiplicación por la izquierda; esta acción genera una representación del grupo sobre el espacio de funciones

$$\mathbb{C}^{\mathbb{S}^{n-1}} = \{f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{C}\}$$

por medio de la asignación

$$\pi(g)f(x) = L(g)f(x) = f(g^{-1}x).$$

A esta representación la llamaremos **representación cuasi-regular** de SO(n) en $\mathbb{C}^{\mathbb{S}^{n-1}}$.

Proposición 3.3

Los espacios $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$, son subespacios invariantes de la representación cuasi-regular.

Si denotamos por ρ_m y π_m las representaciones cuasi-regulares del grupo $O(n)$ sobre los espacios $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})$ respectivamente.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\rho(g)"] \arrow[d, "R"] & \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "R"] \\
\mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r, "\pi(g)"] & \mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})
\end{tikzcd}$$

Producto interno de la esfera

Definición 3.4

Dados $p, q \in \mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})$ definimos el ***producto interno de la esfera*** *como*

$$\langle p, q\rangle_{\mathbb{S}^{n-1}} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} p(x)\overline{q(x)}d\mu(x),$$

donde $d\mu$ es una medida invariante bajo rotaciones normalizada.

Con este producto interno

- **El espacio se vuelve un EHNR**,
- la representación

$$\mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{L(g)} \mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})$$

es unitaria.

Teorema 3.5 ([Ant25], Teorema 4.1.21)

Existe una única función $L_m : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ a la cual llamamos ***armónico de Legendre*** *tal que:*

1. $L_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})$,
2. $\pi(A^{-1})L_n(x) = L_n(AX) = L_n(x)\ (\forall A \in O(n)^{e_n})(x \in \mathbb{S}^{n-1})$,
3. $L_n(e_n) = 1$.

La tercera condición es la que la determina de manera única el armónico de Legendre. ***Cualquier polinomio que satisfaga 1 y 2 es múltiplo del armónico de Legendre****.*

Poniendo todo en su lugar

Para nuestro ejemplo

- $G = SO(n)$
- $w = (0, \cdots, 1)$
- $F = SO(n)^{e_n}$
- $\mathscr{H} = \mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})$ con el productor interno de la esfera
- $\mathscr{H}^F = \mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})^{O(n)^{e_n}}$

y la diapositiva anterior demuestra que

$$dim\, \mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})^{O(n)^{e_n}} = 1$$

Proposición 3.6

La representación

$$\pi : SO(n) \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1}))$$
$$g \mapsto L(g)$$

es irreductible.

Esto último por 3.1

[Fol94] G.B. Folland. *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. Studies in Advanced Mathematics. Taylor & Francis, 1994. ISBN: 9780849384905. URL: https://books.google.com.mx/books?id=0VwYZI1DypUC.

[BdG03] M. Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, and Rostislav Grigorchuk. "Irreducibility of unitary group representations and reproducing kernels Hilbert spaces". In: *Expositiones Mathematicae* 21.2 (2003), pp. 115–149. ISSN: 0723-0869. DOI: https://doi.org/10.1016/S0723-0869(03)80014-2. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0723086903800142.

[Ant25] Roberto García Antonio. "Espacios de Hilbert con núcleo reproductor y representaciones esféricas de los grupos SO(n) y U(n)". Disponible en https://cdigital.uv.mx/items/91814648-010f-45ae-b011-65fbd83adaa8. MA thesis. Universidad Veracruzana, 2025.