Simetría y análisis: De grupos de Lie hasta esféricos armónicos

Presenta:
Roberto García Antonio

Universidad Veracruzana.
Facultad de matemáticas.

9 de febrero del 2026

Motivos generales

El presente curso tiene el propósito de dar un vistazo de como es que la teoría de Lie aparece en el área de análisis.

Objetivos día 1

1. Aprender las nociones básicas de grupos de Lie y espacios homogéneos
2. aprender las nociones generales de núcleos reproductores

Objetivos: Espacios homogeneos y medidas de Haar

Objetivo: Dar los conceptos básicos de

1. *acciones de grupos*
2. *espacios homogéneos*
3. *medidas de Haar*
4. *homeomorfismo modular*

Podemos empezar el tema desde la perspectiva de grupos topológicos localmente compactos (**LCG**), resulta que los grupos de Lie son casos particulares de este seting.

Definición 0.1 (Espacio Localmente Compacto)

*Un espacio de Hausdorff X se dice **localmente compacto** si todo punto $x \in X$ posee un entorno que es compacto.*
Equivalentemente, X es localmente compacto si para cada $x \in X$ y cada entorno abierto U de x, existe un conjunto abierto V con clausura compacta tal que:

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

Definición 0.2

Sea $(G, \cdot)$ un grupo. Si τ es una topología sobre G, se dirá que G es un grupo topológico si con la topología τ las siguientes operaciones son continuas

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\to G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \cdot g_2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} i : G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

Definición 0.3

*Un **grupo de Lie** G es una variedad diferencial G la cual cuenta con una estructura de grupo $(G, \cdot)$ de tal manera que el producto y la inversión*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\to G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \cdot g_2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} i : G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

sean funciones suaves.

En la definición anterior, basta pedir que el producto sea una función suave para obtener la estructura de grupo de Lie, para una solución parcial de esto vea el Problema 7-3 de [Lee12].

Ejemplo 1

$\mathbb{R}^n$ con la operación dada por la suma sus estructuras topológica y diferencial usual es un grupo de Lie.

Proposición 0.4

El conjunto de matrices invertibles, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$, es un grupo de Lie.

Proposición 0.5

El grupo ortogonal

$$\mathrm{O}(n) := A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : AA^T = A^T A = I\}$$

y el grupo especial ortogonal

$$\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) : \det A = 1\}$$

son grupos de Lie.

Proposición 0.6

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, y T la transformación lineal asociada a esa matriz, las siguientes afirmaciones son equivalentes

- $A \in \mathrm{O}(n)$,
- *las filas y columnas de A son ortonormales,*
- *T es una isometría respecto al producto interno usual de $\mathbb{R}^n$,*

Proposición 0.7

El grupo $\mathrm{SO}(n)$ *es conexo. Más aún, es la componente conexa de la identidad de* $\mathrm{O}(n)$*.*

Demostración

La prueba de que el grupo $\mathrm{SO}(n)$ es conexo puede hallarse en [WA67]. El hecho de que sea una componente conexa se sigue del hecho de que $\mathrm{SO}(n)$ es un subgrupo de índice 2 en $\mathrm{O}(n)$ y que la función determinante es continua. ■

Proposición 0.8

Los grupos $\mathrm{O}(n)$ *y* $\mathrm{SO}(n)$ *son compactos.*

Ejemplo 2

Definimos el grupo afin como

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

con la operación de grupo dada por:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, x_1 y_2 + y_1)$$

Este grupo se puede realizar como un grupo de matrices con la siguiente "*representación*"

$$(x, y) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El elemento inverso es:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/x & -y/x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El concepto de medida de Haar nos permitirá conectar nuestros espacios homogéneos con la teoría del análisis funcional y análisis armónico.

Definición 0.9

Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff. Una ***medida de Radon*** *es una medida de Borel en X que es*

- *finita en conjuntos compactos,*
- *regular interna en abiertos y*
- *regular externa en Borelianos.*

Definición 0.10

Sea G un grupo localmente compacto Hausdorff. Una ***medida de Haar izquierda*** *es una medida de Radon μ tal que*

$$\mu(xE) = \mu(E)$$

para cada Boreliano E, y cada $x \in G$.

Ejemplo 3

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es una media de Haar para el grupo $(\mathbb{R}^n, +)$

Ejemplo 4

La medida de Dirac centrada en el origen no es una medida de Haar izquierda para el grupo $(\mathbb{R}^n, +)$.

Dado G un grupo topológico puede suceder que no exista una medida de Haar asociada a dicho grupo; sin embargo, resulta que para grupos localmente compactos las medidas de Haar siempre existen.

Teorema 0.11

A Course in Abstract Harmonic Analysis[Fol94, Teorema 2.10]
Cada grupo localmente compacto G tiene una medida de Haar izquierda y esta medida es única salvo un producto por un escalar.

Definición 0.12

Sea G un grupo (no necesariamente topológico) y X un conjunto. Una ***acción izquierda*** *de G sobre X es una función $\varphi : G \times X \to X$, la cual denotamos por $(g, x) \mapsto g \cdot x$, con las siguientes propiedades:*

- $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x \quad (\forall x \in X) \quad y \quad (\forall g_1, g_2 \in G)$,
- $1 \cdot x = x \quad (\forall x \in X)$.

Cuando tenemos una acción izquierda de un grupo G sobre un espacio X, diremos que G ***actúa por la izquierda sobre*** *X y lo denotaremos como $G \curvearrowright X$.*

En caso de que G sea un grupo topológico localmente compacto Hausdorff y X un espacio topológico localmente compacto Hausdorff, pediremos además que la función φ sea continua y que

$$\begin{aligned} \varphi_g : X &\to X \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

sea un homeomorfismo para cada $g \in G$

Nos interesa un tipo particular de acciones para poder definir un espacio homogéneo.

Definición 0.13

Sea G un grupo que actúa por la izquierda sobre un espacio X. Diremos que la acción es ***transitiva*** *si para cualesquiera $x, y \in X$ existe un $g \in G$ tal que*

$$x = g \cdot y.$$

Definición 0.14

Sea G un grupo actuando sobre un espacio X y $w \in X$ fijo. Definimos ***el grupo de isotropía de w*** *como*

$$G^w = \{g \in G : g \cdot w = w \quad \textit{para todo } g \in G\}.$$

Es posible demostrar que G^w en efecto es un grupo, dicho grupo nos será de utilidad más adelante para el resultado principal del trabajo. Ahora ya nos encontramos en condiciones de definir qué es un espacio homogéneo.

Definición 0.15

Un ***espacio homogéneo (suave)*** *es una variedad suave M junto con la acción suave y transitiva de un grupo de Lie G sobre M. Un* ***espacio homogéneo*** *es un espacio topológico localmente compacto M junto con la acción transitiva de un grupo topológico localmente compacto G, que cumple con la condición de que M sea homeomorfo a un espacio cociente G/H, con H algún subgrupo cerrado de G.*

Ejemplo 5

La acción del grupo $\mathrm{O}(n)$ en S^{n-1}, dada por multiplicación por la izquierda

$$A \cdot x = Ax,$$

es transitiva, puesto que dado un vector x de norma 1, podemos completar a una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ y definir una matriz ortogonal cuyas columnas sean los vectores de esta base, de manera que

$$A \cdot e_n = Ae_n = x.$$

Por lo tanto S^{n-1} es un espacio homogéneo de $\mathrm{O}(n)$.

Ejemplo 6

La acción del grupo $\mathrm{SO}(n)$ en S^{n-1} dada por multiplicación por la izquierda es nuevamente transitiva; por lo tanto S^{n-1} es un espacio homogéneo de $\mathrm{SO}(n)$. La prueba de que la acción es transitiva es análoga a la del ejemplo anterior.

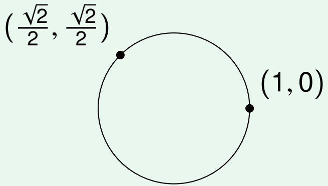
Ejemplo 7

La matriz

$$g = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

es ortogonal. Veamos que para un $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tenemos

$$g \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xcos(\theta) - ysen(\theta) \\ xsen(\theta) + ycos(\theta) \end{bmatrix}.$$



Ejemplo 8

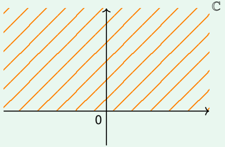
El grupo $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ actúa suavemente sobre el semi-plano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, por medio de transformaciones de Möbius, es decir,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Esta acción es transitiva, pues, dado un complejo $z = x + iy \in \mathbb{H}$, consideramos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{bmatrix}$$

la cual cumple que $A \cdot i = z$. Por lo tanto, la acción es transitiva y el semi-plano superior es un espacio homogéneo de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.



El teorema principal de espacios homogéneos nos dice que un espacio homogéneo puede ser identificado con un cociente de grupos de Lie.

Teorema 0.16

[Lee12, Teorema 21.18] Sea G un grupo de Lie, M un espacio homogéneo de G y $p \in M$. El grupo de isotropía de G, G_p, es un grupo cerrado de G y además la transformación

$$\begin{aligned} F : G/G_p &\to M \\ gG_p &\mapsto g \cdot p \end{aligned}$$

es un difeomorfismo.

Referencias

[WA67] Yung-Chow Wong y Yik-Hoi Au-Yeung. “An Elementary and Simple Proof of the Connectedness of the Classical Groups”. En: *The American Mathematical Monthly* 74.8 (1967), págs. 964-966. ISSN: 00029890, 19300972. URL: http://www.jstor.org/stable/2315278 (visitado 16-06-2025).

[Fol94] G.B. Folland. *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. Studies in Advanced Mathematics. Taylor & Francis, 1994. ISBN: 9780849384905. URL: https://books.google.com.mx/books?id=0VwYZI1DypUC.

[Lee12] J. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012. ISBN: 9781441999825. URL: https://books.google.com.mx/books?id=xygVcKGPsNwC.