La navaja suiza del álgebra lineal: El poder de la descomposición en valores singulares (SVD)

Seminario de análisis matemático y sus aplicaciones segundo periodo 2025

Roberto García Antonio

Universidad Veracruzana.
Facultad de matemáticas.


el álgebra lineal
ES CLAVE

Contenido

Uno de los problemas centrales del álgebra lineal es la diagonalización de operadores, es decir, encontrar una base de vectores propios que permita representar un operador como una matriz diagonal. Esta propiedad no solo facilita los cálculos numéricos en aplicaciones, sino que permite determinar los espacios invariantes de operadores.

Recordemos que un **espacio de Hilbert** es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ normado completo en el cual su norma es inducida por un producto interno (forma sesquilineal, hermítica y definida positiva).

Teorema (Teorema de representación de Riesz)

[Con94, Cap. 1, Sec. 3] Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $F : \mathscr{H} \to \mathbb{F}$ un funcional lineal. Existe un único vector, $h_0 \in \mathscr{H}$ tal que

$$F(h) = \langle h, h_0 \rangle \quad \text{Para todo } h \in \mathscr{H}.$$

Este resultado nos permite definir una involución en el espacio $B(\mathscr{H})$.

Definición

*Sean $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ espacios de Hilbert y $L \in B(\mathscr{H}, \mathscr{K})$. El **adjunto** del operador L, denotado por L^*, se define como un elemento de $B(\mathscr{K}, \mathscr{H})$ tal que*

$$\langle Lx, y\rangle_{\mathscr{K}} = \langle x, L^* y\rangle_{\mathscr{H}} .$$

estaremos refiriéndonos a ciertos tipos especiales de operadores los cuales definimos a continuación.

Definición

Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $L \in B(\mathscr{H})$.

- *L es **autoadjunto** si $L^* = L$,*
- *L es **normal** si $LL^* = L^*L$,*
- *L es **unitario** si $LL^* = L^*L = Id$,*

donde Id es el operador identidad en $B(\mathscr{H})$.

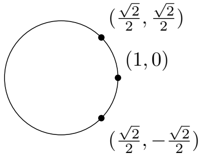
Teorema (**Espectral**)

Sea V un espacio de Hilbert de dimensión finita sobre el campo $\mathbb{C}$ y T un operador normal, existe una base ortogonal de vectores propios de T para el espacio V.

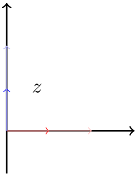
Ejemplo

Veamos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(45) & \sin(45) \\ -\sin(45) & \cos(45) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(45) & -\sin(45) \\ \sin(45) & \cos(45) \end{bmatrix}$$



(a) Acción de las matrices unitarias.



(b) Acción de la matriz diagonal.

Table: Tabla del Teorema espectral

Matriz	**Descomposición $A = UDU^*$**	**Vectores y valores propios**
Normal	$D \in M_n(\mathbb{C})$ $U \in M_n(\mathbb{C})$	Valores propios: complejos vectores propios: complejos
Auto adjunta	$D \in M_n(\mathbb{R})$ $U \in M_n(\mathbb{C})$	Valores propios: reales vectores propios: complejos
Simétrica Real	$D \in M_n(\mathbb{R})$ $U \in M_n(\mathbb{R})$	Valores propios: reales vectores propios: reales

Contenido

Teorema

Sea $A \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$. Existen matrices unitarias $V \in M_m(\mathbb{F})$, $U \in M_n(\mathbb{F})$ y una matriz diagonal $\Sigma \in M_{n,m}(\mathbb{F})$ tal que

$$A = U\Sigma V^*$$

Demostración (idea)

Aplicar el Teorema espectral a las matrices AA^* y A^*A con lo cual obtendremos las matrices U y V respectivamente, con los valores propios no negativos de AA^* obtenemos la matriz Σ.

Interpretación geométrica

El teorema anterior nos permite que garantizar que cualquier transformación lineal $M : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ actua de la siguiente manera:

1. Primero hacemos una rotación o reflexión en $\mathbb{R}^m$,
2. proyectar sobre el espacio $\mathbb{R}^n$ y dilatar nuestro ejes,
3. hacer una rotación o translación sobre el espacio $\mathbb{R}^n$

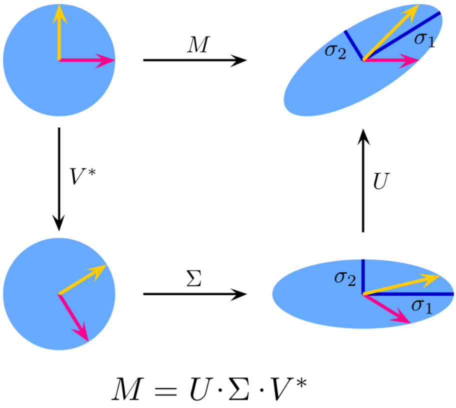


Figure: [Wik25]

Contenido

cuando usar el SVD?

Es posible aplicar la descomposición SVD a cualquier conjuntos de datos que sean susceptibles a expresarse como matrices

- Compresión de imágenes
- algoritmos de clasificación
- algoritmos de recomendación
- método PCA

Por qué sirve aplicar SVD a algo?

La idea detrás de este método consiste en detectar la información ”necesaria” para entender o describir nuestra matriz, dicho de otro modo tratar de hallar una aproximación que computacionalmente sea más sencilla de calcular.

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & & u_r & u_{r+1} & & u_m \end{array} \\ \begin{pmatrix} \Big| & \cdots & \Big| & \Big| & \cdots & \Big| \end{pmatrix} \\ \underbrace{}_{\mathrm{col}(A)} \quad \underbrace{\phantom{u_{r+1} \cdots u_m}}_{\mathrm{null}(A)} \end{array} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{———} \\ \\ \text{———} \\ \text{———} \\ \\ \text{———} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} v_1^T \\ \\ v_r^T \end{matrix}\right\} \mathrm{row}(A) \\ \left.\begin{matrix} v_{r+1}^T \\ \\ v_n^T \end{matrix}\right\} \mathrm{null}(A) \end{array}$$

MUCHAS GRACIAS !!!!

Bibliografía

[Con94], [Fol16] [Hal17] [Kub12] [Sch12]

[Con94] J.B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1994.

[Fol16] G.B. Folland. *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. Textbooks in Mathematics. CRC Press, 2016.

[Hal17] P.R. Halmos. *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity: Second Edition*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2017.

[Kub12] C.S. Kubrusly. *Spectral Theory of Operators on Hilbert Spaces*. Birkhäuser Boston, 2012.

[Sch12] K. Schmüdgen. *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Netherlands, 2012.

[Wik25] Wikipedia. Singular value decomposition — Wikipedia, the free encyclopedia. `http:`