Teoría de representaciones y espacios de Hilbert con Núcleo reproductor

Encuentro de Estudiantes de Posgrado en Matemáticas FMAT-CIMAT 2025

Roberto García Antonio

Universidad Veracruzana.
Facultad de matemáticas.

Objetivos

- Estudiar la teoría de representaciones unitarias de grupos topológicos compactos,
- Estudiar teoria de **EHNR**,
- Dar un criterio para demostrar la irreductibilidad de ciertas representaciones unitarias
- Estudiar algunas familias de representaciones para los grupos de Lie $O(n), SO(n)$ Y $U(n)$.

Contenido

Grupos de topológicos y de Lie

Definición

Sea $(G,\cdot)$ un grupo, se dice que $(G,\cdot,\tau)$ es un grupo topológico si

1. $(G,\cdot)$ *es un grupo,*
2. (G,τ) *es un espacio topológico,*
3. *con la topología τ la operación $\cdot$ y su inversa son continuas*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\to G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \cdot g_2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} i : G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1}. \end{aligned}$$

Nos centraremos particularmente en grupos de Lie de matrices.

Ejemplo

El grupo general lineal $GL(n, \mathbb{F})$, (con $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), es el conjunto de matrices invertibles junto con el producto usual de matrices.

Ejemplo

El grupo ortogonal real, $O(n)$, es el subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ de matrices ortogonales

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : AA^T = A^T A = I\}.$$

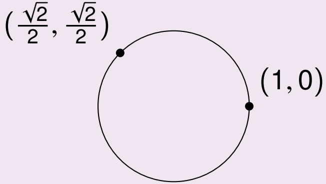
Un subgrupo de O(n) es el conjunto de matrices ortogonales con determinante 1, el grupo especial ortogonal SO(n).

La matriz

$$g = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

es ortogonal. Veamos que para un $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tenemos

$$g \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xcos(\theta) - ysen(\theta) \\ xsen(\theta) + ycos(\theta) \end{bmatrix}.$$



Representaciones

Definición

Sea G un grupo topológico y $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert no nulo sobre un campo $\mathbb{F}$. Una ***representación unitaria*** *de G sobre $\mathscr{H}$ es un homomorfismo de grupos entre*

$$\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$$

donde $\mathcal{U}(\mathscr{H}) = \{T : \mathscr{H} \to \mathscr{H} \mid \; T \text{ es unitario}\}$ con la topología débil de operadores a $\mathcal{U}(\mathscr{H})$.

Pequeños ejemplos

Ejemplo (Representación estándar)

La representación estándar del grupo $O(n)$ es la representación de $O(n)$ sobre $\mathbb{R}^n$, donde $\pi(g)$ es dada por la multiplicación por la izquierda por la matriz g.

Ejemplo

Consideremos el grupo $\mathbb{R}$ bajo la adición, y el espacio $\mathbb{R}^2$ bajo el producto interno usual. Definimos la representación $\pi : \mathbb{R} \to \mathcal{U}(\mathbb{R}^2)$ mediante

$$\pi(x) = \begin{bmatrix} \cos(x) & -\operatorname{sen}(x) \\ \operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{bmatrix}.$$

Subrepresentaciones y subrepresentaciones irreductibles

Definición

Sea $\mathcal{M}$ un subespacio cerrado de $\mathscr{H}_\pi$. Se dirá que $\mathcal{M}$ es invariante para π si

$$\pi(x)\mathcal{M} \subset \mathcal{M} \quad (\forall x \in G),$$

es decir, si es un subespacio invariante de cada operador $\pi(x)$.

Definición

Sea π una representación de un grupo G sobre $\mathscr{H}_\pi$, la representación se dirá que es ***irreductible*** *si no tiene subespacios cerrados e invariantes distintos de $\{0\}$ y $\mathscr{H}_\pi$.*

Equivalencia de representaciones.

Definición

Sean (π_1, V_1) y (π_2, V_2) representaciones unitarias de G, un operador de entrelace para π_1 y π_2 es un operador lineal acotado $T : V_1 \to V_2$, tal que

$$\pi_2(g) \circ T = T \circ \pi_1(g) \quad (\forall g \in G),$$

es decir, hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\pi_1(g)} & V_1 \\ \downarrow T & & \downarrow T \\ V_2 & \xrightarrow{\pi_2(g)} & V_2 \end{array}$$

Definición

Sean (π_1, V_1) y (π_2, V_2) representaciones de un grupo G.

1. *Denotaremos por $\textbf{Hom}_G(V_1, V_2)$ al conjunto de operadores de entrelace entre la representación (π_1, V_1) y (π_2, V_2).*
2. *Diremos que las representaciones π_1 y π_2 son unitariamente equivalentes, si existen un operador unitario en $\textbf{Hom}_G(V_1, V_2)$.*

Contenido

EHNR

Definición

*Sea X un conjunto. Diremos que un espacio de Hilbert $\mathscr{H} \leq \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor (**EHNR**) si para cada $x_0 \in X$ el funcional evaluación en x_0*

$$\begin{aligned} ev_{x_0} : \mathscr{H} &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(x_0) \end{aligned}$$

es acotado.

EHNR y representaciones irreductibles

Asumamos que un grupo G actúa de manera transitiva sobre un espacio X, denotamos por π a la representación cuasi-regular

$$\pi : G \to L^2(G/H)$$

definida por la siguiente regla de correspondencia

$$\pi(g)f(x) = L(g)f(x) = f(g^{-1} \cdot x).$$

Dados $F \leq G$ cerrado y $\mathscr{H} \subset \mathbb{C}^X$ un **EHNR**, se denota por $\mathscr{H}^F$ al espacio vectorial

$$\mathscr{H}^F = \{\psi \in \mathscr{H} : \pi(k)(\psi) = \psi \quad \forall k \in F\}$$

Criterio de irreductibilidad

Teorema (Criterio de irreductibilidad)

Con la notación anterior y suponiendo que $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$ es unitaria. Sea $w \in X$ arbitrario pero fijo, definimos

$$F := G^w = \{g \in G : g \cdot w = w \quad (\forall g \in G)\},$$

***el grupo de isotropías de w**, entonces se cumple que:*

1. *Si $\mathscr{H} \neq \{0\}$ entonces $\mathscr{H}^F \neq \{0\}$,*
2. *Si $\dim \mathscr{H}^F = 1$, entonces la representación π es irreductible.*

Contenido

Definición

*Un **multi-índice** con n componentes es un elemento de* $\mathbb{Z}_+^n$*, donde* $\mathbb{Z}_+$ *denota a los enteros no negativos, sea* $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ *un multi-índice con n componentes, definimos las siguientes notaciones:*

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!,$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

Espacio de polinomios homogéneos

Definición

Denotamos por $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$, al espacio de polinomios que son de la forma

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha \quad a_\alpha \in \mathbb{C},$$

y denotamos por $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$, al conjunto de polinomios armónicos homogéneos, es decir, los polinomios P tales que $\Delta P = 0$.

Proposición

Consideremos la función restricción

$$\begin{aligned} R : \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) &\to \mathcal{P}_m(\mathbb{S}^{n-1}) \\ p &\mapsto p|_{\mathbb{S}^{n-1}} \end{aligned}$$

donde $\mathcal{P}_m(\mathbb{S}^{n-1}) = \{p|_{\mathbb{S}^{n-1}} : p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)\}$*, este operador es biyectivo.*

Definición (**Esféricos armónicos**)

*Llamaremos **esféricos armónicos** de grado m a los elementos del conjunto* $\mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})$.

Representaciones cuasi-regulares

El grupo $SO(n)$ actúa de manera transitiva en $\mathbb{S}^{n-1} \cong SO(n)/SO(n-1)$ (espacio homogéneo), por medio de multiplicación por la izquierda; esta acción genera una representación del grupo sobre el espacio de funciones

$$\mathbb{C}^{\mathbb{S}^{n-1}} = \{f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{C}\}$$

por medio de la asignación

$$\pi(g)f(x) = L(g)f(x) = f(g^{-1}x).$$

A esta representación la llamaremos **representación cuasi-regular** de SO(n) en $\mathbb{C}^{\mathbb{S}^{n-1}}$.

Proposición

Los espacios $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$, son subespacios invariantes de la representación cuasi-regular.

Si denotamos por ρ_m y π_m las representaciones cuasi-regulares del grupo $O(n)$ sobre los espacios $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})$ respectivamente.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\rho(g)"] \arrow[d, "R"] & \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "R"] \\ \mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r, "\pi(g)"] & \mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1}) \end{tikzcd}$$

Producto interno de la esfera

Definición

*Dados $p, q \in \mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})$ definimos el **producto interno de la esfera** como*

$$\langle p, q\rangle_{\mathbb{S}^{n-1}} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} p(x)\overline{q(x)}d\mu(x),$$

donde $d\mu$ es una medida invariante bajo rotaciones normalizada.

Con este producto interno

- **El espacio se vuelve un EHNR**,
- la representación

$$\mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{L(g)} \mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})$$

es unitaria.

Teorema

*Existe una única función $L_m : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ a la cual llamamos **armónico de Legendre** tal que:*

1. $L_m \in \mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})$,
2. $\pi(A^{-1})L_n(x) = L_n(AX) = L_n(x)\ (\forall A \in O(n)^{e_n})(x \in \mathbb{S}^{n-1})$,
3. $L_n(e_n) = 1$.

*La tercera condición es la que la determina de manera única el armónico de Legendre. **Cualquier polinomio que satisfaga 1 y 2 es múltiplo del armónico de Legendre**.*

Poniendo todo en su lugar

Para nuestro ejemplo

- $G = SO(n)$
- $w = (0, \cdots, 1)$
- $F = SO(n)^{e_n}$
- $\mathscr{H} = \mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})$ con el producto interno de la esfera
- $\mathscr{H}^F = \mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})^{O(n)^{e_n}}$

y la diapositiva anterior demuestra que

$$dim\, \mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})^{O(n)^{e_n}} = 1$$

Proposición

La representación

$$\begin{aligned} \pi : SO(n) &\to \mathcal{U}(\mathcal{H}_m(\mathbb{S}^{n-1})) \\ g &\mapsto L(g) \end{aligned}$$

es irreductible.

Esto último por 1

Bibliografía

[1] [2] [3] [4] [5]

[1] J. Faraut. *Analysis on Lie Groups: An Introduction*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2008.

[2] M.R. Sepanski. *Compact Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2007.

[3] G.B. Folland. *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. Textbooks in Mathematics. CRC Press, 2016.

[4] K. Atkinson and W. Han. *Spherical Harmonics and Approximations on the Unit Sphere: An Introduction*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2012.

[5] M. Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, and Rostislav Grigorchuk. Irreducibility of unitary group representations and reproducing kernels hilbert spaces. *Expositiones Mathematicae*, 21(2):115–149, 2003.