Aux 2: Estadística

P1 (X,Y) unif en $C=\{(x,y) : x^2+y^2\leq R\}$. Defina $W=\sqrt{X^2+Y^2}$ la distancia del punto (X,Y) al origen.

a) Determine

$$f_W(w)=\frac{2w}{R^2}\mathbb{1}_{0\leq w\leq R}$$

(X,Y) unif en C, es decir

$$f_{X,Y}(x,y)=c\cdot\mathbb{1}_{\{x^2+y^2\leq R\}}$$

con c una cte a determinar del hecho que $\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)dxdy=1 \Rightarrow \int_{x^2+y^2\leq R} c\,dxdy = c\cdot R^2\pi = 1$

$$\Rightarrow c=\frac{1}{\pi R^2}$$

Ahora para calcular la densidad de W Calculemos su función de distribución.

$$F_W(w)=\mathbb{P}(\sqrt{X^2+Y^2}\leq w)=\mathbb{P}(X^2+Y^2\leq w^2)$$

$$=\iint_{x^2+y^2\leq w}\frac{1}{\pi R^2}dxdy=\frac{1}{\pi R^2}\cdot w^2\pi\,\mathbb{1}_{0\leq w\leq R}=\frac{w^2}{R^2}\mathbb{1}_{0\leq w\leq R}$$

$$f_W(w)=\frac{dF_W(w)}{dw}=\frac{2w}{R^2}\mathbb{1}_{0\leq w\leq R}$$

b) $(W_1,\dots,W_n)$ una MAS

i) $\hat{R}_1=\frac{3}{2}\overline{W}$ $\quad \mathbb{E}(\hat{R}_1)=\mathbb{E}(\frac{3}{2}\overline{W})=\frac{3}{2}\mathbb{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}W_i)$

$$=\frac{3}{2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(W_i) \;\Big|\; \mathbb{E}(W_i)=\int_{\mathbb{R}} w_i\cdot\frac{2w_i}{R^2}\mathbb{1}_{0\leq w\leq R}=\frac{2}{R^2}\cdot\frac{R^3}{3}=\frac{2}{3}R$$

$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot n\frac{2}{3}R=R$ Es decir $\hat{R}_1=\frac{3}{2}\overline{W}$ es estimador Insesgado!

ii) $\hat{R}_2=\max\{W_i \mid i\in\{1,\dots,n\}\}$

$\mathbb{E}(\hat{R}_2)$ Requiere conocer la función de densidad de $\hat{R}_2$. Calculémosla. $F_T(t)=\mathbb{P}(\max_i\{W_i\}\leq t)$ $\longrightarrow$

$$\mathbb{P}(W_1 \le t, W_2 \le t, \dots, W_n \le t) \overset{\perp}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(W_i \le t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{t^2}{R^2} \mathbb{1}_{0 \le t \le R}$$

$$= \frac{t^{2n}}{R^{2n}} \mathbb{1}_{0 \le t \le R} \Rightarrow f_T(t) = \frac{2n\, t^{2n-1}}{R^{2n}} \mathbb{1}_{0 \le t \le R}$$

Finalmente

$$\mathbb{E}(\hat{R}_2) = \int_{\mathbb{R}} t \cdot \frac{2n t^{2n-1}}{R^{2n}} \mathbb{1}_{0 \le t \le R}\, dt = \frac{2n}{R^{2n}} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^R = \frac{2n}{2n+1} R$$

Notar que $\mathbb{E}(\hat{R}_2) = \frac{2n}{2n+1} R \longrightarrow R$ Asintóticamente insesgado

<u>Prop</u>: Calcular varianzas y analizar.

c) $R = 5$ y $n = 25$ que asumimos grande. $\mathbb{P}(3 \le \bar{W} \le 3{,}5)$

Para $n = 25$, por TCL $\frac{\bar{W} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

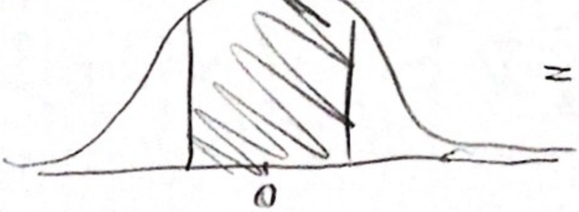
donde $\mu = \mathbb{E}(W) = \frac{2}{3} R = \frac{10}{3} \approx 3.33$

$$\sigma^2 = \mathbb{V}ar(W) = \underbrace{\mathbb{E}(W^2)}_{?} - \mathbb{E}(W)^2$$

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)\, dx \Rightarrow \mathbb{E}(W^2) = \int_0^R w^2 \cdot \frac{2w}{R^2}\, dw = \frac{R^2}{2} = \frac{25}{2}$$

$$\therefore \sigma^2 = \frac{R^2}{2} - \frac{4}{9} R^2 = \frac{25}{2} - \frac{100}{9} \approx 1.39$$

Así $\mathbb{P}(3 \le \bar{w} \le 3.5) = \mathbb{P}\left(\frac{(3 - 3.33)\sqrt{25}}{\sqrt{1.39}} \le \underbrace{\frac{(\bar{W} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}}_{\sim N(0,1)} \le \frac{(3.5 - 3.33)\sqrt{n}}{\sqrt{1.39}} \right)$



$$= \Phi\left(\frac{(3.5 - 3.33)\sqrt{25}}{\sqrt{1.39}} \right) - \Phi\left(\frac{(3 - 3.33)\sqrt{25}}{\sqrt{1.39}} \right)$$

a) $X=(X_1, \dots, X_n)$ una MAS proveniente de una V.A $Z \sim Poisson(\lambda)$. Encontrar estadístico suficiente.

$X \sim P(\lambda)$, $\mathbb{P}(X_i = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

$$\mathbb{P}(X=x) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i!} \cdot \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot e^{-\lambda n}$$

. Proponemos el estadístico $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$

¿Será suficiente? tendríamos que probar que

$\mathbb{P}_\lambda(X=x \mid T(x)=t)$ no depende de λ

$$\underset{\text{(Bayes)}}{=} \frac{\mathbb{P}(T(x)=t \mid X=x)\mathbb{P}(X=x)}{\mathbb{P}(T(x)=t)}$$

- $\mathbb{P}(T(x)=t \mid X=x) = \mathbb{1}_{\{T(x)=t\}}$
- $\mathbb{P}(X=x) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i!}\right) \cdot \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-\lambda n}$
- $\mathbb{P}(T(x)=t) \leftarrow$ Esta trae problemas...

¿Cómo distribuye $T(X)$? Usemos la f.g.m con la propiedad

$$\Pi_{\sum_{i=1}^n X_i} = \prod_{i=1}^n \Pi_{X_i} = \prod_{i=1}^n e^{\lambda(e^s-1)} = e^{n\lambda(e^s-1)}$$ $\leftarrow$ f.g.m de una Poisson$(n\lambda)$

y sabemos que la f.g.m Caracteriza la distribución.

$\therefore$ $T(X) \sim Poisson(n\lambda)$

$$\therefore \mathbb{P}_\lambda(X=x \mid T(x)=t) = \frac{\mathbb{1}_{\{T(x)=t\}} \cdot \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i!}\right) \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot e^{-\lambda n}}{\frac{e^{-\lambda n}(\lambda n)^t}{t!}}$$

$$= \frac{\mathbb{1}_{\{T(x)=t\}}\left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i!}\right)}{n^t/t!}$$ $\leftarrow$ No depende de λ $\therefore$ Estadístico suficiente.

b) $X=(X_1, \ldots, X_n)$ MAS

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{(1+x)^{1+\theta}} \mathbb{1}_{0<x<\infty} \qquad \theta > 0$$

$$f(X|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta}{(1+x_i)^{1+\theta}} \mathbb{1}_{0<x<\infty}$$

$$= \frac{\theta^n}{\left(\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\right)^{1+\theta}} \Rightarrow T(x) = \prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \text{ es estadístico suficiente}$$

En efecto, sea $h(x) = \mathbb{1}_{0<x<\infty}$, $g_\theta(y) = \frac{\theta}{y^{1+\theta}}$ se tiene la factorización

$f(X|\theta) = h(x) \cdot g_\theta(T(x))$ y por teo neymann-fisher $\Rightarrow$ estadístico suficiente.

Notar además que

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) = \prod_{i=1}^{n} \exp(\log(1+x_i))$$

$$= \exp\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \log(1+x_i)}_{\text{Esto es otro estadístico suficiente}}\Big)$$

P3 Pareto. $x_0 > 0$ y $\alpha > 0$

$$f(x|x_0, \alpha) = \frac{\alpha x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{x \geq x_0}$$

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i|x_0, \alpha) = \frac{\alpha^n x_0^{\alpha n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{x_i \geq x_0}}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha+1}}$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{x_i \geq x_0} = \mathbb{1}_{\min\{x_i\} \geq x_0}!$$

$T(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i, \min_i \{x_i\}\right)$ es estadístico suficiente por neyman-fisher.