Clase 2 estadísticos p1/2

Clase 1 · Estadísticos

Def: Sea $(\mathcal{T}, \mathcal{A}, \mu)$ un esp de Prob y $X \in \mathcal{X}$ una VA con distribu $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$. Un estadístico es una función medible de la realización $X = x$ indep. del θ

$$T : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$$
$$x \mapsto T(x)$$

Ejemplo; $x = [x_1, x_2 \dots x_n]$

$T(x) = \frac{1}{n} \sum x_i$, $T'(x) = x$

$T''(x) = \text{mín}(x)$, $T'''(x) = c \in \mathbb{R}$

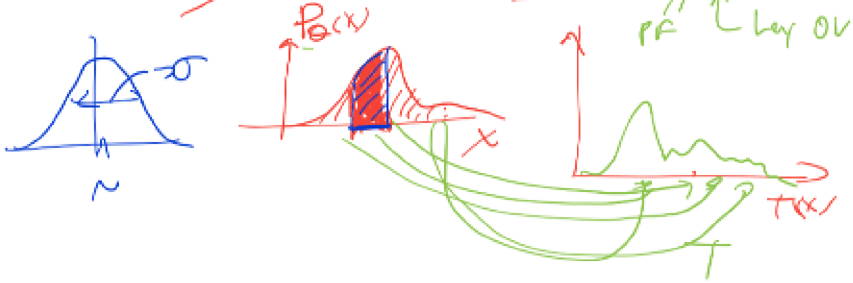
Observación: Debemos identificar entre el valor $T(x)$ y $T(X)$ → Variable aleatoria

fijo

$X \sim P_\theta \Rightarrow T(X) \sim T_{\# P_\theta}$ = distribución pushforward

transf

PF Ley de



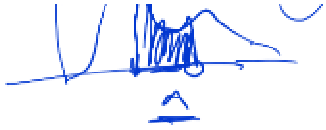
Resumen: Un estadístico es una función de mis datos que no depende del modelo/parámetro. No confundir $T(x)$ vs $T(X)$

Suficiencia. Sea $(S, \mathcal{A}, \mu)$ un EP y $X \in \mathcal{X}$ una VA $X \sim P_\theta$. $T : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$ es un estadístico suf para θ si $X \mid T(X)$ no depende de θ

$x \to P_\theta(X \in A \mid T(X))$ $\boxed{A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})}$ no dep de θ

cualquier conjunto $C \subseteq \mathcal{X}$

$\boxed{P_\theta(X \in A \mid (T(X)))}$ ←



Ejemplo 0: Estadístico trivial $T(X) = X$ ←

$$P_\theta(X \in A \mid X = x) = \mathbb{1}_{x \in A}$$ = no depende de θ

Ejemplo 1: $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$; $x = [x_1 \dots x_n]$

$$P(X = x) = \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n - \sum x_i}$$

Comentario: $\sum x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$

$X = x$ $\quad T(x) = \sum x_i$ ← Es suficiente

Por definición ① $P(X = x \mid T(x) = t)$

$$② = \frac{P(T(x) = t \mid X = x)\, P(X = x)}{P(T(x) = t)}$$ Bayes

$=$

Clase 2 estadísticos p2/2

Suficiencia Bernoulli

$T(x) = \sum x_i$

$$P(X=x \mid T(X)=t) = \frac{P(T(X)=t \mid X=x)\, P(X=x)}{P(T(X)=t)}$$

$$= \mathbb{1}_{T(x)=t} \binom{n}{t}^{-1}$$

$P(T(X)=t)$ ↳ Binomial

$$= \frac{\mathbb{1}_{T(x)=t}\, \cancel{\theta^{\sum x_i}}\, \cancel{(1-\theta)^{n-\sum x_i}}}{\binom{n}{t}\cancel{\theta^{t}}\,\cancel{(1-\theta)^{n-t}}}$$

$$= \boxed{\mathbb{1}_{T(x)=t} \binom{n}{t}^{-1}}$$

NO DEP θ

$$P(X=x) = \theta^{\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i}} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

X_i - i.i.d.

MAS

$P(X=1) = \theta$; $P(X=0) = 1-\theta$

$$P(X=x) = \theta^{x}(1-\theta)^{1-x}$$

$[X_1, X_2 \ldots X_n] = X_T$ #1 #0

$$P(X_T = x_T) = \theta^{\boxed{\sum x_i}} (1-\theta)^{n-\sum x_i}$$

Last modified: 15:15