MA3402-1 Estadística
Profesor: Felipe Tobar
Auxiliares: Francisco Vásquez , Arie Worstman
Nelson Moreno

Auxiliar 2

Repaso y Estadísticos suficientes

P1.- **[Repaso]** Considere un vector aleatorio (X,Y) con distribución uniforme en $C=\{(x,y): x^2+y^2\leq R^2\}$ Defina $W=\sqrt{X^2+Y^2}$ la distancia del punto (X,Y) al origen.

a) Pruebe que la densidad de probabilidad de la variable aleatoria viene dada por

$$f_W(w)=\frac{2w}{R^2}\mathbb{1}_{0\leq w\leq R}$$

b) Sea $(W_1,\ldots,W_n)$ una MAS, determine el valor esperado de las siguientes variables aleatorias e interprete.

- $\hat{R}_1=\frac{3}{2}\overline{W}$
- $\hat{R}_2=\text{máx}\{W_i \mid i\in\{1,\ldots,n\}\}$

c) Sea $R=5$ y $n=25$ que asumiremos grande. Calcule $\mathbb{P}(3\leq\overline{W}\leq 3{,}5)$

P2.- **[Estadísticos suficientes]**

a) Sea $X=(X_1,\ldots X_n)$ una MAS proveniente de una variable aleatoria $Z\sim Poisson(\lambda)$, $\lambda>0$. Encuentre un estadístico suficiente mediante definición.

b) Sea $X=(X_1,\ldots X_n)$ una MAS con densidad

$$f(x|\theta)=\frac{\theta}{(1+x)^{1+\theta}}\quad 0<x<\infty,\theta>0$$

Encuentre un estadístico suficiente mediante factorización de Neyman-Fisher

P3.- **[Suficiencia Conjunta]** Considere la distribución *pareto* para $x_0>0$ y $\alpha>0$ parámetros desconocidos. Con densidad de probabilidad dada por

$$f(x|x_0,\alpha)=\begin{cases}\frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{if } x\geq x_0\\ 0 & \text{if } x<x_0\end{cases}$$

Encuentre estadísticos suficientes para ambos parámetros del modelo.

	Tipo	Soporte	Densidad
$Bernoulli(p)$	Discreta	$\{0,1\}$	$p^k(1-p)^{1-k}$
$Binomial(n,p)$	Discreta	$\{0\dots n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
$Geometrica(p)$	Discreta	$\{1,2,\dots\}$	$p(1-p)^{k-1}$
$Poisson(\lambda)$	Discreta	$\{0,1,\dots\}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
$Uniforme(a,b)$	Continua	$[a,b]$	$\frac{1}{b-a}$
$Normal(\mu,\sigma^2)$	Continua	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
$Exponencial(\lambda)$	Continua	$[0,\infty)$	$\lambda e^{-\lambda x}$
$Gamma(\theta,\lambda)$	Continua	$(0,\infty)$	$\frac{\lambda^\theta}{\Gamma(\theta)}x^{\theta-1}e^{-\lambda x}$

	Esperanza	Varianza	F.G.M: (e^{sX})
$Bernoulli(p)$	p	$p(1-p)$	$1-p+pe^s$
$Binomial(n,p)$	np	$np(1-p)$	$(1-p+pe^s)^n$
$Geometrica(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{p}{e^{-s}-(1-p)}$
$Poisson(\lambda)$	λ	λ	$exp\left(\lambda(e^s-1)\right)$
$Uniforme(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bs}-e^{as}}{(b-a)s}$
$Normal(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	$exp\left(\frac{\sigma^2s^2}{2}+\mu s\right)$
$Exponencial(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-s}$
$Gamma(\theta,\lambda)$	$\frac{\theta}{\lambda}$	$\frac{\theta}{\lambda^2}$	$(1-\frac{s}{\lambda})^{-\theta}$

Cuadro 1: Distribuciones y propiedades