Departamento de Ingeniería Matemática
MA3402-1 Estadística
07 de septiembre de 2020

Auxiliar 1: Repaso Probabilidades

Profesor: Felipe Tobar
Auxiliares: Arie Wortsman, Nelson Moreno, Francisco Vásquez

Previo. Sean $Z_1, ..., Z_n$ variables aleatorias con $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ independientes, se tiene que la suma de sus cuadrados

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

distribuye según una distribución *Chi-Cuadrado* con n grados de libertad. Esto lo denotamos como:

$$Q \sim \mathcal{X}_n^2$$

Algunas propiedades de esta distribución:

a. $\mathbb{E}(\mathcal{X}_n^2) = n$
b. $\mathbb{V}(\mathcal{X}_n^2) = 2n$
c. $M_{\mathcal{X}_n^2}(t) = (1-2t)^{\frac{-n}{2}}$ con $t < \frac{1}{2}$

P1. Se quiere estudiar el comportamiento de un vector bidimensional que tiene sus dos componentes ortogonales, independientes y que siguen una distribución normal. Al realizar las mediciones respectivas de cada componente, se obtiene una Muestra Aleatoria Simple (MAS, cada dato es generado desde una misma distribución y son independientes entre sí (iid)) $U = (U_1, ..., U_n)$ de n observaciones con $U_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ y una MAS $W = (W_1, ..., W_n)$ de n observaciones con $W_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. En específico, se busca estudiar el comportamiento de los módulos de los vectores obtenidos. Se obtiene una nueva MAS $X = (X_1, ..., X_n)$ dada por:

$$X_i = \sqrt{U_i^2 - W_i^2}$$

i. Encuentre la función de densidad de X_1

P2. Estudiaremos la varianza σ^2 de una Muestra Aleatoria Simple (MAS) $X = (X_1, ..., X_n)$ donde $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\forall i = 1, ..., n$. Se considera que μ y σ son parámetros desconocidos.

Considere el siguiente estimador de la varianza dado por:

$$S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\overline{X}_n - X_i)^2$$

donde $\overline{X}_n$ denota al promedio de $X_1, ..., X_n$, es decir $\overline{X}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

i. Demuestre que $\mathbb{E}(S^2) = \sigma^2$

ii. Calcule la varianza de S^2, para esto encontraremos primero la distribución de $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2$, siga los siguientes pasos:

ii.a. Desarrolle la expresión $W = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$ para llegar a:

$$W = \frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2 + \frac{n(\overline{X}_n - \mu)^2}{\sigma^2}$$

ii.b. Encuentre las distribuciones asociadas a W y a $\frac{n(\overline{X}_n-\mu)^2}{\sigma^2}$

ii.c. Aplique la función generadora de momentos en ambos lados de la ecuación. Para esto, asuma que S^2 es independiente de $\overline{X}_n$.

ii.d. Encuentre la distribución de $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2$

ii.e. Calcule $\mathbb{V}(S^2)$

iii. (Ejercicio) Calcule la varianza de S^2 desarrollando *a mano* (Muy largo).

Ahora se considera otro estimador de la varianza dado por:

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}_n - X_i)^2$$

iv. Muestre que $\hat{\sigma}^2$ cumple que $\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2) \neq \sigma^2$

v. Muestre que $\hat{\sigma}^2$ cumple que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$

Ahora introduciremos una definición

Sea θ el parámetro que buscamos estimar de una variable aleatoria, sea $\hat{\theta}$ un estimador de θ. Se define el Error Cuadrático Medio (ECM) como:

$$ECM_\theta(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_\theta[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

vi. Calcule $ECM_{\sigma^2}(S^2)$

vii. Calcule $ECM_{\sigma^2}(\hat{\sigma}^2)$

viii. Verifique que $ECM_{\sigma^2}(\hat{\sigma}^2) < ECM_{\sigma^2}(S^2)$