Auxiliar #3

1. $T(\mathcal{X})$ ← Estadísticos ← Sintetizar

2. Estimadores ← ~~Suficiencia~~ Insesgado, Minimalidad ← Suficiencia

P1 Un objeto con masa θ es pesado en distintas pesas con diferentes precisiones . Los datos $X_1, ..., X_n$ son independientes, con $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma_i^2), i = 1, ..., n$, con σ_i conocidas. Use suficiencia para sugerir un promedio ponderado de las masas para estimar θ. De el modelo paramétrico y diga si la distribución pertenece o no a la familia exponencial.

$X_1, ..., X_n \longrightarrow \sum_i^{} w_i X_i \longrightarrow \theta.$

1. Vamos a encontrar un estadístico suficiente.
2. Luego vamos a construir un estimador con el estadístico.

Modelo: •) Observaciones: $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^n$ ← n muestras con cantidades ≥ 0.

•) Parámetros: $\Theta = \mathbb{R}_+$ (Queremos estimar θ, que es ≥ 0)

• Familia: $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{n} \{ \mathbb{P}_\theta : p_\theta(\mathcal{X}) = N(\theta, \sigma_i^2) \}$.

Si pertenece a la fam. exponencial, pues tienen distribución normal.

Hay una receta para encontrar un estadístico suficiente → Teo. de Neyman-Fischer (factorización)

Teo: $T(x)$ es suficiente si

$$p_\theta(x) = h(x)\, g_\theta(T(x))$$

Vamos a calcular $p_\theta(x)$, e intentar usar Teo. de factorización:

$$p_\theta(x) = \text{densidad}$$

$$\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{i=1}^{n} N(\theta, \sigma_i^2)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x_i-\theta)^2\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x_i-\theta)^2 - \log\sqrt{2\pi\sigma_i^2}\right)$$

$$= \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sigma_i^2}(x_i-\theta)^2 - \sum_{i=1}^{n} \log\sqrt{2\pi\sigma_i^2}\right)$$

$$= \underbrace{\exp\left(+\theta \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta^2}{2\sigma_i^2}\right)}_{g_\theta(T(X))} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{2\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \log\left(\sqrt{2\pi}\,\sigma_i\right)\right)$$

$$\underbrace{\phantom{\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{2\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \log\left(\sqrt{2\pi}\,\sigma_i\right)\right)}}_{h(X)}$$

Por Teo. de factorización,

$T(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{\sigma_i^2}$, este es un estadístico suficiente. Con esto queremos construir un estimador.

$$E(T(X)) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i^2}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{E(X_i)}{i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta}{i^2}$$

$$= \theta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$$

Lo puedo convertir en un estimador insesgado. ¿Cómo? Dividiendo por $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$

$$T'(x) = \frac{T(x)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}} \quad \blacksquare$$

P2

Muestre que el estadístico $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es minimal suficiente para la familia paramétrica exponencial:

$$\mathcal{P} := \left\{ \mathbb{P}_\theta \middle| f_\theta(x) = \theta e^{-\theta x} \right\}$$

$$f_\theta(x) = \theta e^{-\theta x}$$

Primero veamos que $T(X)$ es suficiente:

MAS: $X = (X_1, \dots, X_n)$

$$p_\theta(X) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta x_i}$$

$$= \underbrace{\theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} X_i}}_{g_\theta(T(X))} \cdot \underbrace{1}_{h(X)}$$

$\therefore T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es un estadístico suficiente por el Teo. de factorización.

Veamos minimalidad:

Teo: Si $T(\underline{x})$ cumple:

$\forall\, X=(X_1,\dots,X_n)$.

$$(*)\quad \frac{p_\theta(\underline{x})}{p_\theta(\underline{y})} \text{ no depende de } \theta \text{ ssi } T(X)=T(Y)$$

$\Longrightarrow T(X)$ es minimal.

Usaremos este teorema para ver minimalidad. Vamos a ver si cumplimos $(*)$ partiendo del lado izquierdo:

$$\frac{p_\theta(\underline{x})}{p_\theta(\underline{y})} \text{ no depende de } \theta$$

Reescribiendo
$\Longleftrightarrow$

$$\frac{\cancel{\theta^n} e^{-\theta\sum_{i=1}^n X_i}}{\cancel{\theta^n} e^{-\theta\sum_{i=1}^n Y_i}} \text{ no depende de } \theta$$

$$\Longleftrightarrow e^{\theta\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)} \text{ no depende de } \theta$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\Longleftrightarrow T(y) = T(x),$$

$\therefore$ Concluimos que $T(\cdot)$ es minimal.

Juntándolo con lo anterior, $T(\cdot)$ es suficiente minimal.

P3

Sea una MAS $X = (X_1, .., X_n)$ con n observaciones independientes del modelo gaussiano $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y otra MAS $Y = (Y_1, ...Y_n)$ con n observaciones independientes del modelo gaussiano $\mathcal{N}(\nu, \sigma^2)$. Se supone que X e Y son vectores independientes y que los parámetros μ, ν y σ son desconocidos y no están sujetos a ninguna restricción.

a. Plantee el modelo paramétrico relacionado a la situación planteada. Compruebe $\mathcal{P}$ pertenece a la clase exponencial.

- Obs: $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{2n} \leftarrow 2n$ muestra
- Parámetro: $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \; (\mu, \nu, \sigma^2)$ ≥ 0
- Familia: $\mathcal{P} = \{ P_{(\mu,\nu,\sigma)} : (\mu, \nu, \sigma^2) \in \Theta, \; X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \; Y_i \sim N(\nu, \sigma^2) \}$

Ver que $\mathcal{P}$ está en la fam. exponencial $\leftarrow$ Propuesto.

b. Muestre que $S = (\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} Y_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + Y_i^2)$ es un estadístico suficiente completo para $\mathcal{P}$. ¿Es minimal?

$$f_{\mu,\nu,\sigma^2}(x,y) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{2n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 + (Y_i-\nu)^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + Y_i^2\right)}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2\sigma^2} n(\mu^2+\nu^2)} \cdot e^{\frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{\nu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} Y_i}}_{g_\theta(S)} \cdot \underbrace{1}_{h(X)}$$

∴ Por Teo. de factorización, S es suficiente.

• **Teo:** En la fami. exponencial, $T(X)$ es completo si Θ contiene rectángulos.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

$[\;] \times [\;] \times [\;]$

Como en nuestro caso Θ e irrestricto, $T(X)$ es completo.

• **Prop:** Ver si $T(X)$ e minimal.