Recuerdo: Medida ($\mathcal{X}$ - conjunto, Σ - σ-álgebra, $\mu: A \in \Sigma \to \mathbb{R}$)

μ es una medida si

- $\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \Sigma$
- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$; (A_i disjuntos)

Ejemplo 1: 'cuenta puntos' $c(A) = \#A$; $c(\{1,2,5,7\}) = 4$; $c\,\emptyset = 0$; $c(\{1,2,3\} \cup \{3\}) = 4 = \{1,2,3,4\}$

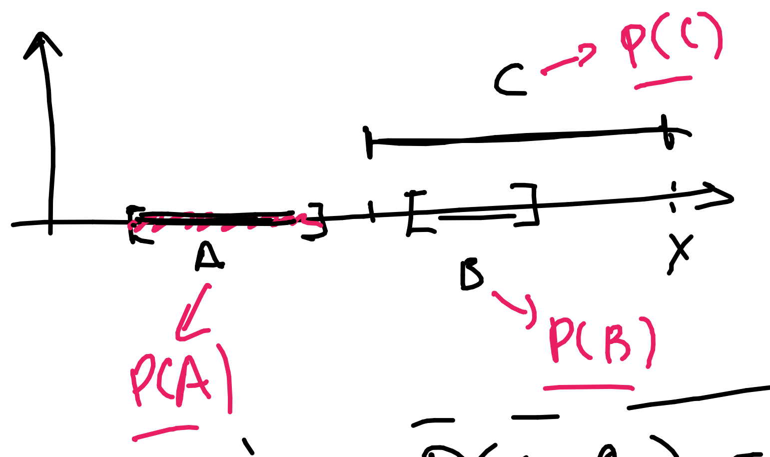
ejemplo 2 'Lebesgue' $\lambda([0,1]) = 1$; $\lambda[A,B] = B - A$.

$(\mathcal{X}, \Sigma_{\mathcal{X}}, \mu)$ - espacio de medida

$(\mathcal{Y}, \Sigma_{\mathcal{Y}}, \mu_{\mathcal{X}})$ $\quad f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$; $\forall A \in \Sigma_{\mathcal{Y}} \; f^{-1}(A) \in \Sigma_{\mathcal{X}}$ $\Sigma \to f$ medible

$\mu(\mathcal{X}) = 1 \to \mu$ es una medida de probabilidad y $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ es un E.P.

Definir la densidad de una medida de prob.



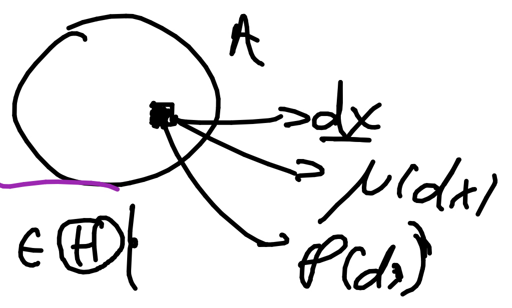
$X \sim P_\theta(\;)$

$P(X \in C) = P_\theta(C)$

$P(X \in A) = P_\theta(A)$

$\to P(X \in A) \overset{?}{=} \int_A p(x)\, \mu(dx)$ $\quad \hookrightarrow$ densidad

Def: Familia dominada



Una familia paramétrica $\mathcal{P} = \{P_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ es dominada si existe μ tal que $\forall \theta \in \Theta$ P_θ es Absolutamente continua (denotado $P_\theta \ll \mu$), es decir,

$$\forall \theta \in \Theta, A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \; \mu(A) = 0 \Rightarrow P_\theta(A) = 0$$

(σ-álgebra)

$\therefore$ si $\exists A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \mid P_\theta(A) > 0 \Rightarrow \mu(A) > 0$

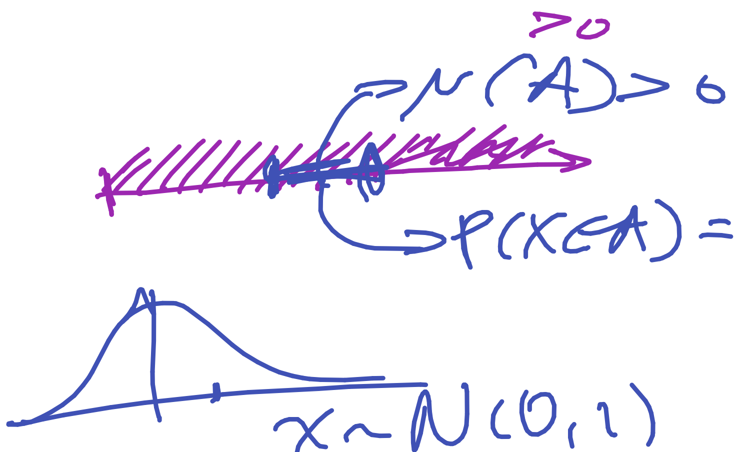
$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), P_\theta(X \in A) = \int_A p_\theta(x)\, \mu(dx)$

$\boxed{p_\theta = \text{densidad } d\mathcal{X} \text{ derivada de Radon Nikodym}}$

> 0

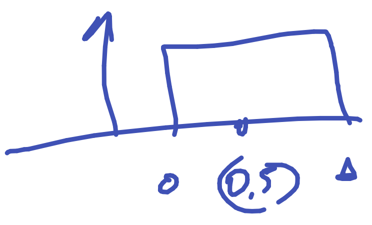
$\Rightarrow \mu(A) > 0$

$\Rightarrow P(X \in A) = 0.3$



$X \sim N(0,1)$

$P(X = 1.3) = 0$



$0 \quad 0.5 \quad 1$

** clave ahora densidad de prob $P(X \in A) = \int_A p(x)\, dx$

cont. $\quad$ Leb

Recordemos que queremos evaluar si un estadístico $T: \mathcal{X} \to \mathcal{T}$, $x \to T(x)$ es suficiente. ($P(X \in A \mid T(x) = t)$ no depende de θ)

Teorema de Neyman-Fisher: $\mathcal{P} = \{P_\theta ; \theta \in \Theta\}$ entonces $T(x)$ es un estadístico suficiente si la densidad de P_θ, denotada p_θ admite la factorización

$$p_\theta(x) = \underbrace{g_\theta(T(x))}_{\text{fn} \geq 0}\, \underbrace{h(x)}_{\text{función} \geq 0}$$

Ejemplo: Bernoulli $x = (x_1 \dots x_n)$; $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

$$P(X = x) = \underbrace{\theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n - \sum x_i}}_{g_\theta(T(x))} \cdot \underbrace{1}_{h(x)}$$

N-F $T(x)$ es suff.