Modelado de sistemas fisiológicos

Circuito RLC

1. Dos mallas
- Hay dos variables dependientes: Corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$.
- Un inductor y un capacitor, sistema de segundo orden

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{?s^2 + ?s + ?}{as^2 + bs + c}$$

Ecuaciones principales

$$V_e(t) = Ri_1(t) + L\frac{d[i_1(t) - i_2(t)]}{dt} + R[i_1(t) - i_2(t)]$$

$$L\frac{d[i_1(t) - i_2(t)]}{dt} + R[i_1(t) - i_2(t)] = Ri_2(t) + Ri_2(t) + \frac{1}{C}\int i_2(t)\,dt$$

$$V_s(t) = Ri_2(t) + \frac{1}{C}\int i_2(t)\,dt$$

Transformada de Laplace

$$V_e(s) = [RI_1(s) + L(s)[I_1(s) - I_2(s)] + R[I_1(s) - I_2(s)]$$

$$Ls[I_1(s) - I_2(s)] + R[I_1(s) - I_2(s)] = 2RI_2 + \frac{I_2(s)}{Cs}$$

$$V_s(s) = RI_2(s) + \frac{I_2(s)}{Cs}$$

Procedimiento algebraico

Se realiza la suma algebraica en el voltaje de salida:

$$V_s(s) = \frac{CRs + 1}{Cs} I_2(s)$$

Se despeja $I_1(s)$ y se agrupa $I_2(s)$ en la ecuación de la segunda malla.

$$LsI_1(s) - LsI_2(s) + RI_1(s) - RI_2(s) = 2RI_2(s) + \frac{I_2(s)}{Cs}$$

$$LsI_1(s) + RI_1(s) = 2RI_2(s) + \frac{I_2(s)}{Cs} + LsI_2(s) + RI_2(s)$$

$$(Ls+R)I_1(s) = \left(3R + 1/Cs + Ls\right) I_2(s)$$

$$(Ls+R)I_1(s) = \frac{CLs^2+3CRs+1}{Cs(Ls+R)} I_2(s)$$

Se sustituye $I_1(s)$ en la ecuación de la primera malla.

$$V_e(s) = RI_1(s) + LsI_1(s) - LsI_2(s) + RI_1(s) - RI_2(s)$$

$$V_e(s) = (R+Ls+R)I_1(s) - (Ls+R)I_2(s)$$

$$V_e(s) = (R+Ls+R)\frac{CLs^2+3CRs+1}{Cs(Ls+R)} I_2(s) - (Ls+R)I_2(s)$$

$$V_e(s) = \left[(2R+Ls)\frac{CLs^2+3CRs+1}{Cs(Ls+R)} - (Ls+R)\right]I_2(s)$$

$$V_e(s) = \Big[(2R+Ls)\Big(\frac{CLs^2+3CRs+1}{Cs(Ls+R)} - (Ls+R)\Big]I_2(s)$$

$$V_e(s) = \left[\frac{(CL^2s^3 + 5CLRs^2 + Ls + 6CR^2s + 2R) - (CL^2s^3 + 2CLRs^2 + CR^2s)}{Cs(Ls+R)}\right]I_2(s)$$

$$V_e(s) = \frac{3CLRs^2 + (5CR^2+L)s + 2R}{Cs(Ls+R)} I_2(s)$$

Función de transferencia

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{\frac{CRs+1}{Cs} I_2(s)}{\frac{3CLRs^2+(5CR^2+L)s+2R}{Cs(Ls+R)} I_2(s)} =$$

$$\frac{(CRs+1)(Ls+R)}{3CLRs^2+(5CR^2+L)s+2R}$$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{CLRs^2+(CR^2+L)s+R}{3CLRs^2+(5CR^2+L)s+2R}$$

Modelo de ecuaciones integro-diferenciales

NOTA: Cuando se realizan el análisis por mallas, se debe respetar las variables dependientes, es decir, las corrientes, recordando que, solamente se pueden despejar de términos donde no se estén derivando o integrando, además, se sugiere que el voltaje de entrada sea un término positivo.

Se despeja $i_1(t)$ de la ecuación de la primera malla.

$$i_1(t) = \left[V_e(t) - L\frac{d[i_1(t)-i_2(t)]}{dt} + Ri_2(t) \right] \frac{1}{2R}$$

Por lo tanto, se despeja $i_2(t)$ de la ecuación de la segunda malla:

$$i_2(t) = \left[L\frac{d[i_1(t)-i_2(t)]}{dt} + Ri_1(t) - \frac{1}{C}\int i_2(t)\,dt \right] \frac{1}{3R}$$

Con la siguiente expresión como salida:

$$V_s(t) = R i_2(t) + 1/C \int i_2(t)\, dt$$

Error estacionario

El error estacionario (con estado), se calcula mediante el siguiente límite.

$$e(s) = \lim_{s \to 0} s\, V_e(s) \left[1 - \frac{V_s(s)}{V_e(s)} \right] = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{s}$$

$$\left[1 - \frac{CLRs^2 + (CR^2 + L)s + R}{3CLRs^2 + (5CR^2 + L)s + 2R} \right] = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

NOTA: En este cálculo se debe considerar la entrada como un escalón unitario, es decir,

$$V_e(t) = 1 \text{ por lo tanto, } V_e(s) = \frac{1}{s}$$

Análisis de estabilidad

Para determinar la estabilidad de un sistema en lazo abierto, se calculan los polos de la función de transferencia, es decir,

$$3CLRs^2 + (5CR^2 + L)s + 2R = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow a = 3CLR,\ b = 5CR^2 + L,\ c = 2R$$

$$\lambda_1 = -17730.4626$$

$$\lambda_2 = -0.2025$$

Por lo tanto el sistema es estable dado que ambas raíces son negativas reales, entonces, el sistema presentará una respuesta sobre-amortiguada a un escalón unitario de entrada.