

**А. Ю. ТЭТТЭР, Т. В. КОВАЛЕВА, А. В. ПОНОМАРЕВ**

**УСТАНОВИВШИЕСЯ РЕЖИМЫ  
В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С ИСТОЧНИКАМИ  
ПОСТОЯННОГО И СИНУСОИДАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА**

**ОМСК 2023**

Министерство транспорта Российской Федерации  
Федеральное агентство железнодорожного транспорта  
Омский государственный университет путей сообщения

---

А. Ю. Тэттэр, Т. В. Ковалева, А. В. Пономарев

УСТАНОВИВШИЕСЯ РЕЖИМЫ  
В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С ИСТОЧНИКАМИ  
ПОСТОЯННОГО И СИНУСОИДАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА

Учебное пособие

Омск 2023

УДК 621.3(075.8)  
ББК 31.211я73  
Т96

**Тэттэр А. Ю. Установившиеся режимы в линейных электрических цепях с источниками постоянного и синусоидального напряжения и тока:** Учебное пособие / А. Ю. Тэттэр, Т. В. Ковалева, А. В. Пономарев; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2023. 172 с.

Пособие содержит элементы теории, демонстрационные примеры и задачи для самостоятельного решения по разделу «Режимы постоянного и синусоидального тока в линейных электрических цепях» дисциплины «Теоретические основы электротехники».

Этот раздел обеспечивает первый этап изучения электромагнитных процессов в электрических цепях и затрагивает два класса электрических цепей: линейные электрические цепи с источниками постоянного напряжения (ЭДС) и тока и линейные электрические цепи с источниками синусоидального напряжения (ЭДС) и тока.

Подобные электрические цепи в широком разнообразии выступают в качестве самостоятельных объектов для исследования и как удобные для исследований схемы замещения различных электротехнических устройств.

При подготовке настоящего пособия использовались учебно-методические разработки доктора технических наук, профессора В. Н. Зажирко.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров «Электроэнергетика и электротехника» и специальности «Системы обеспечения движения поездов».

Библиогр.: 6 назв. Табл. 4. Рис. 101. Прил. 5.

Рецензенты: доктор техн. наук, профессор В. Н. Горюнов;  
доктор техн. наук, доцент К. И. Никитин;  
доктор техн. наук, профессор О. А. Сидоров.

ISBN 978-5-949-41315-9

---

© Омский гос. университет  
путей сообщения, 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	6
1. Электрические цепи и их параметры .....	7
1.1. Ток и напряжение в электрических цепях .....	7
1.2. Схемы замещения и виды электрических цепей .....	8
1.3. Элементы электрических цепей .....	11
1.3.1. Пассивные элементы электрических цепей .....	11
1.3.2. Активные элементы электрических цепей .....	15
1.4. Режимы электрических цепей .....	17
2. Электрические цепи постоянного тока .....	18
2.1. Закон Ома и законы Кирхгофа в электрических цепях .....	21
2.1.1. Последовательность определения токов ветвей по законам	
Кирхгофа .....	23
2.2. Метод контурных токов .....	24
2.2.1. Последовательность определения токов ветвей методом кон-	
турных токов .....	25
2.3. Метод узловых потенциалов .....	26
2.3.1. Последовательность определения токов ветвей методом узло-	
вых потенциалов .....	28
2.4. Принцип компенсации .....	29
2.5. Метод активного двухполюсника (эквивалентного источника	
или генератора) .....	30
2.6. Принцип наложения .....	33
2.7. Принцип взаимности .....	34
2.8. Баланс мощностей .....	34
2.9. Преобразования электрических цепей .....	35
2.9.1. Эквивалентные преобразования соединений звездой и треу-	
гольником .....	35
2.9.2. Преобразования параллельного соединения ветвей с источ-	
никами ЭДС .....	36
2.10. Примеры расчета электрических цепей постоянного тока .....	38
2.10.1. Применение законов Кирхгофа .....	38
2.10.2. Метод контурных токов .....	39
2.10.3. Метод узловых потенциалов .....	41
2.10.4. Проверка выполнения баланса мощностей .....	42
2.10.5. Метод активного двухполюсника (эквивалентного источника) .....	44

2.10.6. Преобразование электрических цепей .....	45
2.10.7. Построение потенциальной диаграммы .....	48
2.11. Задачи для самостоятельного решения .....	50
2.11.1. Определение входного сопротивления .....	50
2.11.2. Определение напряжения на участке цепи .....	56
2.11.3. Методы расчета .....	63
2.11.4. Дополнительные задачи для самостоятельного решения .....	68
3. Линейные электрические цепи с источниками синусоидальных напряжения и тока («цепи синусоидального тока») .....	73
3.1. Синусоидальные напряжение, ток и ЭДС .....	73
3.2. Синусоидальные режимы простейших электрических цепей .....	75
3.3. Основы комплексного (символического) метода расчета элект- рических цепей синусоидального тока .....	83
3.4. Действующие значения синусоидальных напряжения и тока .....	88
3.5. Комплексные соотношения для трехэлементных электричес- ких цепей .....	90
3.6. Особенности применения комплексного метода для исследова- ния разветвленных электрических цепей .....	96
3.7. Виды мощности в электротехнике .....	99
3.7.1. Мгновенная мощность .....	99
3.7.2. Активная мощность .....	101
3.7.3. Реактивная мощность .....	103
3.7.4. Мощность в комплексной форме, или комплексная мощность .....	104
3.7.5. Баланс мощностей .....	105
3.8. Пример расчета разветвленной цепи синусоидального тока .....	107
3.9. Задачи для самостоятельного решения .....	117
3.10. Электрические цепи синусоидального тока с магнитно (индук- тивно)-связанными элементами .....	121
3.10.1. Согласное и встречное включение магнитно-связанных ка- тушек .....	121
3.10.2. Магнитно-связанные цепи без электрической связи .....	125
3.10.3. Особенности расчета разветвленных цепей с магнитно-свя- занными элементами .....	128
3.10.4. Примеры расчета электрических цепей с магнитно-свя- занными элементами .....	130
3.10.5. Задачи для самостоятельного решения .....	133

3.11. Резонансные явления в электрических цепях .....	135
3.11.1. Резонанс напряжений .....	135
3.11.2. Резонанс токов .....	140
3.11.3. Резонанс в электрических цепях произвольной структуры .....	143
3.11.4. Задачи для самостоятельного решения .....	156
Библиографический список .....	157
Приложение 1. Метод эквивалентного генератора (источника) .....	158
Приложение 2. Вывод формул для эквивалентного преобразования соединений звездой и треугольником .....	160
Приложение 3. Вывод формул для преобразования параллельного соединения ветвей с ЭДС .....	163
Приложение 4. Примеры работы с комплексными числами .....	165
Приложение 5. Измерения с помощью осциллографа .....	168
Заключение.....	171

## ВВЕДЕНИЕ

Раздел «Установившиеся режимы в линейных электрических цепях с источниками постоянного и синусоидального напряжения и тока» является частью дисциплины «Теоретические основы электротехники».

Этот раздел обеспечивает первый этап изучения электромагнитных процессов в электрических цепях и затрагивает два класса электрических цепей: линейные электрические цепи с источниками постоянного напряжения (ЭДС) и тока и линейные электрические цепи с источниками синусоидального напряжения (ЭДС) и тока.

Внимание к теории электрических цепей объясняется тем, что, с одной стороны, электрические цепи выступают как самостоятельные объекты для исследования, а с другой – как удобные для исследований схемы замещения различных электротехнических устройств.

Данное учебное пособие состоит из трех разделов.

В первом разделе рассматриваются общие соотношения и параметры электрических цепей.

Предметом изучения второго раздела являются электрические цепи с сосредоточенными параметрами, содержащие источники постоянных напряжения (ЭДС) и тока и методы их расчета.

Третий раздел посвящен изучению электрических цепей, работающих в синусоидальных режимах.

Пособие содержит элементы теории, демонстрационные примеры и задачи для самостоятельного решения.

# 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И ИХ ПАРАМЕТРЫ

## 1.1. Ток и напряжение в электрических цепях

**Электрической цепью** называется совокупность устройств и объектов, образующих путь для протекания электрического тока, электромагнитные процессы в которой могут быть описаны с помощью понятий об источниках напряжения и тока, электрическом токе и падении напряжения.

Электрические цепи состоят из источников и приемников. В источниках химическая, тепловая, механическая энергия преобразуется в электрическую. В приемниках электрическая энергия преобразуется в другие ее виды.

**Электрический ток** – явление направленного движения носителей заряда. Численно ток определяют как предел отношения количества электричества  $\Delta q$ , переносимого заряженными частицами сквозь рассматриваемое сечение проводника за некоторый промежуток времени, к этому промежутку времени  $\Delta t$ , когда он стремится к нулю:

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}. \quad (1.1)$$

Электрический заряд  $q$  измеряется в кулонах (Кл), время  $t$  в секундах (с), а ток  $i$  в амперах (А).

Как известно, электрический ток в металлах связан с направленным движением электронов. В электротехнике по историческим причинам направление тока выбрано противоположным, т. е. представляется как направление перемещения положительных зарядов. Понятия «положительный» и «отрицательный» ток приобретают смысл, только если направление тока в проводнике сравнивается с заранее выбранным ориентиром – **положительным направлением тока**, которое выбирается произвольно и указывается стрелкой на схеме.

**Электрический потенциал** – отношение потенциальной энергии  $W$  пробного заряда  $q$ , помещенного в рассматриваемую точку, к величине этого заряда:

$$\varphi = \frac{W}{q}, \quad (1.2)$$

где энергия  $W$  измеряется в джоулях (Дж), а потенциал  $\varphi$  – в вольтах (В).



**Падением напряжения** между двумя точками схемы называется разность потенциалов этих точек:

$$u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \Delta\varphi. \quad (1.3)$$

При решении задач напряжение, как правило, обозначается двойным индексом, показывая разность потенциалов каких именно точек учитывается. Эта величина определяет работу  $A$  сил поля при перемещении единичного положительного заряда  $q$  из одной точки в другую:

$$\Delta\varphi = \frac{A}{q}. \quad (1.4)$$

Для падения напряжения тоже выбирается положительное направление, которое совпадает с направлением тока, так как положительные заряды под действием электрического поля перемещаются от точек с большими потенциалами к точкам, имеющим более низкий потенциал.

Таким образом, основными физическими величинами, влияющими на режим работы электрических цепей, являются электрический ток (описывающий интенсивность движения заряженных частиц) и падение напряжения (определяющее работу, совершаемую электрическим полем). Зависимость двух этих величин при различных режимах работы электрических цепей и исследуется в рамках дисциплины «Теоретические основы электротехники».

## 1.2. Схемы замещения и виды электрических цепей

Электрические цепи находят широкое применение во всех сферах нашей жизни. Реальные электрические цепи могут содержать такие элементы, как резисторы, катушки индуктивности, конденсаторы, соединительные провода и пр. В то же время тот или иной элемент цепи характеризуется свойствами, которые указывают на присутствие в нем совокупности разнородных физических параметров. Например, при низких частотах катушка представляет собой активно-индуктивную систему, т. е. ее так называемая **схема замещения** содержит идеализированные элементы – сопротивление  $r$  и индуктивность  $L$ . При высоких частотах добавляется еще третий параметр – межвитковая емкость  $C$ , поэтому схема замещения становится трехэлементной ( $r$ - $L$ - $C$ -схемой).

Конденсатор характеризуется наличием емкостных свойств и потерь электрической энергии в диэлектрике, поэтому его схема замещения в общем случае является двухэлементной ( $r$ - $C$ -схема). Двухпроводная линия, например, характеризуется четырьмя параметрами: сопротивлением, индуктивностью, проводимостью изоляции и емкостью между проводами. Следовательно, свойства такой электрической цепи можно описать с использованием четырех указанных параметров.

Находящие широкое применение различные трансформаторы характеризуются кроме указанных еще одним параметром – взаимной индуктивностью, которая определяет степень магнитной связи между обмотками трансформатора. Следовательно, в описании свойств трансформатора должна участвовать схема (схема замещения), содержащая сопротивление, индуктивность и взаимную индуктивность. При высокой частоте добавляется еще и емкость.

Приведенные примеры показывают, что основные свойства реальных элементов линейных электрических цепей можно описать с использованием четырех параметров: сопротивления  $r$ , индуктивности  $L$ , емкости  $C$  и взаимной индуктивности  $M$ . Именно из этого набора параметров формируются так называемые схемы замещения, или эквивалентные схемы, которые позволяют проводить математическое исследование электромагнитных процессов в различных электротехнических системах и устройствах.

В дальнейшем под параметрами электрических цепей будем понимать параметры эквивалентных расчетных схем, составленных из идеализированных элементов, или схем замещения, которые адекватно отражают электромагнитные процессы в реальных электротехнических системах и устройствах.

В практике используются различные виды, или классы, электрических цепей, разделяемые по определенным, наиболее существенным признакам:

- электрические цепи постоянного и переменного тока;
- линейные и нелинейные электрические цепи;
- электрические цепи с сосредоточенными и распределенными параметрами.

Предметом изучения данного раздела дисциплины «Теоретические основы электротехники» являются линейные электрические цепи постоянного и переменного синусоидального тока с сосредоточенными параметрами [1 – 6].

Понятие линейности электрической цепи состоит в следующем. Каждый идеализированный элемент цепи ( $r$ ,  $L$ ,  $C$ ) характеризуется зависимостью напряжения на нем от протекающего тока. Например, в случае сопротивления  $r$  (рис. 1.1,  $a$ ) такая зависимость определяется **законом Ома**:

$$u = ri. \quad (1.5)$$

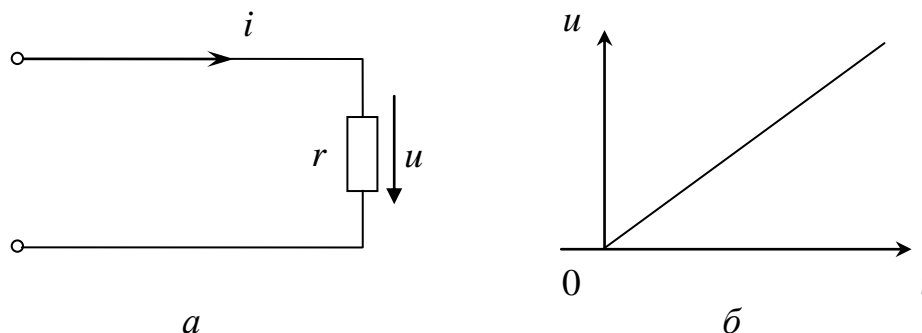


Рис. 1.1. Сопротивление:  
 $a$  – изображение на схеме;  $b$  – вольт-амперная характеристика

В линейной цепи сопротивление  $r$  не зависит от величины тока ( $r = \text{const}$ ), поэтому зависимость  $i(u)$  – прямая линия, проходящая через начало координат. Отсюда и название – линейный элемент электрической цепи.

Катушка индуктивности и конденсатор и соответствующие им идеализированные элементы  $L$  и  $C$  при выполнении условий  $L = \text{const}$  и  $C = \text{const}$  также имеют линейные характеристики и являются линейными элементами.

Линейная электрическая цепь содержит только линейные элементы.

Характеристики нелинейных элементов (диодов, варисторов, транзисторов, катушек с ферромагнитными сердечниками, стабилитронов и пр.) не являются прямыми линиями. Электрическая цепь, содержащая хотя бы один нелинейный элемент, является нелинейной.

Наконец, электрическая цепь является системой с сосредоточенными параметрами, если потери электрической энергии локализуются в сопротивлениях  $r$ , магнитные поля – в индуктивностях  $L$  и электрические поля – в емкостях  $C$ . Количество таких элементов в схемах замещения может быть различным, но все они являются сосредоточенными, поэтому ток и напряжение рассматриваются зависящими только от времени.

Сопротивление, индуктивность и емкость цепей с распределенными параметрами в отличие от цепей с сосредоточенными параметрами распределены в пространстве, поэтому напряжение и ток в них зависят не только от времени,

но и от пространственной координаты. Примером таких цепей являются различные воздушные и кабельные линии из области энергетики, проводной связи, радиотехники, передачи информации.

### 1.3. Элементы электрических цепей

В дальнейшем изложении под элементами электрических цепей будем понимать идеализированные элементы схем замещения, используемых для анализа напряжения, тока и других физических величин в реальных электротехнических устройствах и системах.

Элементы электрических цепей разделяются на пассивные и активные. К пассивным элементам относятся сопротивление, индуктивность, емкость и взаимная индуктивность, к активным – источники напряжения (ЭДС) и источники тока.

#### 1.3.1. Пассивные элементы электрических цепей

**Сопротивление  $r$**  (рис.1.2, *a*) – это идеализированный элемент электрической цепи, в котором происходит необратимый процесс преобразования электрической энергии в тепловую.

Ток и напряжение в сопротивлении  $r$  связаны законом Ома:

$$\begin{cases} u_r = r i_r; \\ i_r = \frac{u_r}{r} = g u_r, \end{cases} \quad (1.6)$$

где  $g = 1 / r$  – электрическая проводимость.

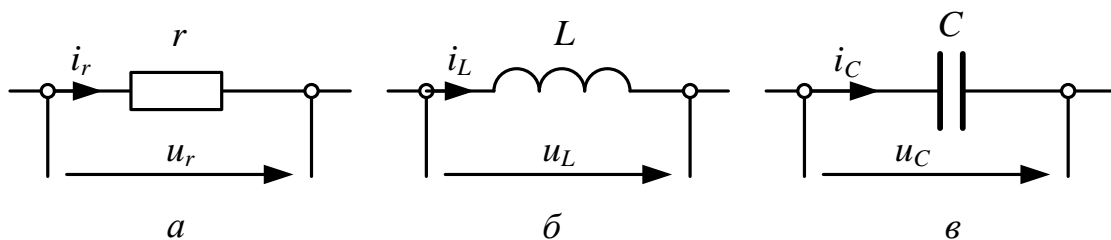


Рис. 1.2. Одноэлементные схемы:  
*a* – сопротивление; *б* – индуктивность; *в* – емкость

Единицы измерения: тока – ампер (А), напряжения – вольт (В), сопротивления – Ом, проводимости – сименс (См или Ом<sup>-1</sup>).

Произведение напряжения и тока есть мощность, измеряемая в ваттах (Вт):

$$p_r = u_r i_r. \quad (1.7)$$

Электрическая энергия, измеряемая в джоулях (Дж), определяется как интеграл:

$$W_r = \int_0^t p_r dt = \int_0^t u_r i_r dt = \int_0^t r i_r^2 dt = r \int_0^t i_r^2 dt. \quad (1.8)$$

**Индуктивность  $L$**  измеряется в генри (Гн) – это идеализированный элемент электрической цепи, накапливающий энергию магнитного поля.

Переменный ток  $i_L$  наводит переменный магнитный поток  $\Phi$ , который, в свою очередь, обуславливает появление ЭДС самоиндукции:

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (1.9)$$

где  $\Psi$  – потокосцепление, измеряемое, как и магнитный поток  $\Phi$ , в веберах (Вб).

Для катушки, имеющей, например,  $w$  витков, потокосцепление и магнитный поток  $\Phi$  связаны соотношением:

$$\Psi = w\Phi. \quad (1.10)$$

Связь между потокосцеплением и током определяется формулой:

$$\Psi = Li_L. \quad (1.11)$$

В линейной электрической цепи  $L = \text{const}$ , поэтому подстановка соотношения (1.11) в уравнение (1.9) приводит к формуле:

$$e_L = -L \frac{di_L}{dt}. \quad (1.12)$$

Падение напряжения на индуктивности  $u_L$ , как будет показано в подразд. 2.4, равно по величине ЭДС самоиндукции  $e_L$  и противоположно ей по знаку:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}. \quad (1.13)$$

Произведение  $p_L = u_L i_L$  также трактуется как мощность. Интеграл от этой величины представляет собой энергию магнитного поля в индуктивности:

$$W_L = \int_0^t p_L dt = \int_0^t u_L i_L dt = \int_0^t L \frac{di_L}{dt} i_L dt = L \int_0^i i_L di_L = \frac{1}{2} Li_L^2. \quad (1.14)$$

**Емкость  $C$**  измеряется в фарадах (Ф) и рассматривается как идеализированный элемент электрической цепи, накапливающий энергию электрического поля.

В качестве исходного здесь можно принять соотношение между зарядом  $q$  и напряжением  $u_C$ :

$$q = Cu_C, \quad (1.15)$$

где емкость  $C$  выступает как коэффициент пропорциональности между зарядом и напряжением. Единица измерения заряда – кулон (Кл).

Емкостный ток  $i_C$  как количество заряда, проходящего через емкость в единицу времени, определяется формулой:

$$i_C = \frac{dq}{dt}. \quad (1.16)$$

При выполнении условия  $C = \text{const}$  и с учетом уравнения (1.15) приходим к выражению:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}. \quad (1.17)$$

Как и в предыдущих случаях, мощность выражается произведением  $p_C = u_C i_C$ , а энергия электрического поля

$$W_C = \int_0^t p_C dt = \int_0^t u_C i_C dt = \int_0^t u_C C \frac{du_C}{dt} dt = C \int_0^{u_C} u_C du_C = \frac{1}{2} Cu_C^2. \quad (1.18)$$

**Взаимная индуктивность  $M$** , как параметр, присутствует в системах контуров или катушек, связанных между собой через магнитное поле.

На рис. 1.3 изображена система двух магнитно- или индуктивно-связанных катушек.

Ток  $i_1$  протекает по виткам первой катушки. Вторая катушка разомкнута и расположена в магнитном поле первой катушки.

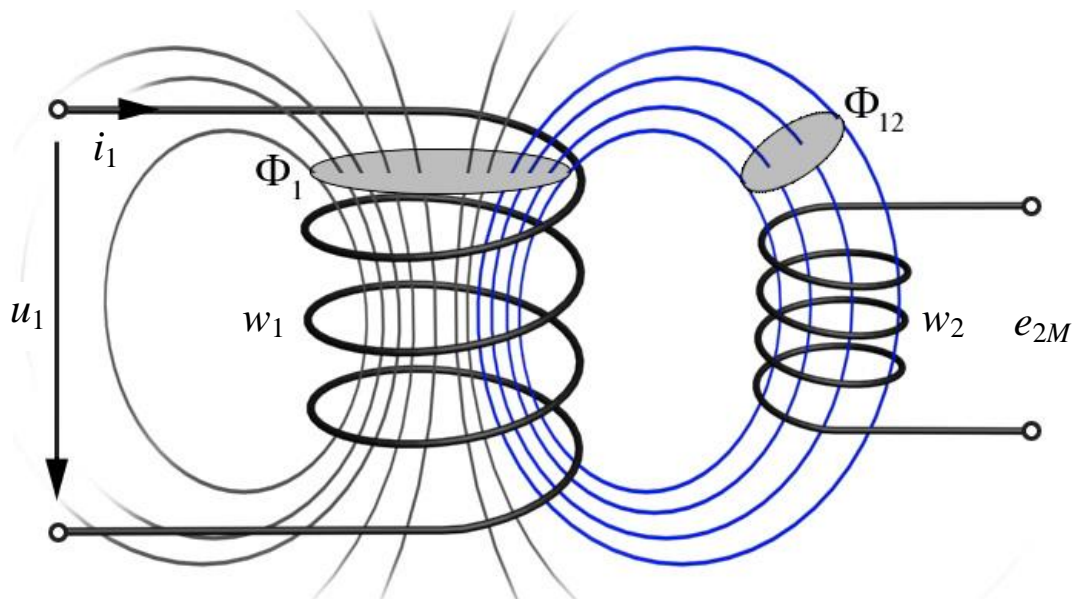


Рис. 1.3. Магнитное поле в системе двух катушек

Часть магнитного потока первой катушки  $\Phi_1$ , обозначенная на рис. 1.3 как  $\Phi_{12}$ , проходит через сечение витков второй катушки или, как говорят, сцеплена с витками второй катушки.

Магнитному потоку  $\Phi_{12}$  соответствует потокосцепление  $\Psi_{12} = w_2 \Phi_{12}$ , которое с током первой катушки связано соотношением:

$$\Psi_{12} = M i_1. \quad (1.19)$$

Потокосцепление  $\Psi_{12}$  называют потокосцеплением взаимной индукции. Взаимная индуктивность  $M$  выступает как коэффициент пропорциональности между потокосцеплением  $\Psi_{12}$  и обуславливающим его током  $i_1$ .

Магнитный поток взаимной индукции  $\Phi_{12}$  наводит во второй катушке ЭДС взаимной индукции

$$e_{2M} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt}, \quad (1.20)$$

которая при  $M = \text{const}$  записывается как

$$e_{2M} = -M \frac{di_1}{dt}. \quad (1.21)$$

Если токи протекают в обеих катушках, то взаимная магнитная связь будет двухсторонней, т. е. ЭДС взаимной индукции будет наводиться и в первой, и во второй катушке. При этом

$$\begin{cases} e_{1M} = -M \frac{di_2}{dt}; \\ e_{2M} = -M \frac{di_1}{dt}, \end{cases} \quad (1.22)$$

где  $e_{1M}$  и  $e_{2M}$  – ЭДС взаимной индукции первой и второй катушек соответственно.

### 1.3.2. Активные элементы электрических цепей

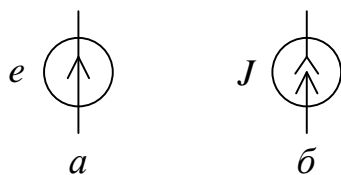


Рис. 1.4. Активные элементы:  
а – источник напряжения (ЭДС);  
б – источник тока

**Источник напряжения (ЭДС)** на схемах обозначается, как показано на рис. 1.4, а. Это идеализированный элемент электрической цепи. Его внутреннее сопротивление принимается равным нулю, что обуславливает независимость ЭДС от значения тока такого источника. Теоретически ток может изменяться от нуля до бесконечности, поэтому источник ЭДС является источником бесконечной мощности.

Сделано такое предположение для удобства математического исследования режимов электрических цепей: любые изменения параметров цепи, подключенной к источнику напряжения, не влияют на его выходное напряжение.

Реальные источники напряжения имеют внутренние сопротивления. На рис. 1.5, а приведены внешние характеристики идеального и реального источников напряжения для случая, когда величины  $E$ ,  $I$  и  $r_{\text{вн}}$  являются постоянными в том смысле, что изменение тока осуществляется только за счет параметров цепи нагрузки.

На схемах замещения реальные источники напряжения чаще всего представляются двухэлементной схемой, как показано на рис. 1.5, б.

Из рис. 1.5, а следует, что ЭДС  $E$ , т. е. ЭДС идеализированного источника (напряжение на его зажимах), не зависит от величины тока, а зависимость напряжения от тока реального источника падающая, поскольку с увеличением



тока возрастает вычитаемое из ЭДС падение напряжения на внутреннем сопротивлении  $r_{\text{вн}}$ .

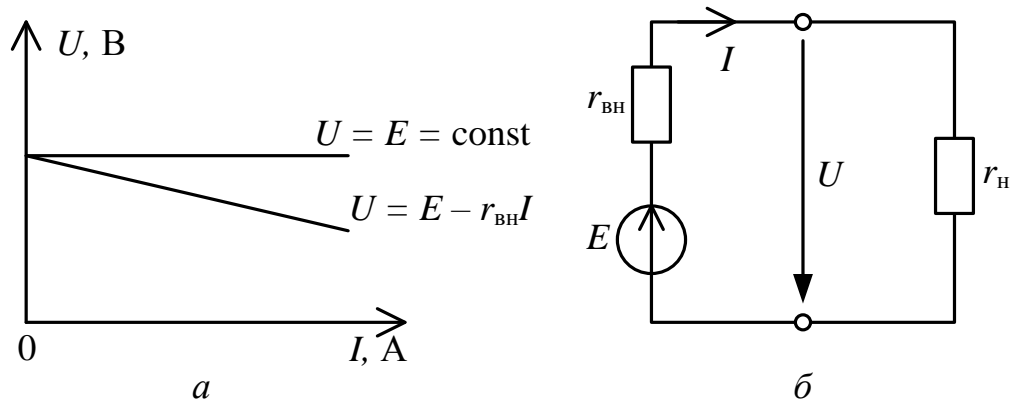


Рис. 1.5. Источник напряжения:  
 $a$  – внешние характеристики;  $b$  – схема замещения

Источник тока (см. рис. 1.4,  $b$ ) – идеализированное понятие. Внутреннее его сопротивление принято бесконечным, что позволяет обеспечить независимость значения тока  $J$  от величины  $r_{\text{н}}$ . При изменении  $r_{\text{н}}$  значение  $J$  остается постоянным, а изменяется напряжение на зажимах источника тока (рис. 1.6,  $a$ ). Поскольку теоретически это напряжение может изменяться от нуля до бесконечности, то источник тока, как и источник напряжения, является источником бесконечной мощности.

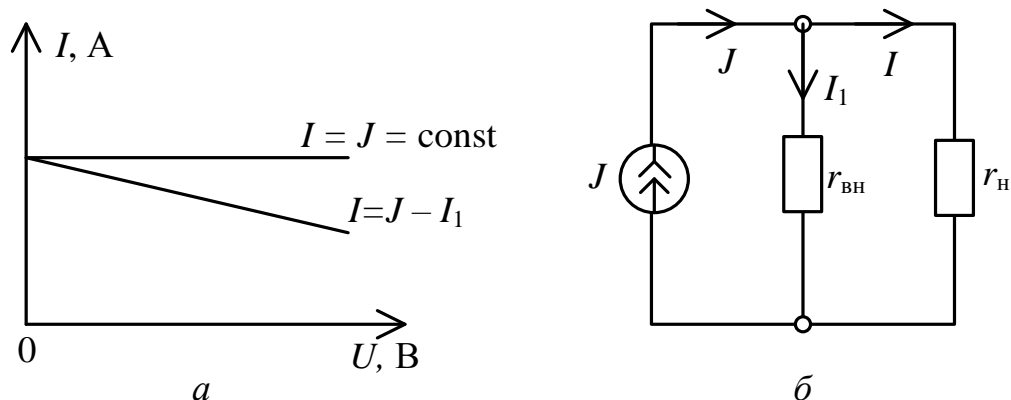


Рис. 1.6. Источник тока:  
 $a$  – внешние характеристики;  $b$  – схема замещения

На практике в основном приходится иметь дело с источниками напряжения. К источникам тока могут приближаться реальные источники с большими внутренними сопротивлениями, которые встречаются в области электроники и вычислительной техники (рис. 1.6,  $b$ ).

## 1.4. Режимы электрических цепей

Режимы электрических цепей подразделяются на установившиеся и переходные (нестационарные).

В установившемся режиме линейная электрическая цепь находится в состоянии равновесия, когда токи и падения напряжения на ее элементах неизменны или являются периодическими функциями времени. При этом обязательно выполняется энергетический баланс между источниками энергии и пассивными элементами цепи.

Переходные процессы возникают при изменении параметров цепи, когда электрическая цепь переходит из одного установившегося состояния в другое, например, при включении и выключении цепей, при подключении и отключении отдельных ветвей, при скачкообразном изменении каких-либо сопротивлений, индуктивностей и емкостей, в различных аварийных режимах и пр.

Установившиеся режимы математически описываются алгебраическими уравнениями или соотношениями с действительными или комплексными коэффициентами. Математическим аппаратом исследования переходных процессов в линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами являются дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Предметом изучения настоящего раздела дисциплины являются только установившиеся режимы. При этом рассматриваются, как уже указывалось выше, два класса цепей: цепи с постоянными током и напряжением («цепи постоянного тока») и цепи с периодическими синусоидальными током и напряжением («цепи синусоидального тока»).

Математический аппарат цепей постоянного тока удобен для изучения основных методов анализа электрических цепей, находящих применение при исследовании и других классов электрических цепей.

Важность изучения методов исследования цепей синусоидального тока заключается, с одной стороны, в том, что здесь закладываются теоретические основы понимания процессов, характеризующих режимы систем переменного тока в энергетике, электромеханике и в других областях; с другой стороны, закладываемая в этом разделе теоретическая база необходима для понимания в дальнейшем различных частотных представлений и методов, широко применяемых во многих отраслях техники.

В цепях постоянного тока напряжение на элементах цепи и ток – постоянные величины. Вследствие этого напряжение на индуктивности и ток в емкости приобретают нулевые значения, что следует из формул (1.13) и (1.17), в силу равенства нулю соответствующих производных:

$$\begin{cases} u_L = L \frac{di_L}{dt} = 0; \\ i_C = C \frac{du_C}{dt} = 0. \end{cases} \quad (1.23)$$

Поэтому индуктивность на постоянном токе представляет собой участок с нулевым напряжением (короткозамкнутый участок), а емкость – участок с нулевым током (разрыв цепи). Вследствие этого в схемах замещения реальных элементов используются только сопротивления  $r$ . В качестве активных элементов выступают ЭДС и источники тока. Взаимная индуктивность  $M$  в данном случае также не проявляется, несмотря на то, что физически магнитные связи присутствуют.

Цепи синусоидального тока характеризуются полным набором идеализированных элементов –  $r$ ,  $L$ ,  $C$  и  $M$ . Присутствие или отсутствие того или иного из указанных элементов зависит от конкретной схемы.

## 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Постоянный ток обусловлен действием источников постоянного напряжения (ЭДС) и источников постоянного тока. Используемые при анализе режимов работы электрических схем основные физические величины – ЭДС, напряжение, ток и потенциал – имеют обозначения:  $E$ ,  $U$ ,  $I$ ,  $\varphi$ .

Основой для построения различных алгоритмов или способов расчета электрических цепей являются первый и второй законы Кирхгофа. Многие частные задачи решаются с использованием преобразования цепей, упрощающих их топологию (конфигурацию). При анализе электрических цепей выделяют участки с параллельным и последовательным соединением элементов.

**Последовательным** называют соединение, при котором через рассматриваемые участки электрической цепи возможно прохождение только одного и того же электрического тока. Последовательно соединенные элементы электрической цепи образуют **ветвь** – участок цепи, через который протекает один и

тот же электрический ток. Каждая ветвь располагается между двумя **узлами** – местами соединения ветвей электрической цепи.

Соединенные последовательно элементы можно объединить в один эквивалентный. Например, на рис. 2.1 сопротивления  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$  соединены последовательно. При этом по всем трем сопротивлениям протекает один и тот же ток  $I$ . Объединив три последовательно соединенных элемента, получим одно эквивалентное сопротивление  $r_3$ , расположенное между теми же крайними точками ( $a$  и  $d$ ). Промежуточные точки ( $b$  и  $c$ ) при объединении исчезают. Через эквивалентное сопротивление  $r_3$  протекает тот же ток  $I$ , что и по исходной ветви. Величина  $r_3$  может быть определена по формуле:

$$r_3 = r_1 + r_2 + r_3. \quad (2.1)$$

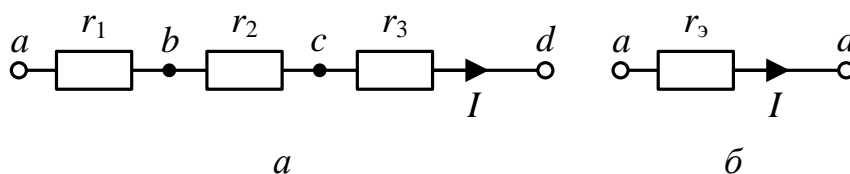


Рис. 2.1. Замена последовательного соединения эквивалентным:  
 $a$  – последовательное соединение сопротивлений;  $б$  – эквивалентное сопротивление

**Параллельным** называется соединение, при котором рассматриваемые участки электрической цепи (ветви) присоединяются к одной паре узлов. При параллельном соединении ветвей по ним протекают разные токи, а напряжение приложено одинаковое и равно напряжению между узлами.

Например, на рис. 2.2 сопротивления  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$  соединены параллельно: все они находятся между узлами (точками)  $a$  и  $b$ .

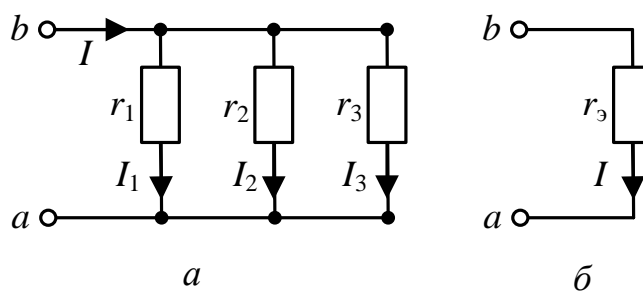


Рис. 2.2. Замена параллельного соединения эквивалентным:  
 $a$  – параллельное соединение сопротивлений;  $б$  – эквивалентное сопротивление

Объединив три параллельно соединенных элемента, получим одно эквивалентное сопротивление  $r_3$ , расположенное между теми же точками  $a$  и  $b$  (рис. 2.2, б). Токи, протекающие через каждое сопротивление, объединяются. Через  $r_3$  будет протекать тот же ток  $I$ , который протекает в неразветвленной части цепи.

Проводимость ветви с эквивалентным сопротивлением может быть найдена как сумма проводимостей параллельных ветвей:

$$g_3 = \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}, \quad (2.2)$$

откуда может быть определена величина  $r_3$ :

$$r_3 = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3}. \quad (2.3)$$

Эквивалентное сопротивление двух параллельных ветвей определяют по формуле  $r_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ , которой часто пользуются при решении задач.

Кроме того, при анализе электрических цепей широко используется понятие **контура** – замкнутого пути, проходящего по нескольким ветвям. **Независимый контур** отличается от других контуров хотя бы одной ветвью.

Пример простейшей электрической цепи приведен на рис. 2.3. Здесь сопротивление  $r_1$  и ЭДС  $E$  соединены последовательно, сопротивления  $r_2$  и  $r_3$  – параллельно. В цепи два узла ( $a$  и  $b$ ) и три ветви ( $E$  и  $r_1$ ;  $r_2$ ;  $r_3$ ). Примером контура может быть путь, проходящий через элементы  $E$ ,  $r_1$  и  $r_2$ .

В теории электрических цепей преимущественно решаются задачи анализа электрических цепей. Суть их состоит в следующем: заданы активные и пассивные параметры электрической цепи, требуется определить токи ветвей и другие представляющие интерес физические величины, зависящие от этих токов.

Существуют еще задачи синтеза электрических цепей, когда по заданным функциям цепей требуется определять топологию и параметры цепей. Эти задачи являются более сложными и в настоящем пособии не рассматриваются.

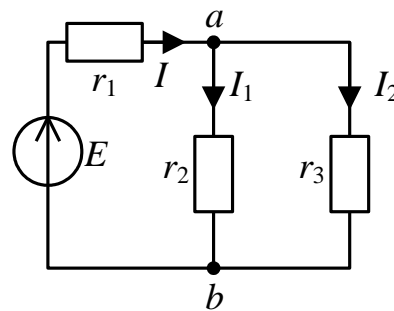


Рис. 2.3. Пример простейшей электрической цепи

## 2.1. Закон Ома и законы Кирхгофа в электрических цепях

Закон Ома является одним из основных законов, применяемых при решении электротехнических задач. Он устанавливает связь между тремя основными электротехническими величинами: напряжением, током и сопротивлением:

$$I = \frac{U}{r}. \quad (2.4)$$

В одноконтурной цепи с источником тока  $J = I$  уравнение (2.4) позволит определить напряжение  $U$ , создаваемое источником тока на сопротивлении  $r$ .

В одноконтурной цепи с источником напряжения (ЭДС) уравнение позволит определить входной ток. При этом если в одноконтурной цепи имеется несколько ЭДС, то они объединяются в одну эквивалентную  $E_{\Sigma}$ , напряжение которой  $U = E_{\Sigma}$  и подставляется в выражение (2.4). Входное сопротивление  $r_{\text{вх}}$  должно включать в себя как внутренние сопротивления источников  $r_{\text{вн}}$ , так и сопротивление нагрузки (потребителей)  $r_{\text{н}}$ . В итоге получаем формулу **закона Ома для полной цепи**:

$$I = \frac{E_{\Sigma}}{r_{\text{вн}} + r_{\text{н}}}. \quad (2.5)$$

В разветвленных цепях закон Ома можно применять для отдельных участков, в которых протекает одинаковый ток.

**Закон Ома для участка цепи с ЭДС**: ток ветви прямо пропорционален напряжению (разности потенциалов), приложенному к рассматриваемой ветви, и напряжению источника (ЭДС), имеющегося на самой ветви, и обратно пропорционален сопротивлению ветви:

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b \pm E}{r} = \frac{U_{ab} \pm E}{r}. \quad (2.6)$$

При этом ЭДС берется со знаком «плюс», если ее направление совпадает с выбранным положительным направлением тока ветви. В противном случае ставится знак «минус».

Метод расчета электрических цепей с единственной ЭДС с помощью закона Ома называется **методом преобразования цепи** и в общем случае он заключается в следующем:

1) последовательным объединением элементов добиваются упрощения разветвленной схемы, сводя ее к одноконтурной цепи (объединение выполняется в сторону единственной ЭДС);

2) с помощью закона Ома для полной цепи определяют входной ток;

3) разворачивают схему обратно, определяя напряжения на параллельных ветвях и токи в каждой ветви по закону Ома для участка цепи.

Если в цепи присутствует несколько источников, то, как правило, более эффективными для расчета являются законы Кирхгофа. Однако для выполнения отдельных этапов использование закона Ома остается по-прежнему возможным.

**Первый закон Кирхгофа** формулируется для узла электрической цепи: *алгебраическая сумма токов ветвей, сходящихся в узле электрической цепи, равна нулю. При этом подходящие к узлу токи записываются с одним знаком, отходящие – с другим.*

Например, для узла, изображенного на рис. 2.4, можно записать:

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0 \quad (2.7)$$

или

$$-I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = 0. \quad (2.8)$$

В первом случае с плюсом записаны токи, подходящие к узлу, во втором плюс имеют отходящие токи.

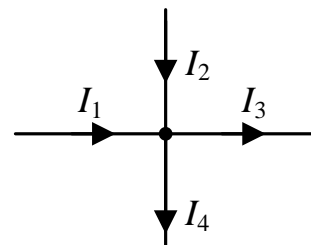


Рис. 2.4. Пример узла электрической цепи

**Второй закон Кирхгофа** формулируется для контура электрической цепи: *алгебраическая сумма падений напряжения на участках контура равна алгебраической сумме ЭДС того же контура. При этом если направление ЭДС совпадает с направлением обхода контура, то она берется со знаком «плюс», если не совпадает – со знаком «минус». Падение напряжения на элементе берется со знаком «плюс», если направление тока в элементе совпадает с направлением обхода, если не совпадает – со знаком «минус».*

Например, для контура, показанного на рис. 2.5, можно записать:

$$r_1 I_1 + r_2 I_2 - r_3 I_3 - r_4 I_4 = E_1 - E_3. \quad (2.9)$$

Физическое содержание соотношения (2.9) состоит в следующем. Положительные заряды перемещаются от точек с большими потенциалами к точкам, имеющим более низкий потенциал. Именно такая ситуация отражена на схеме рис. 2.5 знаками «плюс» и «минус».

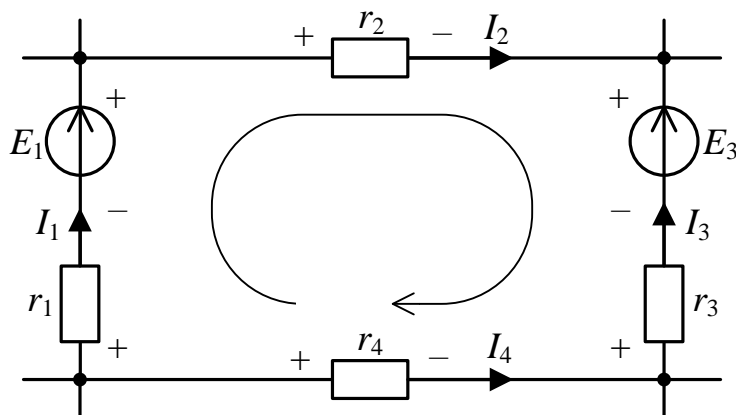


Рис. 2.5. Контур электрической схемы

В сопротивлениях  $r_1$  и  $r_2$  обход совершается от плюса к минусу, т. е. потенциал в направлении обхода снижается и имеют место падения напряжения  $r_1 I_1$  и  $r_2 I_2$ , входящие в левую часть уравнения со знаком «плюс». Сопротивления  $r_3$  и  $r_4$ , наоборот, повышают потенциал в направлении обхода контура, поэтому в уравнение (2.6) произведения  $r_3 I_3$  и  $r_4 I_4$  включены со знаком «минус».

### 2.1.1. Последовательность определения токов ветвей по законам Кирхгофа

- 1) Произвольно выбираются направления токов ветвей. Число токов равно числу ветвей схемы. Токи ветвей с источниками тока известны.
- 2) Записываются уравнения по первому закону Кирхгофа. Их число на единицу меньше числа узлов схемы.
- 3) Выбираются независимые контуры так, чтобы каждый источник тока входил только в один контур, и направления их обхода.
- 4) Записываются уравнения по второму закону Кирхгофа для независимых контуров, при этом уравнения для контуров, включающих в себя источники тока, не составляются.
- 5) В результате совместного решения уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа, определяются токи ветвей.



## 2.2. Метод контурных токов

В этом методе за неизвестные принимают токи независимых контуров (**контурные токи**), а токи ветвей выражают через контурные.

Рассмотрим вывод правил формирования уравнений на примере схемы, приведенной на рис. 2.6, в которой известны ЭДС, ток источника тока и все сопротивления.

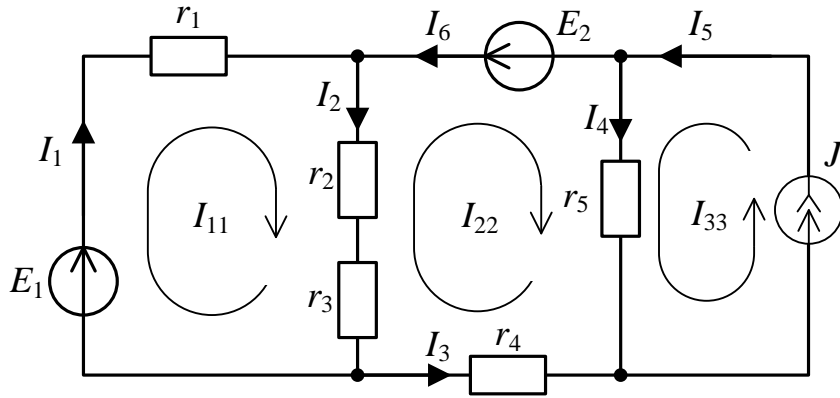


Рис. 2.6. Схема электрической цепи с контурными токами

Сначала выбираются независимые контуры и направления их обхода. Допустим, что в каждом контуре протекает свой контурный ток, совпадающий с направлением обхода, —  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$ . Выберем направления токов ветвей и составим уравнения по второму закону Кирхгофа для выбранных контуров (для контура с источником тока уравнение не составляется, так как  $I_{33} = J$ ):

$$\begin{cases} r_1 I_1 + (r_2 + r_3) I_2 = E_1; \\ -(r_2 + r_3) I_2 - r_4 I_3 + r_5 I_4 = -E_2. \end{cases} \quad (2.10)$$

Выразим токи ветвей через контурные:  $I_1 = I_{11}$ ;  $I_2 = I_{11} - I_{22}$ ;  $I_3 = I_6 = -I_{22}$ ;  $I_4 = I_{22} + I_{33}$ ;  $I_5 = I_{33} = J$  — и подставим их в систему уравнений (2.10):

$$\begin{cases} r_1 I_{11} + (r_2 + r_3)(I_{11} - I_{22}) = E_1; \\ -(r_2 + r_3)(I_{11} - I_{22}) - r_4(-I_{22}) + r_5(I_{22} + I_{33}) = -E_2. \end{cases} \quad (2.11)$$

После группировки получим:

$$\begin{cases} (r_1 + r_2 + r_3) I_{11} - (r_2 + r_3) I_{22} = E_1; \\ -(r_2 + r_3) I_{11} + (r_2 + r_3 + r_4 + r_5) I_{22} + r_5 I_{33} = -E_2. \end{cases} \quad (2.12)$$

В конечном итоге получим систему уравнений в общем виде:

$$\begin{cases} r_{11}I_{11} + r_{12}I_{22} + r_{13}I_{33} = E_{11}; \\ r_{21}I_{11} + r_{22}I_{22} + r_{23}I_{33} = E_{22}, \end{cases} \quad (2.13)$$

где  $r_{11}, r_{22}$  – **собственные сопротивления контуров 1 и 2**, каждое из которых равно сумме сопротивлений, входящих в данный контур;

$r_{12} = r_{21}, r_{13}, r_{23}$  – **общие, или взаимные, сопротивления контуров**. Общее сопротивление равно сопротивлению ветвей, общих для рассматриваемых контуров. Общие сопротивления берутся со знаком «плюс», если контурные токи в них направлены одинаково, и со знаком «минус», если контурные токи направлены встречно. Если контуры не имеют общей ветви, то их общее сопротивление равно нулю. В рассматриваемом примере  $r_{13} = 0$ ;

$E_{11}, E_{22}$  – **контурные ЭДС**, каждая из которых равна алгебраической сумме ЭДС данного контура. ЭДС берется со знаком «плюс», если ее направление совпадает с направлением контурного тока, если не совпадает – со знаком «минус».

Структура уравнений (2.13), использующая понятия собственных и взаимных сопротивлений контуров, а также контурных ЭДС, является общей для метода контурных токов. В зависимости от сложности исследуемой цепи изменяется лишь количество уравнений.

### *2.2.1. Последовательность определения токов ветвей методом контурных токов*

- 1) Выбираются независимые контуры и направления контурных токов.
- 2) Записывается система уравнений в общем виде. Число уравнений равно числу независимых контуров схемы минус число контуров, содержащих источники тока. Количество слагаемых в левой части уравнения равно числу независимых контуров.
- 3) Определяются коэффициенты при неизвестных – собственные и общие сопротивления контуров, а также контурные ЭДС. Если общей ветвью контуров является ветвь с ЭДС без сопротивления, то общее сопротивление этих контуров равно нулю.
- 4) Рассчитываются контурные токи.
- 5) Выбираются направления токов ветвей.
- 6) Определяются токи ветвей.

### 2.3. Метод узловых потенциалов

В этом методе за неизвестные принимают потенциалы узлов схемы.

Рассмотрим вывод правил формирования уравнений на примере схемы, приведенной на рис. 2.7, в которой известны ЭДС, ток источника тока и все сопротивления.

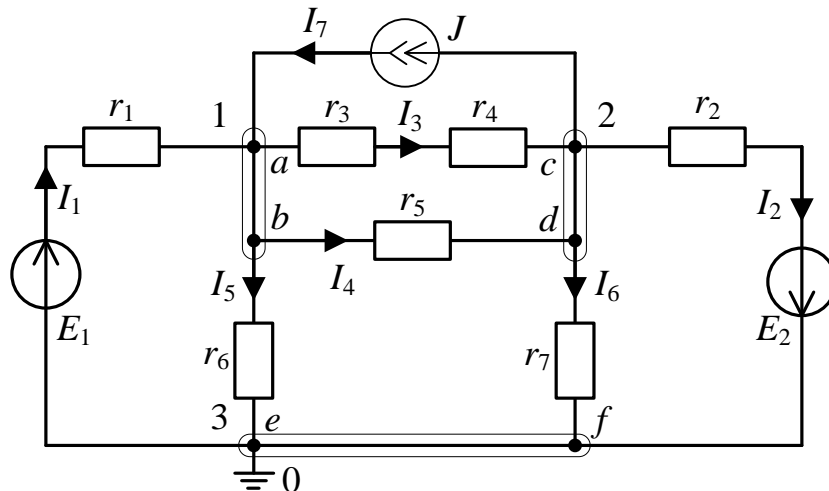


Рис. 2.7. Электрическая схема для метода узловых потенциалов

В этой схеме два неизвестных потенциала –  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , поскольку  $\varphi_a = \varphi_b$ ,  $\varphi_c = \varphi_d$ ,  $\varphi_e = \varphi_f$ , а потенциал одного из узлов, в данном случае  $\varphi_3$ , принимается равным нулю, что на схеме обозначают заземлением узла ( $\equiv$ ).

Запишем уравнения по первому закону Кирхгофа, предварительно выбрав направления токов в ветвях:

$$\text{узел 1:} \quad -I_1 + I_3 + I_4 + I_5 - I_7 = 0; \quad (2.14)$$

$$\text{узел 2:} \quad I_2 - I_3 - I_4 + I_6 + I_7 = 0. \quad (2.15)$$

Используя закон Ома для участка цепи, выразим токи ветвей через потенциалы узлов:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 + E_1}{r_1} = \frac{-\varphi_1 + E_1}{r_1}; \\ I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_2}{r_2} = \frac{\varphi_2 + E_2}{r_2}; \\ I_3 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r_3 + r_4}; \\ I_4 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r_5}; \\ I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{r_6} = \frac{\varphi_1}{r_6}; \\ I_6 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{r_7} = \frac{\varphi_2}{r_7}; \\ I_7 = J \end{array} \right. \quad (2.16)$$

и подставим в уравнения (2.14) и (2.15):

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{-\varphi_1 + E_1}{r_1} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r_3 + r_4} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r_5} + \frac{\varphi_1}{r_6} - J = 0; \\ \frac{\varphi_2 + E_2}{r_2} - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r_3 + r_4} - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r_5} + \frac{\varphi_2}{r_7} + J = 0. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

После группировки получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3 + r_4} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_6} \right) \varphi_1 - \left( \frac{1}{r_3 + r_4} + \frac{1}{r_5} \right) \varphi_2 = \frac{E_1}{r_1} + J; \\ - \left( \frac{1}{r_3 + r_4} + \frac{1}{r_5} \right) \varphi_1 + \left( \frac{1}{r_3 + r_4} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_7} \right) \varphi_2 = -\frac{E_2}{r_2} - J. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Система уравнений в общем виде принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{11}\varphi_1 + g_{12}\varphi_2 = J_{11}; \\ g_{21}\varphi_1 + g_{22}\varphi_2 = J_{22}, \end{array} \right. \quad (2.19)$$

где  $g_{11}, g_{22}$  – **собственные (узловые) проводимости** узлов 1 и 2, каждая из которых равна сумме проводимостей ветвей, сходящихся в данном узле (проводимость ветви, содержащей источник тока, равна нулю);

$g_{12} = g_{21}$  – **общая проводимость** – взятая со знаком «минус» сумма проводимостей ветвей, соединяющих узлы 1 и 2;

$J_{11}, J_{22}$  – **задающие (узловые) токи** узлов 1 и 2, каждый из которых равен алгебраической сумме произведений ЭДС на проводимости ветвей, в которых они находятся (рассматриваются ветви, подключенные к данному узлу), и алгебраической сумме токов источника тока, подключенных к данному узлу. Знаки слагаемых: «плюс» – если направление ЭДС (источника тока) к узлу, «минус» – если направление ЭДС (источника тока) от узла.

### 2.3.1. Последовательность определения токов ветвей методом узловых потенциалов

1) Записывается система уравнений в общем виде. Число уравнений системы на единицу меньше числа узлов схемы. Если в схеме содержится ветвь с ЭДС без сопротивлений (рис. 2.8), то  $\varphi_2 = \varphi_1 + E$ . Приняв  $\varphi_1 = 0$ , получим  $\varphi_2 = E$ . В этом случае уравнение для известного потенциала не составляется и общее количество уравнений сокращается на единицу при неизменном количестве слагаемых в левой части системы уравнений.

2) Определяются коэффициенты при неизвестных – собственные и общие проводимости и задающие токи узлов.

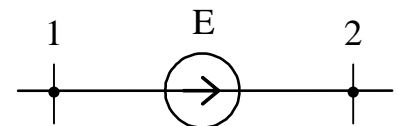


Рис. 2.8. Ветвь схемы с ЭДС

3) Рассчитываются потенциалы узлов.

4) Выбираются направления токов ветвей.

5) Определяются токи ветвей.

При выборе способа расчета той или иной цепи лучшим, как правило, считается тот, который требует решения меньшего количества уравнений.

Метод узловых потенциалов с этой точки зрения обладает преимуществами в тех случаях, когда число узлов схемы меньше количества независимых контуров. В качестве примера, подтверждающего это положение, приведена схема на рис. 2.9.

Схема, приведенная на рис. 2.9, имеет пять ветвей, четыре независимых контура и два узла. Применяя законы Кирхгофа, пришлось бы решать систему из пяти уравнений. Метод контурных токов требует решения четырех уравнений. По методу узловых потенциалов достаточно решить только одно уравнение для определения потенциала верхнего узла  $\varphi$ :

$$g\varphi = J, \quad (2.20)$$

где  $g = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_5 + r_6} + \frac{1}{r_4};$

$$J = \frac{1}{r_1} E_1 - \frac{1}{r_3} E_3 + \frac{1}{r_4} E_4.$$

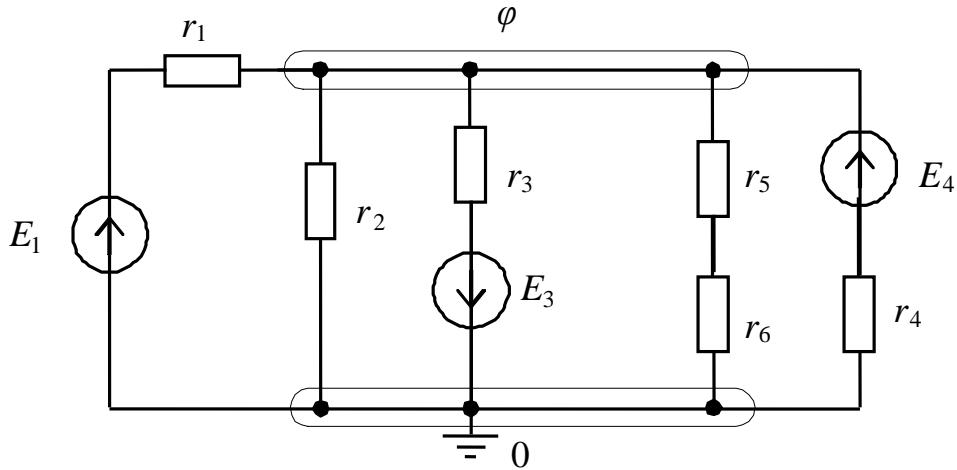


Рис. 2.9. Схема электрической цепи с двумя узлами

Определив значение  $\varphi$ , находим токи ветвей, используя закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС.

## 2.4. Принцип компенсации

В соответствии с принципом компенсации *участок цепи с сопротивлением  $r$  и током  $I$  можно заменить ЭДС, равной  $rI$  и направленной встречно току.*

Действительно, например, для схемы на рис. 2.10, а уравнение по второму закону Кирхгофа запишется в виде:

$$r_1 I + rI = E_1. \quad (2.21)$$

Переместив слагаемое  $rI$  в правую часть уравнения (2.21) и введя замену  $E = rI$ , получим уравнение

$$r_1 I = E_1 - E, \quad (2.22)$$

которому соответствует схема на рис. 2.10, б.

Принцип компенсации можно использовать и в обратном направлении: ЭДС, возникающую в цепи, можно заменить падением напряжения, равным ей по модулю и направленным в противоположную сторону. В такой формулировке принцип компенсации используется, например, при расчете цепей переменного тока для работы с ЭДС самоиндукции (при введении понятия «индуктивное сопротивление»).

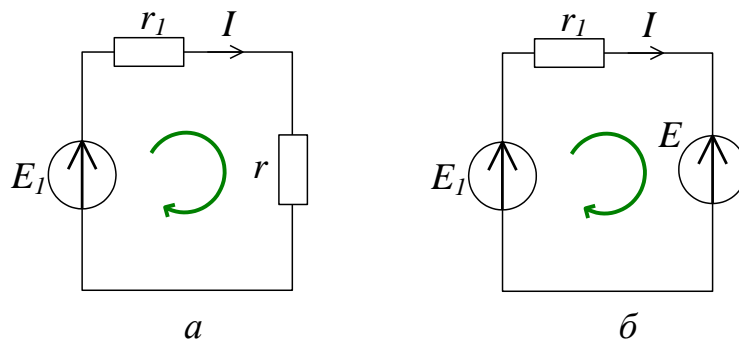


Рис. 2.10. Пример использования принципа компенсации

## 2.5. Метод активного двухполюсника (эквивалентного источника или генератора)

При расчете линейных электрических цепей возможна замена части цепи, содержащей источники напряжения и тока, относительно зажимов выделенной ветви  $ab$  (рис. 2.11,  $a$ ) активным двухполюсником, состоящим из последовательно соединенных ЭДС и сопротивления. В этом случае указанную ветвь можно рассматривать как нагрузку эквивалентного источника с ЭДС  $E_э$  и сопротивлением  $r_э$ .

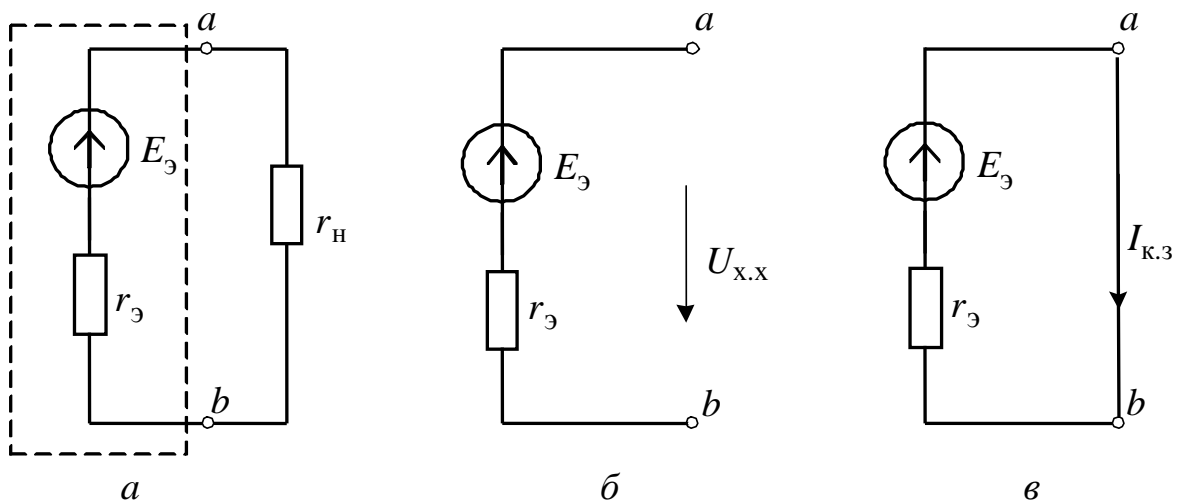


Рис. 2.11. Последовательность схем для метода эквивалентного источника

Эквивалентная ЭДС  $E_3$  равна напряжению на зажимах  $ab$  при разомкнутой ветви  $r_H$ , т. е. напряжению холостого хода  $U_{x.x}$ . Сопротивление  $r_3$  равно входному сопротивлению цепи относительно зажимов  $ab$  при разомкнутой ветви  $r_H$ . Источники напряжения и тока при этом исключаются из схемы (прил. 1).

Эквивалентные параметры  $E_3$  и  $r_3$  могут быть определены опытным путем из режимов холостого хода (рис. 2.11, б) и короткого замыкания (рис. 2.11, в):

$$\begin{cases} E_3 = U_{x.x}; \\ r_3 = \frac{U_{x.x}}{I_{к.з}}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Обратимся к схеме на рис. 2.12, а и поставим задачу заменить ее простейшей эквивалентной схемой, представленной на рис. 2.12, б, при условии неизменности тока  $I_H$  в сопротивлении  $r_H$ .

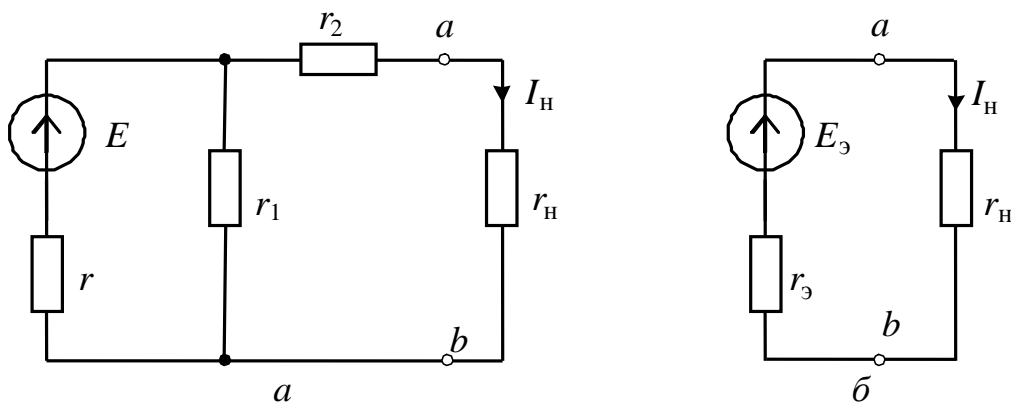


Рис. 2.12. Метод эквивалентного источника:

$a$  – исходная расчетная схема;  $б$  – схема с эквивалентными параметрами

Эквивалентная ЭДС  $E_3$  определяется по схеме, приведенной на рис. 2.13, а.

Ток в сопротивлении  $r_2$  на схеме рис. 2.13, а отсутствует, поэтому  $U_{x.x} = r_1 I_{1x.x}$ . Ток в контуре  $r, E, r_1$

$$I_{1x.x} = \frac{E}{r + r_1} \quad (2.24)$$

и напряжение холостого хода, а соответственно и эквивалентная ЭДС

$$E_3 = U_{x.x} = \frac{r_1 E}{r + r_1}. \quad (2.25)$$



Эквивалентное сопротивление  $r_3$  определяется по схеме на рис. 2.13, б. Зажимы  $a$  и  $b$  при этом считаются входными:

$$r_3 = r_2 + \frac{rr_1}{r + r_1}. \quad (2.26)$$

В итоге ток, определяемый по эквивалентной схеме на рис. 2.12, б,

$$I_H = \frac{E_3}{r_3 + r_H}. \quad (2.27)$$

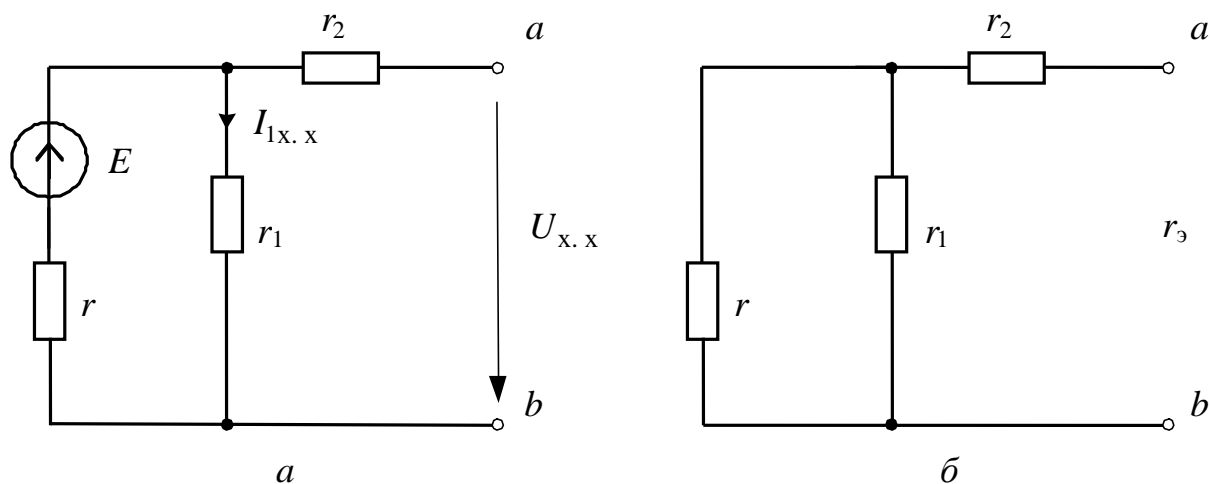


Рис. 2.13. Метод эквивалентного источника: схемы для определения  $E_3$  (а) и  $r_3$  (б)

Метод эквивалентного источника не относится к числу основных методов анализа электрических цепей. Этот метод удобен в случае, когда интерес представляет только один из токов в цепи, или при физическом моделировании электрических цепей, когда требуется реализовать модель с минимальным количеством элементов.

Мощность в нагрузке эквивалентного генератора (см. рис. 2.12, б)

$$P_H = r_H I_H^2 = r_H \left( \frac{E_3}{r_3 + r_H} \right)^2. \quad (2.28)$$

Учитывая, что  $r_3$  – величина заданная, можно найти максимальное значение мощности  $P_H$ , которое получают путем изменения  $r_H$ . Условием обеспечения максимума будет равенство  $r_H = r_3$ . При этом

$$P_{\text{н max}} = r_3 I_{\text{н}}^2 = r_3 \left( \frac{E_3}{2r_3} \right)^2 = \frac{E_3^2}{4r_3}. \quad (2.29)$$

В этом случае коэффициент полезного действия  $\eta = \frac{P_{\text{н max}}}{P_{\text{ист}}} \cdot 100\% = \frac{r_{\text{н}} I^2}{(r_3 + r_{\text{н}}) I^2} \cdot 100\%$  будет равен 50 %.

Режим максимальной мощности представляет интерес в маломощных передаточных устройствах, применяемых в электроизмерительной технике, в радиотехнике, радиоэлектронике и автоматике. В этих случаях получение как можно большей мощности нередко является более важным, чем достижение большого значения коэффициента полезного действия.

## 2.6. Принцип наложения

В линейной электрической цепи применим принцип наложения: *ток от действия нескольких источников равен алгебраической сумме токов от действия каждого источника в отдельности*. Знак тока от одного источника при суммировании определяется тем, совпадает ли его направление с исходным током.

Например, в схеме на рис. 2.14, а действуют две ЭДС:  $E_1$  и  $E_2$ . Значения токов  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  можно получить, рассчитав токи  $I_1'$ ,  $I_2'$ ,  $I_3'$  от действия  $E_1$  (рис. 2.14, б) и токи  $I_1''$ ,  $I_2''$ ,  $I_3''$  от действия  $E_2$  (рис. 2.14, в).

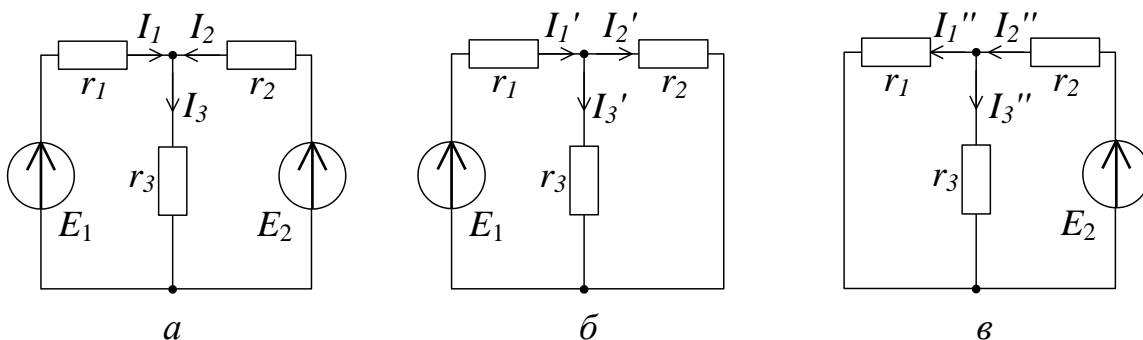


Рис. 2.14. Расчет электрической цепи методом наложения

В этом случае значения токов от действия обеих ЭДС рассчитываются по формулам:

$$\begin{cases} I_1 = I'_1 - I''_1; \\ I_2 = -I'_2 + I''_2; \\ I_3 = I'_3 + I''_3. \end{cases} \quad (2.30)$$

## 2.7. Принцип взаимности

Для расчета линейных электрических цепей можно использовать метод, основанный на применении принципа взаимности. Этот метод заключается в следующем: если ЭДС  $E_{ab} = E$ , действуя в ветви  $ab$  сколь угодно сложной цепи, при отсутствии в цепи прочих ЭДС вызывает в другой ветви  $cd$  этой цепи ток  $I_{cd} = I$ , то такая же ЭДС  $E_{cd} = E$ , действуя в ветви  $cd$ , при отсутствии прочих ЭДС вызовет в ветви  $ab$  такой же ток  $I_{ab} = I$ .

Принцип взаимности в сочетании с принципом наложения дает возможность существенно снизить трудоемкость расчета сложной цепи с несколькими ЭДС, особенно если необходимо найти ток в одной ветви этой цепи.

## 2.8. Баланс мощностей

На основании закона сохранения энергии мощность, потребляемая в электрической цепи, должна быть равна мощности, поставляемой источниками. В состав потребляемой мощности входят мощность, рассеиваемая в сопротивлениях, и мощность источников, находящихся в режиме потребителей.

Уравнение баланса мощностей имеет вид:

$$\sum P_{\text{ист}} = \sum P_{\text{потр}} \quad (2.31)$$

или

$$\sum EI + \sum JU = \sum I^2 r. \quad (2.31 \text{ а})$$

В левой части равенства (2.31 а) записана алгебраическая сумма произведений ЭДС на токи, протекающие через них, и произведений токов источников тока на напряжения на их зажимах.

В правой части уравнения баланса мощностей (2.31 а) записана арифметическая сумма произведений сопротивлений на квадраты токов, протекающих по этим сопротивлениям.

Примеры для определения знаков слагаемых приведены на рис. 2.15.

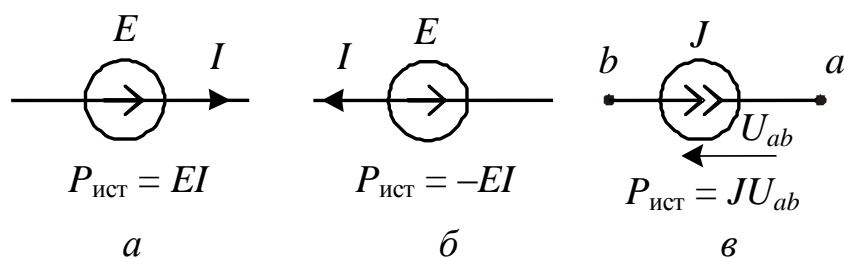


Рис. 2.15. Примеры для определения знаков мощности источников энергии

## 2.9. Преобразования электрических цепей

Преобразования электрических схем осуществляются с целью их упрощения. Примерами простейших преобразований является замена одним эквивалентным сопротивлением последовательного, параллельного и последовательно-параллельного соединений. Применяется еще и ряд более сложных преобразований, среди которых отметим эквивалентные преобразования соединений звездой и треугольником, а также преобразования параллельного соединения ветвей с ЭДС.

### 2.9.1. Эквивалентные преобразования соединений звездой и треугольником

Указанные соединения представлены на рис. 2.16.

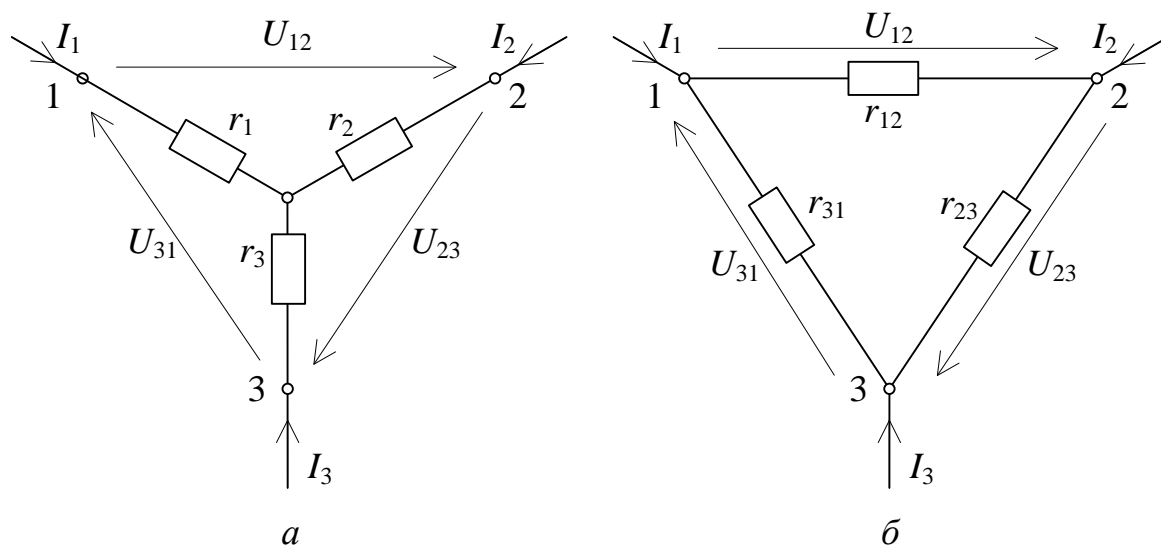


Рис. 2.16. Эквивалентные схемы: соединение элементов звездой (*a*) и треугольником (*б*)

Эквивалентность соединений звездой и треугольником понимается в следующем смысле: при переходе от одной схемы к другой режим цепи, в составе которой находятся звезда и треугольник, не должен измениться. Это возможно, если напряжения  $U_{12}$ ,  $U_{23}$ ,  $U_{31}$  и токи  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  при переходе не изменяются. На этом принципе построен вывод формул для преобразования соединений звездой и треугольником (прил. 2).

Преобразование соединения звездой в соединение треугольником выполняется по формулам:

$$\begin{cases} r_{12} = r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3}; \\ r_{23} = r_2 + r_3 + \frac{r_2 r_3}{r_1}; \\ r_{31} = r_3 + r_1 + \frac{r_3 r_1}{r_2}. \end{cases} \quad (2.32)$$

Преобразование соединения треугольником в соединение звездой выполняется по формулам:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{r_{12} r_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \\ r_2 = \frac{r_{12} r_{23}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \\ r_3 = \frac{r_{31} r_{23}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}. \end{cases} \quad (2.33)$$

Чередование индексов в правых частях формул позволяет легко установить закономерность в их формировании.

### 2.9.2. Преобразования параллельного соединения ветвей с источниками ЭДС

Упрощение задачи по исследованию электрической цепи достигается заменой участка с параллельно соединенными ветвями одной ветвью с эквивалентными параметрами. Пусть, например, требуется участок с тремя параллельными ветвями (рис. 2.17, а) заменить одной ветвью с двумя элементами –  $r_3$  и  $E_3$  (рис. 2.17, б). Задача сводится к определению числовых значений эквивалентной ЭДС  $E_3$  и эквивалентного сопротивления  $r_3$ .

Эквивалентный переход от нескольких параллельных ветвей к одной можно осуществить по формулам (прил. 3):

$$\begin{cases} g_3 = \sum g_k; \\ E_3 = \frac{\sum g_k E_k}{g_3}; \\ r_3 = 1/g_3, \end{cases} \quad (2.34)$$

где  $g_k$  – проводимость  $k$ -й ветви;

$E_k$  – ЭДС  $k$ -й ветви.

Таким образом, эквивалентная проводимость  $g_3$  является суммой проводимостей ветвей и применительно к схеме на рис. 2.17, *а* это есть величина

$$g_3 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}. \quad (2.35)$$

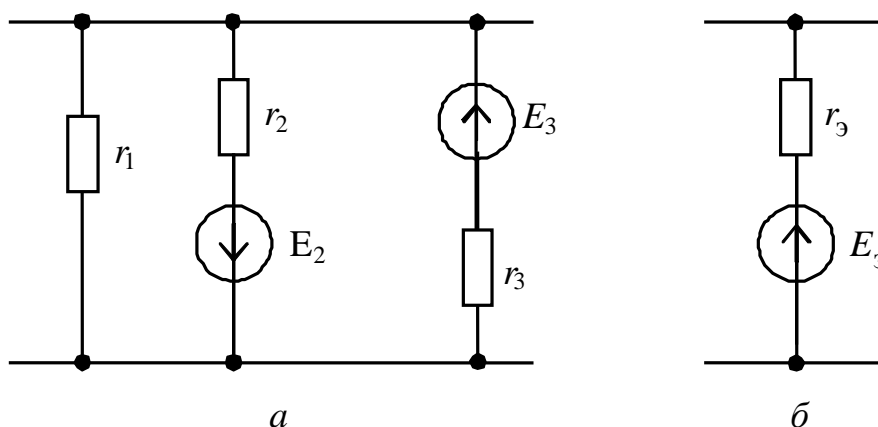


Рис. 2.17. Преобразование параллельных ветвей:

*а* – исходная расчетная схема; *б* – двухэлементная эквивалентная схема

При вычислении  $E_3$  произведение  $g_k E_k$  имеет знак «плюс», если направление ЭДС ветви совпадает с выбранным направлением эквивалентной ЭДС  $E_3$ :

$$E_3 = \frac{-\frac{1}{r_2} E_2 + \frac{1}{r_3} E_3}{g_3}. \quad (2.36)$$

Формулы системы (2.34) применяются при любом числе параллельных ветвей.

## 2.10. Примеры расчета электрических цепей постоянного тока

### 2.10.1. Применение законов Кирхгофа

**У с л о в и е з а д а ч и.** Составить уравнения по законам Кирхгофа для определения токов ветвей в схеме, приведенной на рис. 2.18.

**Дано:**  $E_1, E_2, E_3, J, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ .

**Р е ш е н и е.** В схеме (см. рис. 2.18) семь ветвей, четыре узла и четыре независимых контура. Ток  $I_7$  известен ( $I_7 = J$ ), поэтому неизвестных токов в схеме шесть. Для расчета токов данным методом необходимо составить систему из шести уравнений, в которой три уравнения должны быть записаны по первому закону Кирхгофа и три – по второму. Выбираем независимые контуры так, чтобы ветвь с источником тока не вошла ни в один из контуров.

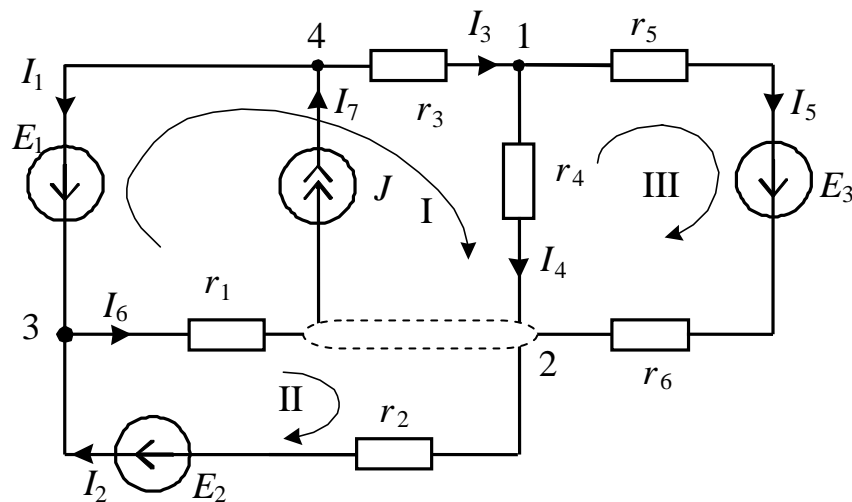


Рис. 2.18. Схема, демонстрирующая применение законов Кирхгофа

Выбираем произвольно направления токов в ветвях и направления обхода контуров (например, по часовой стрелке). Записываем систему из шести уравнений, совместное решение которых дает искомые токи:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{узел 1:} & \left\{ \begin{array}{l} I_3 - I_4 - I_5 = 0; \\ I_4 + I_5 + I_6 - I_2 - I_7 = 0; \end{array} \right. \\
 \text{узел 2:} & \\
 \text{узел 3:} & \left\{ \begin{array}{l} I_1 + I_2 - I_6 = 0; \\ I_3 r_3 + I_4 r_4 - I_6 r_1 = -E_1; \end{array} \right. \\
 \text{контур I:} & \\
 \text{контур II:} & \left\{ \begin{array}{l} I_2 r_2 + I_6 r_1 = E_2; \\ I_5(r_5 + r_6) - I_4 r_4 = E_3. \end{array} \right. \\
 \text{контур III:} &
 \end{array}$$

Ток источника тока, как следует из приведенных соотношений, входит только в уравнения по первому закону Кирхгофа.

### 2.10.2. Метод контурных токов

У с л о в и е з а д а ч и. Определить токи ветвей в схеме, приведенной на рис. 2.19.

Дано:  $E_1 = 10 \text{ В}$ ,  $E_2 = 5 \text{ В}$ ,  $E_3 = 4 \text{ В}$ ,  $J = 2 \text{ А}$ ,  $r_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  
 $r_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $r_3 = 1 \text{ Ом}$ ,  $r_4 = 4 \text{ Ом}$ ,  $r_5 = 2 \text{ Ом}$ ,  $r_6 = 3 \text{ Ом}$ .

Р е ш е н и е. В соответствии с указаниями п. 2.2.1 выбираем независимые контуры так, чтобы ветвь с источником тока не оказалась общей для контуров. Выбираем произвольно направления четырех контурных токов, причем один из них известен:  $I_{44} = J$ .

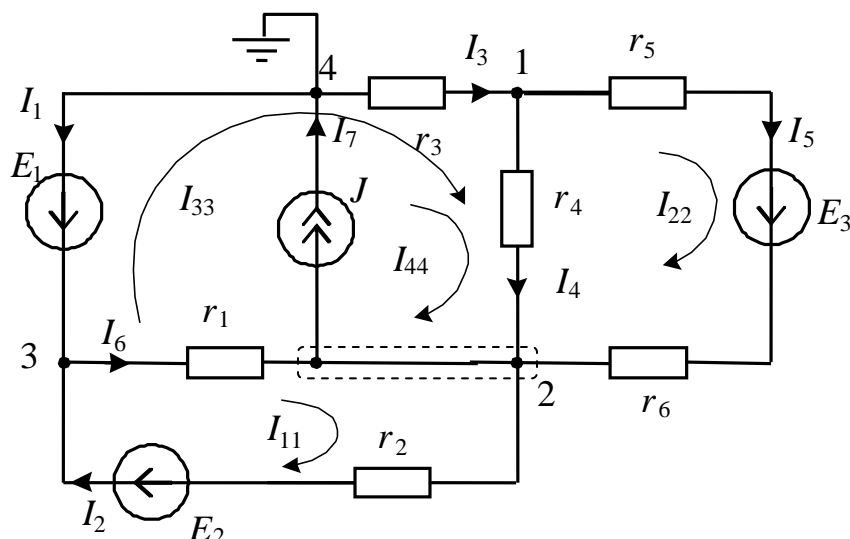


Рис. 2.19. Схема для применения метода контурных токов

В общем виде составляем систему уравнений относительно трех неизвестных контурных токов:

$$\begin{cases} r_{11}I_{11} + r_{12}I_{22} + r_{13}I_{33} + r_{14}I_{44} = E_{11}; \\ r_{21}I_{11} + r_{22}I_{22} + r_{23}I_{33} + r_{24}I_{44} = E_{22}; \\ r_{31}I_{11} + r_{32}I_{22} + r_{33}I_{33} + r_{34}I_{44} = E_{33}, \end{cases}$$

где  $r_{11} = r_1 + r_2$ ;  $r_{11} = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_{22} = r_4 + r_5 + r_6$ ;  $r_{22} = 9 \text{ Ом}$ ;  
 $r_{33} = r_1 + r_3 + r_4$ ;  $r_{33} = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_{12} = r_{21} = 0$ ;



$r_{13} = r_{31} = -r_1$ , знак «минус» обусловлен тем, что в общем для первого и третьего контуров сопротивлении  $r_1$  контурные токи направлены встречно;

$$\begin{aligned} r_{13} = r_{31} &= -5 \text{ Ом}; & r_{14} &= 0; & r_{23} = r_{32} &= -r_4; & r_{23} = r_{32} &= -4 \text{ Ом}; \\ r_{24} &= -r_4; & r_{24} &= -4 \text{ Ом}; & r_{34} &= r_3 + r_4; & r_{34} &= 5 \text{ Ом}; \\ E_{11} &= E_2; & E_{11} &= 5 \text{ В}; & E_{22} &= E_3; & E_{22} &= 4 \text{ В}; \end{aligned}$$

$E_{33} = -E_1$ , знак «минус» обусловлен тем, что направление контурного тока  $I_{33}$  встречно направлению ЭДС  $E_1$ ;  $E_{33} = -10 \text{ В}$ .

После подстановки найденных значений приведенная выше система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} 10I_{11} + 0I_{22} - 5I_{33} + 0I_{44} = 5; \\ 0I_{11} + 9I_{22} - 4I_{33} - 4I_{44} = 4; \\ -5I_{11} - 4I_{22} + 10I_{33} + 5I_{44} = -10. \end{cases}$$

Учитывая, что  $J_{44} = J = 2 \text{ А}$ , получаем:

$$\begin{cases} 10I_{11} + 0I_{22} - 5I_{33} = 5; \\ 0I_{11} + 9I_{22} - 4I_{33} = 12; \\ -5I_{11} - 4I_{22} + 10I_{33} = -20. \end{cases}$$

Решая представленную систему уравнений, например, по правилу Крамера, получим:

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

$$\begin{aligned} \text{где } \Delta &= \begin{vmatrix} 10 & 0 & -5 \\ 0 & 9 & -4 \\ -5 & -4 & 10 \end{vmatrix} = 515; & \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 12 & 9 & -4 \\ -20 & -4 & 10 \end{vmatrix} = -290; \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 10 & 5 & -5 \\ 0 & 12 & -4 \\ -5 & -20 & 10 \end{vmatrix} = 200; & \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 12 \\ -5 & -4 & -20 \end{vmatrix} = -1095. \end{aligned}$$

$$I_{11} = -0,563 \text{ А}; \quad I_{22} = 0,388 \text{ А}; \quad I_{33} = -2,126 \text{ А}; \quad I_{44} = 2 \text{ А}.$$

В итоге токи ветвей можно записать так:

$$\begin{array}{ll}
I_1 = -I_{33}; & I_1 = 2,126 \text{ A}; \\
I_2 = I_{11}; & I_2 = -0,563 \text{ A}; \\
I_3 = I_{33} + I_{44}; & I_3 = -0,126 \text{ A}; \\
I_4 = I_{33} + I_{44} - I_{22}; & I_4 = -0,514 \text{ A}; \\
I_5 = I_{22}; & I_5 = 0,388 \text{ A}; \\
I_6 = I_{11} - I_{33}; & I_6 = 1,563 \text{ A}; \\
I_7 = I_{44}; & I_7 = 2 \text{ A}.
\end{array}$$

Знак «минус» у токов  $I_2$ ,  $I_3$  и  $I_4$  указывает на то, что в действительности эти токи имеют направления, противоположные указанным на схеме.

### 2.10.3. Метод узловых потенциалов

**У с л о в и е з а д а ч и.** Определить токи ветвей в схеме (см. рис. 2.19), используя данные предыдущей задачи.

**Р е ш е н и е.** В соответствии с указаниями п. 2.3.1 заземляем узел 4 ( $\varphi_4 = 0$ ). Кроме того, ветвь между узлами 3 и 4 содержит только ЭДС, следовательно, независимо от величины протекающего тока  $I_1$  величина  $\varphi_3$  также известна:  $\varphi_3 = E_1 = 10 \text{ В}$  (со знаком «плюс», так как направление  $E_1$  – к узлу 3). Таким образом, в задаче неизвестными являются потенциалы двух узлов –  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , и достаточно составить систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} g_{11}\varphi_1 + g_{12}\varphi_2 + g_{13}\varphi_3 = J_{11}; \\ g_{21}\varphi_1 + g_{22}\varphi_2 + g_{23}\varphi_3 = J_{22}, \end{cases}$$

$$\text{где } g_{11} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5 + r_6}; \quad g_{11} = 1,45 \text{ См};$$

$$g_{22} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5 + r_6}; \quad g_{22} = 0,85 \text{ См};$$

$$g_{12} = g_{21} = -\left(\frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5 + r_6}\right), \text{ общие проводимости всегда имеют знак «ми-}$$

$$\text{нус»}; \quad g_{12} = g_{21} = -0,45 \text{ См}; \quad g_{13} = 0; \quad g_{23} = -\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right); \quad g_{23} = -0,4 \text{ См};$$

$J_{11} = -E_3 \frac{1}{r_5 + r_6}$ , знак «минус» обусловлен тем, что ЭДС  $E_3$  направлена от

узла 1;  $J_{11} = -0,8 \text{ A}$ ;  $J_{22} = E_3 \frac{1}{r_5 + r_6} - E_2 \frac{1}{r_2} - J$ ;  $J_{22} = -2,2 \text{ A}$ .

После подстановки найденных значений имеем:

$$\begin{cases} 1,45\varphi_1 - 0,45\varphi_2 - 0 \cdot 10 = -0,8; \\ -0,45\varphi_1 + 0,85\varphi_2 - 0,4 \cdot 10 = -2,2. \end{cases}$$

Решив представленную систему уравнений, получим:  $\varphi_1 = 0,126 \text{ В}$ ;  $\varphi_2 = 2,184 \text{ В}$ .

С учетом известных потенциалов  $\varphi_3 = 10 \text{ В}$  и  $\varphi_4 = 0$  рассчитываем токи ветвей:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_2}{r_2}; & I_2 &= -0,563 \text{ A}; \\ I_3 &= \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{r_3}; & I_3 &= -0,126 \text{ A}; \\ I_4 &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r_4}; & I_4 &= -0,515 \text{ A}; \\ I_5 &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_3}{r_5 + r_6}; & I_5 &= 0,388 \text{ A}; \\ I_6 &= \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{r_1}; & I_6 &= 1,563 \text{ A}; \\ I_7 &= J; & I_7 &= 2 \text{ A}. \end{aligned}$$

Ток  $I_1$  находим по первому закону Кирхгофа, например, для узла 3:

$$I_1 + I_2 - I_6 = 0; \quad I_1 = I_6 - I_2; \quad I_1 = 2,126 \text{ A}.$$

#### 2.10.4. Проверка выполнения баланса мощностей

**У с л о в и е з а д а ч и.** Проверить выполнение баланса мощностей на примере схемы (см. рис. 2.19), используя данные и результаты расчета задачи 2.10.2.

**Р е ш е н и е.** Баланс мощностей заключается в равенстве мощностей всех источников схемы и потребителей.

Так как в схеме имеется три источника напряжения и один источник тока, то мощность источников  $P_{\text{ист}}$  будет иметь четыре слагаемых:

$$P_{\text{ист}} = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_5 + U_{42} J.$$

Произведения  $EI$  берутся со знаком «плюс», так как в рассматриваемой цепи токи в ветвях совпадают по направлению с ЭДС.

Мощность источника тока рассчитывается как произведение выдаваемого им тока  $J$  на падение напряжения на его зажимах  $U_{42}$  (направление от клеммы «плюс» к клемме «минус» источника тока). Это напряжение можно найти через разность потенциалов  $U_{42} = \varphi_4 - \varphi_2$  или выразить из уравнения, составленного по второму закону Кирхгофа для любого контура, проходящего через  $U_{42}$  и замыкающегося по ветвям, не содержащим  $J$ . Например, для контура 4-2-3-4 второй закон Кирхгофа имеет вид:

$$U_{42} - r_1 I_6 = -E_1,$$

откуда

$$U_{42} = r_1 I_6 - E_1; \quad U_{42} = 5 \cdot 1,563 - 10 = -2,185 \text{ В};$$

$$P_{\text{ист}} = 10 \cdot 2,126 + 5 \cdot (-0,563) + 4 \cdot 0,388 + (-2,185) \cdot 2 = 15,63 \text{ Вт}.$$

Потребителями в цепи являются шесть сопротивлений, поэтому мощность  $P_{\text{потр}}$  будет иметь шесть слагаемых:

$$P_{\text{потр}} = r_1 I_6^2 + r_2 I_2^2 + r_3 I_3^2 + r_4 I_4^2 + (r_5 + r_6) I_5^2;$$

$$P_{\text{потр}} = 5 \cdot 1,563^2 + 5 \cdot (-0,563)^2 + 1 \cdot (-0,126)^2 + 4 \cdot (-0,514)^2 + (2 + 3) \cdot 0,388^2;$$

$$P_{\text{потр}} = 15,62 \text{ Вт}.$$

Погрешность расчета активной мощности:

$$\delta_P = \frac{|P_{\text{ист}} - P_{\text{потр}}|}{P_{\text{ист}}} \cdot 100\%; \quad \delta_P = \frac{|15,63 - 15,62|}{15,63} \cdot 100\% = 0,06\%,$$

что подтверждает правильность решения задачи.

### 2.10.5. Метод активного двухполюсника (эквивалентного источника)

У с л о в и е    з а д а ч и. Определить ток  $I_2$  в ветви с  $r_2$  и  $E_2$  (см. рис. 2.19).

Р е ш е н и е. Поскольку в ветви с  $r_2$  находится ЭДС  $E_2$ , направленная согласно с ЭДС эквивалентного источника  $E_3$ , то

$$I_2 = \frac{E_3 + E_2}{r_3 + r_2}.$$

Эквивалентную ЭДС  $E_3$  найдем из расчетной схемы (рис. 2.20), в которой ветвь с током  $I_2$  разомкнута.

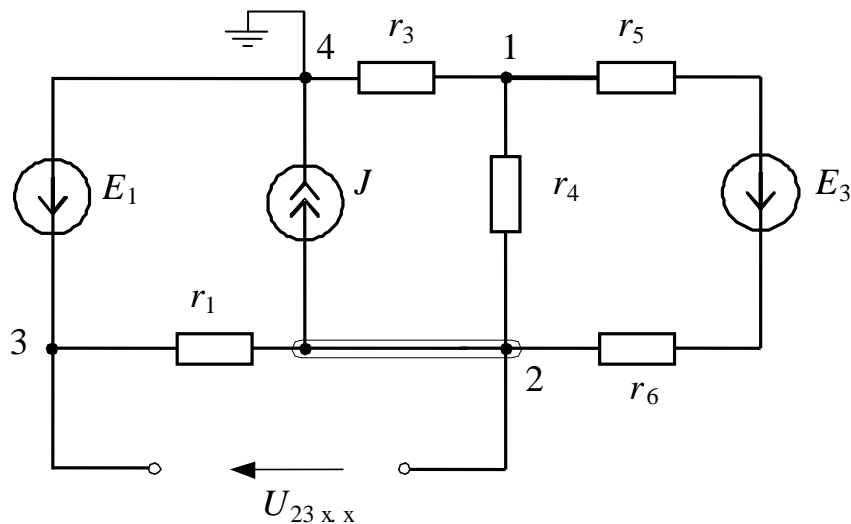


Рис. 2.20. Схема для расчета  $E_3 = U_{23 \text{ x. x}}$

В данном случае  $E_3 = U_{23 \text{ x. x}} = \varphi_2 - \varphi_3$ . Потенциалы узлов 2 и 3 могут быть найдены любым из рассмотренных методов, каждый из которых реализуется двумя уравнениями. Воспользуемся методом узловых потенциалов.

Примем  $\varphi_4 = 0$  и запишем систему уравнений, в которой  $\varphi_3 = E_1$  :

$$\begin{cases} g_{11}\varphi_1 + g_{12}\varphi_2 + g_{13}\varphi_3 = J_{11}; \\ g_{21}\varphi_1 + g_{22}\varphi_2 + g_{23}\varphi_3 = J_{22}, \end{cases}$$

где  $g_{11} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5 + r_6};$

$g_{11} = 1,45 \text{ См};$

$$\begin{aligned}
g_{22} &= \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5 + r_6}; & g_{22} &= 0,65 \text{ См}; \\
g_{12} = g_{21} &= -\left( \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5 + r_6} \right); & g_{12} = g_{21} &= -0,45 \text{ См}; & g_{13} &= 0; \\
g_{23} &= -\frac{1}{r_1}; & g_{23} &= -0,2 \text{ См}; & J_{11} &= -E_3 \frac{1}{r_5 + r_6}; \\
J_{11} &= -0,8 \text{ А}; & J_{22} &= E_3 \frac{1}{r_5 + r_6} - J; & J_{22} &= -1,2 \text{ А}.
\end{aligned}$$

После подстановки найденных значений в приведенную выше систему уравнений и ее решения получаем:  $\varphi_1 = -0,22 \text{ В}$ ;  $\varphi_2 = 1,07 \text{ В}$ .

В результате  $E_3 = 1,07 - 10 = -8,93 \text{ В}$ .

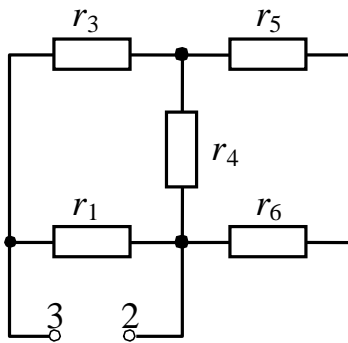


Рис. 2.21. Схема для определения  $r_3$

Для определения сопротивления эквивалентного источника в схеме на рис. 2.20 следует исключить все ЭДС, сохранив сопротивления ветвей, и разомкнуть ветвь с источником тока. Расчетная схема приобретает вид, показанный на рис. 2.21.

Находим входное сопротивление данной схемы относительно точек 2 и 3 путем преобразования:

$$\begin{aligned}
r_7 &= r_5 + r_6; & r_8 &= \frac{r_4 r_7}{r_4 + r_7}; \\
r_9 &= r_3 + r_8; & r_3 &= r_{23} = \frac{r_1 r_9}{r_1 + r_9}.
\end{aligned}$$

После подстановки исходных и расчетных данных получаем:

$$r_3 = r_{23} = 1,96 \text{ Ом}; \quad I_2 = \frac{-8,93 + 5}{1,96 + 5} = -0,565 \text{ А}.$$

#### 2.10.6. Преобразование электрических цепей

1) Замена смешанного соединения сопротивлений (рис. 2.22, а) одним эквивалентным (рис. 2.22, б). Используется для нахождения токов от одного источника напряжения.

Общее сопротивление в данном случае может быть рассчитано по формулам для определения последовательного и параллельного соединения элементов цепи:

$$r_{23} = r_2 + r_3;$$

$$\frac{1}{r_{ab}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_{23}}; \quad r_{ab} = \frac{r_1 r_{23}}{r_1 + r_{23}};$$

$$\text{аналогично } r_{cd} = \frac{r_5 r_6}{r_5 + r_6}.$$

Тогда эквивалентное сопротивление цепи  $r_э = r_{ab} + r_4 + r_{cd} + r_7$ .

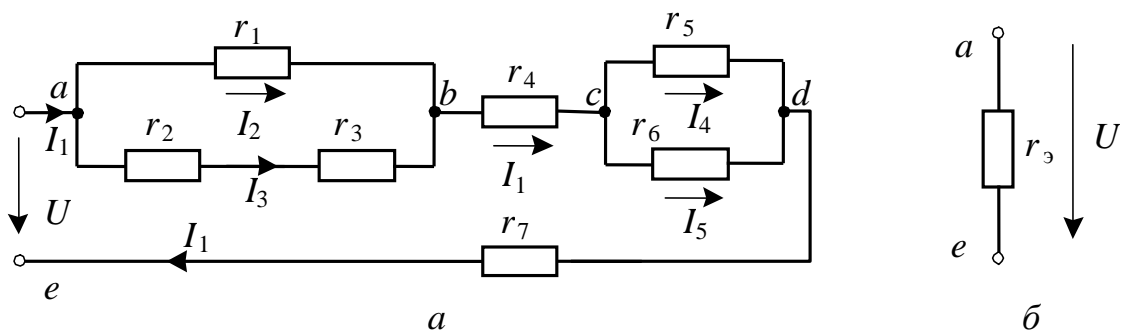


Рис. 2.22. Замена смешанного соединения сопротивлений (а) одним эквивалентным (б)

Вводим числовые значения параметров схемы на рис. 2.22, а:

$$\begin{aligned} U &= 48 \text{ В}; & r_1 &= 3 \text{ Ом}; & r_2 &= 2 \text{ Ом}; & r_3 &= 4 \text{ Ом}; \\ r_4 &= 0,2 \text{ Ом}; & r_5 &= 6 \text{ Ом}; & r_6 &= 2 \text{ Ом}; & r_7 &= 0,3 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

После подстановки этих значений в приведенные выше формулы вычислим эквивалентное сопротивление цепи:

$$\begin{aligned} r_{23} &= 2 + 4 = 6 \text{ Ом}; & r_{ab} &= \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \text{ Ом}; \\ r_{cd} &= \frac{6 \cdot 2}{6 + 2} = 1,5 \text{ Ом}; & r_э &= 2 + 0,2 + 1,5 + 0,3 = 4 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Полученное эквивалентное сопротивление  $r_э$  является входным (общим) сопротивлением цепи. По закону Ома входной ток

$$I_1 = \frac{U}{r_э}; \quad I_1 = \frac{48}{4} = 12 \text{ А}.$$

Токи  $I_2$  и  $I_3$  определим через напряжение  $U_{ab}$ , токи  $I_4$  и  $I_5$  – через  $U_{cd}$ :

$$U_{ab} = I_1 r_{ab}; \quad U_{ab} = 12 \cdot 2 = 24 \text{ В}; \quad I_2 = \frac{U_{ab}}{r_1}; \quad I_2 = \frac{24}{3} = 8 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{ab}}{r_{23}}; \quad I_3 = \frac{24}{6} = 4 \text{ А}; \quad U_{cd} = I_1 r_{cd}; \quad U_{cd} = 12 \cdot 1,5 = 18 \text{ В};$$

$$I_4 = \frac{U_{cd}}{r_5}; \quad I_4 = \frac{18}{6} = 3 \text{ А}; \quad I_5 = \frac{U_{cd}}{r_6}; \quad I_5 = \frac{18}{2} = 9 \text{ А}.$$

2) Преобразование соединения треугольником в эквивалентную звезду.

В схеме, приведенной на рис. 2.23, сопротивления  $r_1$ ,  $r_2$ , и  $r_3$  образуют треугольник. Интерес представляет эквивалентное сопротивление  $r_{bd}$  относительно зажимов  $b$  и  $d$ .

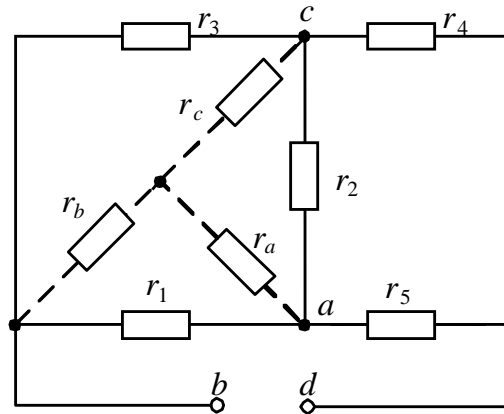


Рис. 2.23. Схема замены треугольника  $r_1, r_2, r_3$  эквивалентной звездой  $r_a, r_b, r_c$

Для упрощения расчетов треугольник заменяется звездой сопротивлений  $r_a, r_b$ , и  $r_c$ :

$$r_a = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3}; \quad r_b = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}; \quad r_c = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}.$$

Полученная схема представлена на рис. 2.24. Она проще исходной, поскольку содержит простейшее последовательно-параллельное соединение элементов. В итоге получаем:

$$r_6 = r_c + r_4; \quad r_7 = r_a + r_5; \quad r_8 = \frac{r_6 r_7}{r_6 + r_7}; \quad r_{bd} = r_b + r_8.$$



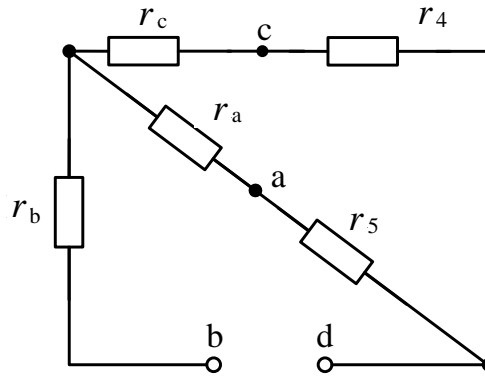


Рис. 2.24. Упрощенная расчетная схема

### 2.10.7. Построение потенциальной диаграммы

Потенциальная диаграмма представляет собой график распределения потенциала вдоль какого-либо участка цепи или замкнутого контура. Каждой точке участка или контура соответствует своя точка на диаграмме с определенным значением потенциала.

**У с л о в и е   з а д а ч и .** Построить потенциальную диаграмму для замкнутого контура 4-1-с-d-2-3-4, содержащего два источника ЭДС –  $E_1$  и  $E_3$  (рис. 2.25).

Дано:  $E_1 = 10 \text{ В}$ ,  $E_3 = 4 \text{ В}$ ,  $r_3 = 1 \text{ Ом}$ ,  $r_5 = 2 \text{ Ом}$ ,  
 $r_6 = 3 \text{ Ом}$ ,  $r_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $I_3 = -0,126 \text{ А}$ ,  $I_5 = 0,388 \text{ А}$ ,  $I_6 = 1,563 \text{ А}$ .

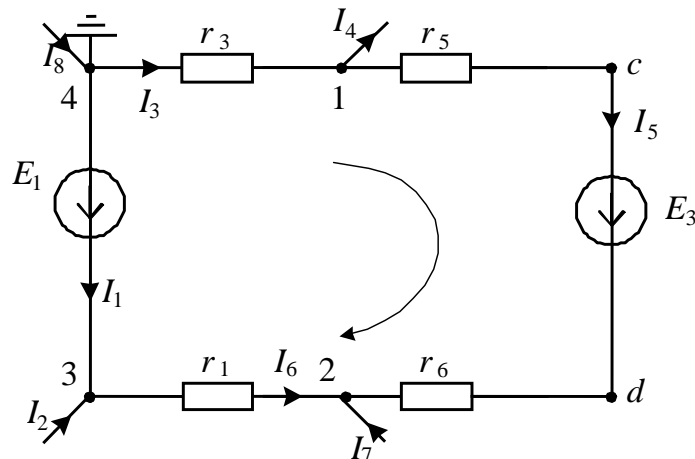


Рис. 2.25. Контур для построения потенциальной диаграммы

Приравниваем к нулю потенциал любой точки контура, например,  $\varphi_4 = 0$ . Совершая обход заданного контура в любом направлении, определяем потенциалы остальных отмеченных на рис. 2.25 точек, учитывая следующее:

а) при переходе через сопротивление потенциал понижается на величину  $\Delta\varphi$ , равную  $I_r$ , если направление обхода совпадает с направлением тока, и повышается при встречном направлении;

б) при переходе через источник ЭДС потенциал повышается на величину  $\Delta\varphi$ , равную  $E$ , если обход осуществляется по направлению ЭДС, и понижается, если направление обхода встречно направлению ЭДС.

Выберем направление обхода по часовой стрелке, тогда

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_4 - I_3 r_3 = 0,126 \text{ В}; \\ \varphi_c &= \varphi_1 - I_5 r_5 = -0,650 \text{ В}; \\ \varphi_d &= \varphi_c + E_3 = 3,350 \text{ В}; \\ \varphi_2 &= \varphi_d - I_5 r_6 = 2,186 \text{ В}; \\ \varphi_3 &= \varphi_2 + I_6 r_1 = 10,001 \text{ В}; \\ \varphi_4 &= \varphi_3 - E_1 = 0,001 \approx 0.\end{aligned}$$

По оси ординат откладываем величину потенциала, по оси абсцисс – сопротивления участка контура в нарастающем порядке, т. е. точка 4 помещается в начало координат, точка 1 отстоит от нее в масштабе на 1 Ом, точка  $c$  от точки 1 – на 2 Ом, точка  $d$  располагается без смещения (сопротивление ЭДС равно нулю), точка 2 от точки  $d$  – на 3 Ом и точка 3 от точки 2 – на 5 Ом.

Перед построением диаграммы выбираем масштабы потенциалов и сопротивлений, например:  $m_\varphi = 1 \text{ В/см}$ ;  $m_r = 1 \text{ Ом/см}$ .

Значения координат точек контура помещены в табл. 2.1, потенциальная диаграмма изображена на рис. 2.26.

Т а б л и ц а 2.1

Координаты точек контура

Координата и единица измерения	Точка контура						
	4	1	$c$	$d$	2	3	4
$r$ , Ом	0	1	3	3	6	11	11
$\varphi$ , В	0	0,126	-0,650	3,350	2,186	10,001	0,001

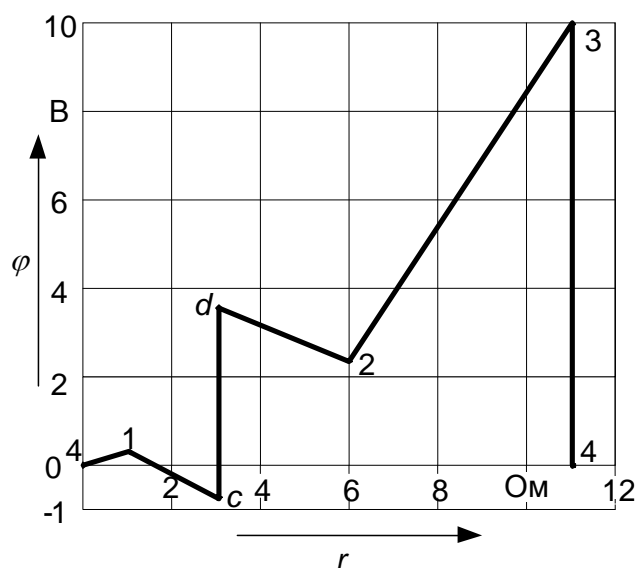


Рис. 2.26. Потенциальная диаграмма

## 2.11. Задачи для самостоятельного решения

### 2.11.1. Определение входного сопротивления

У с л о в и е з а д а ч и. Обозначить все элементы на схеме и определить входное сопротивление цепи (рис. 2.27, схемы 1 – 30). Параметры сопротивлений заданы в омах. Ответ приведен под схемой. Знаком  $\perp$  обозначена общая точка схемы.

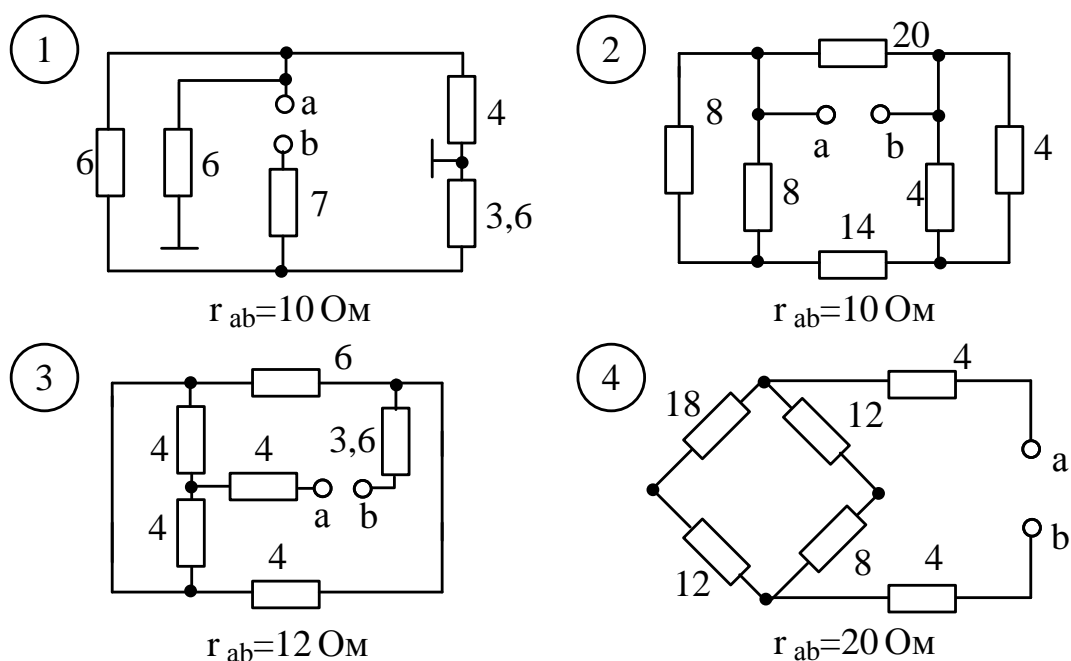


Рис. 2.27. Расчетные схемы для определения входного сопротивления

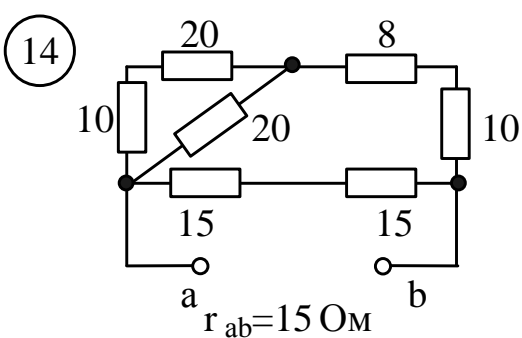
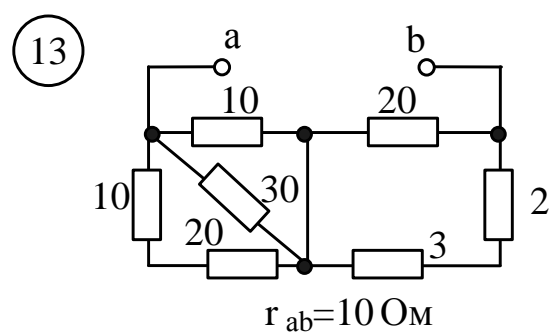
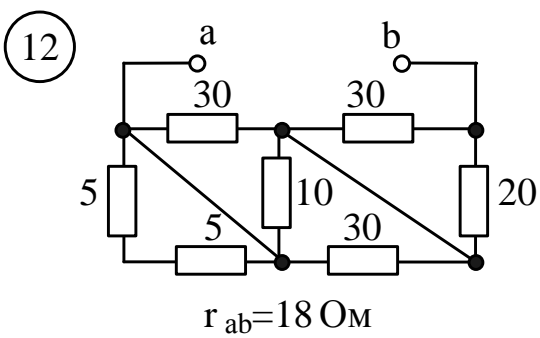
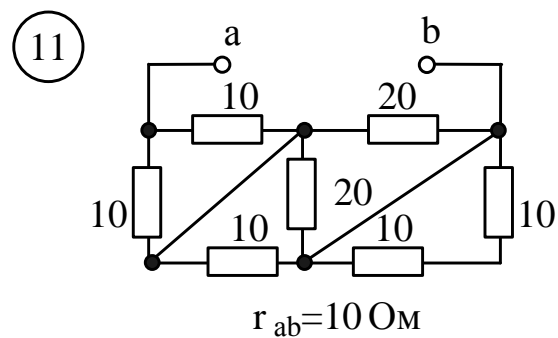
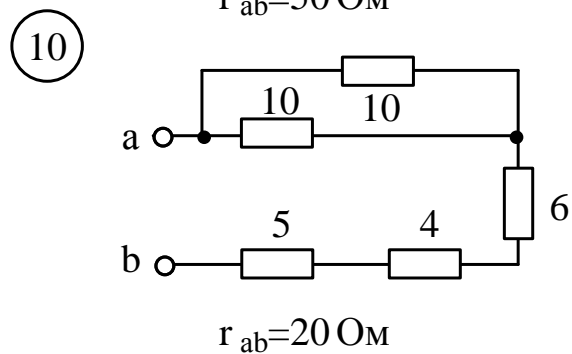
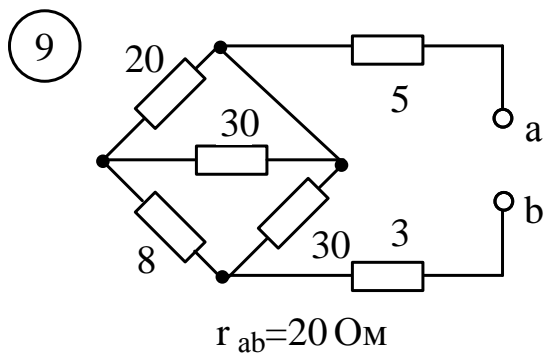
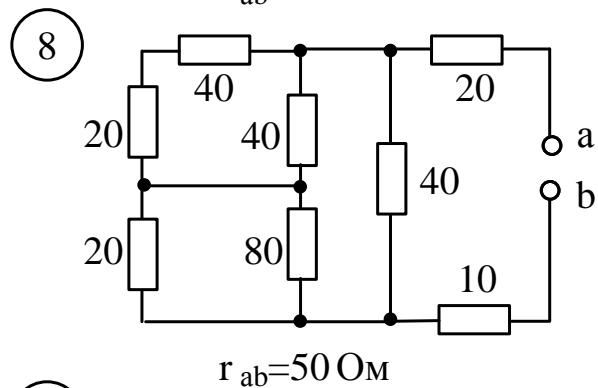
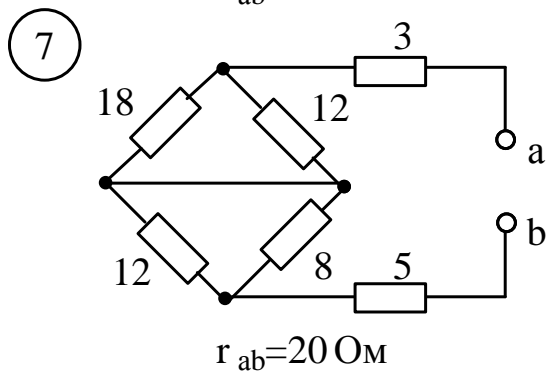
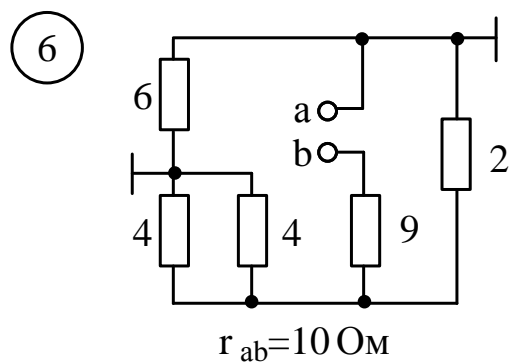
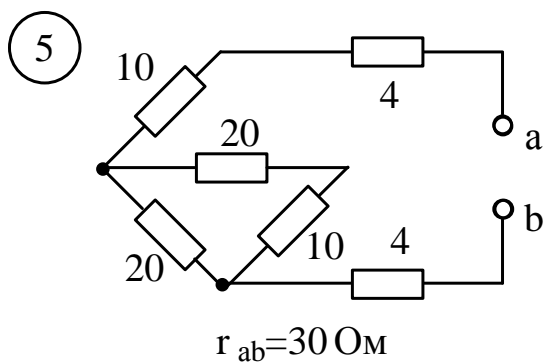


Рис. 2.27, лист 2

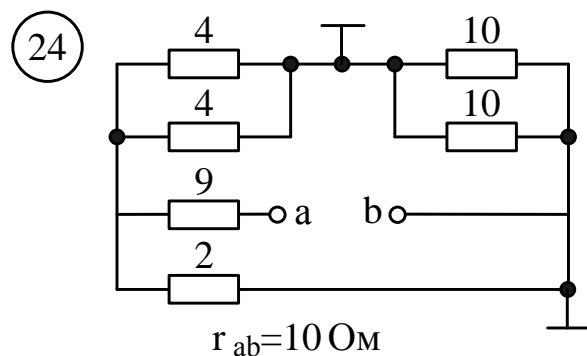
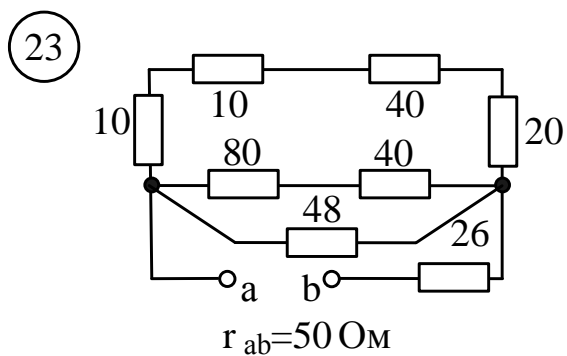
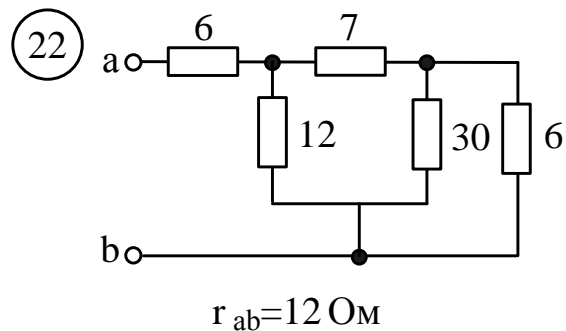
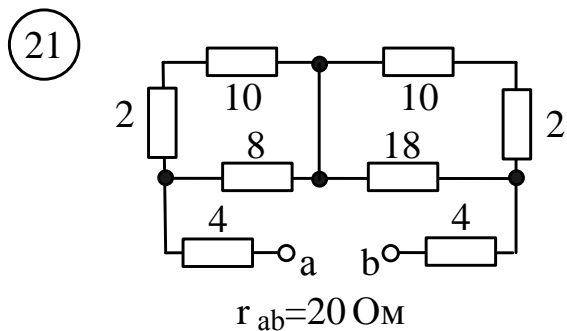
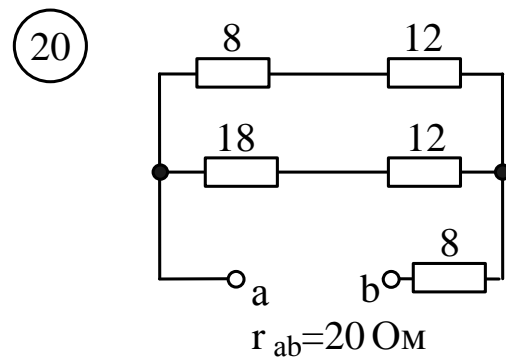
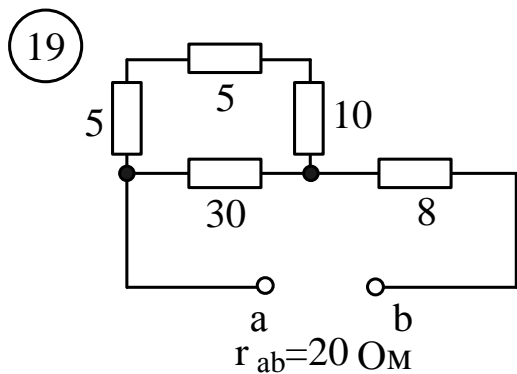
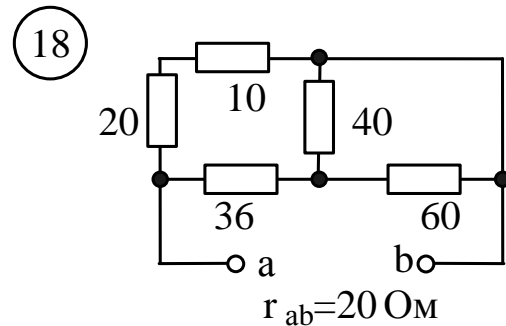
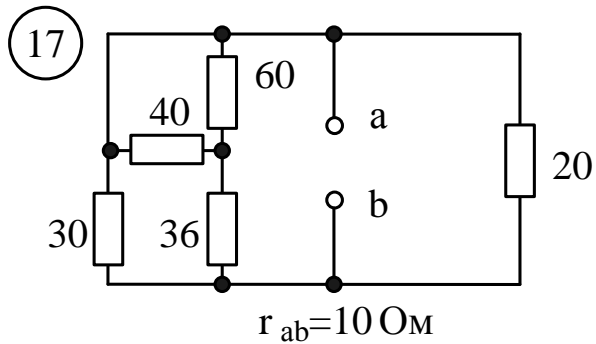
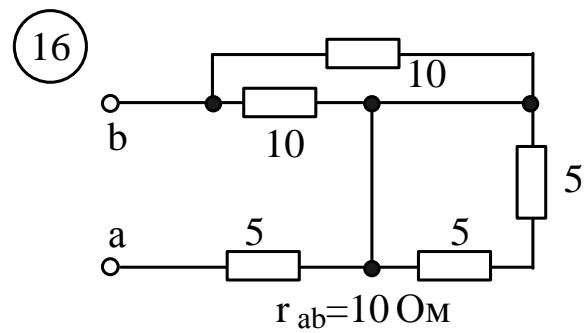
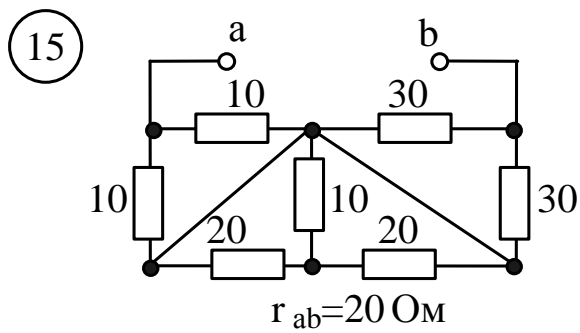


Рис. 2.27, лист 3

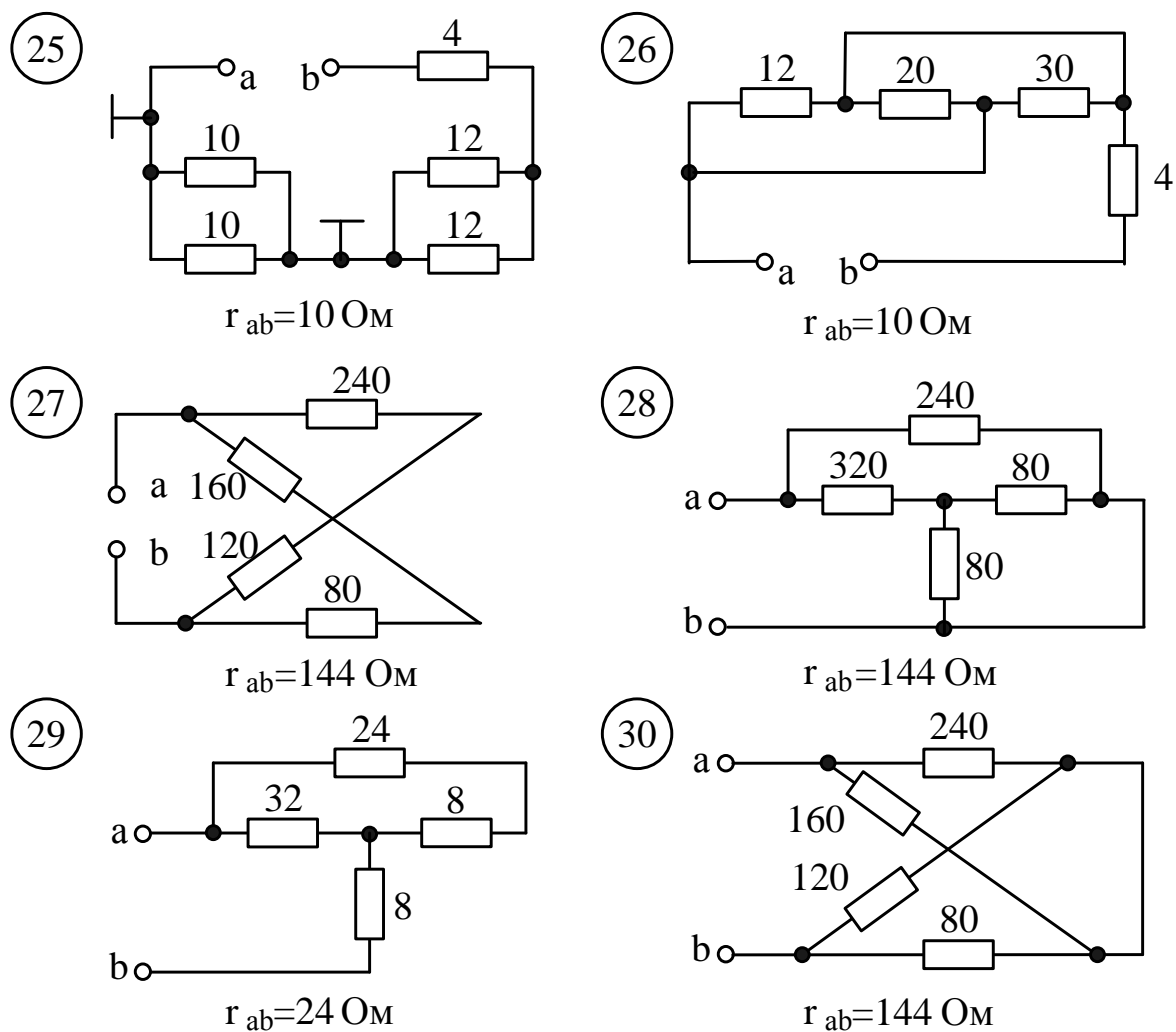


Рис. 2.27, лист 4

П р и м е р. Определить входное сопротивление  $r_{ab}$  цепи, приведенной на рис. 2.28, если  $r_1 = r_5 = r_8 = r_9 = 30 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $r_3 = r_4 = 8 \text{ Ом}$ ,  $r_6 = 2 \text{ Ом}$ ,  $r_7 = 10 \text{ Ом}$ .

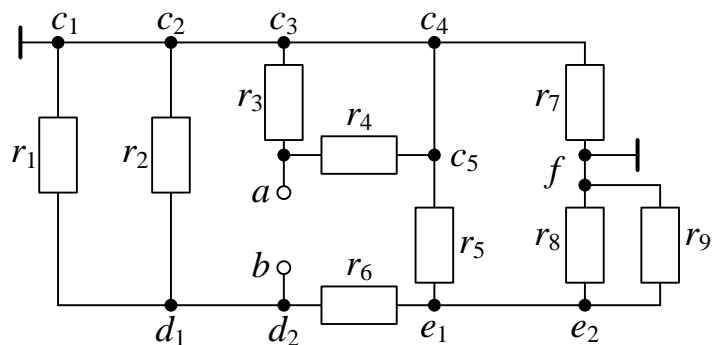


Рис. 2.28. Исходная схема

Изначально в задаче обозначены только точки  $a$  и  $b$ . Остальные точки ( $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ) могут быть обозначены самостоятельно для удобства анализа схемы.

## Решение

Точки  $c_1, c_2, c_3, c_4$  и  $c_5$  соединены проводником с нулевым сопротивлением. Это означает, что потенциалы этих точек будут совпадать, так как падение напряжения между ними отсутствует. В этом случае нет необходимости обозначать их разными индексами. В данном примере они обозначены индексами от 1 до 5 исключительно в учебных целях. На практике такие точки обозначают одним символом (например, « $c$ »). При анализе схемы важно понимать, что все эти пять точек можно мысленно свести в одну точку  $c$ , к которой подключены сопротивления  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$  и  $r_7$ . Аналогичные рассуждения применимы к точкам  $b = d_1 = d_2$  и  $e_1 = e_2 = e$ .

После мысленного объединения точек  $c, b$  и  $e$  схему рис. 2.28 можно изобразить в более удобном для анализа виде рис. 2.29, а. Это не обязательный этап решения, но такой подход в ряде случаев помогает разобраться со сложными соединениями в цепи.

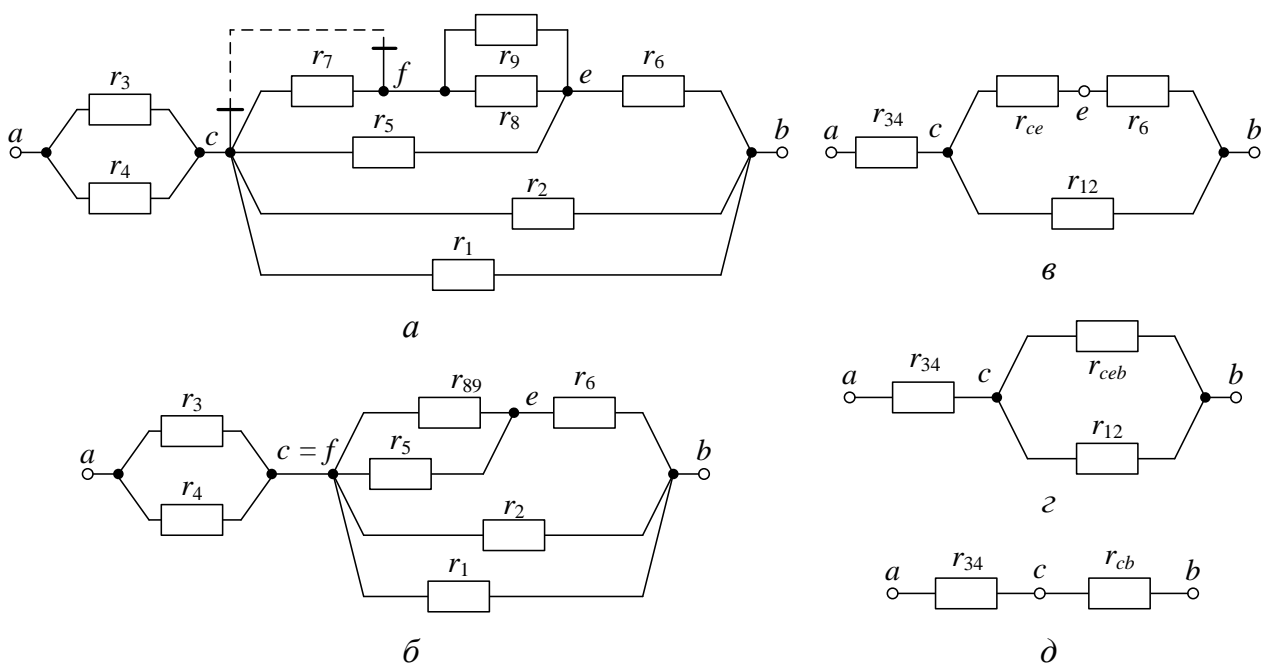


Рис. 2.29. Преобразование электрической схемы для определения  $r_{ab}$

Точки, отмеченные знаком  $\perp$ , можно объединить в одну точку общим проводом (на рис. 2.29, а этот провод показан штриховой линией). Это означает, что потенциалы этих точек совпадают. В схеме 2.29, а совпадают потенциалы  $\varphi_c$  и  $\varphi_f$ . В этом случае к сопротивлению  $r_7$ , расположенному между точками  $c$  и  $f$ , приложено напряжение  $U_{cf} = \varphi_c - \varphi_f = 0$ . Ток через  $r_7$  протекать не будет. В

этом случае говорят, что сопротивление  $r_7$  закорочено, и его можно исключить из схемы (точки  $c$  и  $f$  сводятся в одну точку, см. рис. 2.29, б).

В схеме на рис. 2.29, а сопротивления  $r_8$  и  $r_9$  также соединены параллельно (подключены к одинаковым точкам  $f$  и  $e$ ). Объединим их в одно сопротивление  $r_{89}$ , которое также будет расположено между точками  $f$  и  $c$  (см. рис. 2.29, б):

$$r_{89} = \frac{r_8 r_9}{r_8 + r_9}; \quad r_{89} = \frac{30 \cdot 30}{60} = 15 \text{ Ом.}$$

В полученной схеме (см. рис. 2.29, б) параллельно соединены сопротивления  $r_3$  и  $r_4$  (подключены к точкам  $a$  и  $c$ ),  $r_1$  и  $r_2$  (подключены к точкам  $c$  и  $b$ ),  $r_{89}$  и  $r_5$  (подключены к точкам  $c = f$  и  $e$ ). Объединяя эти сопротивления в эквивалентные им  $r_{34}$ ,  $r_{12}$  и  $r_{ce}$ , получим:

$$\begin{aligned} r_{34} &= \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4}; & r_{34} &= \frac{8 \cdot 8}{16} = 4 \text{ Ом.} \\ r_{12} &= \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}; & r_{12} &= \frac{30 \cdot 20}{50} = 12 \text{ Ом.} \\ r_{ce} &= \frac{r_{89} r_5}{r_{89} + r_5}; & r_{ce} &= \frac{15 \cdot 30}{45} = 10 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Последнее сопротивление обозначено  $r_{ce}$  по тем точкам, к которым оно подключено, с целью сокращения записи (чтобы не использовать длинные сложные индексы типа « $r_{589}$ »).

В итоге получили схему, приведенную на рис. 2.29, в, в которой сопротивления  $r_{ce}$  и  $r_6$  соединены последовательно, так как через них возможен только один и тот же электрический ток (точка  $e$  в схеме на рис. 2.29, в уже не является узлом). Объединяя  $r_{ce}$  и  $r_6$  в одно сопротивление, было бы некорректно обозначить полученное сопротивление « $r_{cb}$ », так как сопротивление  $r_{12}$  также подключено к точкам  $c$  и  $b$ . Поэтому обозначим новое сопротивление  $r_{ceb}$ :

$$r_{ceb} = r_{ce} + r_6; \quad r_{ceb} = 10 + 2 = 12 \text{ Ом.}$$

В итоге получили схему, показанную на рис. 2.29, г, в которой сопротивления  $r_{ceb}$  и  $r_{12}$  соединены параллельно (подключены к точкам  $c$  и  $b$ ). Теперь,



когда эквивалентное сопротивление включает в себя сопротивления всех ветвей, расположенных между точками  $c$  и  $b$ , его вполне логично обозначить  $r_{cb}$ :

$$r_{cb} = \frac{r_{ceb}r_{12}}{r_{ceb} + r_{12}}; \quad r_{cb} = \frac{12 \cdot 12}{24} = 6 \text{ Ом.}$$

Окончательно получаем схему на рис. 2.29,  $\delta$ , в которой отсутствуют узлы (точки  $c$  и  $b$  перестали быть узлами после последнего объединения). Через сопротивления  $r_{34}$  и  $r_{cb}$  протекает один и тот же ток, поэтому они соединены последовательно. В итоге получаем входное сопротивление схемы:

$$r_{ab} = r_{\text{вх}} = r_{cb} + r_{34}; \quad r_{ab} = r_{\text{вх}} = 4 + 6 = 10 \text{ Ом.}$$

### 2.11.2. Определение напряжения на участке цепи

**У с л о в и е з а д а ч и.** В заданной цепи (рис. 2.30, схемы 1 – 30) действует постоянная ЭДС  $E$ . Обозначить все элементы на схеме. Определить токи ветвей и напряжение  $U_{ab}$ . Составить баланс мощностей.

ЭДС задана в вольтах, значения сопротивлений указаны в омах. Ответ приведен под схемой.

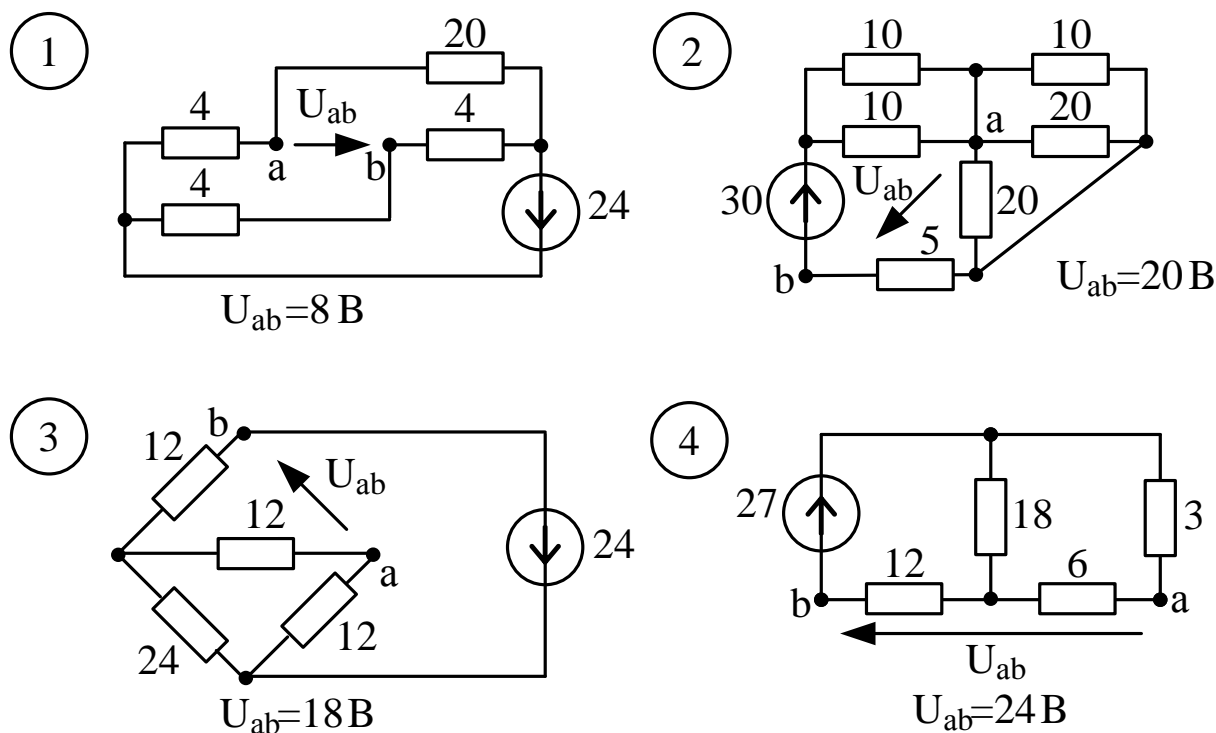
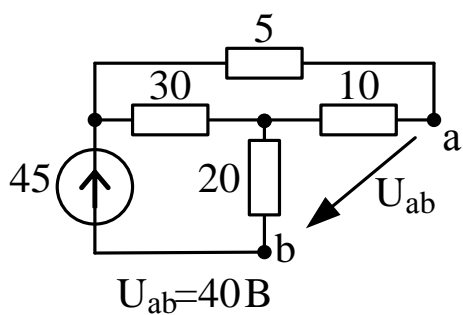
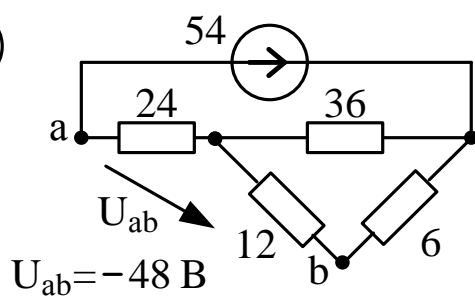


Рис. 2.30. Расчетные схемы для определения токов и напряжения  $U_{ab}$

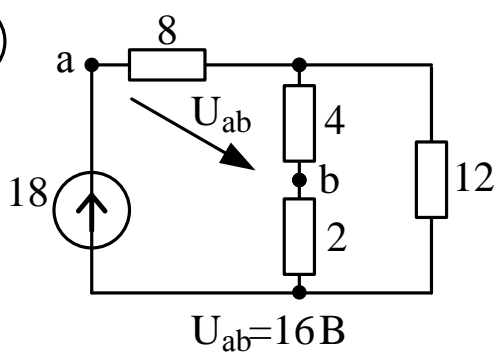
5



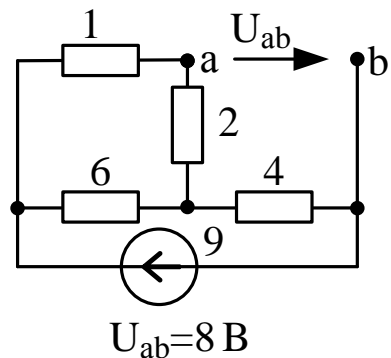
6



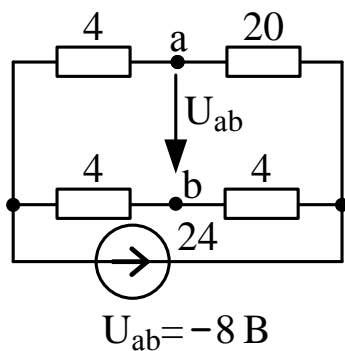
7



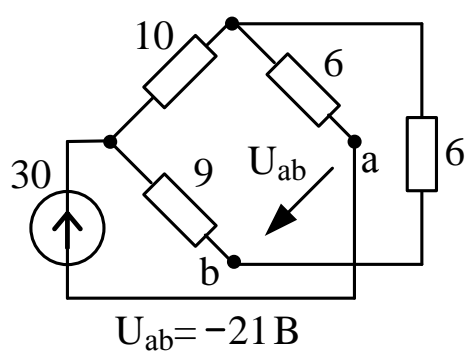
8



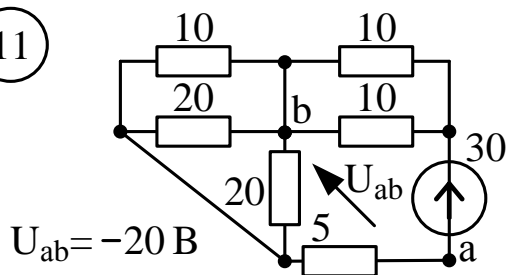
9



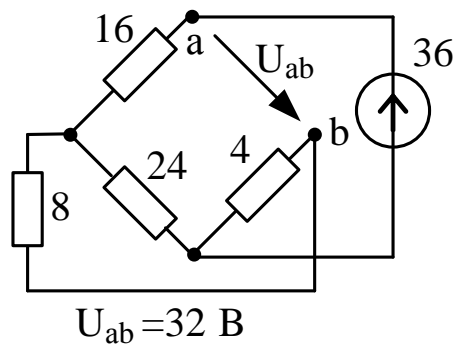
10



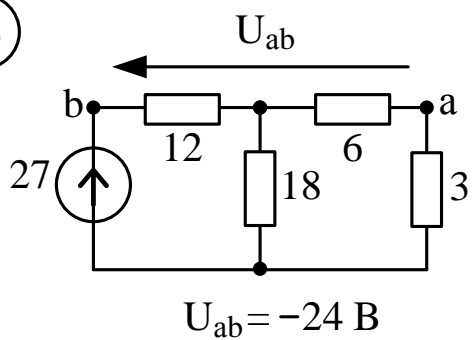
11



12



13



14

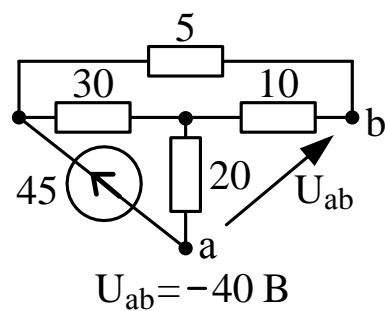
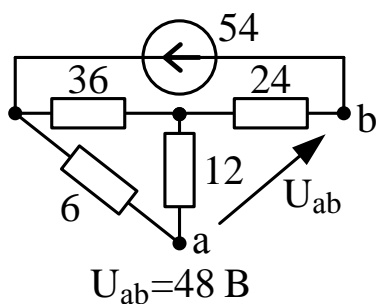
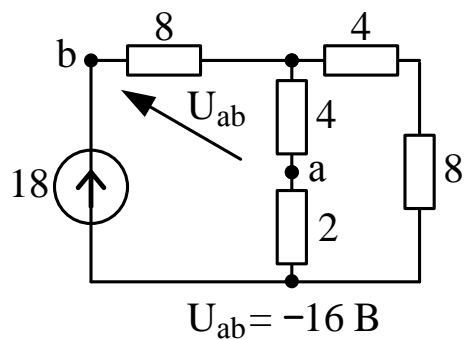


Рис. 2.30, лист 2

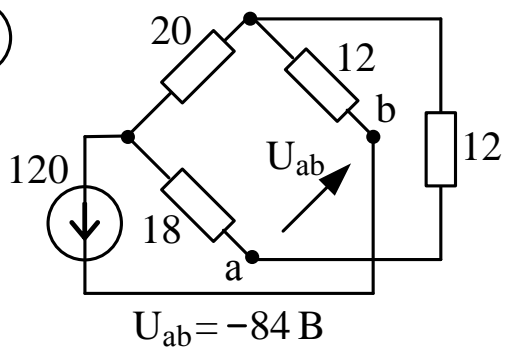
15



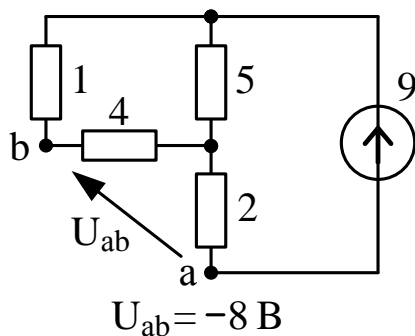
16



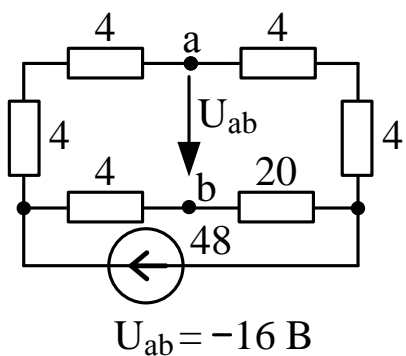
17



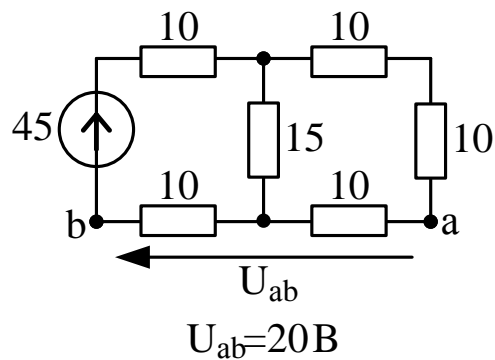
18



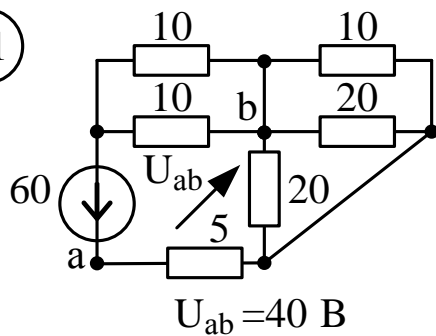
19



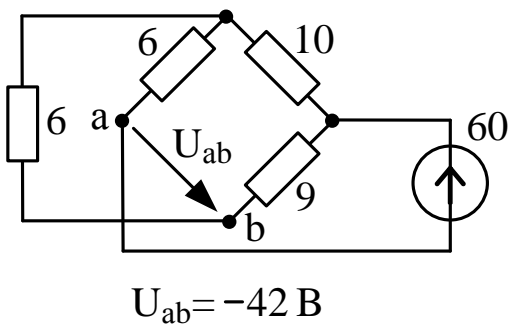
20



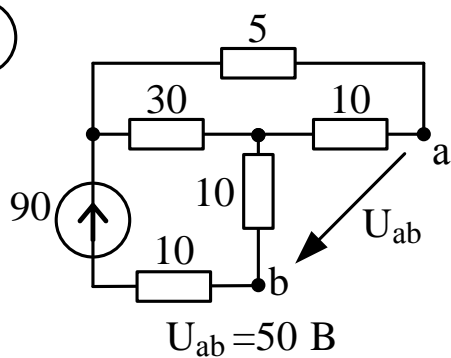
21



22



23



24

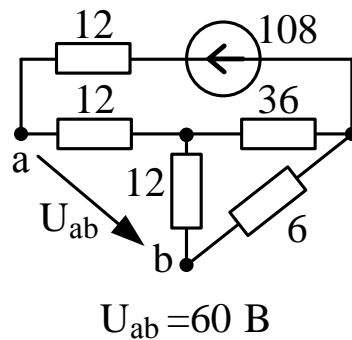


Рис. 2.30, лист 3

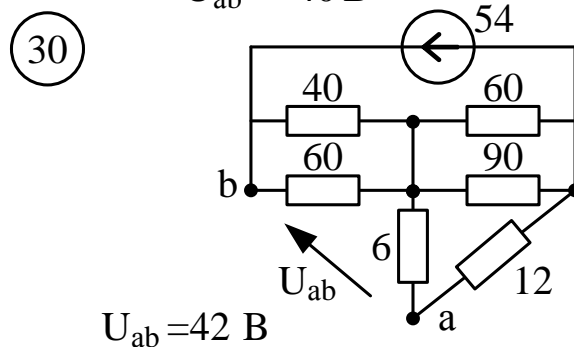
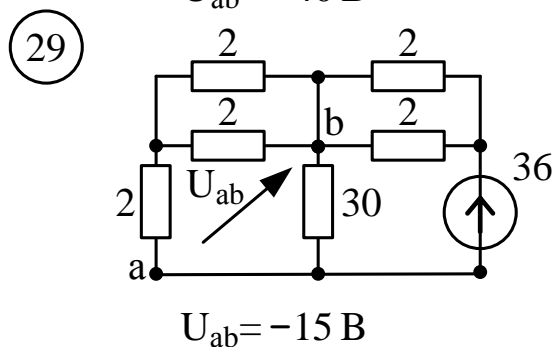
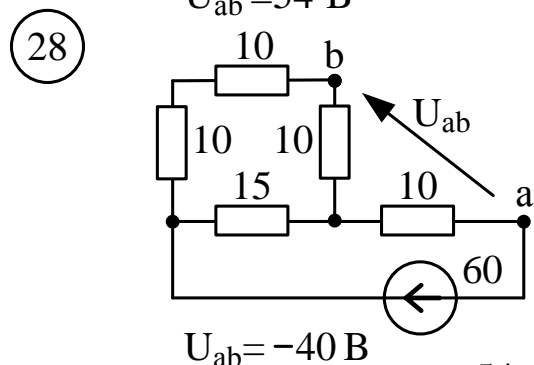
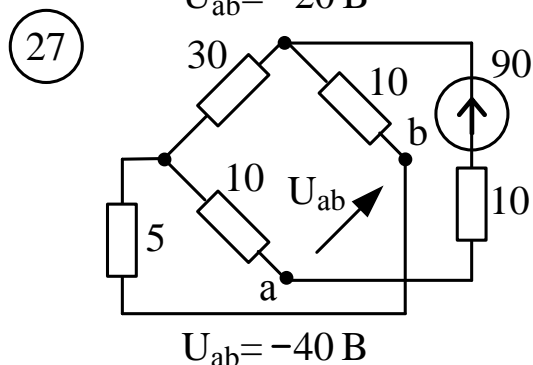
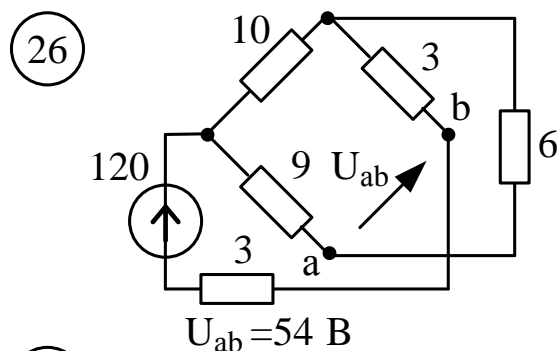
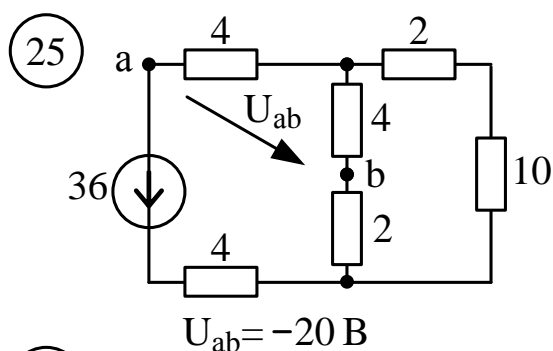


Рис. 2.30, лист 4

**П р и м е р.** В расчетной схеме, приведенной на рис. 2.31,  $E = 120 \text{ B}$ ,  $r_1 = r_4 = 40 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = r_3 = 60 \text{ Ом}$ ,  $r_5 = 50 \text{ Ом}$ . Необходимо определить все токи и напряжение  $U_{ab}$ . Составить баланс мощностей.

При решении задачи важно понимать, что физически точки  $a$  и  $b$  напрямую не соединены, поэтому имеют разные потенциалы. Стрелкой  $U_{ab}$  на схеме показано падение напряжения, которое необходимо определить в задаче. Поэтому на начальном этапе решения, пока не найдены токи в цепи,  $U_{ab}$  можно не обозначать на схеме.

#### Р е ш е н и е

В схеме всего одна ЭДС, поэтому решение удобно выполнять с помощью метода преобразования и закона Ома (см. подразд. 2.1). Необходимо, чтобы в каждой ветви схемы был обозначен свой ток (количество токов должно соответствовать количеству ветвей в схеме). В общем случае направления и индек-

сы токов выбираются произвольно. Четкое следование индексам в формулах позволяет избежать возможных ошибок в направлениях токов: если в итоге решения ток ветви принимает отрицательное значение, то в действительности ток протекает в противоположном направлении. Однако если направление тока ветви можно легко определить, не выполняя расчетов, то этого направления и стоит придерживаться.

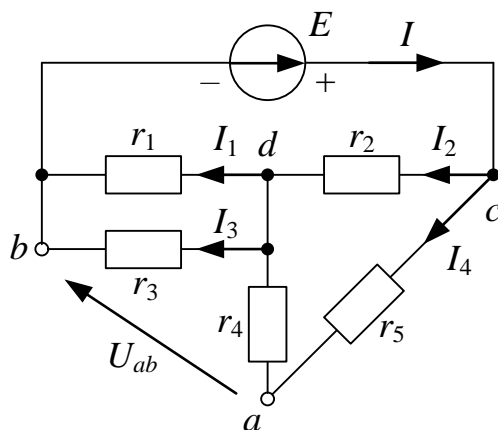


Рис. 2.31. Исходная расчетная схема для определения  $U_{ab}$

Например, учитывая направление ЭДС, в схеме на рис. 2.31 потенциал точки  $c$  принимает самое высокое значение («плюс»), а потенциал точки  $b$  – самое низкое («минус»). Напряжение  $U_{cb} = \varphi_c - \varphi_b$  положительно и равно ЭДС. Следовательно, по схеме ток пойдет от точки  $c$  к точке  $b$ . И только внутри ЭДС силы неэлектрического происхождения направляют ток в сторону возрастания потенциала (от точки  $b$  к точке  $c$ ).

Таким образом, ток  $I$  проходит через ЭДС до точки  $c$ , которая является узлом. В ней ток разделяется на токи  $I_2$  и  $I_4$ .

Точка  $a$  не является узлом, поэтому ток  $I_4$ , как и  $I_2$ , дойдет до узла  $d$ . При прохождении через сопротивления потенциал понижается и  $\varphi_d$  принимает промежуточное значение между  $\varphi_c$  и  $\varphi_b$ . В точке  $d$  токи  $I_2$  и  $I_4$  сходятся, образуя ток  $I$ , который тут же разделяется на токи  $I_1$  и  $I_3$ , протекающие от  $\varphi_d$  в сторону уменьшения потенциала – к точке  $b$ . Далее токи  $I_1$  и  $I_3$  объединяются и формируют вновь ток  $I$  – получаем замкнутую цепь.

### 1. Определим входное сопротивление цепи (относительно зажимов $E$ ).

Сопротивления  $r_1$  и  $r_3$  соединены параллельно (подключены к узлам  $b$  и  $c$ ), а  $r_4$  и  $r_5$  – последовательно (точка  $a$  не является узлом и через сопротивления протекает один и тот же ток  $I_4$ ):

$$r_{13} = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3};$$

$$r_{13} = \frac{40 \cdot 60}{40 + 60} = 24 \text{ Ом};$$

$$r_{45} = r_4 + r_5;$$

$$r_{45} = 40 + 50 = 90 \text{ Ом}.$$

Получаем новую схему, представленную на рис. 2.32, *а*, в которой отсутствуют точка *а* (осталась внутри составного сопротивления  $r_{45}$ ) и токи параллельных ветвей  $I_1$  и  $I_3$  (через сопротивление  $r_{13}$  протекает общий ток  $I$ , точка *b* перестала быть узлом).

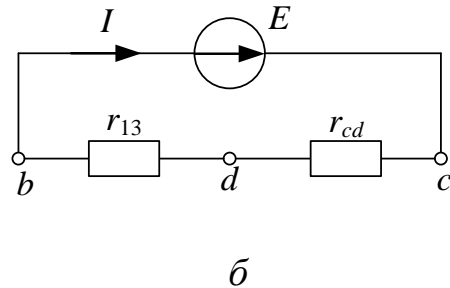
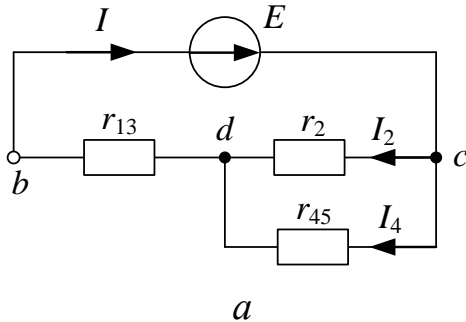


Рис. 2.32. Преобразование электрической цепи для определения токов

В полученной схеме (см. рис. 2.32, *а*) сопротивления  $r_2$  и  $r_{45}$  соединены параллельно, так как подключены к одинаковым узлам *d* и *c*. Объединяя их, получим новую схему на рис. 2.32, *б*, в которой не отображаются токи параллельных ветвей  $I_2$  и  $I_4$ , а между точками *d* и *c* расположено одно эквивалентное сопротивление:

$$r_{cd} = \frac{r_2 r_{45}}{r_2 + r_{45}};$$

$$r_{cd} = \frac{60 \cdot 90}{60 + 90} = 36 \text{ Ом}.$$

Входное сопротивление схемы:

$$r_{\text{вх}} = r_{cd} + r_{13};$$

$$r_{\text{вх}} = 36 + 24 = 60 \text{ Ом}.$$

## 2. Определим токи в цепи.

В полученной одноконтурной схеме на рис. 2.32, *б* протекает всего один ток  $I$ , который находим по закону Ома для полной цепи:

$$I = \frac{E}{r_{\text{вх}}};$$

$$I = \frac{120}{60} = 2 \text{ А}.$$

Для нахождения остальных токов необходимо постепенно разворачивать схему на рис. 2.32, *б* в обратном порядке и, как только появятся новые токи, находить их по закону Ома для участка цепи.

Например, в схеме с рис. 2.32, *a* появляются токи  $I_2$  и  $I_4$ , протекающие от узла *c* до узла *d* (при записи формулы особое внимание уделяем порядку следования индексов напряжения):

$$I_2 = \frac{U_{cd}}{r_2}; \quad I_4 = \frac{U_{cd}}{r_{45}}.$$

Неизвестное напряжение  $U_{cd}$  удобно находить по предыдущей схеме (см. рис. 2.32, *b*), в которой присутствуют точки *d* и *c* и все величины известны:

$$U_{cd} = r_{cd} I; \quad U_{cd} = 36 \cdot 2 = 72 \text{ В},$$

откуда

$$I_2 = \frac{72}{60} = 1,2 \text{ А}; \quad I_4 = \frac{72}{90} = 0,8 \text{ А}.$$

Следует обратить внимание на то, что если бы мы, например, ошиблись с направлением тока  $I_2$  (на схеме рис. 2.32, *a* обозначили бы его протекающим вправо), то по закону Ома для его нахождения следовало бы взять напряжение  $U_{dc} = -U_{cd} = -72 \text{ В}$ . Полученный знак «минус» у тока и показал бы ошибку в направлении тока.

При нахождении токов ветвей встречаются две типичные ошибки.

Во-первых, это попытка найти напряжение  $U_{cd}$  из схемы рис. 2.32, *a*, в то время как токи  $I_2$  и  $I_4$  еще не найдены. Ни через  $r_2$ , ни через  $r_{45}$  найти  $U_{cd}$  не получится. Найти  $U_{cd}$  возможно (через ЭДС и другие элементы цепи), но это решение будет более трудоемким и менее универсальным, чем воспользоваться схемой, представленной на рис. 2.32, *a*.

Второй ошибкой является попытка нахождения тока  $I_4$  по исходной схеме с рис. 2.31, например, через  $U_{ca}$  и  $r_5$ . Это сделать невозможно, так как напряжение  $U_{ca}$  можно найти только уже зная ток  $I_4$ .

Токи  $I_1$  и  $I_3$  находим аналогичным образом из схемы с рис. 2.31:

$$I_1 = \frac{U_{db}}{r_1}; \quad I_3 = \frac{U_{db}}{r_3},$$

где напряжение  $U_{db}$  находим из схемы на рис. 2.32, *a*:

$$U_{db} = r_{13} I; \quad U_{db} = 24 \cdot 2 = 48 \text{ В}.$$

В итоге получаем:

$$I_1 = \frac{48}{40} = 1,2 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{48}{60} = 0,8 \text{ А}.$$

### 3. Определим напряжение $U_{ab}$ двумя способами.

а) Через разность потенциалов точек  $a$  и  $b$ .

Потенциал одной из точек схемы принимается равным нулю. В данном случае удобно принять  $\varphi_b = 0$ . Тогда:

$$\varphi_d = \varphi_b + I_3 r_3; \quad \varphi_d = 0 + 48 = 48 \text{ В};$$

$$\varphi_a = \varphi_d + I_4 r_4; \quad \varphi_a = 48 + 32 = 80 \text{ В};$$

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b; \quad U_{ab} = 80 - 0 = 80 \text{ В}.$$

б) По второму закону Кирхгофа, например, для контура  $abda$  (направление обхода контура по часовой стрелке):

$$U_{ab} + U_{bd} + U_{da} = 0; \quad U_{ab} - r_1 I_1 - r_4 I_4 = 0.$$

Или для контура  $abca$  (направление обхода контура по часовой стрелке):

$$U_{ab} + U_{ca} = E; \quad U_{ab} + r_5 I_4 = E,$$

откуда  $U_{ab} = E - r_5 I_4$ ;  $U_{ab} = 120 - 50 \cdot 0,8 = 80 \text{ В}$ .

### 4. Проверим выполнение баланса мощностей.

Отдаваемая источником мощность  $P_{\text{ист}} = EI$ ;  $P_{\text{ист}} = 240 \text{ Вт}$ . Мощность потребителей  $P_{\text{потр}} = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 + I_3^2 r_3 + I_4^2 (r_4 + r_5)$ ;  $P_{\text{потр}} = 240 \text{ Вт}$ .

Так как  $P_{\text{ист}} = P_{\text{потр}}$ , то баланс мощностей соблюдается.

### 2.11.3. Методы расчета

**У с л о в и е з а д а ч и.** В цепи (рис. 2.33, схемы 1 – 30) ЭДС  $E$  заданы в вольтах, источники тока  $J$  – в амперах, сопротивления  $r$  – в омах.

Требуется обозначить все элементы на схеме и определить:

- 1) токи ветвей методом контурных токов;
- 2) потенциалы узлов и токи ветвей методом узловых потенциалов;
- 3) ток  $I_1$  – методом эквивалентного источника;
- 4) проверить баланс мощностей.

Ответы приведены в табл. 2.2; примеры расчета – в п. 2.10.2 – 2.10.5 и в подразд. 2.8.



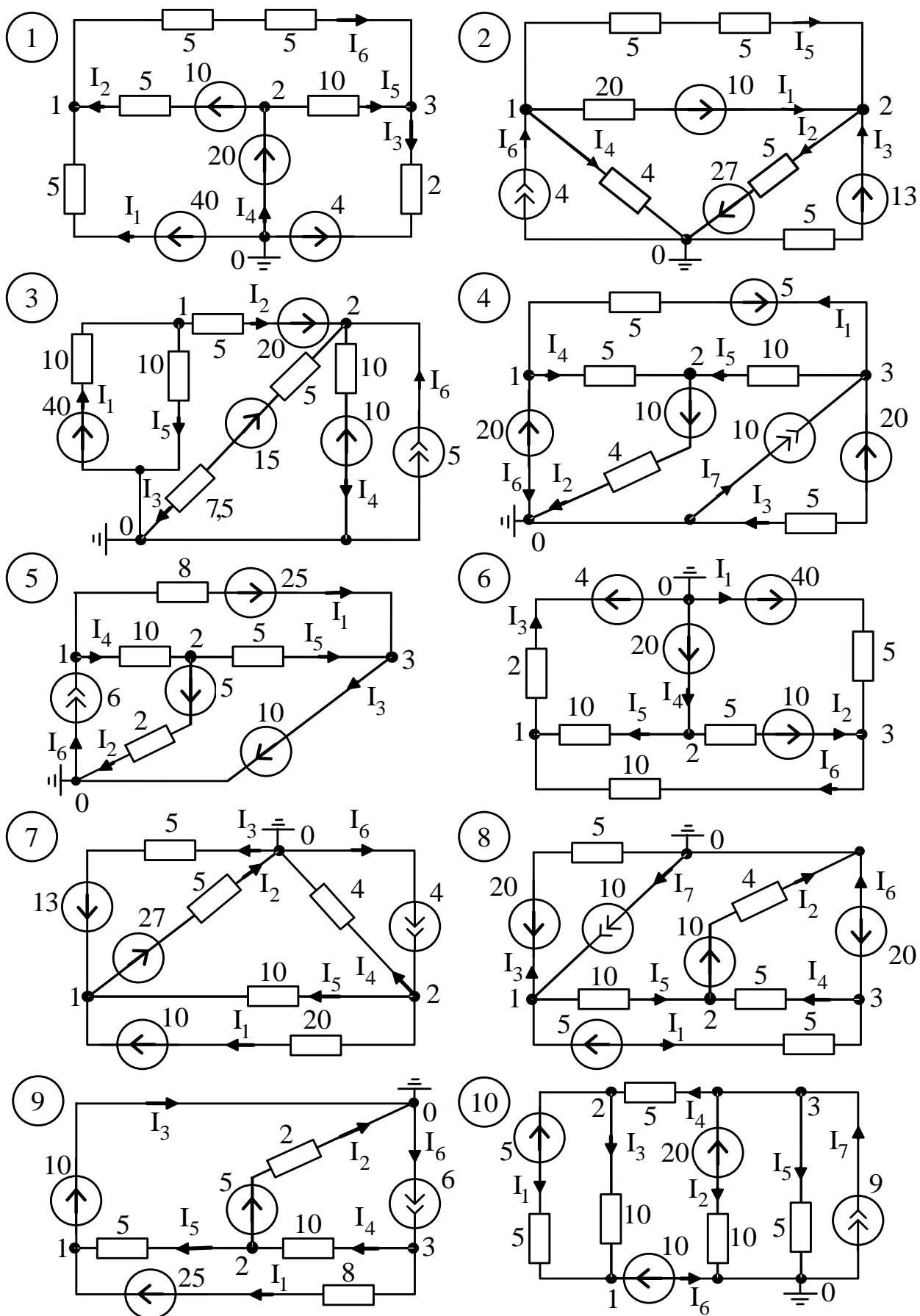


Рис. 2.33. Расчетные схемы

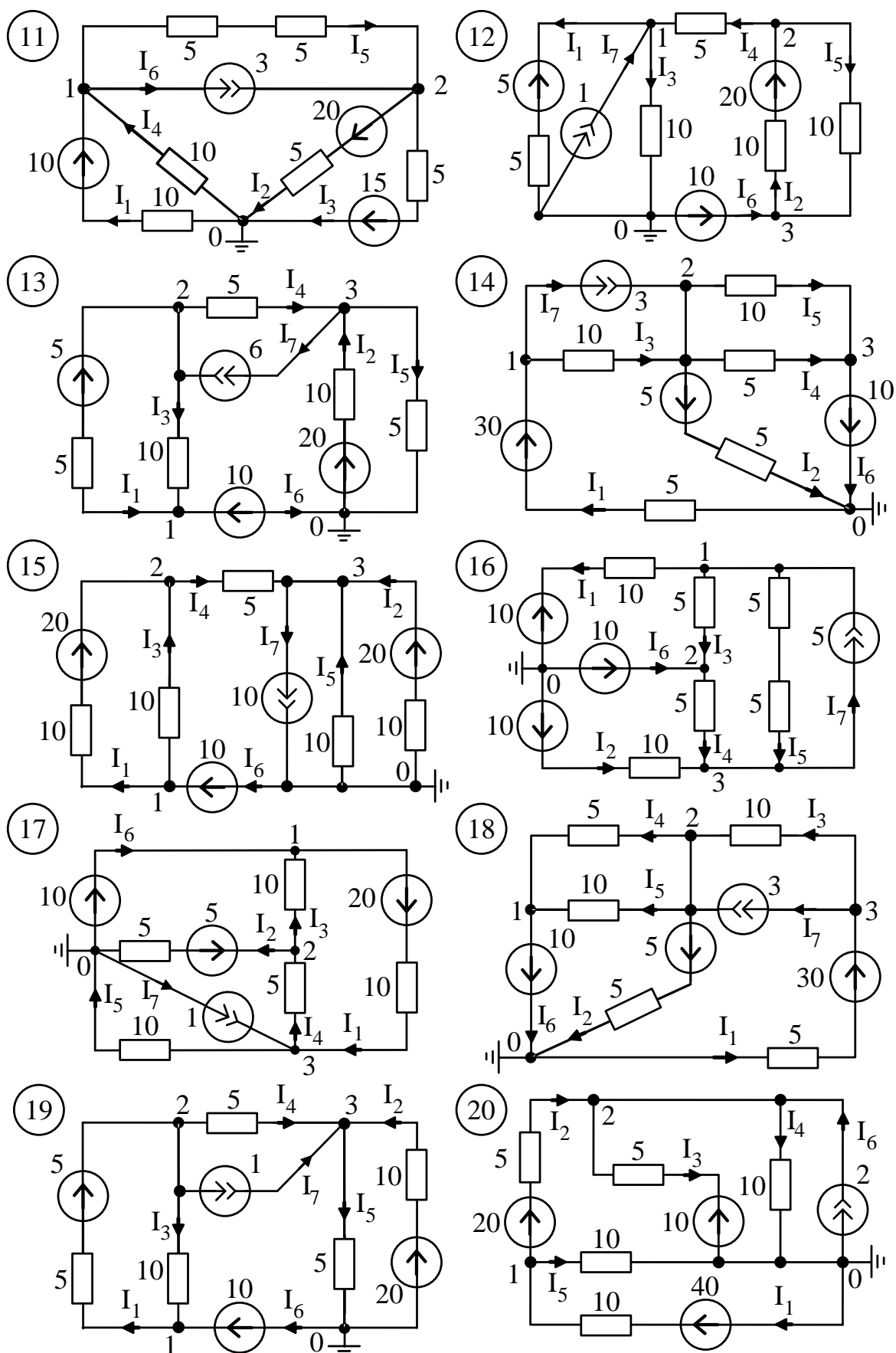


Рис. 2.33, лист 2

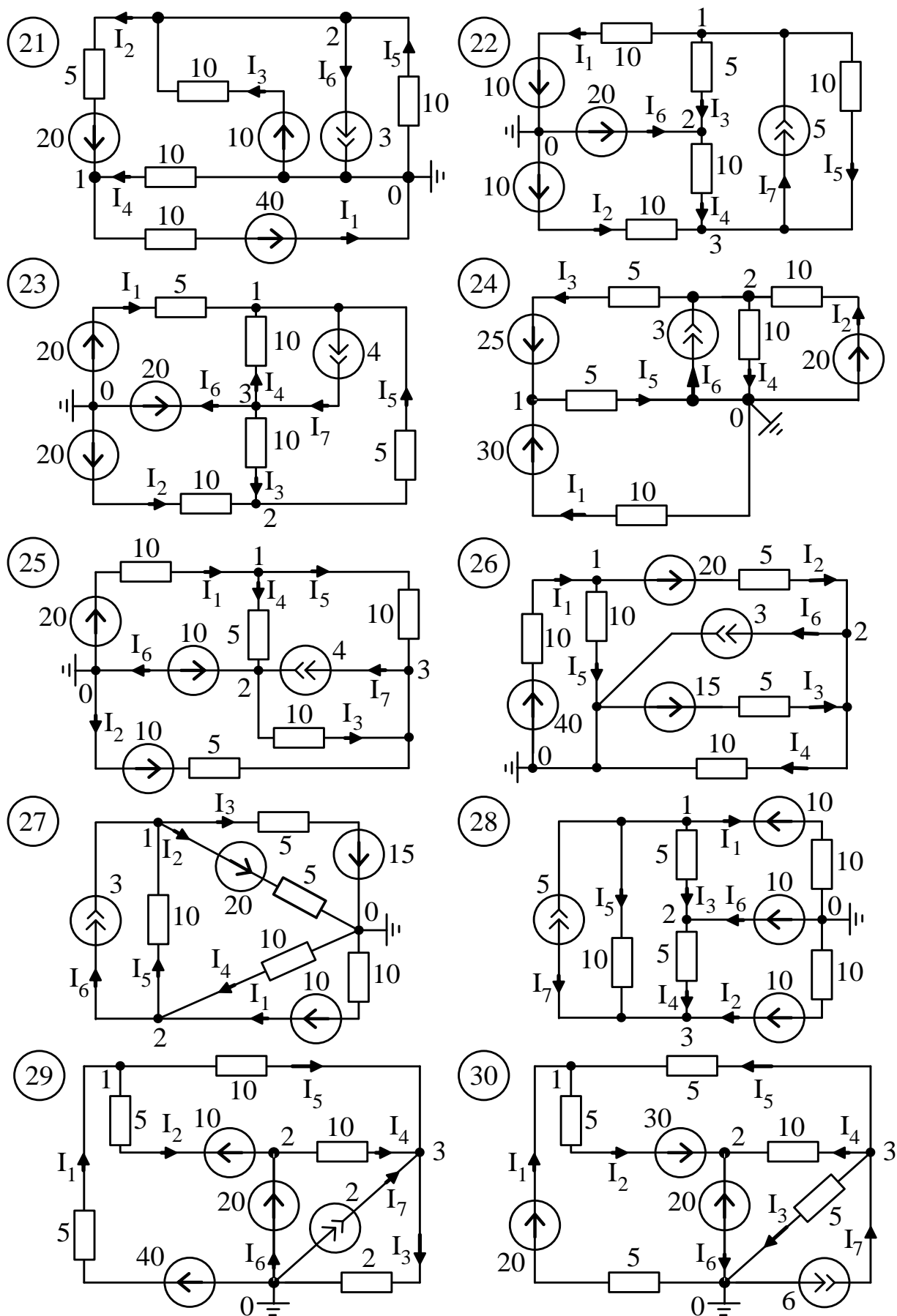


Рис. 2.33, лист 3

## Ответы к задаче

Номер схемы	Потенциал узлов, В				Ток ветвей, А						Мощность источника, Вт
	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_0$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$I_6$	$P_{\text{и}}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	30	20	10	0	2	0	3	1	1	2	88
2	8	-2	-	0	1	5	3	2	1	4	216
3	20	40	-	0	2	0	2	3	2	5	220
4	20	10	40	0	3	5	4	2	3	1	335
5	5	-5	-10	0	5	0	6	1	1	6	215
6	10	20	30	0	2	0	3	1	1	2	88
7	-2	8	-	0	1	5	3	2	1	4	216
8	40	10	20	0	3	5	4	2	3	1	335
9	-10	-5	5	0	5	0	6	1	1	6	215
10	10	20	30	0	1	1	1	2	6	2	225
11	-10	-10	-	0	2	2	1	1	0	3	75
12	10	15	10	0	1	1,5	1	1	0,5	1	45
13	10	20	0	0	1	2	1	4	0	2	135
14	10	0	-10	0	4	1	1	2	1	3	125
15	10	0	-20	0	3	4	1	4	2	4	380
16	20	10	0	0	1	1	2	2	2	0	100
17	10	10	15	0	1,5	1	0	1	1,5	1,5	55
18	-10	0	10	0	4	1	1	2	1	3	125
19	10	10	10	0	1	1	0	0	2	1	35
20	10	20	-	0	3	2	2	2	1	2	180
21	-10	-20	-	0	3	2	3	1	2	3	250
22	20	20	0	0	3	1	0	2	2	2	180
23	10	15	20	0	2	0,5	0,5	1	1	2,5	40
24	20	10	-	0	1	1	3	1	4	3	155
25	10	10	0	0	1	2	1	0	1	3	50
26	5	10	-	0	3,5	3	1	1	0,5	3	185
27	-10	-10	-	0	2	2	1	1	0	3	75
28	20	10	0	0	1	1	2	2	2	0	100
29	30	20	10	0	2	0	5	1	2	1	120
30	10	20	20	0	2	4	4	0	2	4	200

#### 2.11.4. Дополнительные задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Предел измерения амперметра – 50 мА. Число делений шкалы – 25. Стрелка отклонилась на 20 делений. Определить показание амперметра.

**Ответ:**  $I = 40$  мА.

**Задача 2.** Предел измерения вольтметра – 10 В. Число делений шкалы – 20. Стрелка отклонилась на 17 делений. Определить показание вольтметра.

**Ответ:**  $U = 8,5$  В.

**Задача 3.** На рис. 2.34  $r_1 = 4$  Ом,  $r_2 = 2$  Ом,  $r_3 = 1$  Ом,  
 $r_4 = 2$  Ом,  $r_5 = 2$  Ом,  $r_6 = 5$  Ом,  $U = 40$  В.

Найти:  $r_{ab}$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$ .

**Ответ:**  $r_{ab} = 10$  Ом,  $I_1 = 4$  А,  $I_2 = 2$  А,  $I_3 = 2$  А,  $I_4 = 1$  А,  $I_5 = 1$  А.

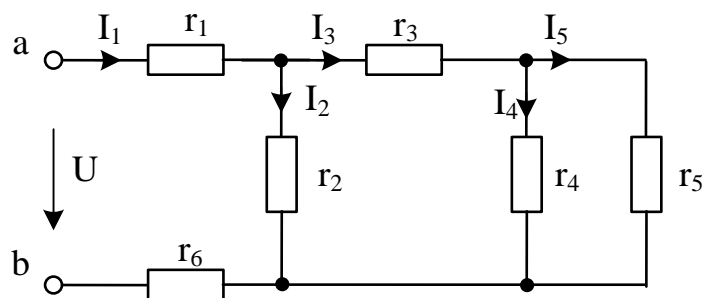


Рис. 2.34. Расчетная схема к задаче 3

**Задача 4.** На рис. 2.35  $r_1 = 7$  Ом,  $r_2 = 6$  Ом,  $r_3 = 4$  Ом,  
 $r_4 = 4$  Ом,  $r_5 = 2$  Ом,  $r_6 = 2$  Ом,  $U = 40$  В.

Найти:  $r_{ab}$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$ .

**Ответ:**  $r_{ab} = 10$  Ом,  $I_1 = 4$  А,  $I_2 = 2$  А,  $I_3 = 2$  А,  
 $I_4 = 1$  А,  $I_5 = 1$  А.

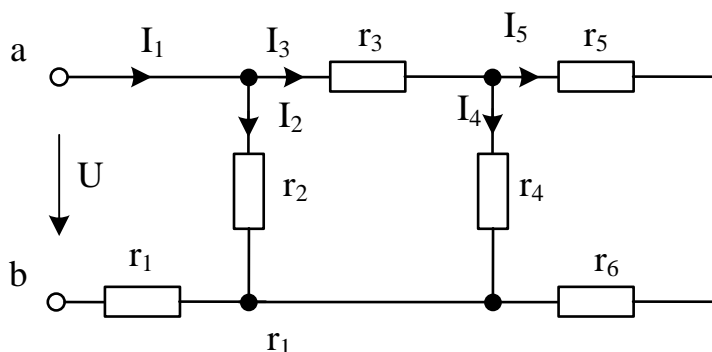


Рис. 2.35. Расчетная схема к задаче 4

**Задача 5.** На рис. 2.36  $r_1 = 3 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 3 \text{ Ом}$ ,  $r_3 = 3 \text{ Ом}$ ,  
 $r_4 = 1 \text{ Ом}$ ,  $r_5 = 1 \text{ Ом}$ .

Найти  $r_{\text{ав}}$ .

**Ответ:**  $r_{\text{ав}} = 2 \text{ Ом}$ .

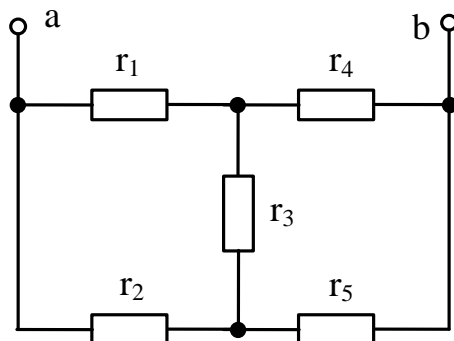


Рис. 2.36. Расчетная схема к задаче 5

**Задача 6.** На рис. 2.37  $\varphi_a = 25 \text{ В}$ ;  $\varphi_b = 5 \text{ В}$ ,  
 $E = 10 \text{ В}$ ,  $r_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 20 \text{ Ом}$ .

Найти  $I$ .

**Ответ:**  $I = 1 \text{ А}$ .

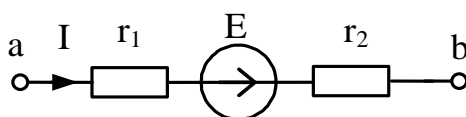


Рис. 2.37. Расчетная схема к задаче 6

**Задача 7.** На рис. 2.38  $I = 1 \text{ А}$ ,  $E = 10 \text{ В}$ ,  $r_1 = 3 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 7 \text{ Ом}$ .

Найти  $U_{\text{ав}}$ .

**Ответ:**  $U_{\text{ав}} = 20 \text{ В}$ .

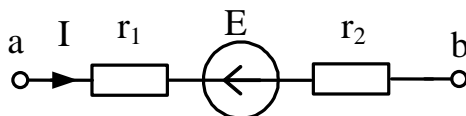


Рис. 2.38. Расчетная схема к задаче 7

**Задача 8.** На рис. 2.39  $r_1 = 3 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 1 \text{ Ом}$ ,  $r_3 = 1 \text{ Ом}$ ,  $E_1 = 10 \text{ В}$ ,  $E_2 = 5 \text{ В}$ .

Найти  $U_{\text{ав}}$ .

**Ответ:**  $U_{\text{ав}} = 6 \text{ В}$ .

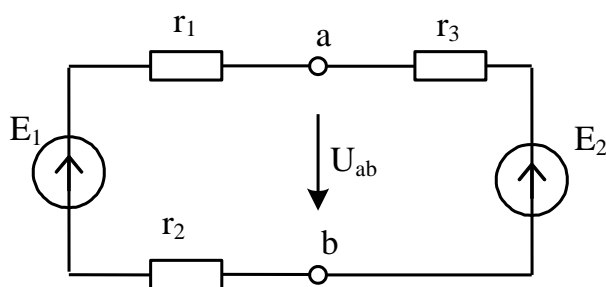


Рис. 2.39. Расчетная схема к задаче 8

**Задача 9.** На рис. 2.40  $r_1 = 1 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 3 \text{ Ом}$ ,  $r_3 = 1 \text{ Ом}$ ,  $E = 5 \text{ В}$ ,  $J = 10 \text{ А}$ .

Найти  $U_{ab}$ .

**Ответ:**  $U_{ab} = 6 \text{ В}$ .

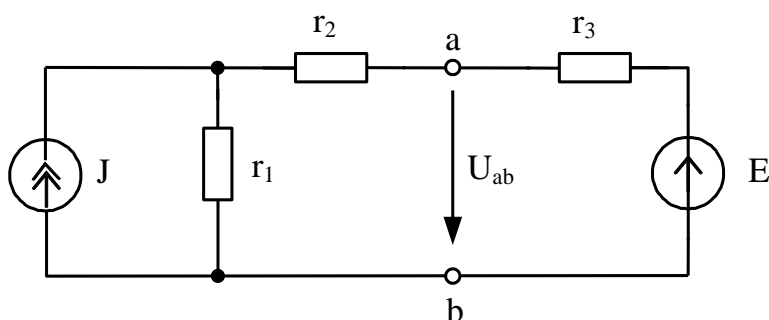


Рис. 2.40. Расчетная схема к задаче 9

**Задача 10.** При одном значении сопротивления нагрузки  $r_H$  (рис. 2.41) показания амперметра –  $1 \text{ А}$ , вольтметра –  $9,9 \text{ В}$ ; при другом значении –  $2 \text{ А}$  и  $9,8 \text{ В}$ . Измерительные приборы считаем идеальными ( $r_A = 0$ ;  $r_V = \infty$ ).

Найти:  $E_9$ ,  $r_9$ .

**Ответ:**  $E_9 = 10 \text{ В}$ ,  $r_9 = 0,1 \text{ Ом}$ .

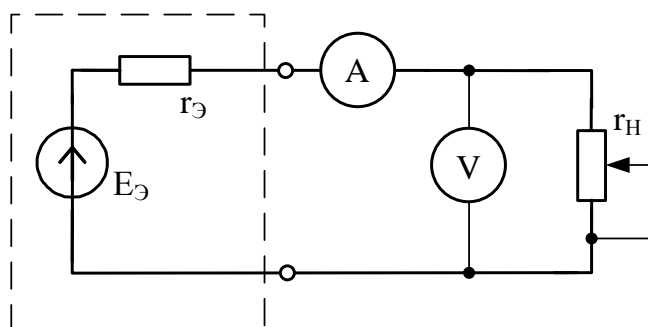


Рис. 2.41. Расчетная схема к задаче 10

**Задача 11.** При сопротивлении нагрузки  $r_{H1} = 9 \text{ Ом}$  (рис. 2.42) амперметр показал ток  $I_1 = 1 \text{ А}$ ; при  $r_{H2} = 4 \text{ Ом}$  ток  $I_2 = 2 \text{ А}$ . Сопротивление  $r_A = 0,9 \text{ Ом}$ .

Найти:  $E_3, r_3$ .

**Ответ:**  $E_3 = 10 \text{ В}, r_3 = 0,1 \text{ Ом}$ .

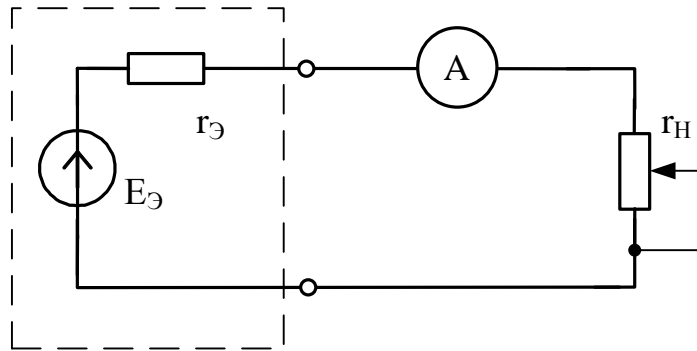


Рис. 2.42. Расчетная схема к задаче 11

**Задача 12.** При сопротивлении нагрузки  $r_{H1} = 10 \text{ Ом}$  (рис. 2.43) вольтметр показал напряжение  $U_1 = 9,9 \text{ В}$ ; при  $r_{H2} = 4,92 \text{ Ом}$   $U_2 = 9,8 \text{ В}$ . Сопротивление вольтметра  $r_v = 980 \text{ Ом}$ .

Найти:  $E_3, r_3$ .

**Ответ:**  $E_3 = 10 \text{ В}, r_3 = 0,1 \text{ Ом}$ .

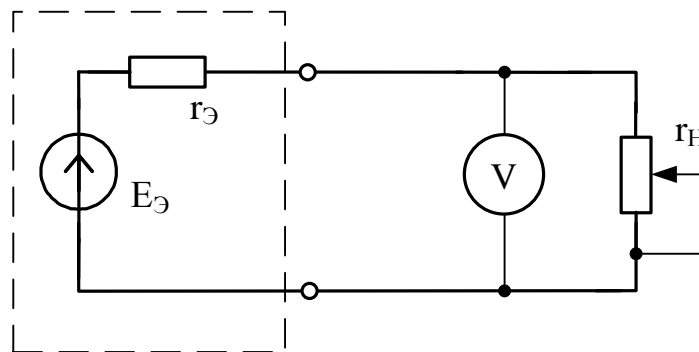


Рис. 2.43. Расчетная схема к задаче 12

**Задача 13.** Исходные данные для схемы, изображенной на рис. 2.44:  $E_1 = 2 \text{ В}, E_2 = 6 \text{ В}, J = 2 \text{ А}, r_1 = 1 \text{ Ом}, r_2 = 2 \text{ Ом}, r_3 = 2 \text{ Ом}, r_4 = 1 \text{ Ом}, r_5 = 2 \text{ Ом}, r_6 = 1 \text{ Ом}$ .

Найти:  $r_{11}, r_{12}, r_{22}, r_{21}, r_{23}, r_{33}, r_{32}, E_{11}, E_{22}, E_{33}, g_{11}, g_{12}, g_{22}, J_{11}, J_{22}$ .

**Ответ:**  $r_{11} = 3 \text{ Ом}, r_{12} = -1 \text{ Ом}, r_{22} = 5 \text{ Ом}, r_{21} = -1 \text{ Ом}, r_{23} = -2 \text{ Ом}, r_{33} = 4 \text{ Ом}, r_{32} = -2 \text{ Ом}, E_{11} = 2 \text{ В}, E_{22} = 0, E_{33} = -6 \text{ В}, g_{11} = 2 \text{ См}, g_{12} = -0,5 \text{ См}, g_{22} = 1,5 \text{ См}, J_{11} = 3 \text{ А}, J_{22} = 1 \text{ А}$ .



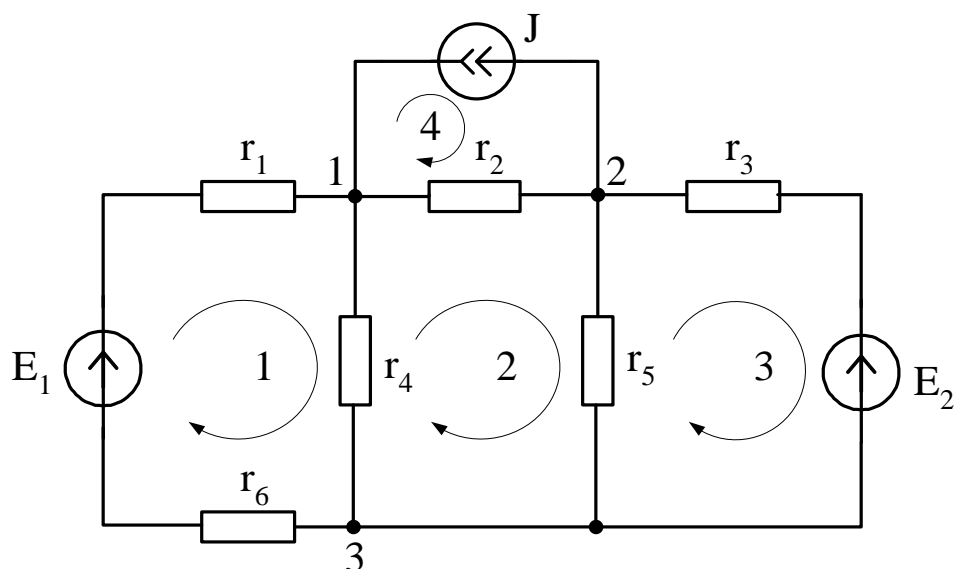


Рис. 2.44. Расчетная схема к задаче 13

**Задача 14.** На рис. 2.45  $E = 18 \text{ В}$ ,  $r_1 = r_2 = r_3 = 36 \text{ Ом}$ ,  $r_4 = 24 \text{ Ом}$ ,  $r_5 = 30 \text{ Ом}$ ,  $r_6 = 20 \text{ Ом}$ .

Найти: ток  $I_6$  и потенциалы точек  $b$ ,  $c$  и  $d$ , если принять  $\varphi_a = 0$ .

**Ответ:**  $I_6 = 0,15 \text{ А}$ ,  $\varphi_b = 9 \text{ В}$ ,  $\varphi_c = 15 \text{ В}$ ,  $\varphi_d = 18 \text{ В}$ .

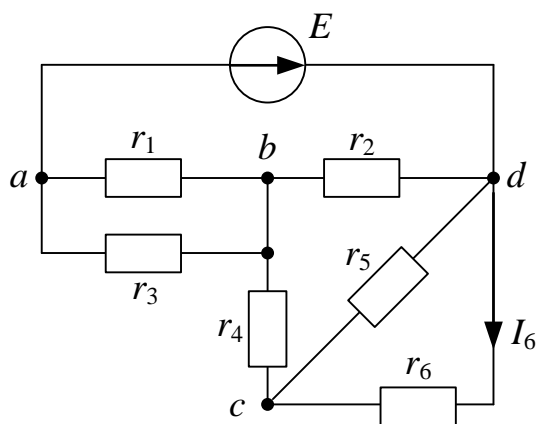


Рис. 2.45. Расчетная схема к задаче 14

### 3. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ИСТОЧНИКАМИ СИНУСОИДАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА («ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА»)

Синусоидальное напряжение в энергетике вырабатывается синхронными генераторами электрических станций. В нашей стране принята частота 50 Гц. На эту частоту рассчитано оборудование систем электроснабжения различного уровня, а также электрооборудование переменного тока, питаемое от сетей электроснабжения: трансформаторы, электрические машины переменного тока, технологическое оборудование промышленных предприятий, бытовая техника и пр.

Широкое применение источники синусоидального напряжения находят в измерительной технике, технике связи, радиоэлектронике и в других областях техники.

При синусоидальной форме напряжения ток в линейной электрической цепи также имеет синусоидальную форму. Частота тока совпадает с частотой приложенного напряжения. Синусоидальные режимы используются в широком диапазоне частот в зависимости от области техники.

Цепи синусоидального тока представляют собой частный случай общего понятия цепей переменного тока. При изучении цепей синусоидального тока применяются все соотношения для элементов цепей, приведенные в разд. 1, 2.

#### 3.1. Синусоидальное напряжение, ток и ЭДС

Синусоидальное напряжение, ток и ЭДС (мгновенные значения) описываются функциями вида:

$$\begin{cases} u = U_m \sin(\omega t + \beta); \\ i = I_m \sin(\omega t + \alpha); \\ e = E_m \sin(\omega t + \gamma), \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $U_m, I_m, E_m$  – амплитуды (максимальные значения) напряжения, тока и ЭДС;

$\omega$  – угловая частота;

$\beta, \alpha, \gamma$  – начальные фазы напряжения, тока и ЭДС.

При математическом описании синусоидально изменяющихся величин используются различные понятия. В частности, малыми буквами обозначаются так называемые мгновенные значения большинства физических величин. По-

этому в рассматриваемом случае  $u$ ,  $i$ ,  $e$  представляют соответственно **мгновенные** значения напряжения, тока и ЭДС или мгновенный ток, мгновенное напряжение и т. д.

Угловая частота  $\omega$ , частота  $f$  и период  $T$  связаны соотношением:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (3.2)$$

На рис. 3.1, *а* построен временной график функции  $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$ , а на рис. 3.1, *б* – соответствующая векторная диаграмма при  $t = 0$ .

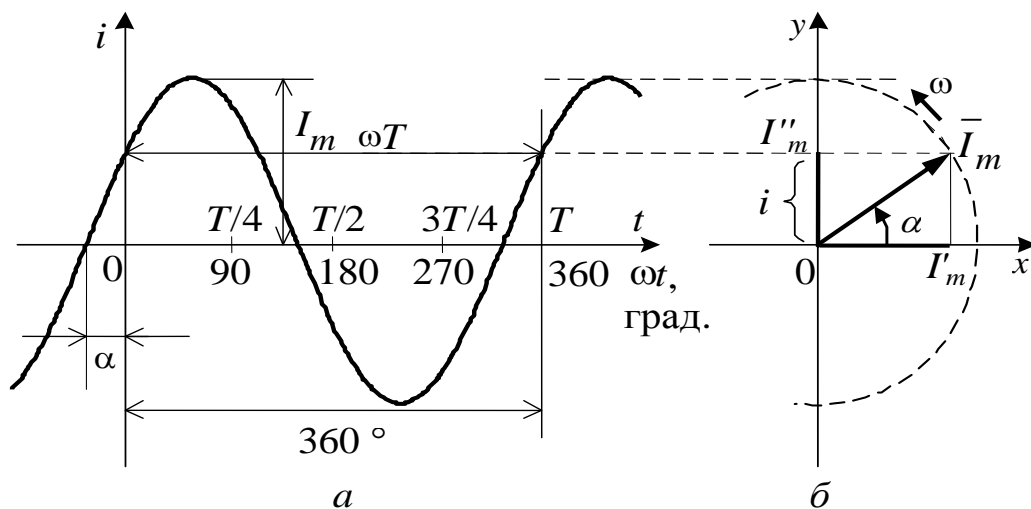


Рис. 3.1. Синусоидальная функция и ее представление вращающимся вектором

Проекция вращающегося против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вектора  $\bar{I}_m$  (см. рис. 3.1, *б*) на вертикальную ось изменяется во времени по синусоидальному закону. Поэтому любая синусоидальная функция (ток, напряжение, ЭДС) может быть изображена вектором. На рис. 3.1, *б* изображен вектор тока с проекциями  $I'_m = I_m \cos \alpha$  и  $I''_m = I_m \sin \alpha$ .

На рис. 3.2, *а* кривые напряжения и тока совмещены на одной диаграмме. Начальным фазам соответствуют значения  $\beta/\omega$  и  $\alpha/\omega$ , поскольку в качестве независимой переменной взято время  $t$ .

В соответствии с выражением (3.2)  $\omega T = 2\pi$ . Для части периода, например  $t_1$ , по аналогии можно записать:  $\omega t_1 = \delta$ , откуда  $t_1 = \delta/\omega$ , поэтому на рис. 3.2, *а* обозначены не начальные фазы  $\beta$  и  $\alpha$ , а соответствующие им отрезки времени  $\beta/\omega$  и  $\alpha/\omega$ .

Пользоваться подобными диаграммами неудобно, поэтому чаще вместо времени  $t$  в качестве независимой переменной используют произведение  $\omega t$  (см. рис. 3.2, б). Тогда и появляются начальные фазы, измеряемые в угловых единицах.

На диаграмме рис. 3.2, б отмечен еще один важный параметр – угол

$$\varphi = \beta - \alpha, \quad (3.3)$$

который называется **углом сдвига фаз** между напряжением и током.

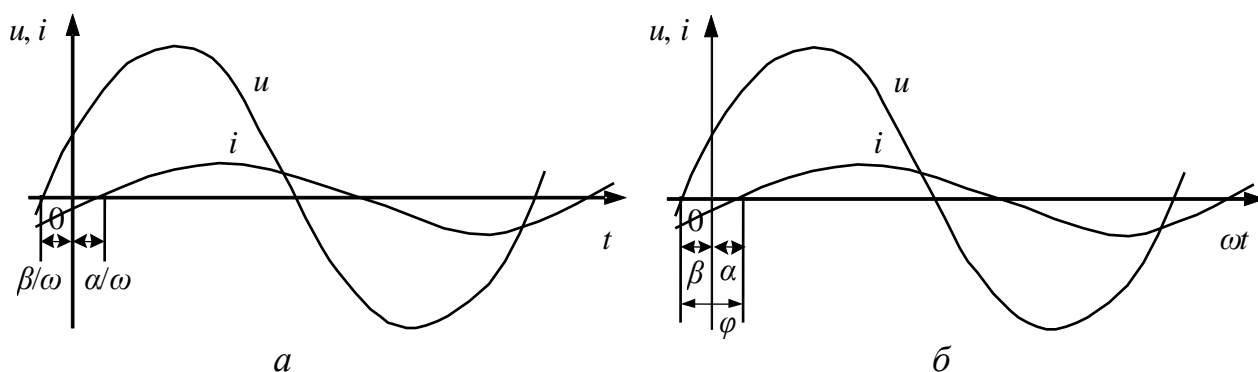


Рис. 3.2. Фазовые сдвиги между напряжением и током во временных (а) и угловых (б) единицах измерения

Начало положительной полуволны напряжения находится левее начала координат, поэтому начальная фаза  $\beta$  считается опережающей и  $\beta$  – положительна ( $\beta > 0$ ), при этом при  $t = 0$  значение напряжения положительно ( $u(0) > 0$ ).

Положительная полуволна тока начинается правее начала координат (запаздывает), поэтому начальная фаза тока  $\alpha$  определяется как запаздывающая или отстающая и на указанном рисунке она отрицательна ( $\alpha < 0$ ), при этом значение тока при  $t = 0$  отрицательно ( $i(0) < 0$ ).

### 3.2. Синусоидальные режимы простейших электрических цепей

В качестве простейших рассматриваются одноэлементные схемы  $r$ ,  $L$  и  $C$  (рис. 3.3) и двухэлементные –  $r$ ,  $L$  и  $r$ ,  $C$ .

Пусть в рассматриваемых случаях напряжение и ток описываются выражениями:

$$\begin{cases} u = U_m \sin(\omega t + \beta); \\ i = I_m \sin(\omega t + \alpha). \end{cases} \quad (3.4)$$

**В сопротивлении  $r$**  напряжение и ток подчинены закону Ома, поэтому

$$u_r = r i_r \quad (3.5)$$

или после подстановки в полученное уравнение формулы (3.4):

$$U_{rm} \sin(\omega t + \beta) = r I_{rm} \sin(\omega t + \alpha). \quad (3.6)$$

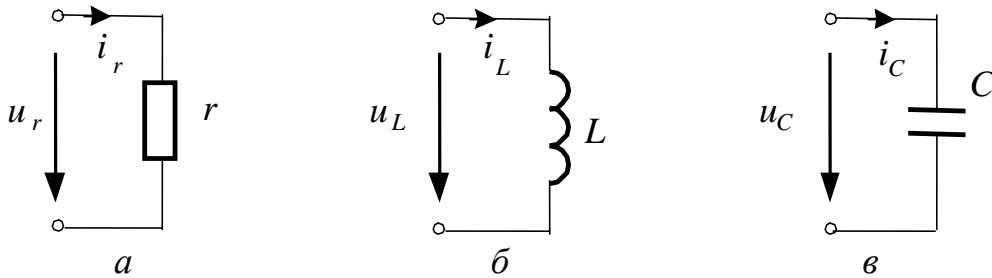


Рис. 3.3. Одноэлементные схемы:  
а – сопротивление; б – индуктивность; в – емкость

Равенство (3.6) выполняется, если отдельно равны друг другу амплитуды и начальные фазы левой и правой частей:

$$U_{rm} = r I_{rm}; \quad (3.7)$$

$$\beta = \alpha. \quad (3.8)$$

Равенство (3.7) показывает, что закон Ома в данном случае справедлив для амплитуд. Смысл равенства (3.8) состоит в том, что напряжение  $u_r$  и ток  $i_r$  совпадают по фазе.

На временной диаграмме (рис. 3.4, а) моменты перехода через нулевые значения совпадают у обеих кривых. На векторной диаграмме соответственно совпадают направления векторов напряжения и тока (рис. 3.4, б). Угол сдвига фаз между напряжением и током равен нулю ( $\varphi = \beta - \alpha = 0$ ).

Векторы на рис. 3.4, б соответствуют амплитудным значениям напряжения и тока. Масштабы напряжения и тока при построении векторной диаграммы выбираются независимо друг от друга.

Соотношения (3.7) и (3.8) справедливы для каждого элемента  $r$  в составе любой схемы замещения независимо от ее структуры и количества элементов. Напряжение и ток в сопротивлении всегда совпадают между собой по фазе (см. рис. 3.4, а).

В индуктивности  $L$  (рис. 3.3, б) напряжение и ток в соответствии с выражением (1.9) связаны формулой:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}. \quad (3.9)$$

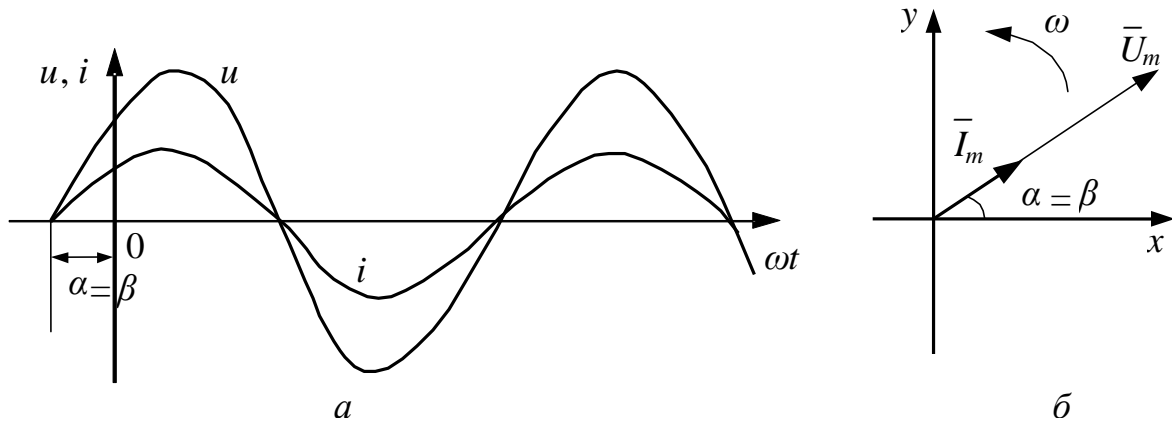


Рис. 3.4. Временная (а) и векторная (б) диаграммы синусоидальных напряжения и тока в сопротивлении  $r$

Подстановка уравнений (3.4) в (3.9) дает:

$$U_{Lm} \sin(\omega t + \beta) = L \frac{d}{dt} [I_{Lm} \sin(\omega t + \alpha)] \quad (3.10)$$

или

$$U_{Lm} \sin(\omega t + \beta) = \omega L I_{Lm} \cos(\omega t + \alpha) = \omega L I_{Lm} \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.11)$$

откуда выводятся равенства:

$$U_{Lm} = \omega L I_{Lm}; \quad (3.12)$$

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}. \quad (3.13)$$

Величина  $\omega L$  имеет размерность сопротивления, обозначается как  $x_L$  и называется **индуктивным сопротивлением**:

$$x_L = \omega L. \quad (3.14)$$

Угол сдвига фаз в данном случае

$$\varphi = \beta - \alpha = \frac{\pi}{2}. \quad (3.15)$$

Соотношения (3.13) и (3.15) позволяют сделать вывод о том, что в индуктивности напряжение по фазе опережает ток на угол  $\pi/2$ , или на  $90^\circ$ . Соответствующие временная и векторная диаграммы приведены на рис. 3.5.

При построении векторных диаграмм за положительное направление отсчета углов принято направление против часовой стрелки. На векторной диаграмме рис. 3.5, б соответственно угол сдвига фаз отсчитан от вектора тока к вектору напряжения.

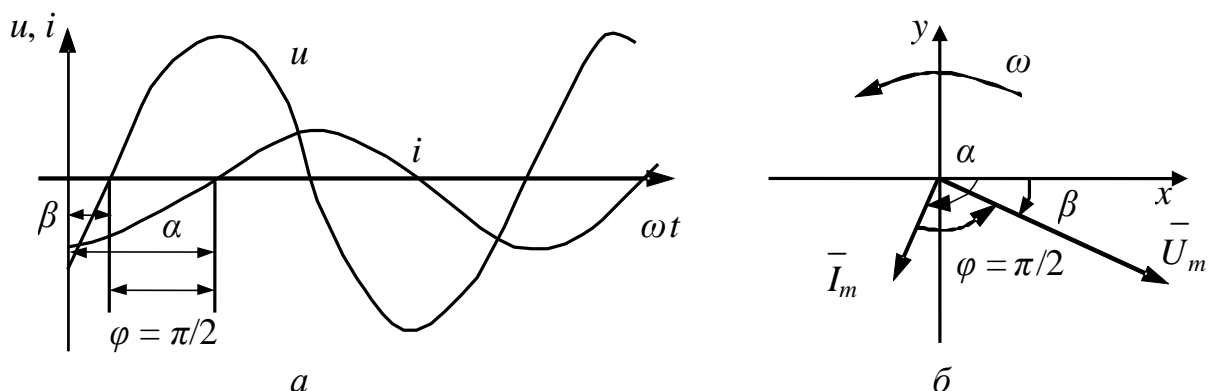


Рис. 3.5. Временная (а) и векторная (б) диаграммы напряжения и тока в индуктивности

В качестве исходного для емкости  $C$  (рис. 3.3, в) примем соотношение

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt, \quad (3.16)$$

которое с учетом системы (3.4) приводит к уравнению

$$U_{Cm} \sin(\omega t + \beta) = \frac{1}{C} \int I_{Cm} \sin(\omega t + \alpha) dt \quad (3.17)$$

или

$$U_{Cm} \sin(\omega t + \beta) = -\frac{1}{\omega C} I_{Cm} \cos(\omega t + \alpha) = \frac{1}{\omega C} I_{Cm} \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.18)$$

откуда получаем:

$$U_{Cm} = \frac{1}{\omega C} I_{Cm}; \quad (3.19)$$

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}; \quad (3.20)$$

$$\varphi = \beta - \alpha = -\frac{\pi}{2}. \quad (3.21)$$

Величина

$$x_C = \frac{1}{\omega C}, \quad (3.22)$$

имеющая размерность сопротивления, называется **емкостным сопротивлением**.

В данном случае, как следует из уравнений (3.20) и (3.21), напряжение отстает от тока на угол  $\pi/2$ , или на  $90^\circ$  (рис. 3.6, а).

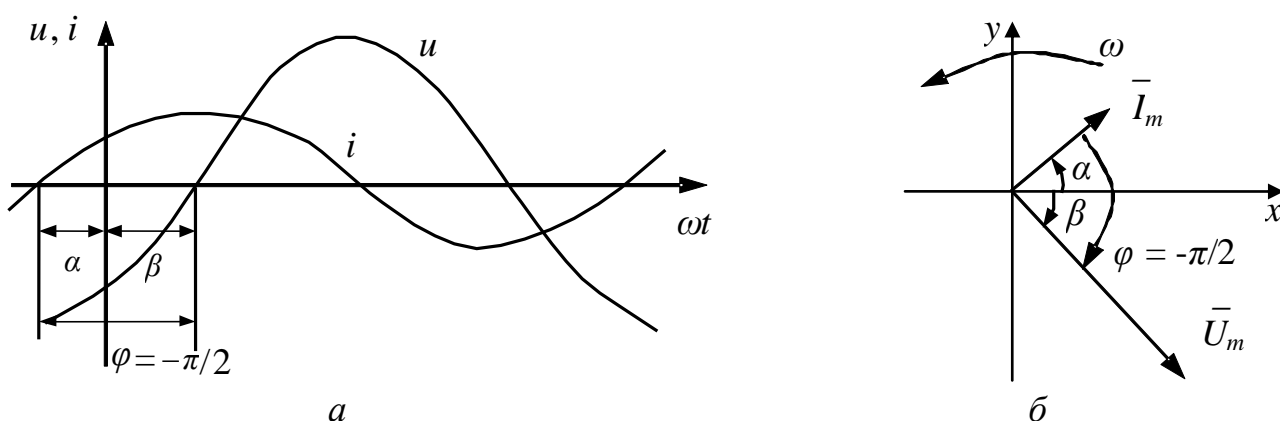


Рис. 3.6. Временная (а) и векторная (б) диаграммы напряжения и тока в емкости

Итогом рассмотрения режимов элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$  должно быть понимание того, что токи элементов и связанные с ними падения напряжения подчинены правилам:

- в сопротивлении  $r$  ток и напряжение **совпадают** по фазе;
- в индуктивности  $L$  **напряжение опережает** ток на  $90^\circ$ ;
- в емкости  $C$  **напряжение отстает** от тока на  $90^\circ$ .

Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для двухэлементных схем, изображенных на рис. 3.7.

**Цепь с  $r$  и  $L$**  (рис. 3.7, а) описывается уравнением по второму закону Кирхгофа для мгновенных значений:

$$u_r + u_L = u \quad (3.23)$$

или



$$ri + L \frac{di}{dt} = u. \quad (3.24)$$

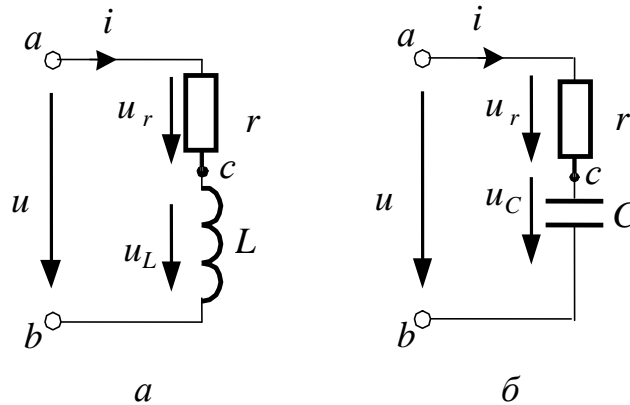


Рис. 3.7. Двухэлементные схемы:  
а –  $r$  и  $L$ ; б –  $r$  и  $C$

Как и ранее, осуществляем подстановку соотношений (3.4) в полученное уравнение (3.24):

$$rI_m \sin(\omega t + \alpha) + L \frac{d}{dt} [I_m \sin(\omega t + \alpha)] = U_m \sin(\omega t + \beta). \quad (3.25)$$

Преобразуем уравнение (3.25) с использованием известных математических приемов:

$$I_m [r \sin(\omega t + \alpha) + \omega L \cos(\omega t + \alpha)] = U_m \sin(\omega t + \beta); \quad (3.26)$$

$$I_m \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} \sin\left(\omega t + \alpha + \arctg \frac{\omega L}{r}\right) = U_m \sin(\omega t + \beta). \quad (3.27)$$

На основе полученного результата формируем равенства:

$$U_m = I_m \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}; \quad (3.28)$$

$$\beta = \alpha + \arctg \frac{\omega L}{r}. \quad (3.29)$$

Величина

$$\sqrt{r^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{r^2 + x_L^2} = z \quad (3.30)$$

называется **полным сопротивлением**.

Полное сопротивление содержит в своем составе **активное** сопротивление  $r$ , которое отличается по величине от сопротивления, измеренного на постоянном токе, в силу проявления явления поверхностного эффекта.

Суть поверхностного эффекта состоит в следующем. Плотность переменного тока по сечению проводника распределяется неравномерно. Максимальные значения плотности тока имеют место у поверхности проводника, минимальные – на оси проводника. Вследствие этого сопротивление проводника увеличивается по сравнению со случаем постоянного тока. Проявление поверхностного эффекта тем больше, чем больше частота тока. При частоте 50 Гц такое проявление незначительно, т. е. сопротивления, измеренные при нулевой частоте (постоянный ток) и при частоте 50 Гц, отличаются друг от друга незначительно.

Входящее в состав полного сопротивления  $z$  индуктивное сопротивление  $x_L = \omega L$  относится к разряду **реактивных** сопротивлений. В отличие от активного сопротивления  $r$ , которое связано с потерями электрической энергии, реактивное сопротивление  $x_L$  определяется обратимыми процессами преобразования энергии магнитного поля, которые не сопровождаются потерями электрической энергии.

С учетом уравнения (3.29) угол сдвига фаз в этом случае рассчитывается по формуле:

$$\varphi = \beta - \alpha = \alpha + \operatorname{arctg} \frac{x_L}{r} - \alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_L}{r}. \quad (3.31)$$

В зависимости от соотношения между  $x_L$  и  $r$  угол сдвига фаз может принимать любое значение между нулем и  $\pi/2$ . В предельных случаях цепь становится чисто активной ( $L = 0$ ) или чисто реактивной ( $r = 0$ ). На рис. 3.8, *а* изображена временная диаграмма для случая  $r = x_L$  ( $\varphi = 45^\circ$ ), ей соответствует векторная диаграмма, представленная на рис. 3.8, *б*.

Особенности построения векторной диаграммы: поскольку имеет место последовательное соединение элементов  $r$  и  $L$ , то вектор тока  $\bar{I}_m$  отложен как исходный; относительно тока отложены векторы падений напряжений  $x_L \bar{I}_m$  и  $r \bar{I}_m$ ; геометрическим сложением получен вектор входного напряжения  $\bar{U}_m$ . Масштабы напряжения и тока выбраны не зависимыми друг от друга.

Аналогичные преобразования для **цепи с  $r$  и  $C$**  (рис. 3.7, *б*) привели бы к следующему результату:

$$U_m = I_m \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = I_m \sqrt{r^2 + x_C^2}; \quad (3.32)$$

$$\beta = \alpha + \arctg \frac{-x_C}{r}; \quad (3.33)$$

$$\varphi = \arctg \frac{-x_C}{r}. \quad (3.34)$$

Угол сдвига фаз в данном случае отрицателен и может принимать любое значение в диапазоне от нуля до  $-\pi/2$ . Следовательно, при любых соотношениях между  $r$  и  $x_C$  входное напряжение цепи отстает по фазе от тока.

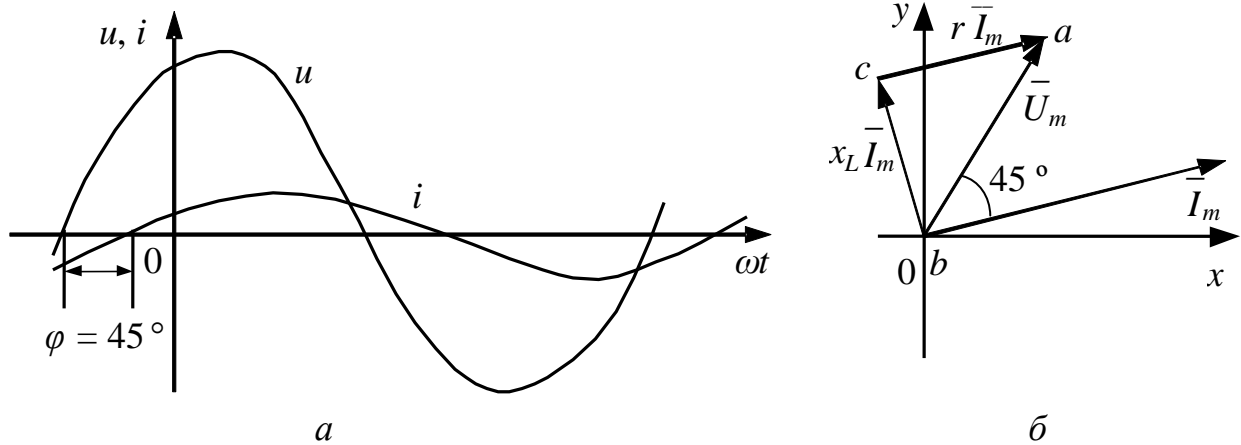


Рис. 3.8. Напряжение и ток в цепи с  $r$  и  $L$

Емкостное сопротивление  $x_C = \frac{1}{\omega C}$  так же, как и индуктивное, относится к разряду реактивных сопротивлений, поскольку значение этого сопротивления обуславливается обратимыми процессами изменения энергии электрического поля.

На рис. 3.9, *а* приведена временная диаграмма для случая  $r = x_C$ , ( $\varphi = -45^\circ$ ). Этой диаграмме соответствует векторная диаграмма на рис. 3.9, *б*.

Выявленные фазовые соотношения между напряжением и током в индуктивности и емкости обусловлены разной физической природой магнитного и электрического полей, что находит выражение в следующих парах соотношений:

для индуктивности –

$$\begin{cases} u_L = L \frac{di_L}{dt}; \\ i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt; \end{cases} \quad (3.35)$$

для емкости –

$$\begin{cases} i_C = C \frac{du_C}{dt}; \\ u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt. \end{cases} \quad (3.36)$$

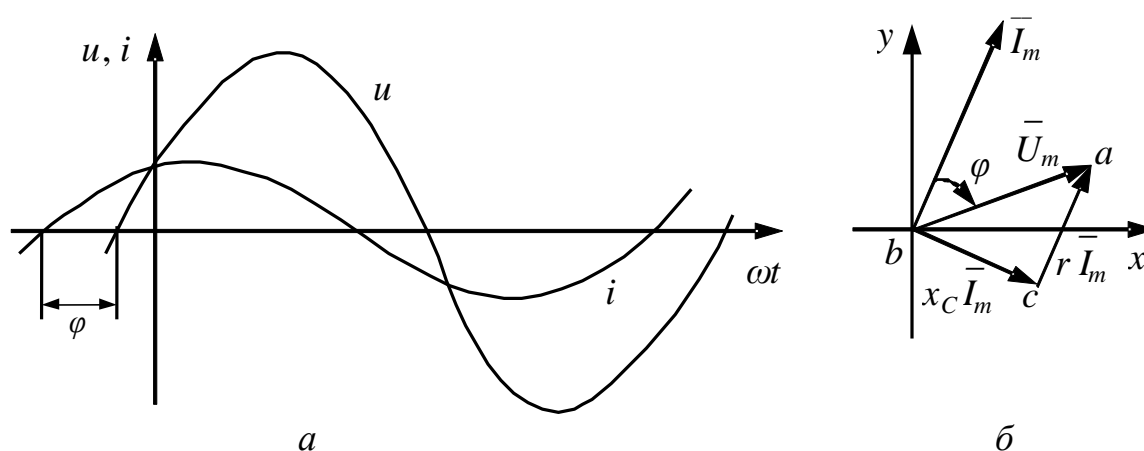


Рис. 3.9. Напряжение и ток в цепи с  $r$  и  $C$

Интегральной величиной в случае индуктивности является ток, а в емкости – напряжение. Именно эти величины являются запаздывающими по фазе при любых изменениях напряжения и тока во времени.

При исследовании любых цепей синусоидального тока используются установленные понятия сопротивления:  $r$  – **активное**,  $x_L$  и  $x_C$  – **реактивные**,  $Z$  – **полное**.

### 3.3. Основы комплексного (символического) метода расчета электрических цепей синусоидального тока

Используемые в подразд. 3.2 соотношения для вычисления мгновенных значений напряжения и тока неудобны для расчета сложных цепей, так как приводят к громоздким выражениям, требующим значительного объема преоб-

разований и вычислений. Существенное упрощение расчетов достигается переходом к комплексным числам и соотношениям в комплексной форме.

Любое комплексное число, как известно, можно представить в различных формах:

$$a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j \arctg \frac{b}{a}} = A e^{j\gamma} = A \cos \gamma + j A \sin \gamma, \quad (3.37)$$

где  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;  $\gamma = \arctg \frac{b}{a}$ ;  $j = \sqrt{-1}$ .

В основу дальнейших рассуждений положим равенство

$$A \cos \gamma + j A \sin \gamma = A e^{j\gamma}, \quad (3.38)$$

которое может быть применено для определения комплексных функций времени.

На рис. 3.10 изображен вектор, вращающийся с угловой скоростью  $\omega$  на комплексной плоскости.

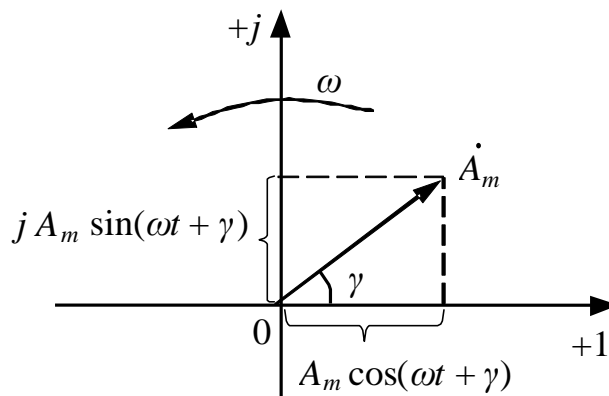


Рис. 3.10. Вращающийся вектор на комплексной плоскости

Проекции вращающегося вектора на оси действительных и мнимых значений представляют собой гармонические функции, поэтому можно записать:

$$A_m \cos(\omega t + \gamma) + j A_m \sin(\omega t + \gamma) = A_m e^{j(\omega t + \gamma)} \quad (3.39)$$

или

$$A_m \cos(\omega t + \gamma) + j A_m \sin(\omega t + \gamma) = \dot{A}_m e^{j\omega t}, \quad (3.40)$$

где

$$\dot{A}_m = A_m e^{j\gamma}. \quad (3.41)$$

Величину  $\dot{A}_m$  называют комплексной амплитудой.

Дифференцирование и интегрирование выражения (3.40) приводит к соотношениям:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \dot{A}_m e^{j\omega t} = j\omega \dot{A}_m e^{j\omega t}; \\ \int (\dot{A}_m e^{j\omega t}) dt = \frac{1}{j\omega} \dot{A}_m e^{j\omega t}. \end{cases} \quad (3.42)$$

Соотношение (3.40) характеризуется следующим свойством: по любой из трех составляющих этого выражения можно восстановить две другие. Угловая частота, как правило, бывает задана. Такими же свойствами характеризуются и выражения системы (3.42).

Можно утверждать, что при известной частоте  $\omega$  полную информацию обо всех составляющих выражения (3.40) имеет комплексная амплитуда (3.41).

Очевидны еще следующие свойства (3.40):

суммированию комплексных функций слева соответствует суммирование комплексных функций справа;

умножению левой части на постоянный множитель соответствует умножение правой части на тот же множитель.

Установленные свойства позволяют вести речь об однозначном соответствии между мнимой частью уравнения (3.40) слева и комплексной амплитудой справа:

$$A_m \sin(\omega t + \gamma) \leftrightarrow \dot{A}_m = A_m e^{j\gamma}. \quad (3.43)$$

Это означает, что при математическом исследовании электрической цепи синусоидального тока операции с синусоидальными функциями можно заменить операциями с комплексными числами (комплексными амплитудами).

Соотношения (3.42) определяют аналогичные (3.43) соответствия для производной и интеграла:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [A_m \sin(\omega t + \gamma)] \leftrightarrow j\omega \dot{A}_m = j\omega A_m e^{j\gamma}; \\ \int [A_m \sin(\omega t + \gamma)] dt \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \dot{A}_m = \frac{1}{j\omega} A_m e^{j\gamma}. \end{cases} \quad (3.44)$$

В целом формируется так называемое линейное преобразование, в котором основную роль играют операции с комплексными числами.

При расчете электрических цепей используются комплексные амплитуды напряжения, тока, ЭДС и других представляющих интерес величин. При этом имеют место следующие соответствия:

$$\begin{cases} U_m \sin(\omega t + \beta) \leftrightarrow \dot{U}_m = U_m e^{j\beta}; \\ I_m \sin(\omega t + \alpha) \leftrightarrow \dot{I}_m = I_m e^{j\alpha}; \\ E_m \sin(\omega t + \gamma) \leftrightarrow \dot{E}_m = E_m e^{j\gamma}. \end{cases} \quad (3.45)$$

Для иллюстрации особенностей использования комплексных соотношений обратимся к схемам на рис. 3.7.

Для активно-индуктивной цепи (см. рис. 3.7, а) справедливо уравнение (3.24):

$$ri + L \frac{di}{dt} = u. \quad (3.46)$$

В соответствии с выражениями (3.44) и (3.45) представим уравнение (3.46) в комплексной форме, используя понятие комплексных амплитуд:

$$r\dot{I}_m + j\omega L\dot{I}_m = \dot{U}_m. \quad (3.47)$$

Преобразуем уравнение (3.47) и получим равенство:

$$(r + j\omega L)\dot{I}_m = \dot{U}_m \quad (3.48)$$

или

$$Z\dot{I}_m = \dot{U}_m, \quad (3.49)$$

где  $Z = (r + j\omega L) = (r + jx_L)$  – сопротивление цепи в комплексной форме, или **комплексное сопротивление**. Это сопротивление записывается также и в показательной или экспоненциальной форме:

$$Z = (r + jx_L) = \sqrt{r^2 + x_L^2} e^{j \arctg \frac{x_L}{r}} = z e^{j\varphi}, \quad (3.50)$$

где  $z = \sqrt{r^2 + x_L^2}$  – установленное ранее полное сопротивление. Следовательно, полное сопротивление  $z$  является модулем комплексного сопротивления  $Z$ ;  $\varphi$  – угол сдвига фаз между напряжением и током.

Появилась также величина

$$j\omega L = jx_L, \quad (3.51)$$

которая называется **индуктивным сопротивлением в комплексной форме**.

Итогом решения задачи является комплексная амплитуда тока

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z} = \frac{U_m e^{j\beta}}{ze^{j\varphi}} = \frac{U_m}{z} e^{j(\beta-\varphi)} = I_m e^{j\alpha}. \quad (3.52)$$

По комплексной амплитуде тока записывается мгновенное значение тока:

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha). \quad (3.53)$$

В случае цепи  $r, C$  (см. рис. 3.7, б) имеют силу соотношения:

$$\begin{cases} ri + u_C = u; \\ u_C = \frac{1}{C} \int i dt; \\ ri + \frac{1}{C} \int i dt = u, \end{cases} \quad (3.54)$$

на основе которых формируется уравнение для комплексных амплитуд:

$$r\dot{I}_m + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m = \dot{U}_m, \quad (3.55)$$

преобразуемое в выражение

$$Z\dot{I}_m = \dot{U}_m, \quad (3.56)$$

где  $Z = r + \frac{1}{j\omega C} = r - j\frac{1}{\omega C} = r - jx_C = \sqrt{r^2 + x_C^2} e^{j \arctg \frac{-x_C}{r}} = ze^{j\varphi}.$

Здесь снова  $z = \sqrt{r^2 + x_C^2}$  – полное сопротивление активно-емкостной цепи;  $\varphi = \arctg \frac{-x_C}{r}$  – угол сдвига фаз.



Комплексная амплитуда тока

$$I_m = \frac{\dot{U}_m}{Z} = \frac{U_m e^{j\beta}}{Z e^{j\varphi}}. \quad (3.57)$$

Параметр  $-jx_C = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$  в данном случае представляет **емкостное сопротивление в комплексной форме**.

В операциях с комплексными числами полезно понимание следующих соотношений:

$$\begin{cases} e^{j90^\circ} = \cos 90^\circ + j \sin 90^\circ = j; \\ e^{-j90^\circ} = \cos 90^\circ - j \sin 90^\circ = -j; \\ \frac{1}{j} = \frac{1}{e^{j90^\circ}} = e^{-j90^\circ} = -j. \end{cases} \quad (3.58)$$

Например, емкостное сопротивление было записано в двух формах:

$$-jx_C = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}, \quad (3.59)$$

т. е. использовалось вытекающее из системы уравнений (3.58) правило:  $\frac{1}{j} = -j$ .

Равенство  $j = e^{j90^\circ}$  показывает, что умножение комплекса на  $j$  определяет поворот соответствующего этому комплексному числу вектора на  $90^\circ$  в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки. Умножению на  $-j = e^{-j90^\circ}$ , наоборот, соответствует поворот вектора на  $90^\circ$  по часовой стрелке.

### 3.4. Действующие значения синусоидальных напряжения и тока

Математически действующее значение функции представляет собой ее среднеквадратичное значение:

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}. \quad (3.60)$$

Аналогично выражаются и действующие значения электрических величин:

$$\begin{cases} U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}; \\ I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}, \end{cases} \quad (3.61)$$

где  $u, i$  – мгновенные значения напряжения, тока;  
 $T$  – период функции.

Пусть, например, напряжение представляется в виде  $u = U_m \sin \omega t$ . Подстановка этой функции в уравнения (3.61) приводит к уравнению:

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (U_m^2 \sin^2 \omega t) dt} = \sqrt{\frac{U_m^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt} = \\ &= \sqrt{\frac{U_m^2}{2T} \left[ \int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t dt \right]} = \sqrt{\frac{U_m^2}{2T} T} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Второй интеграл под корнем в формуле (3.62) равен нулю как определенный интеграл от косинусоидальной функции на целом числе периодов.

В итоге действующее значение меньше амплитудного в  $\sqrt{2}$  раз.

Полученный результат справедлив для действующего значения любой физической величины, изменяющейся по синусоидальному закону:

$$\begin{cases} U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \\ I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \\ E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \end{cases} \quad (3.63)$$

Действующие значения электрических величин широко используются в электротехнике, поскольку тепловое действие тока, силы взаимодействия контуров с токами, электромагнитные моменты электрических машин и ряда силовых электромагнитных устройств переменного тока обусловлены именно действующими значениями тока.

На щитках электрических машин и аппаратов переменного тока в качестве номинальных, как правило, указываются действующие значения напряжения и тока. Измерительные приборы электромагнитной и электродинамической систем измеряют действующие значения соответствующих величин.

При расчете электрических цепей синусоидального тока широко используются понятия **комплексных действующих значений**, или **комплексов напряжений и токов**. Последние, как и действующие значения уравнений (3.63), отличаются от комплексных амплитуд в  $\sqrt{2}$  раз:

$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}}; \\ \dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}}; \\ \dot{E} = \frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}}. \end{cases} \quad (3.64)$$

### 3.5. Комплексные соотношения для трехэлементных электрических цепей

В качестве первого представителя таких цепей рассмотрим схему с последовательным соединением элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$  (рис. 3.11,  $a$ ). Эта схема одно-контурная, поэтому записываем уравнение для мгновенных значений по второму закону Кирхгофа:

$$u_r + u_L + u_C = u \quad (3.65)$$

или

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = u. \quad (3.66)$$

Пусть

$$\begin{cases} u = U_m \sin(\omega t + \beta); \\ i = I_m \sin(\omega t + \alpha). \end{cases} \quad (3.67)$$

Условимся использовать запись по комплексным действующим значениям, которые в данном случае имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{U} = Ue^{j\beta}; \\ \dot{I} = Ie^{j\alpha}. \end{cases} \quad (3.68)$$

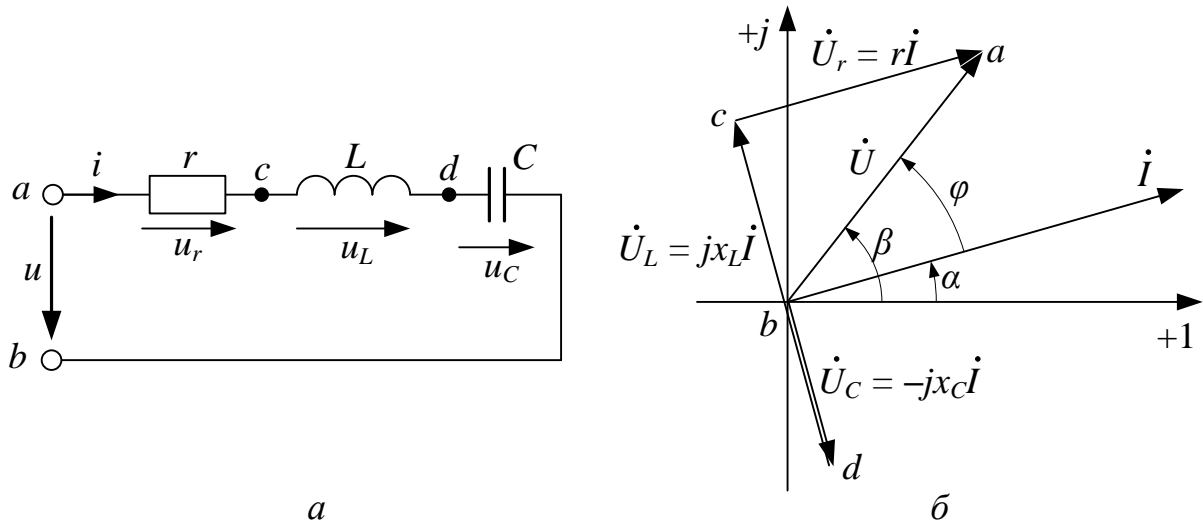


Рис. 3.11. Электрическая цепь с последовательным соединением элементов  $r, L, C$

Уравнению (3.66) в комплексной форме соответствует уравнение

$$r\dot{I} + j\omega L\dot{I} - j\frac{1}{\omega C}\dot{I} = \dot{U}, \quad (3.69)$$

которое преобразуется в следующей последовательности:

$$\begin{cases} \left( r + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \right) \dot{I} = \dot{U}; \\ (r + jx_L - jx_C) \dot{I} = \dot{U}; \\ (r + jx) \dot{I} = \dot{U}; \\ Z\dot{I} = \dot{U}, \end{cases} \quad (3.70)$$

где  $x = (x_L - x_C)$  – реактивное сопротивление;

$Z = r + jx = \sqrt{r^2 + x^2} e^{j \arctg \frac{x}{r}} = ze^{j\varphi}$  – комплексное сопротивление цепи;

$z = \sqrt{r^2 + x^2}$  – полное сопротивление, или модуль комплексного сопротивления;

$\varphi = \arctg \frac{x}{r}$  – аргумент комплексного сопротивления, представляющий собой угол сдвига фаз между входным напряжением и током.

Установленные здесь закономерности имеют общий характер и сводятся к следующему:

**индуктивное** и **емкостное** сопротивления в состав общего реактивного сопротивления входят с **разными знаками** (индуктивное – с «плюсом», емкостное – с «минусом»);

**модуль** комплексного сопротивления есть **полное** сопротивление;

**аргументом** комплексного сопротивления является **угол сдвига фаз** между соответствующими напряжением и током.

Результатом решения задачи является комплексное действующее значение тока (комплекс тока)

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z}, \quad (3.71)$$

по которому записывается мгновенное значение тока.

Векторная диаграмма, представленная на рис. 3.11, б, построена в масштабах действующих значений тока и напряжения (модулей комплексов). Общей величиной для всех элементов является ток  $\dot{i}$ , поэтому вектор тока  $\dot{i}$  на данной диаграмме является исходным, или базовым.

Векторы падений напряжения ориентированы относительно вектора тока с учетом фазовых соотношений для элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$ : в сопротивлении  $r$  напряжение и ток совпадают по фазе; в индуктивности напряжение опережает ток на  $90^\circ$ ; в емкости напряжение отстает от тока на  $90^\circ$ .

Построение топографической диаграммы обычно проводят, совершая обход схемы против направления тока, т. е. от точки  $b$  к точке  $a$  (см. рис. 3.11, б). Векторы падений напряжения на векторной диаграмме соответствуют расположению элементов на схеме. Потенциал точки  $b$  принимается равным нулю. При таком обходе потенциал исследуемой точки выше потенциала предыдущей и стрелка вектора, соединяющего точки на диаграмме, указывает направление возрастания потенциала. На рис. 3.11, б из точки  $b$  последовательно отложены векторы  $\dot{U}_C$ ,  $\dot{U}_L$  и  $\dot{U}_r$ . Геометрическая сумма этих векторов равна приложенному напряжению  $\dot{U}$ .

Векторные диаграммы такого типа называются **топографическими векторными диаграммами**. Главная их особенность – соответствие расположения векторов падений напряжения расположению элементов на схеме.

Векторная диаграмма (см. рис. 3.11, б) соответствует случаю, когда индуктивное сопротивление  $x_L = \omega L$  превышает емкостное  $x_C = \frac{1}{\omega C}$ , поэтому падение напряжения на индуктивности  $U_L = x_L I$  больше падения напряжения  $U_C = x_C I$ , угол  $\varphi$  положителен, напряжение по фазе опережает ток и относительно входных зажимов схема воспринимается как активно-индуктивная. При выполнении условия  $x_L < x_C$  вектор  $\dot{U}_L$  будет меньше вектора  $\dot{U}_C$  и схема относительно входных зажимов будет восприниматься как активно-емкостная, поскольку вектор напряжения  $\dot{U}$  окажется отстающим по отношению к току  $\dot{I}$ . Возможен и частный случай, когда  $x_L = x_C$  и  $U_L = U_C$ . Угол сдвига фаз в этом случае равен нулю и схема попадает в режим резонанса напряжений.

Схема с параллельным соединением элементов (рис. 3.12, а) требует привлечения понятий комплексных проводимостей.

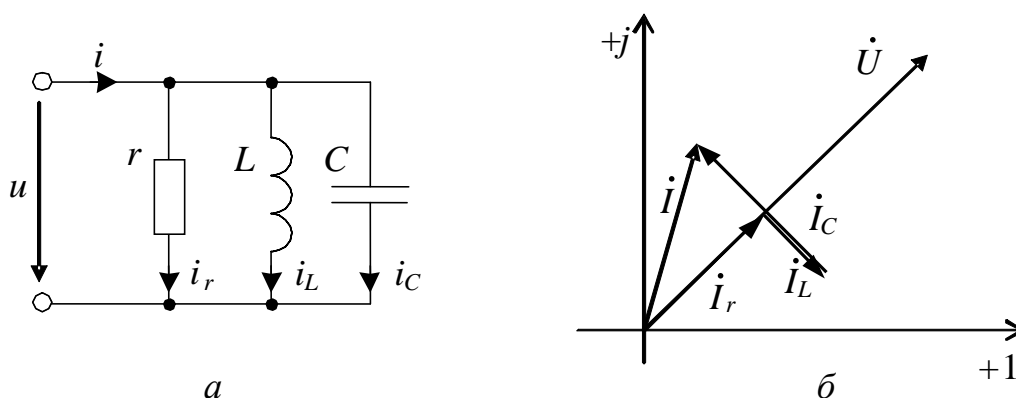


Рис. 3.12. Электрическая цепь с параллельным соединением элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$

Уравнение для мгновенных значений записывается по первому закону Кирхгофа:

$$i_r + i_L + i_C = i \quad (3.72)$$

или

$$gu + \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt} = i, \quad (3.73)$$

где  $g = 1/r$ .

Уравнение в комплексной форме имеет вид:

$$g\dot{U} + \frac{1}{j\omega L}\dot{U} + j\omega C\dot{U} = \dot{I}. \quad (3.74)$$

Векторная диаграмма токов показана на рис. 3.12, б.

Этапы преобразования уравнения (3.74):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( g + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right) \dot{U} = \dot{I}; \\ \left( g - j\frac{1}{\omega L} + j\omega C \right) \dot{U} = \dot{I}; \\ [g - j(b_L - b_C)] \dot{U} = \dot{I}; \\ (g - jb) \dot{U} = \dot{I}; \\ Y\dot{U} = \dot{I}. \end{array} \right. \quad (3.75)$$

Здесь появились новые величины:

$b_L = \frac{1}{\omega L}$  – индуктивная проводимость;

$b_C = \omega C$  – емкостная проводимость;

$-jb_L = -j\frac{1}{\omega L} = \frac{1}{j\omega L}$  – индуктивная проводимость в комплексной форме;

$jb_C = j\omega C$  – емкостная проводимость в комплексной форме;

$b = b_L - b_C$  – реактивная проводимость;

$Y = g - jb = \sqrt{g^2 + b^2} e^{j \arctg \frac{-b}{g}} = ye^{-j\varphi}$  – комплексная проводимость;

$y = \sqrt{g^2 + b^2}$  – полная проводимость (модуль комплексной проводимости).

Любая комплексная проводимость выступает как величина, обратная комплексному сопротивлению. Для отдельных элементов

$$\left\{ \begin{array}{l} jb_C = \frac{1}{-jx_C}; \\ -jb_L = \frac{1}{jx_L}. \end{array} \right. \quad (3.76)$$

В общем случае

$$\begin{cases} Y = \frac{1}{Z}; \\ Z = \frac{1}{Y}. \end{cases} \quad (3.77)$$

Формулы (3.77) бывают полезны в тех случаях, когда требуется преобразовать последовательные схемы в параллельные и наоборот. Предположим, что схему на рис. 3.13, *а* требуется преобразовать в схему, представленную на рис. 3.13, *б*.

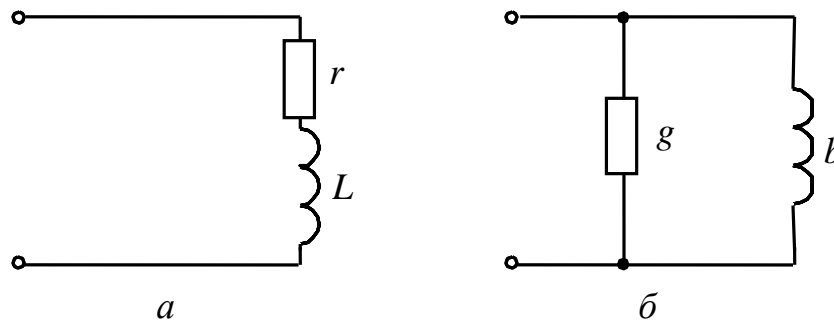


Рис. 3.13. Преобразование схем с последовательным (*а*) и параллельным (*б*) соединением элементов

Комплексное сопротивление первой схемы записывается в такой форме:

$$Z = r + j\omega L. \quad (3.78)$$

Комплексная проводимость записывается как величина, обратная  $Z$ :

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r + j\omega L}. \quad (3.79)$$

Умножая числитель и знаменатель дроби в формуле (3.79) на комплекс, сопряженный знаменателю, получаем:

$$Y = \frac{r - j\omega L}{r^2 + \omega^2 L^2} = \frac{r}{r^2 + \omega^2 L^2} - j \frac{\omega L}{r^2 + \omega^2 L^2}. \quad (3.80)$$

В итоге значения проводимостей схемы на рис. 3.13, *б* таковы:



$$\begin{cases} g = \frac{r}{r^2 + \omega^2 L^2}; \\ b = \frac{\omega L}{r^2 + \omega^2 L^2}. \end{cases} \quad (3.81)$$

Реализацию обратного перехода можно осуществить путем преобразования общей комплексной проводимости схемы на рис. 3.13, б в комплексное сопротивление согласно формулам:

$$\begin{cases} Y = g - jb; \\ Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{g - jb} = \frac{g + jb}{g^2 + b^2} = \frac{g}{g^2 + b^2} + j \frac{b}{g^2 + b^2}, \end{cases} \quad (3.82)$$

откуда

$$\begin{cases} r = \frac{g}{g^2 + b^2}; \\ x = \frac{b}{g^2 + b^2}; \\ L = \frac{x}{\omega}. \end{cases} \quad (3.83)$$

### **3.6. Особенности применения комплексного метода для исследования разветвленных электрических цепей**

Положительным свойством комплексного метода является то, что операции с комплексными напряжениями, токами, сопротивлениями и проводимостями осуществляются по тем же основным правилам, что и в случае цепей постоянного тока.

Законы Кирхгофа для цепей постоянного тока формируются алгебраическим суммированием составляющих – токов при формировании уравнений по первому закону Кирхгофа, а также ЭДС и падений напряжения при составлении уравнений по второму закону Кирхгофа.

В случае цепей переменного тока алгебраическое суммирование в действительной области применимо только для мгновенных значений, как это сделано при составлении уравнений (3.23), (3.65), (3.72). Действующие и амплитудные

значения напряжения или тока суммируются только геометрически, на что указывают все приведенные ранее векторные диаграммы.

В комплексной форме алгебраические операции можно производить со всеми встречающимися при расчете электрических цепей величинами: комплексными амплитудами, комплексными действующими значениями, комплексными сопротивлениями и проводимостями. Нужно лишь правильно применять правила действий с комплексными числами.

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 3.14, *а*.

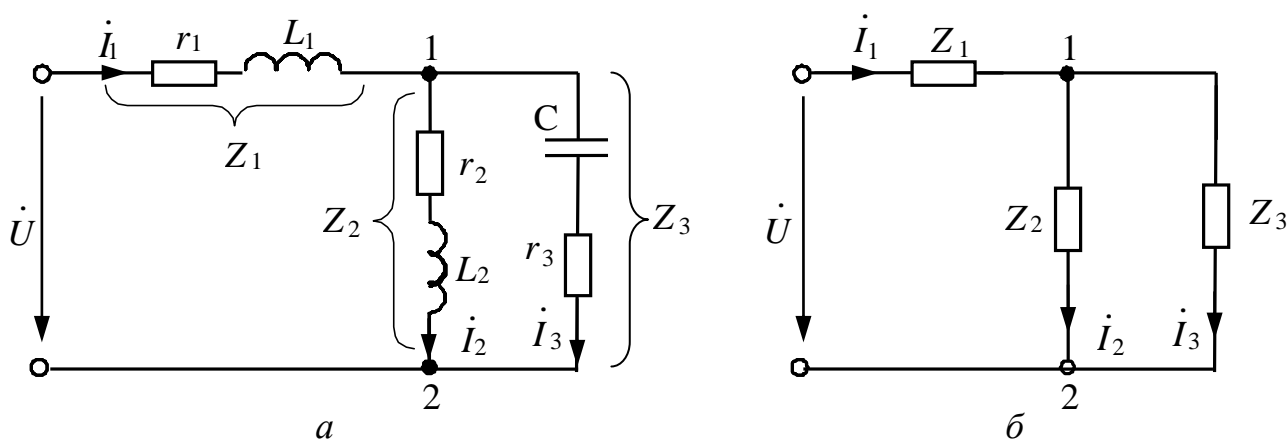


Рис. 3.14. Заданная (*а*) и упрощенная (*б*) расчетные схемы

Пусть заданы параметры элементов схемы, а также входное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \beta)$ .

Ставится задача определить токи ветвей. Расчет проводится по комплексным действующим значениям.

Сначала необходимо определить входное комплексное сопротивление  $Z_9$ . Это можно сделать по исходной схеме на рис. 3.14, *а*, но если это сложно, то можно перейти к упрощенной схеме, изображенной на рис. 3.14, *б*, введя следующие обозначения:

$$\begin{cases} Z_1 = r_1 + j\omega L_1 = r_1 + jx_{L1}; \\ Z_2 = r_2 + j\omega L_2 = r_2 + jx_{L2}; \\ Z_3 = r_3 - j\frac{1}{\omega C} = r_3 - jx_C. \end{cases} \quad (3.84)$$

Получили в итоге последовательно-параллельное соединение трех комплексных сопротивлений, для которого

$$Z_3 = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = Z_1 + Z_{23} = r_1 + jx_{L1} + \frac{(r_2 + jx_{L2})(r_3 - jx_C)}{(r_2 + r_3) + j(x_{L2} - x_C)} = \dots =$$

$$= r_3 + jx_3 = z_3 e^{j\varphi_3}, \quad (3.85)$$

где  $z_3 = \sqrt{r_3^2 + x_3^2}$  – полное (входное) сопротивление схемы;

$\varphi_3 = \arctg \frac{x_3}{r_3}$  – угол сдвига фаз между входными напряжением  $u$  и током  $i_1$ .

Реактивное сопротивление  $x_3$  может быть как положительным (индуктивным), так и отрицательным (емкостным). Это зависит от соотношения параметров рассматриваемой схемы.

Комплексное действующее значение входного тока

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_3} = \frac{U e^{j\beta}}{z_3 e^{j\varphi_3}} = I_1 e^{j(\beta - \varphi_3)} = I_1 e^{j\alpha_1}. \quad (3.86)$$

По комплексу тока  $\dot{I}_1$  в случае необходимости записывается мгновенное значение тока:

$$i_1 = I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha_1). \quad (3.87)$$

Множитель  $\sqrt{2}$  обозначает переход от действующего значения тока  $I_1$  к амплитудному значению  $I_{1m}$ , поскольку в окончательном виде должно быть записано выражение:

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1). \quad (3.88)$$

К значениям токов ветвей можно прийти различными путями, но наиболее общий путь характеризуется следующими этапами.

Выражаем напряжение  $\dot{U}_{12}$ :

$$\dot{U}_{12} = \dot{I}_1 Z_{23} = \dots = U_{12} e^{j\beta_{12}}. \quad (3.89)$$

Это напряжение приложено к обеим параллельным ветвям, поэтому

$$\begin{cases} \dot{i}_2 = \frac{\dot{U}_{12}}{Z_2} = \dots = I_2 e^{j\alpha_2}; \\ \dot{i}_3 = \frac{\dot{U}_{12}}{Z_3} = \dots = I_3 e^{j\alpha_3}. \end{cases} \quad (3.90)$$

По полученным значениям комплексов токов записываются мгновенные значения токов:

$$\begin{cases} i_2 = I_2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha_2); \\ i_3 = I_3 \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha_3). \end{cases} \quad (3.91)$$

В процессе вычислений приходится применять преобразование комплексных чисел, так как для операции сложения и вычитания необходима алгебраическая форма комплексных чисел, а умножение и деление более удобно осуществлять, используя показательную (экспоненциальную) форму.

### 3.7. Виды мощности в электротехнике

В области электрических цепей синусоидального тока используется несколько видов мощности: мгновенная, активная, реактивная, полная и мощность в комплексной форме, или комплексная мощность.

#### 3.7.1. Мгновенная мощность

Мгновенная мощность представляет собой произведение мгновенных значений напряжения и тока:

$$p = ui. \quad (3.92)$$

Пусть  $u = U_m \sin \omega t$ ,  $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$ , т. е. ток отстает от напряжения на угол сдвига фаз  $\varphi$ . Подстановка этих значений в соотношение (3.92) дает следующее:

$$p = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) = U_m I_m \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi). \quad (3.93)$$

Произведение синусов преобразуется в соответствии с выражением

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]. \quad (3.94)$$

Полагая  $x = \omega t$ , а  $y = \omega t - \varphi$ , приходим к результату:

$$p = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] = UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]. \quad (3.95)$$

Как видно из формулы (3.95), мгновенная мощность является периодической функцией, изменяющейся с двойной частотой по отношению к частоте напряжения и тока.

Рассмотрим сначала функцию мгновенной мощности для сопротивления  $r$  (рис. 3.15, а).

Периодическая функция мгновенной мощности в этом случае не имеет отрицательных значений, ее среднее значение согласно выражению (3.95) равно произведению действующих значений напряжения и тока  $UI$ , поскольку  $\varphi = 0$ .

Мгновенная мощность пульсирует с двойной частотой, но нигде не меняет знака, что указывает на однонаправленность потока электрической энергии от источника к сопротивлению. Возврат энергии источнику отсутствует, поэтому в качестве главного свойства отмечается **необратимость процесса преобразования энергии в сопротивлении  $r$** .

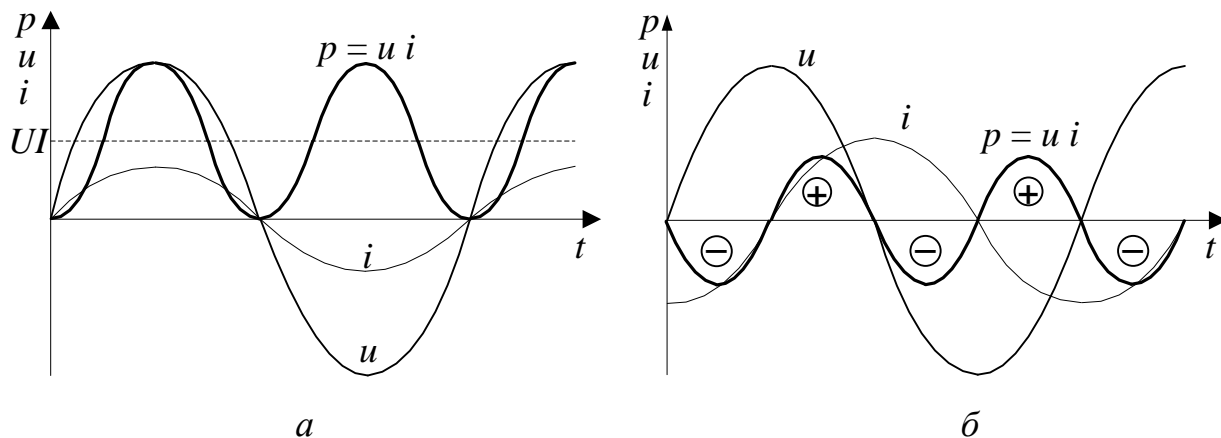


Рис. 3.15. Мгновенная мощность:  
а – сопротивление  $r$ ; б – индуктивность  $L$

В индуктивности  $L$  угол сдвига фаз  $\varphi = \pi/2$ , поэтому в уравнении (3.95)  $\cos \varphi = 0$  и кривая мгновенной мощности симметрична относительно оси времени (рис. 3.15, б). Это значит, что в части периода энергия поступает от источника в индуктивность, в другой – возвращается источнику. На участках графика, отмеченных знаком «плюс», энергия магнитного поля индуктивности

увеличивается до какого-то максимального значения, а в пределах площадок со знаком «минус» она уменьшается до нуля.

В идеальной цепи процесс энергетического обмена между источником, например, ЭДС, и индуктивностью не сопровождается потерями. Так же ведет себя и идеальная цепь с емкостью, только здесь энергетические процессы связаны с энергией электрического поля.

В реальных условиях любые электромагнитные процессы сопровождаются потерями или затратами электроэнергии. На рис. 3.16 в качестве иллюстрации приведен график мгновенной мощности для цепи, содержащей сопротивление и индуктивность.

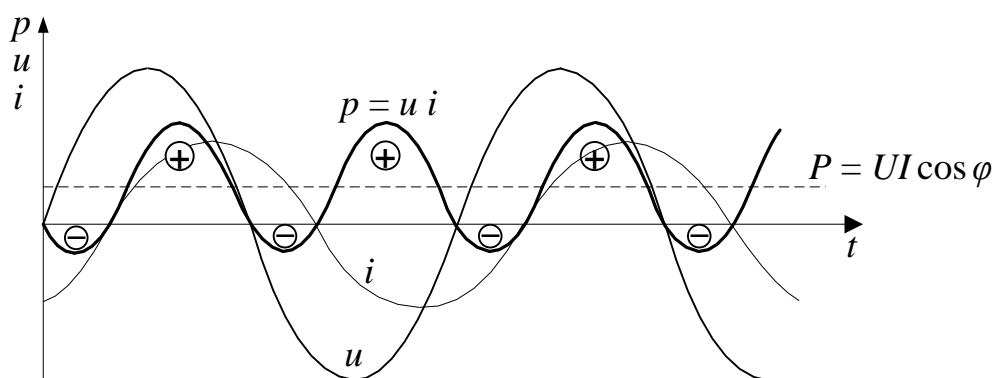


Рис. 3.16. Временная диаграмма мгновенной мощности для цепи с  $r$  и  $L$

Особенность диаграммы на рис. 3.16 в том, что кривая мгновенной мощности несимметрична относительно оси времени. Отрицательные площадки меньше положительных, т. е. возвращается источнику энергии меньше, чем он отдает в электрическую цепь. Отмеченная разница определяется необратимым потреблением энергии в цепи, которое выражает среднее значение мгновенной мощности, обозначенное как  $P = UI \cos \varphi$ .

### 3.7.2. Активная мощность

Активная мощность определена как среднее значение мгновенной мощности:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt. \quad (3.96)$$

Мгновенная мощность выражается формулой (3.95), после подстановки которой в уравнение (3.96) получаем:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] dt =$$

$$= \frac{UI}{T} \cos \varphi \int_0^T dt - \frac{UI}{T} \int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) dt = UI \cos \varphi. \quad (3.97)$$

Второй интеграл в выражении (3.97) равен нулю как определенный интеграл от функции  $\cos(2\omega t - \varphi)$  на целом числе периодов.

В итоге активная мощность в цепях синусоидального тока выражается формулой

$$P = UI \cos \varphi, \quad (3.98)$$

находящей широкое практическое применение.

Произведение

$$UI = S \quad (3.99)$$

есть **полная мощность**, поэтому активная мощность записывается также в виде:

$$P = S \cos \varphi. \quad (3.100)$$

Единица измерения активной мощности – ватт (Вт), полная мощность измеряется в вольт-амперах (В·А).

Активная мощность включает в свой состав две составляющие: полезно потребляемую мощность, как, например, мощность на валу электродвигателя, и мощность потерь в активных сопротивлениях элементов электрооборудования и в линиях. Поэтому **активная мощность характеризует необратимый однонаправленный поток электроэнергии от источника к нагрузкам или потребителям.**

В цепи с активным сопротивлением  $r$  (см. рис. 3.15, а) поток электроэнергии направлен только к потребителю, поэтому активная мощность равна полной мощности:

$$P = S = UI, \quad (3.101)$$

т. е. вся электроэнергия, отдаваемая потребителю, используется для совершения полезной работы с учетом потерь в сопротивлениях элементов.

В идеализированной реактивной цепи (см. рис. 3.15, б) активная мощность равна нулю, так как необратимые процессы потребления и потерь энергии отсутствуют. Энергия магнитного или электрического поля периодически меняет свое значение от нулевого до максимального, подчиняясь соотношениям (1.14) и (1.18):

$$\begin{cases} W_m = \frac{1}{2} Li^2; \\ W_э = \frac{1}{2} Cu_C^2. \end{cases} \quad (3.102)$$

В реальных условиях электрических цепей или систем с потерями активная мощность выступает как разность между мощностью, отдаваемой источником, и мощностью, которую источник получает обратно.

### 3.7.3. Реактивная мощность

Понятие реактивной мощности не имеет такого же четкого определения, как активная мощность. Можно лишь констатировать, что появление этого понятия применительно к электрическим цепям физически связано с поведением электрических и магнитных полей элементов электрических цепей и электромагнитных устройств.

Реактивная мощность определяется формулой

$$Q = UI \sin \varphi. \quad (3.103)$$

Единица измерения реактивной мощности  $Q$  – вольт-ампер реактивный (вар).

Ответить на вопрос об истоках формулы (3.103) позволяют следующие рассуждения.

Полное сопротивление в цепи синусоидального тока выражается, как уже известно, формулой

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}. \quad (3.104)$$

Уравнению (3.104) соответствует прямоугольный треугольник со сторонами  $z$ ,  $r$ ,  $x$  (рис. 3.17, а), который называется **треугольником сопротивлений**.



Умножим левую и правую части уравнения (3.104) на  $I^2$  и получим:

$$I^2 z = \sqrt{(I^2 r)^2 + (I^2 x)^2} . \quad (3.105)$$

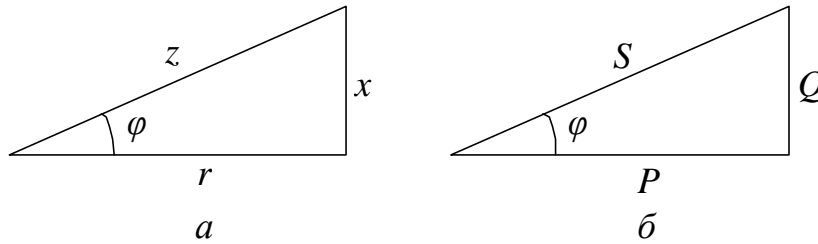


Рис. 3.17. Треугольники сопротивлений (а) и мощностей (б)

С учетом треугольника сопротивлений получим полную мощность:  $I^2 z = (Iz)I = UI = S$ , активную мощность:  $I^2 r = I^2 z \cos \varphi = UI \cos \varphi = P$  и реактивную:  $I^2 x = I^2 z \sin \varphi = UI \sin \varphi = Q$ .

Поэтому справедлива запись

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (3.106)$$

и появляется **треугольник мощностей** (рис. 3.17, б).

В результате можно сделать вывод о том, что понятие реактивной мощности (3.103) в теорию электрических цепей введено по формальному признаку, т. е. реактивная мощность, как понятие, является составляющей треугольника мощностей.

#### 3.7.4. Мощность в комплексной форме, или комплексная мощность

Комплексная мощность представляет собой произведение комплекса напряжения  $\dot{U}$  на сопряженный комплекс тока  $\dot{I}^*$ :

$$\dot{S} = \dot{U} \dot{I}^* . \quad (3.107)$$

Пусть  $\dot{U} = Ue^{j\beta}$ ;  $\dot{I} = Ie^{j\alpha}$ ;  $\dot{I}^* = Ie^{-j\alpha}$ . Осуществим подстановку приведенных значений в соотношение (3.107):

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \dot{U}^* I = U e^{j\beta} I e^{-j\alpha} = U I e^{j(\beta-\alpha)} = U I \cos \varphi + j U I \sin \varphi = \\ &= P + jQ = \sqrt{P^2 + Q^2} e^{j \arctg \frac{Q}{P}} = S e^{j\varphi}.\end{aligned}\quad (3.108)$$

Интересное свойство комплексной мощности, как видно из уравнения (3.108), выразилось в возможности объединить в одном выражении все установленные ранее понятия мощности:  $S = UI$  – полную мощность,  $P = UI \cos \varphi$  – активную мощность и  $Q = UI \sin \varphi$  – реактивную. Поэтому комплексная мощность широко используется в расчетах.

Важное значение в энергетике имеет параметр, который называется **коэффициентом мощности**. Это отношение активной мощности к полной:

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{P}{S}. \quad (3.109)$$

Косвенно этот параметр характеризует соотношение между активной мощностью и реактивной. Предельное его значение  $\cos \varphi = 1$  достигается при отсутствии реактивных элементов. В идеальной реактивной цепи  $\cos \varphi = 0$ . В реальных условиях желательны режимы с максимальными экономически обоснованными значениями  $\cos \varphi$ . Низкие значения коэффициента мощности показывают, что высока доля реактивной мощности. Такие режимы нежелательны, так как требуют повышенных значений тока в линиях для двухстороннего обмена реактивной энергией между источником и приемниками электроэнергии. Повышенный ток обуславливает повышенные потери в линиях.

Широко используется параметр, который непосредственно характеризует соотношение между активной мощностью и реактивной:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}. \quad (3.110)$$

### 3.7.5. Баланс мощностей

Исходным моментом в составлении и проверке баланса мощностей является равенство комплексных мощностей, отдаваемых источником и потребляемых электрической цепью.

При одном источнике

$$\dot{S}_{\text{ист}} = \dot{S}_{\text{потр}} \quad (3.111)$$

или

$$P_{\text{ист}} + jQ_{\text{ист}} = P_{\text{потр}} + jQ_{\text{потр}}, \quad (3.112)$$

откуда следуют равенства:

$$\begin{cases} P_{\text{ист}} = P_{\text{потр}}; \\ Q_{\text{ист}} = Q_{\text{потр}}. \end{cases} \quad (3.113)$$

Мощности  $P_{\text{ист}}$  и  $Q_{\text{ист}}$  определяются, как правило, через входное напряжение и входной ток анализируемой схемы:

$$\begin{cases} P_{\text{ист}} = U_{\text{вх}} I_{\text{вх}} \cos \varphi_{\text{вх}}; \\ Q_{\text{ист}} = U_{\text{вх}} I_{\text{вх}} \sin \varphi_{\text{вх}} \end{cases} \quad (3.114)$$

или с использованием выражения для определения комплексной мощности:

$$\dot{S}_{\text{ист}} = \dot{U}_{\text{вх}} I_{\text{вх}}^* = U_{\text{вх}} I_{\text{вх}} \cos \varphi_{\text{вх}} + j U_{\text{вх}} I_{\text{вх}} \sin \varphi_{\text{вх}}, \quad (3.115)$$

где  $I_{\text{вх}}^* = I_{\text{вх}} e^{-j\alpha}$  – сопряженный комплекс входного тока.

Составляющие  $P_{\text{потр}}$  и  $Q_{\text{потр}}$  удобно записывать поэлементно:

$$\begin{cases} P_{\text{потр}} = \sum_k I_k^2 r_k; \\ Q_{\text{потр}} = \sum_k I_k^2 x_k. \end{cases} \quad (3.116)$$

При этом следует учитывать, что

– **все составляющие активной мощности  $P_{\text{потр}}$  положительны;**

– слагаемые  $Q_{\text{потр}}$  **имеют разные знаки:** при использовании формы записи потребленной мощности (3.116) индуктивные составляющие реактивной мощности  $I_k^2 x_{Lk}$  должны иметь знак «плюс», а емкостные –  $I_k^2 x_{Ck}$  – «минус».

### 3.8. Пример расчета разветвленной цепи синусоидального тока

Электрическая цепь (рис. 3.18) с входным напряжением  $u = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \beta)$  характеризуется следующими параметрами:

$$\begin{aligned} U &= 220 \text{ В}; & \beta &= 90^\circ; & f &= 50 \text{ Гц}; & r_1 &= 20 \text{ Ом}; \\ r_2 &= 18 \text{ Ом}; & r_3 &= 10 \text{ Ом}; & r &= 11 \text{ Ом}; & L_1 &= 116 \text{ мГн}; \\ L_2 &= 102 \text{ мГн}; & C &= 160 \text{ мкФ}. \end{aligned}$$

Требуется записать систему уравнений по законам Кирхгофа для нахождения мгновенных и комплексных действующих токов ветвей, определить комплексное входное сопротивление, комплексные действующие и мгновенные значения токов, проверить баланс мощностей, построить векторную диаграмму токов и напряжений.

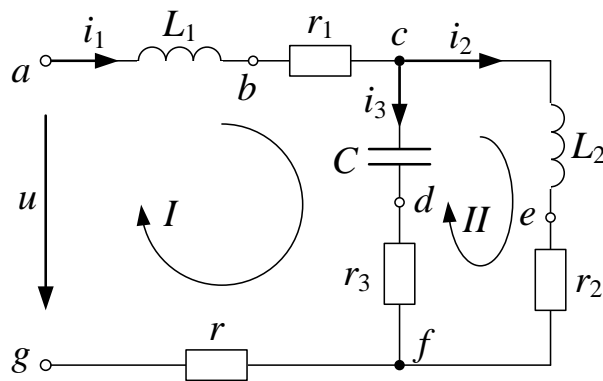


Рис. 3.18. Схема для расчета разветвленной цепи синусоидального тока

**Р е ш е н и е**

**1. Запишем систему уравнений по законам Кирхгофа.** Правила составления уравнений аналогичны рассмотренным в подразд. 2.1 и в п. 2.10.1.

При записи уравнений для мгновенных значений напряжений и токов напряжения на реактивных элементах удобно обозначать в общем виде:

$$\begin{aligned} \text{узел } c: & \quad i_1 = i_2 + i_3; \\ \text{контур } I: & \quad \begin{cases} u_{L1} + r_1 i_1 + u_C + r_3 i_3 + r i_1 = u; \end{cases} \\ \text{контур } II: & \quad \begin{cases} u_{L2} + r_2 i_2 - r_3 i_3 - u_C = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{где } u_{L1} = L_1 \frac{di_1}{dt}; \quad u_{L2} = L_2 \frac{di_2}{dt}; \quad u_3 = \frac{1}{C} \int i_3 dt.$$

При записи уравнений для комплексных действующих значений напряжений и токов напряжения на реактивных элементах удобно записывать в соответствии с законом Ома в комплексной форме. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3; \\ jx_{L1}\dot{I}_1 + r_1\dot{I}_1 + (-jx_C)\dot{I}_3 + r_3\dot{I}_3 + r\dot{I}_1 = \dot{U}; \\ jx_{L2}\dot{I}_2 + r_2\dot{I}_2 - r_3\dot{I}_3 - (-jx_C)\dot{I}_3 = 0. \end{cases}$$

Полученную систему уравнений можно решить и найти неизвестные токи, но в данной задаче один источник напряжения, поэтому воспользуемся методом преобразования для нахождения токов в схеме.

## 2. Определим входное комплексное сопротивление цепи.

### 2.1. Рассчитаем сопротивления реактивных элементов цепи.

Они зависят от индуктивности (емкости) и частоты приложенного напряжения. Угловая частота  $\omega = 2\pi f$ ;  $\omega = 2\pi \cdot 50 = 314,2$  рад/с.

Индуктивные сопротивления:

$$x_{L1} = \omega L_1, \quad x_{L1} = 314,2 \cdot 116 \cdot 10^{-3} = 36,45 \text{ Ом};$$

$$x_{L2} = \omega L_2, \quad x_{L2} = 314,2 \cdot 102 \cdot 10^{-3} = 32,05 \text{ Ом}.$$

Емкостное сопротивление:

$$x_C = \frac{1}{\omega C}, \quad x_C = \frac{1}{314,2 \cdot 160 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{314,2 \cdot 160} = 19,89 \text{ Ом}.$$

Объединять реактивные сопротивления  $x$  с активными сопротивлениями  $r$  можно только в комплексной форме.

Индуктивные сопротивления в комплексной форме:  $jx_{L1} = j36,45$  Ом и  $jx_{L2} = j32,05$  Ом.

Емкостное сопротивление в комплексной форме:  $-jx_C = -j19,89$  Ом.

### 2.2. Объединим последовательно соединенные элементы.

При объединении активных и реактивных сопротивлений получим комплексные сопротивления (прил. 4):

$$Z_1 = r_1 + jx_{L1}, \quad Z_1 = 20 + j36,45 = 41,57e^{j61,2^\circ};$$

$$Z_2 = r_2 + jx_{L2}, \quad Z_2 = 18 + j32,05 = 36,76e^{j60,7^\circ};$$

$$Z_3 = r_3 - jx_C, \quad Z_3 = 10 - j19,89 = 22,26e^{-j63,3^\circ}.$$

В результате объединения сопротивлений получаем укрупненную схему, приведенную на рис. 3.19, в которой пропали точки  $b$ ,  $d$  и  $e$ .

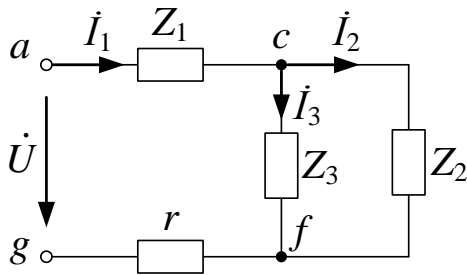


Рис. 3.19. Укрупненная расчетная схема

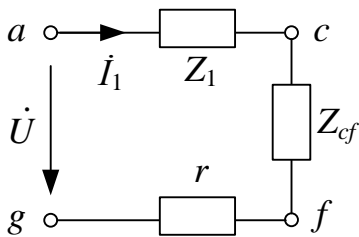


Рис. 3.20. Одноконтурная расчетная схема

2.3. Рассчитаем входное комплексное сопротивление цепи.

В соответствии с полученной схемой на рис. 3.19  $Z_2$  и  $Z_3$  соединены параллельно, и их можем объединить в одно сопротивление  $Z_{cf}$  (рис. 3.20). Тогда  $Z_1$ ,  $Z_{cf}$  и  $r$  будут соединены последовательно. В итоге можем записать:

$$Z_{\text{вх}} = Z_1 + Z_{cf} + r = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} + r.$$

Подставляем численные значения  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$  из пункта 2.2 в удобной для расчета форме: для операции умножения используем экспоненциальную (показательную) форму записи комплексного числа, а для сложения – алгебраическую:

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}} &= 20 + j36,45 + \frac{36,76e^{j60,7^\circ} \cdot 22,26e^{-j63,3^\circ}}{18 + j32,05 + 10 - j19,89} + 11 = \\ &= 20 + 11 + j36,45 + \frac{818,4e^{-j2,6^\circ}}{28 + j12,16} = 31 + j36,45 + \frac{818,4e^{-j2,6^\circ}}{30,53e^{j23,5^\circ}} = \\ &= 31 + j36,45 + 26,81e^{-j26,1^\circ} = 31 + j36,45 + 24,08 - j11,79 = \\ &= 55,08 + j24,65 = 60,34e^{j24,1^\circ}. \end{aligned}$$

В результате расчета  $Z_{\text{вх}}$ , во-первых, узнали численное значение сопротивления параллельного участка  $Z_{cf} = 26,81e^{-j26,1^\circ}$ , которое пригодится далее для нахождения токов.

Во-вторых, получили подробную информацию о взаимосвязи входного тока и напряжения. Полное входное сопротивление  $z_{\text{вх}} = 60,34$  Ом дает связь между ними по модулю. Его активное сопротивление  $r_{\text{вх}} = 55,08$  Ом и положи-

тельное реактивное  $x_{\text{вх}} = 24,65$  Ом показывают, что схема имеет активно-индуктивный характер.

Угол сдвига фаз  $\varphi_{\text{вх}}$  показывает, что входное напряжение опережает по фазе входной ток на  $24,1^\circ$ .

### 3. Расчет токов в схеме.

В задаче задано действующее значение напряжения  $U = 220$  В. Ему соответствует амплитудное значение  $U_m = U\sqrt{2} = 220\sqrt{2} = 311,1$  В. Начальная фаза входного напряжения также задана:  $\beta = 90^\circ$ . Частоте  $f = 50$  Гц соответствует угловая частота  $\omega = 2\pi f = 314,2$  рад/с. Таким образом, мгновенное значение напряжения на входе цепи описывается выражением:

$$u(t) = 220\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) = 311,1 \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ В.}$$

Действующее значение напряжения соответствует показаниям вольтметра и учитывается при составлении баланса мощностей. Амплитудное значение, угол сдвига фаз и частоту можно измерить с помощью осциллографа.

Расчет будем выполнять с комплексным действующим значением напряжения:  $\dot{U} = 220e^{j90^\circ}$ . В этом случае расчет цепи при синусоидальном токе полностью повторяет расчет цепи постоянного тока (см. подразд. 2.1 и пример расчета в п. 2.11.2), но вычисления выполняются в комплексной форме.

Комплексное действующее значение входного тока находим по закону Ома для полной цепи:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_{\text{вх}}}, \quad \dot{I}_1 = \frac{220e^{j90^\circ}}{60,34e^{j24,1^\circ}} = 3,646e^{j65,9^\circ}.$$

Ему соответствует мгновенное значение

$$i_1(t) = 3,646\sqrt{2} \sin(\omega t + 65,9^\circ) \text{ А.}$$

Для нахождения токов параллельных ветвей необходимо предварительно найти падение напряжения на параллельном участке (между точками  $c$  и  $f$ , см. рис. 3.19). Комплексное действующее значение этого напряжения удобно находить по схеме на рис. 3.20:

$$\dot{U}_{cf} = \dot{I}_1 Z_{cf}, \quad \dot{U}_{cf} = 3,646e^{j65,9^\circ} \cdot 26,81e^{-j26,1^\circ} = 97,75e^{j39,8^\circ}.$$

Тогда по закону Ома для участка цепи находим комплексные действующие значения токов параллельных ветвей:

$$i_2 = \frac{\dot{U}_{cf}}{Z_2}, \quad i_2 = \frac{97,75e^{j39,8^\circ}}{36,76e^{j60,7^\circ}} = 2,659e^{-j20,9^\circ};$$

$$i_3 = \frac{\dot{U}_{cf}}{Z_3}, \quad i_3 = \frac{97,75e^{j39,8^\circ}}{22,26e^{-j63,3^\circ}} = 4,390e^{j103,1^\circ}.$$

Им соответствует мгновенные значения

$$i_2(t) = 2,659\sqrt{2} \sin(\omega t - 20,9^\circ) \text{ А};$$

$$i_3(t) = 4,39\sqrt{2} \sin(\omega t + 103,1^\circ) \text{ А}.$$

#### 4. Составим баланс мощностей.

Комплексную мощность источника найдем в соответствии с выражением (3.115):

$$\dot{S}_{\text{ист}} = \dot{U} I_1^*,$$

$$\dot{S}_{\text{ист}} = 220e^{j90^\circ} \cdot 3,646e^{-j65,9^\circ} = 802,1e^{j24,1^\circ} = 732,2 + j327,5,$$

где  $S_{\text{ист}} = 802,1 \text{ В} \cdot \text{А}$  – полная мощность источника;

$P_{\text{ист}} = 732,2 \text{ Вт}$  – активная мощность источника;

$Q_{\text{ист}} = 327,5 \text{ вар}$  – реактивная мощность источника;

$\varphi_{\text{ист}} = 24,1^\circ$  – угол сдвига фаз между входным напряжением и током.

Активную и реактивную мощности, потребляемые приемниками в цепи, удобно находить поэлементно по схеме рис. 3.18. При этом активными потребителями являются сопротивления  $r_1, r_2, r_3$  и  $r$ , а реактивными – индуктивные и емкостные сопротивления  $x_{L1}, x_{L2}$  и  $x_C$ :

$$P_{\text{потр}} = r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2 + r_3 I_3^2 + r I_1^2,$$

$$P_{\text{потр}} = 20 \cdot 3,646^2 + 18 \cdot 2,659^2 + 10 \cdot 4,39^2 + 11 \cdot 3,646^2 = 732,1 \text{ Вт};$$

$$Q_{\text{потр}} = X_{L1} I_1^2 + X_{L2} I_2^2 - X_C I_3^2,$$

$$Q_{\text{потр}} = 36,45 \cdot 3,646^2 + 32,05 \cdot 2,659^2 - 19,89 \cdot 4,39^2 = 327,7 \text{ Вт};$$

Расхождение

$$\delta_P = \frac{|P_{\text{ист}} - P_{\text{потр}}|}{P_{\text{ист}}} \cdot 100 \%, \quad \delta_P = \frac{|732,2 - 732,1|}{732,2} \cdot 100 \% = 0,014 \%;$$



$$\delta_Q = \frac{|Q_{\text{ист}} - Q_{\text{потр}}|}{Q_{\text{ист}}} \cdot 100\%, \quad \delta_Q = \frac{|327,5 - 327,7|}{327,5} \cdot 100\% = 0,06\%.$$

## 5. Построим векторную диаграмму.

Построение векторных диаграмм является важным и эффективным средством анализа и расчета электрических цепей. Как правило, на одной комплексной плоскости выполняется построение сразу двух векторных диаграмм – токов и напряжений.

Для построения векторов на комплексной плоскости необходимо определить длины векторов, соответствующие действующим значениям физических величин (токов или напряжений). Для этого выбираются соответствующие масштабы по току  $m_i$  и напряжению  $m_u$ .

### 5.1. Построим лучевую векторную диаграмму токов.

При построении лучевой диаграммы векторы откладываются на комплексной плоскости из одной точки (например, из начала координат).

Для построения векторов токов  $\dot{I}_1 = 3,646e^{j65,9^\circ}$ ,  $\dot{I}_2 = 2,659e^{-j20,9^\circ}$  и  $\dot{I}_3 = 4,39e^{j103,1^\circ}$  выберем масштаб  $m_i = 2 \text{ А/см}$ , что означает: вектору длиной 1 см будет соответствовать действующее значение тока 2 А. Тогда вектор  $\dot{I}_1$  будет построен из начала координат длиной  $\frac{3,646 \text{ А}}{2 \text{ А/см}} = 1,82 \text{ см}$  и под углом  $65,9^\circ$  к

действительной оси (положительные углы откладываются против часовой стрелки). Аналогично выполняется построение векторов токов  $\dot{I}_2$  и  $\dot{I}_3$  длиной 1,33 и 2,2 см соответственно (рис. 3.21, а).

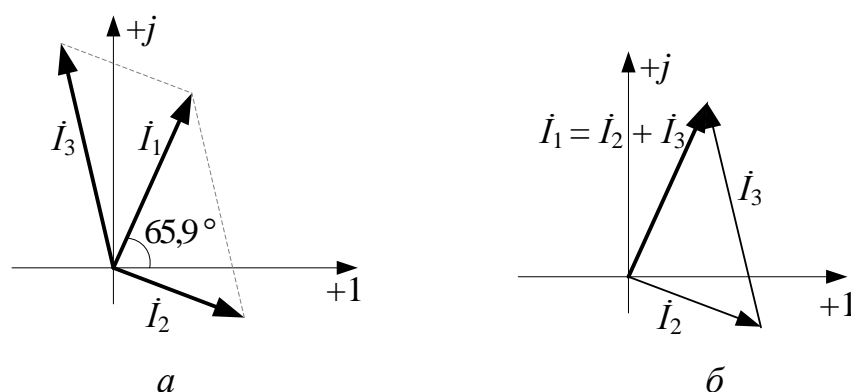


Рис. 3.21. Лучевая диаграмма токов (а) и проверка первого закона Кирхгофа (б)

По лучевой диаграмме токов удобно проверять выполнение первого закона Кирхгофа в комплексной форме:  $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$ .

Сумму векторов токов  $\dot{I}_2$  и  $\dot{I}_3$  удобно построить по правилу параллелограмма (на рис. 3.21, *а* показано пунктирной линией) или переносом вектора  $\dot{I}_3$  в конец вектора  $\dot{I}_2$  (рис. 3.21, *б*). Как видно, в любом случае вектор тока  $\dot{I}_1$  совпадает с вектором суммы токов  $\dot{I}_2$  и  $\dot{I}_3$  (первый закон Кирхгофа выполняется).

## 5.2. Построим топографическую векторную диаграмму напряжений.

Слово «топографическая» в названии диаграммы означает, что она строится с привязкой к расположению элементов в схеме. Эту диаграмму удобно совмещать с лучевой диаграммой токов. Для этого на той же комплексной плоскости нужно построить векторы напряжений на каждом элементе схемы.

Чтобы выбрать подходящий масштаб, предварительно рассчитаем действующие значения напряжения на каждом элементе. При этом вычисления достаточно проводить по модулю, а не в комплексной форме. Для схемы на рис. 3.18 с учетом заданных  $r, r_1, r_2, r_3$  и рассчитанных ранее  $x_{L1}, x_{L2}, x_C, I_1, I_2$  и  $I_3$  имеем:

$$\begin{aligned} U_{r1} &= r_1 I_1, & U_{r1} &= 20 \cdot 3,646 = 72,92 \text{ В}; \\ U_{r2} &= r_2 I_2, & U_{r2} &= 18 \cdot 2,659 = 47,87 \text{ В}; \\ U_{r3} &= r_3 I_3, & U_{r3} &= 10 \cdot 4,39 = 43,9 \text{ В}; \\ U_r &= r I_1, & U_r &= 11 \cdot 3,646 = 40,11 \text{ В}; \\ U_{L1} &= x_{L1} I_1, & U_{L1} &= 36,45 \cdot 3,646 = 132,9 \text{ В}; \\ U_{L2} &= x_{L2} I_2, & U_{L2} &= 32,05 \cdot 2,659 = 85,22 \text{ В}; \\ U_C &= x_C I_3, & U_C &= 19,89 \cdot 4,39 = 87,33 \text{ В}. \end{aligned}$$

В данном случае удобным будет масштаб  $m_u = 25 \text{ В/см}$  (т. е. когда вектору длиной один сантиметр соответствует действующее значение напряжения 25 В). Рассчитаем длину векторов напряжений. Например, длина вектора напряжения  $\dot{U}_{r1}$  может быть найдена так:  $\ell(\dot{U}_{r1}) = \frac{U_{r1}}{m_u} = \frac{72,92 \text{ В}}{25 \text{ В/см}} = 2,92 \text{ см}$ .

Аналогично определяется длина остальных векторов напряжений. Результаты расчета сведены в табл. 3.1.

Векторы напряжений в схеме нужно откладывать **против направления протекания тока**, начиная от точки с наименьшим потенциалом. В этом случае построенные напряжения будут находиться в полном соответствии с потенциалами соответствующих точек схемы.

Для рассматриваемой схемы, которая для удобства анализа продублирована на рис. 3.22, построение начнем с точки  $g$ . Принимая ее потенциал  $\varphi_g = 0$ , помещаем точку  $g$  в начало координат (рис. 3.23,  $a$ ).

Т а б л и ц а 3.1

Результаты расчета длины векторов напряжений на элементах схемы

Вектор напряжения	$\dot{U}_{r1}$	$\dot{U}_{r2}$	$\dot{U}_{r3}$	$\dot{U}_r$	$\dot{U}_{L1}$	$\dot{U}_{L2}$	$\dot{U}_C$
Длина вектора, см	2,92	1,91	1,76	1,60	5,32	3,41	3,49

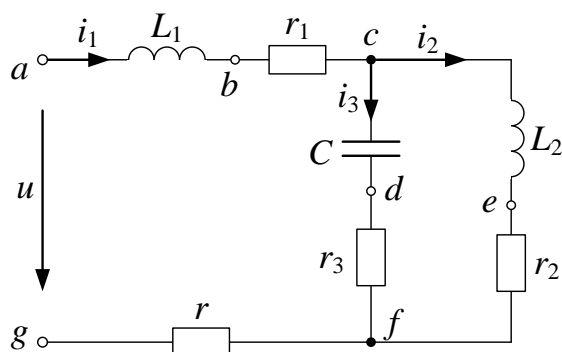


Рис. 3.22. Схема для расчета разветвленной цепи синусоидального тока

Потенциал следующей точки  $f$  будет равен падению напряжения  $\dot{U}_r$ . Вспоминая правило, что **на активном сопротивлении напряжение и ток совпадают по фазе**, выполняем построение вектора  $\dot{U}_r = r\dot{I}_1$ : из точки  $g$  длиной 1,6 см (см. табл. 3.1) в направлении, совпадающем с направлением тока  $\dot{I}_1$ . Обозначаем полученную точку  $f$  (см. рис. 3.23,  $a$ ).

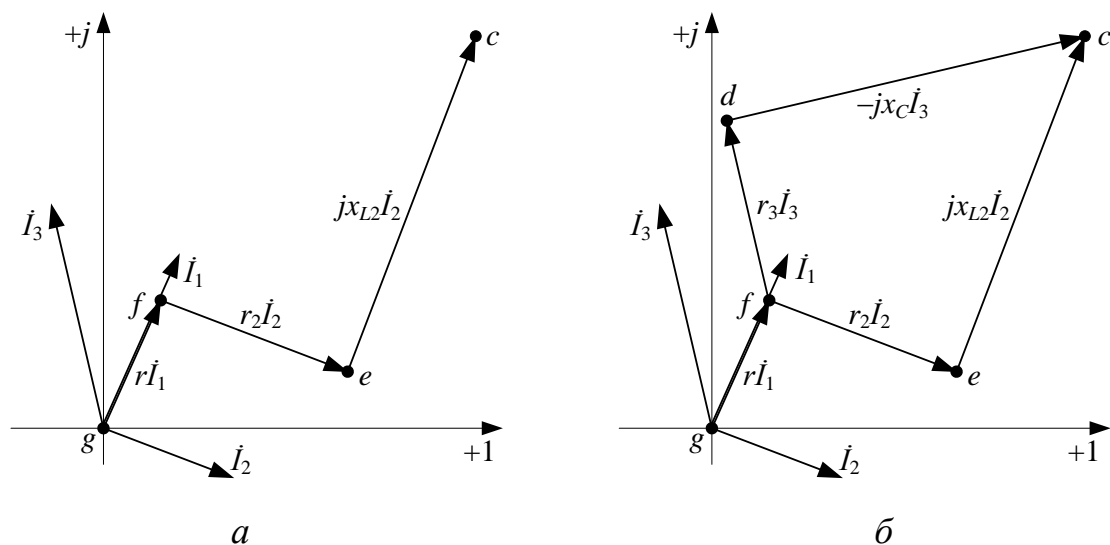


Рис. 3.23. Первый ( $a$ ) и второй ( $b$ ) этапы построения диаграммы напряжений

Из точки  $f$  можно перейти к точке  $d$ , а можно к  $e$ . Оба пути должны быть пройдены не важно в каком порядке. Поэтому сначала определим положение точки  $e$ . Для этого построим вектор  $\dot{U}_{r_2} = r_2 \dot{I}_2$ : из точки  $f$  длиной 1,91 см (см. табл. 3.1) в направлении, совпадающем с направлением тока  $\dot{I}_2$  (см. рис. 3.23,  $a$ , точка  $e$ ).

Чтобы получить точку  $c$  на плоскости, необходимо из точки  $e$  построить вектор падения напряжения  $\dot{U}_{L2}$ . Вспоминая правило, что **на индуктивности напряжение опережает по фазе ток на  $90^\circ$** , выполняем построение вектора  $\dot{U}_{L2} = jx_{L2} \dot{I}_2$ : из точки  $e$  длиной 3,41 см (см. табл. 3.1) в направлении, перпендикулярном току  $\dot{I}_2$  (в сторону опережения, т. е. против часовой стрелки). Получаем точку  $c$  (см. рис. 3.23,  $a$ ).

Построение напряжений на элементах  $r_3$  и  $C$  (параллельная ветвь) позволяет определить положение точки  $d$  и выполнить дополнительную проверку правильности расчетов.

Чтобы получить точку  $d$ , необходимо из точки  $f$  построить вектор падения напряжения  $\dot{U}_{r_3} = r_3 \dot{I}_3$ : из точки  $f$  длиной 1,76 см (см. табл. 3.1) в направлении, совпадающем с направлением тока  $\dot{I}_3$  (рис. 3.23,  $b$ , точка  $d$ ).

Проверим правильность расчета токов параллельных ветвей путем построения вектора напряжения  $\dot{U}_C$ : корректно построенный вектор  $\dot{U}_C$  из точки  $d$  должен попасть в точку  $c$ . При этом, вспоминая правило, что **на емкости напряжение отстает по фазе от тока на  $90^\circ$** , убеждаемся в том, что вектор, соединяющий точки  $d$  и  $c$ , соответствует напряжению  $\dot{U}_C = -jx_C \dot{I}_3$ : построен из точки  $d$  длиной 3,49 см (см. табл. 3.1) в направлении, перпендикулярном току  $\dot{I}_3$  в сторону отставания, т. е. по направлению часовой стрелки (см. рис. 3.23,  $b$ ).

Точку  $b$  получаем из точки  $c$  путем построения вектора падения напряжения  $\dot{U}_{r_1} = r_1 \dot{I}_1$ : из точки  $c$  длиной 2,92 см (см. табл. 3.1) в направлении, совпадающем с направлением тока  $\dot{I}_1$  (рис. 3.24).

Точку  $a$  получаем из точки  $b$  путем построения вектора падения напряжения  $\dot{U}_{L1} = jx_{L1} \dot{I}_1$ : из точки  $b$  длиной 5,32 см (см. табл. 3.1) в направлении, перпендикулярном току  $\dot{I}_1$  в сторону опережения (см. рис. 3.24).

В итоге получили значение потенциала точки  $a$  на плоскости, которое должно соответствовать входному напряжению  $\dot{U} = \dot{\phi}_a - \dot{\phi}_g$ , учитывая, что

$\varphi_g = 0$ . Соответственно вектор  $\dot{U}$ , направленный из точки **g** в точку **a** должен быть длиной  $\ell(\dot{U}) = \frac{U}{m_u} = \frac{220 \text{ В}}{25 \text{ В/см}} = 8,8 \text{ см}$  и быть направленным под углом  $\beta = 90^\circ$  (см. рис. 3.24).

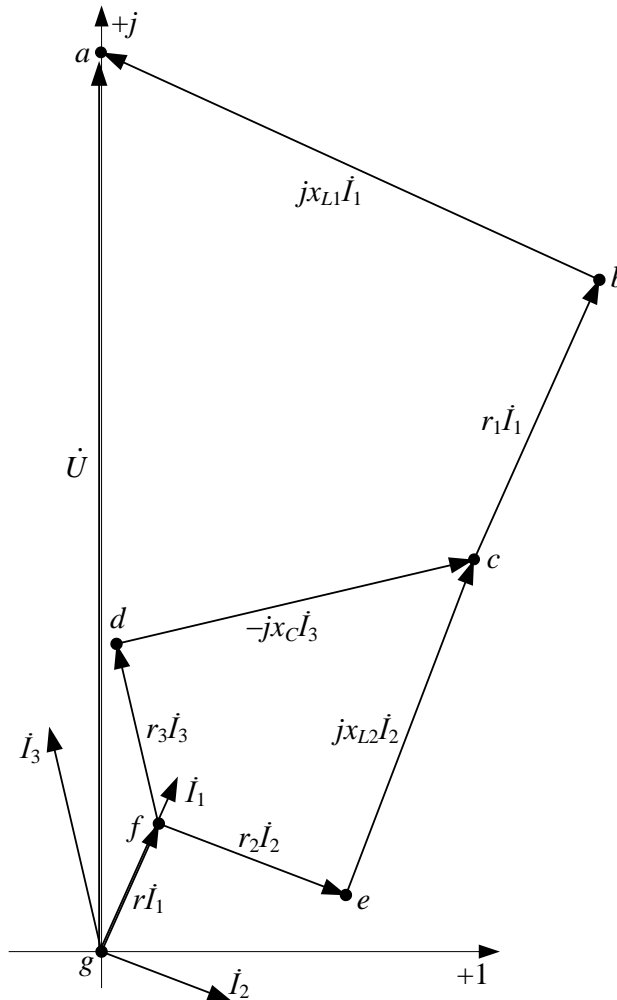


Рис. 3.24. Итоговая векторная диаграмма токов и напряжений

По полученной диаграмме можно, не выполняя аналитических расчетов, в комплексной форме графически выполнить следующее:

проверить выполнение второго закона Кирхгофа для выбранного контура (например, для внешнего контура схемы на рис. 3.22 рассматривается контур  $gfecbag$ , для которого  $r\dot{I}_1 + r_2\dot{I}_2 + jx_{L2}\dot{I}_2 + r_1\dot{I}_1 + jx_{L1}\dot{I}_1 = \dot{U}$ );

сравнить любые напряжения в схеме (например, из рис. 3.24 видно, что напряжение  $U_{de}$  меньше напряжения  $U_{db}$ );

найти падение напряжения между любыми точками схемы. Например, напряжение  $\dot{U}_{bd}$  соответствует вектору  $(\dot{\phi}_b - \dot{\phi}_d)$ , проведенному из точки  $d$  в точку  $b$ . Измерив длину этого вектора 5,74 см и угол его поворота  $37,1^\circ$  относительно действительной оси и учитывая масштаб диаграммы  $m_u = 25$  В/см, определяем само падение напряжения:

$$\dot{U}_{bd} = 5,74 \cdot 25 e^{j37,1^\circ} = 143,5 e^{j37,1^\circ}.$$

### 3.9. Задачи для самостоятельного решения

У с л о в и е   з а д а ч и. В электрической цепи (рис. 3.25) с входным напряжением  $u = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \beta)$  выполнить следующее:

- 1) определить комплексное входное сопротивление;
- 2) найти комплексные действующие значения тока во всех ветвях схемы, записать выражения для мгновенных значений тока;
- 3) составить баланс мощностей;
- 4) построить лучевую диаграмму токов и топографическую векторную диаграмму напряжений.

Параметры схем заданы в табл. 3.2. Пример решения рассмотрен в подразд. 3.8.

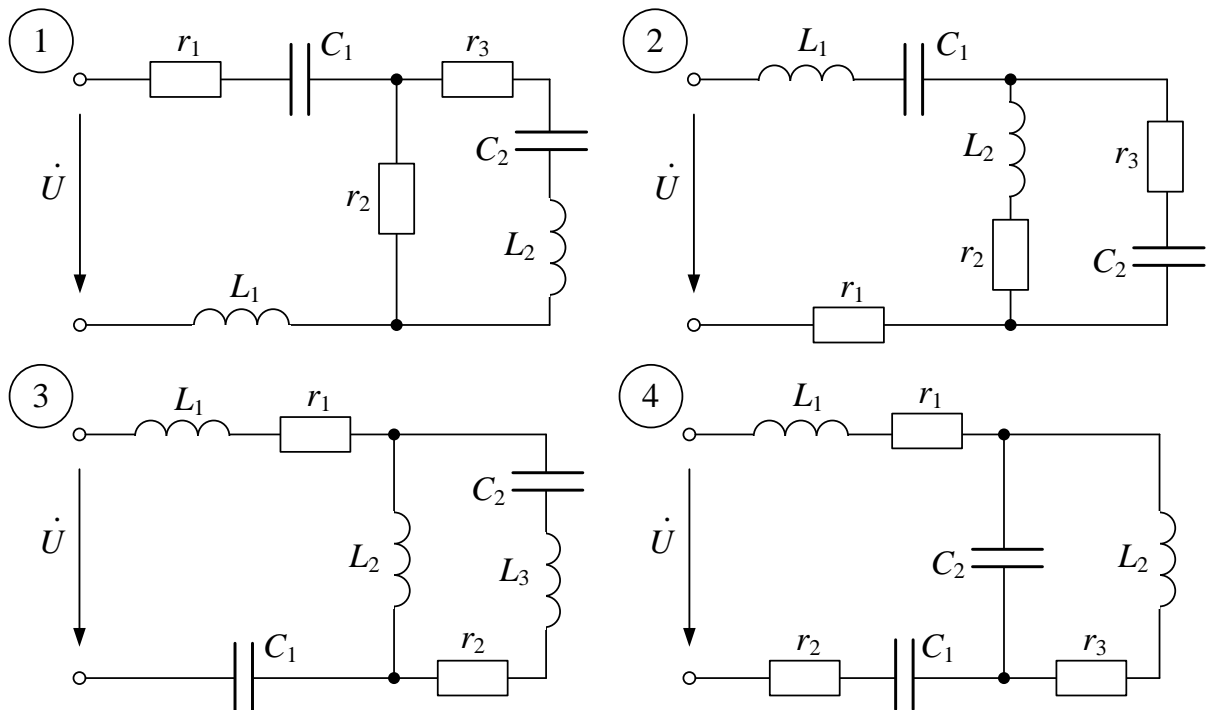


Рис. 3.25. Расчетные схемы

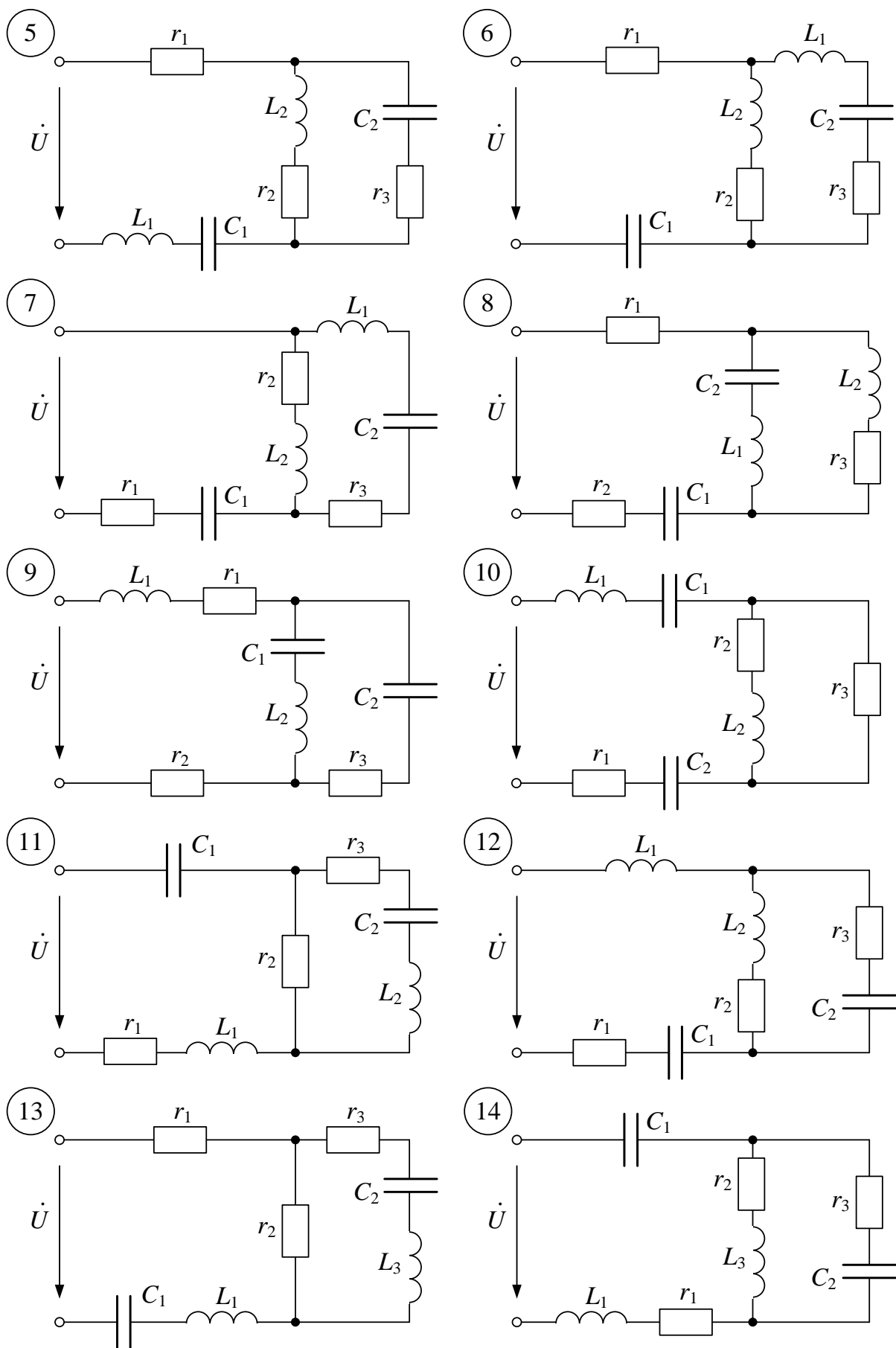


Рис. 3.25, лист 2

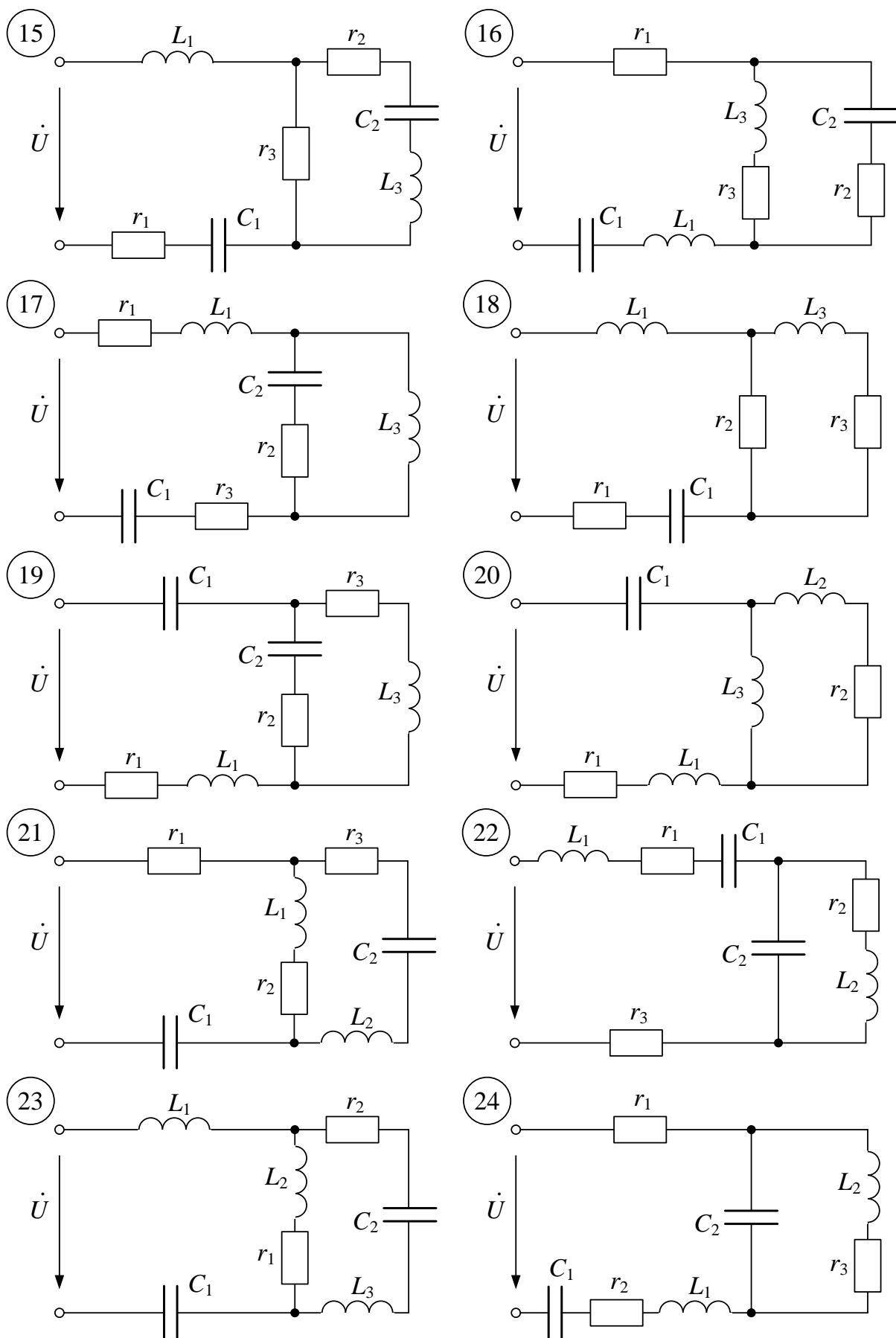


Рис. 3.25, лист 3



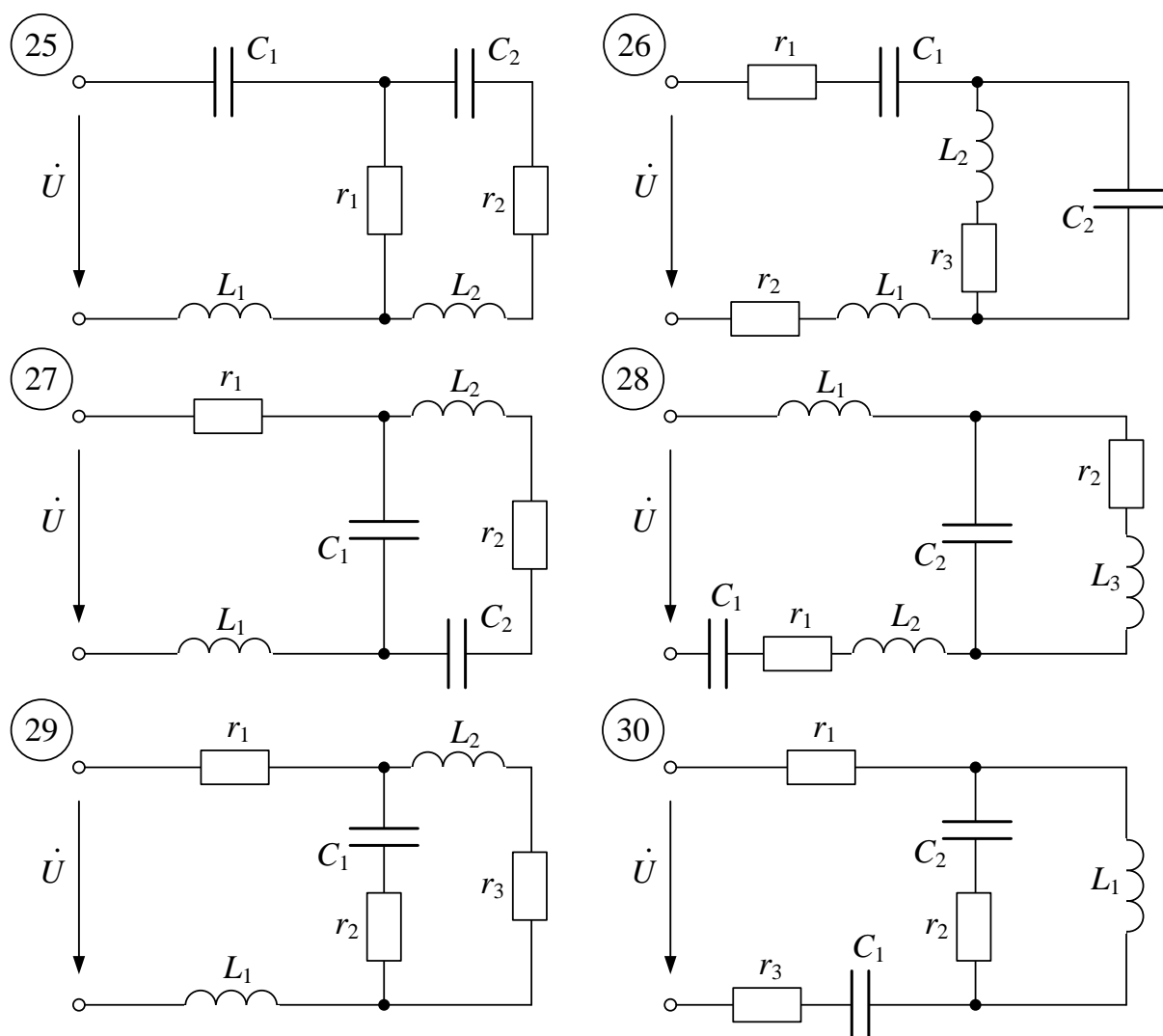


Рис. 3.25, лист 4

Т а б л и ц а 3.1

Исходные данные к задаче на расчет цепи синусоидального тока

Номер строки	$U$ В	$\beta$ град	$f$ Гц	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$C_1$	$C_2$
				Ом			мГн			мкФ	
1	180	45	150	12	18	10	26	41	33	160	95
2	240	-40	70	23	16	20	64	85	50	174	122
3	200	30	110	18	15	24	45	58	32	116	83
4	160	60	130	8	13	17	49	38	24	220	187
5	230	-20	100	25	20	15	66	54	31	74	106
6	170	-45	120	6	11	14	22	43	36	193	161
7	250	-30	50	10	22	16	28	17	25	88	175
8	150	50	90	7	17	12	30	15	37	92	210
9	220	40	40	19	22	25	35	44	50	110	76
10	260	-60	80	30	21	18	83	90	60	97	120

### 3.10. Электрические цепи синусоидального тока с магнитно (индуктивно)-связанными элементами

В качестве элементов электрических цепей, имеющих магнитные связи, рассматриваются катушки индуктивности.

#### 3.10.1. Согласное и встречное включение магнитно-связанных катушек

На рис. 3.26 показаны системы двух катушек, посаженных на магнитопроводы с постоянной магнитной проницаемостью  $\mu_a = \text{const}$ , которая значительно превышает магнитную проницаемость воздуха. Это условие позволяет считать, что магнитные потоки, создаваемые катушками, в основном замыкаются в пределах магнитопроводов. Картина взаимной магнитной связи катушек, находящихся в воздухе без магнитопровода, является сложной (см. рис. 1.3) и неудобной для рассуждений.

Катушки (обмотки) на рис. 3.26, *а* имеют одинаковое направление намотки и электрически соединены так, что токи в них тоже направлены одинаково: в каждой катушке от начала к концу. Направление магнитных потоков внутри катушек определяется по известным правилам правого винта (буравчика) или правой руки. Магнитные потоки  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  на указанном рисунке направлены одинаково, т. е. складываются. Результирующий магнитный поток равен сумме  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , и такая ситуация обуславливает **согласное включение катушек** – согласное в магнитном отношении.

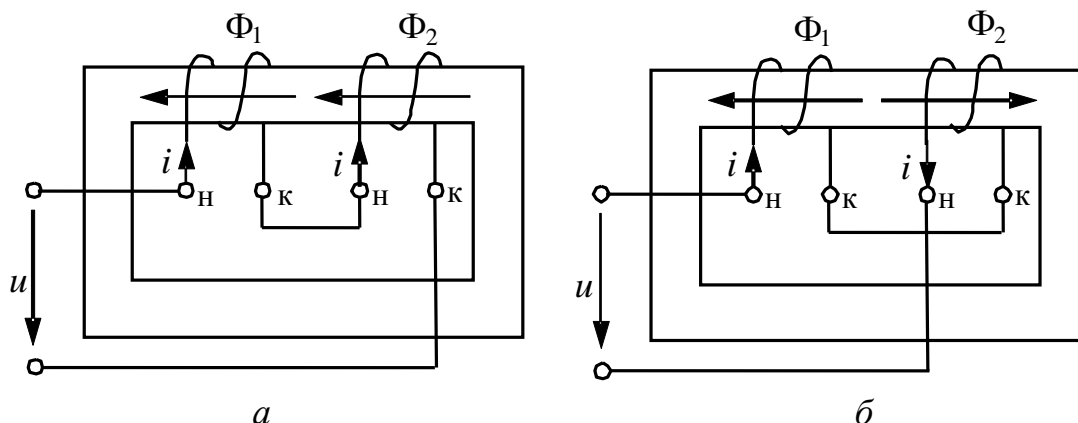


Рис. 3.26. Магнитно-связанные катушки при согласном (*а*) и встречном (*б*) включении

Повышение результирующего магнитного потока приводит к увеличению падений напряжения на каждой катушке.

Катушки, схемы которых представлены на рис. 3.26, б, также намотаны одинаково, но их электрическое соединение таково, что токи направлены противоположно. Вследствие этого магнитные потоки направлены противоположно. Результирующий поток равен разности  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , и такое соединение магнитно-связанных катушек называется **встречным**. Вследствие понижения результирующего магнитного потока уменьшаются и падения напряжения на каждой катушке.

Тот или иной вид включения можно получить, изменяя направление намотки одной из катушек, или при одинаковом направлении намотки, меняя характер электрического соединения катушек (меняя начало и конец одной из катушек).

Для мгновенных значений уравнение по второму закону Кирхгофа для схемы на рис. 3.26, а имеет вид:

$$L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + (r_1 + r_2)i = u \quad (3.117)$$

или

$$(L_1 + M) \frac{di}{dt} + (L_2 + M) \frac{di}{dt} + (r_1 + r_2)i = u, \quad (3.118)$$

где  $r_1$ ,  $L_1$  и  $r_2$ ,  $L_2$  – сопротивления и индуктивности первой и второй катушек соответственно;

$M$  – взаимная индуктивность;

$M \frac{di}{dt}$  – падение напряжения на соответствующей катушке, обусловленное

взаимной магнитной связью.

$M \frac{di}{dt}$  в уравнение (3.117) входит дважды, поскольку учитывается влияние

первой катушки на вторую и, наоборот, второй катушки на первую.

Начала катушек (при одинаковом направлении намотки) на схемах замещения обозначаются точками (или звездочками). Обе точки на рис. 3.27, а расположены справа от индуктивностей (могут быть слева). В результате ток  $i$  одинаково ориентирован относительно помеченных точками зажимов катушек. Это и является признаком согласного включения.

На рис. 3.27, б точки расположены с разных сторон индуктивностей. Следовательно, ток неодинаково ориентирован относительно помеченных зажимов. Это признак встречного включения.

В общем случае правило согласного (встречного) включения формируется следующим образом: *если на схемах замещения токи магнитно-связанных катушек одинаково ориентированы относительно помеченных зажимов, то включение или соединение катушек согласное; в противном случае – встречное.*

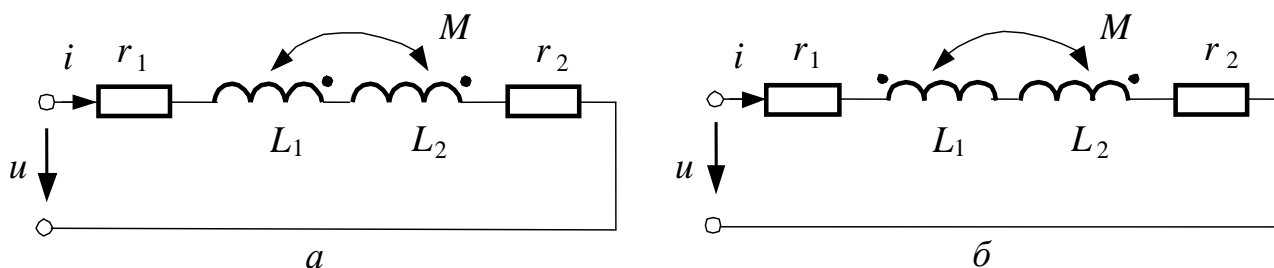


Рис. 3.27. Схемы замещения магнитно-связанных катушек при согласном (а) и встречном (б) включении

Данное правило распространяется и на разветвленные схемы. Например, на рис. 3.28 показан узел некой электрической цепи. Две ветви содержат магнитно-связанные катушки. В соответствии со сформулированным правилом катушки в магнитном отношении включены согласны.

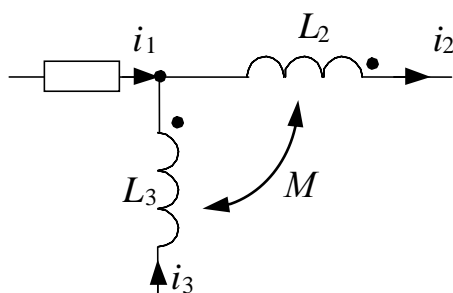


Рис. 3.28. Схема узла электрической цепи

Уравнение (3.118) в конечном итоге приобретает вид:

$$L_3 \frac{di}{dt} + r_3 i = u, \quad (3.119)$$

где  $L_3 = L_1 + L_2 + 2M$  – эквивалентная индуктивность схемы;

$r_3 = r_1 + r_2$  – эквивалентное сопротивление схемы.

Встречное включение (см. рис. 3.27, б) характеризует уравнение:

$$L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + (r_1 + r_2) i = u, \quad (3.120)$$

где дополнительные падения напряжения  $M \frac{di}{dt}$ , обусловленные взаимной магнитной связью катушек, вычитаются.

Поэтому после преобразований получаем:

$$(L_1 - M) \frac{di}{dt} + (L_2 - M) \frac{di}{dt} + (r_1 + r_2)i = u; \quad (3.121)$$

$$L_3 \frac{di}{dt} + r_3 i = u, \quad (3.122)$$

где  $L_3 = L_1 + L_2 - 2M$ ;  $r_3 = r_1 + r_2$ .

В первом случае, как следует из уравнения (3.119), взаимная индуктивность  $M$  обуславливает увеличение эквивалентной индуктивности. В данном случае эквивалентная индуктивность уменьшается, но остается величиной положительной в любых условиях, поскольку из-за наличия потоков рассеяния  $L_1 + L_2 > 2M$ .

Разности  $(L_1 - M)$  и  $(L_2 - M)$  в выражении (3.121) могут быть как положительными, так и отрицательными.

Уравнения (3.118) и (3.121) можно записать в комплексной форме, например, относительно комплексных действующих значений напряжений и тока:

для согласного включения –

$$j\omega(L_1 + M)\dot{I} + j\omega(L_2 + M)\dot{I} + (r_1 + r_2)\dot{I} = \dot{U}; \quad (3.123)$$

для встречного –

$$j\omega(L_1 - M)\dot{I} + j\omega(L_2 - M)\dot{I} + (r_1 + r_2)\dot{I} = \dot{U}. \quad (3.124)$$

Степень магнитной связи между двумя катушками характеризует параметр

$$k_M = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad (3.125)$$

который называют коэффициентом магнитной связи. Этот коэффициент в зависимости от условий имеет значения в диапазоне от нуля до единицы. Нулевое значение  $k_M$  достигается в случаях, когда оси катушек взаимно перпендикуляр-

ны. Максимальное значение, близкое к единице, может быть получено при так называемой бифилярной намотке, когда намотка обеих катушек осуществляется соприкасающейся парой проводов.

### 3.10.2. Магнитно-связанные цепи без электрической связи

Такой тип электрических цепей характерен для электротехнических устройств – трансформаторов, которые предназначены для преобразования параметров напряжения и тока. Исключительное большинство реально используемых трансформаторов выполняются на ферромагнитных сердечниках и представляют собой нелинейные устройства. Рассматриваемые цепи находят применение также в специальных случаях трансформаторов без ферромагнитных

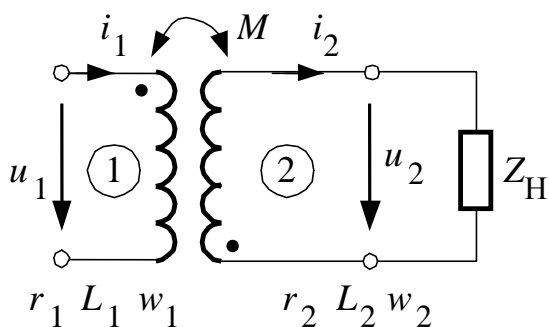


Рис. 3.29. Схема замещения воздушного трансформатора

сердечников – «воздушных трансформаторов». Эти устройства являются линейными, поэтому они рассматриваются в данном разделе.

Схема простейшего двухобмоточного воздушного трансформатора изображена на рис. 3.29.

Трансформатор имеет первичную и вторичную обмотки. Первичная обмотка подключается к источнику, вторичная питает нагрузку  $Z_H$ . Все параметры первичной обмотки имеют индекс единицу, вторичной – двойку.

Электрическое соединение между первичной и вторичной обмотками отсутствует. Энергия во вторичный контур передается через изменяющееся во времени магнитное поле.

Схема рассматриваемого трансформатора двухконтурная, поэтому можно записать два уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = u_1; \\ r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + u_2 = 0 \end{cases} \quad (3.126)$$

или

$$\begin{cases} r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = u_1; \\ r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + u_2 = -M \frac{di_1}{dt}. \end{cases} \quad (3.127)$$

Здесь величина  $-M \frac{di_1}{dt} = e_{2M}$  представляет собой ЭДС взаимной индукции, которая током первичной обмотки  $i_1$  наводится во вторичной обмотке. Именно эта ЭДС обуславливает ток  $i_2$  во вторичной обмотке трансформатора и нагрузке  $Z_H$ .

Составляющая  $u_{1M} = M \frac{di_2}{dt}$  в первом уравнении системы (3.127) является падением напряжения, которое компенсирует ЭДС взаимной индукции  $e_{1M} = -M \frac{di_2}{dt}$ , наводимой током вторичной обмотки  $i_2$  в первичной обмотке. Наличие ЭДС  $e_{1M}$  и  $e_{2M}$  характеризуют двухстороннюю магнитную связь в схеме воздушного трансформатора.

В режиме холостого хода, когда вторичный контур разомкнут, ток  $i_2 = 0$  и система уравнений (3.127) приобретает вид:

$$\begin{cases} r_1 i_{1x.x} + L_1 \frac{di_{1x.x}}{dt} = u_1; \\ u_{2x.x} = -M \frac{di_{1x.x}}{dt} = e_{2Mx.x}. \end{cases} \quad (3.128)$$

В этом режиме магнитная связь односторонняя, поскольку ток вторичной обмотки и наводимая им ЭДС взаимоиндукции отсутствуют.

Уравнения (3.127) в комплексной форме имеют вид:

$$\begin{cases} (r_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_1; \\ (r_2 + j\omega L_2) \dot{I}_2 + \dot{U}_2 = -j\omega M \dot{I}_1. \end{cases} \quad (3.129)$$

Решение системы уравнений (3.129) позволяет определить токи первичной и вторичной обмоток и исследовать режимы трансформатора в полном диапазоне изменения параметров, т. е. от режима холостого хода ( $Z_H = \infty$ ) до режима короткого замыкания ( $Z_H = 0$ ).

Уравнения трансформатора с ферромагнитным сердечником формируются в несколько иной форме. Рассмотрим идеализированную модель двухобмоточного трансформатора (рис. 3.30), принимая условие  $\mu_{ac} = \text{const}$ , где  $\mu_{ac}$  – абсолютная магнитная проницаемость сердечника.

Магнитная проницаемость сердечника во много раз превышает магнитную проницаемость воздуха, поэтому магнитный поток в основном замыкается внутри сердечника и образуется составляющая  $\Phi$ , называемая основным магнитным потоком.

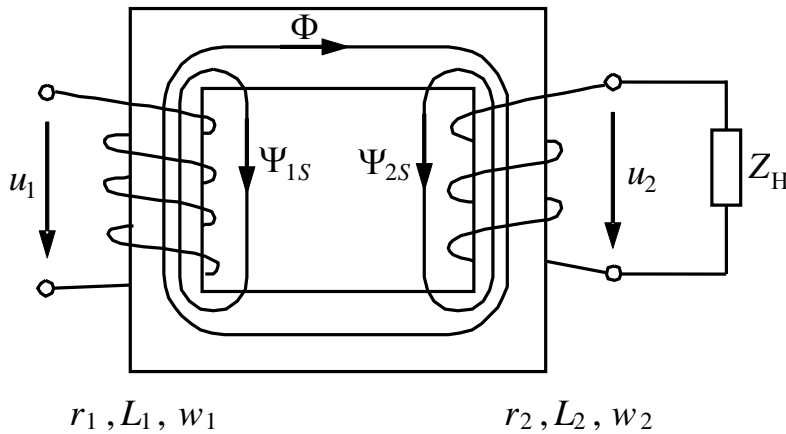


Рис. 3.30. Схема замещения двухобмоточного трансформатора

Незначительная часть общего потока в каждой обмотке ответвляется в воздух (потoki рассеяния). На рис. 3.30 им соответствуют потокоcцепления рассеяния  $\Psi_{1S}$  и  $\Psi_{2S}$ . Поскольку магнитная проницаемость воздуха величина постоянная ( $\mu_{ав} = \mu_0$ ), то справедливы соотношения:

$$\begin{cases} \Psi_{1S} = L_{1S} i_1; \\ \Psi_{2S} = L_{2S} i_2, \end{cases} \quad (3.130)$$

где  $L_{1S}$  и  $L_{2S}$  – индуктивности рассеяния первичной и вторичной обмоток.

С обеими обмотками связан основной магнитный поток  $\Phi$ , поэтому он и определяет взаимную магнитную связь между обмотками.

Система уравнений (3.127) для рассматриваемой модели с учетом выражений (1.9), (1.10) и (1.13) приобретает вид:

$$\begin{cases} r_1 i_1 + L_{1S} \frac{di_1}{dt} + w_1 \frac{d\Phi}{dt} = u_1; \\ r_2 i_2 + L_{2S} \frac{di_2}{dt} + u_2 = -w_2 \frac{d\Phi}{dt}. \end{cases} \quad (3.131)$$

В системе уравнений (3.131):



$w_1 \frac{d\Phi}{dt} = u_{1\Phi} = -e_{1M}$  – падение напряжения, компенсирующее ЭДС  $e_{1M}$ ,

наводимую в первичной обмотке потоком  $\Phi$ ;

$-w_2 \frac{d\Phi}{dt} = e_{2M}$  – ЭДС, наводимая потоком  $\Phi$  во вторичной обмотке;

$w_1, w_2$  – число витков первичной и вторичной обмоток соответственно.

Отношение ЭДС

$$\frac{e_{1M}}{e_{2M}} = \frac{w_1}{w_2} \quad (3.132)$$

является одним из важнейших параметров применяемых трансформаторов и называется **коэффициентом трансформации**:

$$K = \frac{w_1}{w_2}. \quad (3.133)$$

Приближенное значение коэффициента трансформации определяется как отношение напряжений  $U_1$  и  $U_2$ .

### 3.10.3. Особенности расчета разветвленных цепей с магнитно-связанными элементами

Рассмотрим особенности составления уравнений по законам Кирхгофа на примере схемы рис. 3.31. Сложность состоит в том, что в отличие от обычных цепей здесь на правило знаков, связанное с обходом контура, накладывается еще правило согласного и встречного включения. Поэтому рекомендуется следующая последовательность действий.

Сначала необходимо стрелками обозначить падения напряжений  $\dot{U}_{L1}$ ,  $\dot{U}_{L2}$ ,  $\dot{U}_{L3}$  на индуктивностях согласно с направлениями токов ветвей. Значения этих напряжений с учетом магнитных связей выражаются с применением правила определения согласного и встречного включения:

$$\begin{cases} \dot{U}_{L1} = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M_{12} \dot{I}_2; \\ \dot{U}_{L2} = j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M_{12} \dot{I}_1 + j\omega M_{23} \dot{I}_3; \\ \dot{U}_{L3} = j\omega L_3 \dot{I}_3 + j\omega M_{23} \dot{I}_2. \end{cases} \quad (3.134)$$

Затем составляется система уравнений для двух контуров и одного узла схемы:

$$\begin{cases} \dot{U}_{L1} + r_1 \dot{I}_1 - j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_1 + \dot{U}_{L2} + r_2 \dot{I}_2 = \dot{E}_1; \\ -r_2 \dot{I}_2 - \dot{U}_{L2} + r_3 \dot{I}_3 + \dot{U}_{L3} = \dot{E}_2; \\ \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0. \end{cases} \quad (3.135)$$

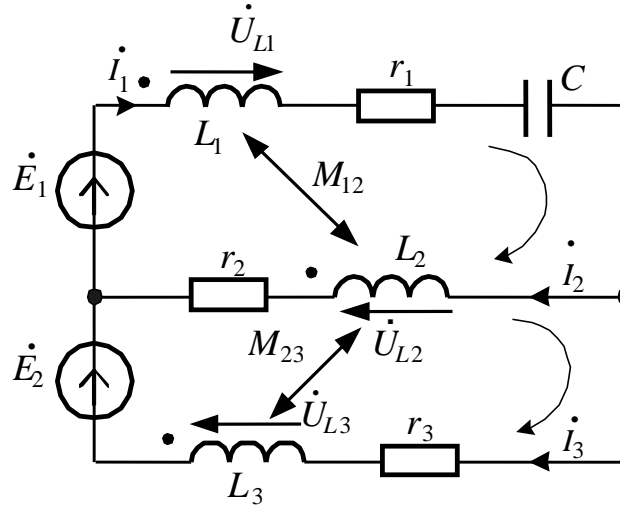


Рис. 3.31. Разветвленная цепь с магнитно-связанными элементами

Подстановка значений напряжений (3.134) в уравнения (3.135) приводит к конечной системе уравнений

$$\begin{cases} \left[ r_1 + j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C} - \omega M_{12} \right) \right] \dot{I}_1 + [r_2 + j(\omega L_2 - \omega M_{12})] \dot{I}_2 + j\omega M_{23} \dot{I}_3 = \dot{E}_1; \\ j\omega M_{12} \dot{I}_1 + [-r_2 + j(-\omega L_2 + \omega M_{23})] \dot{I}_2 + [r_3 + j(\omega L_3 - \omega M_{23})] \dot{I}_3 = \dot{E}_2; \\ \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0, \end{cases} \quad (3.136)$$

которая и подлежит решению.

В итоге видно, что система уравнений (3.135) составлена только с учетом правил, которые сформулированы в подразд. 2.1 при рассмотрении законов Кирхгофа. Разделение на отдельные этапы составления соотношений (3.134) и уравнений (3.135) позволяет избежать ошибок в знаках членов конечной системы уравнений (3.136).

Для решения подобных задач может быть применен и метод контурных токов, но его реализация сложнее, так как требуется использовать дополнительные правила составления уравнений. Метод узловых потенциалов принци-

пиально неприменим, поскольку его основу составляет зависимость тока ветви только от напряжения на зажимах этой же ветви. В данном случае этот принцип нарушается, так как из-за наличия магнитных связей ток ветви зависит от режимов и других ветвей.

#### 3.10.4. Примеры расчета электрических цепей с магнитно-связанными элементами

**Пример 1.** В электрической цепи (рис. 3.32) имеют место следующие параметры:

$$\dot{U} = 5 \text{ В}, \quad r_1 = 2 \text{ Ом}, \quad r_2 = 2 \text{ Ом}, \quad x_{L1} = 4 \text{ Ом}, \quad x_{L2} = 3 \text{ Ом}, \\ x_C = 2 \text{ Ом}, \quad x_M = 1 \text{ Ом}.$$

Требуется:

- комплексным методом определить ток цепи;
- построить векторную диаграмму.

**Решение.** Расчетный ток входит в начало первой и конец второй катушки, следовательно, катушки включены встречно.

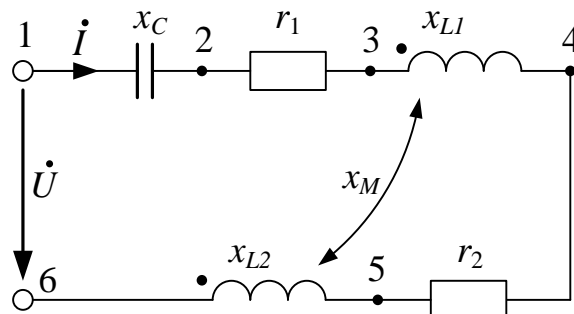


Рис. 3.32. Электрическая цепь с магнитно-связанными элементами

По второму закону Кирхгофа для мгновенных значений напряжений имеем:

$$u_C + u_{r1} + u_{L1} - u_M + u_{r2} + u_{L2} - u_M = u$$

или в комплексной форме:

$$\dot{I}(-jx_C + r_1 + jx_{L1} - jx_M + r_2 + jx_{L2} - jx_M) = \dot{U}.$$

После подстановки и вычислений определяем комплексное действующее значение входного тока цепи:

$$\dot{I} = 1e^{-j36,9^\circ}.$$

Соответствующая векторная топографическая диаграмма приведена на рис. 3.33.

П о я с н е н и я к д и а г р а м м е. Построение диаграммы осуществляется против направления протекания тока, т. е. от точки 6 к точке 1. Напряжение между точками 6 и 5 схемы соответствует разности напряжений, созданных во второй катушке явлениями само- и взаимной индукции, т. е.

$$\dot{U}_{56} = \dot{U}_{L2} - \dot{U}_M.$$

По аналогии

$$\dot{U}_{34} = \dot{U}_{L1} - \dot{U}_M.$$

Кроме того,

$$\dot{U}_{45} = \dot{U}_{r2}; \quad \dot{U}_{23} = \dot{U}_{r1}; \quad \dot{U}_{12} = \dot{U}_C; \quad \dot{U}_{16} = \dot{U}.$$

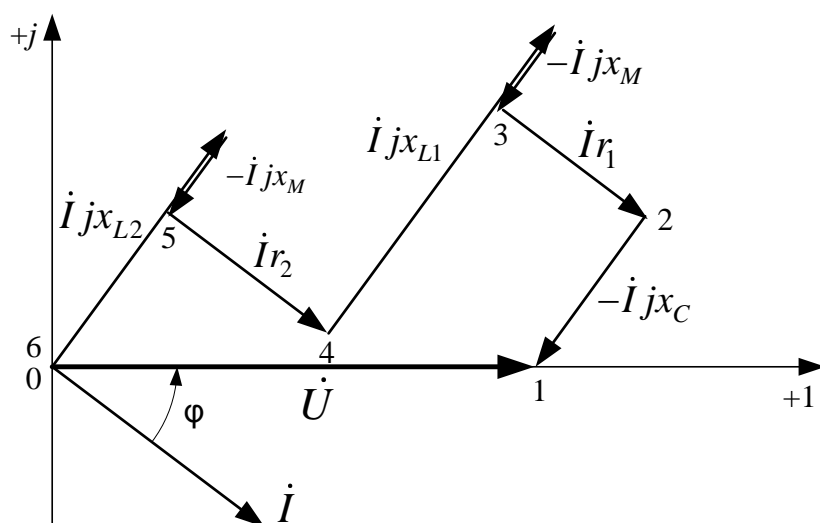


Рис. 3.33. Диаграмма напряжений

П р и м е р 2. К первичной обмотке трансформатора без стального сердечника (рис. 3.34) подведено напряжение  $\dot{U}_1$ , равное 120 В. Параметры схемы:

$$r_1 = 10 \text{ Ом}, \quad \omega L_1 = 42 \text{ Ом}, \quad r_2 = 15 \text{ Ом}, \quad \omega L_2 = 70 \text{ Ом},$$

$$r = 5 \text{ Ом}, \quad \frac{1}{\omega C} = 10 \text{ Ом}, \quad \omega M = 20 \text{ Ом}.$$

Требуется:

а) определить напряжение на нагрузке  $\dot{U}_2$ ;

б) построить векторную диаграмму напряжений в каждом контуре схемы.

**Решение.** Напряжение  $\dot{U}_2$  на нагрузке  $rC$  (см. рис. 3.34) можно вычислить, предварительно определив значения токов  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ . С этой целью составим два уравнения по второму закону Кирхгофа, направив обходы контуров по токам.

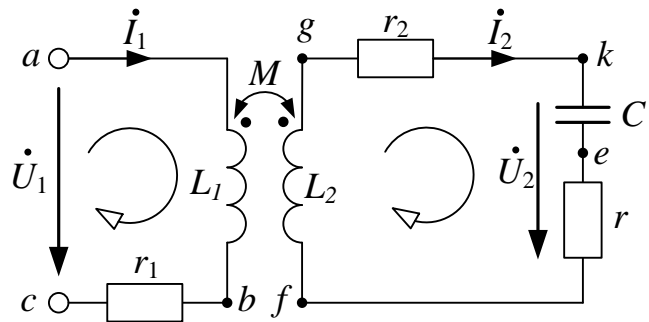


Рис. 3.34. Схема трансформатора

Сравнивая направления токов относительно одноименных зажимов, делаем вывод о том, что включение катушек встречное, поэтому падения напряжения и сопротивление взаимной индукции отрицательные:

$$\begin{cases} j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 + r_1 \dot{I}_1 = \dot{U}_1; \\ j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 + r_2 \dot{I}_2 - j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_2 + r \dot{I}_2 = 0. \end{cases}$$

Упростим приведенные выражения, обозначив собственные сопротивления контуров  $Z_1$  и  $Z_2$  и сопротивление взаимоиндукции  $Z_M$ :

$$Z_1 = j\omega L_1 + r_1;$$

$$Z_2 = j\omega L_2 + r_2 - j \frac{1}{\omega C} + r;$$

$$Z_M = -j\omega M.$$

Тогда система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} Z_1 \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2 = \dot{U}_1; \\ Z_M \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2 = 0. \end{cases}$$

После подстановки в систему численных значений из условия задачи и соответствующих расчетов получаем:

$$\dot{I}_1 = 3,16 e^{-j71,6^\circ};$$

$$\dot{I}_2 = 1 e^{-j53,2^\circ};$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \left( r - j \frac{1}{\omega C} \right); \quad \dot{U}_2 = 11,2 e^{-j116,6^\circ}.$$

Построение векторной диаграммы (рис. 3.35) начинаем с векторов токов  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ . Затем из начала координат по направлению вектора  $\dot{I}_1$  откладываем в масштабе вектор падения напряжения  $r_1 \dot{I}_1$  и под углом  $90^\circ$  – вектор  $j\omega L_1 \dot{I}_1$ . Поскольку включение катушек встречное, вектор  $-j\omega M \dot{I}_2$  падения напряжения взаимной индукции в катушке  $L_1$  от тока  $\dot{I}_2$  отстает от вектора этого тока на угол  $90^\circ$ . Суммирующим является вектор входного напряжения  $\dot{U}_1$ . Аналогично строится векторная диаграмма падений напряжения во втором контуре, где вектор  $-j\omega M \dot{I}_1$  отстает от вектора тока  $\dot{I}_1$  на  $90^\circ$ . Сумма векторов равна нулю.

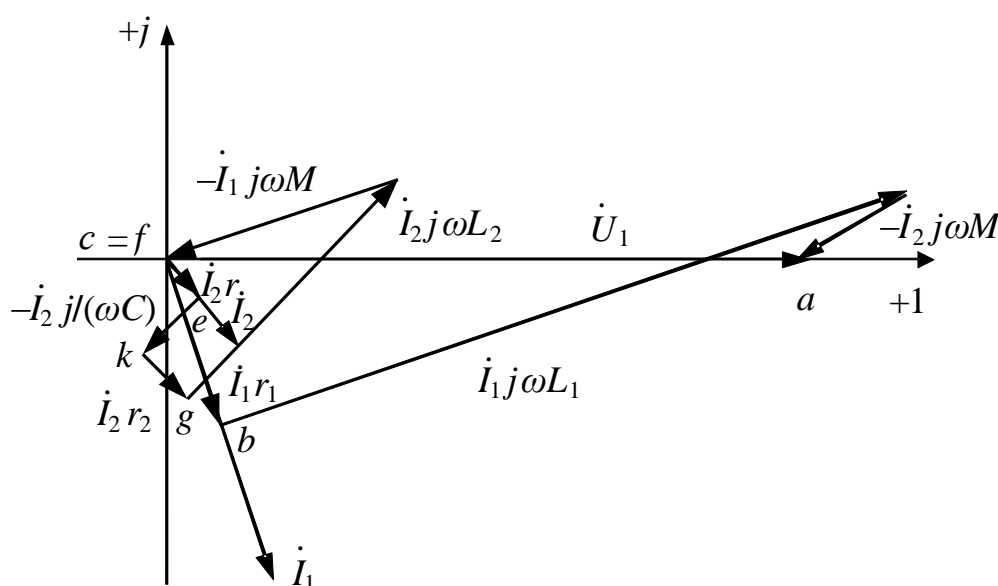


Рис. 3.35. Диаграмма напряжений

### 3.10.5. Задачи для самостоятельного решения

В электрической цепи (рис. 3.36) с двумя синусоидальными ЭДС одна из катушек имеет индуктивные связи с двумя другими катушками.

Требуется составить систему уравнений по законам Кирхгофа для определения комплексных действующих значений токов ветвей.

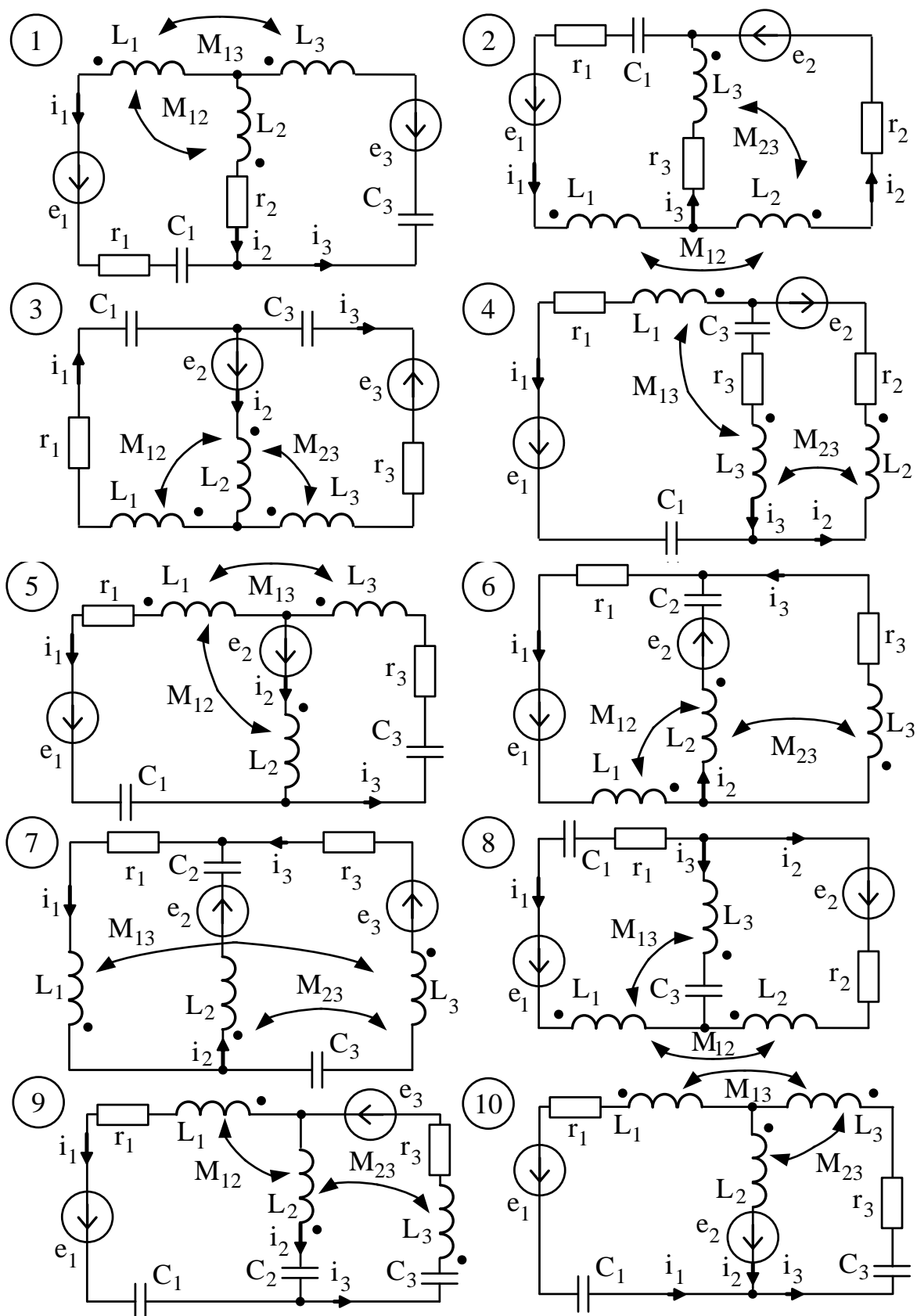


Рис. 3.36. Схемы для формирования индивидуального задания

### 3.11. Резонансные явления в электрических цепях

Резонансные явления могут возникать в электрических цепях, содержащих индуктивности и емкости. Резонанс в цепи с последовательным соединением индуктивности и емкости называют резонансом напряжений, или последовательным резонансом. При параллельном соединении тех же элементов может возникать резонанс токов.

В сложной разветвленной цепи могут иметь место оба вида резонанса.

#### 3.11.1. Резонанс напряжений

Наиболее ярко особенности этого явления проявляются в цепи с последовательным соединением элементов  $r$ ,  $L$  и  $C$  (см. рис. 3.11, а).

Входное комплексное сопротивление этой схемы имеет вид:

$$Z = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{j\varphi}, \quad (3.137)$$

где  $\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}$ .

Изменяя частоту, индуктивность или емкость, можно добиться равенства нулю реактивного сопротивления в составе уравнения (3.137).

Будем считать, что варьируемым параметром является угловая частота  $\omega$ . Изменяя частоту при неизменных значениях индуктивности и емкости, придем к условию

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0, \quad (3.138)$$

которое рассматривается как условие резонанса.

Угловая частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.139)$$

называется **резонансной**.



При резонансе напряжений, как следует из выражения (3.137), входное сопротивление становится чисто активным:

$$Z = r. \quad (3.140)$$

Данное значение является минимальным, поэтому ток  $I$  в схеме становится максимальным.

Кроме того, из уравнения (3.137) также следует, что угол  $\varphi = 0$  и входной ток цепи совпадает по фазе с напряжением.

*Совпадение по фазе входного напряжения и тока является основным признаком наличия резонанса не только в рассматриваемом контуре, но и в любой другой цепи.*

Напряжения  $U_L$  и  $U_C$  при последовательном соединении элементов  $L$  и  $C$  находятся в противофазе, т. е. сдвинуты одно относительно другого на  $180^\circ$ . Если  $x_L \neq x_C$ , их амплитуды и действующие значения неодинаковы. При выполнении условия резонанса  $x_L = x_C$  амплитудные значения становятся одинаковыми. Отсюда и название **«резонанс напряжений»**.

Векторная диаграмма, изображенная на рис. 3.11, б, в режиме резонанса напряжений превращается в диаграмму, приведенную на рис. 3.37.

На этой диаграмме напряжения  $U_{L0}$  и  $U_{C0}$  равны друг другу, поэтому падение напряжения на сопротивлении  $r$  равно приложенному напряжению  $U$ . Последнее по фазе совпадает с током  $I$ , и цепь относительно входных зажимов воспринимается как чисто активная. Такой эффект является следствием взаимной компенсации напряжений  $U_{L0}$  и  $U_{C0}$ , но не их исчезновения. Как и в любом другом режиме, процессы в индуктивности связаны с магнитным полем, а в емкости – с электрическим. В индуктивности периодические изменения энергии магнитного поля определяются формулой (1.14):

$$W_m = \frac{1}{2} Li^2. \quad (3.141)$$

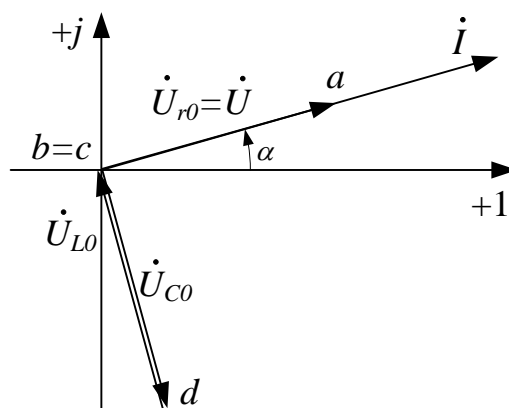


Рис. 3.37. Векторная диаграмма резонанса напряжений

В емкости энергия изменяется согласно выражению (1.18):

$$W_э = \frac{1}{2} C u_C^2. \quad (3.142)$$

В произвольном режиме энергии  $W_m$  и  $W_э$  в любой момент отличаются по величине, т. е. не компенсируются. Преобладание той или иной из них определяет режим схемы в том смысле, что относительно входных зажимов цепь может восприниматься как активно-индуктивная или как активно-емкостная. Векторная диаграмма на рис. 3.11, б отражает случай активно-индуктивной реакции цепи, поскольку на ней  $U_L > U_C$  и входное напряжение  $U$  опережает входной ток  $I$ . При резонансе (см. рис. 3.37) напряжения  $U_L$  и  $U_C$  одинаковы. Соответственно одинаковы и периодические составляющие энергий  $W_m$  и  $W_э$ , которые взаимно компенсируются. В итоге на входных зажимах цепь воспринимается как активная, хотя каждый из элементов  $L$  и  $C$  сохраняет свои энергетические параметры, как и падения напряжений  $U_L$  и  $U_C$ .

Реактивные сопротивления при резонансе имеют следующие значения:

$$\begin{cases} \omega_0 L = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \sqrt{\frac{L^2}{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}}; \\ \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{LC}{C^2}} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \end{cases} \quad (3.143)$$

Величина  $\sqrt{\frac{L}{C}}$  обозначается буквой  $\rho$  и называется **характеристическим** или **волновым сопротивлением контура**,

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.144)$$

Отношение

$$Q = \frac{\rho}{r} \quad (3.145)$$

есть величина, которая называется **добротностью контура**. Эта величина характеризует соотношение между реактивными и активным сопротивлениями в резонансном режиме. В такой же мере добротность характеризует и соотношение между напряжениями:

$$\begin{cases} \frac{U_{L0}}{U_{r0}} = \frac{\omega_0 L I_0}{r I_0} = \frac{\rho}{r} = Q = \frac{U_{L0}}{U}; \\ \frac{U_{C0}}{U_{r0}} = \frac{I_0}{\omega_0 C r I_0} = \frac{\rho}{r} = Q = \frac{U_{C0}}{U}. \end{cases} \quad (3.146)$$

Понятие добротности широко используется в теории фильтров как один из основных параметров оценки их качества.

На рис. 3.38 изображены две векторные диаграммы для резонансного режима.

Диаграмма, приведенная на рис. 3.38, *а*, соответствует значению добротности  $Q < 1$ . Диаграмма на рис. 3.38, *б* характеризуется значением  $Q > 1$ . В первом случае реактивные напряжения  $U_{L0}$  и  $U_{C0}$  меньше входного напряжения, во втором – больше. Следовательно, добротность  $Q$  является числовой оценкой кратности напряжений. Например, если имеем значение  $Q = 2$ , то это означает, что

$$\frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U} = 2 \quad (3.147)$$

и падения напряжений на индуктивности и емкости в два раза превышают приложенное напряжение.

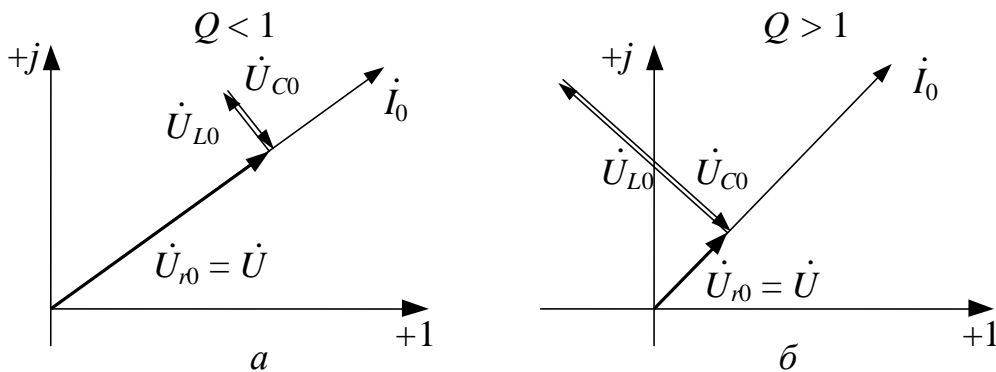


Рис. 3.38. Резонанс напряжений при различных значениях добротности  $Q$ :  
 $a - Q < 1$ ;  $б - Q > 1$

При исследовании резонансных свойств электрических цепей широко используются частотные характеристики, т. е. зависимости токов, напряжений и других физических величин от угловой частоты  $\omega$ . При этом распространено построение графиков в относительных координатах. При построении зависи-

мости, например, тока от частоты в качестве независимой переменной вместо  $\omega$  берется относительная частота  $\omega'$ , равная  $\omega/\omega_0$ , а вместо тока  $I$  – отношение  $I/I_0$ , где  $\omega_0$  и  $I_0$  – соответственно резонансные значения частоты и тока. При таком подходе легче сравнивать характеристики, имеющие место при различных параметрах резонансного контура.

На рис. 3.39 в относительных координатах воспроизведены кривые  $\frac{I}{I_0} = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$  для двух значений добротностей –  $Q_1$  и  $Q_2$ .

Рассматриваемый последовательный резонансный контур характеризуется свойствами полосового фильтра. В определенной полосе частот входное сопротивление контура мало, что обуславливает значения тока, приближающиеся к максимальному значению  $I = U/r$ . Такая полоса частот называется **полосой пропускания**, или **полосой прозрачности фильтра**.

Ширина полосы пропускания определяется точками пересечения резонансных кривых с прямой, соответствующей значению тока  $I_{\Pi} = 0,707 I_0 = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ . При данном значении тока мощность, теряемая в сопротивлении  $r$ , равна половине потерь мощности при резонансе:  $I_{\Pi}^2 r = 0,5 I_0^2 r$ .

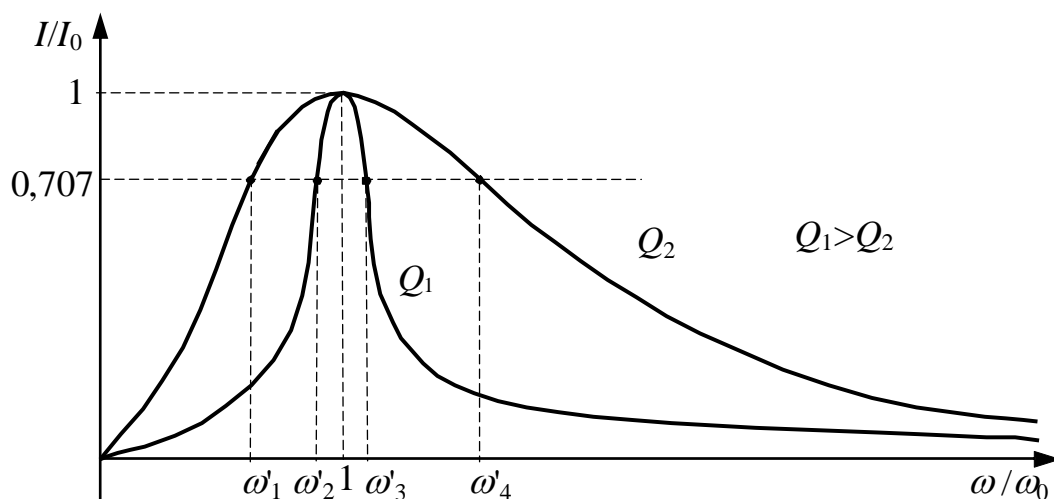


Рис. 3.39. Характеристики резонанса в относительных координатах

На рис. 3.39 первой кривой соответствует узкая полоса пропускания  $\omega'_2 \div \omega'_3$ , у второй кривой полоса пропускания  $\omega'_1 \div \omega'_4$  значительно шире, по-

этому закономерен следующий вывод: **чем выше добротность, тем уже полоса пропускания.**

Есть еще понятие **избирательности резонансного контура** как фильтра. Чем уже полоса пропускания, тем выше избирательность фильтра. Следовательно, значение добротности непосредственно определяет качество фильтра по отмеченному критерию – способности выделять полезный сигнал, в данном случае ток, в более узком диапазоне частот.

Наконец, легко показать, что в диапазоне частот от нулевой до резонансной рассматриваемая схема имеет активно-емкостный характер, а при частоте, превышающей резонансную частоту  $\omega_0$ , – активно-индуктивный. Так, при частоте  $\omega = 0$  емкостное сопротивление  $\frac{1}{\omega C} = \infty$ . Ток в схеме при этом равен нулю, напряжение источника приложено только к емкости и угол сдвига фаз  $\varphi = -\pi/2$ . При увеличении частоты до значения  $\omega = \omega_0$  значение  $\varphi$  стремится к нулю. При дальнейшем увеличении частоты знак угла  $\varphi$  изменяется на положительный и в пределе при  $\omega = \infty$  становится чисто индуктивным, т. е.  $\varphi = \pi/2$ . Следовательно, резонансная частота  $\omega = \omega_0$  является точкой раздела между отрицательными и положительными значениями угла сдвига фаз. В диапазоне частот  $0 \div \omega_0$  напряжение по фазе отстает от тока, при  $\omega > \omega_0$ , наоборот, напряжение опережает ток.

### 3.11.2. Резонанс токов

Особенности резонанса токов (параллельного резонанса) удобно рассматривать на примере схемы, изображенной на рис. 3.12, а, с параллельным соединением элементов  $r$ ,  $L$ ,  $C$ .

В соответствии с выражениями (3.74) – (3.76) входная комплексная проводимость схемы

$$Y = g - j(b_L - b_C) = g - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = ye^{-j\varphi}, \quad (3.148)$$

где  $y = \sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$ ;  $\varphi = \arctg \frac{b_L - b_C}{g}$ .

При резонансной частоте  $\omega = \omega_0$  реактивная проводимость принимает нулевое значение:

$$\frac{1}{\omega_0 L} - \omega_0 C = 0, \quad (3.149)$$

откуда резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3.150)$$

На векторной диаграмме (рис. 3.40) ток  $I_{L0}$  отстает от напряжения на  $90^\circ$ , а ток  $I_{C0}$  опережает напряжение на  $90^\circ$ . Действующие значения этих токов равны между собой, поэтому их сумма равна нулю.

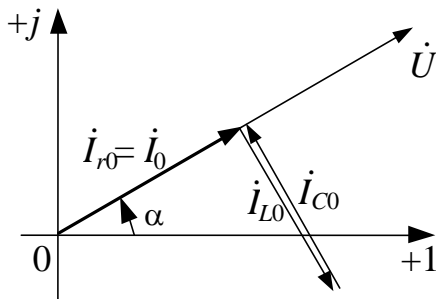


Рис. 3.40. Векторная диаграмма резонанса токов

Входной ток схемы  $I_0$  равен току ветви с активным сопротивлением  $I_{r0}$ .

Угол сдвига фаз  $\varphi$  равен нулю. В итоге входной ток цепи по фазе совпадает с входным напряжением и выполняется сформулированное в п. 3.11.1 условие резонанса.

Проводимость  $g = 1/r$  есть минимальное значение входной проводимости (максимальное значение входного сопротивления). Поэтому при резонансе токов входной ток схемы в отличие от резонанса напряжений принимает минимальное значение:

$$I_0 = I_{r0} = gU. \quad (3.151)$$

При нулевой частоте ( $\omega = 0$ ) сопротивление индуктивной ветви схемы на рис. 3.12, а равно нулю ( $\omega L = 0$ ), поэтому весь ток проходит только по этой ветви, имеет индуктивный характер и теоретически бесконечен. Вследствие этого левая ветвь кривой  $I(\omega)$  на рис. 3.41 начинается в бесконечности, а начало кривой угла сдвига фаз соответствует значению  $\varphi = \pi/2$ . В режиме резонанса ток имеет минимальное значение, а угол сдвига фаз равен нулю. В области изменения частоты от нуля до  $\omega_0$  схема на входных зажимах воспринимается как активно-индуктивная. При частоте  $\omega > \omega_0$  преобладает ток емкостной ветви, поэтому схема воспринимается как активно-емкостная.

Рассмотрим далее значения реактивных проводимостей при резонансной частоте  $\omega_0$ :

$$\begin{cases} b_{L0} = \frac{1}{\omega_0 L} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{LC}} L} = \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{1}{\rho}; \\ b_{C0} = \omega_0 C = \frac{C}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{\rho}. \end{cases} \quad (3.152)$$

Добротность цепи в данном случае определяется как отношение реактивных проводимостей к активной или как отношение тока в индуктивности (емкости) к входному току:

$$\begin{cases} Q = \frac{b_{L0}}{g} = \frac{1/\rho}{1/r} = \frac{r}{\rho} = \frac{I_{L0}}{I_0}; \\ Q = \frac{b_{C0}}{g} = \frac{1/\rho}{1/r} = \frac{r}{\rho} = \frac{I_{C0}}{I_0}. \end{cases} \quad (3.153)$$

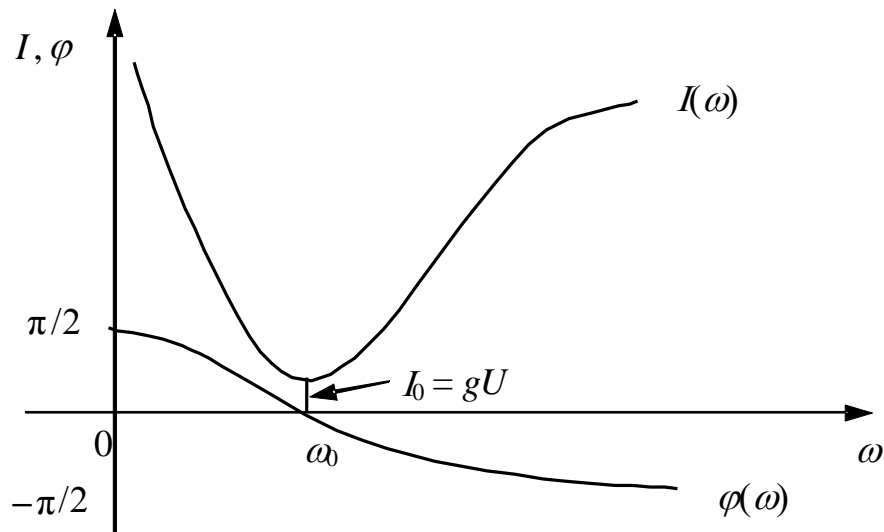


Рис. 3.41. Частотные характеристики при резонансе токов

В итоге получили формулу добротности

$$Q = \frac{r}{\rho}, \quad (3.154)$$

которая выглядит как обратная по отношению к аналогичной формуле для последовательной цепи.

Добротность цепи характеризует соотношение между токами индуктивной и емкостной ветвей и током через ветвь с сопротивлением  $r$  (входным током). Если  $Q < 1$ , то реактивные токи  $I_{L0}$  и  $I_{C0}$  при резонансе меньше активного  $I_{r0}$ . Значение  $Q > 1$  показывает кратность превышения реактивных токов по отношению к активному.

Схема на рис. 3.12, а с параллельным соединением элементов  $r$ ,  $L$ ,  $C$  имеет характеристики так называемого заграждающего (режекторного) фильтра. В области частот, примыкающей к резонансной, входное сопротивление цепи максимально, поэтому ток минимален, откуда и название «заграждающий фильтр». Добротность, как и в предыдущем случае, влияет на форму кривой  $I(\omega)$  и другие характеристики фильтра.

### *3.11.3. Резонанс в электрических цепях произвольной структуры*

В практике используются более сложные схемы электрических фильтров и другие электрические цепи, содержащие различное количество реактивных элементов. В области электрических фильтров явление резонанса используется как полезное или необходимое явление. Однако в других областях резонанс может возникать как нежелательное явление, приводящее к повышенным значениям напряжения или тока. При высоких значениях добротности электрических цепей, т. е. в цепях с малыми потерями в активных сопротивлениях, напряжение и ток в резонансных режимах могут достигать опасных значений. Поэтому понимание резонансных свойств той или иной электрической системы является важной задачей.

Во всех случаях в качестве критерия наличия резонансного режима выступает условие совпадения начальных фаз входных напряжения и тока исследуемой электрической цепи. С этим условием согласуется условие обращения в ноль реактивной составляющей входного комплексного сопротивления (проводимости) электрической цепи. Поэтому исходным этапом математического исследования резонансных свойств любой электрической цепи является выделение из состава комплексного входного сопротивления (проводимости) реактивной составляющей и приравнивание ее к нулю.

В целом расчет проводится с реализацией следующих этапов.

1. Записывается входное сопротивление или входная проводимость цепи.
2. Входное сопротивление (проводимость) разделяется на действительную и мнимую части.



3. Выделяется реактивное сопротивление (проводимость) цепи (мнимая часть) и приравняется к нулю.

4. Полученное уравнение решается относительно искомой неизвестной (частоты, индуктивности, емкости, сопротивления).

Как правило, первым этапом решения является вычисление резонансных частот, поскольку реализация именно этого этапа отвечает на вопрос, возможны в данной цепи резонансы или нет.

В цепях с двумя реактивными элементами определяется и исследуется одна резонансная частота.

Для цепей с тремя реактивными элементами определяются и исследуются две резонансные частоты. Количество резонансных частот возрастает с увеличением числа реактивных элементов (индуктивных и емкостных).

### 3.11.3.1. Резонанс в цепях с двумя реактивными элементами

На рис. 3.42 изображена группа схем, в которых индуктивность и емкость включены последовательно или находятся в составе последовательного соединения двухэлементных участков схем.

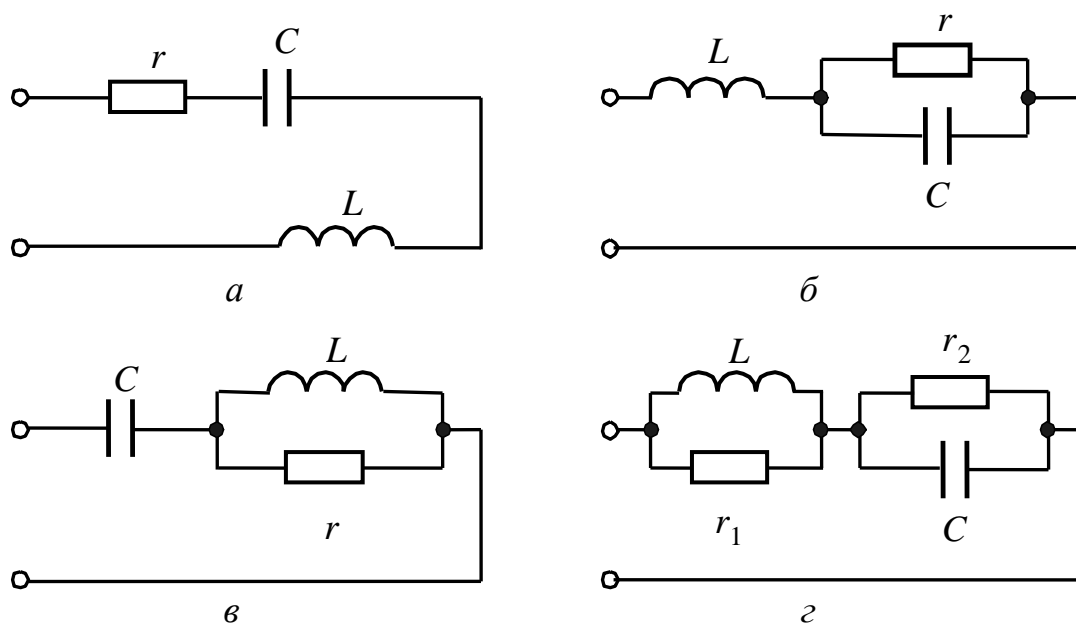


Рис. 3.42. Схемы, в которых возможен резонанс напряжений

Схема, представленная на рис. 3.42, а, уже рассмотрена в п. 3.11.1, где и выявлены особенности, характеризующие резонанс напряжений. В остальных

схемах также может возникать только резонанс напряжений в силу отмеченной их структуры. В качестве примера рассмотрим схему на рис. 3.42, б.

Входное сопротивление схемы на рис. 3.42, б

$$Z = j\omega L + \frac{r \left( -j \frac{1}{\omega C} \right)}{r - j \frac{1}{\omega C}}. \quad (3.155)$$

Преобразуем выражение (3.155), умножая числитель и знаменатель на сопряженный комплекс знаменателя:

$$Z = j\omega L + \frac{r \left( -j \frac{1}{\omega C} \right) \left( r + j \frac{1}{\omega C} \right)}{\left( r - j \frac{1}{\omega C} \right) \left( r + j \frac{1}{\omega C} \right)} = j\omega L + \frac{-j \frac{r^2}{\omega C} + \frac{r}{\omega^2 C^2}}{r^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}. \quad (3.156)$$

Далее осуществляется разделение действительной и мнимой частей выражения (3.156):

$$Z = \frac{r}{r^2 \omega^2 C^2 + 1} + j \left( \omega L - \frac{r^2 \omega C}{r^2 \omega^2 C^2 + 1} \right). \quad (3.157)$$

Для определения резонансной частоты мнимая часть уравнения (3.157) приравнивается к нулю:

$$\omega_0 L - \frac{r^2 \omega_0 C}{r^2 \omega_0^2 C^2 + 1} = 0. \quad (3.158)$$

В итоге получается алгебраическое уравнение второй степени относительно резонансной частоты  $\omega_0$ :

$$r^2 L C^2 \omega_0^2 + L - r^2 C = 0. \quad (3.159)$$

Решение уравнения (3.159) имеет вид:

$$\omega_0 = \pm \sqrt{\frac{r^2 C - L}{r^2 L C^2}}. \quad (1.160)$$

Резонансная частота – реальный физический параметр, поэтому положительный ответ о наличии резонанса напряжений дает только положительное, действительное значение корня. Следовательно, окончательно используем значение

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{r^2 C - L}{r^2 L C^2}}, \quad (3.161)$$

которое указывает на то, что резонанс в исследуемой схеме возможен при выполнении условия  $r^2 C > L$ . Если это условие не выполняется, то числитель подкоренного выражения будет отрицательным, а корень, соответственно, мнимым.

Рассмотрим схему на рис. 3.42, б при следующих числовых значениях параметров:  $\dot{U} = 10$  В,  $r = 100$  Ом,  $L = 0,01$  Гн,  $C = 10^{-4}$  Ф. Расчетная схема для резонанса напряжений представлена на рис. 3.43.

Резонансная частота определяется в соответствии с формулой (3.161) так:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{r^2 C - L}{r^2 L C^2}}; \quad (3.162)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{10^4 \cdot 10^{-4} - 0,01}{10^4 \cdot 0,01 \cdot 10^{-8}}} = 995 \text{ рад/с.}$$

Получили действительное положительное значение, следовательно, при данной частоте и заданных параметрах  $r$ ,  $L$ ,  $C$  в схеме, изображенной на рис. 3.43, имеет место резонанс напряжений. Чтобы разобраться в особенностях данного резонанса, необходимо провести расчет токов и построить векторную диаграмму.

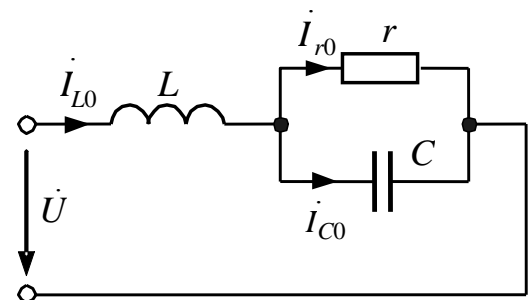


Рис. 3.43. Расчетная схема для резонанса напряжений

Входное сопротивление при резонансной частоте  $\omega_0$  согласно формуле (3.157) можно вычислить так:

$$Z_0 = \frac{r}{r^2 \omega_0^2 C^2 + 1}, \quad (3.163)$$

$$Z_0 = \frac{100}{10^4 \cdot 10^{-8} \cdot 995^2 + 1} = 0,995 \text{ Ом};$$

резонансные значения токов:

$$\dot{I}_{L0} = \frac{\dot{U}}{Z_0}, \quad (3.164)$$

$$\dot{I}_{L0} = \frac{10e^{j0}}{0,995} = 10,05 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{r0} = \dot{I}_0 \frac{r \left( -j \frac{1}{\omega_0 C} \right)}{r - j \frac{1}{\omega_0 C}} \frac{1}{r} = \dot{I}_0 \frac{-j \frac{1}{\omega_0 C}}{r - j \frac{1}{\omega_0 C}}, \quad (3.165)$$

$$\dot{I}_{r0} = 10,05 \frac{-j10,05}{100 - j10,05} = 1,005e^{-j84,26^\circ};$$

$$\dot{I}_{C0} = \dot{I}_0 \frac{r \left( -j \frac{1}{\omega_0 C} \right)}{r - j \frac{1}{\omega_0 C}} \frac{1}{-j \frac{1}{\omega_0 C}} = \dot{I}_0 \frac{r}{r - j \frac{1}{\omega_0 C}}, \quad (3.166)$$

$$\dot{I}_{C0} = 10,05 \frac{100}{100 - j10,05} = 10e^{j5,74^\circ};$$

падения напряжения:

$$\dot{U}_{L0} = \dot{I}_{L0} j \omega_0 L, \quad (3.167)$$

$$\dot{U}_{L0} = 10,05 \cdot 995 \cdot 0,01e^{j90^\circ} = 99,9e^{j90^\circ};$$

$$\dot{U}_{r0} = \dot{U}_{C0} = \dot{I}_{C0} \left( -j \frac{1}{\omega_0 C} \right), \quad (3.168)$$

$$\dot{U}_{C0} = 10e^{j5,74^\circ} \cdot 10,05e^{-j90^\circ} = 100,5e^{-j84,26^\circ}.$$

По полученным данным построена векторная диаграмма (рис. 3.44), характеризующая резонансный режим в схеме на рис. 3.43.

Особенности приведенной векторной диаграммы сводятся к следующему.

Напряжение  $U$  и ток  $I_{L0}$  совпадают по фазе.

Реактивные напряжения  $U_{L0}$  и  $U_{C0}$  в отличие от схемы на рис. 3.42, *a* не находятся в противофазе, т. е. сдвинуты одно относительно другого на угол, не равный  $180^\circ$ . Поэтому полная компенсация этих напряжений невозможна. В противофазе находятся напряжение  $U_{L0}$  и составляющая  $U'_{C0}$  напряжения  $U_{C0}$ . Кроме того, имеет место равенство между  $U_{L0}$  и  $U'_{C0}$ .

В результате можно сказать, что условие резонанса напряжений в данной схеме обеспечивается напряжениями  $U_{L0}$  и  $U'_{C0}$ .

Наконец, можно отметить, что рассматриваемая векторная диаграмма соответствует схеме с достаточно высокой добротностью:

$$Q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U'_{C0}}{U} \approx 10, \quad (3.169)$$

т. е. напряжения на реактивных элементах  $L$  и  $C$  примерно в 10 раз превышают приложенное напряжение.

В схемах на рис. 3.45 индуктивность и емкость находятся в параллельных ветвях, поэтому, как уже показано для схемы рис. 3.45, *a*, в этих схемах возможен резонанс токов.

Обратимся к схеме на рис. 3.45, *б* и, учитывая ее структуру, запишем выражение для расчета комплексной проводимости, выделяя действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{r + j\omega L} + j\omega C = \frac{r - j\omega L}{r^2 + \omega^2 L^2} + j\omega C = \\ &= \frac{r}{r^2 + \omega^2 L^2} - j \left( \frac{\omega L}{r^2 + \omega^2 L^2} - \omega C \right). \end{aligned} \quad (3.170)$$

Приравнивая мнимую часть выражения (3.170) к нулю, приходим к уравнению

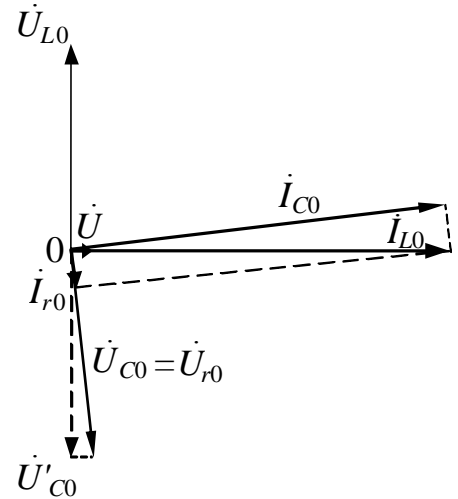


Рис. 3.44. Диаграммы напряжений и токов при резонансе

$$L^2 C \omega_0^2 + r^2 C - L = 0, \quad (3.171)$$

корень которого

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{L - r^2 C}{L^2 C}} \quad (3.172)$$

указывает на возможность резонанса токов при выполнении условия  $L - r^2 C > 0$ .

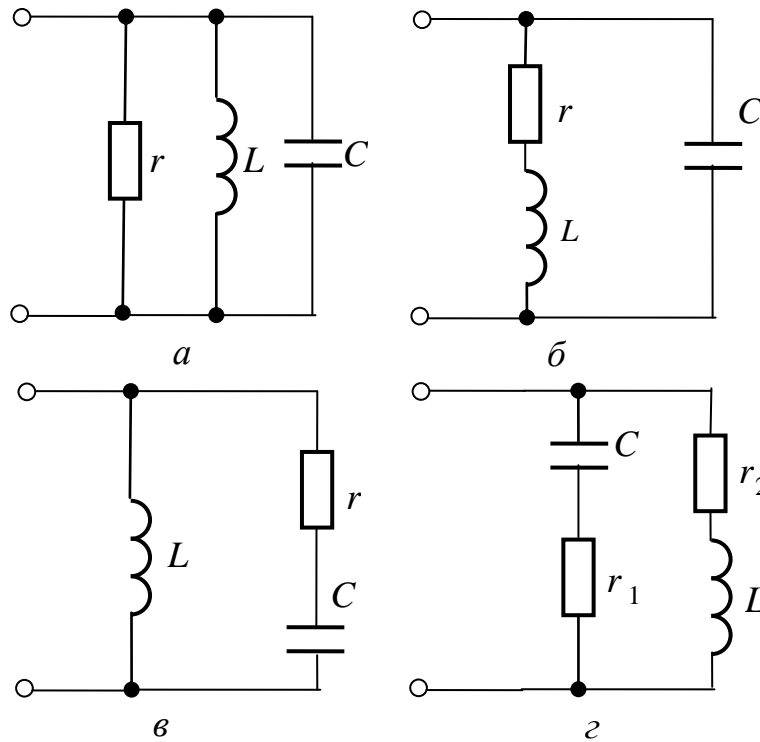


Рис. 3.45. Схемы, в которых возможен резонанс токов

Можно было бы убедиться в том, что использование в качестве исходного выражения формулы для расчета комплексного сопротивления

$$Z = \frac{(r + j\omega L) \left( -j \frac{1}{\omega C} \right)}{r + j\omega L - j \frac{1}{\omega C}} \quad (3.173)$$

приводит к тому же уравнению (3.171) относительно резонансной частоты и к тому же значению корня этого уравнения (3.172). Однако преобразования при этом более сложные, поэтому в схемах с параллельными ветвями предпочтение отдается комплексной проводимости.

Для выявления особенностей исследования резонанса токов в схеме на рис. 3.45, б снова обратимся к числовым значениям параметров:  $r = 50 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,05 \text{ Гн}$ ,  $C = 10^{-5} \text{ Ф}$ ,  $\dot{U} = 100 \text{ В}$ . Расчетная схема для резонанса токов изображена на рис. 3.46.

Расчет приводится в комплексной форме.

Резонансная частота в соответствии с формулой (3.172) определяется так:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{L - r^2 C}{L^2 C}}, \quad (3.174)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{0,05 - 50^2 \cdot 10^{-5}}{0,05^2 \cdot 10^{-5}}} = 10^3 \text{ рад/с}.$$

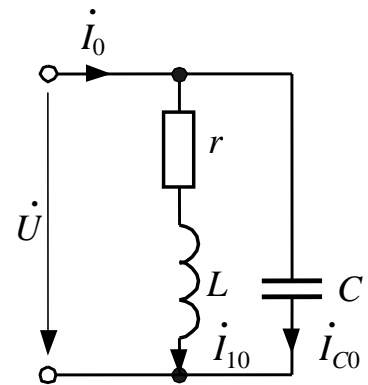


Рис. 3.46. Расчетная схема для резонанса токов

Входная проводимость схемы при частоте  $\omega_0$  согласно формуле (3.170) рассчитывается по выражению:

$$Y_0 = \frac{r}{r^2 + \omega_0^2 L^2}, \quad (3.175)$$

$$Y_0 = \frac{50}{50^2 + 10^6 \cdot 0,05^2} = 0,01 \text{ См}.$$

Резонансные значения токов в ветвях схемы (см. рис. 3.46) вычисляются по следующим формулам:

$$\dot{I}_0 = Y_0 \dot{U}, \quad (3.176)$$

$$\dot{I}_0 = 0,01 \cdot 100 e^{j0} = 1 \text{ А};$$

$$\dot{I}_{10} = \frac{\dot{U}}{r + j\omega_0 L}, \quad (3.177)$$

$$\dot{I}_{10} = \frac{100 e^{j0}}{50 + j50} = 1,41 e^{-j45^\circ};$$

$$\dot{I}_{C0} = \frac{\dot{U}}{-j \frac{1}{\omega_0 C}}, \quad (3.178)$$

$$\dot{I}_{C0} = \frac{100}{-j100} = 1e^{j90^\circ}.$$

Падения напряжения вычисляются по уравнениям:

$$\begin{cases} \dot{I}_{10}r = 1,41e^{-j45^\circ} \cdot 50 = 70,5e^{-j45^\circ}; \\ \dot{I}_{10}j\omega_0L = 1,41e^{-j45^\circ} \cdot 50e^{j90^\circ} = 70,5e^{j45^\circ}. \end{cases} \quad (3.179)$$

Соответствующая расчету векторная диаграмма приведена на рис. 3.47.

В данном случае токи параллельных ветвей  $I_{10}$  и  $I_{C0}$  не находятся в противофазе, а потому не могут компенсировать друг друга. Резонанс токов здесь обуславливается равенством между емкостным током  $I_{C0}$  и реактивной составляющей  $I'_{10}$  тока  $I_{10}$ . В результате выполняется также основное условие наличия резонанса – совпадение по фазе входного тока схемы  $I_0$  и приложенного напряжения  $U$ .

Числовые параметры схемы выбраны так, что из равенства  $Q = I_{C0}/I_0 = I'_{10}/I_0 = 1$  следует, что цепь не является высокодобротной.

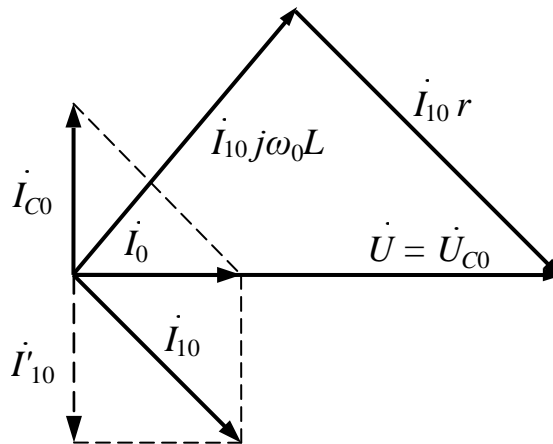


Рис. 3.47. Диаграммы токов и напряжений при резонансе

### 3.11.3.2. Резонанс в цепях с произвольным количеством реактивных элементов

С возрастанием числа индуктивных и емкостных элементов в схемах резко увеличивается объем математических преобразований и вычислений, поэто-



му в качестве объекта для изучения возьмем схему с тремя реактивными элементами, изображенную на рис. 3.48.

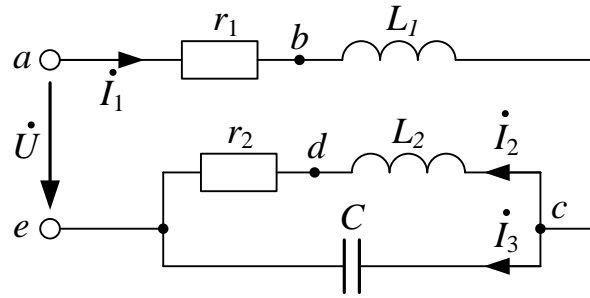


Рис. 3.48. Схема с тремя реактивными элементами

Исследование явления резонанса в цепях, содержащих три реактивных элемента и более, проводится аналогично: при резонансе входное сопротивление (проводимость) цепи должно стать чисто активным. Задача чаще всего сводится к определению резонансных частот и построению, если в том есть необходимость, частотных зависимостей реактивных сопротивлений (проводимостей) от частоты.

Входное комплексное сопротивление имеет вид:

$$Z = r_1 + j\omega L_1 + \frac{(r_2 + j\omega L_2) \left( -j \frac{1}{\omega C} \right)}{r_2 + j\omega L_2 - j \frac{1}{\omega C}}. \quad (3.180)$$

После разделения действительной и мнимой частей  $Z$  приходим к выражению:

$$Z = r_1 + \frac{\frac{r_2 L_2}{C} - \frac{r_2}{\omega C} \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right)}{r_2^2 + \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right)^2} + j \left[ \omega L_1 - \frac{\frac{r_2^2}{\omega C} + \frac{L_2}{C} \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right)}{r_2^2 + \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \right]. \quad (3.181)$$

Далее используется только мнимая часть выражения (3.181). Приравнивая ее к нулю и подставляя в полученное выражение  $\omega = \omega_0$ , получаем уравнение

$$\omega_0 L_1 r_2^2 + \omega_0 L_1 \left( \omega_0 L_2 - \frac{1}{\omega_0 C} \right)^2 - \frac{r_2^2}{\omega_0 C} - \frac{L_2}{C} \left( \omega_0 L_2 - \frac{1}{\omega_0 C} \right) = 0, \quad (3.182)$$

корни которого определяют резонансные частоты.

Положительный ответ на вопрос о возможности возникновения того или иного резонанса, как уже указывалось, дают только положительные действительные корни уравнения (3.182). Любые другие типы корней (отрицательные действительные или комплексные) указывают на отсутствие резонанса в рассматриваемой схеме.

Например, при численных значениях параметров схемы (см. рис. 3.48)  $r_1 = 23 \text{ Ом}$ ,  $L_1 = 0,274 \text{ Гн}$ ,  $r_2 = 35 \text{ Ом}$ ,  $L_2 = 0,340 \text{ Гн}$ ,  $C = 20 \text{ мкФ}$  уравнение (3.182) приобретает вид:

$$\omega_0^4 - 46,6 \cdot 10^4 \omega_0^2 + 465 \cdot 10^8 = 0. \quad (3.183)$$

Корни уравнения (3.183) имеют следующие значения:  $\omega_{01} = \pm 380 \text{ рад/с}$  и  $\omega_{02} = \pm 566 \text{ рад/с}$ .

Из полученных корней два действительные, положительные, следовательно, можно сделать вывод о том, что в схеме наблюдаются резонансы при двух значениях частот:  $\omega_{01} = 380 \text{ рад/с}$  и  $\omega_{02} = 566 \text{ рад/с}$ .

Удобство использования комплексного сопротивления или проводимости определяется топологией схемы, а решение уравнений  $x = 0$  или  $b = 0$  приводит к одинаковым результатам.

Чтобы ответить на вопрос о типе того или иного резонанса, необходимо дополнительно провести расчет режимов схемы при полученных резонансных частотах. На рис. 3.49 и 3.50 представлены векторные диаграммы, построенные по результатам расчета токов и напряжений для схемы рис. 3.48 при входном напряжении  $U = 2 \text{ В}$  на частотах  $\omega_{01} = 380 \text{ рад/с}$  и  $\omega_{02} = 566 \text{ рад/с}$ .

Результаты расчета при  $\omega_{01} = 380 \text{ рад/с}$ :

$$\dot{I}_1 = 0,00386e^{j0^\circ}; \quad \dot{I}_2 = 0,0146e^{-j86,1^\circ}; \quad \dot{I}_3 = 0,0148e^{j78,7^\circ}.$$

Резонанс токов при частоте  $\omega_{01} = 380 \text{ рад/с}$  (см. рис. 3.49) обусловлен токами параллельных ветвей  $I_2$  и  $I_3$ , но, как и ранее, эти токи не находятся в противофазе, поэтому полностью компенсируются реактивные составляющие этих токов  $I'_2$  и  $I'_3$ , которые относительно входного напряжения  $U$  сдвинуты на  $90^\circ$ .

Составляющая  $I'_2$  отстает от  $U$  на  $90^\circ$ , а  $I'_3$  опережает, поскольку первая обусловлена индуктивностью, а вторая емкостью.

В режиме резонанса реактивные токи превышают по величине входной ток схемы:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{0,0146}{0,00389} = 3,75; \quad \frac{I_3}{I_1} = \frac{0,0148}{0,00389} = 3,8,$$

следовательно, добротность цепи при частоте  $\omega_{01}$ , равной 380 рад/с, можно оценивать значением  $Q \approx 3,8$ .

Результаты расчета при  $\omega_{02} = 566$  рад/с:

$$\dot{I}_1 = 0,0441e^{j0^\circ}; \quad \dot{I}_2 = 0,0354e^{-j161,4^\circ}; \quad \dot{I}_3 = 0,0782e^{j8,2^\circ}.$$

В случае резонанса напряжений, имеющего место при  $\omega_{02} = 566$  рад/с, как видно из диаграммы на рис. 3.50, полностью компенсируются падение напряжения  $U_{L1}$  и составляющая  $U'_C$  напряжения на емкости  $U_C$ , в результате чего обеспечивается нулевой сдвиг по фазе между входным напряжением  $U$  и входным током  $I_1$ .

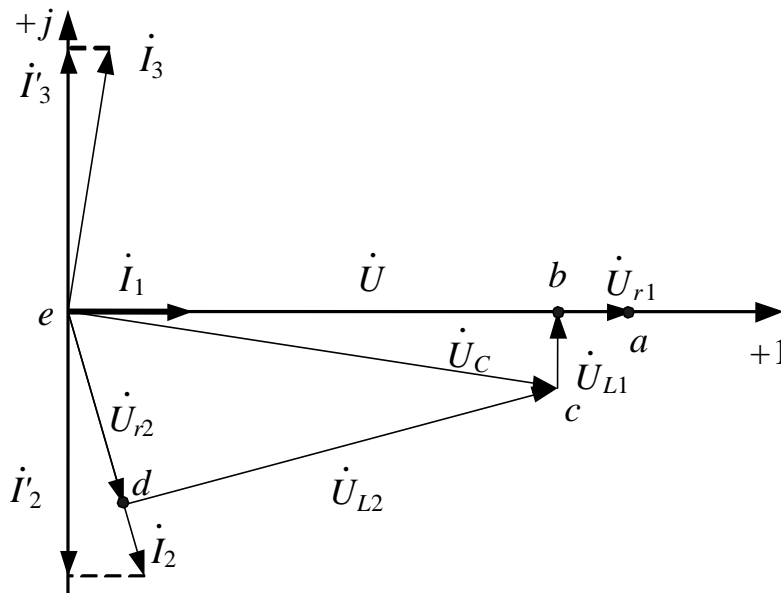


Рис. 3.49. Диаграммы токов и напряжений при  $\omega_{01}$  (резонанс токов)

При численных значениях параметров схемы на рис. 3.48  $r_1 = 23 \text{ Ом}$ ,  $L_1 = 0,274 \text{ Гн}$ ,  $r_2 = 35 \text{ Ом}$ ,  $L_2 = 0,340 \text{ Гн}$ ,  $C = 1000 \text{ мкФ}$  уравнение (3.182) приобретает вид:

$$\omega_0^4 + 1066\omega_0^2 - 19,29 \cdot 10^6 = 0, \quad (3.184)$$

и его корни –  $\omega_{01} = \pm 61,7$  и  $\omega_{02} = \pm j70,1$ , что говорит о наличии одной резонансной частоты  $\omega_0 = 61,7 \text{ рад/с}$ .

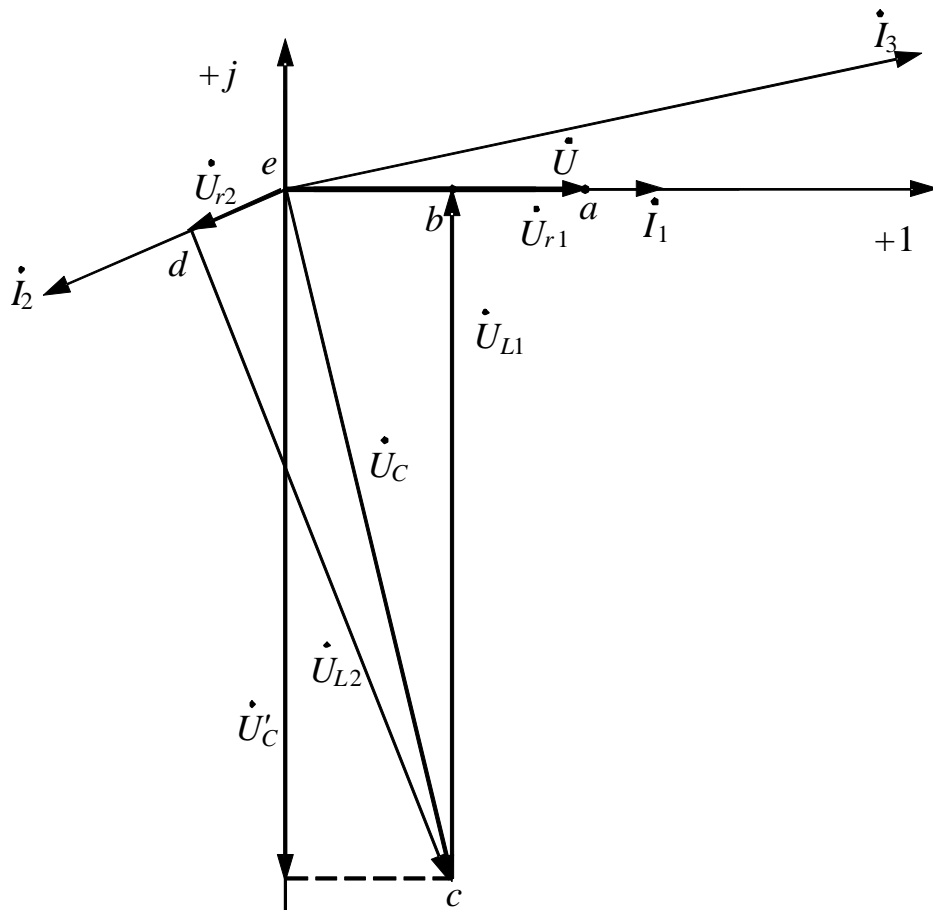


Рис. 3.50. Диаграммы напряжений и токов при  $\omega_{02}$  (резонанс напряжений)

В целом можно отметить, что первый этап работы, позволяющий вычислить резонансные частоты, не отвечает на вопрос, какому резонансу соответствует конкретная частота. Требуется полный расчет режима цепи на заданной резонансной частоте, как в этом можно было убедиться на приведенных примерах. Однако независимо от количества резонансных частот полный расчет чаще всего достаточен только для одной из них. Обусловлено это свойствами частотных характеристик электрических цепей, среди которых важное значение имеет следующее: частоты, определяющие положение резонансов напряжений и

токов на оси частот, обязательно чередуются. Поэтому при отсутствии необходимости глубокого исследования режимов электрической цепи на каждой резонансной частоте вполне достаточно ограничиться расчетом одного режима.

#### 3.11.4. Задачи для самостоятельного решения

1) В цепи с последовательно соединенными  $r$ ,  $L$ ,  $C$  наступает резонанс напряжений при угловой частоте 500 рад/с;  $r = 34$  Ом;  $L = 400$  мГн; напряжение на зажимах цепи  $\dot{U} = 120$ . Определить  $C$  и мгновенные значения тока и напряжений на элементах цепи, построить векторную диаграмму.

**Ответ:**  $C = 10$  мкФ;  $i = 5 \sin 500t$ ;  $u_r = 170 \sin 500t$ ;  
 $u_L = 1000 \sin(500t + 90^\circ)$ ;  $u_C = 1000 \sin(500t - 90^\circ)$ .

2) Цепь состоит из индуктивной катушки ( $r$ ,  $L$ ) и конденсатора ( $C$ ), соединенных последовательно. Напряжение на зажимах цепи равно 120 В. Определить напряжение на катушке при резонансе, если при этом напряжение на конденсаторе равно 208 В.

**Ответ:**  $U_K = 240$  В.

3) Вычислить резонансную угловую частоту  $\omega_0$  в цепи с последовательно соединенными элементами  $r = 50$  Ом,  $L = 10$  мГн,  $C = 1$  мкФ.

**Ответ:**  $\omega_0 = 10^4$  рад/с.

4) Вычислить резонансную частоту и добротность контура, состоящего из последовательно соединенных элементов:  $r = 5,1$  Ом;  $L = 65 \cdot 10^{-6}$  Гн;  $C = 1,56 \cdot 10^{-9}$  Ф.

**Ответ:**  $f_0 = 5 \cdot 10^5$  Гц;  $Q = 40$ .

5) Найти минимальное значение  $C$ , при котором наступит резонанс в цепи (см. рис. 3.45, *з*), если  $r_1 = 5$  Ом;  $L = 50$  мГн;  $r_2 = 10$  Ом;  $f_0 = 50$  Гц. Определить сопротивление цепи при резонансе.

**Ответ:**  $C = 153$  мкФ;  $Z = r = 25,1$  Ом.

6) В цепи (см. рис. 3.45, *б*) имеет место резонанс при  $\omega_0 = 10^4$  рад/с,  $r = 10$  Ом,  $L = 5$  мГн,  $\dot{U} = 100$  В. Определить величину  $C$  и комплексные действующие значения токов.

**Ответ:**  $C = 1,92$  мкФ;  $\dot{I}_1 = 0,385$  А;  $\dot{I}_L = 1,96 e^{-j78,7^\circ}$ ;  $\dot{I}_C = 1,92 e^{j90^\circ}$ .

7) В цепи (см. рис. 3.45, в) имеет место резонанс при  $\omega_0 = 200$  рад/с,  $L = 2$  Гн,  $C = 25$  мкФ. Определить величину  $r$ .

**Ответ:**  $r = 200$  Ом.

8) В цепи (см. рис. 3.45, в) имеет место резонанс при  $\omega_0 = 200$  рад/с,  $C = 25$  мкФ,  $r = 200$  Ом. Определить величину  $L$ .

**Ответ:**  $L = 2$  Гн.

### Библиографический список

1. Теоретические основы электротехники : учебник / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – Т. 1. – 512 с. – Текст : непосредственный.

2. Атабеков, Г. И. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи : учебное пособие / Г. И. Атабеков. – Санкт-Петербург : Лань, 2019. – 592 с. – Текст : непосредственный.

3. Тэттэр, А. Ю. Основы теории цепей постоянного и переменного тока : учебное пособие / А. Ю. Тэттэр, А. В. Пономарев. – Омск : Омский гос. ун-т путей сообщения, 2012. – 143 с. – Текст : непосредственный.

4. Сборник задач по основам теоретической электротехники : учебное пособие / под ред. Ю. А. Бычкова, В. М. Золотницкого [и др.] – Санкт-Петербург : Лань, 2011. – 400 с. – Текст : непосредственный.

5. Карпов, Е. А. Теоретические основы электротехники. Часть 1. Линейные электрические цепи постоянного и синусоидального тока : учебное пособие / под ред. Е. А. Карпова. – Омск : Омский гос. ун-т путей сообщения, 2017. – 140 с. – Текст : непосредственный.

6. Прянишников, В. А. Теоретические основы электротехники : курс лекций / В. А. Прянишников. – Санкт-Петербург : Корона-Принт, 2009. – 368 с. – Текст : непосредственный.

# МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА (ИСТОЧНИКА)

Другое название метода эквивалентного генератора (источника) – метод активного двухполюсника. Активный двухполюсник отличается от пассивного наличием источников напряжения или тока внутри двухполюсника. При использовании метода активного двухполюсника схему, содержащую источники напряжения и тока (рис. П.1.1, а), заменяют простейшей схемой, содержащей ЭДС и сопротивление, как показано на рис. П.1.1, б.

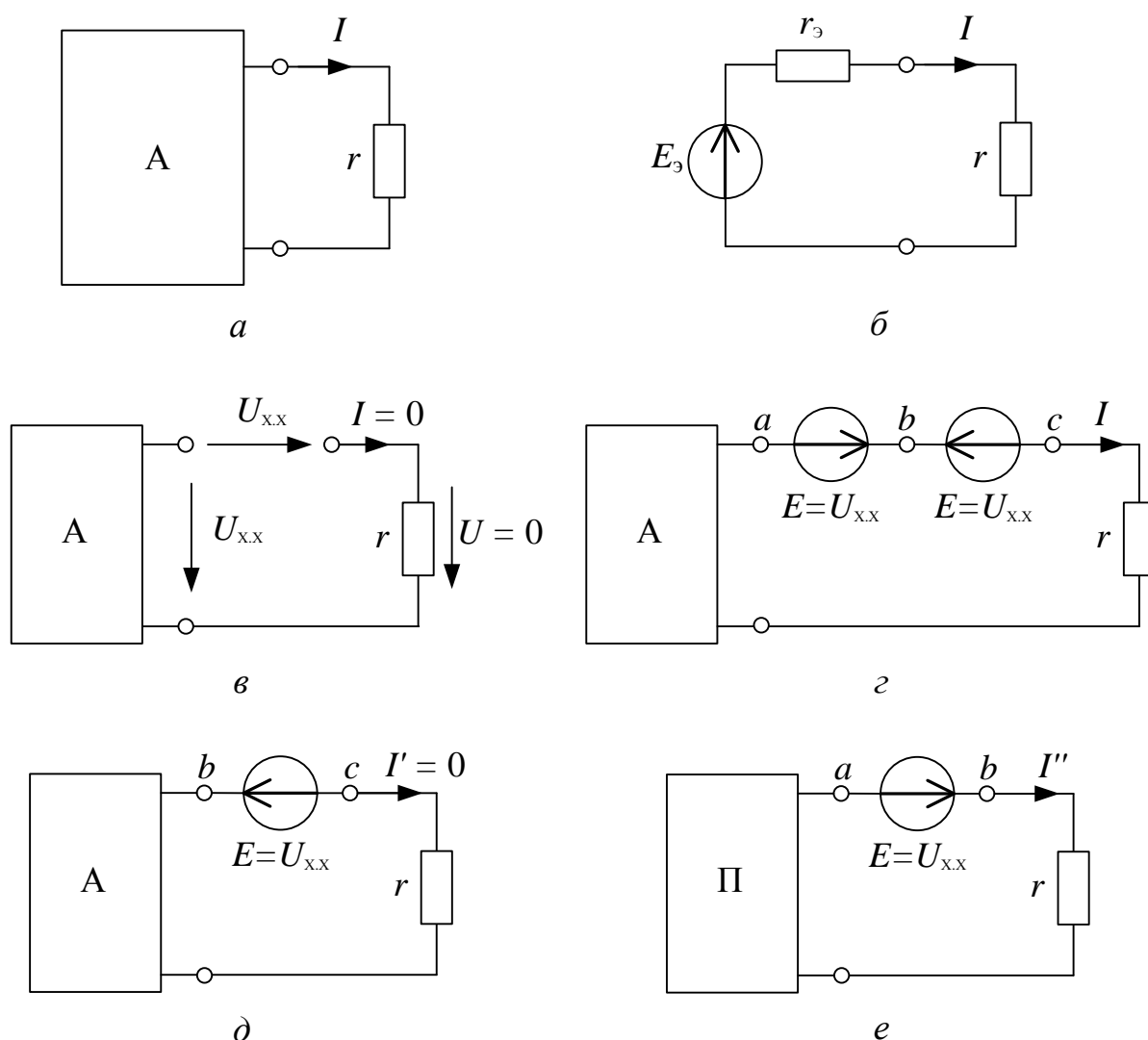


Рис. П.1.1. Поэтапное преобразование схемы с активным двухполюсником

Режим холостого хода достигается путем размыкания ветви нагрузки (рис. П.1.1, в). В этом случае ток нагрузки равен нулю, а напряжение между разомкнутыми контактами равно напряжению между выходными зажимами двухполюсника  $U_{x. x}$ .

Схема на рис. П.1.1, г эквивалентна схеме на рис. П.1.1, а, так как  $U_{ac} = 0$ :

$$\varphi_b = \varphi_c + E; \quad (\text{П.1.1})$$

$$\varphi_a = \varphi_b - E = \varphi_c + E - E = \varphi_c; \quad (\text{П.1.2})$$

$$U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c = 0. \quad (\text{П.1.3})$$

На основании принципа наложения схему на рис. П.1.1, г можно разложить на две: рис. П.1.1, д и е. В первой из полученных схем остаются все источники напряжения и тока внутри активного двухполюсника и одна ЭДС, направленная встречно и по величине равная напряжению холостого хода  $U_{x. x}$ . Эта схема эквивалентна схеме на рис. П.1.1, в. Следовательно, ток  $I'$  в этом случае равен нулю.

Во второй схеме (см. рис. П.1.1, е) все источники напряжения и тока из активного двухполюсника исключаются. Таким образом, двухполюсник становится пассивным. Остается только один внешний источник ЭДС, равный по величине  $U_{x. x}$  и включенный в направлении протекания тока  $I''$ .

Согласно принципу наложения и с учетом того, что ток  $I'$  равен нулю, общий ток в нагрузке можно определить по формуле:

$$I = I' + I'' = I''. \quad (\text{П.1.4})$$

В итоге ток  $I$  можно определить из схемы рис. П.1.1, е по формуле:

$$I = \frac{E_3}{r_3 + r}, \quad (\text{П.1.5})$$

где  $E_3 = U_{x. x}$  – напряжение на зажимах активного двухполюсника при разомкнутой ветви нагрузки  $r$ ;

$r_3$  – входное сопротивление схемы относительно зажимов выделенной ветви без учета источников  $J$  и  $E$ , но с учетом их внутренних сопротивлений.

Таким образом определены параметры эквивалентного генератора (рис. П.1.1, б).



## ВЫВОД ФОРМУЛ ДЛЯ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СОЕДИНЕНИЙ ЗВЕЗДОЙ И ТРЕУГОЛЬНИКОМ

При осуществлении эквивалентного преобразования соединения звездой в соединение треугольником и наоборот (рис. П.2.1) напряжения  $U_{12}$ ,  $U_{23}$ ,  $U_{31}$  и токи  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  не должны изменяться.

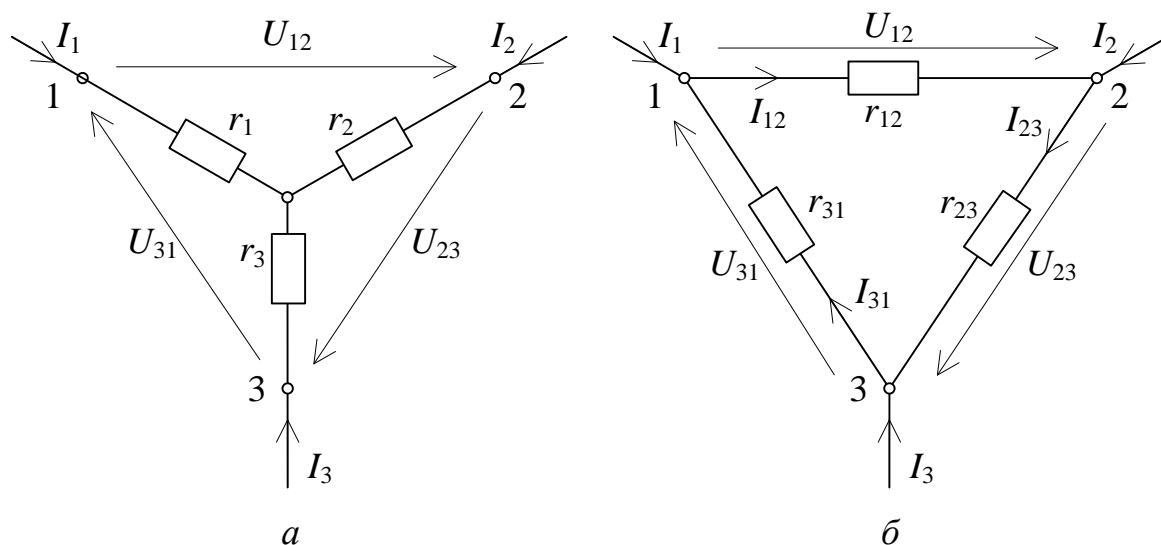


Рис. П.2.1. Эквивалентные схемы соединения сопротивлений  
звездой (а) и треугольником (б)

Для сопротивлений, соединенных звездой (рис. П.2.1, а), можно составить уравнения по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0; \\ r_1 I_1 - r_2 I_2 = U_{12}; \\ r_2 I_2 - r_3 I_3 = U_{23}. \end{cases} \quad (\text{П.2.1})$$

Выразив ток  $I_2$  из первого уравнения системы (П.2.1) и подставив полученное выражение во второе и третье уравнения, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} r_1 I_1 + r_2 (I_1 + I_3) = (r_1 + r_2) I_1 + r_2 I_3 = U_{12}; \\ -r_2 (I_1 + I_3) - r_3 I_3 = -r_2 I_1 - (r_2 + r_3) I_3 = U_{23}. \end{cases} \quad (\text{П.2.2})$$

Решая систему уравнений (П.2.2) по правилу Крамера, получаем:

$$\begin{cases} \Delta = -(r_1 + r_2)(r_2 + r_3) + r_2^2 = -r_1 r_2 - r_1 r_3 - r_2^2 - r_2 r_3 + r_2^2 = -D; \\ \Delta_1 = -U_{12}(r_2 + r_3) - U_{23}r_2; \\ \Delta_2 = U_{23}(r_1 + r_2) + U_{12}r_2, \end{cases} \quad (\text{П.2.3})$$

где  $D = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3$ , а токи

$$\begin{cases} I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = U_{12} \frac{r_2 + r_3}{D} + U_{23} \frac{r_2}{D}; \\ I_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -U_{12} \frac{r_2}{D} - U_{23} \frac{r_1 + r_2}{D}. \end{cases} \quad (\text{П.2.4})$$

Для сопротивлений, соединенных треугольником (рис. П.2.1, б), по второму закону Кирхгофа можно записать, что сумма падений напряжений  $U_{12} + U_{23} + U_{31} = 0$ , откуда

$$U_{31} = -(U_{12} + U_{23}). \quad (\text{П.2.5})$$

Выразив токи  $I_1$  и  $I_3$  из уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа для узлов 1 и 3 (см. рис. П.2.1, б), получим:

$$\begin{cases} I_1 = I_{12} - I_{31} = \frac{U_{12}}{r_{12}} - \frac{U_{31}}{r_{31}} = U_{12} \left( \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{31}} \right) + U_{23} \frac{1}{r_{31}}; \\ I_3 = I_{31} - I_{23} = \frac{U_{31}}{r_{31}} - \frac{U_{23}}{r_{23}} = -U_{12} \frac{1}{r_{31}} - U_{23} \left( \frac{1}{r_{31}} + \frac{1}{r_{23}} \right). \end{cases} \quad (\text{П.2.6})$$

Сравнивая системы уравнений (П.2.4) и (П.2.6), получаем уравнения

$$\begin{cases} \frac{r_2 + r_3}{D} = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{31}}; \\ \frac{r_2}{D} = \frac{1}{r_{31}}; \\ \frac{r_1 + r_2}{D} = \frac{1}{r_{31}} + \frac{1}{r_{23}}, \end{cases} \quad (\text{П.2.7})$$

из которых выводятся формулы для преобразования соединения звездой в соединение треугольником:

$$\begin{cases} \frac{r_2 + r_3}{D} - \frac{r_2}{D} = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{31}} - \frac{1}{r_{31}}; \\ \frac{r_1 + r_2}{D} - \frac{r_2}{D} = \frac{1}{r_{31}} + \frac{1}{r_{23}} - \frac{1}{r_{31}}; \\ \frac{r_2}{D} = \frac{1}{r_{31}}, \end{cases} \quad (\text{П.2.8})$$

откуда

$$\begin{cases} r_{12} = D/r_3; \\ r_{23} = D/r_1; \\ r_{31} = D/r_2. \end{cases} \quad (\text{П.2.9})$$

Окончательно формулы для преобразования соединения звездой в соединение треугольником имеют вид:

$$\begin{cases} r_{12} = r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3}; \\ r_{23} = r_2 + r_3 + \frac{r_2 r_3}{r_1}; \\ r_{31} = r_3 + r_1 + \frac{r_3 r_1}{r_2}. \end{cases} \quad (\text{П.2.10})$$

Из системы уравнений (П.2.9) можно получить соотношения

$$\begin{cases} r_{12} r_{31} = \frac{D^2}{r_2 r_3}; \\ r_{12} + r_{23} + r_{31} = \frac{D}{r_3} + \frac{D}{r_1} + \frac{D}{r_2} = \frac{D(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)}{r_1 r_2 r_3} = \frac{D^2}{r_1 r_2 r_3}, \end{cases} \quad (\text{П.2.11})$$

откуда выводятся формулы для преобразования соединения звездой в соединение треугольником:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{r_{12} r_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \\ r_2 = \frac{r_{12} r_{23}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \\ r_3 = \frac{r_{31} r_{23}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}. \end{cases} \quad (\text{П.2.12})$$

## ВЫВОД ФОРМУЛ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО СОЕДИНЕНИЯ ВЕТВЕЙ С ЭДС

Рассмотрим эквивалентное преобразование параллельного соединения ветвей с источниками напряжения на примере схемы рис. П.3.1. Эквивалентное преобразование подразумевает, что ток  $I$  не должен менять своего значения при переходе от исходной схемы к преобразованной.

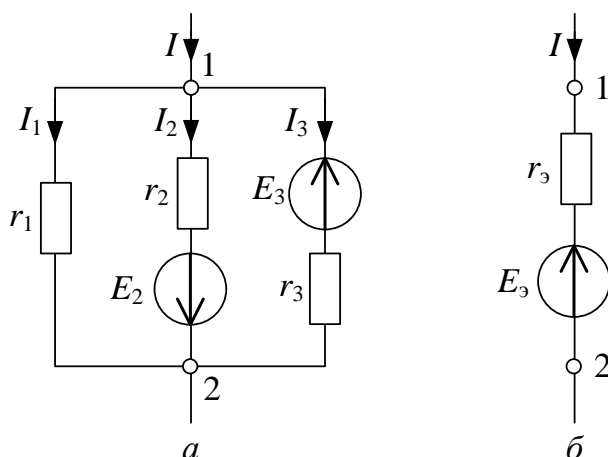


Рис. П.3.1. Расчетные схемы:  $a$  – параллельное соединение ветвей с ЭДС;  $b$  – эквивалентная ветвь с ЭДС  $E_3$  и сопротивлением  $r_3$

Для схемы на рис. П.3.1,  $a$  по первому закону Кирхгофа можно записать:

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \quad (\text{П.3.1})$$

Токи  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  можно найти по закону Ома для участка цепи с ЭДС:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r_1}; \\ I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_2}{r_2}; \\ I_3 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 - E_3}{r_3}. \end{cases} \quad (\text{П.3.2})$$

Подставив выражения (П.3.2) в уравнение (П.3.1) и выполнив группировку, получаем уравнение:

$$I_1 + I_2 + I_3 = \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) (\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{E_2}{r_2} - \frac{E_3}{r_3}. \quad (\text{П.3.3})$$

С другой стороны, ток  $I$  можно выразить в соответствии со схемой на рис. П.3.1, б:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 - E_3}{r_3} = \frac{1}{r_3} (\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{E_3}{r_3}. \quad (\text{П.3.4})$$

Сопоставляя выражения (П.3.3) и (П.3.4), и с учетом равенства (П.3.1) получаем:

$$\begin{cases} \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}; \\ -\frac{E_3}{r_3} = \frac{E_2}{r_2} - \frac{E_3}{r_3}. \end{cases} \quad (\text{П.3.5})$$

Осуществив переход от сопротивлений к проводимостям, получим систему уравнений

$$\begin{cases} g_3 = g_1 + g_2 + g_3; \\ E_3 = \left( \frac{E_3}{r_3} - \frac{E_2}{r_2} \right) r_3 = \frac{E_3 g_3 - E_2 g_2}{g_3}, \end{cases} \quad (\text{П.3.6})$$

которую можно записать в общем виде для произвольной схемы (произвольное количество параллельных ветвей с ЭДС):

$$\begin{cases} g_3 = \sum g_k; \\ E_3 = \frac{\sum E_k g_k}{g_3}; \\ r_3 = \frac{1}{g_3}, \end{cases} \quad (\text{П.3.7})$$

где  $g_k$  – проводимость  $k$ -й ветви;

$E_k$  – ЭДС  $k$ -й ветви.

Произведение  $E_k g_k$  имеет знак «+», если направления  $E_k$  и  $E_3$  совпадают, и знак «-», если  $E_k$  и  $E_3$  противоположно направлены.

## ПРИМЕРЫ РАБОТЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Комплексное число может быть изображено в виде вектора на комплексной плоскости, образованной осью действительных чисел «+1» и осью мнимых чисел «+j», где  $j = \sqrt{-1}$  – обозначение мнимой единицы в электротехнике.

Любое комплексное число можно записать в одной из двух форм: алгебраической и показательной (экспоненциальной).

На рис. П.4.1, *a* изображены векторы, которые удобно записать в алгебраической форме, описывающей проекции вектора на действительную и мнимую оси.

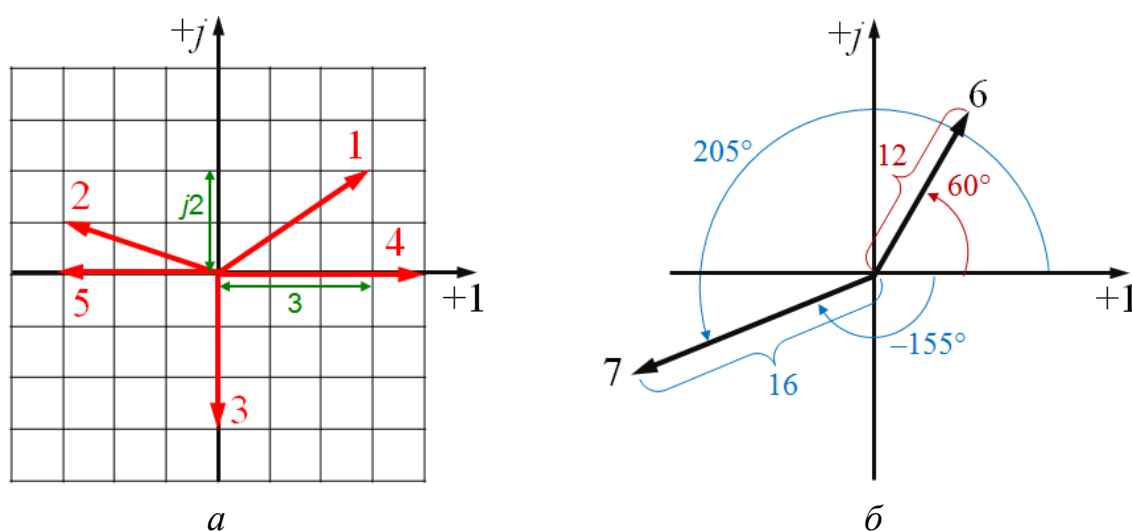


Рис. П.4.1. Примеры комплексных чисел, демонстрирующих:  
*a* – алгебраическую форму записи; *б* – экспоненциальную форму записи

Векторам на рис. П.4.1, *a* соответствуют следующие комплексные числа, записанные в алгебраической форме:

- вектор 1:  $A_1 = 3 + j2$ ;
- вектор 2:  $A_2 = -3 + j = j - 3$ ;
- вектор 3:  $A_3 = 0 - j3 = -j3$ ;
- вектор 4:  $A_4 = 4 + j0 = 4$ ;
- вектор 5:  $A_5 = -3 + j0 = -3$ .

При этом чаще первым числом записывается именно действительная часть числа, а затем – мнимая, но это не обязательное требование (например, см. число  $A_2$ ).

Экспоненциальная (показательная) форма записи комплексного числа определяет длину вектора (модуль комплексного числа) и угол его поворота относительно положительного направления действительной оси против часовой стрелки (аргумент комплексного числа). На рис. П.4.1, б изображены векторы, которые удобно записать в экспоненциальной форме. Им будут соответствовать комплексные числа:

- вектор 6:  $A_6 = 12e^{j60^\circ}$ ;
- вектор 7:  $A_7 = 16e^{j205^\circ} = 16e^{-j155^\circ}$ .

На примере числа  $A_7$  видно, что изменение аргумента числа на  $\pm 360^\circ$  приводит к получению вектора с теми же самыми проекциями.

При выполнении математических операций с комплексными числами часто возникает необходимость переводить числа из одной формы записи в другую: сложение и вычитание удобнее выполнять в алгебраической форме, а произведение и деление чисел удобнее вычислять в экспоненциальной форме. При этом для перехода из одной формы в другую можно использовать соответствующие тригонометрические соотношения.

Например, рассмотрим перевод числа  $A_1$  из алгебраической формы в экспоненциальную (рис. П.4.1, а):

$$A_1 = 3 + j2 = \sqrt{3^2 + 2^2} e^{j \arctg \frac{2}{3}} = 3,605e^{j33,7^\circ}.$$

Получилось, что вектор с проекциями на действительную и мнимую оси в три и две единицы соответственно имеет длину 3,6 единицы и отклоняется от действительной оси на  $33,7^\circ$ .

При выполнении преобразований важно учитывать знаки составляющих числа. При этом необходимо помнить о двух моментах.

Во-первых, если вектор расположен во второй или третьей четвертях (имеет отрицательную действительную часть), то угол его отклонения от действительной оси должен быть по модулю больше  $90^\circ$ . Функция арктангенса вычисляет аргументы только в диапазоне  $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$ . Поэтому к углу, полученному в результате вычисления арктангенса, необходимо прибавить  $\pm 180^\circ$ .

Например, при переводе числа  $A_2$  (см. рис. П.4.1, а) с отрицательной действительной частью ( $-3$ ) получаем:

$$A_2 = -3 + j = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} e^{j \left[ \arctg\left(\frac{1}{-3}\right) + 180^\circ \right]} = 3,162 e^{j(-18,4^\circ + 180^\circ)} = 3,162 e^{j161,6^\circ}.$$

Во-вторых, частные случаи перевода, когда вектор совпадает по направлению с одной из осей комплексной плоскости, удобно выполнять без калькулятора. Например, числа  $A_3 - A_5$  (см. рис. П.4.1, а) в экспоненциальной форме имеют вид:

$$A_3 = -j3 = 3e^{-j90^\circ}; \quad A_4 = 4 = 4e^{j0}; \quad A_5 = -3 = 3e^{j180^\circ} = 3e^{-j180^\circ}.$$

Переход от алгебраической формы к экспоненциальной можно рассмотреть на примере числа  $A_7$  (см. рис. П.4.1, б):

$$A_7 = 16e^{-j155^\circ} = 16\cos(-155^\circ) + j16\sin(-155^\circ) = -14,5 - j6,76.$$

Дополнительные примеры перевода чисел для самопроверки:

$$A_8 = 4 - j3 = 5e^{-j36,87^\circ};$$

$$A_9 = j12 + 9 = 15e^{j53,13^\circ};$$

$$A_{10} = 10 + j10 = 14,14e^{j45^\circ}.$$

Основными операциями, которые приходится выполнять над комплексными числами, являются такие:

сложение и вычитание (алгебраическая форма записи) –

$$(5 + j3) + (4 - j2) = (5 + 4) + (j3 - j2) = 9 + j;$$

$$(5 + j3) - (4 - j2) = (5 - 4) + (j3 + j2) = 1 + j5;$$

умножение и деление (экспоненциальная форма записи) –

$$12e^{j40^\circ} \cdot 6e^{-j15^\circ} = 12 \cdot 6 \cdot e^{j40^\circ + (-j15^\circ)} = 72e^{j25^\circ};$$

$$\frac{12e^{j40^\circ}}{6e^{-j15^\circ}} = \frac{12}{6} e^{j40^\circ - (-j15^\circ)} = 2e^{j55^\circ}.$$



## ИЗМЕРЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОСЦИЛЛОГРАФА

С помощью осциллографа можно наблюдать форму сигналов и выполнять измерение амплитудного значения синусоидального напряжения, периода и частоты периодического сигнала и угла сдвига фаз между двумя напряжениями. Например, чтобы исследовать входное напряжение, необходимо сигнальный и земляной щупы канала 1 подключить к входным клеммам цепи в соответствии с рис. П.5.1.

Чтобы исследовать форму тока, необходимо в соответствующую ветвь цепи включить известное активное сопротивление  $r$  и подключить сигнальный щуп канала 2 осциллографа так, чтобы измерять напряжение  $u_R(t) = ri(t)$ , которое будет по форме совпадать с током (рис. П.5.1).

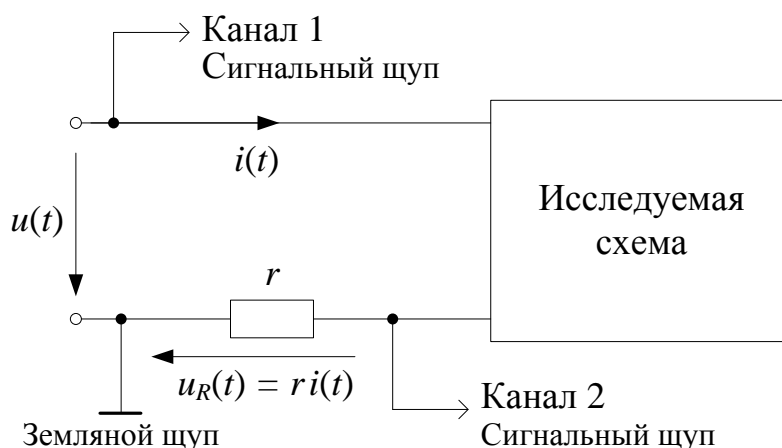


Рис. П.5.1. Схема подключения осциллографа

В итоге получили схему подключения осциллографа для наблюдения формы входного напряжения и входного тока в цепи (см. рис. П.5.1).

На экране осциллографа можно наблюдать форму напряжения  $u$  (рис. П.5.2, кривая 1) и тока в цепи  $i$  (рис. П.5.2, кривая 2). Переключатели «V/ДЕЛ.» и « $\times 1$ ,  $\times 10$ » необходимо установить в такое положение, чтобы графики напряжения не выходили за пределы экрана и было удобно выполнять измерения.

1) *Определим амплитуду входного напряжения.* Для этого измерим расстояние в делениях, соответствующее амплитуде входного напряжения  $U_m$  (на рис. П.5.2 это расстояние составляет три деления). Допустим, переключатель канала 1 «V/ДЕЛ.» находится в положении «0,5V/ДЕЛ.», а переключатель « $\times 1$ ,

×10» – в положении «×10». Тогда, учитывая, что амплитуда входного напряжения составила три деления, получаем:  $U_m = 3 \cdot 10 \cdot 0,5 = 15,0$  В.

2) Действующее значение входного напряжения найдем по формуле:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{15,0}{\sqrt{2}} = 10,6 \text{ В.}$$

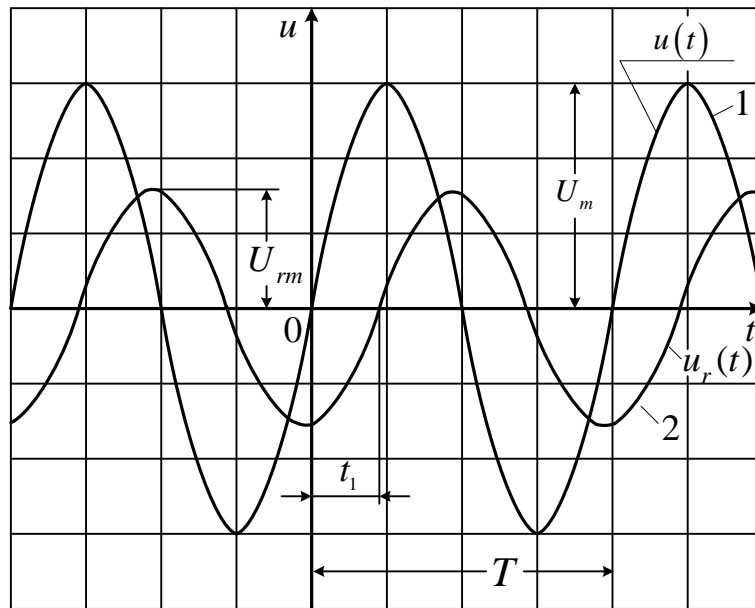


Рис. П.5.2. Осциллограмма процесса в схеме, изображенной на рис. П.5.1

3) Определим амплитуду входного тока. Для этого аналогичным образом измерим амплитуду напряжения  $U_{rm}$  на сопротивлении  $r$  (на рис. П.5.2 это расстояние составляет 1,5 деления).

Предположим, что переключатели канала 2 находятся в положениях «0,5 В/ДЕЛ.», «×10». Тогда, учитывая, что амплитуда напряжения на сопротивлении  $r$  составила 1,5 деления, получаем:  $U_{rm} = 1,5 \cdot 10 \cdot 0,5 = 7,5$  В.

Учитывая, что само сопротивление  $r$  известно (например, составляет 100 Ом), то по закону Ома можем найти амплитудное значение тока в сопротивлении  $r$ , а значит, и во всей схеме:

$$I_m = \frac{U_{rm}}{r}, \quad I_m = \frac{7,5}{100} = 0,075 \text{ А.}$$

4) Действующее значение входного тока найдем по формуле:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad I = \frac{0,075}{\sqrt{2}} = 0,053 \text{ А.}$$

5) *Определим период  $T$  и частоту  $f$  напряжения в цепи.* Для измерения временного интервала между двумя точками необходимо определить расстояние между ними в делениях и умножить его на коэффициент развертки и множитель переключателя « $\times 1$ ,  $\times 0,2$ ».

Например, период напряжения (см. рис. П.5.2, кривая 1) составляет четыре деления, коэффициент развертки – «5 mS», переключатель « $\times 1$ ,  $\times 0,2$ » в положении « $\times 1$ », тогда  $T = 4 \cdot 5 \cdot 1 = 20$  мс.

Частоту напряжения можно получить в соответствии с выражением:

$$f = \frac{1}{T}, \quad f = \frac{1}{20 \cdot 10^{-3}} = 50 \text{ Гц.}$$

6) *Определим фазовый сдвиг  $\varphi$  между входным напряжением и напряжением на сопротивлении  $r$  (током в цепи).* Для этого сначала необходимо изменить временной сдвиг между напряжениями, а затем перевести его в соответствующий фазовый сдвиг.

Например, временной сдвиг  $t_1$  между напряжениями (см. рис. П.5.2, расстояние между кривыми 1 и 2) составляет 0,9 деления. При тех же положениях переключателей (коэффициент развертки – «5 mS», переключатель « $\times 1$ ,  $\times 0,2$ » в положении « $\times 1$ ») временной сдвиг  $t_1 = 0,9 \cdot 5 \cdot 1 = 4,5$  мс.

Фазовый сдвиг рассчитываем по формуле:

$$\varphi = t_1 \frac{360^\circ}{T}, \quad \varphi = 4,5 \frac{360^\circ}{20} = 81^\circ.$$

При этом кривая напряжения 1 находится левее кривой тока 2 (см. рис. П.5.2), что соответствует активно-индуктивному характеру нагрузки (напряжение опережает по фазе ток). Следовательно, фазовый сдвиг положителен:  $\varphi = 81^\circ$ . В противном случае фазовый сдвиг нужно было бы записать со знаком «минус».

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной теоретической базой, используемой во многих специальных дисциплинах при подготовке инженеров по электротехническим специальностям, является теория линейных электрических цепей.

Настоящее учебное пособие посвящено теоретическому и экспериментальному исследованию электромагнитных процессов в линейных электрических цепях с источниками постоянного и синусоидального напряжения и тока, ознакомлению с основными понятиями и фундаментальными законами, а также с методами расчета линейных электрических цепей.

Издание предназначено для самостоятельной работы студентов и содержит теоретические сведения по всем рассмотренным разделам, задания на самостоятельную работу и примеры расчета. Учебное пособие не подменяет конспект лекций по дисциплине, оно построено так, чтобы студент мог свободно пользоваться им в самостоятельной работе при проведении расчетов, экспериментов и оформлении результатов, а также при изучении других дисциплин, связанных с электротехникой.

*Учебное издание*

ТЭТТЭР Александр Юрьевич,  
КОВАЛЕВА Татьяна Владимировна,  
ПОНОМАРЕВ Антон Витальевич

УСТАНОВИВШИЕСЯ РЕЖИМЫ  
В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С ИСТОЧНИКАМИ  
ПОСТОЯННОГО И СИНУСОИДАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА

Учебное пособие

---

Редактор Н. А. Майорова

\*\*\*

Подписано в печать 17.03.2023. Формат  $60 \times 84 \frac{1}{16}$ .  
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 10,8. Уч.-изд. л. 12,1.  
Тираж 30 экз. Заказ .

\*\*

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа  
Типография ОмГУПСа

\*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35