Н. Н. СОКОЛОВСКАЯ, А. В. ЕРОШЕНКО

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

ОМСК 2010

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

Н. Н. Соколовская, А. В. Ерошенко

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний к самостоятельной работе
студентов 2-го курса всех специальностей
по курсу «Вычислительная техника в инженерных задачах»

Омск 2010

УДК 004.432
ББК 22.131я73
С59

Основы теории графов и их применение: Методические указания / Н. Н. Соколовская, А. В. Ерошенко; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2010. 32 с.

Рассмотрены основные теоретические положения, связанные с понятием графа, типы графов, способы их представления в компьютере, применение графов в прикладных областях.

Предназначены для самостоятельной работы студентов второго курса всех специальностей очной и заочной форм обучения по дисциплине «Вычислительная техника в инженерных задачах».

Библиогр.: 6 назв. Табл. 3. Рис. 25.

Рецензенты: доктор техн. наук, профессор В. А. Николаев;
канд. техн. наук, доцент О. П. Шафеева.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Многие прикладные задачи сводятся к рассмотрению сложных объектов, существующих как единое целое и состоящих из множества взаимосвязанных простых объектов. Такие сложные объекты называются системами. К ним относятся система образования, транспортная система, система водоснабжения, горная система и т. д. Например, система железнодорожного транспорта включает в себя железнодорожные пути, контактную сеть, линии электропередач, локомотивы, вагоны, депо и пр.

Существенные свойства объектов, входящих в систему, описываются связями между ними. Может возникнуть, например, задача определения по карте автомобильных дорог наличия проезда между двумя населенными пунктами. При этом конфигурация и качество дорог, расстояния и другие подробности не интересуют. При изучении электрических цепей на первый план может выступить характер соединений различных ее компонентов – резисторов, конденсаторов, источников напряжения или тока и т. п. Органические молекулы образуют структуры, характерными свойствами которых являются связи между атомами. Интерес могут представлять различные связи между людьми, событиями, состояниями и вообще между любыми объектами.

Для изображения таких систем используют графы. Графом называют совокупность узлов (вершин) и соединяющих их линий (ветвей).

Основы теории графов как математической науки заложил в 1736 г. Леонард Эйлер, рассматривая задачу о кенигсбергских мостах. Сегодня эта задача стала классической.

Уже в середине XIX в. Кирхгоф применил графы для анализа электрических цепей, а Кэли исследовал важный класс графов для выявления и перечисления изомеров насыщенных углеводородов. Большой вклад в развитие теории графов внесли отечественные ученые Л. С. Понтрягин, А. А. Зыков и В. Г. Визинг.

Теория графов – один из фундаментальных разделов дискретной математики. В информатике графы используются при математическом моделировании систем и процессов и представлении задач информационного характера.

Графы используются как математическая модель во многих научных и прикладных задачах. Широкое применение графов объясняется наглядностью построенной модели – обычно человек легко запоминает и различает особенности графических образов.

Теория графов располагает мощным аппаратом решения прикладных задач из самых различных областей науки и техники, она находит применение, например, при анализе пропускной способности сложной разветвленной железнодорожной сети, где роль узлов выполняют железнодорожные станции, роль ветвей – железнодорожные пути.

К сожалению, терминология, касающаяся вопросов, связанных с графами, не стандартизована, что создает трудности при чтении литературы.

Цель настоящих методических указаний – ознакомить студентов с основными понятиями теории графов и представлением графов в компьютере.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Представление информации в форме графа

Среди этапов, на которые можно разбить процесс решения задачи на компьютере, есть этап формирования модели. Часто используются модели в форме графов.

Началом развития теории графов считают 1736 год, когда Эйлер решил известную в то время задачу о кенигсбергских мостах. Суть задачи состоит в следующем. В городе Кенигсберге (Калининграде) было два острова, соединенных семью мостами с берегами реки и друг с другом, как показано на рис. 1.

Спрашивалось – можно ли найти маршрут прохождения через все мосты, который начинается и заканчивается в одной и той же точке и только раз проходит по каждому мосту?

Опытным путем, перебирая всевозможные варианты маршрутов, можно попытаться это сделать, но все попытки закончатся неудачей. Заслуга Эйлера заключается в том, что он разработал теорию, которая доказала невозможность такого маршрута. Он каждый участок суши принял за точку – вершину графа, а каждый мост обозначил линией – ребром графа (рис. 2). Анализируя граф, Эйлер пришел к общему выводу о существовании маршрутов прохождения через все мосты.

Примерами графов могут служить изображение молекулы изобутана (рис. 3), структура транспортной сети (железнодорожной сети, шоссейных дорог, трубопроводной сети) некоторого района (рис. 4). На рис. 4 точками обозначены города, аэропорты, железнодорожные станции, а ребрами – дороги.

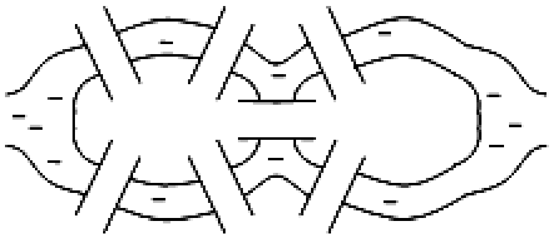


Рис. 1. Схема расположения Кенигсбергских мостов

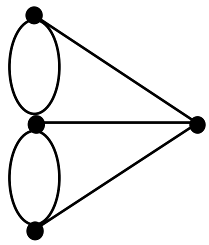


Рис. 2. Модель в виде графа

Графы, изображенные на рис. 3, 4, относятся к неориентированным графам. Если указать длину дорог в километрах, то получится неориентированный взвешенный граф (рис. 5). Этот граф отражает не взаимное расположение пунктов, а наличие и протяженность дорог между ними. Длина ребер никак не связана с длиной реальных дорог (т. е. с числами у ребер).

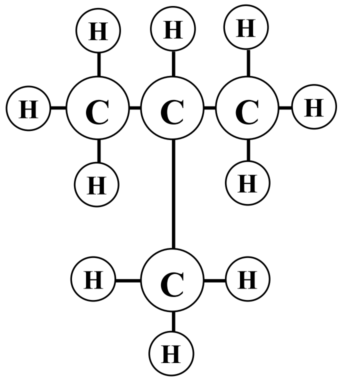


Рис. 3. Модель молекулы изобутана

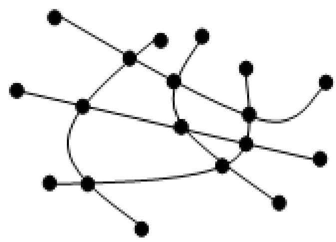


Рис. 4. Пример графа – транспортная сеть

Если бы дороги между населенными пунктами были односторонними, то значения длины дорог в одну сторону и в другую могли быть разными и линии, соединяющие вершины графа на рис. 5, назывались бы дугами и имели бы на концах стрелки. Такой граф называется ориентированным.

К ориентированным графам можно отнести ГСА – графические схемы алгоритмов (рис. 6). Стрелками задается направление передачи информации. Каждый блок – вершина графа.

В виде графа задаются схема метрополитена, генеалогическое дерево, иерархическая структура папок на компьютере, иерархическая система доменных адресов в Интернете, различные организационные структуры и многие другие системы.

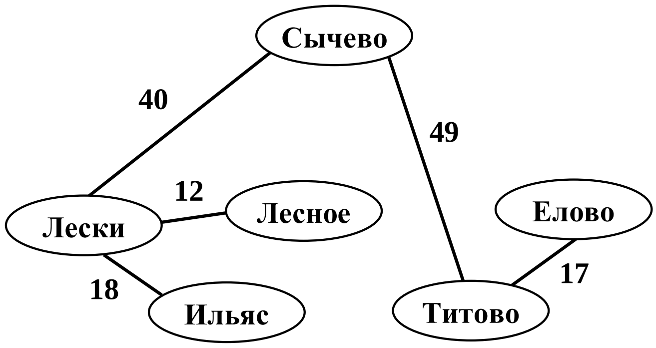


Рис. 5. Граф, отражающий связи между населенными пунктами

Граф, представленный на рис. 7, может применяться при изображении генеалогического дерева. Тогда в вершинах пишутся имена и фамилии людей, наследующих, например, дворянский титул. Дуга означает передачу титула от отца к сыну или дочери.

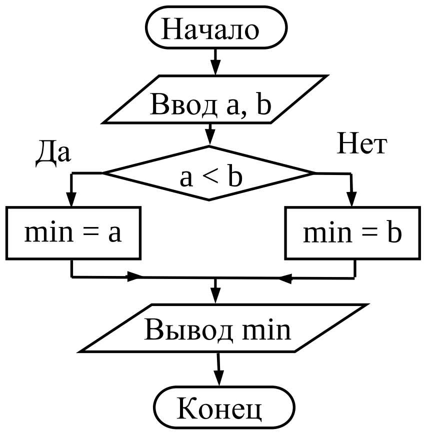


Рис. 6. Пример графа – графическая схема алгоритма

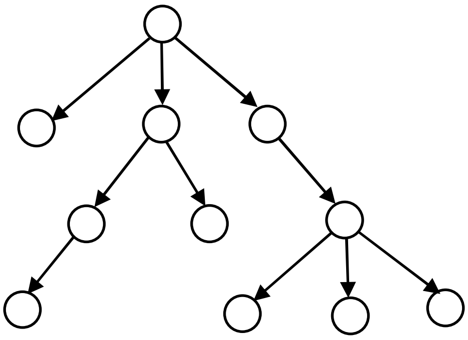


Рис. 7. Граф в виде дерева

1.2. Основные понятия и определения

Графом называют двойку $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ – множество элементов, называемых **вершинами**, а $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ – множество **ребер** (дуг) графа. Каждое ребро (дуга) из E определяется парой вершин v_i и v_j, которые оно соединяет. Такие вершины называют **концевыми** для ребра (дуги). Ребро графа G задается неупорядоченной парой вершин $\{v_i, v_j\}$, а дуга – упорядоченной парой вершин $\{v_i, v_j\}$. Дугу графа G называют еще ориентированным ребром. Неупорядоченной паре вершин $\{v_i,v_j\}$ соответствуют две упорядоченные пары $\{v_i, v_j\}$ и $\{v_j, v_i\}$.

На рисунке (диаграмме) вершины графа обычно изображаются точками, а ребра – линиями, соединяющими эти точки. Если ребро ориентировано, то на линии указывают направление ориентации. Примеры графов, имеющих ребра или дуги, изображены соответственно на рис. 8, а, б.

Если хотя бы две вершины соединены двумя и более ребрами, то такой граф называется мультиграфом.

Граф, содержащий петли, иногда называют псевдографом.

Граф называется неориентированным (неографом), если он не имеет ориентированных ребер (см. рис. 8, а).

Граф называют ориентированным (орграфом), если он состоит только из ориентированных ребер (см. рис. 8, б, где направление каждого ребра указано стрелкой).

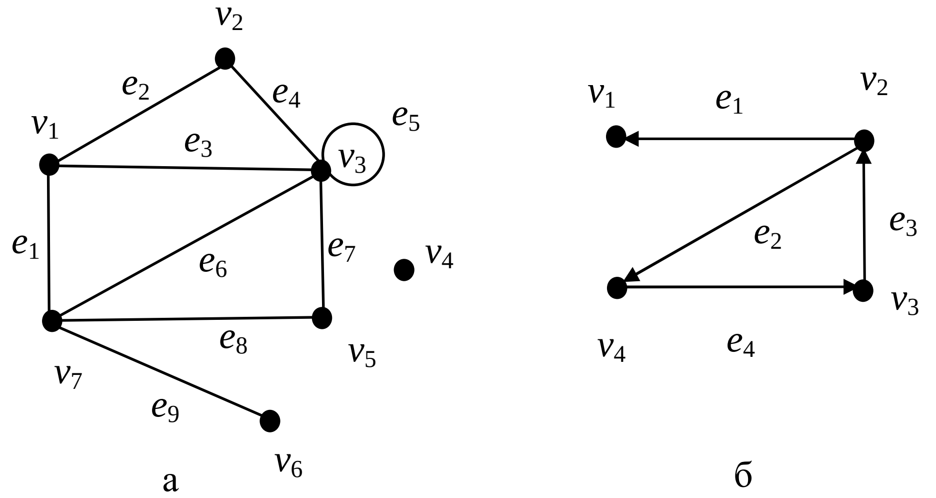


Рис. 8. Примеры изображения графов

Если граф имеет как ориентированные, так и неориентированные ребра, то такой граф называют смешанным.

Ребро называется петлей, если оно начинается и заканчивается в одной и той же вершине. Так, на рис. 8, а изображена петля, начинающаяся и заканчивающаяся в вершине v_3.

Между вершинами графа G и его ребрами имеет место отношение инцидентности. Говорят, что вершина v_i инцидентна ребру e_k, если v_i – одна из концевых вершин этого ребра. Обратно, всякое ребро инцидентно своим концевым вершинам.

Вершины v_i, $v_j \in V$ графа G называются смежными или соседними, если они инцидентны одному и тому же ребру (т. е. соединены хотя бы одним ребром или дугой).

Вершину графа G называют изолированной, если она не инцидентна ни одному ребру этого графа. Так, вершина v_4 является изолированной в графе на рис. 8, а.

Пусть в графе G имеется дуга $e_k = (v_i, v_j) \in E$. Тогда говорят, что дуга e_k исходит из вершины v_i и заходит в вершину v_j. Вершину v_i называют также начальной, вершину v_j – конечной для дуги e_k.

Граф G называют полным, если каждая пара его вершин соединена ребром (рис. 9). Такой граф обозначают еще K_n.

Полный граф с n вершинами имеет $\frac{n^2-n}{2}$ ребер, если петли не учитывать, и $\left(\frac{n^2-n}{2}+n\right)$ ребер, если добавить n петель (при этом каждой вершине будет инцидентна ровно одна петля).

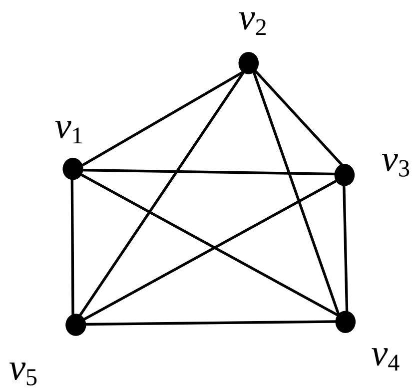


Рис. 9. Пример полного графа

Во многих задачах часто используются графы, у которых с вершинами и ребрами связана некоторая дополнительная информация. Это могут быть, например, сведения о расстоянии между населенными пунктами в случае, когда граф представляет собой сеть дорог (см. рис. 5), или о времени прохождения сигнала от одного узла связи к другому и т. д. В таких случаях используют взвешенные (нагруженные, помеченные) графы.

1.3. Представление графов в компьютере

Существуют различные способы задания графа. Они имеют различную область применимости: в теоретических исследованиях, при представлении графа в компьютере, для решения некоторого класса задач и т. п.

В машинном представлении смешанного графа каждое ребро заменяют на две дуги.

1.3.1. Матрица смежности

Одним из наиболее часто используемых способов задания графа G с n вершинами является матрица смежности.

Матрица смежности неографа – это двоичная (булева, битовая) квадратная матрица порядка n: $R = \|r_{ij}\|$, в которой строкам и столбцам поставлены в соответствие вершины графа G, и r_{ij} = 1, если вершины v_i, $v_j \in V$ смежные, и r_{ij} = = 0 в противном случае.

Матрица смежности R для неографа, представленного на рис. 8, а, изображена на рис. 10, а матрица смежности R' для орграфа (см. рис. 8, б) – на рис. 11.

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}$$

Рис. 10. Матрица смежности неографа

$$R' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}$$

Рис. 11. Матрица смежности орграфа

Для орграфа $r'_{ij} = 1$, если вершины v_i и v_j соединяет дуга (v_i, v_j).

Матрица смежности неографа всегда симметрична относительно главной диагонали.

Информацию о весах ребер во взвешенном графе можно представлять в виде матрицы весов W, где w_{ij} – вес ребра, если вершины v_i, $v_j \in V$ смежные, иначе w_{ij} помечают нулем (или знаком ∞).

1.3.2. Матрица инцидентности

Матрица инцидентности графа G – это также двоичная матрица $Q = \|q_{ij}\|$ размером $n \times m$, в которой строкам поставлены в соответствие вершины графа, а столбцам – ребра.

Если граф G – неориентированный, то матрица инцидентности такого графа является двоичной матрицей, в которой $q_{ij} = 1$, если вершина v_i инцидентна ребру e_j, и $q_{ij} = 0$ в противном случае.

Для ориентированного графа G элементы матрицы инцидентности таковы: $q_{ij} = 1$, если в графе имеется дуга $e_j = (v_i, v_k)$, в которой вершина v_i начальная, $q_{ij} = -1$, если в графе имеется дуга $e_j = (v_k, v_i)$, в которой вершина v_i конечная (и дуга e_j не является петлей), $q_{ij} = 0$ во всех остальных случаях.

Матрица инцидентности для графа, представленного на рис. 8, а, приведена на рис. 12, матрица инцидентности для графа, изображенного на рис. 8, б, приведена на рис. 13.

$$Q = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} & \\ \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \end{array}$$

Рис. 12. Матрица инцидентности неографа

$$Q' = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} & \\ \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \end{array}$$

Рис. 13. Матрица инцидентности орграфа

1.4. Маршруты в графе

Пусть имеется граф $G = (V, E)$.

Маршрутом (путем) M в графе G называется последовательность вершин и ребер из G: $M = (v_{i_1}, e_{j_1}, v_{i_2}, e_{j_2}, v_{i_3}, ..., e_{j_p}, v_{i_{p+1}})$ – такая, что соседние ребра $e_{j_k}, e_{j_{k+1}}$ (k=1, 2,…, p) последовательности M являются смежными, а вершины $v_{i_r}, v_{i_{r+1}}$ являются концевыми для ребра e_{j_r}. Вершину v_{i_1} называют начальной, а вершину $v_{i_{p+1}}$ – конечной вершиной маршрута М. Число ребер p маршрута называют его длиной.

Иногда маршрут M задают либо последовательностью составляющих его ребер: $M=(e_{j_1}, e_{j_2}, ..., e_{j_p})$, либо последовательностью вершин, через которые он проходит: $M=(v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, ..., v_{i_{p+1}})$.

Граф G называют связным, если между любыми двумя его вершинами существует маршрут.

Маршрут M называют цепью, если в нем нет повторяющихся ребер. Цепь называют простой, если в ней нет повторяющихся вершин. В ориентированном графе цепь называют также путем. Так, на рис. 8, а маршрут $M=(v_6, v_7, v_3, v_5, v_7, v_3, v_1)$ связывает вершины v_6 и v_1. Цепь $C=(v_6, v_7, v_5, v_3, v_7, v_1)$ связывает вершины v_6 и v_1. Наконец, простая цепь $P=(v_6, v_7, v_3, v_1)$ также связывает вершины v_6 и v_1.

Если в некоторой цепи начальная и конечная вершины совпадают, то такая цепь называется циклом. В ориентированном графе цикл называют также контуром. Так, на рис. 8, а имеется цикл (v_1, v_2, v_3).

1.5. Деревья

Связный граф G, не имеющий циклов, называется деревом (см. рис. 7).

Корневое дерево удовлетворяет следующим условиям:

1) имеется только одна вершина, называемая корнем, в которую не входит ни одно ребро;

2) в каждую вершину кроме корня входит ровно одно ребро;

3) из корня в каждую вершину ведет только один путь.

Число различных деревьев, которые можно построить на n вершинах, равно n^{n-2}.

Корневое дерево может быть неориентированным. Тогда из любой вершины дерева можно по ребрам дойти до любой другой вершины, причем по единственному пути.

Корневое дерево может быть ориентированным, тогда дуги направлены от верхних вершин к нижним. Применима следующая терминология. Если имеется путь из вершины v в вершину w, то v называется предком (отцом) вершины w, а w – потомком (сыном) вершины v. Вершина без потомков называется листом.

В виде дерева удобно изображать системы, в которых нижние вершины в каком-то смысле «подчинены» верхним. Например, верхняя вершина может изображать систему, нижние вершины – компоненты этой системы. Другой пример – генеалогическое дерево.

Глубина (уровень) вершины v в дереве – это длина пути из корня в вершину v. Высота вершины в дереве – это длина самого длинного пути из v в какой-нибудь лист. Высотой дерева называется высота его корня.

Упорядоченным деревом называют дерево, в котором множество сыновей каждой вершины упорядочено в некотором порядке. При изображении упорядоченного дерева предполагается, что множество сыновей каждой вершины упорядочено слева направо.

Двоичным (бинарным) деревом называют такое упорядоченное дерево,

в котором каждый сын произвольной вершины рассматривается либо как левый сын, либо как правый сын;

каждая вершина имеет не более одного левого сына и не более одного правого сына. Пример двоичного дерева приведен на рис. 14.

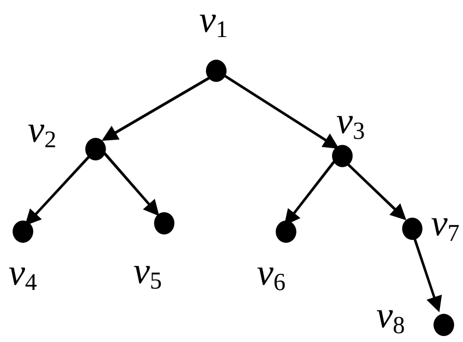


Рис. 14. Пример двоичного дерева

1.6. Эйлеровы и гамильтоновы графы

В различных приложениях большое значение имеют понятия эйлерова и гамильтонова графов.

Цикл графа G, в котором содержатся все ребра графа и каждое ребро встречается в нем только один раз, называется эйлеровым. Граф G, в котором имеется эйлеров цикл, называется эйлеровым (рис. 15, а).

Неформально такой граф можно определить как такой, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя дважды по одному и тому же ребру, начиная и заканчивая рисовать в одной и той же точке.

Цикл графа G, проходящий через каждую вершину по одному разу, называют гамильтоновым. Граф G, в котором имеется гамильтонов цикл, называется гамильтоновым (рис. 15, б).

Полный граф всегда является гамильтоновым, а при нечетном n – еще и эйлеровым.

Для описания графа используют несколько числовых характеристик. Одна из них называется валентностью вершины. Число ребер, инцидентных вершине $v \in V$ графа $G = (V, E)$, называется **локальной степенью** (**валентностью**) вершины v и обозначается $\deg(v)$. При определении валентности вершины петли следует учитывать дважды.

Замечание 1. Число ребер графа $G = (V, E)$ определяется по формуле: $Z = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i)}{2}$.

Имеется простой критерий (признак) существования в графе эйлерова цикла: *связный неориентированный граф G содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда все его вершины имеют четную степень.*

Граф, изображенный на рис. 15, а, удовлетворяет этому критерию, а графы на рис. 2 и 15, б – нет.

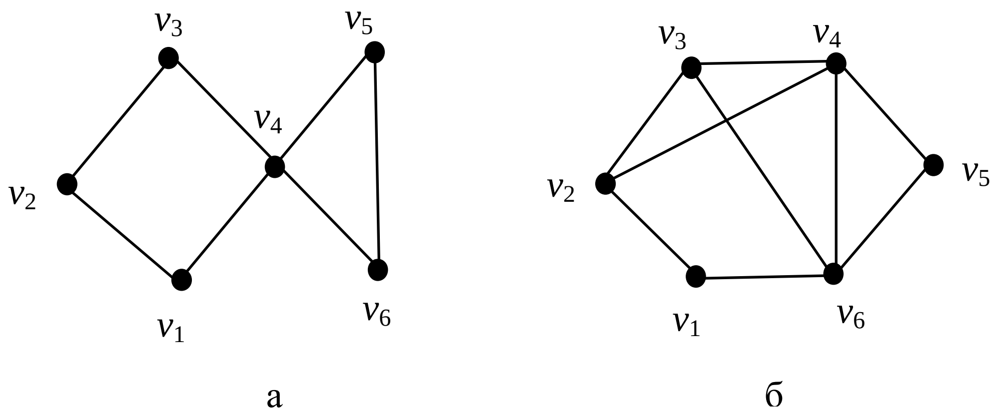


Рис. 15. Эйлеров (а) и гамильтонов (б) графы

Аналогичного общего простого критерия существования гамильтонова цикла в графе нет. Известны лишь некоторые критерии для частных случаев. Так, например, известно, что *если для любой пары несмежных вершин* $v_i, v_j \in V$ *графа G сумма локальных степеней больше или равна числу вершин графа, т. е.* $\deg(v_i) + \deg(v_j) \geq n$, *то в таком графе существует гамильтонов цикл.*

Графы, изображенные на рис. 15, не удовлетворяют этому критерию, но граф на рис. 15, б содержит очевидный гамильтонов цикл – (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) и поэтому является гамильтоновым.

Замечание 2. Приведенное достаточное условие существования гамильтонова цикла в графе не является необходимым (см. рис. 15, б).

Замечание 3. Этот критерий не справедлив для мультиграфа и графа, имеющего петли.

Проблема поиска способа построения гамильтонова цикла – одна из важных задач теории графов. Существует несколько достаточно сложных алгоритмов решения этой задачи.

С задачей нахождения гамильтонова цикла связана з а д а ч а о к о м м и в о я ж е р е. Суть задачи заключается в следующем. Район, который должен посетить бродячий торговец, содержит несколько городов, расстояния между которыми известны. Требуется найти маршрут, проходящий через все пункты по одному разу и возвращающийся в исходный город. Если таких маршрутов несколько, требуется найти кратчайший из них.

1.7. Примеры решения задач с использованием графов

Пример 1. Студенты Андреев, Борисов, Васильев и Григорьев играли в шахматы. Каждый сыграл с каждым по одной партии. Сколько партий было сыграно?

Эту комбинаторную задачу решим с помощью полного графа с четырьмя вершинами – А, Б, В, Г (рис. 16), обозначенными по первым буквам фамилий каждого из шахматистов. В полном графе проводятся все возможные ребра. В данном случае отрезки-ребра обозначают шахматные партии, сыгранные каждой парой студентов. Из рис. 16 видно, что граф имеет шесть ребер, значит, и партий было сыграно шесть.

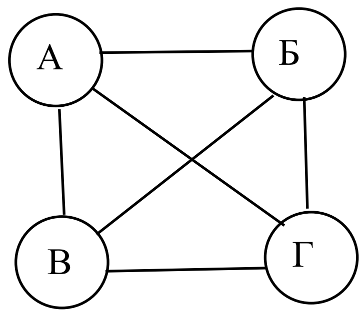


Рис. 16. Граф, отображающий шахматный турнир

Пример 2. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, если цифры в числе могут повторяться?

Первой цифрой составляемого трехзначного числа может быть либо 1, либо 2. Второй цифрой может быть любая из трех данных цифр, третьей – также любая из цифр 0, 1, 2.

Изобразив сказанное с помощью дерева вариантов, повернутого на 90^o (рис. 17), получаем ответ: 18 чисел.

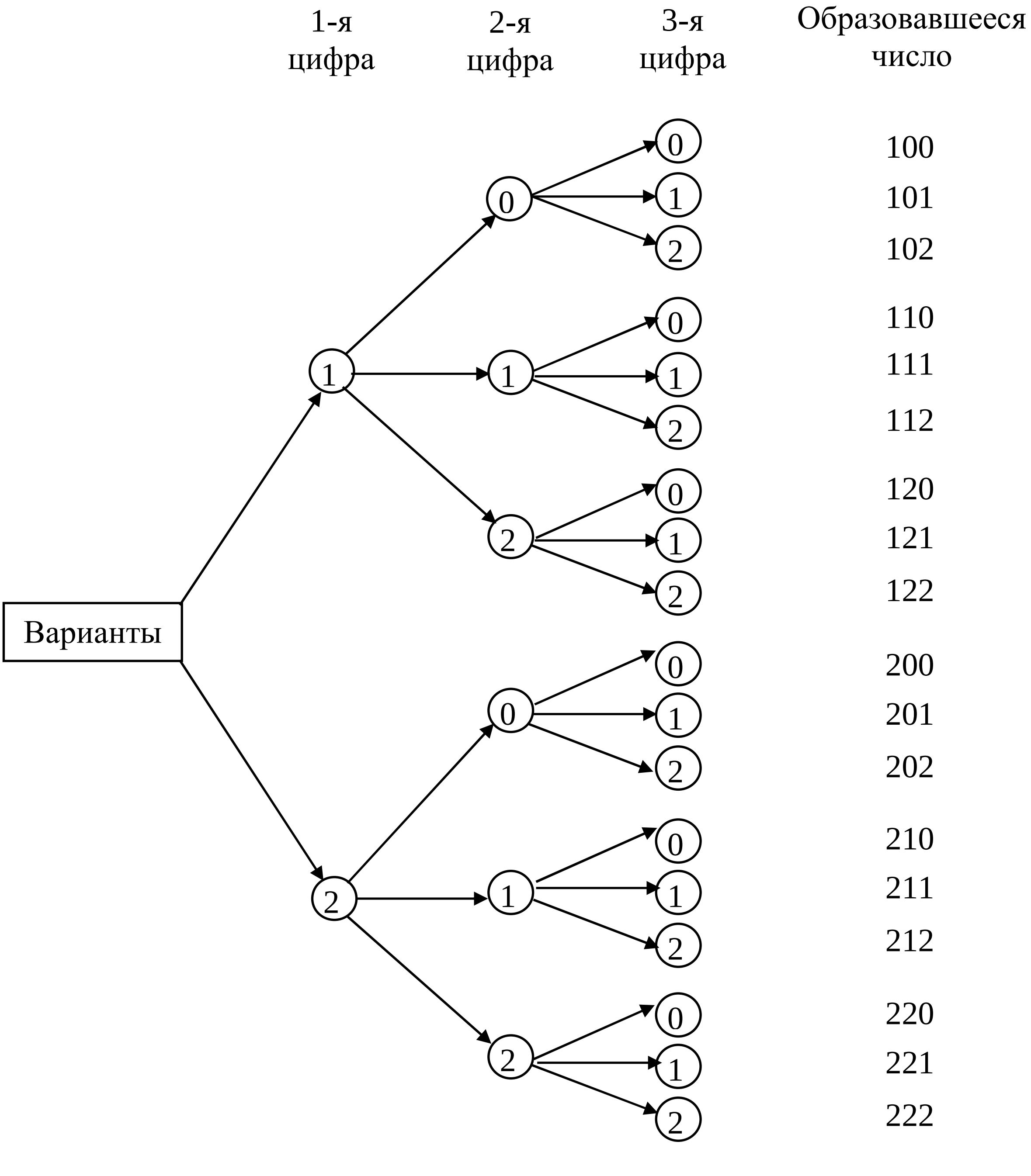


Рис. 17. Дерево вариантов для примера 2

Пример 3. Составить топологический и сигнальный графы для электрической схемы с источником напряжения E (рис. 18).

Топологические методы анализа электрических схем основаны либо на аналитическом, либо на геометрическом способе описания свойств графа, изображающего исследуемую электрическую схему.

При составлении топологического графа (рис. 19) для электрической схемы (см. рис. 18) выбираем вершины графа – узлы рассматриваемой электрической схемы, ветви графа – ветви электрической схемы. Направления ветвей выбираем согласно направлению протекания в них тока.

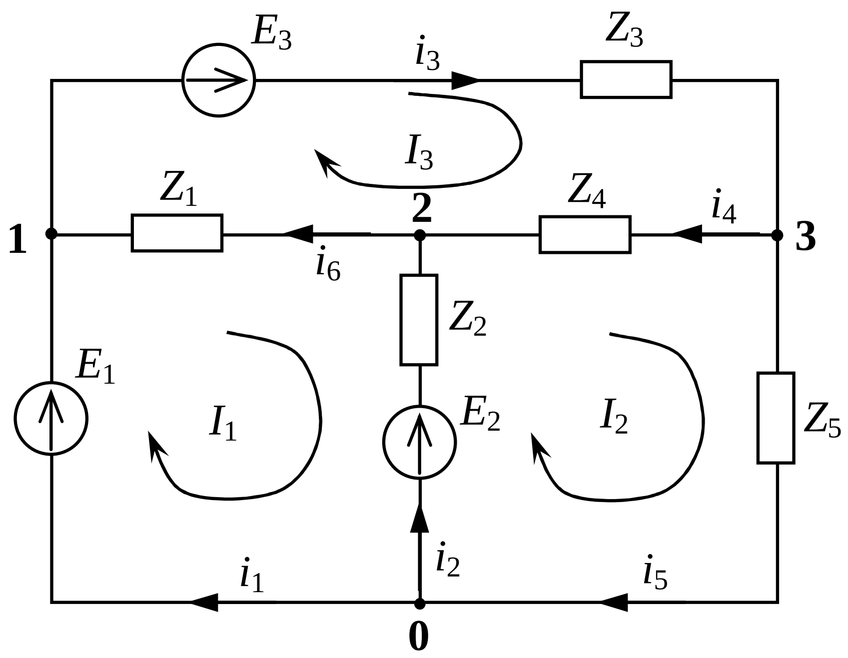


Рис. 18. Электрическая схема для примера 3

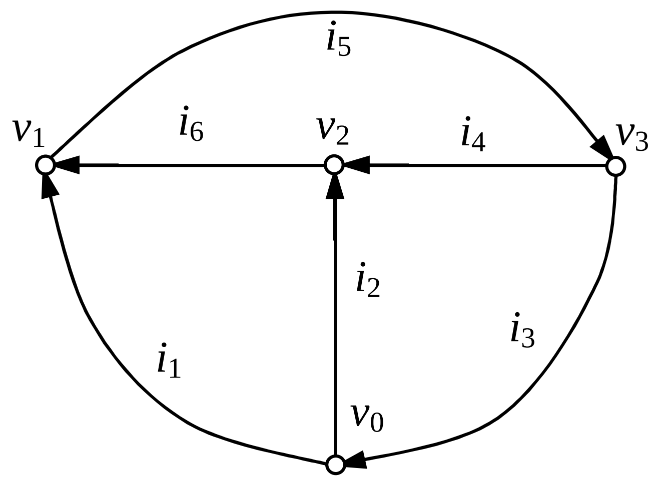


Рис. 19. Топологический граф для примера 3

Сигнальным графом называют направленный граф, представляющий графическое изображение системы линейных уравнений электрической схемы, а не ее топологию. Можно построить граф по заданной системе уравнений и составить систему уравнений по сигнальному графу.

Пользуясь методом контурных токов, можно записать для этой схемы следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} E_1 - E_2 = I_1(Z_1 + Z_2) - I_2 Z_2 - I_3 Z_1; \\ E_2 = -I_1 Z_2 + I_2(Z_2 + Z_4 + Z_5) - I_3 Z_4; \\ E_3 = -I_1 Z_1 - I_2 Z_4 + I_3(Z_1 + Z_3 + Z_4). \end{cases} \tag{1}$$

Нормализуем систему уравнений (1):

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{E_1 - E_2}{Z_1 + Z_2} + \dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I_2 + \dfrac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I_3; \\ I_2 = \dfrac{E_2}{Z_2 + Z_4 + Z_5} + \dfrac{Z_2}{Z_2 + Z_4 + Z_5} I_1 + \dfrac{Z_4}{Z_2 + Z_4 + Z_5} I_3; \\ I_3 = \dfrac{E_3}{Z_1 + Z_3 + Z_4} + \dfrac{Z_1}{Z_1 + Z_3 + Z_4} I_1 + \dfrac{Z_4}{Z_1 + Z_3 + Z_4} I_2. \end{cases} \tag{2}$$

Общее число узлов – шесть, так как имеем три зависимые переменные (токи) и три независимые переменные (ЭДС). Изображаем эти узлы на поле графа. По нормализованным уравнениям (2) строим граф (рис. 20).

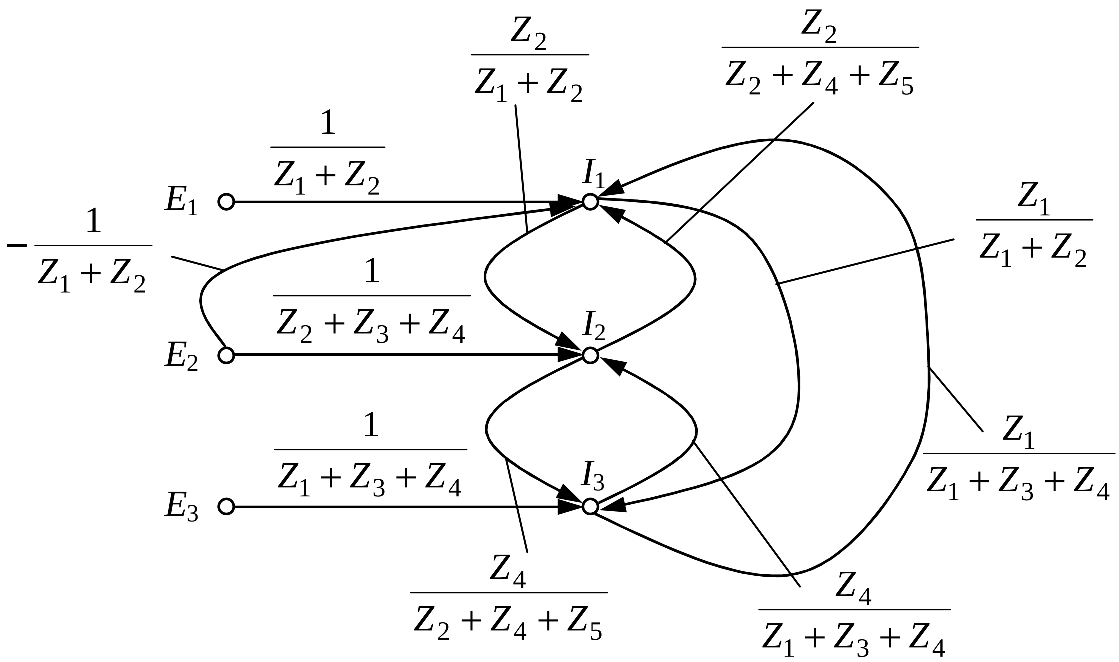


Рис. 20. Сигнальный граф для примера 3

Замечание 4. Для того чтобы от изучаемой системы, например, какой-либо электрической цепи, перейти к соответствующему ей графу, можно применять уравнения, записанные на основании законов Кирхгофа либо составленные по методу узловых потенциалов или контурных токов и т. п.

Граф наглядно представляет соотношение между переменными величинами заданной системы уравнений. Кроме того, применение теории графов позволяет во многих случаях ускорить определение зависимости любой переменной величины через остальные переменные непосредственно из конфигурации графа.

Пример 4. Задача о нахождении кратчайшего пути между станциями транспортной сети.

Пусть задана железнодорожная сеть, состоящая из n станций, соединенных между собой особым образом, на основании которой построен ориентированный граф (рис. 21). Для каждой дуги заданы числа, называемые длинами дуг, которые определяют расстояние между соответствующими железнодорожными станциями. Длиной пути называется сумма длин входящих в него дуг (если длины дуг не заданы, то длина пути определяется как число входящих в него дуг). Задача заключается в поиске кратчайшего пути (пути минимальной длины) от одной станции до другой.

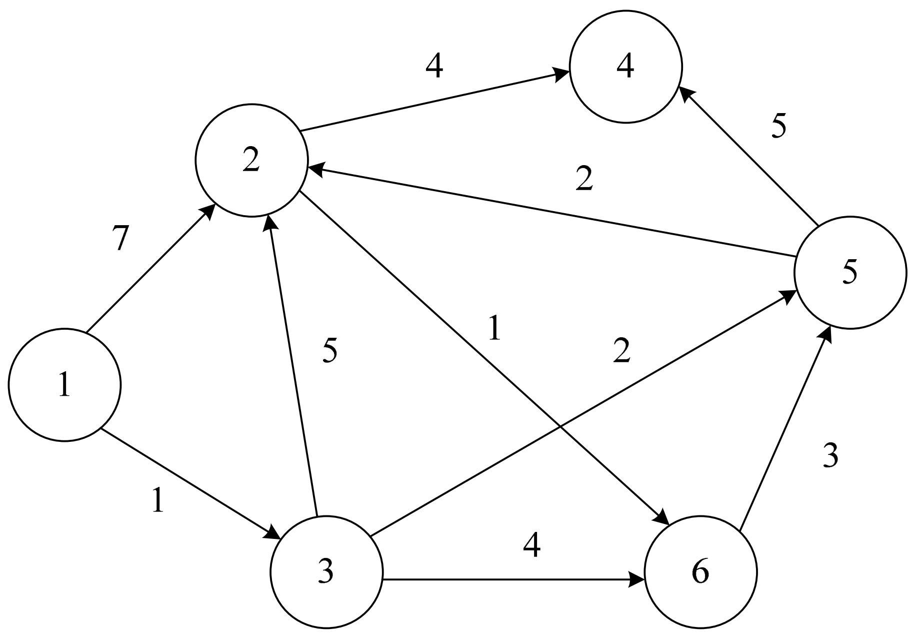


Рис. 21. Исходные данные к задаче о кратчайшем пути

В данной задаче необходимо определить кратчайший путь перемещения груза со станции 1 (вершина 1 орграфа, представленного на рис. 21) на станцию 4 (вершина 4 орграфа, представленного на рис. 21) с учетом возможных направлений перемещения груза по сети железных дорог.

Введем обозначение: $C(T)$ – длина кратчайшего пути из вершины 1 в вершину T. Поскольку любой путь, который надо рассмотреть, состоит из дуг, а дуг конечное число и каждая входит не более одного раза, то претендентов на кратчайший путь конечное число и минимум из конечного числа элементов всегда достигается. Рассматриваемая задача состоит в вычислении $C(4)$ и указании пути, на котором этот минимум достигается.

Для исходных данных, представленных на рис. 21, в вершину 3 входит только одна стрелка, как раз из вершины 1, и около этой стрелки стоит ее длина, равная 1, поэтому $C(3) = 1$. Кроме того, очевидно, что $C(1) = 0$.

В вершину 4 можно попасть либо из вершины 2, пройдя путь, равный 4, либо из вершины 5, пройдя путь, равный 5. Поэтому справедливо соотношение $C(4) = \min \{C(2) + 4; C(5) + 5\}$.

Таким образом, проведена реструктуризация задачи – нахождение $C(4)$ сведено к нахождению $C(2)$ и $C(5)$.

В вершину 5 можно попасть либо из вершины 3, пройдя путь, равный 2, либо из вершины 6, пройдя путь, равный 3. Поэтому справедливо соотношение $C(5) = \min \{C(3) + 2; C(6) + 3\}$.

Мы знаем, что $C(3) = 1$. Поэтому $C(5) = \min \{3; C(6) + 3\}$.

Поскольку очевидно, что $C(6)$ – положительное число, то из последнего соотношения вытекает, что $C(5) = 3$.

В вершину 2 можно попасть либо из вершины 1, пройдя путь, равный 7, либо из вершины 3, пройдя путь, равный 5, либо из вершины 5, пройдя путь, равный 2. Поэтому справедливо соотношение $C(2) = \min \{C(1) + 7; C(3) + 5; C(5) + 2\}$.

Нам известно, что $C(1) = 0$, $C(3) = 1$, $C(5) = 3$. Поэтому $C(2) = \min \{0 + 7; 1 + 5; 3 + 2\} = 5$.

Теперь мы можем найти $C(4)$: $C(4) = \min \{C(2) + 4; C(5) + 5\} = \min \{5 + 4; 3 + 5\} = 8$.

Таким образом, длина кратчайшего пути равна 8. Из последнего соотношения ясно, что в вершину 4 надо идти через вершину 5. Возвращаясь к вычислению $C(5)$, видим, что в вершину 5 надо идти через вершину 3, а в вершину 3 можно попасть только из вершины 1. Итак, кратчайший путь таков: $1 \to 3 \to 5 \to 4$.

Задача о кратчайшем пути для конкретных исходных данных (см. рис. 21) полностью решена.

Предложенный способ можно применить также для нахождения кратчайшего пути неориентированного графа, отражающего сеть автомобильных дорог (см. рис. 5).

2. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1) Как определить термин «смежные ребра графа» по аналогии с термином «смежные вершины графа» (п. 1.2)?

2) Почему не существует маршрута прохождения через все кенигсбергские мосты (см. рис. 1), который начинается и заканчивается в одной и той же точке и только раз проходит по каждому мосту?

3) Каково минимальное и максимальное расстояние (в километрах) между населенными пунктами, изображенными на рис. 5?

4) Есть ли петли в графах на рис. 2 и 9?

5) Сколько ребер имеет полный граф с четырьмя вершинами:

без учета петель;

с добавлением всех разных петель (по одной на вершину)?

6) Почему матрица смежности неориентированного графа симметрична относительно главной диагонали?

7) Являются ли графы, изображенные на рис. 2, 5, 8, а, 9, связными?

8) Сколько простых цепей соединяют вершины v_3 и v_7 графа, изображенного на рис. 8, а? Какова длина самой короткой из них и самой длинной?

9) Есть ли циклы в графах, изображенных на рис. 2, 5, 8, 9?

10) Какова высота дерева, изображенного на рис. 14? Каковы глубина вершины v_7 и ее высота?

11) Сколько листьев у двоичного дерева высотой n, если у каждого предка по два потомка? Сначала объяснить это для $n = 4$, построив нужное дерево, затем обобщить результат для общего случая.

12) Объясните, почему граф, изображенный на рис. 15, а, – эйлеров граф? Выполняется ли для него необходимое и достаточное условие существования эйлерова цикла?

13) Объясните, почему граф, изображенный на рис. 15, б, – гамильтонов граф? Выполняется ли для него достаточное условие существования гамильтонова цикла?

14) Имеются ли эйлеровы и гамильтоновы циклы в графах, изображенных на рис. 9, 15, а, б?

15) Имеются ли гамильтоновы циклы в графах, изображенных на рис. 9, 15, а, б?

16) Почему полный граф всегда является гамильтоновым, а при нечетном числе n – еще и эйлеровым?

3. ЗАДАНИЯ

Решить задачи, используя графы. Все задания выполнить письменно.

3.1. Общая часть

1) Студенты Андреев, Борисов, Васильев и Григорьев после возвращения в свои города из Москвы со студенческой олимпиады по информатике послали друг другу письма по электронной почте. Причем каждый студент послал каждому по одному письму. Сколько всего писем было послано?

Указание. Использовать ориентированный граф.

2) В институте k студентов занимаются теннисом. Сколько различных пар спортсменов (N), отличающихся лишь составом, можно образовать?

Указание. Использовать в качестве образца пример 2.

3) По графам, изображенным на рис. 2, 5, 6, 9, 14, 15, а, б, 16, составить матрицы смежности и инцидентности.

4) Диспетчер составляет расписание занятий в студенческой группе на какой-то день недели. В этот день у студентов должно быть четыре пары уроков, причем обязательно одна сдвоенная пара – информатика. Сколько различных вариантов расписания занятий может составить диспетчер, если оставшиеся две пары он комбинирует из математики и физики?

Указание. Использовать в качестве образца пример 2.

5) Составить свое генеалогическое дерево (по мужской или женской линии – по желанию).

6) Составить граф в виде дерева, отражающий структуру ОмГУПСа (ректорат, факультеты, группы, студенты).

7)* Дан взвешенный граф, изображающий структуру расположения населенных пунктов некоторого района (рис. 22). Числа возле ребер графа означают длину дорог в километрах. Решить задачу коммивояжера (п. 1.5).

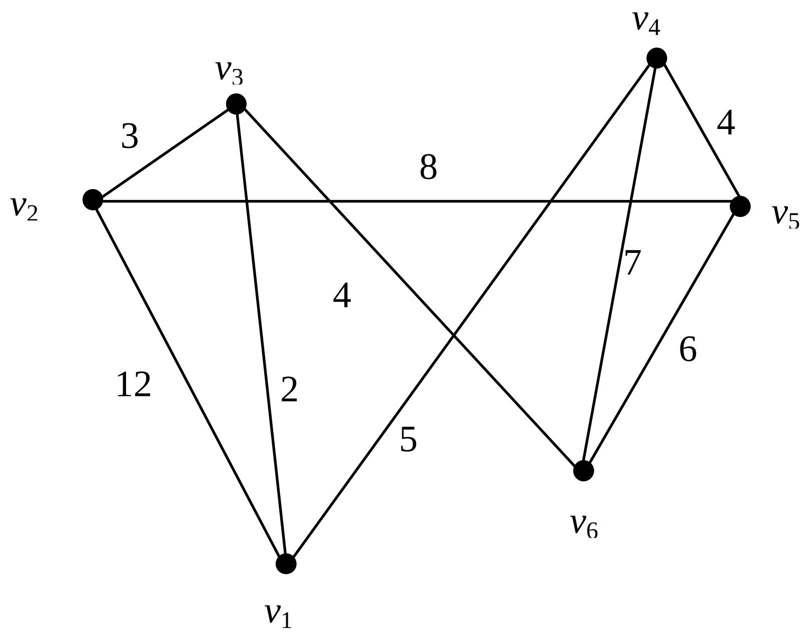


Рис. 22. Изображение графа (для задания 7)

Указание. Сначала надо доказать существование гамильтонова цикла (п. 1.6) в этом графе. Для этого надо вычислить валентность всех вершин графа, потом составить все возможные пары несмежных вершин этого графа и проверить выполнение достаточных условий существования гамильтонова графа.

Далее надо перебрать все возможные гамильтоновы циклы. Для этого следует построить дерево вариантов обхода всех шести вершин (побывав в каждой по одному разу). Его высота должна быть равна пяти. За корень можно взять любую вершину. Вершинами первого уровня будут вершины, смежные для той, что взяли в качестве корневой вершины, их лучше перечислять в лексикографическом (алфавитном) порядке. Смежные вершины для каждой из вершин 1-го порядка (перечисленные также в лексикографическом порядке) будут вершинами дерева 2-го порядка и т. д.

Затем надо выбрать все маршруты, длина которых равна пяти и которые заканчиваются в вершинах, связанных с корнем. Эти пять ребер и замыкающее звено образуют гамильтонов цикл. Рассчитать длину каждого гамильтонова цикла в километрах и выбрать цикл наименьшей длины.

8) Какие из приведенных на рис. 23 фигур можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, не проходя вторично по уже проведенной линии и в конце рисования возвращаясь в ту точку, с которой начали? Результат объяснить.

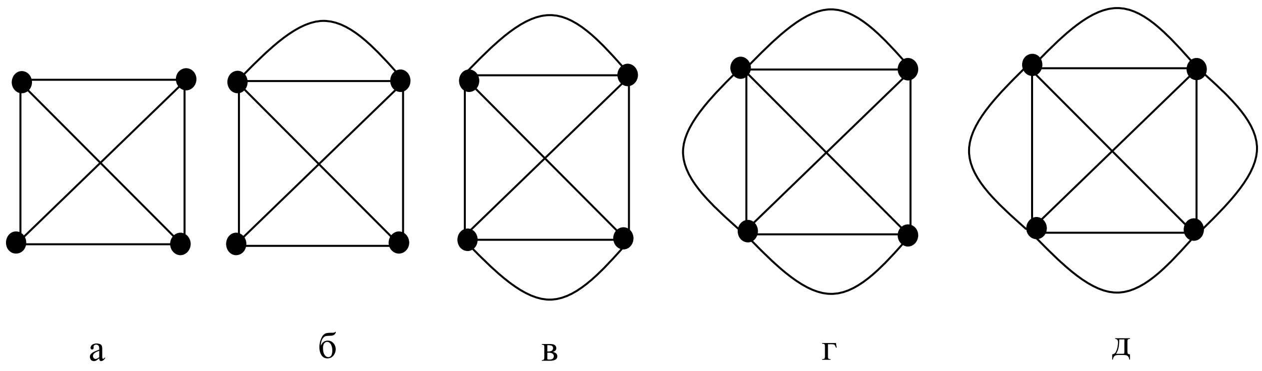


Рис. 23. Примеры фигур для задания 8

9) Определить кратчайший путь от станции 6 до станции 1 транспортной сети, представленной на рис. 24.

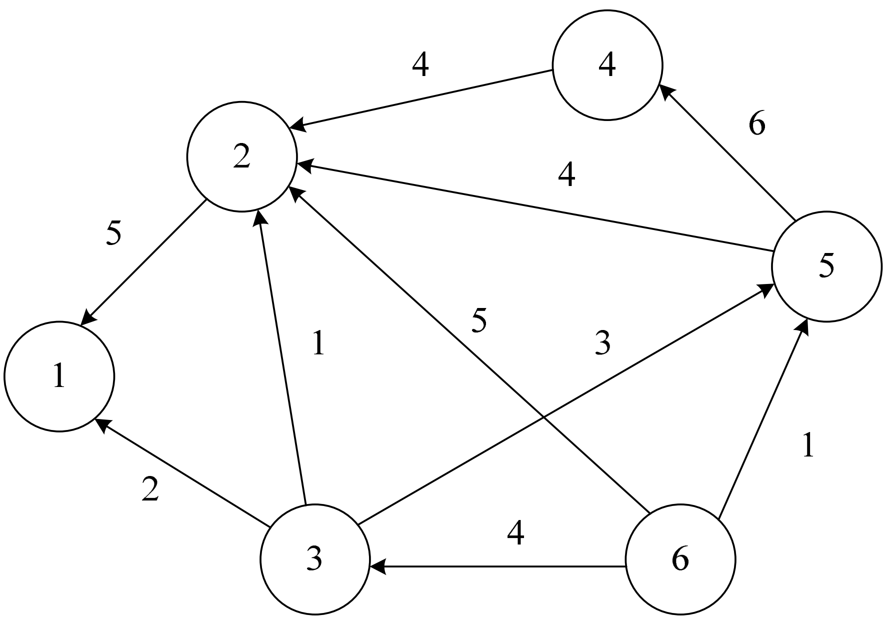


Рис. 24. Исходные данные к задаче 9 о нахождении кратчайшего пути

3.2. Индивидуальные задания

Задание 1. В соответствии с номером варианта по матрицам смежности и инцидентности, приведенным в табл. 1, составить:

а) по матрице смежности – граф и матрицу инцидентности;

б) по матрице инцидентности – граф и матрицу смежности.

Таблица 1

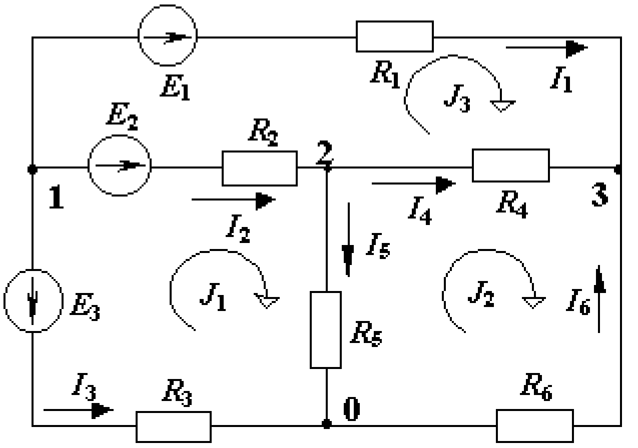
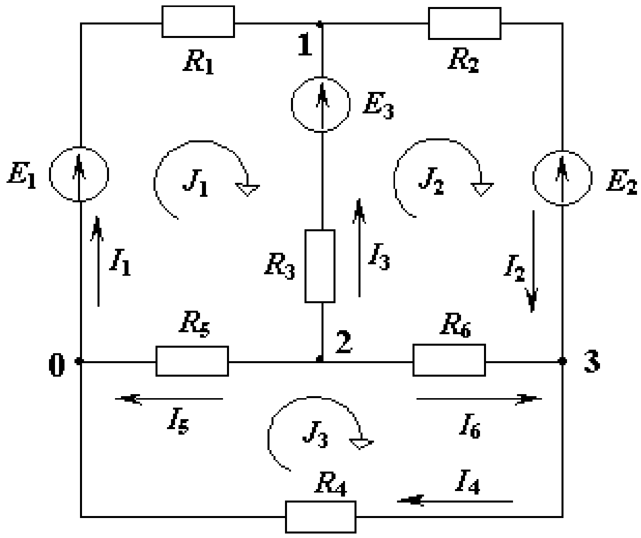
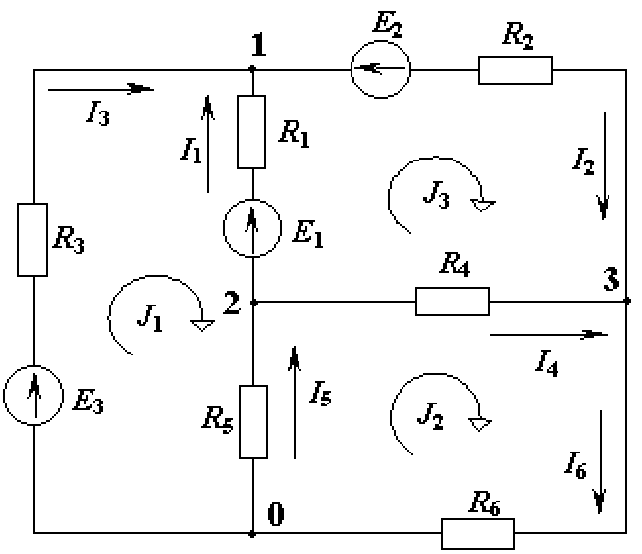
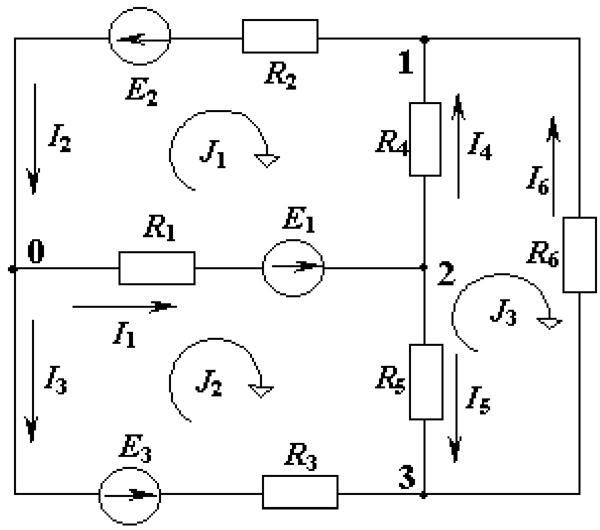
Матрицы смежности и инцидентности для задания 1

Номер варианта	Матрица смежности	Матрица инцидентности
1, 6, 11	$R=\begin{Vmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{Vmatrix}$	$Q=\begin{Vmatrix}1&0&0&-1&0&0\\-1&1&0&0&-1&-1\\0&-1&1&0&0&1\\0&0&-1&1&1&0\end{Vmatrix}$
2, 7, 12	$R=\begin{Vmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\end{Vmatrix}$	$Q=\begin{Vmatrix}-1&0&0&-1&0&1\\1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&-1\\0&0&-1&1&-1&0\end{Vmatrix}$
3, 8, 13	$R=\begin{Vmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{Vmatrix}$	$Q=\begin{Vmatrix}-1&0&1&-1&0&0\\0&-1&0&1&0&1\\1&0&0&0&1&-1\\0&1&-1&0&-1&0\end{Vmatrix}$
4, 9, 14	$R=\begin{Vmatrix}0&0&1&1\\0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{Vmatrix}$	$Q=\begin{Vmatrix}-1&0&-1&-1&0&0\\0&-1&1&1&1&0\\0&1&0&0&0&-1\\1&0&0&0&-1&1\end{Vmatrix}$
5, 10, 15	$R=\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\1&1&0&1\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{Vmatrix}$	$Q=\begin{Vmatrix}1&0&0&1&0&-1\\-1&-1&0&0&1&0\\0&1&-1&0&0&1\\0&0&1&-1&-1&0\end{Vmatrix}$

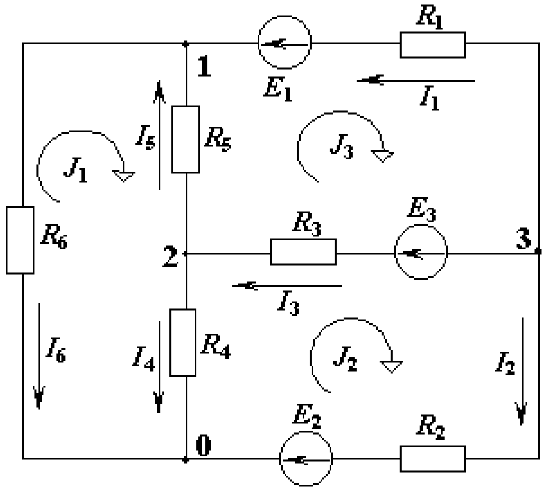
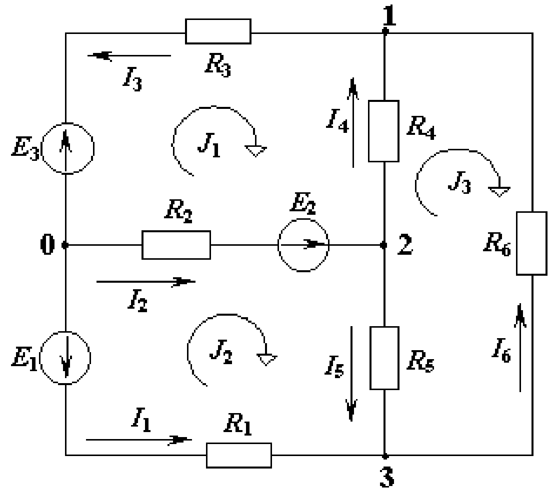
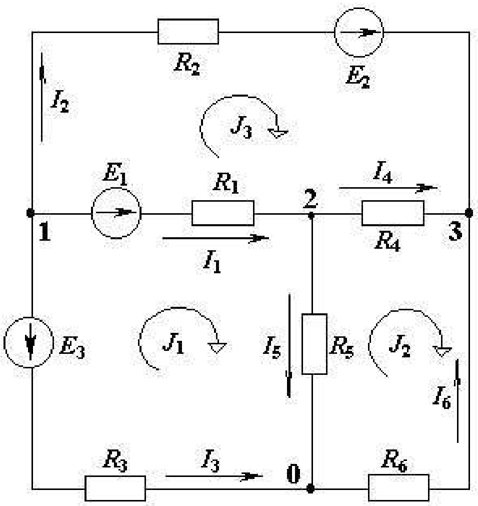
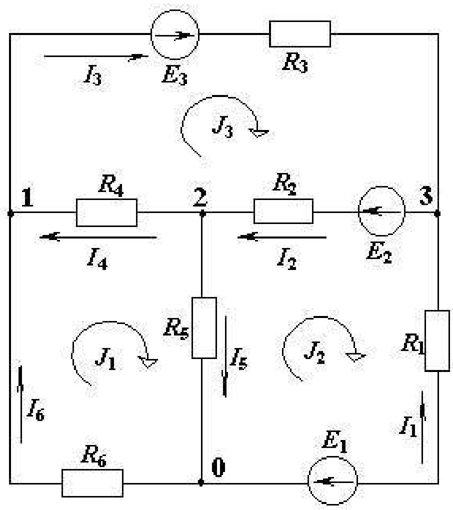
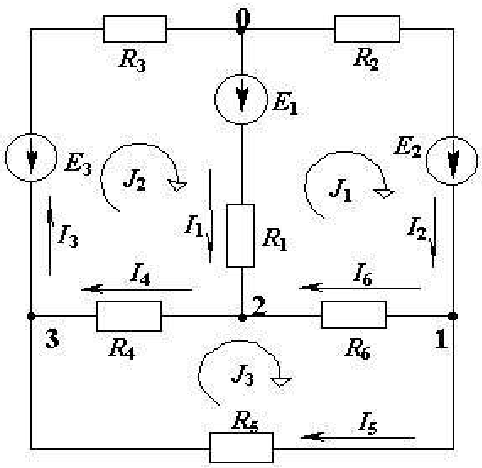
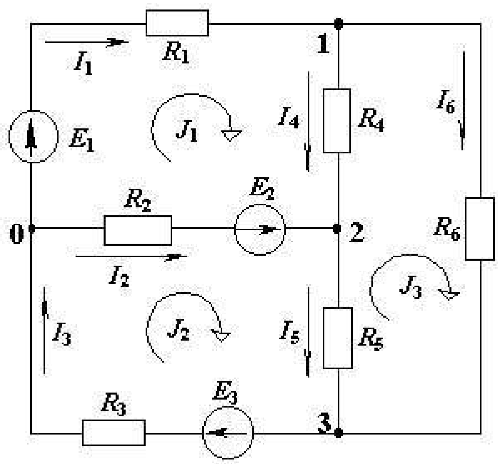
З а д а н и е 2. В соответствии с номером варианта составить топологический граф для электрической схемы, приведенной в табл. 2, по которому составить уравнения для первого закона Кирхгофа.

Таблица 2

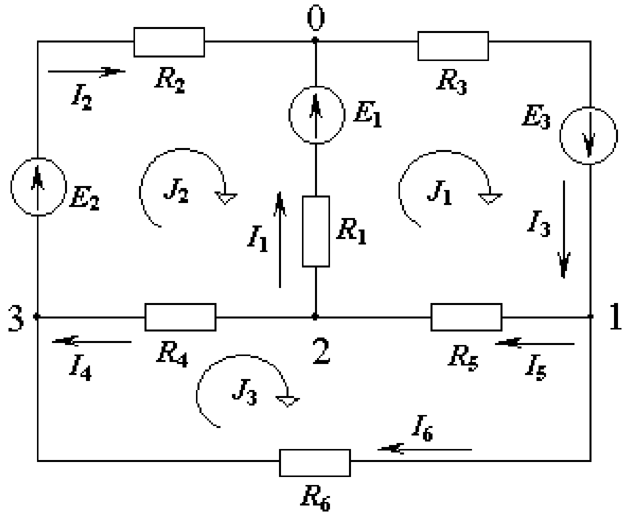
Схемы электрических цепей для задания 2

<table>
<tr><th colspan="2">Электрические схемы</th></tr>
<tr><td>Вариант 1
</td><td>Вариант 2
</td></tr>
<tr><td>Вариант 3
</td><td>Вариант 4
</td></tr>
</table>

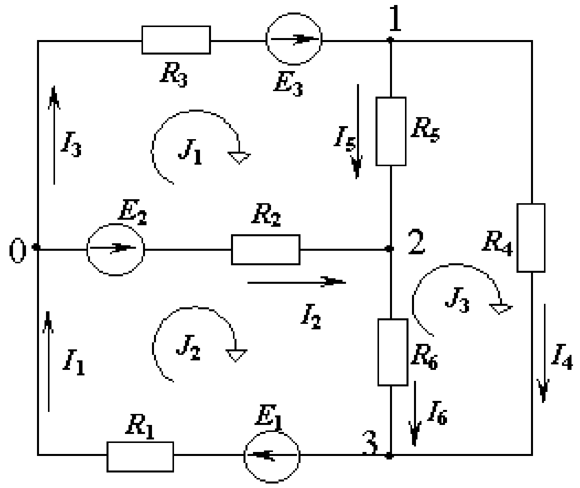
Продолжение табл. 2

<table>
<tr>
<td>Вариант 5

</td>
<td>Вариант 6

</td>
</tr>
<tr>
<td>Вариант 7

</td>
<td>Вариант 8

</td>
</tr>
<tr>
<td>Вариант 9

</td>
<td>Вариант 10

</td>
</tr>
</table>

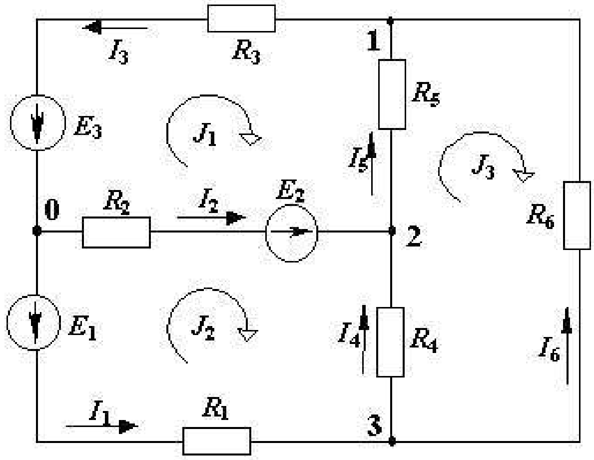
Вариант 11



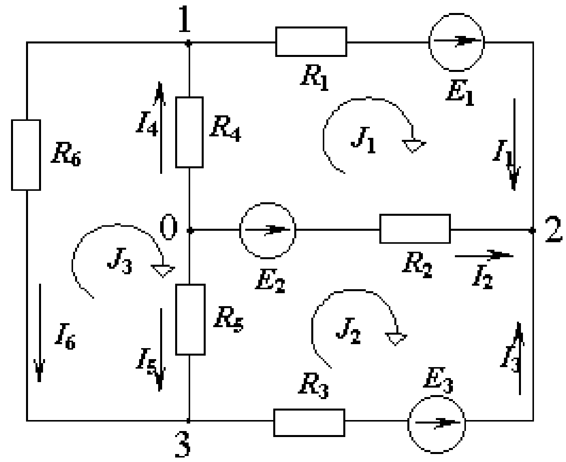
Вариант 12



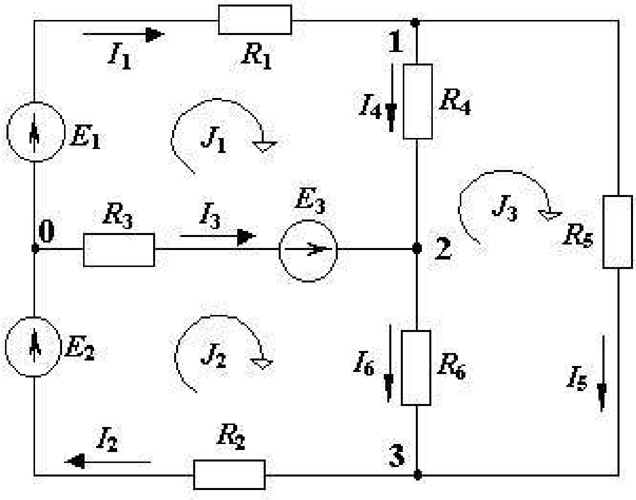
Вариант 13



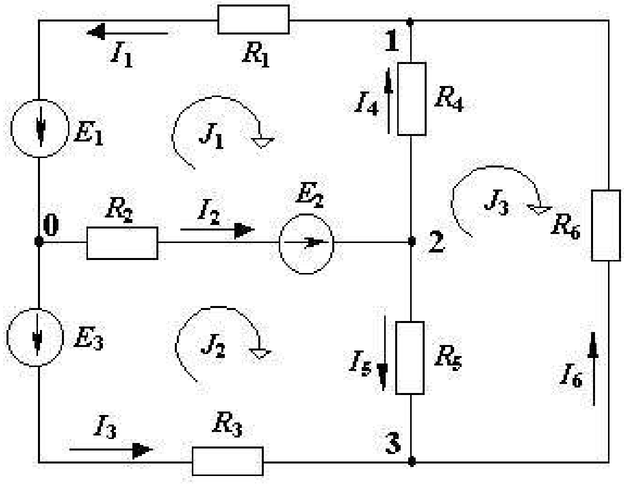
Вариант 14



Вариант 15



Вариант 16



З а д а н и е 3. В городе N (не в Кенигсберге) протекала река. В реке было два острова, соединенных семью мостами с берегами реки и друг с другом. На рис. 25 изображено девять мостов, но для каждого индивидуального варианта два моста, указанных в табл. 3, следует считать отсутствующими.

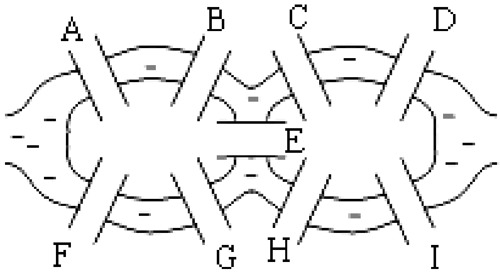


Рис. 25. Схема расположения мостов в городе N

Таблица 3

Таблица исходных данных для задания 3

Номер варианта	Отсутствующие мосты	
1	A	B
2	A	C
3	A	D
4	A	E
5	A	F
6	A	G
7	A	H
8	A	I
9	B	E
10	C	E
11	D	E
12	E	F
13	E	G
14	E	H
15	E	I

Необходимо построить граф, по которому определить, можно ли найти маршрут прохождения:

1) через все мосты, который только раз проходит по каждому мосту;

2) через все мосты, который начинается и заканчивается в одной и той же точке и только раз проходит по каждому мосту;

3) по мостам через все участки суши, который начинается и заканчивается в одной и той же точке и только раз проходит по каждому участку суши.

Библиографический список

1. Информатика: Учебник / Б. В. Соболь, А. Б. Галин и др. Ростов-на-Дону: Феникс, 2005. 448 с.

2. Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженера. 3-е изд., перераб. и доп. / О. П. Кузнецов. СПб: Лань, 2004. 400 с.

3. Кук Д. Компьютерная математика / Д. Кук, Г. Бейз. М.: Наука, 1990. 384 с.

4. Бурков В. Н. Теория графов в управлении организационными системами / В. Н. Бурков, А. Ю. Заложнев, Д. А. Новиков. М.: Синтег, 2001. 124 с.

5. Татур Т. А. Установившиеся и переходные процессы в электрических цепях: Учебное пособие / Т. А. Татур, В. Е. Татур. М.: Высшая школа, 2001. 407 с.

6. Оре О. Теория графов / О. Оре. М.: Наука, 1968. 352 с.

Учебное издание

СОКОЛОВСКАЯ Нина Николаевна,
ЕРОШЕНКО Александра Викторовна

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Редактор Н. А. Майорова
Корректор Д. А. Волнина

***

Подписано в печать .02.2011. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$.
Плоская печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 2,2.
Тираж 400 экз. Заказ .

**

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35