Н. В. ГОЛУБЕВА

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИЛОЖЕНИЯ SMATH STUDIO ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

ОМСК 2022

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

Н. В. Голубева

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИЛОЖЕНИЯ SMATH STUDIO ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Учебное пособие

Омск 2022

УДК 519.65(075.8)
ББК 22.19я73
Г62

Голубева Н. В. **Использование возможностей приложения SMath Studio для решения задач математического моделирования**: Учебное пособие / Н. В. Голубева; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2022. 122 с.

В учебном пособии рассматриваются основные возможности и инструменты математического пакета SMath Studio для решения различных классов задач математического моделирования систем и процессов при изучении дисциплин «Математическое моделирование систем и процессов» и «Численные методы моделирования», включенных в обязательную часть образовательных программ специалитета и бакалавриата для многих специальностей и направлений.

Предназначено для студентов 2-го и 3-го курсов, обучающихся по специальностям «Системы обеспечения движения поездов», «Подвижной состав железных дорог», «Эксплуатация железных дорог»; по направлениям подготовки «Электроэнергетика и электротехника», «Стандартизация и метрология», «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», «Теплоэнергетика и теплотехника», «Наземные транспортно-технологические комплексы», «Мехатроника и робототехника»; для студентов заочной формы обучения и для обучения с использованием дистанционных образовательных технологий.

Библиогр.: 8 назв. Табл. 1. Рис. 13.

Рецензенты: доктор техн. наук, профессор В. Н. Горюнов;
доктор техн. наук, профессор А. А. Кузнецов;
канд. техн. наук, доцент Л. Д. Федорова.

ISBN 978-5-949-41291-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Важнейшей частью программы подготовки современного специалиста − выпускника технического университета − является обучение его основам, приемам и инструментам математического моделирования − главного научного метода познания, в значительной мере способствующего формированию соответствующих общепрофессиональных компетенций. Решение научных и инженерно-технических задач, связанных с исследованием и проектированием технических систем, оптимизацией их параметров или структуры, оптимальным управлением объектом или прогнозированием его поведения, изучением механизма явлений осуществляется на основе математического моделирования.

Математическое моделирование представляет собой универсальный научный инструмент извлечения нового знания не только в профессиональной деятельности инженера, ученого, но и на всех этапах формирования инновационного специалиста в техническом университете.

Реализация практической части дисциплин «Математическое моделирование систем и процессов», «Численные методы моделирования» (лабораторного практикума) осуществляется на базе современных вычислительно-информационных технологий, мощного инженерного программного обеспечения PTC Mathcad Prime 3.1.

Вынужденный переход вузов от очного формата образовательного процесса к дистанционному формату в связи с пандемией COVID-19 породил много серьезных проблем. Одна из них заключалась в том, что в период отсутствия доступа к компьютерным классам университета многие студенты не имели возможности купить дорогостоящую лицензию и установить на свои компьютеры мощный Mathcad. Для этих студентов реализация лабораторного практикума и НИРС стали возможными только благодаря привлечению альтернативного программного обеспечения (бесплатного). Речь идет о бесплатно распространяемом программном математическом пакете SMath Studio.

Цель данного учебного пособия – познакомить студента с основными возможностями и инструментами математического пакета SMath Studio, особенностями решения различных категорий задач математического моделирования и анализа статических и динамических моделей разной формы представления средствами SMath Studio.

1. ПРИНЦИПЫ СОЗДАНИЯ ДОКУМЕНТОВ SMATH STUDIO

1.1. Интерфейс SMath Studio

SMath Studio – свободно распространяемый (бесплатный) программный математический пакет, разработанный российским программистом Андреем Ивашовым (ссылка на официальный сайт разработчика [1]). Для установки приложения SMath Studio необходимо загрузить дистрибутив с сайта разработчика.

При запуске SMath Studio (версия 0.99.7822) автоматически создается новый пустой документ «Расчет1». Вид окна приложения SMath Studio представлен на рис. 1.1.

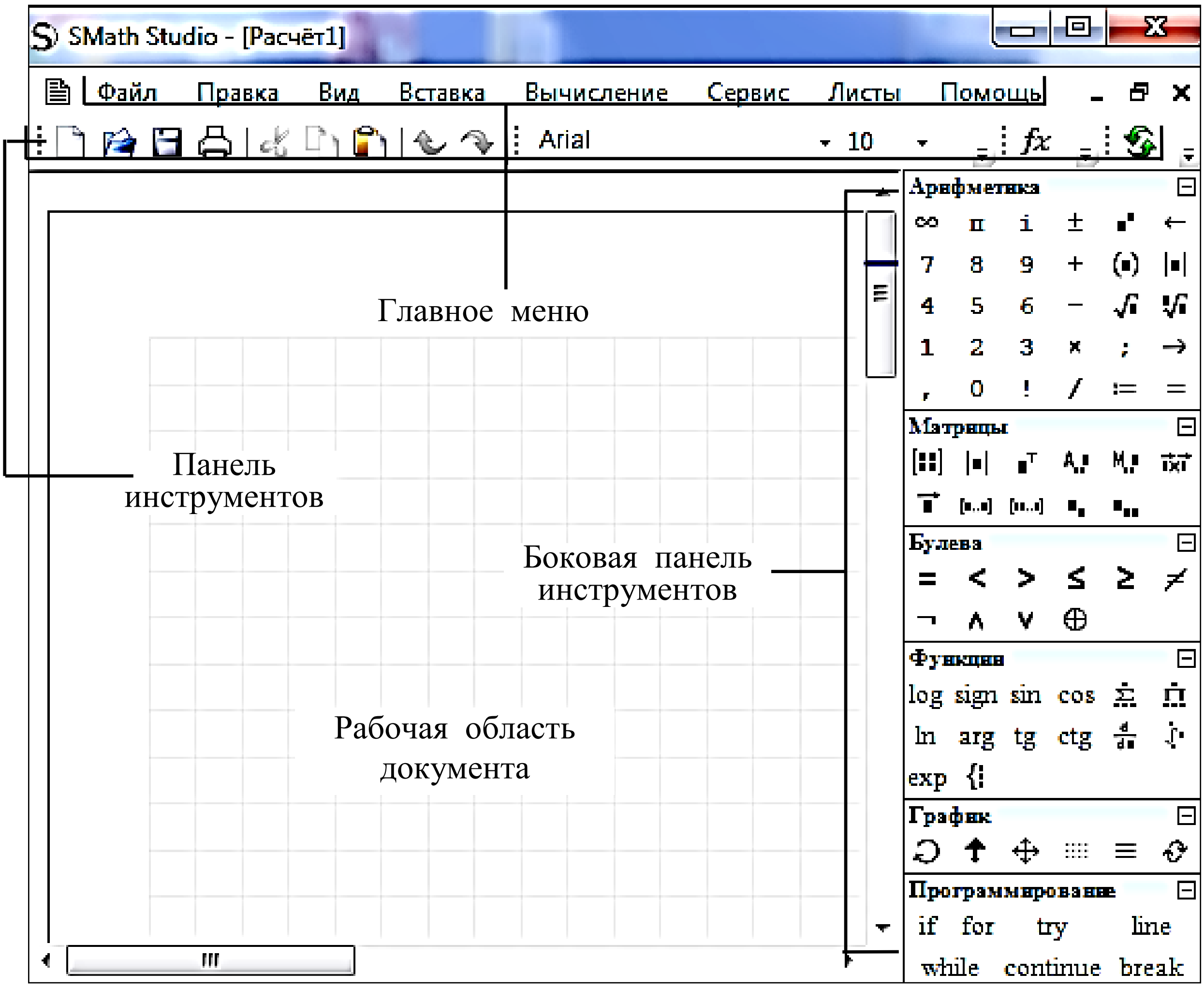


Рис. 1.1. Окно приложения SMath Studio

Главное меню содержит набор меню «Файл», «Правка», «Вид», «Вставка», «Вычисление», «Сервис», «Листы», «Помощь». В каждом меню представлена группа соответствующих команд.

Большинство кнопок панели инструментов дублируют действия команд главного меню: команды для работы с файлами «Открыть», «Сохранить», «Печать», команды для правки документа «Вырезать», «Копировать», «Вставить», команды «Вставить функцию», «Вставить единицу измерения», «Пересчитать лист», «Прервать вычисления».

При сохранении файла – документа SMath Studio − по умолчанию он будет сохранен в формате .sm.

Для того чтобы создать еще один новый документ SMath Studio, можно воспользоваться одним из следующих инструментов:

1) меню Файл => команда Создать расчет;
2) кнопка Создать расчет на панели инструментов;
3) сочетание клавиш Ctrl + N.

Приложение SMath Studio позволяет объединить математические расчеты, тексты, графики и изображения в единый интерактивный документ.

Документ SMath Studio может включать в себя следующие типы областей: область формул, графическую и текстовую области, изображение (рисунок).

Боковая панель инструментов предоставляет пользователю комплект шаблонов различных категорий (панелей): Арифметика, Матрицы, Булева, Функции, График, Программирование, Символы (греческие буквы строчные и прописные).

1.2. Создание текстовых областей

Заголовки, комментарии, выводы и другие текстовые элементы оформления документа вводятся в текстовую область.

Щелчком левой кнопки мыши (ЛКМ) указывается место, где предполагается вставить текстовую область. При этом в данной точке появляется курсор в виде красного крестика. Для вставки текстовой области используют следующие инструменты:

1) меню Вставка => команда Текстовая область;
2) сочетание клавиш Shift + ”.

При этом курсор принимает вид черной вертикальной линии, охваченной рамкой. В эту рамку можно вводить нужный текст. Для продолжения ввода текста в следующую строку нажать Shift + Enter.

Ширину текстовой области можно изменять. Для этого надо щелкнуть ЛКМ внутри текстовой области, навести указатель мыши на ее правую границу и, когда он примет форму двунаправленной стрелки ⟺, при нажатой ЛКМ перемещать указатель.

SMath Studio предлагает следующие средства для форматирования текстовых областей:

1) кнопки панели инструментов, представленные на рис. 1.2;

2) меню Правка => команды Межстрочный интервал, Выравнивание.

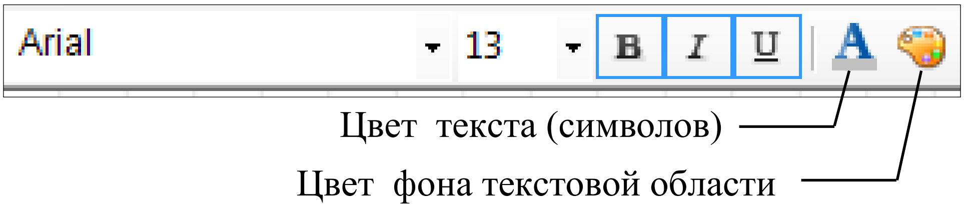


Рис. 1.2. Кнопки панели инструментов для форматирования текстовой области

1.3. Создание области формул

В том месте, где предполагается начало формулы, следует щелкнуть ЛКМ. При этом автоматически появляется курсор в виде красного крестика. При вводе первого символа формулы появляются о б л а с т ь ф о р м у л ы, ограниченная серой рамкой, и вертикальный черный курсор. Продолжить ввод формулы.

Ввод простейших арифметических операторов (сложение (+), вычитание (−), деление (/), умножение (*****) , возведение в степень (^)) быстрее всего сделать с клавиатуры.

Для ввода остальных операторов (корень квадратный $\sqrt{\ }$, корень произвольной степени $\sqrt[n]{\ }$, абсолютное значение $|\ |$, факториал !, плюс/минус ±, символ бесконечности и др.) следует использовать шаблоны с боковой панели инструментов категории Арифметика.

Константа ***e*** – основание натурального логарифма – вводится с клавиатуры (латинский символ *e*), число ***π*** вводится с боковой панели Арифметика.

Физическая константа $\boldsymbol{\mu_0}$ – магнитная постоянная (магнитная проницаемость вакуума) – вводится с боковой панели инструментов Символы (α – ω) (рис. 1.3). Аналогичным способом вводится в документ электрическая постоянная ε_0.

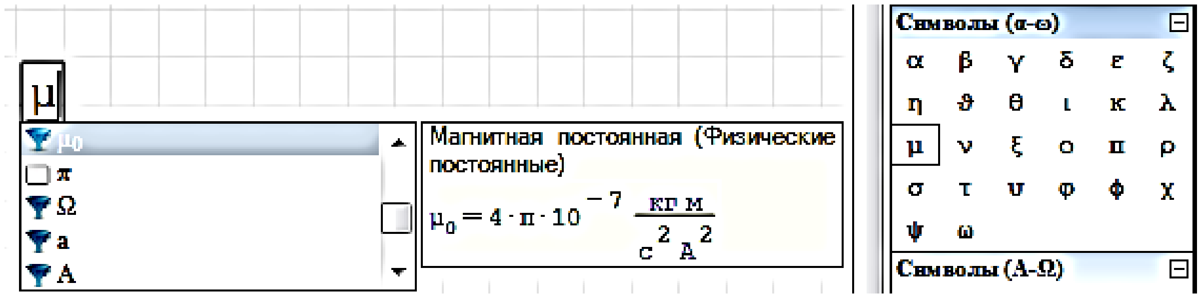


Рис. 1.3. Принцип ввода физических констант

При вводе вещественных чисел в SMath Studio в качестве разделителя целой и дробной частей по умолчанию используется запятая. При необходимости можно задать другой символ в качестве разделителя целой и дробной частей. Для этого следует воспользоваться меню Сервис => Опции => Вкладка Интерфейс. Соответствующее диалоговое окно представлено на рис. 1.4.

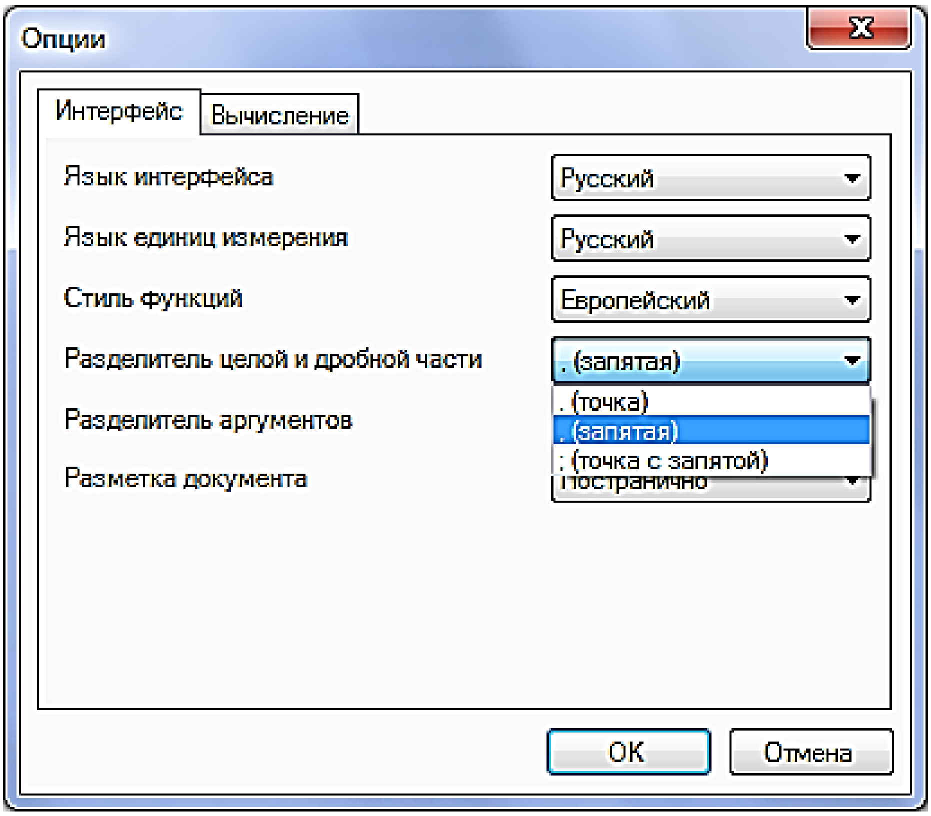


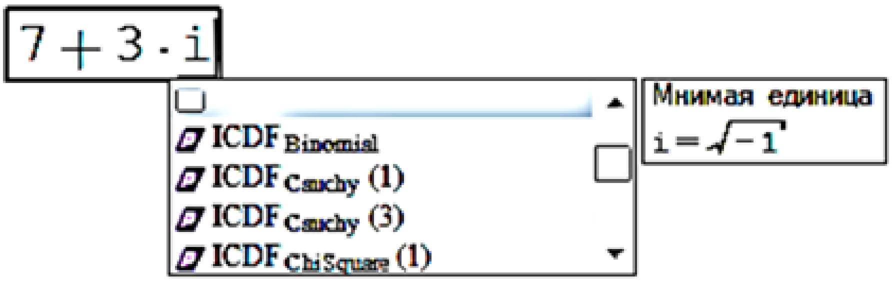
Рис. 1.4. Диалоговое окно Опции

Можно использовать вещественные числа в экспоненциальной форме:

$$w := 4 \cdot 10^{12} \qquad a := 2 \cdot 10^{-5}$$

$$w \cdot a = 8 \cdot 10^{7}$$

Для задания комплексного числа в конце мнимой части (справа от нее) ввести с клавиатуры латинскую букву i:



После того как выражение введено полностью, требуется получить результат его вычисления. Для этого вводится оператор вычисления – символ «=» с клавиатуры или с боковой панели Арифметика.

Примеры 1.1 и 1.2 демонстрируют создание двух вариантов областей формул.

Пример 1.1. Ввести и вычислить значение числового выражения.

$$\left|72{,}21 - e^{3{,}2}\right| \cdot 1{,}78^{4} + \frac{\sqrt{217}}{15{,}4} = 479{,}6$$

Последовательность действий (шагов), реализующих решение поставленной задачи, представлена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Последовательность выполнения действий в примере 1.1

Действие	Получаемый результат
1	2
С боковой панели Арифметика вставить оператор Модуль числа (абсолютное значение) $\lvert\blacksquare\rvert$	$\lvert\blacksquare\rvert$
В местозаполнитель, где установлен курсор, ввести с клавиатуры число 72,21, затем знак «минус»	$\lvert 72{,}21 - \blacksquare\rvert$

1	2
С клавиатуры ввести латинский символ *e*	$\left\vert 72,21 - e \right\vert$
Ввести с клавиатуры знак ^ (возведение в степень) при нажатой клавише Shift	$\left\vert 72,21 - e^{\blacksquare} \right\vert$
В местозаполнитель для показателя степени ввести с клавиатуры число 3,2	$\left\vert 72,21 - e^{3,2} \right\vert$
С помощью клавиши → или щелчком ЛКМ установить вертикальный курсор в положение после оператора $\left\vert\blacksquare\right\vert$	$\left\vert 72,21 - e^{3,2} \right\vert$
Ввести с клавиатуры оператор умножения *, число 1,78, знак ^ (возведение в степень) при нажатой клавише Shift	$\left\vert 72,21 - e^{3,2} \right\vert \cdot 1,78^{\blacksquare}$
В местозаполнитель для показателя степени ввести с клавиатуры число 4 Нажатием клавиши → завершить ввод показателя степени Ввести с клавиатуры оператор +	$\left\vert 72,21 - e^{3,2} \right\vert \cdot 1,78^{4} + \blacksquare$
С боковой панели Арифметика вставить шаблон оператора $\sqrt{\blacksquare}$. В местозаполнитель, где установлен курсор, ввести число 217 Нажатием клавиши → завершить ввод подкоренного значения	$\left\vert 72,21 - e^{3,2} \right\vert \cdot 1,78^{4} + \sqrt{217}$

1	2
Ввести с клавиатуры оператор деления / В местозаполнитель для знаменателя ввести число 15,4 Нажатием клавиши → завершить ввод знаменателя	$\boxed{\left\lvert 72{,}21-e^{3{,}2}\right\rvert \cdot 1{,}78^{4}+\frac{\sqrt{217}}{15{,}4}}$
Для получения результата ввести с клавиатуры оператор вычисления «=»	$\left\lvert 72{,}21-e^{3{,}2}\right\rvert \cdot 1{,}78^{4}+\frac{\sqrt{217}}{15{,}4}=479{,}6$

Пример 1.2. Ввести значения переменных, заданное математическое выражение и вычислить значение переменной *d*.

$$c:=28 \qquad k:=0{,}357 \qquad v:=-3{,}11$$

$$d:=k^{2}\cdot\cos(c+v)+\sqrt[5]{c}$$

$$d=2{,}071$$

Для присваивания значений переменным ***c, k, v*** (т. е. для определения переменных ***c, k, v***) используется оператор определения (присваивания) **:=**. Он вводится либо с клавиатуры – нажатием клавиш Shift + «**:**» (клавиша с буквой «ж»), либо с боковой панели Арифметика.

Переменной ***d*** присваивается значение выражения, введенного после оператора определения (присваивания) **:=**.

Примечание. Переменные, входящие в вычисляемое выражение, должны быть предварительно определены выше или левее области этого выражения. Интерпретация и выполнение математических выражений в SMath Studio производятся строго поочередно: слева направо и сверху вниз.

Выражение для переменной ***d*** содержит встроенную функцию cos ( ). Для вставки шаблона встроенной функции cos ( ) используется один из следующих инструментов:

1) боковая панель Функции;

2) меню Вставка => команда Функция. В диалоговом окне (рис. 1.5) в поле Категория выбрать Тригонометрические, в поле Имя функции выбрать cos.

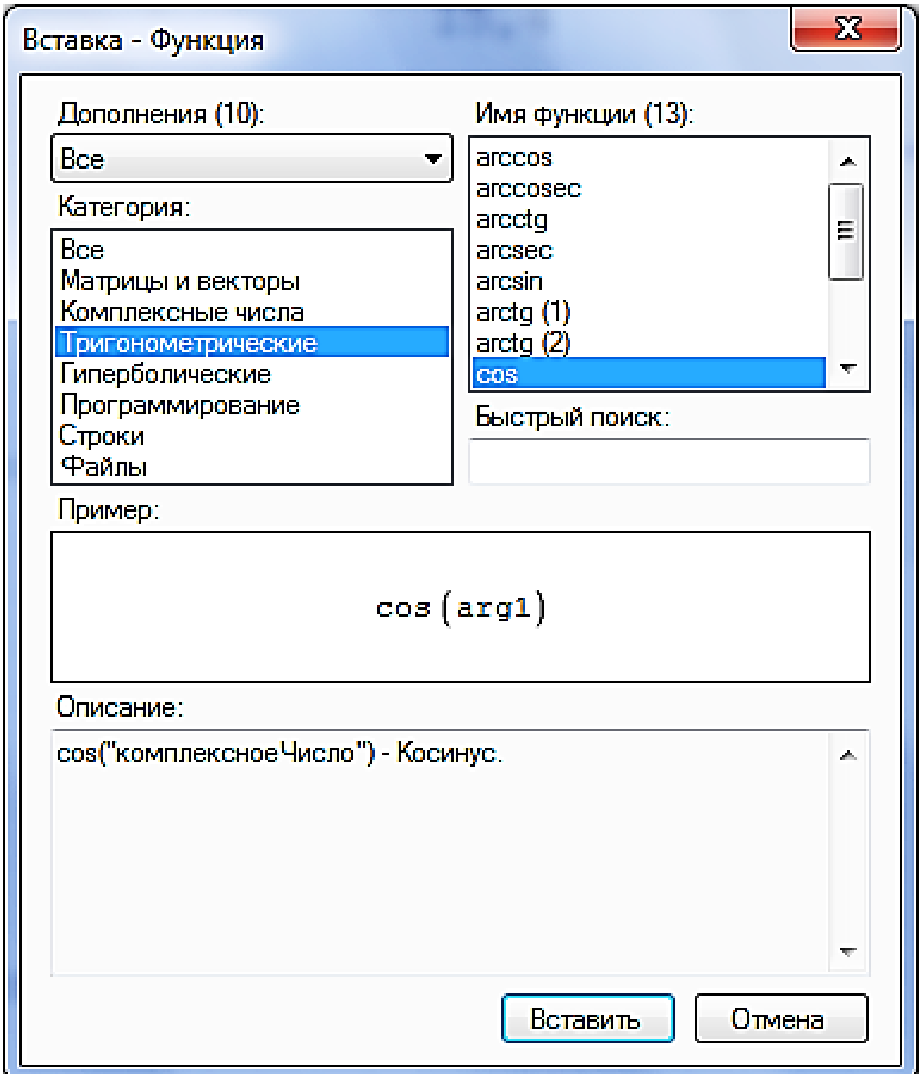


Рис. 1.5. Диалоговое окно Вставка - Функция

Имена (идентификаторы) переменных и функций могут состоять из прописных и строчных латинских, греческих, русских букв, арабских цифр, включать в себя подстрочные (литеральные) индексы. Имена (идентификаторы) должны начинаться с буквы. Допустимо использовать следующие символы: штрих (‘), подчеркивание, решетка (#), бесконечность.

Подстрочный литеральный индекс нельзя путать с индексом элемента массива. Для того чтобы начать ввод подстрочного (литерального) индекса, надо вставить знак разделителя целой и дробной частей числа (по умолчанию это «запятая»).

$$S_{четн} := 780 \qquad S_{нечетн} := 1377$$

Приложение SMath Studio различает прописные и строчные буквы.

1.4. Работа с единицами измерения

Тригонометрические функции в SMath Studio по умолчанию принимают в качестве аргумента угол в радианах. Если необходимо осуществить перевод аргумента в градусы, то можно воспользоваться одним из следующих инструментов:

1) меню Вставка => команда Единица измерения;
2) кнопка Единица измерения  на панели инструментов;
3) сочетание клавиш Ctrl + W.

В диалоговом окне (рис. 1.6) для ускорения поиска в поле Быстрый поиск ввести слово «Градус».

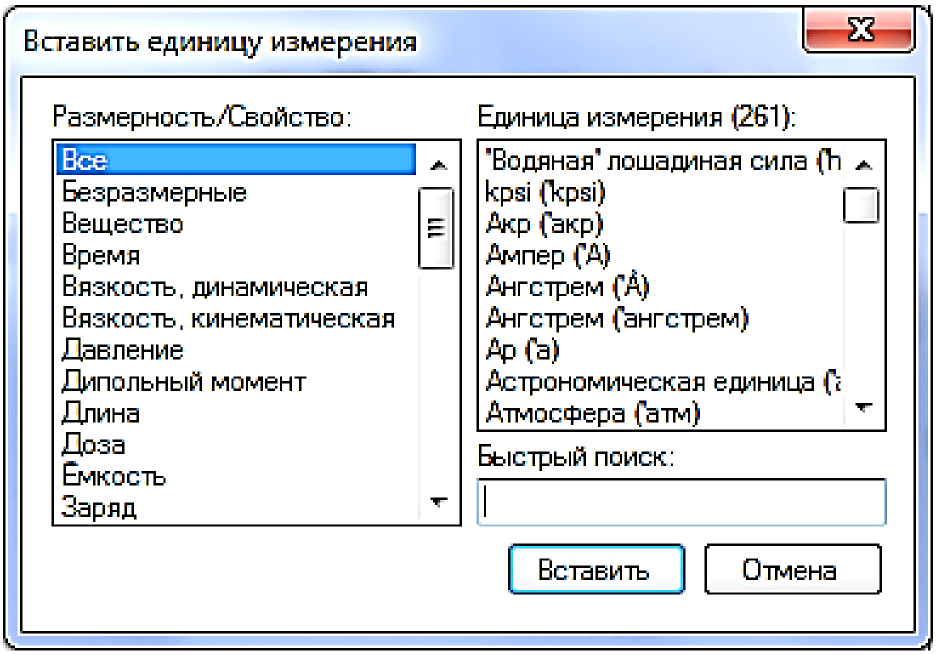


Рис. 1.6. Диалоговое окно для вставки единиц измерения

Пример 1.3. Рассчитать мощность постоянного электрического тока для однородного участка цепи с использованием единиц измерения.

Задать значение приложенного напряжения и охватить введенное значение уголковым курсором:

$$U := 200$$

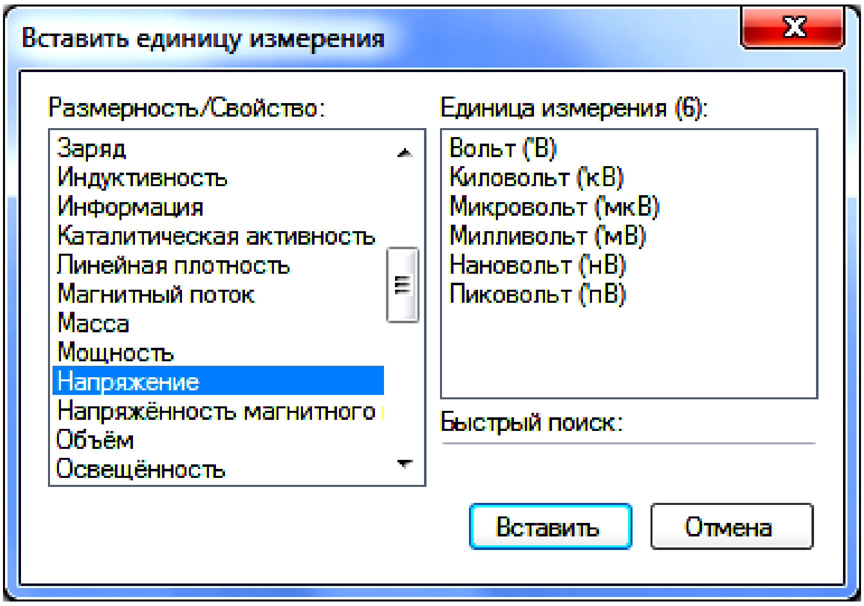
Вызвать диалоговое окно Вставить единицу измерения с помощью одного из инструментов:

– меню Вставка => команда Единица измерения;

– кнопка Единица измерения на панели инструментов;

– сочетание клавиш Ctrl + W.

В левой панели диалогового окна выбрать «Напряжение», в правой панели выбрать «Вольт (В)»:



$$U := 200 \text{ В}$$

Задать значение сопротивления и охватить введенное значение уголковым курсором:

$$\boxed{R := 20}$$

Вызвать диалоговое окно Вставить единицу измерения. В левой панели диалогового окна выбрать «Сопротивление», в правой панели выбрать «Ом (Ом)».

$$R := 20 \text{ Ом}$$

Ввести формулу для определения мощности и произвести расчет.

$$P := \frac{U^2}{R} = 2000{,}00000 \text{ Вт}$$

Изменить единицу измерения Ватт на киловатт. Для этого щелкнуть в области формулы.

$$P := \frac{U^2}{R} = 2000,00000\ \text{Вт}\ \blacksquare$$

Охватить уголковым курсором черный маркер справа и вызвать диалоговое окно Вставить единицу измерения. В левой панели диалогового окна выбрать «Мощность», в правой панели выбрать «Киловатт (кВт)». Щелкнуть ЛКМ вне области формулы.

$$P := \frac{U^2}{R} = 2,00000\ \text{кВт}$$

1.5. Редактирование математических выражений

Ввод и редактирование математических выражений требуют от пользователя владения приемами выделения (выбора) части выражения, вставки, замены, удаления оператора, фрагмента выражения, копирования части формулы и т. д. Рассмотрим эти приемы на примерах.

Пример 1.4. Для выделения (выбора) части выражения надо щелкнуть ЛКМ в конце выделяемого фрагмента (справа от него), затем последовательным нажатием клавиши Пробел охватить уголковым курсором выделяемый фрагмент. Уголковый курсор играет роль своеобразных логических скобок при вводе и редактировании выражения. Пример демонстрирует, что вводимая операция (в данном случае деление (/)) будет применена к выделенному в данный момент фрагменту выражения.

$$h^3 + \sqrt{y+c} - 4,7\cdot\underline{\sin(g)} \qquad h^3 + \sqrt{y+c} - 4,7\cdot\frac{\sin(g)}{\blacksquare}$$

$$\underline{h^3 + \sqrt{y+c}} - 4,7\cdot\sin(g) \qquad \frac{h^3 + \sqrt{y+c}}{\blacksquare} - 4,7\cdot\sin(g)$$

$$\underline{h^3 + \sqrt{y+c} - 4,7\cdot\sin(g)} \qquad \frac{h^3 + \sqrt{y+c} - 4,7\cdot\sin(g)}{\blacksquare}$$

Пример 1.5. Ввод математического выражения $tg^2 x^5 + e^u$.

Вставить шаблон встроенной функции тангенс tg( ) с боковой панели Функции:

$$\boxed{tg(\blacksquare)}$$

В скобки, где установлен курсор, ввести с клавиатуры аргумент x, затем оператор возведения в степень и показатель степени 5:

$$tg\left(x^5\right)$$

Выделить уголковым курсором весь введенный фрагмент:

$$tg\left(x^5\right)$$

Вставить оператор возведения в степень и показатель степени 2:

$$\boxed{tg\left(x^5\right)^2}$$

Нажатие клавиши → обеспечит завершение ввода показателя степени:

$$tg\left(x^5\right)^2$$

Ввести оператор «+», вставить шаблон встроенной функции exp( ) с боковой панели Функции и в скобки шаблона ввести аргумент ***u***:

$$tg\left(x^5\right)^2 + \exp(u)$$

Пример 1.6. При выделении (выборе) фрагмента выражения следует обращать внимание на положение вертикальной части уголкового курсора. Если она расположена справа, то очередной символ (оператор) будет введен справа от выделенного фрагмента. Расположение вертикальной части уголкового курсора слева обеспечит ввод (вставку) символа (оператора) слева от выделенного фрагмента:

$$u - \sqrt{k+r} - e^{a+k} \qquad\qquad u - \sqrt{k+r} - e^{a+k} \cdot \blacksquare$$

$$u-\sqrt{k+r}-e^{a+k} \qquad\qquad u-\sqrt{k+r}-\blacksquare\cdot\left(e^{a+k}\right)$$

П р и м е р 1.7. Произвести редактирование выражения.

$$\frac{\cos(x)}{a-t}+x^{a\cdot b}$$

Заменить оператор сложения на оператор вычитания. Для этого надо установить уголковый курсор справа от оператора сложения, который нужно заменить, как показано ниже:

$$\frac{\cos(x)}{a-t}+x^{a\cdot b}$$

Нажать клавишу Backspace.

$$\boxed{\frac{\cos(x)}{a-t}\ \square\ x^{a\cdot b}}$$

В появившийся местозаполнитель (слева от курсора) ввести оператор вычитания:

$$\frac{\cos(x)}{a-t}-x^{a\cdot b}$$

Перед переменной t вставить коэффициент (множитель) 3,77.

Установить курсор перед переменной t:

$$\frac{\cos(x)}{a-t}-x^{a\cdot b}$$

Ввести оператор умножения:

$$\frac{\cos(x)}{a-\blacksquare\cdot t}-x^{a\cdot b}$$

В появившийся местозаполнитель ввести коэффициент 3.77:

$$\frac{\cos(x)}{a-3{,}77\cdot t}-x^{a\cdot b}$$

Пример 1.8.

Ввод математического выражения $\sum_{k=1}^{7}\frac{5\sin\left(ku+v^2\right)+z}{\sqrt{ku+v^2}-\mathrm{tg}\left(ku+v^2\right)}+7v$.

Последовательность действий (шагов), реализующих решение поставленной задачи.

1. Вставить шаблон оператора суммы $\sum_{■=■}^{■}■$ с боковой панели Функции.

2. Ввести данные в нижний и верхний местозаполнители, щелчком установить курсор в правый местозаполнитель и вставить оператор деления:

$$\sum_{k=1}^{7}\frac{■}{■}$$

3. Ввести числитель заданного выражения в верхний местозаполнитель:

$$\sum_{k=1}^{7}\frac{5\cdot\sin\left(k\cdot u+v^{2}\right)+z}{■}$$

4. Вставить шаблон оператора $\sqrt{■}$ в местозаполнитель в знаменателе.

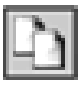
5. В заданном выражении трижды повторяется фрагмент $k\cdot u+v^2$, поэтому целесообразно ускорить решение задачи путем копирования этого фрагмента, введенного ранее. Для этого надо выделить синей заливкой указанный фрагмент:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{7}\frac{5\cdot\sin\left(k\cdot u+v^{2}\right)+z}{\sqrt{■}}}$$

Применить один из *инструментов копирования*:

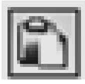
1) меню Правка => команда Копировать;

2) сочетание клавиш: Ctrl + C;

3) кнопка Копировать  на панели инструментов;

4) контекстное меню => команда Копировать.

Щелчком установить курсор в местозаполнитель под корнем. Применить один из инструментов вставки:

1) меню Правка ⇒ команда Вставить;
2) сочетание клавиш: Ctrl + V;
3) кнопка Вставить  на панели инструментов;
4) контекстное меню ⇒ команда Вставить.

$$\sum_{k=1}^{7} \frac{5 \cdot \sin\left(k \cdot u + v^2\right) + z}{\sqrt{k \cdot u + v^2}}$$

6. Нажатием клавиши → завершить ввод подкоренного выражения.

$$\sum_{k=1}^{7} \frac{5 \cdot \sin\left(k \cdot u + v^2\right) + z}{\sqrt{k \cdot u + v^2}}$$

7. Ввести оператор «–», вставить шаблон встроенной функции тангенс tg( ) с боковой панели Функции. В местозаполнитель шаблона вставить фрагмент из буфера обмена, применив один из инструментов вставки.

$$\sum_{k=1}^{7} \frac{5 \cdot \sin\left(k \cdot u + v^2\right) + z}{\sqrt{k \cdot u + v^2} - \mathrm{tg}\left(k \cdot u + v^2\right)}$$

8. Охватить уголковым курсором всю введенную часть заданного выражения, чтобы вертикальная часть курсора оказалась справа. Это действие указывает процессору, что ввод выражения, подчиненного оператору суммы, завершен.

$$\sum_{k=1}^{7} \frac{5 \cdot \sin\left(k \cdot u + v^2\right) + z}{\sqrt{k \cdot u + v^2} - \mathrm{tg}\left(k \cdot u + v^2\right)}$$

9. Ввести оператор «+», затем оставшуюся часть заданного выражения.

$$\sum_{k=1}^{7} \frac{5 \cdot \sin\left(k \cdot u + v^2\right) + z}{\sqrt{k \cdot u + v^2} - \mathrm{tg}\left(k \cdot u + v^2\right)} + 7 \cdot v$$

1.6. Выбор, копирование, перемещение, удаление областей

Документ SMath Studio состоит из отдельных областей, логически согласованных между собой. Чтобы произвести какое-либо действие с областью, ее предварительно надо выбрать (выделить).

Выбор области можно сделать одним из следующих способов:

− щелкнуть ЛКМ вне области и при нажатой ЛКМ навести указатель на область;

− при нажатой клавише Ctrl щелчком ЛКМ.

Выбранная область выделяется голубой заливкой.

Выбор нескольких областей делается одним из следующих способов:

− щелкнуть ЛКМ и протянуть указатель через все выделяемые области;

− поочередно щелкать по этим областям при нажатой клавише Ctrl.

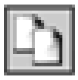
Для перемещения области следует подвести указатель мыши к границе выделенной области. Когда указатель мыши примет вид , нажать ЛКМ и перемещать его вместе с областью в нужном направлении.

Для копирования выделенной области используют инструменты:

− контекстное меню области => команда Копировать;

− меню Правка => команда Копировать;

− сочетание клавиш: Ctrl+ C;

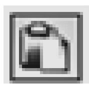
− кнопка Копировать  на панели инструментов.

Для вставки области можно воспользоваться инструментами:

− контекстное меню области => команда Вставить;

− меню Правка => команда Вставить;

− сочетание клавиш Ctrl+ V;

− кнопка Вставить  на панели инструментов.

Удаление области выполняется клавишами Backspace или Delete.

2. ФУНКЦИИ. ПЕРЕМЕННАЯ-ДИАПАЗОН

2.1. Функции

В приложении SMath Studio имеется библиотека встроенных функций. Для вставки нужной встроенной функции в документ следует воспользоваться Меню Вставка => команда Функция. В появившемся диалоговом окне выбрать Категорию функции, в поле Имя функции выбрать ее имя. В библиотеке встроенных функций представлены такие категории функций, как Тригонометрические, функции для обработки векторов и матриц, для работы с файлами, для обработки строковых данных, функции для реализации программирования в SMath Studio, для решения уравнений и др.

Математический пакет SMath Studio предоставляет пользователю возможность создавать свои *собственные функции* (*функции пользователя*).

Для того чтобы определить функцию пользователя в документе SMath Studio, необходимо задать ее имя, аргумент (список аргументов) в круглых скобках, вставить оператор определения (присваивания) **:=**, затем ввести вычисляемое выражение.

В SMath Studio по умолчанию в качестве *разделителя аргументов функции* используется знак «точка с запятой» (**;**). Его можно ввести с клавиатуры или с боковой панели Арифметика. При необходимости можно задать другой символ в качестве разделителя аргументов функции. Для этого следует воспользоваться меню Сервис => Опции => Вкладка Интерфейс.

Вычисляемое выражение функции пользователя может включать в себя встроенные функции SMath Studio.

Пример 2.1.

Корректное определение функции f с двумя аргументами − k и d:

$$w := 87{,}3$$

$$f(k;\ d) := w \cdot \left(k \cdot \cos(d)^4 - \ln(k \cdot d) \right)$$

$$f(3;\ 11) = -305{,}2 \qquad f(4{,}18;\ 6{,}5) = 43{,}65$$

Во второй строке определяется функция $f(k;d)$.

В третьей строке вычисляется значение функции $f(k;d)$ при конкретных значениях аргументов.

Пример 2.2.

Некорректное определение функции f.

$$f(x):=\sqrt{u+x}+\mathrm{tg}(2\cdot x)^2$$

$$f(7)=\blacksquare\ \blacksquare$$

u - неопределено.

Переменная *u*, входящая в вычисляемое выражение для функции *f(x)*, не определена. Для исправления этой ошибки требуется задать значение переменной *u* (т. е. определить ее) выше или левее области, в которой определяется функция *f(x)*.

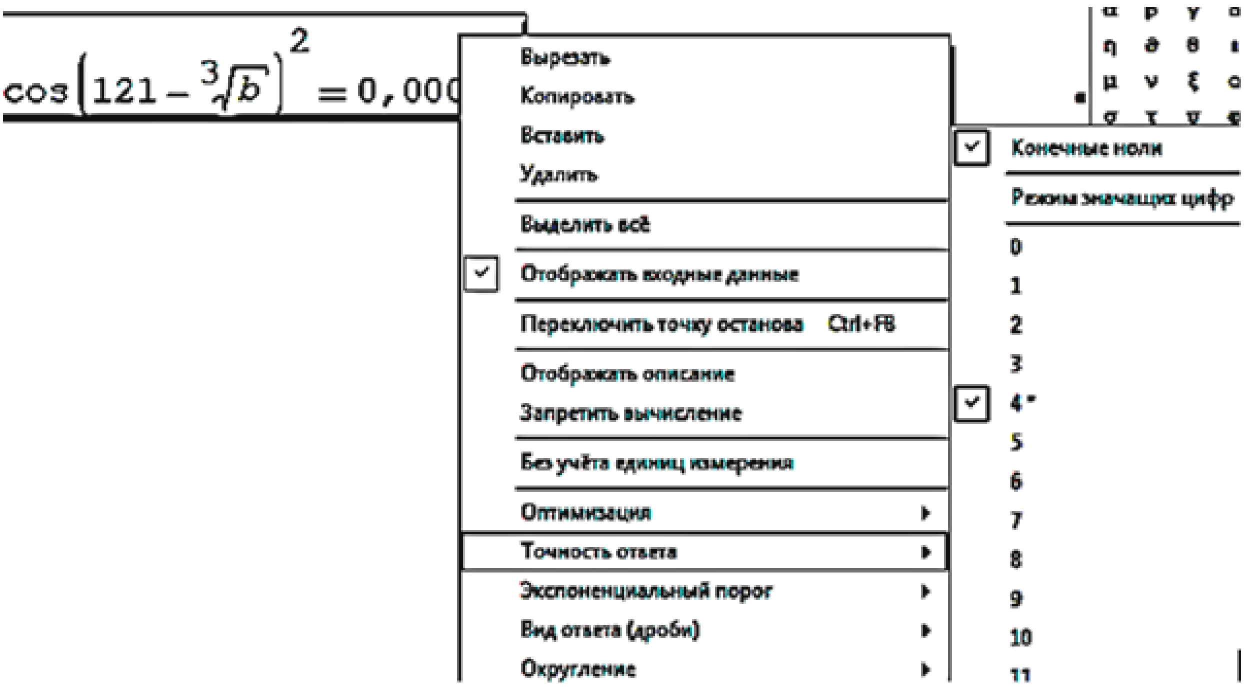
По умолчанию в SMath Studio десятичное число отображается с точностью до четырех знаков после разделителя целой и дробной частей числа. При необходимости точность и вид представления результата вычислений можно варьировать.

Пример 2.3.

$$a:=0{,}07 \qquad b:=243{,}5$$

$$r:=a\cdot\cos\left(121-\sqrt[3]{b}\right)^2=0{,}0005$$

1. Выделить щелчком нижнюю область, затем воспользоваться инструментом Контекстное меню => Точность ответа.

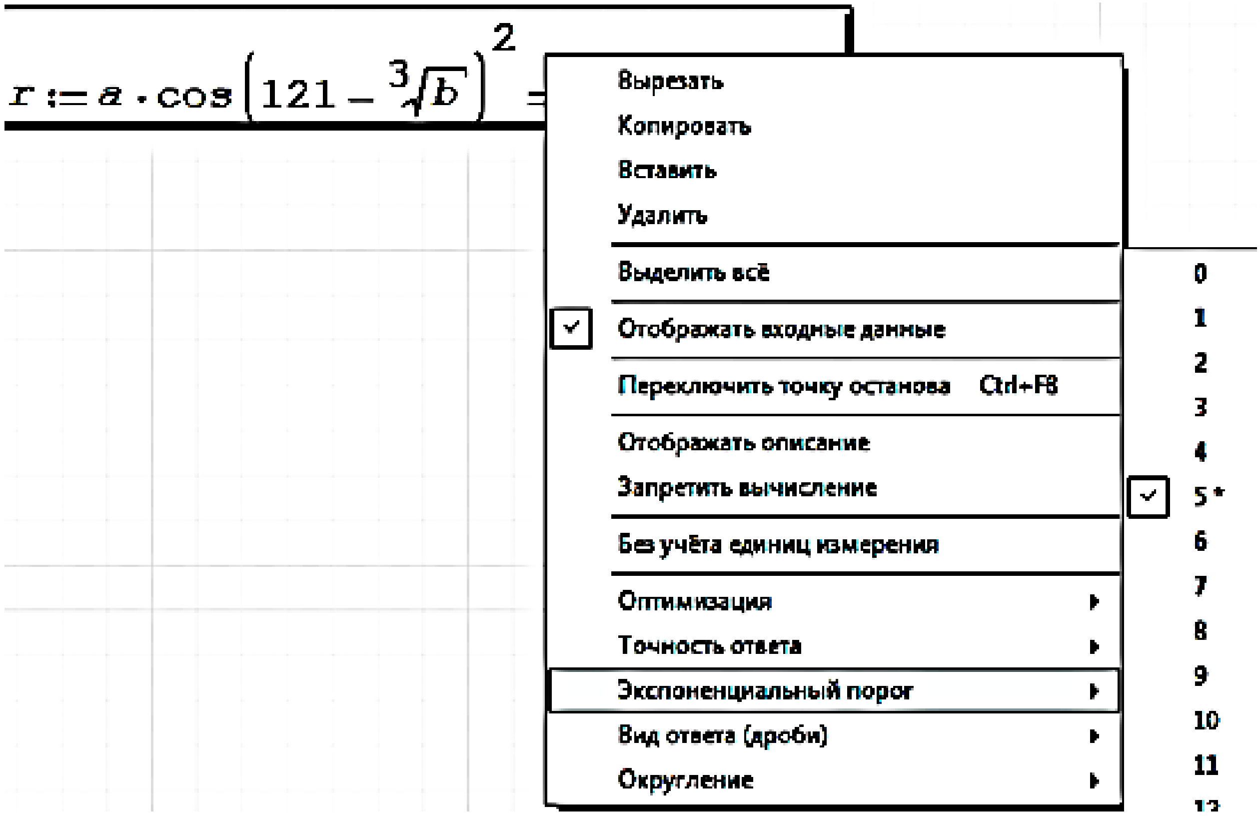


2. В правом поле выбрать значение параметра 7.

Аналогичные действия можно реализовать с помощью меню Правка => Точность ответа.

$$r := a \cdot \cos\left(121 - \sqrt[3]{b}\right)^{2} = 0{,}0005326$$

3. Выделить щелчком нижнюю область, затем воспользоваться инструментом Контекстное меню => Экспоненциальный порог.



4. В правом поле выбрать значение параметра 3. Это пороговое значение, при превышении которого результат вычисления начинает отображаться в экспоненциальном формате.

$$r := a \cdot \cos\left(121 - \sqrt[3]{b}\right)^{2} = 5{,}3261802 \cdot 10^{-4}$$

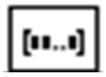
2.2. Переменные-диапазоны

Для задания упорядоченного ряда значений в SMath Studio используется *переменная-диапазон* (*дискретная переменная*), которая последовательно принимает значения из заданного диапазона с заданным шагом изменения. Например, для создания переменной-диапазона x, принимающей значения от 2 до 6 с шагом 0,5, в документе SMath Studio следует ввести

$$x := [\underbrace{2}_{\text{Начальное значение переменной x}} ; \underbrace{2+0,5}_{\text{Начальное значение x плюс шаг изменения}} .. \underbrace{6}_{\text{Конечное значение переменной x}}]$$

Порядок ввода переменной-диапазона:

ввести имя переменной, затем знак оператора определения (присваивания) :=;

ввести шаблон переменной-диапазона (Диапазон с указанием второго значения)  с боковой палитры Матрицы:

$$x := [\boxed{\blacksquare} ; \blacksquare .. \blacksquare]$$

в первый местозаполнитель ввести начальное значение диапазона 2, во второй местозаполнитель ввести начальное значение диапазона 2, оператор «+», затем шаг изменения переменной-диапазона 0.5:

$$x := [2 ; 2+0,5 .. \boxed{\blacksquare}]$$

в последний местозаполнитель ввести конечное значение диапазона 6:

$$x := [2 ; 2+0,5 .. 6]$$

Значения переменной-диапазона x в SMath Studio представляются в виде вектора:

$$x = \begin{bmatrix} 2,0 \\ 2,5 \\ 3,0 \\ 3,5 \\ 4,0 \\ 4,5 \\ 5,0 \\ 5,5 \\ 6,0 \end{bmatrix}$$

Если шаг изменения переменной-диапазона равен 1, то выражение упрощается (задаются только начальное и конечное ее значения). В этом случае вводится следующий шаблон переменной-диапазона :

$$k := [1 \,..\, 7]$$

В тех случаях, когда необходимо определить значения функции, аргументом которой является переменная-диапазон, в SMath Studio приходится применять встроенные средства программирования. Инструменты, принципы и особенности программирования в приложении SMath Studio будут рассмотрены в разд. 6.

3. СРЕДСТВА SMATH STUDIO ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ МАТРИЧНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Математическое моделирование широкого круга технических систем, решение многих категорий инженерных и исследовательских задач приводит к соотношениям в векторно-матричной форме. На разных этапах моделирования часто возникает необходимость выполнения векторно-матричных вычислений.

Пакет SMath Studio содержит набор инструментов для работы с векторами и матрицами [2].

Приложение SMath Studio рассматривает вектор как одномерный массив, матрицу как двумерный массив, тензор как многомерный массив данных. Местоположение элемента в массиве задается одним индексом для вектора, двумя индексами для матрицы.

Примечание. В SMath Studio минимальное значение индекса вектора, индексов матрицы равно 1.

Элементами матрицы могут быть константы, переменные, выражения, функции, текстовые данные (строки), вложенные матрицы.

3.1. Ввод матрицы в документ SMath Studio

Ввод матрицы (вектора) можно реализовать следующими способами.

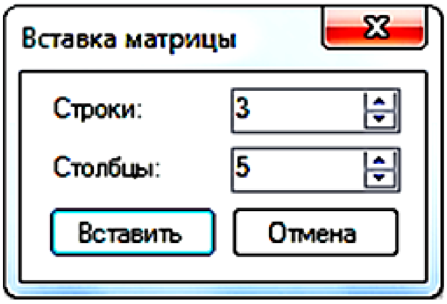
Способ 1.

1) Меню Вставка => команда Матрица.

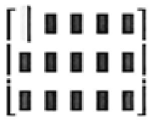
2) Кнопка  на боковой панели Матрицы.

3) Сочетание клавиш Ctrl+ M.

В появившемся диалоговом окне указать нужное количество строк и столбцов формируемой матрицы (вектора):



В результате в документ будет вставлен шаблон матрицы

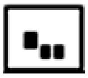


В местозаполнители шаблона последовательно ввести значения элементов матрицы.

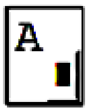
С п о с о б 2. Поэлементное присваивание значений элементам массива.

П р и м е р 3.1. Задать матрицу $A = \begin{bmatrix} 25 & -3,77 \\ 100 & 0,16 \end{bmatrix}$ поэлементным присваиванием значений.

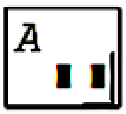
Для ввода нижнего индекса элемента массива можно применить один из двух способов:

– кнопка Элемент матрицы  на боковой панели Матрицы;

– ввести с клавиатуры знак [:



Ввести знак «точка с запятой» «;» с помощью клавиши с буквой «ж» либо с боковой панели Арифметика. При этом в шаблоне появится второй местозаполнитель:



В первый местозаполнитель нижнего индекса ввести номер строки элемента массива, во второй местозаполнитель – номер столбца:

$$A_{1\,1} := 25 \qquad A_{1\,2} := -3{,}77 \qquad A_{2\,1} := 100 \qquad A_{2\,2} := 0{,}16$$

$$A = \begin{bmatrix} 25{,}00 & -3{,}770 \\ 100{,}0 & 0{,}1600 \end{bmatrix}$$

Для ввода нижнего индекса элемента вектора (одномерного массива) можно применить один из двух способов:

– кнопка Элемент вектора на боковой панели Матрицы;

– ввести с клавиатуры знак [.

3.2. Реализация матричных вычислений с помощью матричных операторов

Приложение SMath Studio реализует матричные вычисления с помощью матричных операторов и встроенных функций.

Для ввода матричных операторов применяют инструменты:

– боковая панель Матрицы;

– клавиатура.

Пример 3.2. Реализация матричных вычислений с помощью кнопок боковой панели Матрицы.

Транспонирование матрицы:

$$H := \begin{bmatrix} 2{,}2 & 1 & -5 & 0 \\ 5 & 13 & 77 & -11 \\ 3 & -1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \qquad H^{T} = \begin{bmatrix} 2{,}2 & 5{,}0 & 3{,}0 \\ 1{,}0 & 13 & -1{,}0 \\ -5{,}0 & 77 & 4{,}0 \\ 0{,}0 & -11 & 16 \end{bmatrix}$$

Векторное произведение:

$$A := \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 23 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} -2 \\ 21 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad A \times B = \begin{bmatrix} -462 \\ -61 \\ 119 \end{bmatrix}$$

Определитель матрицы:

$$U := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 8 & 12 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 7 & 14 & 4 & -5 \end{bmatrix} \qquad |U| = 232$$

Алгебраическое дополнение для элемента C_{23} *массива* C:

$$C := \begin{bmatrix} 7 & -3 & 11 \\ 1 & 5 & 22 \\ 6 & 17 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{A}_{2\,3}(C) = -137$$

Минор для элемента $C1_{41}$ *массива* $C1$:

$$C1 := \begin{bmatrix} 8 & 21 & -5 & 7 \\ 9 & 13 & 6 & 4 \\ 11 & -7 & 13 & 2 \\ 9 & 11 & 17 & 10 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{M}_{4\,1}(C1) = 907$$

Пример 3.3. Реализация матричных вычислений с помощью матричных операторов, вводимых с клавиатуры.

$$X := \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -10 & 7 \\ 100 & 1 \end{bmatrix} \qquad Z := \begin{bmatrix} 8 & -7 & 35 & 1 \\ 17 & 1 & 20 & 12 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} \qquad F := \begin{bmatrix} 9 & 1,3 & 77 \\ 3 & -5,1 & 1 \\ 0,7 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad k := 0,01$$

Сложение, вычитание матриц, умножение матрицы на скаляр:

$$B + C = \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{bmatrix} \qquad C - B = \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 27 \end{bmatrix} \qquad Y := B \cdot k = \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,02 \\ 0,03 \end{bmatrix}$$

Скалярное произведение матриц, нахождение обратной матрицы:

$$P := X \cdot Z$$

$$P = \begin{bmatrix} 101 & -9 & 170 & 62 \\ 39 & 77 & -210 & 74 \\ 817 & -699 & 3520 & 112 \end{bmatrix} \qquad F^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}002 & 0{,}234 & 0{,}397 \\ 0{,}004 & -0{,}063 & 0{,}224 \\ 0{,}013 & -0{,}026 & -0{,}05 \end{bmatrix}$$

Векторное произведение над векторами размерности 3.

Реализуется с помощью сочетания клавиш Ctrl + *.

$$V1 := \begin{bmatrix} 5 \\ -14 \\ 3{,}7 \end{bmatrix} \qquad V2 := \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix} \qquad VP := V1 \times V2 \qquad VP = \begin{bmatrix} -235{,}9 \\ -65{,}75 \\ 70 \end{bmatrix}$$

3.3. Реализация матричных вычислений с помощью встроенных функций

Встроенные функции для матричных вычислений в пакете SMath Studio можно условно разделить на несколько групп:

функции для создания матриц (единичных, диагональных, нулевых);

функции для слияния матриц или выделения фрагмента матрицы;

функции для определения числовых характеристик матриц (следа, ранга, норм, определителя, количества элементов, минимальных, максимальных элементов, алгебраического дополнения, минора и т. д.);

функции, реализующие операции над матрицами (обращение, сортировку элементов, транспонирование).

Встроенные функции для матричных вычислений можно вставить в документ с помощью Меню Вставка ⇒ команда Функция ⇒ категория Матрицы и векторы.

Рассмотрим примеры применения некоторых встроенных функций SMath Studio.

Пример *3.4.* Применение встроенных функций SMath Studio.

$$A := \begin{bmatrix} 21 & 8 & 1 \\ -17 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad U := \begin{bmatrix} -5 & 10 & 34 \\ 111 & 7 & 33 \end{bmatrix}$$

$$F := \begin{bmatrix} 11 \\ 33 \\ 77 \\ 55 \end{bmatrix} \qquad R := \begin{bmatrix} 3 & -1 & 51 & 12 \\ 7 & 30 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & -7 \\ 3 & 9 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Создание диагональной матрицы, на главной диагонали которой размещаются элементы вектора F:

$$G := \mathrm{diag}(F) \qquad G = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 55 \end{bmatrix}$$

Объединение двух матриц в одну путем подсоединения второй матрицы снизу (матрицы должны иметь одинаковое количество столбцов):

$$Q := \mathrm{stack}(A;\ U) \qquad Q = \begin{bmatrix} 21 & 8 & 1 \\ -17 & 1 & 6 \\ -5 & 10 & 34 \\ 111 & 7 & 33 \end{bmatrix}$$

Определение максимального и минимального элементов матрицы (вектора):

$$H := \max(Q) \qquad H = 111 \qquad W := \min(Q) \qquad W = -17$$

Вычисление следа квадратной матрицы (след матрицы равен сумме ее диагональных элементов):

$$T := \mathrm{tr}(R) \qquad T = 51$$

Сортировка элементов вектора в порядке возрастания:

$$V3 := \begin{bmatrix} 377 \\ 5 \\ -11 \\ 101 \end{bmatrix} \qquad Vсорт := \mathrm{sort}(V3) \qquad Vсорт = \begin{bmatrix} -11 \\ 5 \\ 101 \\ 377 \end{bmatrix}$$

Перестановка строк матрицы таким образом, чтобы элементы указанного столбца оказались упорядоченными по возрастанию:

$$csort(Q;\,1)=\begin{bmatrix}-17 & 1 & 6\\ -5 & 10 & 34\\ 21 & 8 & 1\\ 111 & 7 & 33\end{bmatrix}$$

Вычисление среднего арифметического значения элементов матрицы и вектора:

$$Mean(Q)=17{,}5 \qquad\qquad Mean(V3)=118$$

4. СРЕДСТВА SMATH STUDIO ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ И ФОРМАТИРОВАНИЯ ГРАФИКОВ

В пакете SMath Studio версии 0.99.7822 доступны следующие категории графиков: Двумерный (2D), X-Y График, 3D График и трехмерный (3D).

4.1. Построение графика функции. Форматирование графика

Пример 4.1. Построить двумерный (2D) график функции $f(x)=\sqrt{x}\,e^{a\,x}-71$ при $a=0{,}55$ на интервале [1; 8].

Решение:

1) присвоить заданное значение переменной a:

$$a:=0{,}55$$

2) ввести функцию f(x) (использовать встроенную функцию exp ( )):

$$f(x):=\sqrt{x}\cdot\exp(a\cdot x)-71$$

1) вставить шаблон двумерного (2D) графика. Для этого можно использовать один из следующих инструментов.

1. Меню Вставка => команда График => Двумерный (2D) (рис. 4.1).

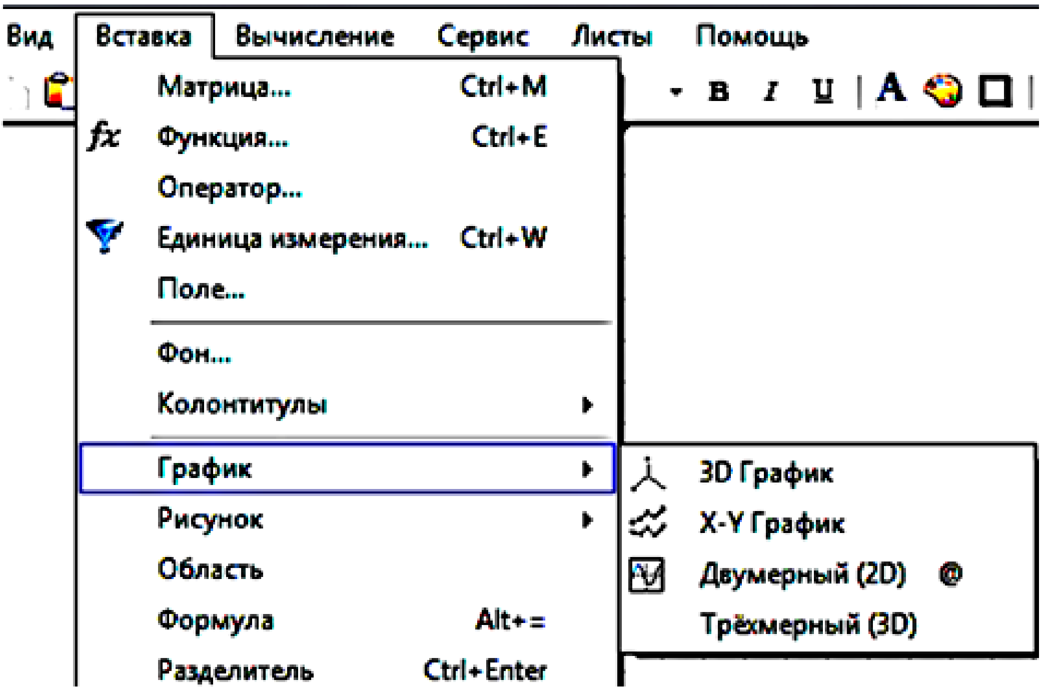
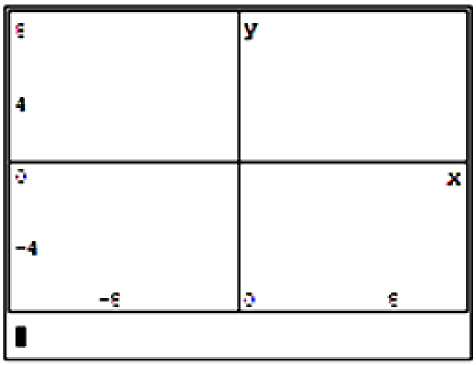


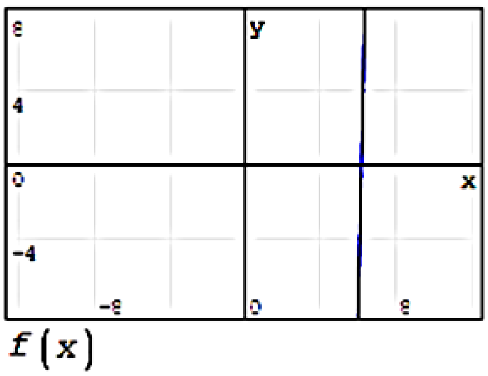
Рис. 4.1. Инструмент для вставки шаблона графика

2. Сочетание клавиш Shift + @.

Появляется область графика такого вида:



2) в местозаполнитель ввести имя функции с аргументом f(x):



Следует учитывать особенность SMath Studio. График функции строится только относительно аргумента, именованного как x.

Примечание. SMath Studio выдает график в таком виде, который не позволяет получить правильного представления об отображаемой функции. В SMath Studio не имеет смысла задавать интервал − диапазон изменения аргумента $x \in [0{,}5; 8]$. Приложение его не учитывает (не воспринимает) при построении графика. График всегда будет отображен на симметричном интервале [−X; +X]. Оси координат всегда располагаются по центру графической области. Поэтому полученный график в большинстве случаев требует форматирования.

Для форматирования графика необходимо предварительно выделить его щелчком ЛКМ.

Форматирование графика в SMath Studio можно произвести двумя способами.

Способ 1. С помощью колесика прокрутки мыши в сочетании с клавишами Ctrl или Shift.

Способ 2. С помощью инструментов боковой панели График, показанной на рис. 4.2.

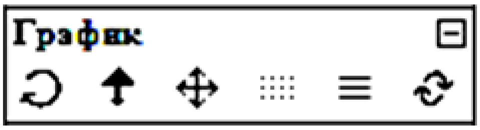
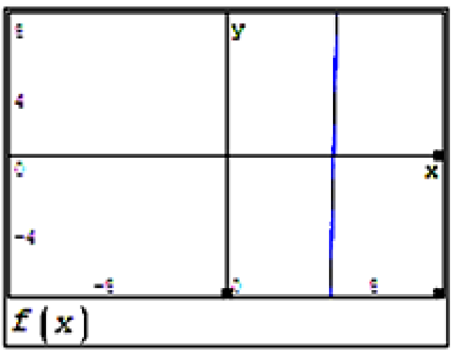


Рис. 4.2. Инструменты форматирования графика

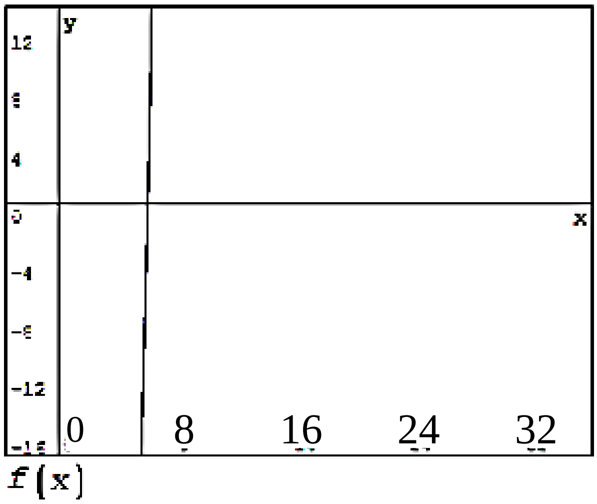
Пример 4.2. Форматирование графика функции из примера 4.1 способом 1.

1. Щелкнуть на области графика.

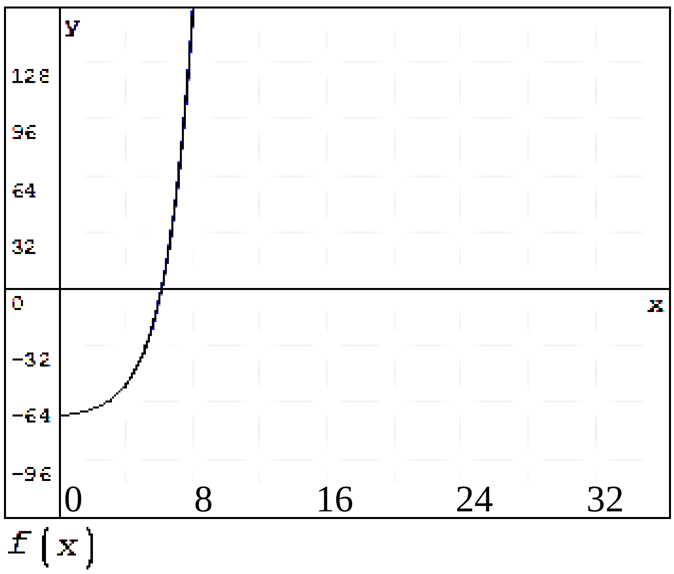


2. Навести указатель мыши на черный маркер в нижнем правом углу графической области. Когда указатель примет форму двунаправленной стрелки ⟺ при нажатой ЛКМ, перемещать его, чтобы увеличить область графика.

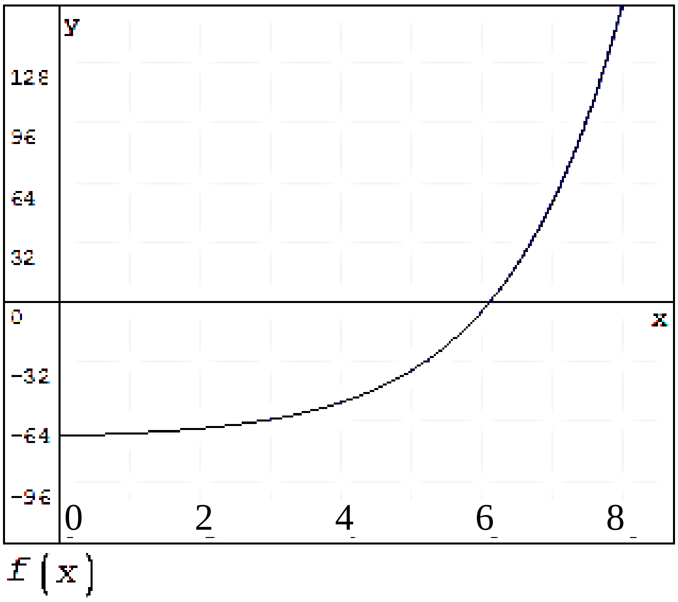
3. Навести указатель мыши на выделенную графическую область и при нажатой ЛКМ переместить отображенную кривую влево таким образом, чтобы в графической области стал виден заданный интервал [1; 8] на оси Ох.



4. При нажатой клавише Ctrl прокручивать колесико мыши. При этом изменяется масштаб графика по оси Оу.



5. При нажатой клавише Shift прокручивать колесико мыши. При этом изменяется масштаб графика по оси Ох.



Форматирование графика завершено.

Перечисленные выше действия по форматированию графика могут производиться в произвольном порядке. Их последовательность определяется формой отображаемой зависимости.

Аналогичные действия по форматированию графика способом 2 можно произвести с помощью кнопок боковой панели График (см. рис. 4.2).

График в SMath Studio по умолчанию отображается сплошной линией. С помощью кнопки  можно отобразить график точками.

4.2. Построение графиков нескольких функций в одной графической области

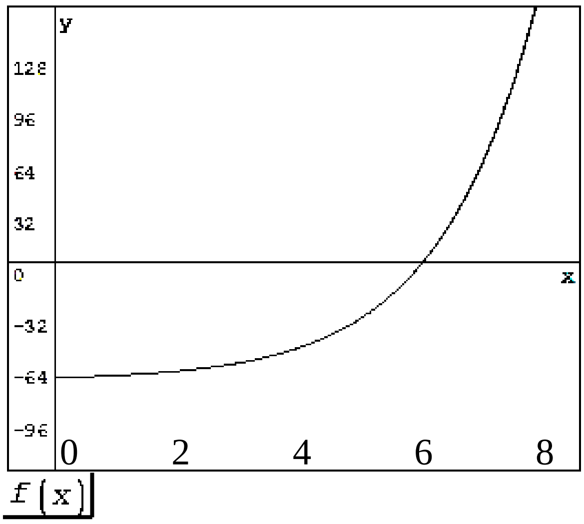
Пример 4.3. Построить в той же графической области, созданной в примерах 4.1, 4.2, график второй функции $g(x) = x^3 \cos 3x$.

Решение.

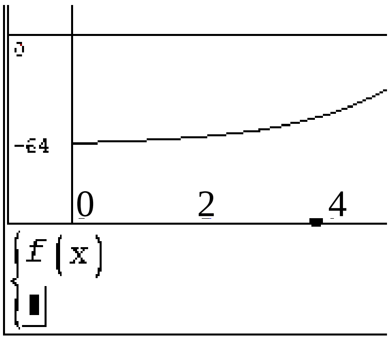
1) Ввести в документ функцию $g(x)$ выше области графика, построенного в примерах 4.1, 4.2:

$$g(x) := x^3 \cdot \cos(3 \cdot x)$$

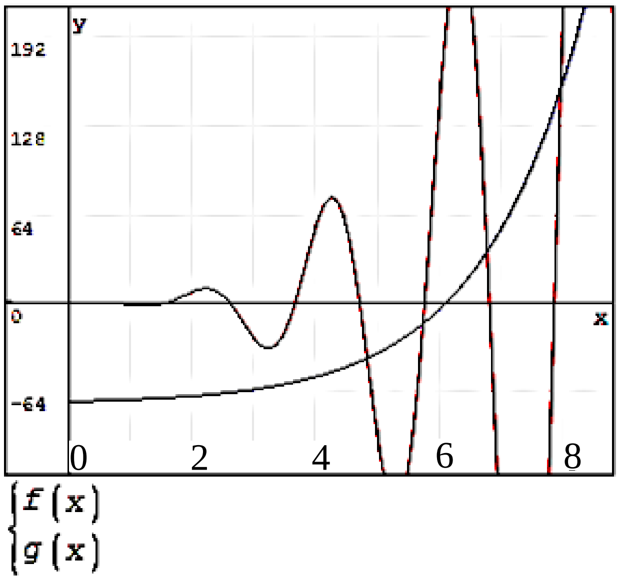
2) Выделить щелчком область графика, в поле имени функции охватить уголковым курсором символы $f(x)$:



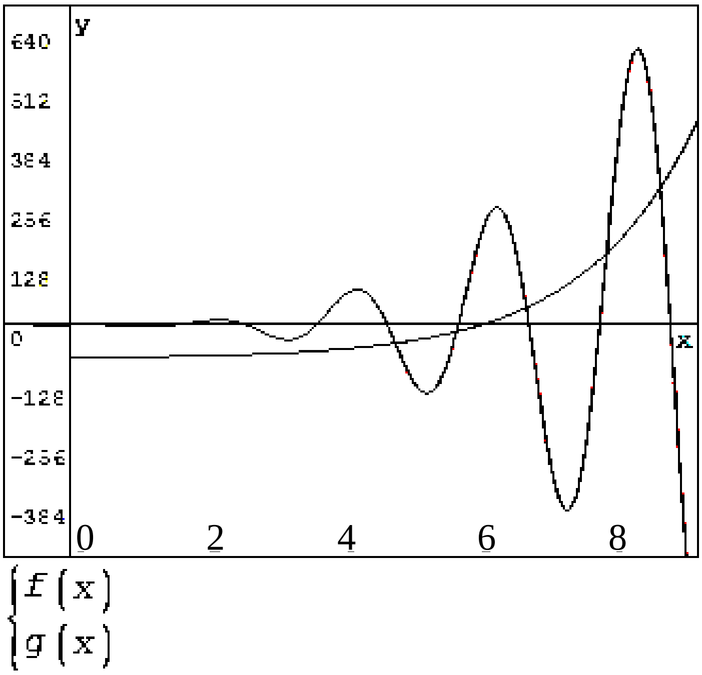
3) На боковой панели Функции щелкнуть кнопку Алгебраическая система. При этом в поле имени функции появляется шаблон системы и еще один пустой местозаполнитель:



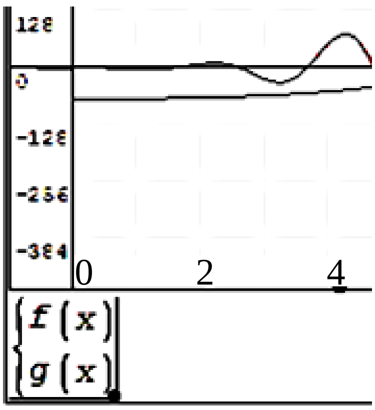
4) В пустой местозаполнитель ввести g(x) и щелкнуть ЛКМ вне области графика.



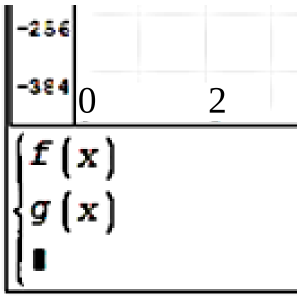
5) Произвести форматирование графика. Откорректировать масштаб графика по оси Оу.



Примечание. Если требуется добавить в графическую область третий график, то следует в поле имени функции охватить уголковым курсором две ранее введенные функции:



Навести указатель мыши на черный маркер в нижнем правом углу шаблона системы. Когда указатель примет форму двунаправленной стрелки ⟺ при нажатой ЛКМ, протянуть его вниз:



В нижний пустой местозаполнитель можно ввести третью функцию.

4.3. Построение двумерного (2D) графика на основе матриц

В SMath Studio есть возможность строить графики на основе данных, представленных векторами и матрицами.

Для двумерного случая элементы векторов трактуются как координаты x_i, y_i соответствующих точек, отображаемых на плоскости в графической области:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}; \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Для построения графика необходимо объединить векторы X и Y в одну матрицу.

Пример 4.4. Построить двумерный график на основе данных, представленных векторами

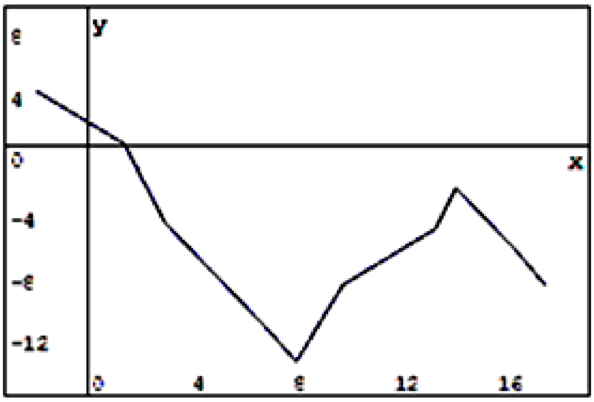
$$X := \begin{bmatrix} -2 \\ 1,4 \\ 3,05 \\ 7 \\ 8,2 \\ 10 \\ 13,7 \\ 14,5 \\ 16,8 \\ 18 \end{bmatrix} \qquad Y := \begin{bmatrix} 3,5 \\ 0,15 \\ -5 \\ -11,7 \\ -14 \\ -9 \\ -5,3 \\ -2,8 \\ -6,7 \\ -9 \end{bmatrix}$$

1) Объединить векторы X и Y в одну матрицу, т. е. сформировать р а с ш и р е н н у ю м а т р и ц у путем размещения векторов X и Y рядом друг с другом слева направо. Для этого применить встроенную функцию augment( ):

$$График := (\mathrm{augment}(X; Y))$$

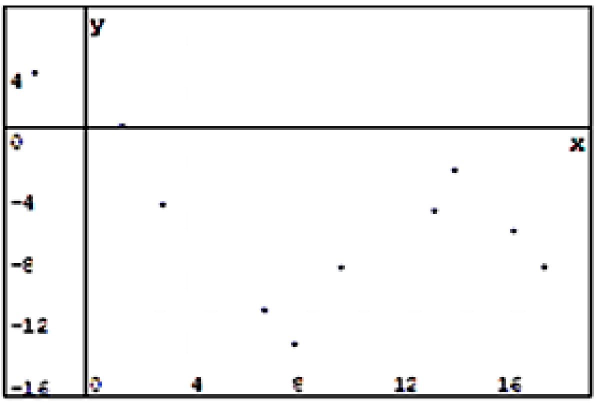
$$График = \begin{bmatrix} -2 & 3,5 \\ 1,4 & 0,15 \\ 3,05 & -5 \\ 7 & -11,7 \\ 8,2 & -14 \\ 10 & -9 \\ 13,7 & -5,3 \\ 14,5 & -2,8 \\ 16,8 & -6,7 \\ 18 & -9 \end{bmatrix}$$

2) На основе матрицы График построить двумерный график:



График

3) С помощью кнопки боковой панели График отобразить построенный график точками:



График

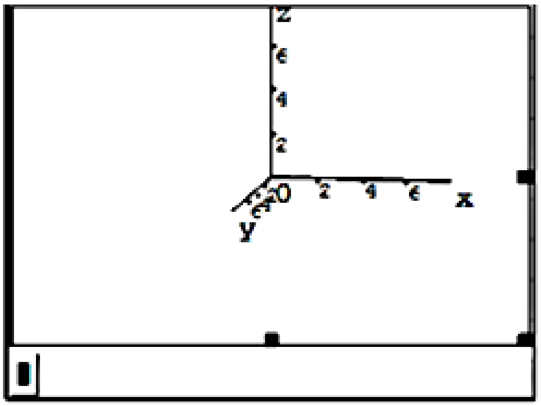
4.4. Построение трехмерного (3D) графика функции

Пример 4.5. Построить трехмерный (3D) график функции f(x,y) = = 4cos x – sin y.

1) Задать (определить) функцию двух аргументов:

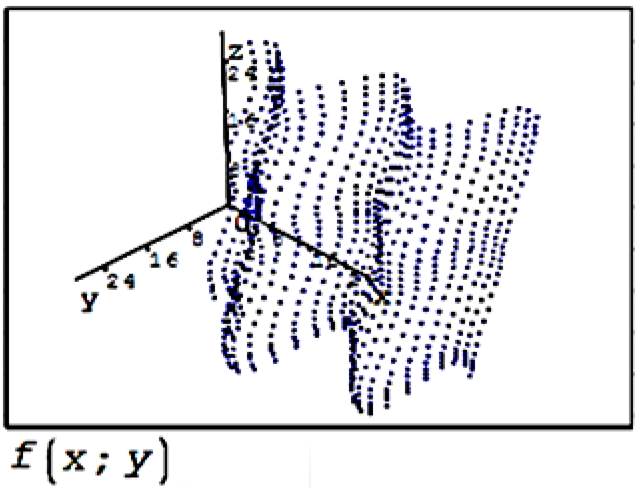
$$f(x;y) := (4 \cdot \cos(x) - \sin(y))$$

2) Вставить шаблон трехмерного (3D) графика с помощью Меню Вставка => команда График => Трехмерный (3D):



3) В местозаполнитель ввести имя функции с двумя аргументами.

4) При необходимости можно произвести форматирование графика, а также с помощью кнопки боковой панели График отобразить построенный график точками:



Пример 4.6. Построить трехмерный (3D) график на основе данных, представленных векторами:

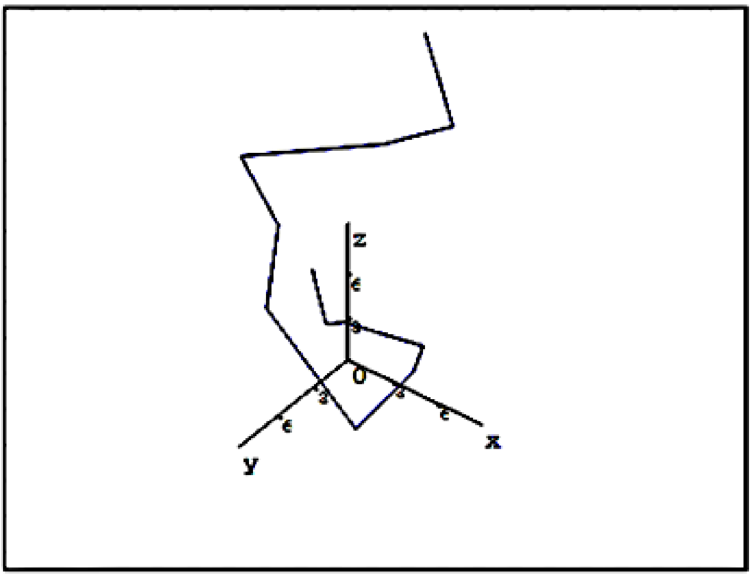
$$A := \begin{bmatrix} -7 \\ -1{,}56 \\ 0{,}6 \\ 5{,}7 \\ 7{,}3 \\ 8{,}5 \\ 2 \\ -0{,}45 \\ -4{,}4 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} -5{,}5 \\ -0{,}2 \\ 1 \\ 1{,}4 \\ 4{,}7 \\ 10{,}5 \\ 8{,}2 \\ 4{,}5 \\ 2{,}7 \\ 0 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad C := \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 3{,}3 \\ 4{,}5 \\ 6 \\ 7{,}5 \\ 9 \\ 10{,}5 \\ 12 \\ 13{,}5 \\ 15 \\ 16{,}5 \end{bmatrix}$$

1) Объединить три вектора − A, B, C − в одну матрицу, т. е. сформировать **расширенную матрицу** путем размещения векторов A, B, C рядом друг с другом слева направо, применив встроенную функцию **augment( )**:

$$Graf := \mathrm{augment}(A; B; C)$$

$$Graf = \begin{bmatrix} -7 & -5{,}5 & 0 \\ -1{,}56 & -0{,}2 & 1{,}5 \\ 0{,}6 & 1 & 3{,}3 \\ 5{,}7 & 1{,}4 & 4{,}5 \\ 7{,}3 & 4{,}7 & 6 \\ 8{,}5 & 10{,}5 & 7{,}5 \\ 2 & 8{,}2 & 9 \\ -0{,}45 & 4{,}5 & 10{,}5 \\ -4{,}4 & 2{,}7 & 12 \\ 2 & 0 & 13{,}5 \\ 5 & -1 & 15 \\ 0 & -6 & 16{,}5 \end{bmatrix}$$

2) На основе матрицы Graf построить трехмерный (3D) график:



Graf

5. СИМВОЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Результатом численного расчета является число или набор чисел, в результате символьных вычислений получаются выражения. К сожалению, возможности математического пакета SMath Studio для реализации символьных операций весьма ограничены.

Рассмотрим примеры реализации некоторых символьных операций.

Символьное дифференцирование функции.

Способ 1. С помощью оператора символьного вычисления «→» с боковой панели Арифметика.

1) Ввести шаблон оператора дифференцирования $\frac{d}{d\blacksquare}$ с боковой панели Функция:

$$\boxed{\frac{d}{d\,\blacksquare}\blacksquare}$$

2) В местозаполнитель справа ввести заданную функцию $\cos^3(bx^2)$:

$$\frac{d}{d\,\blacksquare}\left(\cos\left(b\cdot x^{2}\right)\right)^{3}$$

3) В нижний местозаполнитель ввести переменную x, по которой производится дифференцирование. После этого охватить уголковым курсором переменную x внутри дифференцируемой функции (выражения):

$$\boxed{\frac{d}{d\,x}\left(\cos\left(b\cdot x^{2}\right)\right)^{3}}$$

4) Ввести оператор символьного вычисления «→» с боковой панели Арифметика:

$$\frac{d}{d\,x}\cos\left(b\cdot x^{2}\right)^{3}=-6\cdot x\cdot b\cdot \sin\left(b\cdot x^{2}\right)\cdot \cos\left(b\cdot x^{2}\right)^{2}$$

В заданную функцию входит переменная *b*. Если этой переменной ранее (выше или левее) в документе SMath Studio было присвоено числовое значение, то при символьном дифференцировании оно будет учтено.

$$b:=100$$

$$\frac{d}{d\,x}\cos\left(b\cdot x^{2}\right)^{3}=-600\cdot x\cdot \sin\left(100\cdot x^{2}\right)\cdot \cos\left(100\cdot x^{2}\right)^{2}$$

С п о с о б 2. С помощью меню Вычисление.

1) Ввести заданную функцию $\cos^3(bx^2)$:

$$\left(\cos\left(b\cdot x^{2}\right)\right)^{3}$$

2) Выделить переменную x, по которой производится дифференцирование, с и н е й з а л и в к о й:

$$\boxed{\left(\cos\left(b\cdot x^{2}\right)\right)^{3}}$$

3) Воспользоваться меню Вычисление => команда Дифференцировать. При этом в следующей строке выдается результат

$$-600\cdot x\cdot \sin\left(100\cdot x^{2}\right)\cdot \cos\left(100\cdot x^{2}\right)^{2}$$

С п о с о б 3. С помощью сочетания клавиш Ctrl + «•».

Выполнить действия (шаги) 1 – 3, аналогичные способу 1, после чего воспользоваться сочетанием клавиш Ctrl + «·».

Символьное вычисление определителя.

1) Вставить шаблон определителя $|\blacksquare|$ с боковой панели Матрицы. В местозаполнитель шаблона вставить шаблон матрицы $\begin{bmatrix}\blacksquare & \blacksquare\\ \blacksquare & \blacksquare\end{bmatrix}$:

$$\left|\begin{bmatrix}\blacksquare & \blacksquare & \blacksquare\\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare\\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare\end{bmatrix}\right|$$

2) Ввести элементы матрицы:

$$\left|\begin{bmatrix}w^{2} & 2\cdot r & 3\\ 4 & t & 6-m\\ m & w & r\end{bmatrix}\right|$$

3) Охватить уголковым курсором всю введенную математическую конструкцию:

$$\underline{\left|\begin{bmatrix}w^{2} & 2\cdot r & 3\\ 4 & t & 6-m\\ m & w & r\end{bmatrix}\right|}$$

4) Ввести оператор символьного вычисления «→» с боковой панели Арифметика:

$$\left|\begin{bmatrix}w^{2} & 2\cdot r & 3\\ 4 & t & 6-m\\ m & w & r\end{bmatrix}\right|=\frac{\left(w^{2}\cdot t-8\cdot r\right)\cdot\left(w^{2}\cdot r-3\cdot m\right)-\left(w^{3}-2\cdot r\cdot m\right)\cdot\left(w^{2}\cdot(6-m)-12\right)}{w^{2}}$$

6. СРЕДСТВА ПРОГРАММИРОВАНИЯ SMATH STUDIO

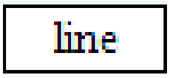
Встроенные инструменты программирования пакета SMath Studio существенно расширяют возможности решения задач математического моделирования.

Программный модуль (программа) в SMath Studio представляет собой макрофункцию и обладает поэтому основными свойствами функции. Программному модулю можно присвоить имя с перечнем аргументов (параметров).

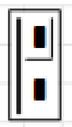
Инструменты для создания программных модулей SMath Studio представлены на боковой панели Программирование (рис. 6.1).

Рис. 6.1. Панель инструментов Программирование

При программировании можно воспользоваться специальными встроенными функциями, которые вводятся с помощью Меню Вставка => Функция => категория Программирование.

Создание программного модуля начинается со вставки шаблона Добавить строку 

с боковой панели Программирование. При этом в документе появляется шаблон:



Внутри программного модуля для присваивания значений переменным, элементам массивов используется стандартный оператор присваивания «:=».

Оператор условного перехода if реализует ветвление вычислительного процесса.

Пример 6.1. Создать программный модуль, реализующий вычисление значений функции f на основе алгоритма простого ветвления, представленного на рис. 6.2, при t = 5,3.

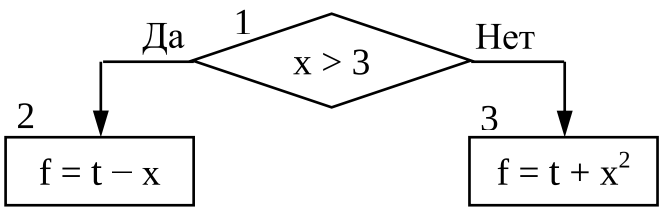
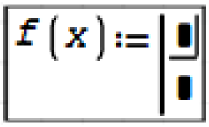


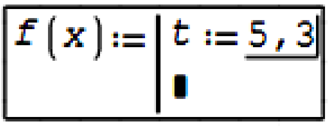
Рис. 6.2. Алгоритм простого ветвления вычислительного процесса

Создаваемому программному модулю присвоить имя f(x), где x – параметр или аргумент функции. (Через аргументы функции в программу вводятся входные данные.)

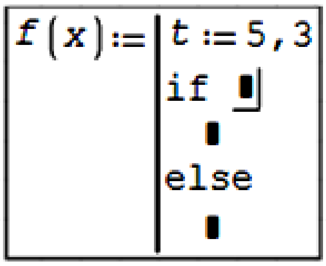
В местозаполнитель вставить шаблон line с боковой панели инструментов Программирование.



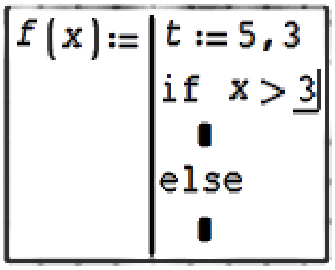
В верхний местозаполнитель ввести имя переменной t, оператор присваивания := и значение переменной t.



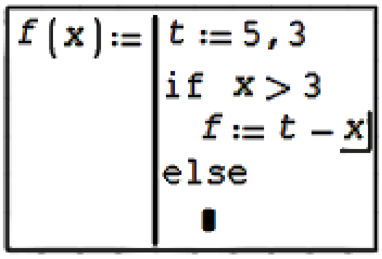
В нижний местозаполнитель вставить шаблон оператора условного перехода (условия) if.



В местозаполнитель справа от оператора if ввести условие (логическое выражение) (см. рис. 6.2, блок 1). Оператор сравнения « > » ввести с боковой панели Булева или с клавиатуры.



В верхний местозаполнитель ввести оператор присваивания (см. рис. 6.2, блок 2), который следует выполнить в том случае, если условие x > 3 выполняется (т. е. логическое выражение x > 3 принимает значение «истина»).



В нижний местозаполнитель ввести оператор присваивания (см. рис. 6.2, блок 3), который следует выполнить в том случае, если условие x > 3 не выполняется (т. е. логическое выражение x > 3 принимает значение «ложь»).

$$f(x):=\left|\begin{array}{l} t:=5{,}3 \\ \text{if } x>3 \\ \quad f:=t-x \\ \text{else} \\ \quad f:=t+x^{2} \end{array}\right.$$

Для получения результата программы при конкретном значении параметра x ввести имя программы и затем, в скобках, − значение параметра x.

$$f(x):=\left|\begin{array}{l} t:=5{,}3 \\ \text{if } x>3 \\ \quad f:=t-x \\ \text{else} \\ \quad f:=t+x^{2} \end{array}\right.$$

$$f(8)=-2{,}700$$

$$f(-3)=14{,}300$$

П р и м е ч а н и е. В SMath Studio при вводе шаблона оператора условного перехода (условия) if всегда по умолчанию появляется ключевое слово else. В тех случаях, когда требуется проверить только одно условие, и при выполнении этого условия произвести вычисление значения функции поступают следующим образом. В нижний местозаполнитель шаблона после ключевого слова else записывают единицу:

$$f(x):=\left|\begin{array}{l} a:=2{,}307 \\ \text{if } x\le 15 \\ \quad f:=\sin(a\cdot x)^{2}+\sqrt[3]{\mathrm{tg}(x)} \\ \text{else} \\ \quad 1 \end{array}\right.$$

$$f(11)=-6{,}0323$$

$$f(-5)=2{,}2370$$

П р и м е р 6.2. Создать программу для вычисления значений функции y:

$$y=\begin{cases} |x| & \text{при} \quad x<2; \\ x^3+b & \text{при} \quad 2\le x<10; \\ \sqrt{x+b} & \text{при} \quad x\ge 10 \end{cases} \qquad \text{при } b = 10.$$

Решение задачи требует реализации алгоритма сложного ветвления, представленного на рис. 6.3.

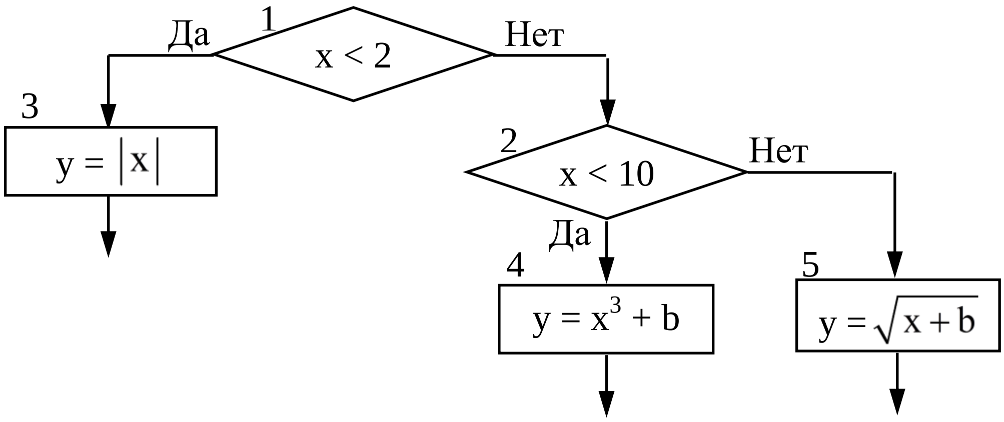
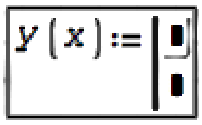
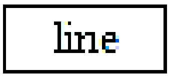
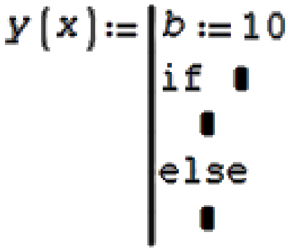


Рис. 6.3. Алгоритм сложного ветвления вычислительного процесса



Программному модулю присвоить имя y(x). В местозаполнитель вставить шаблон 

с боковой панели Программирование.



В верхний местозаполнитель ввести оператор присваивания (присвоить значение переменной *b*).

В следующую программную строку вставить шаблон оператора условного перехода (условия) if.

В верхний местозаполнитель справа от if ввести условие $x < 2$.

В следующую строку ввести оператор присваивания (см. рис. 6.3, блок 3), который следует выполнить в том случае, если условие $x < 2$ выполняется (т. е. логическое выражение $x < 2$ принимает значение «истина»).

```
y(x):= | b := 10
       | if  x<2
       |   y := |x|
       | else
       |   ▮
```

В местозаполнитель после else вставить шаблон оператора if.

В местозаполнитель справа от if ввести условие $2 \le x < 10$. В SMath Studio оно записывается в таком виде: $(x \ge 2) \wedge (x < 10)$.

Шаблон ∧ логической операции «и» (булево и (&)), вводится с боковой панели Б у л е в а или с помощью меню Вставка => команда График.

```
y(x):= | b := 10
       | if  x<2
       |   y := |x|
       | else
       |   if  (x ≥ 2)∧(x < 10)
       |     ▮
       |   else
       |     ▮
```

В местозаполнитель в следующей строке за if ввести оператор присваивания (см. рис. 6.3, блок 4), который следует выполнить в том случае, если условие $2 \le x < 10$ выполняется (т. е. логическое выражение $(x \ge 2) \wedge (x < 10)$ принимает значение «истина»).

```
y(x):= | b := 10
       | if  x<2
       |   y := |x|
       | else
       |   if  (x ≥ 2)∧(x < 10)
       |     y := x^3 + b
       |   else
       |     ▮
```

В местозаполнитель после else вставить шаблон оператора if.

В местозаполнитель справа от if ввести условие x ≥ 10.

```
y(x):= | b := 10
       | if  x < 2
       |   y := |x|
       | else
       |   if (x ≥ 2)∧(x < 10)
       |     y := x^3 + b
       |   else
       |     if  x ≥ 10
       |       ▮
       |     else
       |       ▮
```

В местозаполнитель в следующей строке за if ввести оператор присваивания (см. рис. 6.3, блок 5), который следует выполнить в том случае, если условие x ≥ 10 выполняется (т. е. логическое выражение x ≥ 10 принимает значение «истина»).

В нижний местозаполнитель ввести 1.

```
y(x):= | b := 10
       | if  x < 2
       |   y := |x|
       | else
       |   if (x ≥ 2)∧(x < 10)
       |     y := x^3 + b
       |   else
       |     if  x ≥ 10
       |       y := √(x + b)
       |     else
       |       1
```

$y(-5) = 5$

$y(7) = 353$

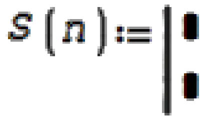
$y(15) = 5$

О п е р а т о р ц и к л а f o r служит для организации циклов с заданным числом повторений.

П р и м е р 6.3. Создать программный модуль, реализующий вычислительный процесс накопления суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \cos ai \qquad \text{при } a = 3{,}05.$$

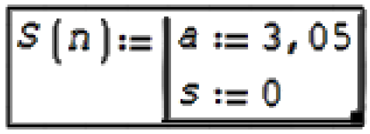
Программному модулю присвоить имя S(n). В местозаполнитель вставить шаблон line с боковой панели Программирование.



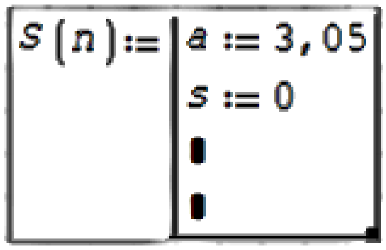
В верхний местозаполнитель ввести оператор присваивания (присвоить значение переменной *a*).

В нижний местозаполнитель ввести исходное значение суммы s.

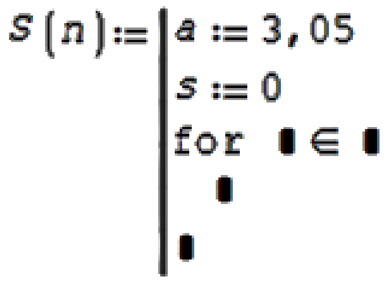
Уголковым курсором охватить введенные программные строки.



Навести указатель мыши на черный маркер в нижнем правом углу. Когда указатель примет форму ⇔, при нажатой ЛКМ протянуть его вниз. При этом в области программы появляются дополнительные местозаполнители.

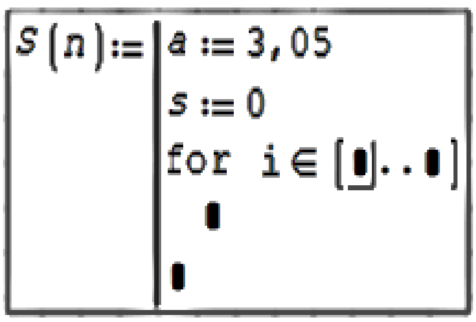


Ввести шаблон оператора цикла for.



В первый местозаполнитель после ключевого слова for ввести имя переменной – диапазона i (параметра цикла).

Во второй местозаполнитель после символа ∈ вставить шаблон [■..■] Диапазон значений с боковой панели Матрицы.



В первый местозаполнитель шаблона ввести начальное значение параметра цикла i.

Во второй местозаполнитель ввести конечное значение i.

```
S(n):= | a := 3,05
       | s := 0
       | for i ∈ [1..n]
       |    ■
       | ■
```

В местозаполнитель ввести оператор присваивания, реализующий вычисление текущего значения суммы s в теле цикла.

```
S(n):= | a := 3,05
       | s := 0
       | for i ∈ [1..n]
       |    s := s + √i · cos(a · i)
       | ■
```

В последнюю строку программы ввести переменную s, через которую возвращается результат выполнения программного модуля.

```
S(n):= | a := 3,05
       | s := 0
       | for i ∈ [1..n]
       |    s := s + √i · cos(a · i)
       | s
```

$S(7) = -1{,}442$

$S(15) = -0{,}679$

Оператор цикла while служит для организации итерационного цикла, который обеспечивает выполнение необходимой последовательности действий (операций) до тех пор, пока выполняется заданное условие.

Пример 6.4. Создать программный модуль, вычисляющий сумму членов бесконечного ряда

$$\frac{b}{2} + \frac{b^2}{8} + \frac{b^3}{48} + \frac{b^4}{384} + \cdots$$

с точностью до члена ряда, не превышающего ε = 0,00001, для b = 5,77.

Анализируя данный ряд, устанавливаем закономерность: каждый текущий член ряда связан с предыдущим членом рекуррентной зависимостью

$$a_i = a_{i-1} \frac{b}{2i}. \qquad (*)$$

Задать значение b и исходное значение суммы s ряда.

Введенные программные строки охватить уголковым курсором.

```
b := 5,77
s := 0
```

Навести указатель мыши на черный маркер в нижнем правом углу и при нажатой ЛКМ протянуть его вниз для добавления дополнительных местозаполнителей.

```
b := 5,77
s := 0
▮
▮
▮
▮
```

Задать исходное значение 1 порядковому номеру i члена ряда.

Задать исходное (стартовое) значение переменной a. Ввести шаблон оператора while.

```
b := 5,77
s := 0
i := 1
a := 1
while ▮
   ▮
▮
```

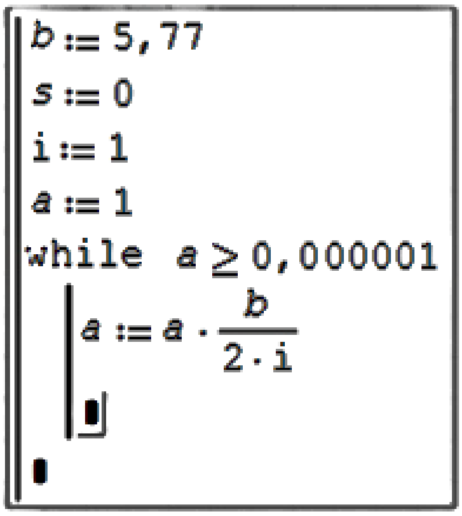
В местозаполнитель справа от while ввести условие «пока текущий член ряда a больше или равен 0,00001».

В нижний местозаполнитель ввести оператор присваивания, который формирует текущий член ряда a согласно рекуррентной формуле (*).

Нижнюю программную строку охватить уголковым курсором.

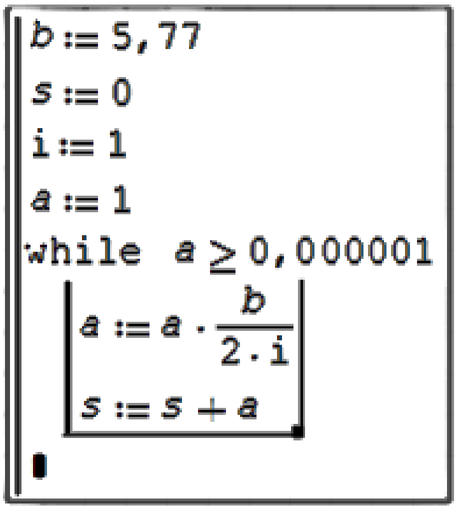
```
b := 5,77
s := 0
i := 1
a := 1
while a ≥ 0,000001
   a := a · b/(2·i)
▮
```

Щелкнуть кнопку line на боковой панели инструментов Программирование. При этом появляется вторая вертикальная линия, справа от которой будет формироваться вложенная часть программы, подчиняющаяся оператору while. Это означает, что в данный момент программируется тело цикла.

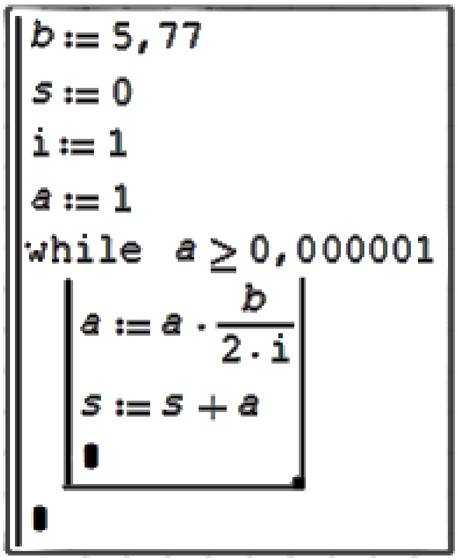


Ввести оператор присваивания, реализующий вычисление текущего значения суммы s членов ряда.

Вложенные программные строки, составляющие тело цикла, охватить уголковым курсором.



Навести указатель мыши на черный маркер в нижнем правом углу и при нажатой ЛКМ протянуть его вниз для добавления дополнительного местозаполнителя.



В следующей программной строке задать приращение порядковому номеру i члена ряда.

В последний местозаполнитель ввести переменную s, через которую будет возвращен результат программного модуля.

```
b := 5,77
s := 0
i := 1
a := 1
while  a ≥ 0,000001
    a := a · b/(2·i)
    s := s + a
    i := i + 1
s
```

Ввести оператор вычисления «=» с клавиатуры или с боковой панели Арифметика.

```
b := 5,77                    = 16,904
s := 0
i := 1
a := 1
while  a ≥ 0,000001
    a := a · b/(2·i)
    s := s + a
    i := i + 1
s
```

Оператор break используется для прерывания работы программы.

Оператор continue прекращает выполнение текущей итерации цикла и начинает выполнение следующей итерации с первого оператора тела цикла.

С помощью встроенных средств программирования SMath Studio можно решать математические и инженерные задачи, предусматривающие формирование, обработку, анализ массивов данных.

Пример 6.5. Создать программный модуль, реализующий вычисление суммы, произведения и количества тех элементов одномерного массива (вектора) D, значения которых являются четными числами:

$$D := \begin{bmatrix} 15 & 6 & 4 & 17 & 10 & 14 & 1 & 8 & 16 & 7 & 2 & 12 & 25 & 8 \end{bmatrix}$$

В качестве параметров (аргументов функции) в программе используются имя массива и количество его элементов:

```
V(D; n) :=    | S := 0
              | P := 1
              | k := 0
4             | for i ∈ [1..n]
5             |   if mod(D_i; 2) = 0
6             |     | S := S + D_i
7             |     | P := P · D_i
8             |     | k := k + 1
              |   else
              |     1
              | [S]
              | [P]
              | [k]

              [ 80          ]
V(D; 14) =    [ 8,2575·10^7 ]
              [ 9           ]
```

В первых трех программных строках задаются соответственно начальные значения суммы S, произведения P и счетчика k тех элементов заданного массива D, значения которых являются четными числами.

В программной строке 4 в операторе for задаются начальное и конечное значения параметра цикла – счетчика i элементов массива.

В программной строке 5 проверяется условие – является ли текущий i-й элемент массива D четным числом. Данное условие (логическое выражение) реализуется с помощью встроенной функции mod (x; c), которая определяет целый остаток от деления x на c. Обязательно использование символа булева равенства **=**, который вводится с боковой панели Булева или с помощью меню Вставка => команда Оператор.

Прежде чем вводить программные строки 6 − 8, необходимо вставить шаблон вектора (матрицы с одним столбцом) $\begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}$. Затем в каждый местозаполнитель шаблона ввести соответствующую программную строку. Аналогично в виде вектора реализуется вывод результатов данного программного модуля.

7. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФОРМЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

7.1. Роль математического аппарата СЛАУ в решении инженерных и исследовательских задач

В некоторых задачах исследуемая физическая система может быть адекватно описана математической моделью в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1; \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \cdots + a_{nn}\cdot x_n = b_n, \end{cases} \tag{7.1}$$

которая может быть представлена в векторно-матричной форме:

$$A \cdot X = B, \tag{7.2}$$

где $B = [b_1\ b_2\ \ldots\ b_n]^T$ – вектор свободных членов; $X = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T$ – вектор неизвестных; A – матрица коэффициентов системы размером $n \times n$.

При исследовании многих систем и процессов, при проектировании технических объектов на промежуточных этапах решения сложной задачи часто возникает необходимость решения СЛАУ. Например, при аппроксимации экспериментальных данных функцией определенного класса.

Математические модели в форме дифференциальных уравнений в частных производных, описывающие процессы различной физической природы, с помощью разностной аппроксимации (дискретизации) при определенных условиях сводятся к решению СЛАУ.

Анализ прочности и устойчивости инженерных конструкций и сооружений в условиях равновесия осуществляется с применением математического аппарата СЛАУ.

Сущность многих физических процессов математически отображается с помощью интегральных уравнений. Ввиду сложности решения многих из них исследователь предпочитает свести задачу к решению модели в форме СЛАУ, используя для этого известные методы аппроксимации или дискретизации.

Таким образом, математический аппарат СЛАУ играет важную роль в процессе решения инженерных и исследовательских задач.

7.2. Возможности SMath Studio для решения математических моделей в форме систем линейных алгебраических уравнений

Возможности приложения SMath Studio для решения и анализа математических моделей в форме СЛАУ, к сожалению, весьма ограничены в отличие от мощного инженерного приложения PTC Mathcad Prime 3.1, обладающего значительным набором встроенных функций, обеспечивающих реализацию широкого круга прямых и итерационных методов [3].

7.2.1. Решение СЛАУ матричным методом

Пример 7.1. Систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 9x_3 = 5; \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -10; \\ -2x_1 - 6x_3 = -1 \end{cases} \tag{7.3}$$

решить матричным методом.

1) *Задание матрицы коэффициентов A и вектора свободных членов B.*

$$A := \begin{bmatrix} 10 & -1 & 9 \\ 5 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2) *Проверка условия невырожденности матрицы A.* Обозначим определитель (детерминант) матрицы А как *det_A.* Шаблон определителя $|\blacksquare|$ вставить с боковой панели Матрицы или с помощью Меню Вставка => команда Функция => категория Матрицы и векторы.

$$det\_A := |A| = -112$$

Определитель матрицы А не равен нулю, следовательно, решение СЛАУ (7.3) существует и оно единственное. В этом случае матрица А называется н е в ы р о ж д е н н о й, или н е о с о б е н н о й.

3) *Определение обратной матрицы*. Для обращения матрицы А применить встроенную функцию invert ( ) (меню Вставка ⇒ команда Функция ⇒ категория Матрицы и векторы).

$$Обр\_A := \mathrm{invert}(A) = \begin{bmatrix} 0,1071 & 0,0536 & 0,1696 \\ -0,25 & 0,375 & -0,3125 \\ -0,0357 & -0,0179 & -0,2232 \end{bmatrix}$$

4) *Определение решения* заданной СЛАУ (7.3).

В а р и а н т 1.

$$X := Обр\_A \cdot B$$

$$X = \begin{bmatrix} -0,1696 \\ -4,688 \\ 0,2232 \end{bmatrix}$$

В а р и а н т 2.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} := Обр\_A \cdot B = \begin{bmatrix} -0,1696 \\ -4,6875 \\ 0,2232 \end{bmatrix}$$

5) *Проверка правильности решения*.

$$A \cdot X - B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7.2.2. Решение СЛАУ с помощью встроенной функции roots( )

Пример 7.2. Найти решение СЛАУ (7.3) с помощью встроенной функции roots( ).

1) Вставить шаблон встроенной функции roots (3).

$$X := \mathrm{roots}(\blacksquare;\ \blacksquare;\ \blacksquare)$$

2) В первый местозаполнитель вставить шаблон вектора (матрицы с одним столбцом) $\begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}$.

$$X := \mathrm{roots}\left(\begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix};\ \blacksquare;\ \blacksquare\right)$$

3) В каждый местозаполнитель шаблона ввести левую часть соответствующего уравнения СЛАУ (7.3) с перенесенным из правой части свободным членом.

$$X := \mathrm{roots}\left(\begin{bmatrix} 10 \cdot x_1 - x_2 + 9 \cdot x_3 - 5 \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 + 10 \\ -2 \cdot x_1 - 6 \cdot x_3 + 1 \end{bmatrix};\ \blacksquare;\ \blacksquare\right)$$

4) Во второй местозаполнитель вставить вектор искомых неизвестных. В третий местозаполнитель вставить вектор начальных приближений для искомых неизвестных, в качестве которых принимают соответствующие значения свободных членов

$$X := \mathrm{roots}\left(\begin{bmatrix} 10 \cdot x_1 - x_2 + 9 \cdot x_3 - 5 \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 + 10 \\ -2 \cdot x_1 - 6 \cdot x_3 + 1 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ -1 \end{bmatrix}\right).$$

$$X = \begin{bmatrix} -0,1696 \\ -4,688 \\ 0,2232 \end{bmatrix}$$

7.2.3. *Решение СЛАУ с помощью средств программирования SMath Studio*

Еще одна возможность реализовать решение СЛАУ в SMath Studio – это применение его встроенных средств программирования.

Пример 7.3. Найти решение СЛАУ (7.3) методом Крамера.

1) Определить количество строк и столбцов матрицы A с помощью встроенных функций rows( ) и cols( ):

$$N := \mathrm{rows}(A) = 3 \qquad\qquad M := \mathrm{cols}(A) = 3$$

2) Проверить условие невырожденности матрицы A ($|A| \neq 0$), для этого найти ее определитель:

$$det\_A := |A| = -112$$

3) Вычислить определители матриц коэффициентов, получаемых из матрицы A путем замены k-го столбца на столбец свободных членов (правых частей уравнений СЛАУ):

```
d(A; B; столбец) := | for i ∈ [1..N]
                    |   for j ∈ [1..M]
                    |     AV    := A
                    |       i j     i j
                    | j := столбец
                    | for i ∈ [1..N]
                    |   AV    := B
                    |     i j     i
                    | d := |AV|
```

$$d(A; B; 1) = 19 \qquad d(A; B; 2) = 525 \qquad d(A; B; 3) = -25$$

4) Вычислить искомые компоненты вектора решения заданной СЛАУ:

$$X := \begin{bmatrix} \dfrac{d(A;\ B;\ 1)}{det\_A} \\ \dfrac{d(A;\ B;\ 2)}{det\_A} \\ \dfrac{d(A;\ B;\ 3)}{det\_A} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -0{,}1696 \\ -4{,}688 \\ 0{,}2232 \end{bmatrix}$$

8. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФОРМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

8.1. Постановка задачи

Исследование систем различной физической природы в установившемся режиме часто приводит к *статическим моделям* в форме нелинейных алгебраических уравнений. При решении многих задач физики, химии, электротехники, баллистики для адекватного математического описания изучаемых процессов используют статические модели в форме нелинейных трансцендентных уравнений. Исход моделирования в значительной степени определяется выбором метода решения модели и умением правильно интерпретировать полученные результаты.

Рассматриваются возможности математического пакета SMath Studio для решения и анализа математических моделей в форме нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений.

Ставится задача – определить приближённое значение корня уравнения

$$x^2 - \cos x = 0 \qquad (8.1)$$

на интервале [−1,5; 1,5] с заданной точностью, используя *численные итерационные* методы (*методы последовательных приближений* к решению задачи).

8.2. Отделение корня

На этапе о т д е л е н и я к о р н я рекомендуется выбирать такой участок [a; b], на котором функция f(x) монотонна.

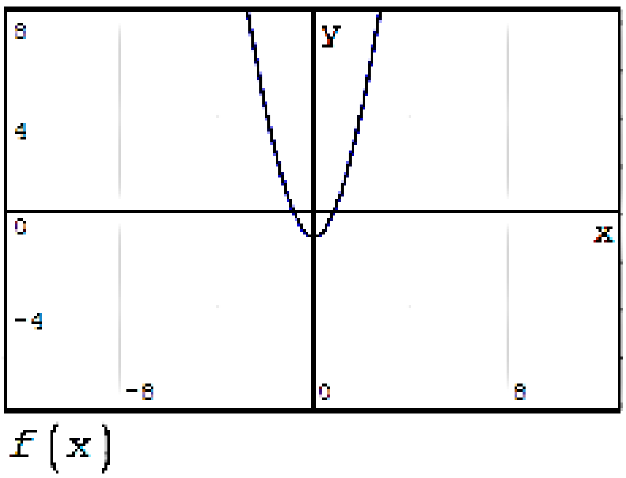
Отделение корня способом 1 (по графику заданной функции y = f(x)).

Пример 8.1.

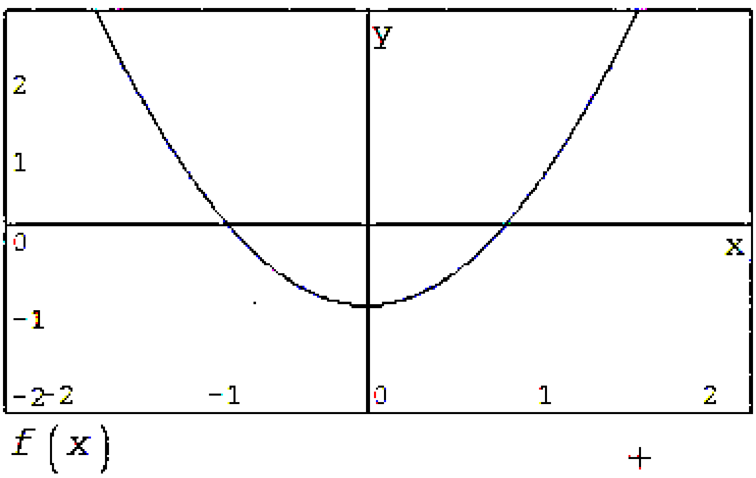
1) Ввести заданную функцию:

$$f(x) := x^2 - \cos(x)$$

2) Построить график заданной функции. Использовать шаблон Двумерный (2D).



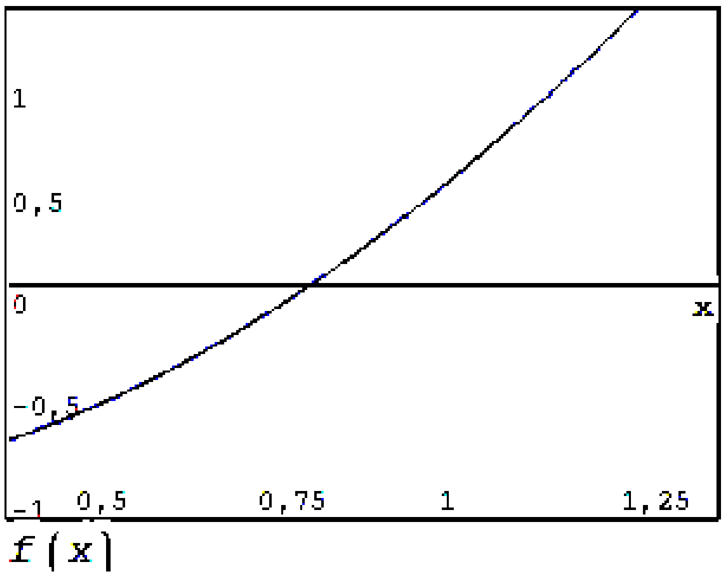
3) Произвести форматирование графика. Добиться, чтобы функция f(x) была отображена на заданном интервале [−1,5; 1,5].



4) По графику делаем вывод, что на интервале [−1,5; 1,5] заданное уравнение имеет два корня. Отделим корень, лежащий в области $x > 0$ (положительный корень).

Устанавливаем визуально по графику границы $a_{ут}$ и $b_{ут}$ отрезка, в пределах которого заключен только один (отделяемый) корень x*: принимаем $a_{ут} = 0,5$; $b_{ут} = 1,2$. Найденный отрезок [0,5; 1,2] называем уточнённым.

5) Форматировать график функции f(x), полученный на этапе 3. Добиться, чтобы функция f(x) была отображена на уточнённом интервале [0,5; 1,2].



6) По графику (визуально) определяем приближённое значение корня x*: $x^* \approx 0,8$.

Отделение корня способом 2 (заменой исходного уравнения равносильным).

Пример 8.2.

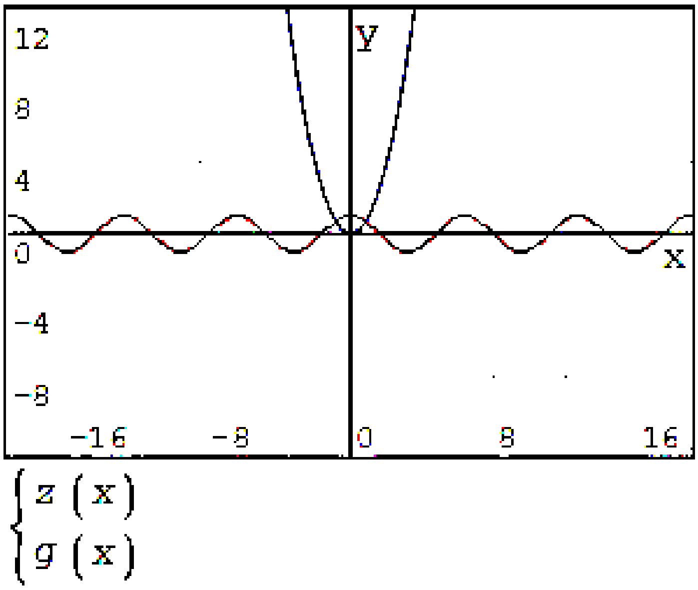
1) Заменить исходное уравнение $x^2 - \cos x = 0$ равносильным:

$$x^2 = \cos x. \tag{8.2}$$

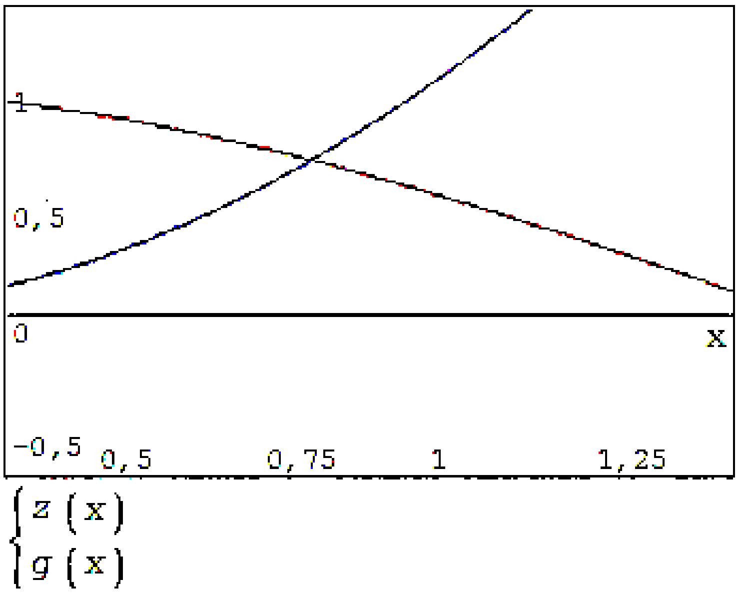
2) Ввести функции z(x) и g(x):

$$z(x) := x^2 \qquad g(x) := \cos(x)$$

3) Построить графики функций z(x) и g(x) на уточнённом интервале [0,5; 1,2].



4) Форматировать график. Добиться, чтобы функции z(x) и g(x) были отображены на уточнённом интервале [0,5; 1,2].



5) По графику (визуально) определяем приближённое значение корня x* как абсциссу точки пересечения кривых функций z(x) и g(x): $x^* \approx 0{,}8$.

Примечание. В SMath Studio можно предварительно оценить искомые корни уравнения с помощью инструмента Меню Вычисление => команда Найти корни. Возможны два варианта действий.

Вариант 1.

Ввести заданное уравнение. При записи уравнения обязательно использовать символ булево равенство $\boxed{=}$, который вводится с боковой панели Булева или с помощью меню Вставка => команда Оператор.

$$x^2 - \cos(x) = 0$$

Выделить синей заливкой искомую переменную x:

$$\boxed{x^2 - \cos(x) = 0}$$

Воспользоваться меню Вычисление => команда Найти корни.

$$x^2 - \cos(x) = 0$$

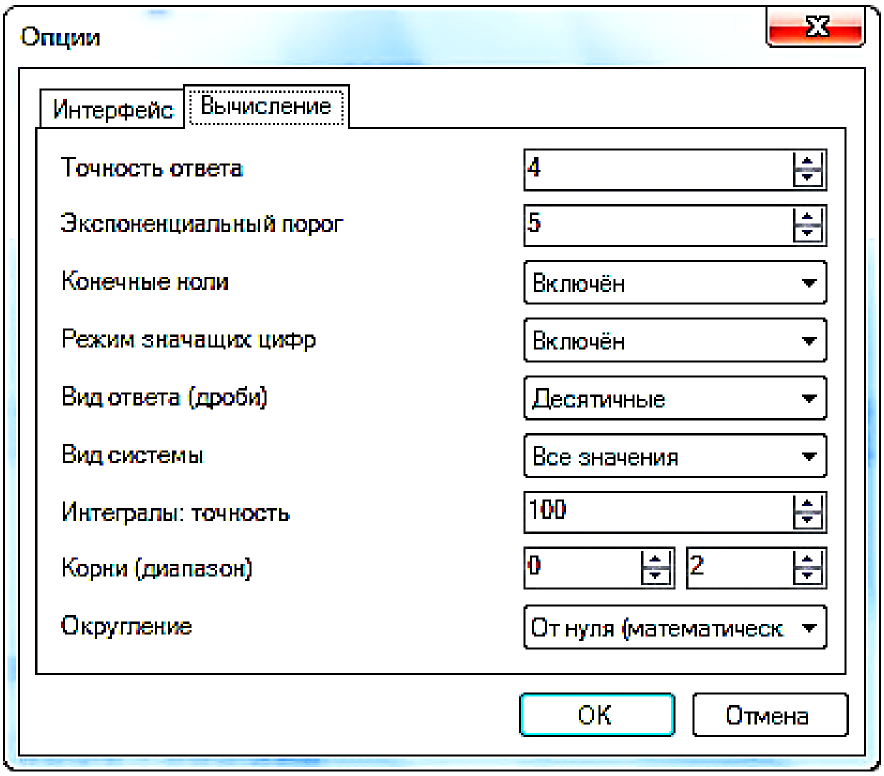
$$\begin{bmatrix} -0{,}824131899171456 \\ 0{,}824130799391815 \end{bmatrix}$$

В результате SMath Studio вычисляет оба корня заданного уравнения на установленном по умолчанию интервале [−20; 20].

В а р и а н т 2.

Ввести заданное уравнение.

Воспользоваться меню Сервис => команда Опции => вкладка Вычисление. Установить значения параметра Корни (диапазон) соответственно 0 и 2.



Выделить синей заливкой искомую переменную x:

$$\boxed{x^2 - \cos(x) = 0}$$

Воспользоваться меню Вычисление ⇒ команда Найти корни.

$$x^2 - \cos(x) = 0$$

$$0,824132267535382$$

В результате будет вычислен только один корень уравнения на заданном интервале [0; 2].

8.3. Уточнение корня

Уточнение приближённого значения корня заданного уравнения с помощью встроенной функции roots( ).

1) Ввести шаблон встроенной функции roots (3) с тремя параметрами:

$$\mathrm{roots}(\blacksquare;\ \blacksquare;\ \blacksquare)$$

2) В первый местозаполнитель ввести левую часть заданного уравнения (8.1), т. е. выражение для функции f(x).

Во второй местозаполнитель ввести искомую неизвестную x, в третий местозаполнитель – приближённое значение корня, определенное на этапе отделения корней.

$$\mathrm{roots}\left(x^2 - \cos(x);\ x\right) = 0,8241$$

Уточнение приближённого значения корня заданного уравнения с помощью встроенной функции solve( ).

1) Ввести шаблон встроенной функции solve (4) с четырьмя параметрами:

$$\mathrm{solve}(\blacksquare;\ \blacksquare;\ \blacksquare;\ \blacksquare)$$

2) В первый местозаполнитель ввести заданное уравнение (8.1). При записи уравнения обязательно использовать символ булево равенство $\boxed{=}$.

Во второй местозаполнитель ввести искомую неизвестную x, в третий и четвертый местозаполнители ввести соответственно левую и правую границы уточнённого интервала [0,5; 1,2].

$$\mathrm{solve}\left(x^2-\cos(x)=0;\ x;\ 0{,}5;\ 1{,}2\right)=0{,}8241$$

Уточнение приближённого значения корня уравнения с помощью встроенных инструментов программирования.

Пример 8.3. Уточнение корня нелинейного уравнения (8.1) методом итерации.

1) Преобразовать исходное уравнение вида f(x) = 0, где f(x) = $x^2 - \cos x$, к эквивалентному уравнению вида x = φ(x).

Для этого к обеим частям исходного уравнения $x^2 - \cos x = 0$ прибавить x. Получим эквивалентную функцию:

$$\varphi(x):=x^2-\cos(x)+x$$

2) Проверить условие сходимости метода итерации

$$|\varphi'(x)| \le q<1 \tag{8.3}$$

на уточненном отрезке [0,5; 1,2]:

$$x:=0{,}5$$

$$\left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right|=2{,}479$$

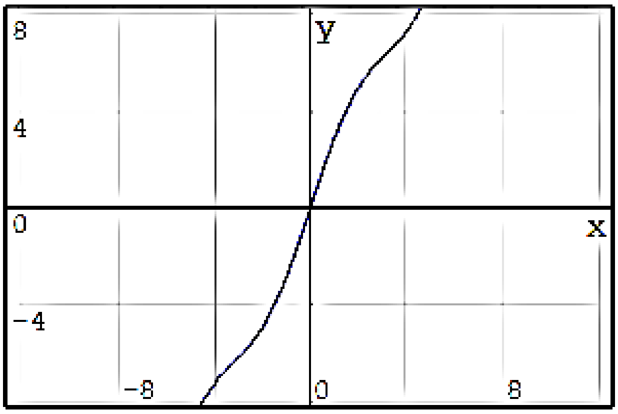
$$x:=1{,}2$$

$$\left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right|=4{,}332$$

Условие сходимости не выполняется.

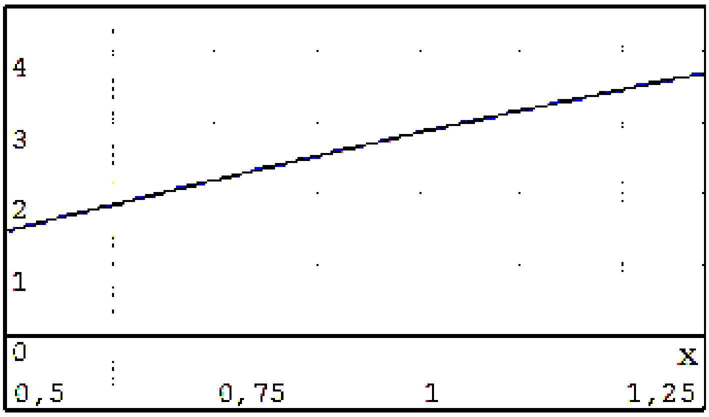
Это означает, что требуется определить эквивалентное уравнение x = φ(x) другим способом. Для этого необходимо произвести следующие действия.

3) Построить график первой производной исходной функции f(x).



$$\frac{d}{dx} f(x)$$

4) Форматировать график. Добиться, чтобы первая производная исходной функции была отображена на у т о ч н ё н н о м интервале [0,5; 1,2].



$$\frac{d}{dx} f(x)$$

Из полученного графика необходимо определить значение x на уточнённом интервале [0,5; 1,2], при котором производная f′(x) будет иметь максимальное по модулю (по абсолютной величине) значение. Делаем вывод, что производная f′(x) имеет максимальное по модулю значение при x, равном 1,2.

5) Задать значение x, определенное по графику f′(x). Произвести следующие вычисления:

$$x := 1{,}2$$

$$M := \left|\frac{d}{dx} f(x)\right| = 3{,}332$$

$$\lambda := -\frac{1}{M} = -0{,}3001$$

6) Сформировать новую эквивалентную функцию:

$$\varphi(x) := x + \lambda \cdot \left(x^2 - \cos(x)\right) \tag{8.4}$$

7) Проверить условие сходимости метода итерации $|\varphi'(x)| \le q < 1$ на уточнённом отрезке [0,5; 1,2]:

$$x := 0{,}5$$

$$\left|\frac{d}{d\,x}\varphi(x)\right| = 0{,}556$$

$$x := 1{,}2$$

$$\left|\frac{d}{d\,x}\varphi(x)\right| = 0$$

Условие сходимости выполняется.

Примечание. Если производная f′(x) на уточнённом отрезке отрицательная, то вместо уравнения $f(x) = 0$ следует рассматривать уравнение $-f(x) = 0$. Это следует учесть в выражении для эквивалентной функции (8.4), которое в таком случае примет вид:

$$\varphi(x) := x - \lambda \cdot f(x) \tag{8.5}$$

8) Разработать программу метода итерации с помощью встроенных средств программирования SMath Studio.

```
a := 0,5    b := 1,2

| x := a                                  [  0,824     ]
| n := 0                                = [  7         ]
| while |φ(x) − x| > 0,0001               [ −0,0002269 ]
|   | x := φ(x)
|   | n := n + 1
| [ x    ]
| [ n    ]
| [ f(x) ]
```

9. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФОРМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

9.1. Постановка задачи

Решение многих научно-технических задач, связанных с проектированием и исследованием технических систем, базируется на математическом моделировании различных элементов и устройств обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Математический аппарат ОДУ используется в механике, физике, электронике, электротехнике, теории автоматического управления, радиотехнике, гидродинамике для описания процессов и объектов различной физической природы.

Математический аппарат ОДУ служит основой для моделирования и исследования динамических непрерывных систем. Динамической называется модель, в математическое описание которой в качестве независимой переменной входит время.

Рассматриваются возможности математического пакета SMath Studio для решения и анализа динамических математических моделей в форме ОДУ первого порядка.

Ставится задача – найти численное решение ОДУ первого порядка на заданном отрезке $[t_0;\ t_k]$ при начальных условиях $y(t_0)$, т. е. решить задачу Коши. Отобразить результаты решения в графическом виде, варьируя начальные условия, получить семейство интегральных кривых.

9.2. Реализация решения ОДУ методом Рунге − Кутта 4-го порядка с фиксированным шагом интегрирования

В приложении SMath Studio обыкновенное дифференциальное уравнение вводится в документ в естественной математической форме.

Пример 9.1. Найти численное решение ОДУ первого порядка

$$\left(t^2+9\right)\frac{dy(t)}{dt}+19{,}5\,t\,y(t)-7=0, \tag{9.1}$$

принадлежащего классу линейных нестационарных моделей, на отрезке [0; 8] при начальных условиях $y(t_0) = 0{,}24$, т. е. решить задачу Коши.

1) Ввести заданное ОДУ. При записи уравнения обязательно использовать символ булево равенство =.

$$\left(t^2+9\right)\cdot\frac{d}{d\,t}y(t)+19{,}5\cdot t\cdot y(t)-7=0$$

2) Задать начальные условия.

$$y0 := 0{,}24$$

3) Заданное ОДУ (9.1) привести (преобразовать) к ф о р м е К о ш и или к н о р м а л ь н о й ф о р м е, т. е. разрешить его относительно первой производной:

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{-19{,}5\,t\,y(t)+7}{t^2+9}. \qquad (9.2)$$

Сформировать функцию D из правой части ОДУ (9.2):

$$D(t;\,y) := \frac{-19{,}5\cdot t\cdot y+7}{t^2+9}$$

4) Задать имя массиву – м а т р и ц е р е ш е н и я, в которой будет сохранен результат численного решения ОДУ.

Вставить шаблон встроенной функции rkfixed( ), которая реализует численное решение задачи Коши на отрезке $[t_0;\,t_k]$ методом Рунге – Кутта четвертого порядка с фиксированным шагом:

$$\boxed{Yrkfix := \mathrm{rkfixed}(\blacksquare;\,\blacksquare;\,\blacksquare;\,\blacksquare;\,\blacksquare)}$$

5) В первый местозаполнитель ввести начальные условия, во второй и третий местозаполнители ввести соответственно начальную и конечную границы интервала $[t_0;\,t_k]$, на котором требуется найти решение ОДУ (9.1).

В четвертый местозаполнитель ввести ч и с л о ш а г о в и н т е г р и р о в а н и я (количество точек, в которых определяется приближенное решение ОДУ). В пятый местозаполнитель ввести функцию D:

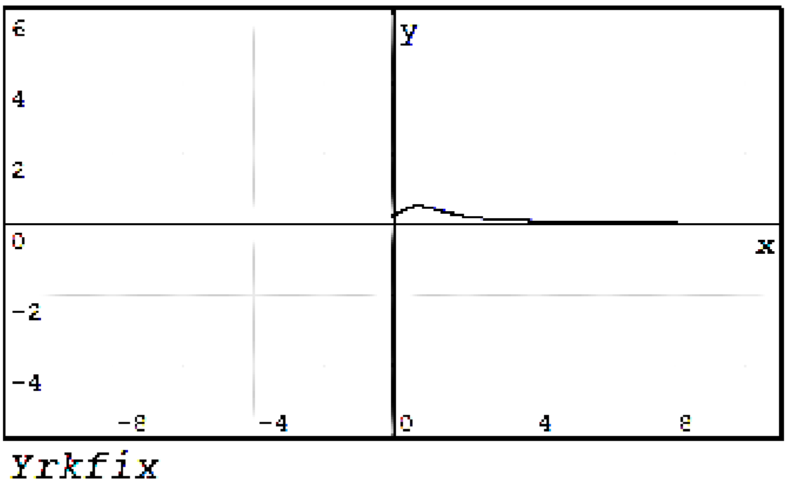
$$Yrkfix := \mathrm{rkfixed}(y0;\,0;\,8;\,500;\,D(t;\,y))$$

6) Вывести матрицу решения:

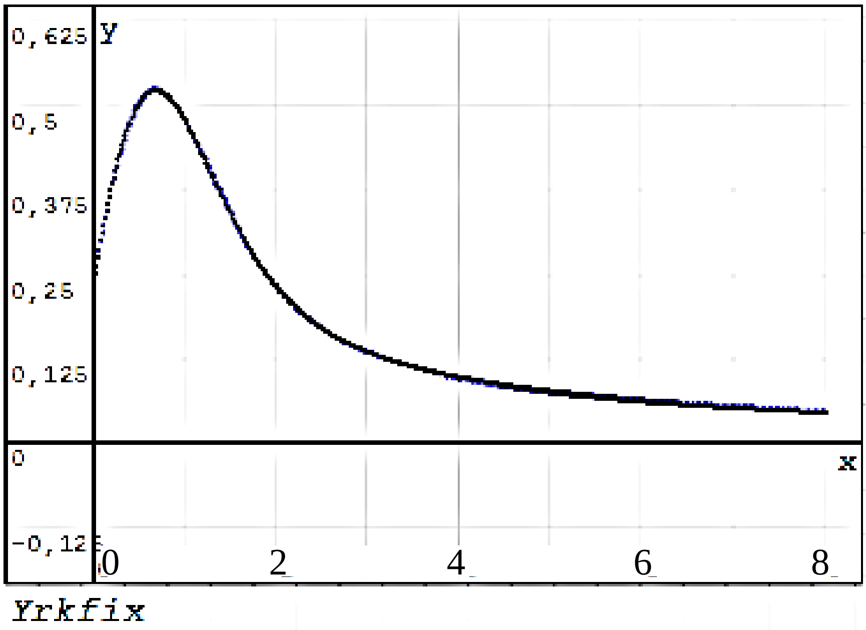
$$Yrkfix = \begin{bmatrix} 0 & 0,24 \\ 0,016 & 0,2523 \\ 0,032 & 0,2645 \\ 0,048 & 0,2765 \\ 0,064 & 0,2883 \\ 0,08 & 0,2999 \\ 0,096 & 0,3113 \\ 0,112 & 0,3225 \\ 0,128 & 0,3335 \\ 0,144 & 0,3442 \\ & \vdots \end{bmatrix}$$

Первый столбец матрицы Yrkfix содержит значения аргумента t, второй столбец – значения искомой функции – решения y(t).

7) Построить интегральную кривую – график решения ОДУ. Использовать шаблон Двумерный (2D).



8) Произвести форматирование графика. Добиться, чтобы интегральная кривая y(x) была отображена на заданном интервале интегрирования [0; 8].



9.3. Реализация решения ОДУ методом Рунге − Кутта 4-го порядка с адаптивным шагом интегрирования

Решение ОДУ 1-го порядка методом Рунге − Кутта 4-го порядка с адаптивно подстраиваемым шагом интегрирования начинается с выполнения действий (шагов) 1 − 3, описанных в примере 9.1. После этого необходимо произвести следующие действия.

Задать имя массиву – м а т р и ц е р е ш е н и я , в которой будет сохранен результат численного решения ОДУ.

Вставить шаблон встроенной функции Rkadapt( ), которая реализует численное решение задачи Коши на отрезке $[t_0; t_k]$ методом Рунге – Кутта четвертого порядка с адаптивно подстраиваемым шагом интегрирования:

```
Yrkad := Rkadapt(■; ■; ■; ■; ■)
```

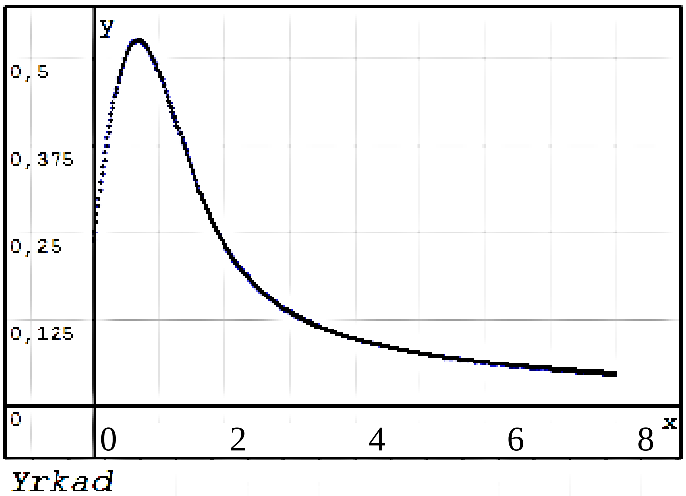
В местозаполнители шаблона ввести соответствующие параметры встроенной функции Rkadapt( ), которые совпадают с параметрами встроенной функции rkfixed( ) из подразд. 9.2.

```
Yrkad := Rkadapt(y0; 0; 8; 500; D(t; y))
```

Вывести матрицу решения:

$$Yrkad = \begin{bmatrix} 0 & 0,24 \\ 0,016 & 0,2524 \\ 0,032 & 0,2646 \\ 0,048 & 0,2767 \\ 0,064 & 0,2886 \\ 0,08 & 0,3003 \\ 0,096 & 0,3118 \\ 0,112 & 0,323 \\ 0,128 & 0,3341 \\ 0,144 & 0,3449 \\ & \vdots \end{bmatrix}$$

Построить интегральную кривую – график решения ОДУ. Использовать шаблон Двумерный (2D). Произвести форматирование графика. Добиться, чтобы интегральная кривая y(x) была отображена на заданном интервале интегрирования [0; 8].



9.4. Построение четырех кривых из семейства интегральных кривых для заданного ОДУ

Для получения нескольких интегральных кривых из семейства интегральных кривых ОДУ (9.1) необходимо варьировать н а ч а л ь н ы е у с л о в и я $y_0 = y(t_0)$. Для отображения в одной графической области четырех кривых, соответствующих разным начальным условиям, надо использовать разные обозначения для м а т р и ц ы р е ш е н и я:

Начальные условия 1 $\quad y0 := 0,5$

$$D(t; y) := \frac{-19,5 \cdot t \cdot y + 7}{t^2 + 9}$$

$$Yrkad\_1 := \text{Rkadapt}(y0; 0; 8; 500; D(t; y))$$

Начальные условия 2 $\quad y0 := 1,5$

$$D(t; y) := \frac{-19,5 \cdot t \cdot y + 7}{t^2 + 9}$$

$$Yrkad\_2 := \text{Rkadapt}(y0; 0; 8; 500; D(t; y))$$

Начальные условия 3 $\quad y0 := 3$

$$D(t; y) := \frac{-19,5 \cdot t \cdot y + 7}{t^2 + 9}$$

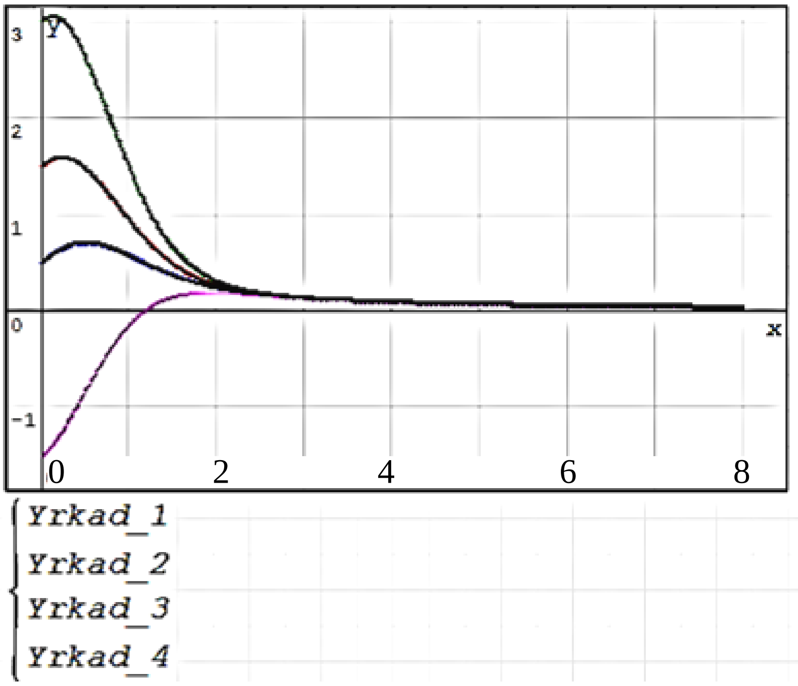
$$Yrkad\_3 := \text{Rkadapt}(y0; 0; 8; 500; D(t; y))$$

Начальные условия 4 $\quad y0 := (-1,5)$

$$D(t; y) := \frac{-19,5 \cdot t \cdot y + 7}{t^2 + 9}$$

$$Yrkad\_4 := \text{Rkadapt}(y0; 0; 8; 500; D(t; y))$$

Построить четыре интегральные кривые – решения ОДУ (9.1). Использовать шаблон Двумерный (2D). Произвести форматирование графика. Добиться, чтобы интегральные кривые были отображены на заданном интервале интегрирования [0; 8].



10. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФОРМЕ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-го ПОРЯДКА

10.1. Численное решение модели в форме системы ОДУ

10.1.1. Постановка задачи

Рассматриваются возможности математического пакета SMath Studio для численного решения и анализа динамических математических моделей в форме систем ОДУ.

Численное решение системы ОДУ предполагает ее представление в форме Коши, или в нормальной форме:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \cdots, y_n); \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \cdots, y_n); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{cases} \tag{10.1}$$

Задача Коши для системы ОДУ формулируется так: *найти решение системы ОДУ, удовлетворяющее начальным условиям:* $y_1(t_0) = y_{10}$; $y_2(t_0) = y_{20}$; … ; $y_n(t_0) = y_{n0}$.

В векторной форме нормальная система ОДУ имеет вид:

$$Y'=F(t,Y) \ \text{ при } \ Y(t_0)=Y_0.$$

Ставится задача – найти численное решение математической модели в виде системы двух ОДУ первого порядка в нормальной форме (в форме Коши):

$$\begin{cases} y_1' = -3\,y_1 - y_2^2 - 11{,}7\,y_2; \\ y_2' = -y_2 - 0{,}3\,y_1^2 + \ y_1 y_2 \end{cases} \tag{10.2}$$

на отрезке [0; 4] при начальных условиях $y_1(t_0) = 3, \ y_2(t_0) = -1,$ т. е. решить задачу Коши. Построить фазовую траекторию для данной динамической математической модели.

10.1.2. Реализация численного решения системы ОДУ

Заданную систему ОДУ (10.2) ввести в документ SMath Studio в естественной математической форме. При записи уравнений о б я з а т е л ь н о и с п о л ь з о в а т ь с и м в о л б у л е в о р а в е н с т в о $\boxed{=}$.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\,t} y_1 = -3 \cdot y_1 - y_2^{\,2} - 11{,}7 \cdot y_2 \\ \dfrac{d}{d\,t} y_2 = -y_2 - 0{,}3 \cdot y_1^{\,2} + y_1 \cdot y_2 \end{cases}$$

Ввести начальные условия для двух искомых функций:

$$y_{10} = 3 \qquad y_{20} = -1$$

Задать вектор начальных условий.

$$y := \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Сформировать вектор-функцию D из правых частей уравнений системы ОДУ (10.2):

$$D(t;\, y) := \begin{bmatrix} -3 \cdot y_1 - y_2^{\,2} - 11{,}7 \cdot y_2 \\ -y_2 - 0{,}3 \cdot y_1^{\,2} + y_1 \cdot y_2 \end{bmatrix}$$

Задать имя массиву – м а т р и ц е р е ш е н и я, в которой будет сохранен результат численного решения системы ОДУ (10.2).

Вставить шаблон встроенной функции Rkadapt( ), которая реализует численное решение задачи Коши на отрезке $[t_0; t_k]$ методом Рунге – Кутта четвертого порядка с адаптивно подстраиваемым шагом интегрирования.

$$Yrkad := \mathrm{Rkadapt}(\blacksquare; \blacksquare; \blacksquare; \blacksquare; \blacksquare)$$

В местозаполнители шаблона слева направо ввести соответственно параметры: начальные условия, начальную и конечную границы интервала $[t_0; t_k]$, на котором требуется найти решение системы ОДУ, число шагов интегрирования (количество точек, в которых определяется приближенное решение системы ОДУ) и вектор-функцию D.

$$Yrkad := \mathrm{Rkadapt}(y; 0; 4; 600; D(t; y))$$

Вывести матрицу решения

$$Yrkad = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0{,}006667 & 3{,}012 & -1{,}032 \\ 0{,}01333 & 3{,}026 & -1{,}064 \\ 0{,}02 & 3{,}042 & -1{,}097 \\ 0{,}02667 & 3{,}06 & -1{,}131 \\ 0{,}03333 & 3{,}079 & -1{,}166 \\ 0{,}04 & 3{,}1 & -1{,}201 \\ 0{,}04667 & 3{,}123 & -1{,}238 \\ 0{,}05333 & 3{,}148 & -1{,}275 \\ 0{,}06 & 3{,}175 & -1{,}314 \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

Первый столбец матрицы решения Yrkad содержит значения аргумента t, второй столбец – значения искомой функции $y_1(t)$, третий – значения искомой функции $y_2(t)$.

П о с т р о е н и е г р а ф и к а р е ш е н и я с и с т е м ы О Д У.

1. Сформировать три вектора: вектор значений аргумента t, векторы искомых функций y_1 и y_2 – решения системы ОДУ. Для этого использовать встроенную функцию col( ), которая извлекает из матрицы Yrkad указанный столбец (вектор).

$$t := \mathrm{col}(Yrkad;\ 1)$$

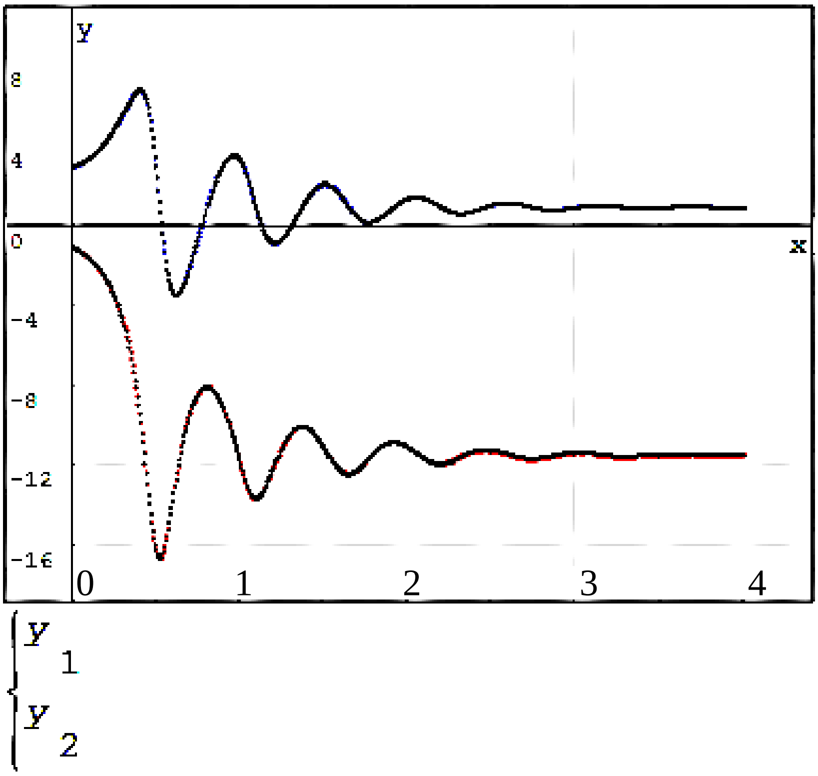
$$y_1 := \mathrm{col}(Yrkad;\ 2) \qquad y_2 := \mathrm{col}(Yrkad;\ 3)$$

2. Создать две расширенные матрицы: y_1 – путем объединения двух векторов – t и y_1 и y_2 – путем объединения двух векторов – t и y_2.

Для этого применить встроенную функцию augment( ):

$$y_1 := \mathrm{augment}(t;\ y_1) \qquad y_2 := \mathrm{augment}(t;\ y_2)$$

3. Получить графическое отображение решения системы ОДУ (10.2). Использовать шаблон Двумерный (2D). Произвести форматирование графика. Добиться, чтобы решение системы ОДУ – функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – были отображены на заданном интервале интегрирования [0; 4].



Построение фазовой траектории для заданной системы ОДУ.

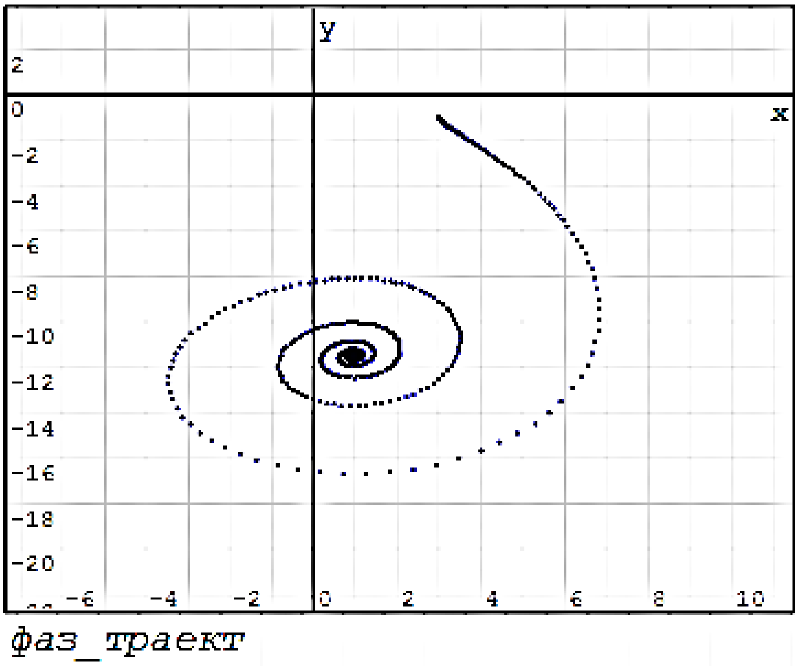
Значения искомых функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$ в момент времени t_i представляют собой координаты изображающей точки, характеризующей состояние исследуемого динамического объекта в данный момент времени. Совокупность таких точек для последовательных моментов времени t_0, t_1, t_2,

$t_3, \ldots, t_m$ образует фазовую траекторию. Для $n > 2$ (n – порядок математической модели) фазовые траектории располагаются в фазовом пространстве.

1. Создать расширенную матрицу *фаз_траект*, путем объединения двух векторов – y_1 и y_2. Для этого применить встроенную функцию augment( ):

$$фаз\_траект := \mathrm{augment}\left(y_1, y_2\right)$$

2. Построить фазовую траекторию системы ОДУ (10.2). Использовать шаблон Двумерный (2D). Произвести форматирование графика.



Построение интегральной кривой для заданной системы ОДУ.

Интегральные кривые для системы двух ОДУ получают в трехмерном пространстве переменных y_1, y_2, t.

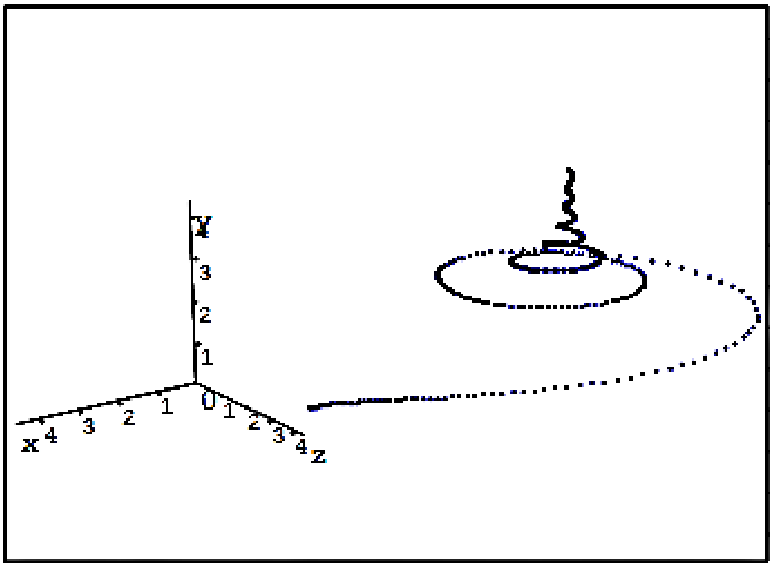
1. Создать расширенную матрицу *интегр_кривая* путем объединения трех векторов – y_2, t и y_1. Применить встроенную функцию augment( ):

$$интегр\_кривая := \mathrm{augment}\left(y_2, t, y_1\right)$$

2. Вывести матрицу *интегр_кривая:*

$$\text{интегр\_кривая} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1,032 & 0,006667 & 3,012 \\ -1,064 & 0,01333 & 3,026 \\ -1,097 & 0,02 & 3,042 \\ -1,131 & 0,02667 & 3,06 \\ -1,166 & 0,03333 & 3,079 \\ -1,201 & 0,04 & 3,1 \\ -1,238 & 0,04667 & 3,123 \\ -1,275 & 0,05333 & 3,148 \\ -1,314 & 0,06 & 3,175 \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

3. Построить интегральную кривую системы ОДУ (10.2). Использовать шаблон Трехмерный (3D). Произвести форматирование графика.



интегр_кривая

10.2. Численное решение модели в форме ОДУ 3-го порядка

10.2.1. Постановка задачи

Рассматриваются возможности математического пакета SMath Studio для численного решения и анализа динамических математических моделей в форме ОДУ 3-го порядка.

Ставится задача – найти численное решение математической модели в форме ОДУ третьего порядка:

$$y'''(t) + 0.93\,y''(t) + 25.3\,y'(t) + 43\,y^2(t) = 0 \qquad (10.3)$$

на отрезке [0;10] при начальных условиях $y(t_0)=0$; $y'(t_0)=0,4$; $y''(t_0)=1,5$, т. е. решить задачу Коши.

Для численного решения ОДУ n-го порядка в приложении SMath Studio следует предварительно свести его к системе n ОДУ первого порядка в нормальной форме (в форме Коши).

10.2.2. Реализация численного решения ОДУ 3-го порядка

Заданное ОДУ (10.3) ввести в документ SMath Studio в естественной математической форме. При записи уравнения обязательно использовать символ булево равенство $\boxed{=}$.

Для ввода операторов второй и третьей производной использовать встроенную функцию diff (3).

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t)+0,93\cdot\frac{d^2}{dt^2}y(t)+25,3\cdot\frac{d}{dt}y(t)+43\cdot y(t)^2 = 0$$

Задать начальные условия.

$$y(0)=0 \qquad \frac{d}{dt}y(0)=0,4 \qquad \frac{d^2}{dt^2}y(0)=1,5$$

Отсутствие возможности в SMath Studio работать с элементами векторов с нулевыми индексами, осложняет решение данной задачи. По этой причине требуется ввести дополнительные переменные для обозначения искомой функции – решения y(t) ОДУ, ее первой производной $y'(t)$ и второй производной $y''(t)$.

$$y_1:=y \qquad y_2:=\frac{d}{dt}y \qquad y_3:=\frac{d^2}{dt^2}y$$

Сформировать вектор начальных условий:

$$y:=\begin{bmatrix}0\\0,4\\1,5\end{bmatrix}$$

Заданное ОДУ (10.3) 3-го порядка свести к системе трех ОДУ первого порядка в нормальной форме (в форме Коши). Алгоритм преобразования ОДУ n-го порядка к нормальной системе n ОДУ первого порядка (в форме Коши) см. в работах [4, 5]. Из правых частей уравнений полученной системы трех ОДУ первого порядка сформировать вектор-функцию D:

$$D(t;y):=\begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ -0,93\cdot y_3-25,3\cdot y_2-43\cdot y_1^{\,2} \end{bmatrix}$$

Задать имя матрице решения.

Вставить шаблон встроенной функции Rkadapt( ), которая реализует численное решение ОДУ (задачи Коши) на отрезке $[t_0;\ t_k]$ методом Рунге – Кутта четвертого порядка с адаптивно подстраиваемым шагом интегрирования. Заполнить местозаполнители шаблона по тому же принципу, что и в п. 10.1.2.

$$Yrkad:=\mathrm{Rkadapt}(y;\ 0;\ 10;\ 500;\ D(t;y))$$

Вывести матрицу решения:

$$Yrkad=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,4 & 1,5 \\ 0,02 & 0,008284 & 0,4277 & 1,265 \\ 0,04 & 0,01707 & 0,4505 & 1,021 \\ 0,06 & 0,02627 & 0,4685 & 0,7711 \\ 0,08 & 0,03578 & 0,4813 & 0,5177 \\ 0,1 & 0,04549 & 0,4892 & 0,2633 \\ 0,12 & 0,05531 & 0,4919 & 0,01014 \\ 0,14 & 0,06513 & 0,4896 & -0,2394 \\ 0,16 & 0,07486 & 0,4824 & -0,483 \\ & & \vdots & \end{bmatrix}$$

Первый столбец матрицы решения Yrkad содержит значения аргумента t, второй столбец – значения искомой функции $y(t)$, третий – значения первой производной искомой функции $y'(t)$, четвертый – значения второй производной искомой функции $y''(t)$.

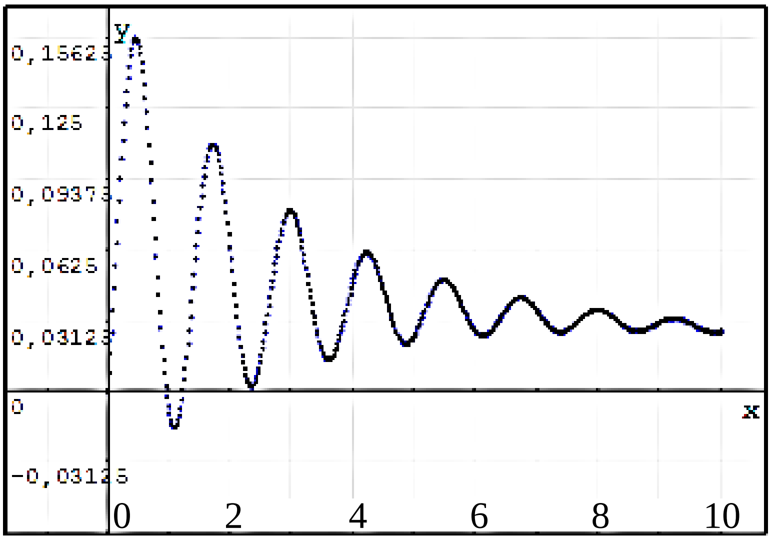
Сформировать два вектора: вектор значений аргумента t и вектор искомой функции y(t) – решения ОДУ (10.3). Для этого использовать встроенную функцию col( ), которая извлекает из матрицы Yrkad указанный столбец (вектор).

$$t := \mathrm{col}(Yrkad;\ 1) \qquad y := \mathrm{col}(Yrkad;\ 2)$$

Создать расширенную матрицу *решение_y* путем объединения двух векторов – t и y. Для этого применить встроенную функцию augment ( ):

$$решение\_y := \mathrm{augment}(t;\ y)$$

Получить графическое отображение решения ОДУ – функции y(t). Произвести форматирование графика.



решение_y

Добавление к полученному графику решения ОДУ y(t) графика скорости изменения решения y'(t).

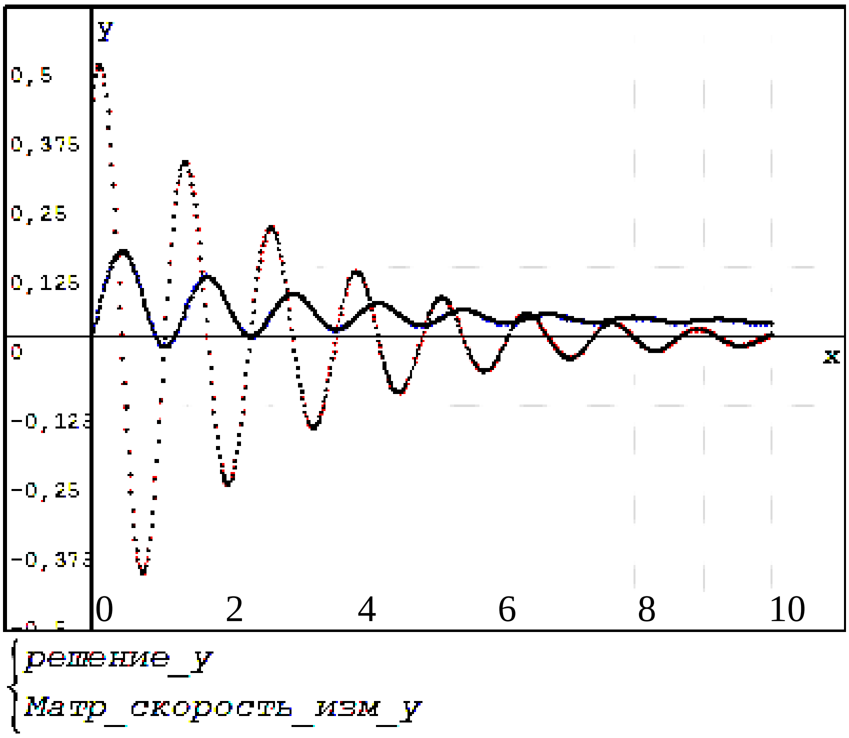
1. Сформировать вектор скорости изменения искомой функции y(t):

$$скорость\_изм\_y := \mathrm{col}(Yrkad;\ 3)$$

2. Создать расширенную матрицу *Матр_скорость_изм_y* путем объединения двух векторов – t и *скорость_изм_*:

Матр_скорость_изм_y := augment(t; скорость_изм_y)

3. Получить графическое отображение решения ОДУ y(t) и скорости изменения решения y′(t). Произвести форматирование графика.



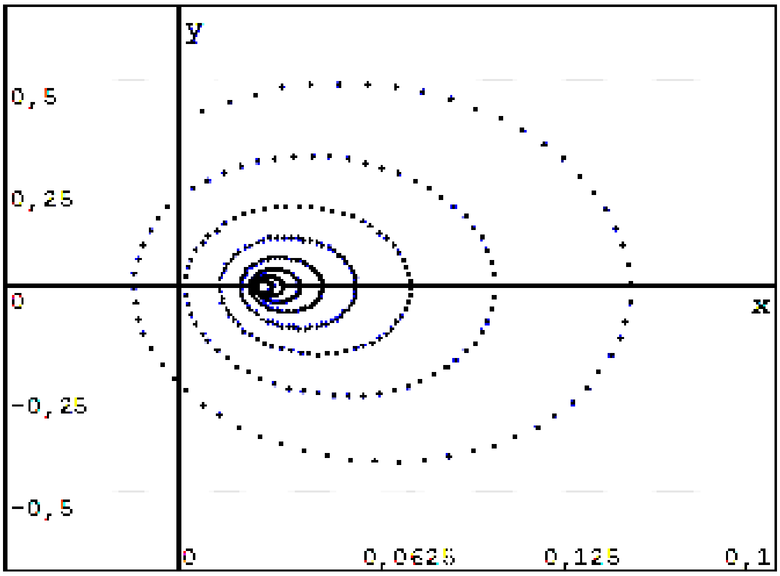
Построение фазовой траектории для заданного ОДУ.

Фазовая траектория динамической системы, описываемой моделью в форме ОДУ n-го порядка, отображает взаимосвязь искомой функции – решения ОДУ y(t) и скорости ее изменения y′(t).

1. Сформировать расширенную матрицу *фаз_траектория* путем объединения двух векторов – y и *скорость_изм_y*:

фаз_траектория := augment(y; скорость_изм_y)

2. Построить фазовую траекторию ОДУ (10.3). Использовать шаблон Двумерный (2D). Произвести форматирование графика.



фаз_траектория

11. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

11.1. Постановка задачи

В процессе математического моделирования, как на стадии формирования модели, так и на этапе решения модели, часто появляется необходимость аппроксимировать ту или иную функциональную зависимость. Под аппроксимацией понимают приближение (приближенную замену) исходной функции другой функцией, более простой и легко вычисляемой.

Решение многих задач электроники, электротехники, физики, радиотехники, теории автоматического управления предполагает аппроксимацию вольт-амперных характеристик нелинейных элементов, амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик фильтров, усилителей и т. д. Аппроксимация широко используется в научных исследованиях для представления (описания) физических закономерностей на основе полученных экспериментально (эмпирических) данных. В некоторых задачах, связанных со сложными многомерными моделями, приходится иметь дело с функциями, заданными громоздкими аналитическими выражениями. Анализ таких функций затруднен, вычислительные операции над ними трудоемки. Проблема решается с помощью аппроксимации данной функции другой функцией с такими свойствами, которые упрощают работу исследователя.

Выбор критерия близости (критерия согласия) аппроксимирующей и аппроксимируемой функций определяется постановкой задачи. Если в качестве критерия близости принято условие совпадения аппроксимирующей и аппроксимируемой функций в заданном ряде дискретных точек (в узлах), то приходят к задаче интерполяции, или интерполирования. Основная задача интерполяции – нахождение значения таблично заданной функции в промежуточных точках между узлами. Если требуется определить значение функции в точке, находящейся за пределами заданного интервала аппроксимации, то решают задачу экстраполяции.

Конкретизируем задачу интерполяции.

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей значений, определенных в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ (узлах):

$$y_0 = f(x_0);\ \ y_1 = f(x_1);\ \ y_2 = f(x_2);\ \ldots;\ \ y_n = f(x_n). \tag{11.1}$$

Требуется построить интерполирующую (аппроксимирующую) функцию F(x), принадлежащую известному классу и принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и заданная функция f(x), т. е. такую, что

$$F(x_0) = y_0;\ \ F(x_1) = y_1;\ \ F(x_2) = y_2;\ \ldots;\ \ F(x_n) = y_n. \tag{11.2}$$

Геометрически это означает, что надо построить кривую y = F(x) определенного типа, проходящую через точки с координатами $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, … , $(x_n; y_n)$ (рис. 11.1).

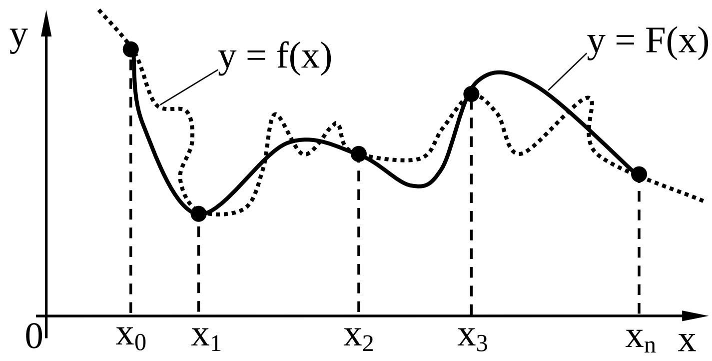


Рис. 11.1. Геометрическая интерпретация задачи интерполяции

В такой постановке задача интерполяции имеет бесчисленное множество решений. Однозначное решение задачи интерполяции можно получить, если в качестве аппроксимирующей функции F(x) выбрать полином (многочлен) $P_n(x)$ степени не выше n, удовлетворяющий условиям:

$$P_n(x_0) = y_0;\ \ P_n(x_1) = y_1;\ \ P_n(x_2) = y_2;\ \ \ldots;\ \ P_n(x_n) = y_n. \tag{11.3}$$

Полиномы имеют очевидные преимущества перед другими классами интерполирующих функций: они являются линейными функциями своих коэффициентов, их можно легко вычислять, складывать, умножать, интегрировать и дифференцировать.

В зависимости от решаемой задачи используют различные формы представления интерполяционной функции (полиномы в каноническом виде, Лагранжа, формулы Ньютона, Стирлинга, Бесселя, сплайн-функции и т. д.).

11.2. Средства SMath Studio для решения задачи интерполяции

Возможности приложения SMath Studio для решения задачи интерполяции, к сожалению, весьма ограничены в отличие от инженерного приложения PTC Mathcad Prime 3.1 [7].

11.2.1. Линейная интерполяция

В качестве интерполирующей функции используется полином первой степени

$$P(x) = a_{0i} + a_{1i}\,x. \tag{11.4}$$

Следовательно, на каждом i-м интервале $[x_{i-1}, x_i]$ заданная интерполируемая функция $y = f(x)$ будет заменяться (приближаться) отрезком прямой, соединяющим точки $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ и $(x_i, f(x_i))$. Таким образом, приближающая интерполирующая функция $y = F(x)$ будет кусочно-линейной.

Пример 11.1. Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей значений y_i, определенных в узлах x_i:

x	0,5	2,4	5,3	7,9	10	11,6	13	16	17,7	20
y	6,252	3,831	− 9	0,904	2	2,735	5	1,721	− 4	−6,108

Произвести линейную интерполяцию заданной функции.

1. Сформировать вектор значений узлов интерполяции X и вектор значений исходной функции Y. Элементы вектора X должны быть расположены в порядке возрастания:

$$X := \begin{bmatrix} 0,5 \\ 2,4 \\ 5,3 \\ 7,9 \\ 10 \\ 11,6 \\ 13 \\ 16 \\ 17,7 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad Y := \begin{bmatrix} 6,252 \\ 3,831 \\ -9 \\ 0,904 \\ 2 \\ 2,735 \\ 5 \\ 1,721 \\ -4 \\ -6,108 \end{bmatrix}$$

2. Сформировать вектор *Обозн_исх_д*, необходимый для того, чтобы отобразить в графической области исходную заданную функцию $y = f(x)$ в виде совокупности точек:

```
for i ∈ [1..10]
  Обозн_исх_д  := "*"
             i
Обозн_исх_д
```

$$Обозн\_исх\_д = \begin{bmatrix} "*" \\ "*" \\ "*" \\ "*" \\ "*" \\ "*" \\ "*" \\ "*" \\ "*" \\ "*" \end{bmatrix}$$

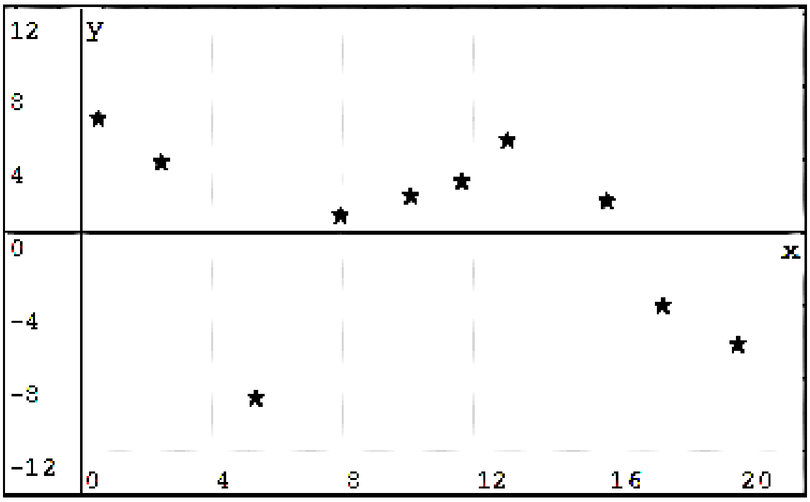
3. Сформировать расширенную матрицу *XY* путем объединения трех векторов − X, Y и *Обозн_исх_д*:

$$XY := \mathrm{augment}(X;\ Y;\ Обозн\_исх\_д)$$

4. Вывести расширенную матрицу *XY*

$$XY = \begin{bmatrix} 0,5000 & 6,252 & "*" \\ 2,400 & 3,831 & "*" \\ 5,300 & -9,000 & "*" \\ 7,900 & 0,9040 & "*" \\ 10,00 & 2,000 & "*" \\ 11,60 & 2,735 & "*" \\ 13,00 & 5,000 & "*" \\ 16,00 & 1,721 & "*" \\ 17,70 & -4,000 & "*" \\ 20,00 & -6,108 & "*" \end{bmatrix}$$

5. Отобразить на графике исходную интерполируемую функцию y = f(x).



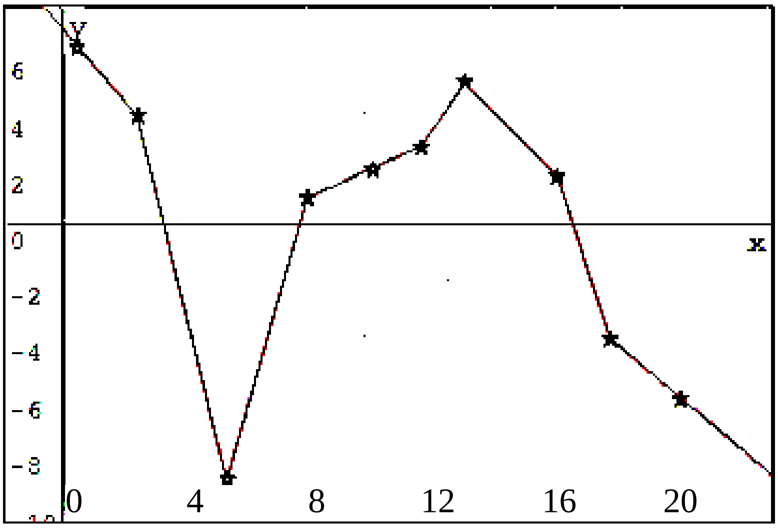
XY

6. Отобразить на графике результат линейной интерполяции (интерполирующую функцию). Для этого воспользоваться встроенной функцией linterp( ).

В качестве параметров функции в местозаполнители шаблона

$$\mathrm{linterp}(\blacksquare ; \blacksquare ; \blacksquare)$$

ввести слева направо вектор значений узлов интерполяции X, вектор значений исходной функции Y и переменную x. Переменная x может принимать любое значение из заданного интервала интерполяции [0,5; 20], она используется для построения графика интерполирующей функции.



$$\begin{cases} XY \\ \mathrm{linterp}(X;\ Y;\ x) \end{cases}$$

7. Определить приближённое значение функции $y = f(x)$ с помощью линейной интерполирующей функции в конкретных точках x1 = 3,7, x2 = 8,35.

$$\mathrm{linterp}(X;\ Y;\ 3{,}7) = -1{,}921$$

$$\mathrm{linterp}(X;\ Y;\ 8{,}35) = 1{,}139$$

11.2.2. Интерполяция сплайнами

Сплайн – это функция, образуемая из последовательности сопряженных (состыкованных в узлах) полиномов. На каждом i-м интервале $[x_{i-1},\ x_i]$ сплайн-функция представляется i-м полиномом, определенным для данного конкретного интервала. Полиномы соседних интервалов стыкуются так, чтобы функция и соответствующие ее производные были непрерывны. Наиболее популярна интерполяция кубическими сплайнами.

Кубический сплайн – это кусочнополиномиальная функция, которая образуется путем стыковки (сшивания) в узлах полиномов третьей степени. При этом на i-м интервале $[x_{i-1},\ x_i]$ функция $y = f(x)$ интерполируется кубическим полиномом:

$$S_i(x) = a_{0i} + a_{1i}(x - x_i) + a_{2i}(x - x_i)^2 + a_{3i}(x - x_i)^3. \qquad (11.5)$$

Для всего интервала интерполяции $[x_0;\ x_n]$ необходимо определить n кубических полиномов, отличающихся коэффициентами a_{0i}, a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}.

Коэффициенты полиномов (11.5) сплайна определяются из следующих условий:

каждый i-й полином проходит через два соседних узла x_{i-1} и x_i, т. е. значения сплайна равны значениям заданной аппроксимируемой функции $y = f(x)$ в узлах интерполяции (условие интерполирования);

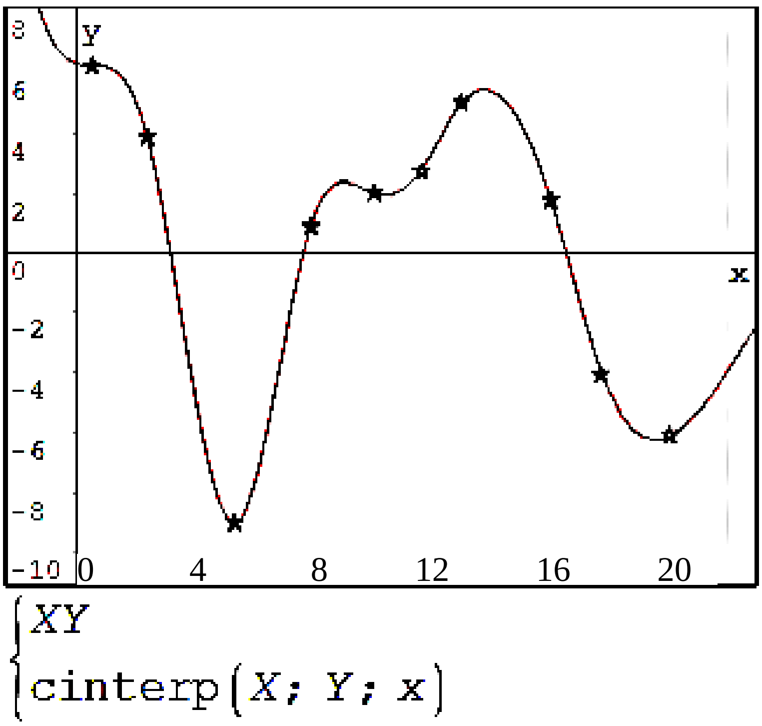
первая производная сплайн-функции S(x) непрерывна в узлах интерполяции (условие гладкости функции);

вторая производная сплайн-функции S(x) непрерывна в узлах интерполяции (условие гладкости первой производной функции);

граничные условия, задающие поведение сплайн-функции S(x) в граничных точках интервала интерполяции x_0 и x_n (определяются постановкой задачи).

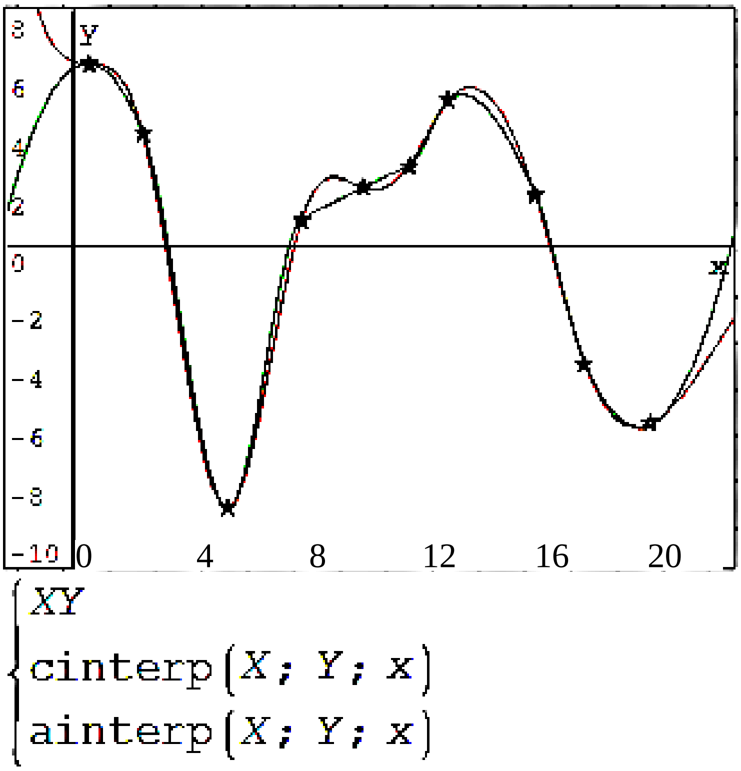
Достоинством интерполирования кубическими сплайнами является его сходимость. При неограниченном возрастании числа узлов последовательность получаемых сплайн-функций сходится к заданной интерполируемой функции $y = f(x)$. Использование сплайнов обеспечивает получение наиболее гладкой интерполяционной функции.

В SMath Studio можно произвести интерполяцию кубическими сплайнами с помощью встроенной функции cinterp( ).



С помощью встроенной функции ainterp( ) можно реализовать интерполяцию методом сплайна Акимы [6].

Сопоставим в одной графической области результаты интерполяции Акима-сплайнами и кубическими сплайнами. Более сглаженная интерполирующая кривая получена при интерполяции Акима-сплайнами.



12. ПОСТРОЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ АППРОКСИМАЦИИ ДАННЫХ

Возможности приложения SMath Studio для решения задачи аппроксимации, к сожалению, ограничены в отличие от инженерного приложения PTC Mathcad Prime 3.1 [7].

12.1. Постановка задачи

Эмпирические модели формируются по результатам эксперимента (на основании данных наблюдений). Моделируемый объект рассматривается как кибернетическая модель «черный ящик». Для измерения доступны только его входные сигналы (управляющие воздействия) и выходные сигналы (отклики или реакции). Ставится задача − на основе обработки результатов измерений входных и выходных сигналов исследуемого объекта выявить эмпирические закономерности в полученных данных и математически описать их формальной приближённой аналитической моделью.

В инженерной практике и в научных исследованиях часто приходится решать следующую задачу.

В результате серии измерений получены m пар значений x_i, y_i (i = 1, 2, 3, … , m), которые представлены в табличной форме. Полагают, что x – независимая переменная (фактор), а y – зависимая переменная (функция, отклик). Требуется установить функциональную зависимость между x и y, т. е. определить такую приближённую аналитическую формальную модель, которая бы наиболее соответствовала данному набору экспериментальных данных x_i, y_i (i = 1, 2, 3, … , m).

Задача аналитического приближения таблично заданных функций представляет одну из категорий задач аппроксимации.

Под аппроксимацией понимают приближение (приближённую замену) исходной функции другой функцией с известными свойствами, более простой и легко вычисляемой.

Исследование, анализ, идентификация физических систем в различных научных областях − электронике, электротехнике, физике, теории электрических цепей, радиотехнике, теории автоматического управления, энергетике – предполагают аппроксимацию вольт-амперных характеристик нелинейных элементов, кривых намагничивания сердечников, переходных, амплитудно-частотных, фазочастотных характеристик фильтров, усилителей, регуляторов, компенсирующих устройств и т. д.

Решение задачи аналитического приближения таблично заданной функции предполагает следующие действия.

1) Выбор класса аппроксимирующей функции – эмпирической модели

$$y = f(x, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n), \qquad (12.1)$$

наилучшим образом отражающей связь между экспериментальными данными x и y (наилучшим образом приближающейся к эмпирическим данным).

2) Оценивание (нахождение числовых оценок) параметров a_0, a_1, a_2, … , a_n приближающей функции (12.1), при которых достигается наилучшее соот-

ветствие (согласие) между экспериментальными данными и аппроксимирующей функцией (эмпирической моделью).

Невозможно точно определить значения параметров a_0, a_1, a_2, … , a_n эмпирической формулы (12.1) по результатам измерений, поскольку экспериментальные данные, как правило, содержат случайные ошибки, обусловленные неидеальностью измерительной техники (погрешностями измерений) и влиянием неконтролируемых случайных факторов (внешних и внутренних), т. е. являются случайными величинами. Следовательно, искомые параметры a_0, a_1, a_2, … , a_n эмпирической модели (12.1) также являются случайными величинами. Поэтому ставится задача − найти оценки этих параметров, наилучшие (оптимальные) с точки зрения заданного критерия.

Приближающую функциональную зависимость называют эмпирической формулой, или уравнением регрессии. График приближающей функции называют линией регрессии.

Определение аналитического выражения для описания связи зависимой величины y (функции) с независимыми величинами (факторами) x_1, x_2, … , x_m называют задачей регрессионного анализа. Если требуется определить уравнение взаимосвязи для двух переменных − y и x, то речь идет о задаче парной (однофакторной) регрессии. Если зависимая переменная y является функцией нескольких факторов, то решается задача множественной (многофакторной) регрессии.

Одним из методов, применяемых для определения оценок параметров (коэффициентов) a_0, a_1, a_2, … , a_n эмпирической (регрессионной) модели (12.1), является метод наименьших квадратов (МНК).

Метод наименьших квадратов обеспечивает нахождение наиболее вероятных значений параметров эмпирической модели $y = f(x, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на основе критерия минимума суммы квадратов отклонений d_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, m$) значений приближающей функции (значений, предсказанных моделью) y от результатов эксперимента y_i (рис. 12.1). При этом предполагается, что отклонения d_i подчиняются нормальному закону распределения.

С точки зрения **м е т о д а н а и м е н ь ш и х к в а д р а т о в** наилучшее согласование линии регрессии с результатами измерений y_i достигается при выполнении условия

$$\sum_{i=1}^{m} d_i^2 = \sum_{i=1}^{m} \left[y_i - f\left(x_i, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\right)\right]^2 = S = \min. \qquad (12.2)$$

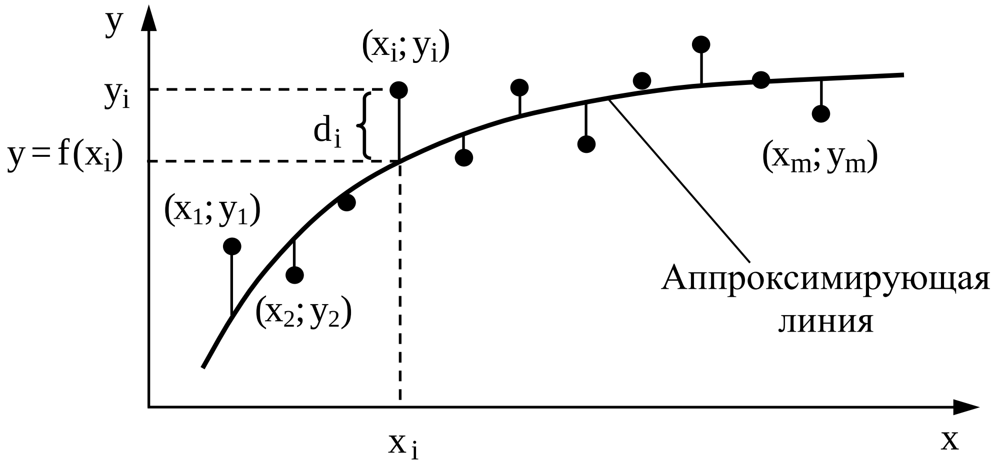


Рис. 12.1. Отклонения d_i значений аппроксимирующей функции $y = f(x_i)$ от результатов эксперимента y_i

Необходимым условием минимума функции $S = S(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ является равенство нулю ее частных производных по всем переменным. Поэтому задача нахождения параметров $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ эмпирической модели (12.1) сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0; \quad \cdots; \quad \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0. \qquad (12.3)$$

Оценки параметров $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ аппроксимирующей функции (12.1), полученные методом наименьших квадратов, являются несмещенными и состоятельными.

При решении **з а д а ч и л и н е й н о й р е г р е с с и и**, когда результаты эксперимента приближаются линейной функцией вида

$$y = ax + b, \qquad (12.4)$$

система уравнений (12.3) принимает вид:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0. \qquad (12.5)$$

После соответствующих подстановок система (12.5) приводится к виду:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} y_i = am + b\sum\limits_{i=1}^{m} x_i; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i = a\sum\limits_{i=1}^{m} x_i + b\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^{\,2}. \end{cases} \qquad (12.6)$$

Решая систему (12.6), находят искомые оценки параметров a и b регрессионной модели (12.4):

$$a = \frac{m\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\, y_i - \sum\limits_{i=1}^{m} x_i \sum\limits_{i=1}^{m} y_i}{m\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^{\,2} - \left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\right)^2}; \quad b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^{\,2} - \sum\limits_{i=1}^{m} x_i \sum\limits_{i=1}^{m} x_i\, y_i}{m\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^{\,2} - \left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\right)^2}. \qquad (12.7)$$

Найденные значения a и b определяют регрессионную прямую, наиболее близкую к экспериментальным точкам x_i, y_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, m$) с точки зрения критерия минимума суммы квадратов отклонений результатов измерений y_i от значений y, определяемых построенной линией регрессии.

Оценить степень отклонения связи между экспериментальными данными x и y от линейной (тесноту линейной связи) можно с помощью коэффициента парной корреляции (коэффициента корреляции Пирсона)

$$R = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\, y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i \sum\limits_{i=1}^{m} y_i\right) \Big/ m}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^{\,2} - \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\right)^2}{m}}\ \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^{\,2} - \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} y_i\right)^2}{m}}}. \qquad (12.8)$$

Чем ближе значение коэффициента R по абсолютной величине к единице, тем сильнее проявляется линейная зависимость между x_i и y_i и, следовательно, тем лучше экспериментальные точки согласуются с линейной моделью. Считается, что при $0{,}9 < |R| < 0{,}99$ очень сильная теснота линейной связи; при $0{,}7 < |R| < 0{,}9$ – сильная; при $0{,}5 < |R| < 0{,}7$ – заметная; при $0{,}3 < |R| < 0{,}5$ – слабая теснота линейной связи.

Поиск эмпирической функции в виде полинома (многочлена)

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{12.9}$$

называют решением задачи полиномиальной регрессии. Достоинство полиномов состоит в том, что они являются линейными функциями относительно своих коэффициентов.

Рассмотрим частный случай, когда результаты эксперимента x_i, y_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, m$) приближаются (аппроксимируются) полиномом второй степени

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2. \tag{12.10}$$

Значения (оценки) коэффициентов a_0, a_1, a_2 эмпирической модели согласно методу наименьших квадратов определяем из условия

$$\sum_{i=1}^{m}\left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2\right)\right]^2 = S = \min. \tag{12.11}$$

Минимизируем функцию S, приравнивая к нулю ее частные производные по каждому из коэффициентов:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0. \tag{12.12}$$

В итоге приходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} a_2 \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^4 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^3 + a_0 \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 y_i; \\ a_2 \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^3 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 + a_0 \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i; \\ a_2 \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{m} x_i + a_0 m = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i, \end{cases} \tag{12.13}$$

решая которую, находим искомые значения (оценки) параметров a_0, a_1, a_2 регрессионной модели (12.10).

Система (12.13) имеет единственное решение при условии, что все значения x_i различны.

12.2. Аналитическое приближение экспериментальных данных линейной функцией (задача линейной регрессии)

Пример 12.1. Пусть в результате серии измерений величин x и y получены 10 пар значений x_i, y_i (i = 1, 2, 3, … , 10), которые представлены в табличной форме:

x	1,3	2,1	2,9	3,7	4,5	5,3	6,1	6,9	7,7	8,5
y	0,2	1,31	6	6,11	12,53	13,9	18	18,8	22,4	27,05

Решить задачу аналитического приближения полученных экспериментальных данных x_i, y_i линейной функцией вида y = a x + b, т. е. задачу линейной регрессии. Построить эмпирическую модель. Оценить степень отклонения связи между экспериментальными данными x_i и y_i от линейной (тесноту линейной связи).

1) Задать векторы исходных экспериментальных данных (результатов измерений) X и Y:

$$X := \begin{bmatrix} 1,3 \\ 2,1 \\ 2,9 \\ 3,7 \\ 4,5 \\ 5,3 \\ 6,1 \\ 6,9 \\ 7,7 \\ 8,5 \end{bmatrix} \qquad Y := \begin{bmatrix} 0,2 \\ 1,31 \\ 6 \\ 6,11 \\ 12,53 \\ 13,9 \\ 18 \\ 18,8 \\ 22,4 \\ 27,05 \end{bmatrix}$$

2) Сформировать вектор *Обозн_исх_д*, необходимый для того, чтобы отобразить в графической области исходные аппроксимируемые данные в виде совокупности точек.

```
for i ∈ [1..10]
  Обозн_исх_д_i := "o"
Обозн_исх_д
```

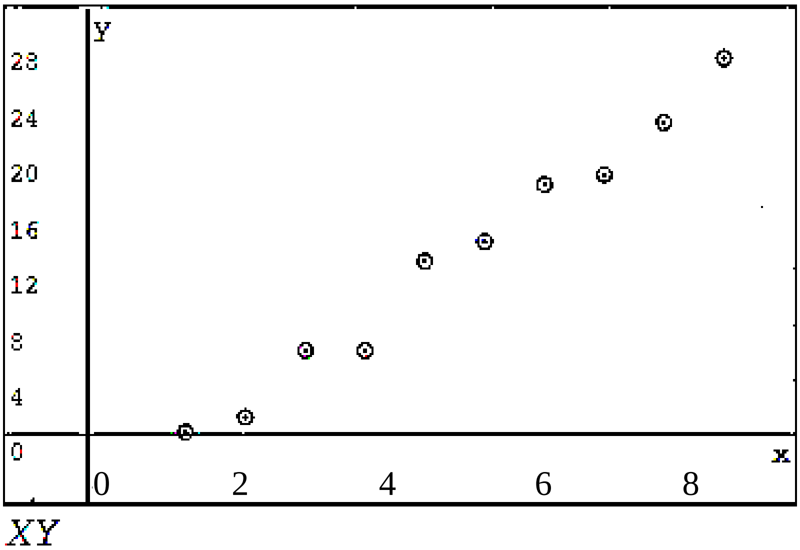
$$Обозн\_исх\_д = \begin{bmatrix} "o" \\ "o" \\ "o" \\ "o" \\ "o" \\ "o" \\ "o" \\ "o" \\ "o" \\ "o" \end{bmatrix}$$

3) Сформировать расширенную матрицу *XY* путем объединения трех векторов − X, Y и *Обозн_исх_д*:

$$XY := \mathrm{augment}(X;\ Y;\ Обозн\_исх\_д)$$

$$XY = \begin{bmatrix} 1,300 & 0,2000 & "o" \\ 2,100 & 1,310 & "o" \\ 2,900 & 6,000 & "o" \\ 3,700 & 6,110 & "o" \\ 4,500 & 12,53 & "o" \\ 5,300 & 13,90 & "o" \\ 6,100 & 18,00 & "o" \\ 6,900 & 18,80 & "o" \\ 7,700 & 22,40 & "o" \\ 8,500 & 27,05 & "o" \end{bmatrix}$$

4) Отобразить графически исходные аппроксимируемые данные в виде совокупности точек.



5) Определить оценки параметров эмпирической модели y = a x + b на основе метода наименьших квадратов по формулам (12.7):

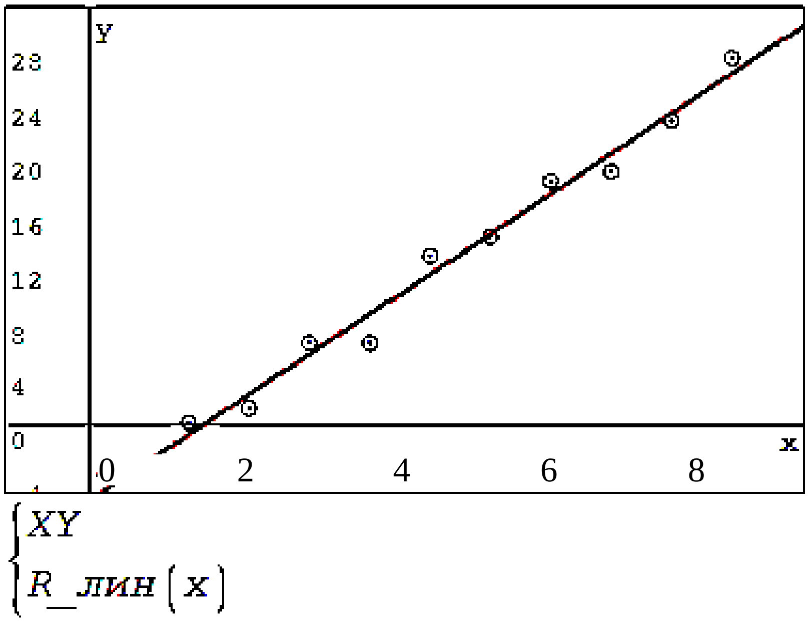
$$m := 10$$

$$a := \frac{m \cdot \sum_{i=1}^{m} X_i \cdot Y_i - \sum_{i=1}^{m} X_i \cdot \sum_{i=1}^{m} Y_i}{m \cdot \sum_{i=1}^{m} X_i^{2} - \left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)^2} \qquad a = 3{,}715$$

$$b := \frac{\sum_{i=1}^{m} Y_i \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(X_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{m} X_i \cdot \sum_{i=1}^{m} X_i \cdot \left(Y_i\right)}{m \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(X_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)^2} \qquad b = -5{,}571$$

6) Построить линию регрессии:

$$R\_лин(x) := a \cdot x + b$$



7) Определить оценки параметров эмпирической модели y = ax + b с помощью встроенных функций SMath Studio.

Встроенная функция Slope(X,Y) возвращает тангенс угла наклона прямой линии (угловой коэффициент прямой линии регрессии – параметр a).

Встроенная функция Intercept(X,Y) возвращает свободный член в уравнении линейной регрессии (смещение линии регрессии по вертикали (по оси ординат) – параметр b).

$$a := \mathrm{Slope}(X;\ Y) = 3{,}715$$

$$b := \mathrm{Intercept}(X;\ Y) = -5{,}571$$

8) Представить построенную эмпирическую модель:

$$y = 3{,}715\,x - 5{,}571$$

9) Вычислить стандартное отклонение результатов измерения y_i от предсказанных эмпирической моделью значений y, характеризующее среднеквадратическую ошибку регрессии:

$$CO := \sqrt{\frac{1}{m-2} \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(Y_i - \left(b + a \cdot X_i\right)\right)^2} \qquad CO = 1{,}250$$

10) Оценить степень отклонения связи между экспериментальными данными x_i и y_i от линейной (тесноты линейной связи) с помощью коэффициента парной корреляции Пирсона на основе формулы (12.8):

$$R := \frac{\sum_{i=1}^{m} X_i \cdot Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} X_i \cdot \sum_{i=1}^{m} Y_i\right)}{m}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)^2}{m}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(Y_i\right)^2 - \frac{\left(\left(\sum_{i=1}^{m} Y_i\right)\right)^2}{m}}} \qquad R = 0,9915$$

Следовательно, между экспериментальными данными x_i и y_i *очень сильная теснота линейной связи*.

12.3. Аналитическое приближение экспериментальных данных полиномом второй степени

Пример 12.2. Пусть в результате серии измерений величин x и y получены 10 пар значений x_i, y_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, 10$), которые представлены в табличной форме:

x	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
y	0,25	3,9	5,37	10, 5	16,24	16,1	20,02	18,88	15,51	8,83

Решить задачу аналитического приближения полученных экспериментальных данных полиномом второй степени $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Построить эмпирическую модель.

1) Задать векторы исходных экспериментальных данных (результатов измерений) X и Y:

$$X := \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \\ 20 \\ 24 \\ 28 \\ 32 \\ 36 \\ 40 \end{bmatrix} \qquad Y := \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ 3{,}9 \\ 5{,}37 \\ 10{,}5 \\ 16{,}24 \\ 16{,}1 \\ 20{,}02 \\ 18{,}88 \\ 15{,}51 \\ 8{,}83 \end{bmatrix}$$

2) Сформировать вектор *Обозн_исх_д*, необходимый для того, чтобы отобразить в графической области исходные аппроксимируемые данные в виде совокупности точек:

```
for i ∈ [1..10]
  Обозн_исх_д  := "o"
             i
Обозн_исх_д
```

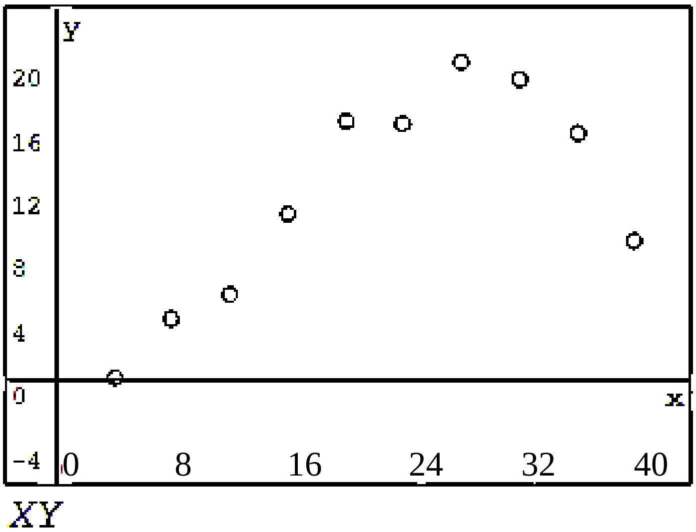
$$Обозн\_исх\_д = \begin{bmatrix} \text{"o"} \\ \text{"o"} \\ \text{"o"} \\ \text{"o"} \\ \text{"o"} \\ \text{"o"} \\ \text{"o"} \\ \text{"o"} \\ \text{"o"} \\ \text{"o"} \end{bmatrix}$$

3) Сформировать расширенную матрицу *XY* путем объединения трех векторов − X, Y и *Обозн_исх_д*:

$$XY := \mathrm{augment}(X;\ Y;\ Обозн\_исх\_д)$$

$$XY = \begin{bmatrix} 4{,}000 & 0{,}2500 & \text{"o"} \\ 8{,}000 & 3{,}900 & \text{"o"} \\ 12{,}00 & 5{,}370 & \text{"o"} \\ 16{,}00 & 10{,}50 & \text{"o"} \\ 20{,}00 & 16{,}24 & \text{"o"} \\ 24{,}00 & 16{,}10 & \text{"o"} \\ 28{,}00 & 20{,}02 & \text{"o"} \\ 32{,}00 & 18{,}88 & \text{"o"} \\ 36{,}00 & 15{,}51 & \text{"o"} \\ 40{,}00 & 8{,}830 & \text{"o"} \end{bmatrix}$$

4) Отобразить графически исходные аппроксимируемые данные.



5) Сформировать матрицу коэффициентов M при неизвестных a_2, a_1, a_0:

$m := 10$

$$M_{11} := \sum_{i=1}^{m} X_i^{\,4} \qquad M_{12} := \sum_{i=1}^{m} (X_i)^3 \qquad M_{13} := \sum_{i=1}^{m} (X_i)^2$$

$$M_{21} := \sum_{i=1}^{m} (X_i)^3 \qquad M_{22} := \sum_{i=1}^{m} (X_i)^2 \qquad M_{23} := \sum_{i=1}^{m} X_i$$

$$M_{31} := \sum_{i=1}^{m} (X_i)^2 \qquad M_{32} := \sum_{i=1}^{m} X_i \qquad M_{33} := m$$

$$M = \begin{bmatrix} 6{,}485\cdot 10^{6} & 1{,}936\cdot 10^{5} & 6160 \\ 1{,}936\cdot 10^{5} & 6160 & 220{,}0 \\ 6160 & 220{,}0 & 10{,}00 \end{bmatrix}$$

6) Сформировать вектор-столбец свободных членов (правых частей системы (12.10)):

$$C_1 := \sum_{i=1}^{m} X_i^2 \cdot Y_i \qquad C_2 := \sum_{i=1}^{m} X_i \cdot Y_i \qquad C_3 := \sum_{i=1}^{m} Y_i$$

$$C = \begin{bmatrix} 88740 \\ 3052 \\ 115,6 \end{bmatrix}$$

7) Определить параметры эмпирической модели $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ путем решения СЛАУ (12.13), (12.14) матричным методом:

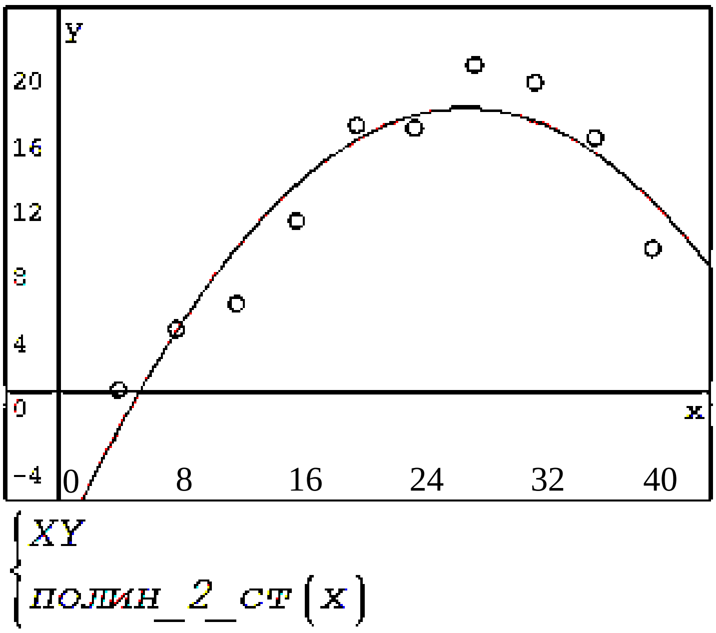
$$A := M^{-1} \cdot C \qquad A = \begin{bmatrix} -0,03595 \\ 1,968 \\ -9,578 \end{bmatrix}$$

8) Представить полученную эмпирическую модель

y = -9,578 + 1,968 x - 0,03595 x^2

9) Построить линию регрессии

$$\textit{полин\_2\_ст}(x) := A_3 + A_2 \cdot x + A_1 \cdot x^2$$



13. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

13.1. Постановка задачи

Состояние динамической системы (ДС) полностью и однозначно определяется совокупностью переменных состояния $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Уравнение состояния системы – динамическая модель − описывает поведение динамической системы во времени и представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме, или в форме Коши.

В электрических цепях в качестве переменных состояния принято рассматривать мгновенные значения напряжений на емкостях и токов через индуктивности. Это обусловлено тем, что мгновенные значения напряжений на емкостях и токов через индуктивности удовлетворяют следующим требованиям:

− полностью определяют состояние цепи в любой момент времени;

− являются линейно-независимыми;

− однозначно определяют запас энергии в цепи;

− по ним могут быть определены любые другие токи и напряжения в данной цепи.

Правило 1. Количество переменных состояния электрической цепи должно быть равно количеству реактивных элементов в ней.

Правило 2. Токи тех ветвей цепи, которые не содержат реактивных элементов, не должны входить в систему уравнений состояния. Их следует исключать.

13.2. Формирование математической модели электрической цепи в пространстве состояний

Рассмотрим пример формирования математической модели линейной электрической цепи в пространстве состояний.

Пример 13.1.

Исследуемый объект − линейная электрическая цепь третьего порядка (рис. 13.1). Сформировать математическую модель данного объекта в пространстве состояний.

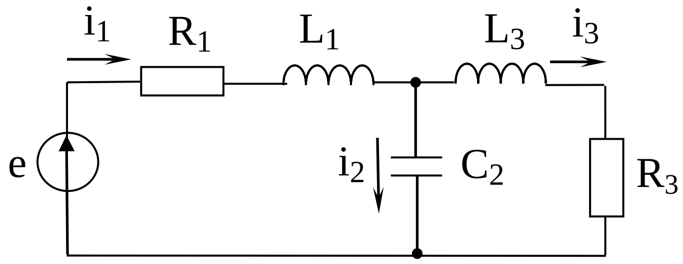


Рис. 13.1. Исследуемый объект – линейная
электрическая цепь третьего порядка

1) Задать переменные состояния электрической цепи:

$$X_1(t) = i_1(t); \quad X_2(t) = u_{C_2}(t); \quad X_3(t) = i_3(t). \tag{13.1}$$

2) Сформировать вектор состояния

$$X(t) = \left\| i_1(t) \quad u_{C_2}(t) \quad i_3(t) \right\|^T. \tag{13.2}$$

3) На основании законов Кирхгофа и Ома сформировать систему уравнений, количество которых должно быть равно порядку моделируемого объекта – электрической цепи:

$$\begin{cases} i_1 R_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + u_{C_2} = e; \\ L_3 \dfrac{di_3}{dt} + i_3 R_3 = u_{C_2}; \\ i_1 = i_2 + i_3. \end{cases} \tag{13.3}$$

4) Исключить из системы (13.3) все неизвестные, не являющиеся переменными состояния. Для этого ток i_2 выразить через u_{C_2}:

$$i_2 = C_2 \frac{du_{C_2}}{dt} \tag{13.4}$$

и сделать подстановку его в систему (13.3). Члены уравнений полученной системы, не содержащие производных переменных состояния, перенести в правую часть уравнений.

$$
\begin{cases}
L_1 \dfrac{di_1}{dt} = e - i_1 R_1 - u_{C_2}; \\[2ex]
L_3 \dfrac{di_3}{dt} = u_{C_2} - i_3 R_3; \\[2ex]
C_2 \dfrac{du_{C_2}}{dt} = i_1 - i_3.
\end{cases}
\tag{13.5}
$$

5) Привести систему (13.5) к нормальной форме и записать уравнения в порядке, соответствующем расположению переменных состояния в векторе состояния X(t) (13.2):

$$
\begin{cases}
\dfrac{di_1}{dt} = \dfrac{1}{L_1} e - \dfrac{R_1}{L_1} i_1 - \dfrac{1}{L_1} u_{C_2}; \\
\dfrac{du_{C_2}}{dt} = \dfrac{1}{C_2} i_1 - \dfrac{1}{C_2} i_3; \\
\dfrac{di_3}{dt} = \dfrac{1}{L_3} u_{C_2} - \dfrac{R_3}{L_3}
\end{cases}
\tag{13.6}
$$

или в векторно-матричной форме:

$$
\dot{X}(t) = FX(t) + Gu(t), \tag{13.7}
$$

где

$$
\dot{X}(t) = \begin{Vmatrix} \dfrac{di_1}{dt} & \dfrac{du_{C_2}}{dt} & \dfrac{di_3}{dt} \end{Vmatrix}^T; \qquad G(t) = \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{L_1} & 0 & 0 \end{Vmatrix}^T;
$$

$$
F = \begin{Vmatrix} -\dfrac{R_1}{L_1} & -\dfrac{1}{L_1} & 0 \\ \dfrac{1}{C_2} & 0 & -\dfrac{1}{C_2} \\ 0 & \dfrac{1}{L_3} & -\dfrac{R_3}{L_3} \end{Vmatrix}; \qquad u(t) = e
$$

при заданных начальных условиях $i_1(0)$; $u_{C_2}(0)$; $i_3(0)$.

13.3. Средства SMath Studio для моделирования процессов в электрических цепях в пространстве состояний

Возможности приложения SMath Studio для моделирования на основе математического аппарата пространства состояний, к сожалению, очень ограничены в отличие от инженерного приложения PTC Mathcad Prime 3.1 [8].

Пример 13.2. Реализовать решение математической модели в пространстве состояний (13.6), (13.7) электрической цепи (см. рис. 13.1), сформированной в примере 13.1, средствами SMath Studio.

1) Задать параметры электрической цепи:

$$R1 := 30 \qquad R3 := 10 \qquad L1 := 0{,}1$$

$$C2 := 0{,}006 \qquad L3 := 0{,}3 \qquad e := 100$$

2) Ввести модель электрической цепи в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\,t} X_1 = \dfrac{1}{L1} \cdot e - \dfrac{R1}{L1} \cdot X_1 - \dfrac{1}{L1} \cdot X_2 \\ \dfrac{d}{d\,t} X_2 = \dfrac{1}{C2} \cdot X_1 - \dfrac{1}{C2} \cdot X_3 \\ \dfrac{d}{d\,t} X_3 = \dfrac{1}{L3} \cdot X_2 - \dfrac{R3}{L3} \cdot X_3 \end{cases} \tag{13.8}$$

3) Ввести начальный вектор состояния

$$X := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4) Сформировать вектор-функцию D из правых частей уравнений системы ОДУ (13.8):

$$D(t;X) := \begin{bmatrix} \frac{1}{L1}\cdot e - \frac{R1}{L1}\cdot X_1 - \frac{1}{L1}\cdot X_2 \\ \frac{1}{C2}\cdot X_1 - \frac{1}{C2}\cdot X_3 \\ \frac{1}{L3}\cdot X_2 - \frac{R3}{L3}\cdot X_3 \end{bmatrix}$$

5) Задать имя *Матр_решения* массиву – м а т р и ц е р е ш е н и я, в которой будет сохранен результат численного решения модели (13.8).

Вставить шаблон встроенной функции rkfixed( ), которая реализует численное решение задачи Коши на отрезке $[t_0; t_k]$ методом Рунге – Кутта четвертого порядка с фиксированным шагом.

Заполнить местозаполнители шаблона по тому же принципу, что и в п. 10.1.2:

$$Матр\_решения := \mathrm{rkfixed}(X; 0; 0{,}3; 600; D)$$

6) Вывести матрицу решения

$$Матр\_решения = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0005 & 0{,}4643 & 0{,}01983 & 1{,}109\cdot10^{-5} \\ 0{,}001 & 0{,}8637 & 0{,}07558 & 8{,}529\cdot10^{-5} \\ 0{,}0015 & 1{,}207 & 0{,}1622 & 0{,}0002766 \\ 0{,}002 & 1{,}502 & 0{,}2754 & 0{,}0006306 \\ 0{,}0025 & 1{,}756 & 0{,}4113 & 0{,}001185 \\ 0{,}003 & 1{,}973 & 0{,}5668 & 0{,}001972 \\ 0{,}0035 & 2{,}16 & 0{,}739 & 0{,}003017 \\ 0{,}004 & 2{,}319 & 0{,}9255 & 0{,}004341 \\ & & \vdots & \end{bmatrix}$$

7) Сформировать четыре вектора: значений аргумента t и искомых переменных состояния X_1, X_2, X_3 – решения модели (13.8) в пространстве состояний. Для этого использовать встроенную функцию col( ):

$$t := \mathrm{col}(Матр\_решения; 1) \qquad X_1 := \mathrm{col}(Матр\_решения; 2)$$

$$X_2 := \mathrm{col}(Матр\_решения;\ 3) \qquad X_3 := \mathrm{col}(Матр\_решения;\ 4)$$

8) Создать три расширенные матрицы:

− матрицу R_X_1 путем объединения двух векторов − t и X_1;

− матрицу R_X_2 путем объединения двух векторов − t и X_2;

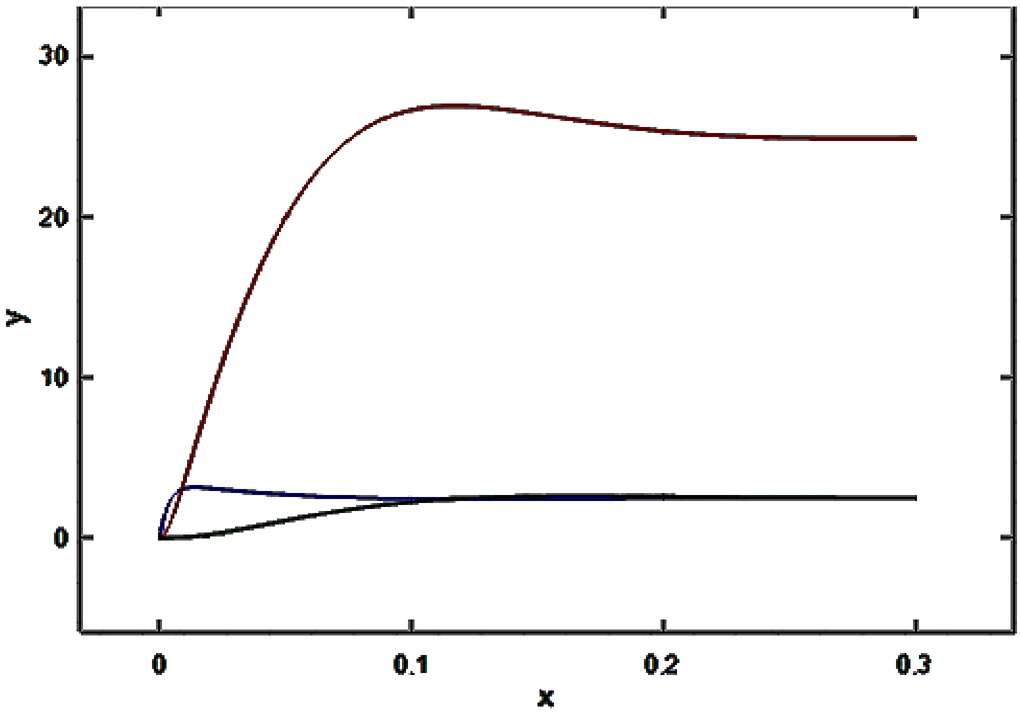
− матрицу R_X_3 путем объединения двух векторов − t и X_3.

Для этого применить встроенную функцию augment ( ):

$$R\_X_1 := \mathrm{augment}(t;\ X_1) \qquad R\_X_2 := \mathrm{augment}(t;\ X_2)$$

$$R\_X_3 := \mathrm{augment}(t;\ X_3)$$

9) Отобразить на графике динамику изменения переменных состояния объекта – электрической цепи (см. рис. 13.1).



$$\begin{cases} R\_X_1 \\ R\_X_2 \\ R\_X_3 \end{cases}$$

10) Построить фазовую траекторию электрической цепи.

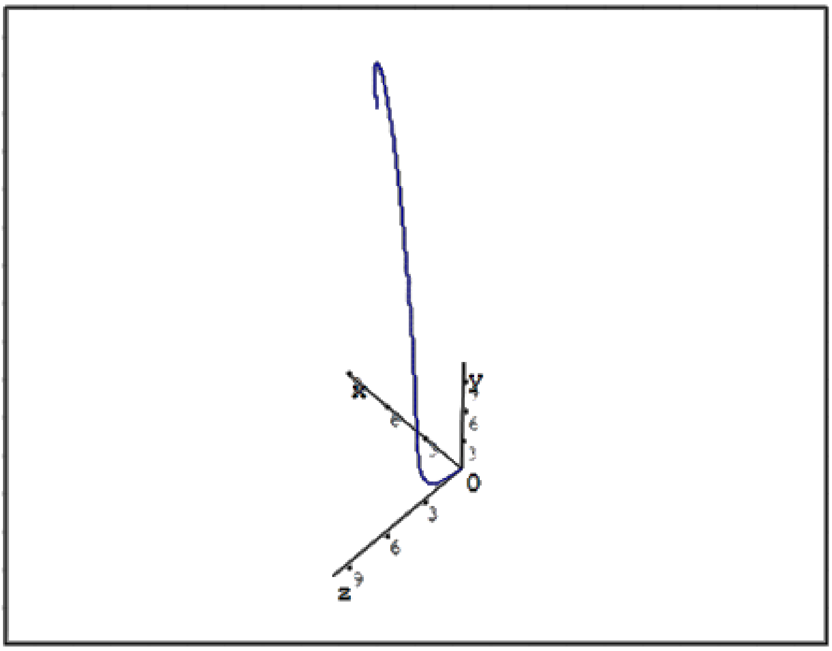
Фазовая траектория в пространстве состояний отображает взаимосвязь переменных состояния исследуемого динамического объекта.

Сформировать расширенную матрицу *фазов_траектор* путем объединения трех векторов − X_3, X_2, X_1. Обязательно задать переменные состояния в указанной последовательности:

$$фазов\_траектор := \mathrm{augment}\left(X_3\,;\,X_2\,;\,X_1\right)$$

Построить фазовую траекторию в пространстве состояний заданной электрической цепи (см. рис. 13.1). Использовать шаблон Трехмерный (3D) график. Произвести форматирование графика.

Возможности пакета SMath Studio по форматированию трехмерного графика весьма ограничены, поэтому чтобы добиться правильного наглядного отображения фазовой траектории, рекомендуется несколько раз в процессе форматирования применить инструмент Обновить с боковой панели График.



фазов_траектор

Примечание. Несовершенство инструментов форматирования трехмерных графиков приложения SMath Studio приводит к следующей ситуации.

На графике, отображающем динамику изменения трех переменных состояния − $X_3(t)$, $X_2(t)$, $X_1(t)$ электрической цепи (см. шаг 9), проблематично идентифицировать полученные кривые: к какой именно переменной состояния относится конкретная кривая.

В примере 13.2 для идентификации кривых можно применить следующий прием.

1. При формировании матрицы решения *Матр_решения* в шаблоне встроенной функции rkfixed( ) задать небольшое число шагов интегрирования (количество точек, в которых определяется приближённое решение модели (13.8)), например, 60:

$$Матр\_решения := \mathrm{rkfixed}(X;\ 0;\ 0{,}3;\ 60;\ D)$$

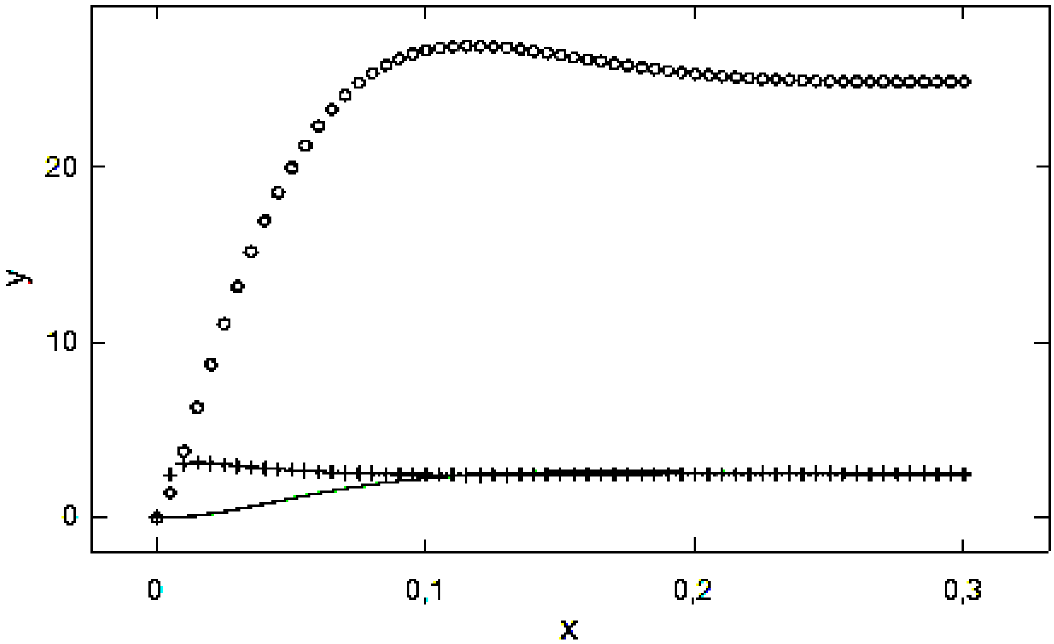
2. При формировании трех расширенных матриц − R_X1, R_X2 и R_X3 в шаблон встроенной функции augment ( ) для R_X1 и R_X2 ввести два дополнительных параметра – третий и четвертый. В качестве третьего параметра задать в кавычках символ для отображения кривой в графической области, в качестве четвертого параметра указать размер этого символа.

Различие символов для графического отображения кривых R_X1, R_X2 и R_X3 позволит их идентифицировать.

$$R\_X_1 := \mathrm{augment}(t;\ X_1;\ "+";\ 4)$$

$$R\_X_2 := \mathrm{augment}(t;\ X_2;\ "o";\ 4) \qquad R\_X_3 := \mathrm{augment}(t;\ X_3)$$

3. Отобразить на графике динамику изменения переменных состояния электрической цепи.



$$\begin{cases} R\_X_1 \\ R\_X_2 \\ R\_X_3 \end{cases}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главная цель данного учебного пособия − способствовать эффективному обучению студентов технического университета основам, приемам и инструментам математического моделирования − главного научного метода познания − и формированию у них соответствующих общепрофессиональных компетенций.

Вынужденный переход вузов от очного формата образовательного процесса к дистанционному формату из-за пандемии COVID-19 привел к следующей ситуации. Для тех студентов, которые не имели возможности купить дорогостоящую лицензию и установить на свои компьютеры мощное инженерное приложение PTC Mathcad Prime 3.1 для реализации лабораторного практикума и НИРС было привлечено альтернативное программное обеспечение − бесплатно распространяемый программный математический пакет SMath Studio.

Данное учебное пособие знакомит обучающегося с основными возможностями и инструментами математического пакета SMath Studio, особенностями решения различных категорий задач в рамках дисциплин «Математическое моделирование систем и процессов», «Численные методы моделирования». Приведены наглядные примеры математического моделирования и анализа статических и динамических моделей разной формы представления средствами SMath Studio.

Учебное пособие может быть полезным на всех этапах формирования инновационного специалиста в техническом университете: при освоении естественнонаучных, общеинженерных и специальных дисциплин, при курсовом и дипломном проектировании, при выполнении научно-исследовательской работы.

Библиографический список

1. Официальный сайт SMath Studio URL: https://ru.smath.com/%D0%BE%D0%B1%D0%B7%D0%BE%D1%80/SMathStudio/ (дата обращения: 05.07.2021).

2. Троицкая, О. Н. Применение пакетов прикладных программ в математике : учебное пособие / О. Н. Троицкая, Н. Н. Конечная. – Архангельск : Северный (Арктич.) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, 2015. – 100 с. − Текст : непосредственный.

3. Голубева, Н. В. Математическое моделирование систем и процессов : учебно-методическое пособие / Н. В. Голубева. – Омск : Омский государственный университет путей сообщения, 2017. – Часть 2. − 35 с. − Текст : непосредственный.

4. Голубева, Н. В. Математическое моделирование систем и процессов : учебное пособие / Н. В. Голубева. − Санкт-Петербург : Лань, 2021. − 192 с. − Текст : непосредственный.

5. Голубева, Н. В. Основы математического моделирования систем и процессов : учебное пособие. 2-е изд., с измен. / Н. В. Голубева. − Омск : Омский государственный университет путей сообщения, 2019. − 95 с. − Текст : непосредственный.

6. Иванов, Б. Н. Сглаживающая адаптивная аппроксимация в задаче построения изолиний гидрометеорологических полей. − Текст : непосредственный / Б. Н. Иванов // Вычислительные методы и программирование. – 2018. – Т. 19. – № 4. – С. 449−463. – DOI 10.26089/NumMet.v19r440.

7. Голубева, Н. В. Математическое моделирование систем и процессов : учебно-методическое пособие / Н. В. Голубева. – Омск : Омский государственный университет путей сообщения, 2018. – Часть 4. − 37 с. − Текст : непосредственный.

8. Голубева, Н. В. Математическое моделирование систем и процессов : учебно-методическое пособие / Н. В. Голубева. – Омск : Омский государственный университет путей сообщения, 2018. – Часть 5. − 39 с. − Текст : непосредственный.

Учебное издание

ГОЛУБЕВА Нина Викторовна

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИЛОЖЕНИЯ SMATH STUDIO ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Учебное пособие

Редактор Н. А. Майорова

* * *

Подписано в печать 26.01.2022. Формат 60×84 $^1\!/_{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 7,5. Уч.- изд. л. 8,4.
Тираж 100 экз. Заказ .

* *

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35