

Н. В. ГОЛУБЕВА

**ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ**

ОМСК 2019

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

Н. В. Голубева

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие

Омск 2019

УДК 519.6(075.8)

ББК 22.19я73

Г62

Голубева Н. В. **Основы математического моделирования систем и процессов:** Учебное пособие. 2-е изд., с измен. / Н. В. Голубева; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2019. 95 с.

Учебное пособие предназначено для студентов 2-го и 3-го курсов, обучающихся по специальностям «Системы обеспечения движения поездов», «Электроэнергетика и электротехника», «Подвижной состав железных дорог», «Эксплуатация железных дорог»; по направлениям подготовки «Стандартизация и метрология», «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», «Теплоэнергетика и теплотехника», «Наземные транспортно-технологические комплексы»; для студентов заочной формы обучения и для обучения с использованием дистанционных образовательных технологий.

Учебное пособие соответствует содержанию дисциплины «Математическое моделирование систем и процессов», включенной в базовую или вариативную части Блока 1 «Дисциплины (модули)» программ специалитета и бакалавриата.

В учебном пособии рассматриваются основы математического моделирования как научного метода познания, исследования и проектирования, излагаются принципы формирования математических моделей различных классов и методы их решения, дается сравнительный анализ моделей, описываются способы преобразования модели одного класса в модель другого класса.

Библиогр.: 24 назв. Табл. 1. Рис. 67.

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, профессор А. И. Задорин;
доктор техн. наук, профессор С. В. Бирюков;
канд. техн. наук, доцент А. Т. Когут.

ISBN 978-5-949-41238-1

© Омский гос. университет
путей сообщения, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|----|
| Введение | 5 |
| 1. Моделирование как научный прием | 6 |
| 1.1. Основные понятия | 6 |
| 1.2. Классификация моделей | 6 |
| 1.3. Математическое моделирование | 10 |
| 1.3.1. Цели математического моделирования | 12 |
| 1.3.2. Требования к математической модели | 13 |
| 1.3.3. Этапы математического моделирования. | 13 |
| 1.3.4. Классификация математических моделей | 17 |
| 2. Математические модели в форме систем линейных алгебраических уравнений..... | 18 |
| 2.1. Области применения..... | 18 |
| 2.2. Методы решения | 20 |
| 2.2.1. Прямые методы | 20 |
| 2.2.1.1. Метод Гаусса. | 20 |
| 2.2.1.2. Метод LU-разложения | 23 |
| 2.2.1.3. Матричный метод | 24 |
| 2.2.2. Итерационные методы | 24 |
| 2.2.2.1. Метод простых итераций (последовательных приближений)..... | 24 |
| 2.2.2.2. Метод Зейделя | 26 |
| 3. Математические модели в форме нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений..... | 26 |
| 3.1. Пример формирования модели | 26 |
| 3.2. Базовые понятия | 28 |
| 3.3. Методы решения | 28 |
| 3.3.1. Особенности численных методов решения | 29 |
| 3.3.1.1. Этапы численного решения нелинейного уравнения | 29 |
| 3.3.1.2. Отделение корней | 29 |
| 3.3.1.3. Уточнение корней | 31 |
| 3.3.1.3.1. Метод половинного деления (дихотомии, бисекции)..... | 32 |
| 3.3.1.3.2. Метод Ньютона | 35 |
| 3.3.1.3.3. Метод итерации (метод последовательных приближений) . | 37 |

| | |
|--|----|
| 4. Математические модели в форме дифференциальных уравнений | 45 |
| 4.1. Базовые понятия | 45 |
| 4.2. Решение математических моделей в классе обыкновенных дифференциальных уравнений | 50 |
| 4.3. Методы решения математических моделей в классе ОДУ | 53 |
| 4.3.1. Численные методы | 53 |
| 4.3.2. Метод Рунге – Кутта | 54 |
| 5. Математические модели для систем с распределенными пара- метрами | 56 |
| 6. Детерминированные и стохастические математические модели | 60 |
| 7. Математические модели в форме передаточных функций | 66 |
| 7.1. Базовые понятия | 66 |
| 7.2. Передаточная функция в форме изображений Лапласа | 68 |
| 7.3. Передаточная функция в операторной форме | 70 |
| 7.4. Элементарные типовые звенья физических систем | 71 |
| 8. Математические модели в пространстве состояний | 77 |
| 8.1. Основные понятия | 77 |
| 8.2. Линейные непрерывные детерминированные системы | 79 |
| 8.3. Формирование математической модели в пространстве состо- яний по дифференциальному уравнению n -го порядка | 81 |
| 8.4. Формирование математической модели в пространстве состо- яний по передаточной функции системы..... | 84 |
| 8.5. Пример формирования математической модели в простран- стве состояний для исследования процессов в электрической цепи..... | 85 |
| 8.6. Линейные дискретные детерминированные системы | 87 |
| 9. Другие виды математических моделей физических систем во вре- менной области | 88 |
| 9.1. Переходная функция | 88 |
| 9.2. Импульсная переходная функция | 89 |
| 10. Математические модели в частотной области | 90 |
| 11. Математические модели в форме интегральных уравнений | 91 |
| Библиографический список..... | 93 |

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование – это способ, инструмент, научный прием изучения окружающего мира.

Решение научных и инженерно-технических задач, связанных с исследованием и проектированием технических систем, оптимизацией их параметров или структуры, оптимальным управлением объектом или прогнозированием его поведения, изучением механизма явлений, осуществляется на основе математического моделирования.

Математическое моделирование предполагает описание исследуемых явлений, процессов, систем различной физической природы языком математических соотношений. Класс математической модели определяется постановкой задачи и целью исследования, а также уровнем знаний экспериментатора о моделируемом объекте.

Возможности ученых, инженеров, разработчиков новой техники, исследования и эксперименты которых базируются на математических моделях, значительно возросли с появлением мощных программных средств – математических систем и пакетов, таких как Derive, MathCAD, Maple, Mathematica, MatLAB и др.

Цель данного учебного пособия – познакомить студента с основами математического моделирования систем и процессов: с кругом задач, решаемых посредством моделирования, с этапами математического моделирования, с классификациями моделей по характеру и форме представления, с достоинствами и недостатками того или иного класса модели, с приемами преобразования модели одного класса в модель другого класса, с методами решения моделей различных классов и т. д.

Овладение основами математического моделирования позволит студенту приступить к изучению технологий компьютерного моделирования на базе пакетов Simulink, Model Vision Studium, Dymola и др.

Освоение материала дисциплины «Математическое моделирование систем и процессов» будет способствовать формированию у студентов таких категорий общепрофессиональных компетенций, как «исследовательская деятельность», «математический и естественнонаучный анализ задач в профессиональной деятельности», «фундаментальная подготовка», «инженерный анализ и проектирование».

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК НАУЧНЫЙ ПРИЕМ

1.1. Основные понятия

М о д е л и р о в а н и е – это научный прием, инструмент изучения реального окружающего мира.

Моделирование подразумевает следующее: реальный объект (система), называемый **о р и г и н а л о м**, замещается моделью. Над моделью проводятся эксперименты и исследования, на основе которых делаются выводы о свойствах объекта – оригинала.

Р о л ь м о д е л и р о в а н и я:

в некоторых случаях моделирование может быть единственным способом изучения сложного объекта, над которым невозможно проведение эксперимента (например, экономические процессы, экологические системы, взаимодействие элементов Солнечной системы, процессы в недрах звезд, полет космического корабля, сложнейшие технологические процессы и т. д.);

моделирование позволяет сократить время изучения реального объекта, снизить материальные затраты и повысить эффективность исследований.

Ф о р м а и с о д е р ж а н и е м о д е л и определяются

- уровнем знаний исследователя об оригинале;
- постановкой задачи и целью исследования.

1.2. Классификация моделей

Единую классификацию моделей составить практически невозможно из-за многозначности понятия «модель» в современной жизни.

Рассмотрим классификацию моделей по степени их **а б с т р а г и р о в а н и я о т о р и г и н а л а** (рис. 1.1).

Г е о м е т р и ч е с к а я модель отображает пространственные и геометрические свойства оригинала (например, макеты архитектурных сооружений, выставочные модели самолетов, судов, автомобилей).

Ф и з и ч е с к а я модель воспроизводит физические свойства оригинала. Такая модель представляет собой увеличенную или уменьшенную копию оригинала. Физическая модель создается по строгим законам **т е о р и и п о д о б и я**.

Пример 1. Установка «Токамак», в которой реализуется термоядерная реакция в микромасштабе, является физической моделью термоядерных реакторов атомных электростанций.

Пример 2 (из области авиастроения). Одной из серьезных задач, решаемых в процессе создания новой модели самолета, является выбор оптимальной обтекаемой формы и оптимизация аэродинамических характеристик. Решение этой задачи можно получить только экспериментальным путем. Конструкторы создают уменьшенную физическую модель самолета и помещают в специальную установку – аэродинамическую трубу, внутри которой создается поток воздуха с той же скоростью, с которой должна лететь модель. Специальные аэродинамические весы фиксируют нагрузки, действующие на отдельные элементы конструкции.

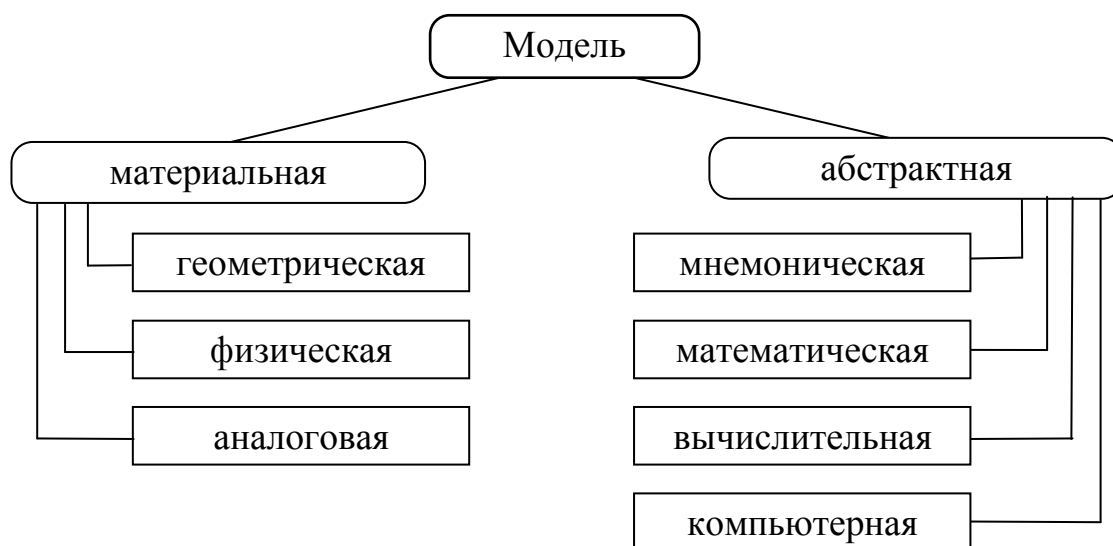


Рис. 1.1. Классификация моделей

Аналоговая модель имеет физическую природу, отличную от оригинала, но динамика ее внутренних процессов может быть описана теми же математическими соотношениями, которые описывают процессы в моделируемой системе – оригинале. В качестве аналоговых моделей используются электрические, электронные, механические, гидравлические, пневматические и другие системы.

Рассмотрим примеры.

Пример 3. **Оригинал** – механическая система – маятник, совершающий колебания $x(t)$ относительно положения равновесия (рис. 1.2).

М о д е л ь – электрическая система, представляющая собой колебательный контур (рис. 1.3).

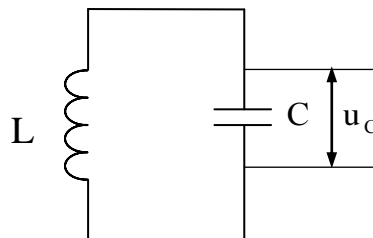
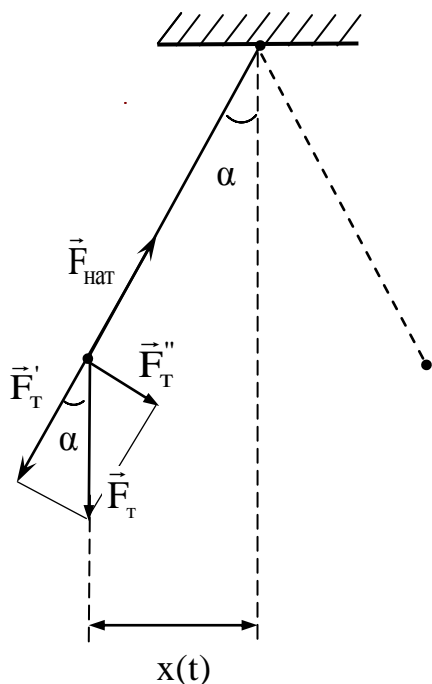


Рис. 1.3. Колебательный контур:
 $u_c(t) = x(t)$

Рис. 1.2. Маятник: $\vec{F}_{\text{нат}}$ – сила натяжения нити; \vec{F}_T – сила тяжести маятника;
 $|\vec{F}_{\text{нат}}| = -|\vec{F}_T'|$; $F_T'' = F_T \sin \alpha$

Процесс колебания маятника и процесс изменения напряжения конденсатора u_c во времени (в установившемся режиме) описываются одним и тем же дифференциальным уравнением для незатухающих гармонических колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (1.1)$$

где ω – частота колебаний.

Возможность взаимного замещения механической и электрической систем при моделировании основана на следующих положениях:

аналогом кинетической энергии механической системы является энергия магнитного поля электрической системы (накапливается на индуктивности);

аналогом потенциальной энергии механической системы является энергия электрического поля электрической системы (накапливается в конденсаторе).

П р и м е р 4. О р и г и н а л – механическая система (рис. 1.4).
М о д е л ь – электрическая система (рис. 1.5)

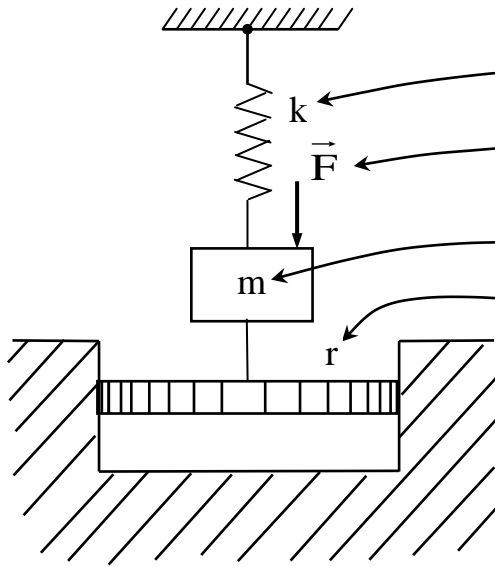


Рис. 1.4. Механическая система:
 k – коэффициент упругости пружины;
 r – коэффициент скоростного трения;
 \vec{F} – механическая сила ($\vec{F} = \text{const}$)

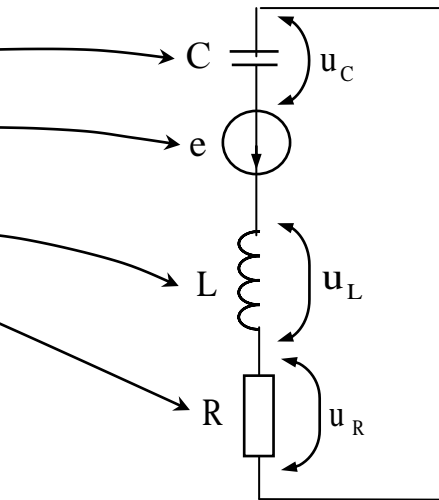


Рис. 1.5. Электрическая система:
 e – источник постоянной ЭДС

Для механической системы выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0, \quad (1.2)$$

т. е. сумма всех сил, действующих в системе, равна нулю.

Таким образом,

$$F = -vr + mg - kx. \quad (1.3)$$

Для электрической системы выполняется аналогичное условие:

$$\sum_{i=1}^n e_i = \sum_{j=1}^m u_j, \quad (1.4)$$

т. е. сумма электродвижущих сил в замкнутой цепи равна сумме падений напряжения на отдельных ее элементах. Следовательно,

$$e = u_R + u_L + u_C. \quad (1.5)$$

Таким образом, наличие упругой силы в механической системе соответствует наличие напряжения u_C на обкладках конденсатора. Инерционные свойства механической системы (за счет наличия массы m) в электрической системе отражаются с помощью индуктивности L . Наличие сил трения в механической системе соответствует наличие активного сопротивления R .

Мнемоническая модель отображает свойства объекта (оригинала) посредством схемы, графа, графика, чертежа, диаграммы, химической формулы и т. д. (рис. 1.6).

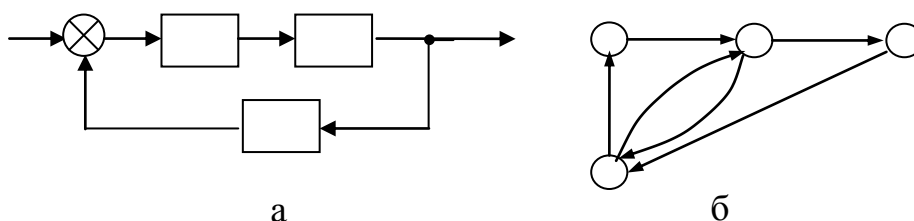


Рис. 1.6. Мнемонические модели:
а – структурная схема; б – граф

Математическая модель отображает свойства объекта (оригинала) на языке математических формул и уравнений.

Вычислительная модель – программа, реализующая алгоритм решения математической модели.

Компьютерная модель представляет собой электронный эквивалент исследуемого объекта. Это комплекс специальных программных и аппаратных средств (абстрактная и физическая составляющие). Схема, представленная на рис. 1.7, отражает основные элементы компьютерного моделирования.

1.3. Математическое моделирование

Математическое моделирование занимает ведущее место среди всех видов моделирования.

Первые математические модели появились на заре развития математики, когда возникла необходимость количественного описания объектов и явлений окружающего мира: теорема Пифагора (VI в. до н. э.), законы Ньютона (XVIII в.), волновые уравнения Максвелла (XIX в.), теория относительности Эйнштейна (XX в.).

В настоящее время математическое моделирование – мощное средство развития науки и познания окружающего мира, а иногда это единственное средство решения проблемы.

Пример 5. Авиастроение. В предвоенные годы начала развиваться скоростная авиация. Авиаконструкторы столкнулись с серьезной проблемой – явлением «флаттера». Оно заключалось в следующем. Во время эксперимен-

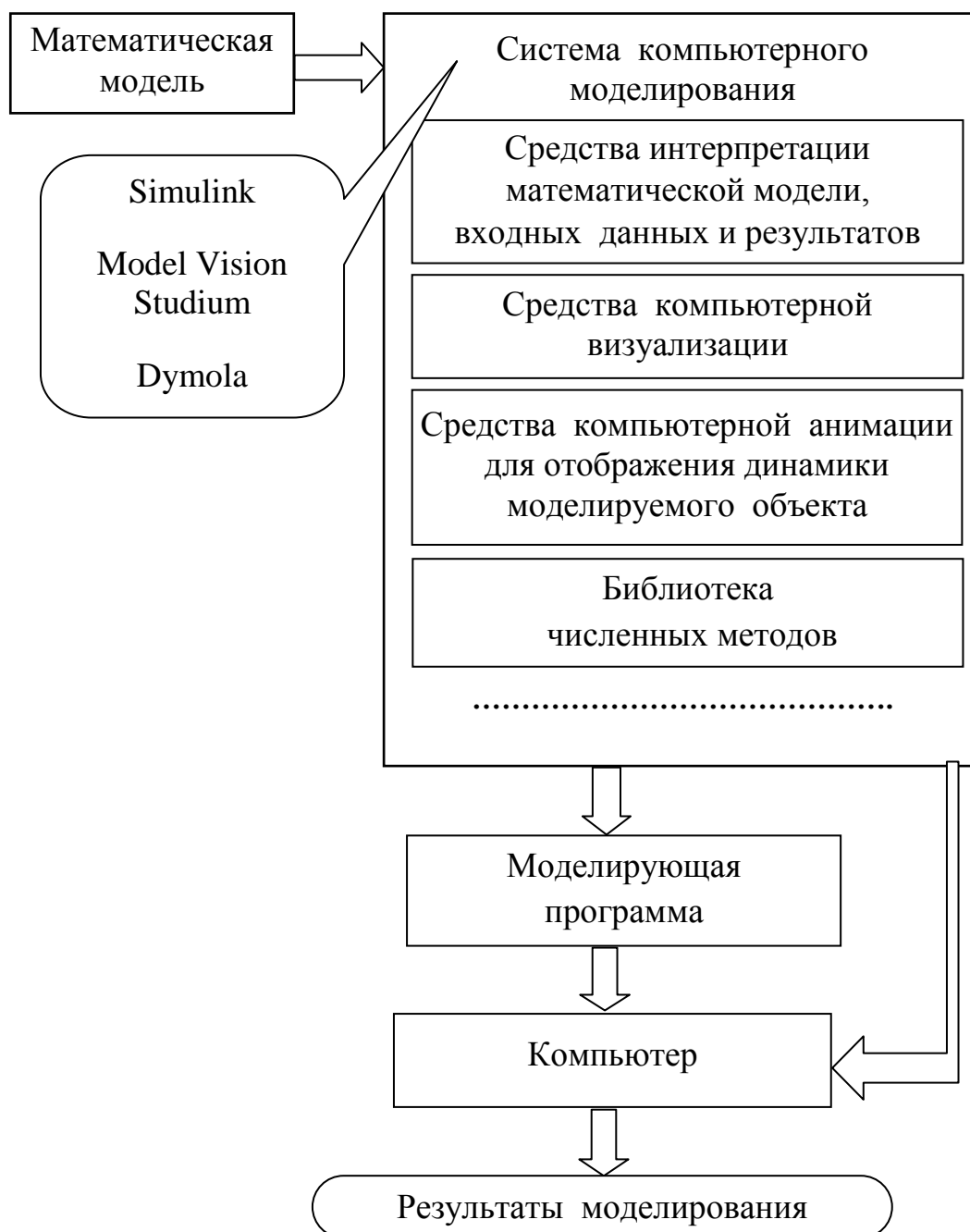


Рис. 1.7. Компьютерное моделирование

тальных полетов на некоторых критических режимах неожиданно возникали резкие вибрации конструкции и самолет в считанные секунды разваливался на части. Причина – резонансные явления, вызванные взаимодействием элементов конструкции самолета и вихревых воздушных потоков на определенных скоростях полета. Проблема была решена академиком М. В. Келдышем. Он разработал математическую модель этого явления, создал на ее основе теорию флаттера и определил средства борьбы с ним.

Пример 6. Энергетика. Прогнозирование будущего поведения атомных и термоядерных реакторов.

Пример 7. Геофизика, астрофизика. Моделирование процессов развития звезд и солнечной активности, долгосрочных прогнозов землетрясений, цунами и т. д.

Пример 8. Генетика. Моделирование законов наследственности и изменчивости организмов.

Пример 9. Биотехнология. Создание новых видов горючего, новых лекарств.

Пример 10. Космическая техника. Расчет траекторий летательных аппаратов, задачи обтекаемости конструкции и т. д.

Пример 11. Задачи оптимального управления системой, процессом.

Пример 12. Разработка новейших современных технологических процессов.

1.3.1. Цели математического моделирования

1) Интерпретация прошлого поведения объекта и обобщение имеющихся знаний о нем на основе выявления основных причинно-следственных связей.

2) Предсказание будущего поведения объекта – прогноз:

а) при варьировании условий испытания объекта (влияние внешних электрических и магнитных полей, колебания температуры, давления, наличие источника радиоактивного излучения и т. д.);

б) при имитации экстремальных режимов работы объекта.

3) Обновление и совершенствование старой, ранее построенной модели на основе получения новой информации об оригинале.

4) Оптимизация параметров системы или ее структуры.

5) Создание алгоритма оптимального управления системой с точки зрения заданного критерия.

б) Проектирование технического объекта, расчет режимов его работы, выбор структуры, параметров, алгоритмов управления.

1.3.2. Требования к математической модели

1) Соответствие цели моделирования.

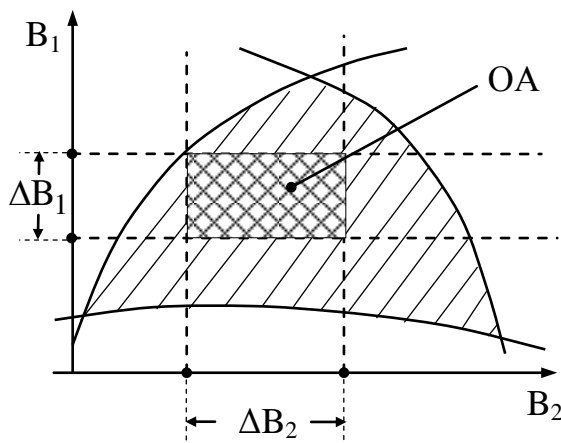


Рис. 1.8. Область адекватности модели

2) Адекватность. Модель считается адекватной, если отражает заданные свойства объекта с требуемой точностью. Математическая модель не может быть адекватной на всем множестве значений ее параметров. Всегда существует область адекватности модели (ОА) (рис.1.8), которая задается диапазоном значений параметров модели (ΔV_1 и ΔV_2), в пределах которого она должна быть адекватной реальному объекту.

1.3.3. Этапы математического моделирования

1-й этап. Постановка цели моделирования. Модель должна замещать реальный объект с такой степенью абстракции, которая более всего выгодна для достижения заданной цели.

2-й этап. Создание концептуальной модели, т. е. содержательного описания моделируемого объекта. Концептуальная модель включает в себя следующие сведения:

- состав и структура объекта;
- причинно-следственные связи между параметрами объекта;
- количество параметров, достаточное для адекватного описания объекта;
- класс исследуемого объекта и создаваемой модели;
- условия функционирования объекта.

На этом этапе разработчику математической модели приходится решать три проблемы.

Проблема 1. Поиск компромисса между простотой модели и ее адекватностью реальному объекту.

Любой реальный объект в процессе функционирования подвергается влиянию множества факторов (внешних и внутренних). Чем большее количество факторов учитывается в модели, тем более адекватной становится модель. Однако при этом она может стать настолько сложной и громоздкой, что возникнут следующие проблемы:

- отсутствие эффективных методов исследования такой модели;
- рост затрат на моделирование превысит рост эффекта от внедрения модели.

Нельзя входить и в другую крайность – чрезмерно упрощать модель за счет пренебрежения влиянием существенных факторов. Это приведет к неадекватности модели и, соответственно, к искажению результатов моделирования. Поэтому необходим жесткий отбор влияющих факторов, их четкое разграничение на основные (О) и второстепенные (В). Основные факторы должны быть учтены в модели, а второстепенные отброшены (рис. 1.9). При этом не наносится существенного ущерба качеству модели.

Проблема 2. Определение границ применимости создаваемой модели.

Результаты, полученные с помощью конкретной модели, считаются справедливыми только в рамках оговоренных условий (в пределах области адекватности).

Пример 13. Сформировать математическую модель, описывающую процесс падения тела на Землю.

В основе этого явления лежит закон всемирного тяготения, сформулированный Ньютоном: любые два тела притягиваются с силой, прямо пропорциональной произведению их масс, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Если в качестве этих двух тел рассматривать металлический шарик и Землю, то на языке математики падение шарика можно описать соотношением:

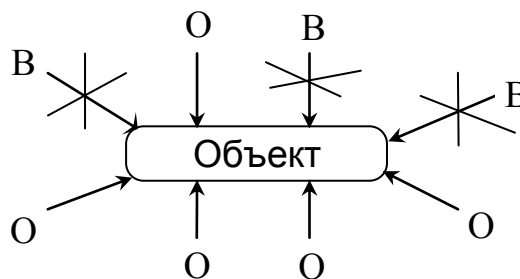


Рис. 1.9. Отбор основных факторов, учитываемых в модели

$$F = G \frac{mM_3}{R^2}, \quad (1.6)$$

где G – постоянная;

m и M_3 – масса шарика и Земли,

R – расстояние между центрами притягивающихся тел.

Согласно второму закону Ньютона, если на тело действует сила F , то его движение описывается соотношением:

$$F = ma. \quad (1.7)$$

Так как рассматривается процесс падения тела, то следует a заменить на ускорение свободного падения g . Тогда модель падения шара примет вид:

$$mg = G \frac{mM_3}{R^2} \quad \text{или} \quad g = G \frac{M_3}{R^2} - \quad (1.8)$$

это модель в общем виде. Теперь необходимо ее конкретизировать для данных условий проведения эксперимента. Опыт с шаром проводится в лаборатории (т. е. вблизи поверхности Земли). Следовательно, можно принять, что расстояние между центрами Земли и шарика равно радиусу Земли: $R = R_3$. Тогда математическая модель примет вид:

$$g = G \frac{M_3}{R_3^2}. \quad (1.9)$$

Эта модель позволяет дать исчерпывающее описание процесса падения шара в любой момент времени t : определить высоту h , на которой находится шар, а также его скорость v :

$$h(t) = H_0 - \frac{gt^2}{2}; \quad (1.10)$$

$$v(t) = v_0 + gt. \quad (1.11)$$

Г р а н и ц ы п р и м е н и м о с т и этой модели:

- тело падает с небольшой высоты, пренебрежимо малой по сравнению с радиусом Земли;
- тело имеет компактную форму и обладает достаточной массой;
- можно пренебречь фактором сопротивления воздуха.

При нарушении хотя бы одного из этих условий данная модель не будет адекватной. Например, эту модель нельзя применить для описания следующих процессов: приземления парашютиста, падения листьев с дерева, падения осколка метеорита на Землю и т. д.

В каждом из перечисленных случаев в различной степени сказывается влияние таких ранее не учтенных факторов, как сила сопротивления воздуха, притяжение Луны, Солнца, убывание плотности атмосферы с высотой, вращение Земли, ветер, по-разному дующий на разных высотах, фактическое отличие формы Земли от шара (она является телом более сложной геометрической формы).

Проблема 3. Определение уровня детализации исследуемого объекта.

Любая физическая система представляет собой совокупность элементов. Каждый элемент в свою очередь можно расчленить на подэлементы. Процесс расчленения теоретически может быть бесконечным. Задача исследователя – выбрать оптимальный уровень детализации моделируемого объекта. Уровень детализации определяется целью моделирования и степенью знаний о свойствах элементов объекта.

Детализацию целесообразно производить до такого уровня, на котором для каждого элемента можно определить зависимость параметров выходных сигналов от параметров входных сигналов. Стремление повысить уровень детализации приводит к чрезмерной громоздкости модели и резкому увеличению ее размерности.

3-й этап. Формирование математической модели, т. е. запись модели в формализованном виде:

- все соотношения записывают в аналитической форме;
- логические условия выражают в виде систем неравенств;
- случайные процессы заменяют их типовыми моделями.

4-й этап. Исследование математической модели. Инструментами исследования являются численные и аналитические методы.

5-й этап. Анализ результатов моделирования с последующим выводом об адекватности модели либо о необходимости ее доработки, либо о ее непригодности.

1.3.4. Классификация математических моделей

Математические модели можно классифицировать по форме их представления (рис. 1.10). За основу второй классификации (рис. 1.11) взят характер модели.



Рис. 1.10. Классификация моделей по форме представления

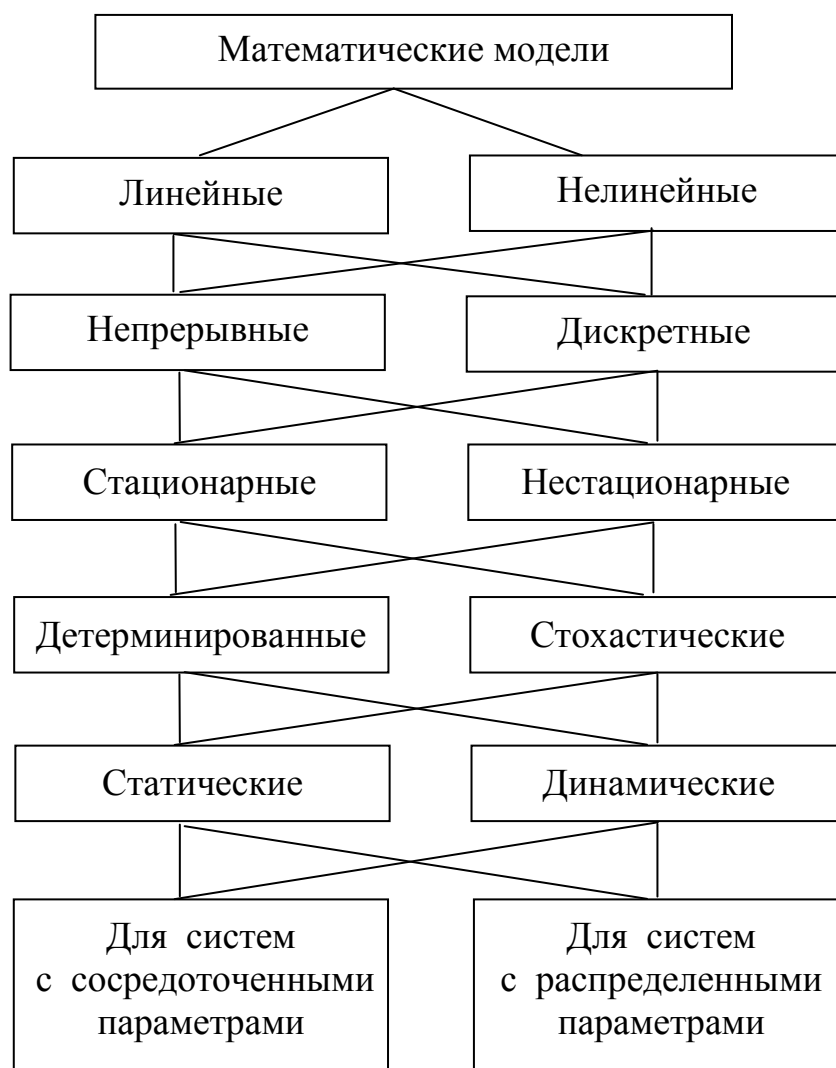


Рис. 1.11. Классификация по характеру модели

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФОРМЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Области применения

Исследование некоторых физических систем приводит к математическим моделям в форме систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Иногда СЛАУ появляются в процессе математического моделирования как промежуточный шаг (этап) в решении более сложной задачи. Есть значительное число научно-технических задач, в которых математические модели сложных нели-

нейных систем посредством дискретизации или линеаризации сводятся к решению СЛАУ.

СЛАУ относятся к классу статических моделей.

Примеры задач, использующих математические модели в форме СЛАУ:

1) при проектировании и эксплуатации электротехнических устройств требуется проведение расчета и анализа их работы в стационарных режимах. Задача сводится к расчету эквивалентных схем, в основе которого лежит формирование и решение СЛАУ;

2) при построении математической модели, связывающей функциональной зависимостью некоторые параметры x , y исследуемого объекта на основании полученных в результате эксперимента данных x_i, y_i , где $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (задачи аппроксимации данных);

3) при исследовании процессов в системах, математические модели которых строятся в классе дифференциальных уравнений в частных производных. В результате разностной аппроксимации исходной модели при определенных условиях приходят к математическим соотношениям в форме СЛАУ;

4) сущность многих физических процессов математически отображается с помощью интегральных уравнений. Ввиду сложности решения многих из них исследователь предпочитает свести задачу к решению модели в форме СЛАУ, используя известные методы аппроксимации.

5) исследование систем автоматического регулирования в установившемся режиме приводит во многих случаях к статическим моделям в форме СЛАУ.

Система линейных уравнений порядка n имеет вид:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_1; \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_2; \\ \\ \mathbf{a}_{n1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{n2}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{nn}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_n \end{cases} \quad (2.1)$$

или в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \mathbf{b}_n]^T$ – вектор свободных членов;

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n]^T$$
 – вектор неизвестных;

A – матрица коэффициентов системы, размером $n \times n$.

2.2. Методы решения

Методы решения СЛАУ делятся на две группы: прямые (точные) и итерационные (приближенные).

Прямые методы позволяют получить решение за конечное число шагов. Итерационные методы построены по принципу многократного вычисления последовательных приближений, сходящихся к искомому решению.

Прямые методы целесообразно использовать для решения систем сравнительно небольшой размерности с плотно заполненной матрицей (матрицей, имеющей малое количество нулевых элементов). Итерационные методы предпочтительнее в задачах большой размерности со слабо заполненными матрицами.

К прямым методам относятся метод определителей, метод Гаусса и его модификации, метод LU-разложения, матричный метод и др. К разряду итерационных методов принадлежат метод простой итерации, метод Зейделя.

2.2.1. Прямые методы

2.2.1.1. Метод Гаусса

Решение СЛАУ осуществляется в два этапа (прямой и обратный ход)

П р я м о й х о д . Исходная система (2.1) путем последовательных преобразований приводится к треугольному виду. Это достигается последовательным исключением неизвестных x_i из уравнений. В результате получается эквивалентная система:

[illegible]

О б р а т н ы й х о д. С помощью подстановки x_n в предпоследнее $(n-1)$ -е уравнение системы (2.3) вычисляется x_{n-1} . Подстановкой x_n и x_{n-1} в

(n-2)-е уравнение определяют x_{n-2} . Таким же образом последовательно определяют неизвестные x_{n-3}, \dots, x_2, x_1 .

Пример 14. Решить систему с тремя неизвестными методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 6; \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 9; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases} \quad (2.4)$$

Прямой ход. Первое уравнение из системы (2.4) разделим на 3:

$$x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 2. \quad (2.5)$$

Из второго уравнения исключим неизвестное x_1 . Для этого ко второму уравнению прибавим преобразованное первое уравнение, умноженное на (-2) . Получим:

$$(2-2)x_1 + \left(4 - \frac{2}{3}\right)x_2 + \left(1 + \frac{2}{3}\right)x_3 = 9 - 4 \quad (2.6)$$

или

$$3\frac{1}{3}x_2 + 1\frac{2}{3}x_3 = 5. \quad (2.7)$$

Разделим уравнение (2.7) на $3\frac{1}{3}$. Получим:

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{3}{2}. \quad (2.8)$$

Из третьего уравнения системы (2.4) исключим x_1 . Для этого из третьего уравнения вычтем первое преобразованное (2.5):

$$(1-1)x_1 + \left(-1 - \frac{1}{3}\right)x_2 + \left(3 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)x_3 = 4 - 2 \quad (2.9)$$

или

$$-1\frac{1}{3}x_2 + 3\frac{1}{3}x_3 = 2. \quad (2.10)$$

Разделим уравнение (2.10) на $\left(1\frac{1}{3}\right)$:

$$-x_2 + \frac{5}{2}x_3 = \frac{3}{2}, \quad (2.11)$$

получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 2; \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{3}{2}; \\ -x_2 + \frac{5}{2}x_3 = \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Из третьего уравнения системы (2.12) исключим неизвестное x_2 . Для этого к третьему уравнению прибавим второе:

$$(-1+1)x_2 + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right)x_3 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \quad (2.13)$$

или $3x_3 = 3, \quad (2.14)$

откуда выразим x_3 : $x_3 = 1$.

Тогда эквивалентная система в треугольном виде примет вид:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 2; \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{3}{2}; \\ x_3 = 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

О б р а т н ы й х о д. Подставим значение x_3 во второе уравнение системы (2.15) и найдем $x_2 = 1$. Подстановкой значений x_2 и x_3 в первое уравнение найдем $x_1 = 2$.

2.2.1.2. Метод LU-разложения

Если квадратная матрица A линейной системы

$$A \cdot X = B \quad (2.16)$$

имеет отличные от нуля главные диагональные миноры, т. е.

$$\Delta_1 = a_{11} \neq 0, \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \neq 0, \quad \dots, \quad \Delta_n = \det A \neq 0, \quad (2.17)$$

то она может быть разложена на произведение двух треугольных матриц – нижней L с ненулевыми диагональными элементами и верхней – U с единичными диагональными элементами

$$A = L \cdot U. \quad (2.18)$$

Поэтому матричное уравнение (2.16) можно заменить уравнением:

$$L \cdot U \cdot X = B. \quad (2.19)$$

Введем вектор вспомогательных переменных $G = [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_n]^T$. Тогда уравнение (2.19) можно записать в виде системы двух векторно-матричных уравнений:

$$\begin{cases} L \cdot G = B; \\ U \cdot X = G. \end{cases} \quad (2.20)$$

Таким образом, решение системы (2.16) сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами типа (2.3) или (2.15), из которых неизвестные определяются последовательной подстановкой.

Математически это выражается так: из первого уравнения системы (2.20) определяется вектор G :

$$G = L^{-1} \cdot B, \quad (2.21)$$

после чего из второго уравнения системы (2.19) вычисляется вектор X :

$$X = U^{-1} \cdot G. \quad (2.22)$$

Обратные матрицы L^{-1} и U^{-1} существуют, т. к. определители треугольных матриц L и U , вычисляемые как произведения их диагональных элементов, отличны от нуля.

Метод LU-разложения – это фактически метод Гаусса, выраженный в векторно-матричной форме, отличающийся от классического варианта способом хранения матриц.

2.2.1.3. Матричный метод

Если для системы $A \cdot X = B$ выполняется условие невырожденности матрицы A

$$\det \mathbf{A} = \Delta \neq 0, \quad (2.23)$$

то решение этой системы можно представить в виде:

$$X=A^{-1} \cdot b, \quad (2.24)$$

где A^{-1} – обратная матрица.

2.2.2. Итерационные методы

2.2.2.1. Метод простых итераций (последовательных приближений)

Исходная система уравнений (2.1) приводится к виду:

[illegible]

ИЛИ

[illegible]

Задав начальные (нулевые) приближения для искомых неизвестных:

$$X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, X_3^{(0)}, \dots, X_n^{(0)}, \quad (2.27)$$

подставляем их в правую часть системы (2.26). Получаемые при этом в левой части системы значения $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$ представляют собой первые приближения:

$$\mathbf{x}_i^{(1)} = \mathbf{c}_{i1} \mathbf{x}_1^{(0)} + \mathbf{c}_{i2} \mathbf{x}_2^{(0)} + \dots + \mathbf{c}_{in} \mathbf{x}_n^{(0)} - \mathbf{b}_i, \quad (2.28)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Подставив первые приближения $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$ в правую часть системы (2.26), в левой ее части получим вторые приближения – $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}$:

$$\mathbf{x}_i^{(2)} = \mathbf{c}_{i1} \mathbf{x}_1^{(1)} + \mathbf{c}_{i2} \mathbf{x}_2^{(1)} + \dots + \mathbf{c}_{in} \mathbf{x}_n^{(1)} - \mathbf{b}_i. \quad (2.29)$$

Таким образом, итерационный процесс описывается соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k)} = c_{11} x_1^{(k-1)} + c_{12} x_2^{(k-1)} + \dots + c_{1n} x_n^{(k-1)} - b_1; \\ x_2^{(k)} = c_{21} x_1^{(k-1)} + c_{22} x_2^{(k-1)} + \dots + c_{2n} x_n^{(k-1)} - b_2; \\ \\ x_n^{(k)} = c_{n1} x_1^{(k-1)} + c_{n2} x_2^{(k-1)} + \dots + c_{nn} x_n^{(k-1)} - b_n. \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Полученные в результате последовательности итераций приближения: $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, \dots, x_i^{(k)}$ сходятся к истинному решению системы (2.1), в том случае, если для коэффициентов системы (2.26) выполняется хотя бы одно из условий:

$$\sum_{j=1}^n |c_{ij}| < 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n); \quad (2.31)$$

$$\sum_{i=1}^n |c_{ij}| < 1 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (2.32)$$

Вычисления продолжают до тех пор, пока не будет выполнено условие:

$$\left| \mathbf{x}_i^{(k)} - \mathbf{x}_i^{(k-1)} \right| \leq \varepsilon, \quad (2.33)$$

где ε – заданная точность.

$$u(i) = i + 0,2i^3. \quad (3.2)$$

Сделаем подстановку выражения (3.2) в уравнение (3.1):

$$R_1 i + i + 0,2i^3 = u_{\text{вх}} \quad (3.3)$$

или

$$\underbrace{0,2i^3 + (R_1 + 1)i - u_{\text{вх}}}_{f(i)} = 0. \quad (3.4)$$

Соотношение $f(i) = 0$ представляет собой математическую модель электрической цепи в форме нелинейного алгебраического уравнения относительно тока i . Решение этой модели позволит определить ток i в цепи при заданных значениях $u_{\text{вх}}$ и R_1 .

Исследование объектов различной физической природы в установившемся режиме часто приводит к статическим моделям в форме нелинейных алгебраических уравнений.

Алгебраическое уравнение $f(x)=0$ может содержать только алгебраические функции, в которых над переменной x производятся арифметические операции, возведение в степень с рациональным показателем и извлечение корня. Например:

$$x^3 + 151 = 12 \sqrt{x}; \quad (3.5)$$

$$\frac{43}{x - 17} - \frac{\sqrt{2}}{x + 3} = 0. \quad (3.6)$$

В некоторых задачах моделирование приводит к трансцендентному уравнению.

Трансцендентным называется уравнение, в состав которого входят трансцендентные функции: показательная, логарифмическая, тригонометрические функции, возведение в иррациональную степень. Например:

$$\arcsin x - 5^x = 0; \quad (3.7)$$

$$\frac{x^{\sqrt{2}}}{x^3 - 7} = 11 \cos x. \quad (3.8)$$

3.2. Базовые понятия

Уравнение с одним неизвестным x в общем случае имеет вид:

$$z(x) = g(x), \quad (3.9)$$

где $z(x)$ и $g(x)$ – функции, определенные на некотором числовом множестве X , называемом областью допустимых значений уравнения.

Другая форма записи уравнения с одним неизвестным имеет вид:

$$f(x) = 0, \quad (3.10)$$

где $f(x) = z(x) - g(x)$ получается в результате переноса функции $g(x)$ в левую часть уравнения (3.9).

Всякое значение x^* , которое при подстановке в уравнение (3.10) обращает его в числовое равенство, а функцию $f(x)$ – в ноль, т. е. такое, что

$$f(x^*) = 0, \quad (3.11)$$

называется корнем уравнения, или нулем функции $f(x)$.

Решить уравнение – значит найти все его корни (решения) или доказать, что уравнение не имеет корней.

Для алгебраических уравнений число корней известно заранее. Каждое алгебраическое уравнение степени n имеет в множестве комплексных чисел n корней с учетом кратности.

3.3. Методы решения

Аналитическое (явное) решение, т. е. решение в виде готовой формулы, выражающей неизвестное x через параметры уравнения, можно получить только для ограниченного круга уравнений, например формулы для вычисления корней квадратного ($ax^2 + bx + c = 0$) и кубического ($x^3 + px + q = 0$) уравнений. Решение некоторых простейших трансцендентных уравнений может быть получено в аналитической форме с использованием степенных рядов, непрерывных дробей и т. д.

В большинстве случаев найти явное решение уравнения очень сложно или невозможно. Кроме того, использование аналитических формул

для решения большинства уравнений не может обеспечить получение точного значения корня, поскольку коэффициенты уравнения являются приближенными величинами, определенными в результате измерений. Поэтому задача отыскания точного значения корня теряет смысл.

Ставится задача – определить приближенное значение корня уравнения с заданной точностью.

П р и б л и ж е н н о е р е ш е н и е математических задач лежит в основе численных методов.

3.3.1. Особенности численных методов решения

3.3.1.1. Этапы численного решения нелинейного уравнения

Численное решение уравнения $f(x) = 0$ (речь идет о действительных корнях) проводят в два этапа:

1) отделение корней, т. е. отыскание таких достаточно малых отрезков в области допустимых значений x , в которых содержится только один корень;

2) уточнение корней, т. е. вычисление корней с заданной точностью.

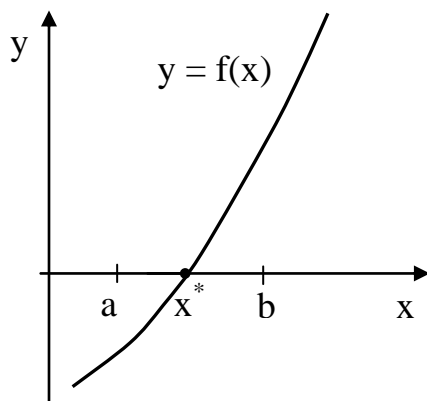


Рис. 3.2. Отделение корней способом 1

один корень x^* .

С п о с о б 2 – уравнение $f(x) = 0$ заменяют равносильным:

3.3.1.2. Отделение корней

Рассмотрим несколько способов отделения корней.

С п о с о б 1 – по графику функции $y = f(x)$.

Корень уравнения

$$f(x) = 0 \quad (3.12)$$

приблизленно определяется как абсцисса точки пересечения графика с осью Ox (рис. 3.2). Устанавливаются границы a и b отрезка, в пределах которого заключен только

$$z(x) = g(x). \quad (3.13)$$

Строят графики функций $y_1 = z(x)$ и $y_2 = g(x)$.

Приближенное значение корня определяют как абсциссу точки пересечения этих графиков.

Например: отделим корень уравнения

$$8 \lg x - \frac{9}{\sqrt{x}} - 5 = 0 \quad (3.14)$$

для области значений аргумента $x > 0$.

Преобразуем уравнение (3.14) к виду:

$$8 \lg x = \frac{9}{\sqrt{x}} + 5, \quad (3.15)$$

где $z(x) = 8 \lg x$; $g(x) = \frac{9}{\sqrt{x}} + 5$.

Строим графики (рис. 3.3) и находим приближенно x^* и отрезок $[a, b]$.

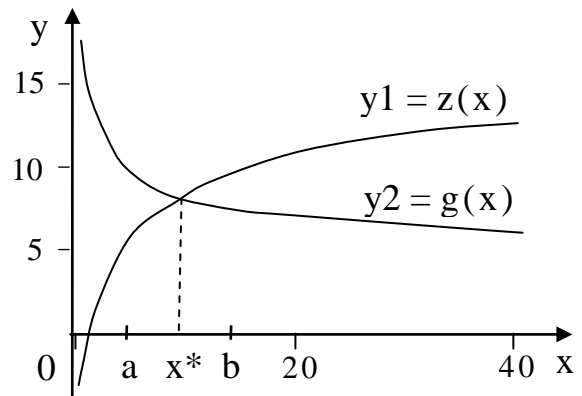


Рис. 3.3. Отделение корней способом 2

С п о с о б 3 – по таблице значений функции $f(x)$ на интересующем интервале изменения аргумента x . Например, представим таблицу (табл. 3.1) значений функции

$$f(x) = 8 \lg x - \frac{9}{\sqrt{x}} - 5. \quad (3.16)$$

Из данных табл. 3.1 видно, что корень уравнения существует и его следует искать на отрезке $[7,0; 10,0]$, так как значения функции на концах этого отрезка имеют разные знаки.

Т а б л и ц а 3.1

Таблица значений функции

| | | | | | | | | | |
|------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| x | 1,0 | 4,0 | 7,0 | 10,0 | 13,0 | 16,0 | 19,0 | 22,0 | 25,0 |
| f(x) | -14,0 | -4,7 | -1,6 | 0,2 | 1,4 | 2,4 | 3,2 | 3,8 | 4,4 |

С п о с о б 4 – а н а л и т и ч е с к и й м е т о д отделения корней, который базируется на знании следующих свойств функции:

а) если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то внутри отрезка $[a, b]$ существует по крайней мере один корень уравнения $f(x)=0$;

б) если функция $f(x)$ непрерывна и монотонна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная $f'(x)$ сохраняет постоянный знак внутри отрезка, то внутри этого отрезка существует корень уравнения $f(x)=0$ и притом единственный.

Функция $y=f(x)$ называется м о н о т о н н о й в заданном интервале, если при любых $x_2 > x_1$ из этого интервала она удовлетворяет условию $f(x_2) \geq f(x_1)$ (м о н о т о н н о в о з р а с т а ю щ а я ф у н к ц и я) или $f(x_2) \leq f(x_1)$ (м о н о т о н н о у б ы в а ю щ а я ф у н к ц и я).

Необходимым и достаточным условием монотонности функции в заданном интервале является выполнение для всех внутренних точек этого интервала условия $f'(x) \geq 0$ или $f'(x) \leq 0$.

Зная свойства функции $f(x)$, можно сделать вывод о характере графика $y=f(x)$, что может существенно облегчить процесс отыскания корней. Продемонстрируем это для непрерывной и монотонной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$, которая принимает на концах отрезка значения разных знаков, имеет во всех точках интервала первую и вторую производные $f'(x)$ и $f''(x)$, сохраняющие постоянный знак (рис. 3.4).

3.3.1.3. Уточнение корней

Рассмотрим несколько численных методов уточнения корней, применяемых для решения как алгебраических, так и трансцендентных уравнений. Эти методы относятся к разряду и т е р а ц и о н н ы х.

И т е р а ц и о н н ы й п р о ц е с с состоит в последовательном шаг за шагом уточнении начального приближения x_0 искомого корня. Каждый шаг такого метода называется и т е р а ц и е й.

В результате реализации итерационного метода получают последовательность приближенных значений корня $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n$. Если эти значения с увеличением n приближаются к истинному значению корня x^* , то говорят, что итерационный процесс сходится.

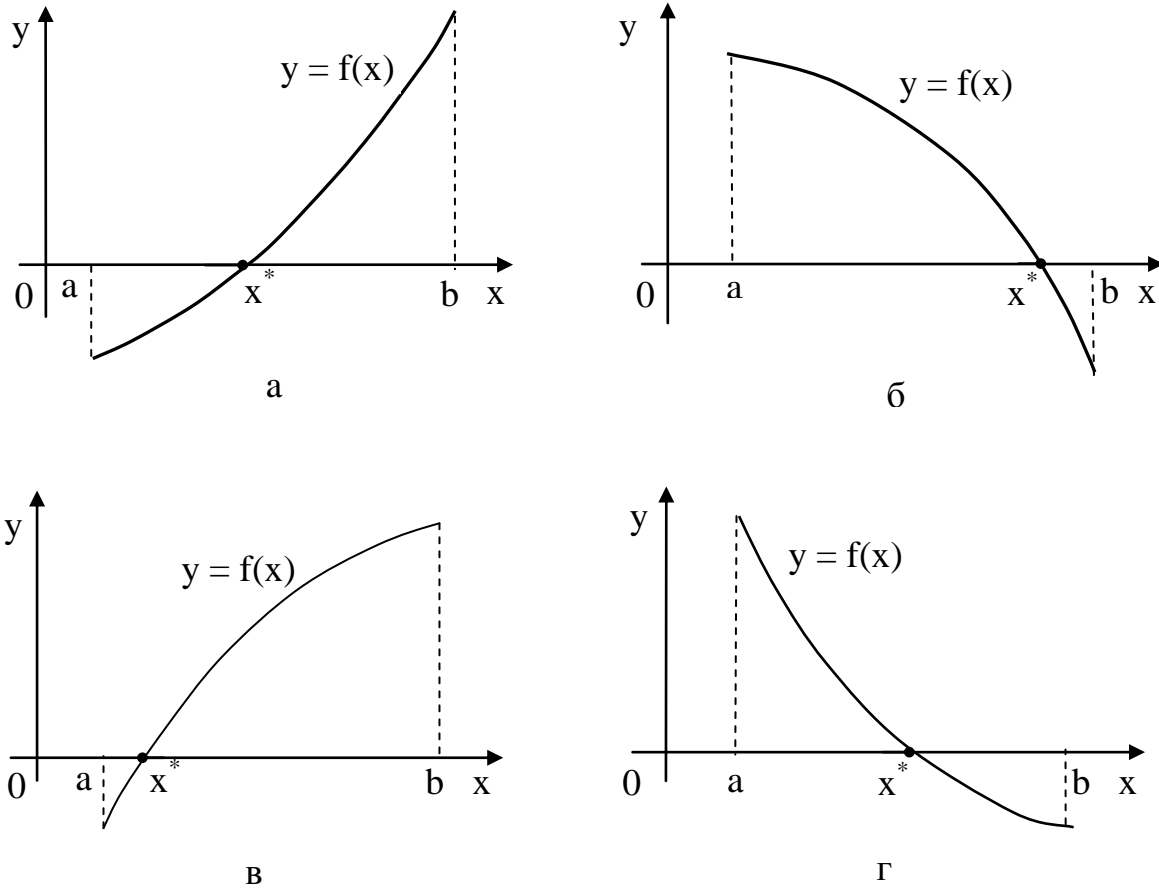


Рис. 3.4. Графики функций, иллюстрирующие аналитический способ отделения корней: а – при $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$; б – при $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$; в – при $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$; г – при $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$

3.3.1.3.1. Метод половинного деления (дихотомии, бисекции)

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0, \quad (3.17)$$

где функция $f(x)$ непрерывна и монотонна на отрезке $[a, b]$ и имеет на концах отрезка разные знаки:

$$f(a)f(b) < 0. \quad (3.18)$$

Требуется найти корень x^* уравнения (3.17) с точностью до ε . График функции $f(x)$ представлен на рис. 3.5.

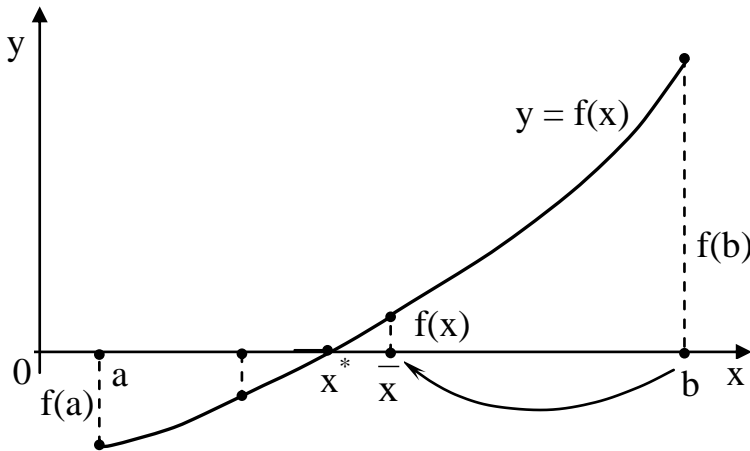


Рис. 3.5. Геометрическая интерпретация метода половинного деления

Рассмотрим суть и этапы реализации метода половинного деления.

1) Отрезок $[a, b]$ делим пополам и определяем середину отрезка:

$$\bar{x} = \frac{a + b}{2}. \quad (3.19)$$

2) Вычисляем значение

функции в точке \bar{x} . Если $f(\bar{x}) = 0$, то \bar{x} является корнем уравнения. Если $f(\bar{x}) \neq 0$, то поиск корня продолжается на одном из двух полученных отрезков – $[a, \bar{x}]$ или $[\bar{x}, b]$. Следует выбрать тот отрезок, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения противоположных знаков. В данном случае (см. рис. 3.5) выбираем отрезок $[a, \bar{x}]$, так как для него выполняется условие: $f(a)f(\bar{x}) < 0$. Для того чтобы сохранить в дальнейших расчетах единое обозначение $[a, b]$ текущего отрезка, на котором ведется поиск корня на данном шаге вычислений, необходимо параметру b присвоить новое значение \bar{x} : $b = \bar{x}$. С точки зрения геометрической интерпретации (см. рис. 3.5) это означает, что правая граница исходного отрезка точка b переносится в точку \bar{x} а оставшаяся за пределами точки \bar{x} часть графика дальше не рассматривается.

3) Новый отрезок $[a, b]$ снова делим пополам:

$$\bar{x} = \frac{a + b}{2}. \quad (3.20)$$

4) Вычисляем $f(\bar{x})$ и проводим анализ двух вновь полученных отрезков – $[a, \bar{x}]$ и $[\bar{x}, b]$. Выбираем тот из них, для которого выполняется условие противоположности знаков функции в граничных точках.

5) Процесс деления пополам текущего отрезка продолжаем до тех пор, пока очередной отрезок $[a, b]$ не будет удовлетворять условию:

$$|b - a| < \varepsilon, \quad (3.21)$$

где ε – требуемая точность расчета.

За приближенное значение корня x^* принимаем значение середины последнего отрезка $[a, b]$, т. е.

$$x^* = \frac{a + b}{2}. \quad (3.22)$$

При этом погрешность вычисления корня не будет превышать $\frac{b-a}{2^{n+1}}$, где

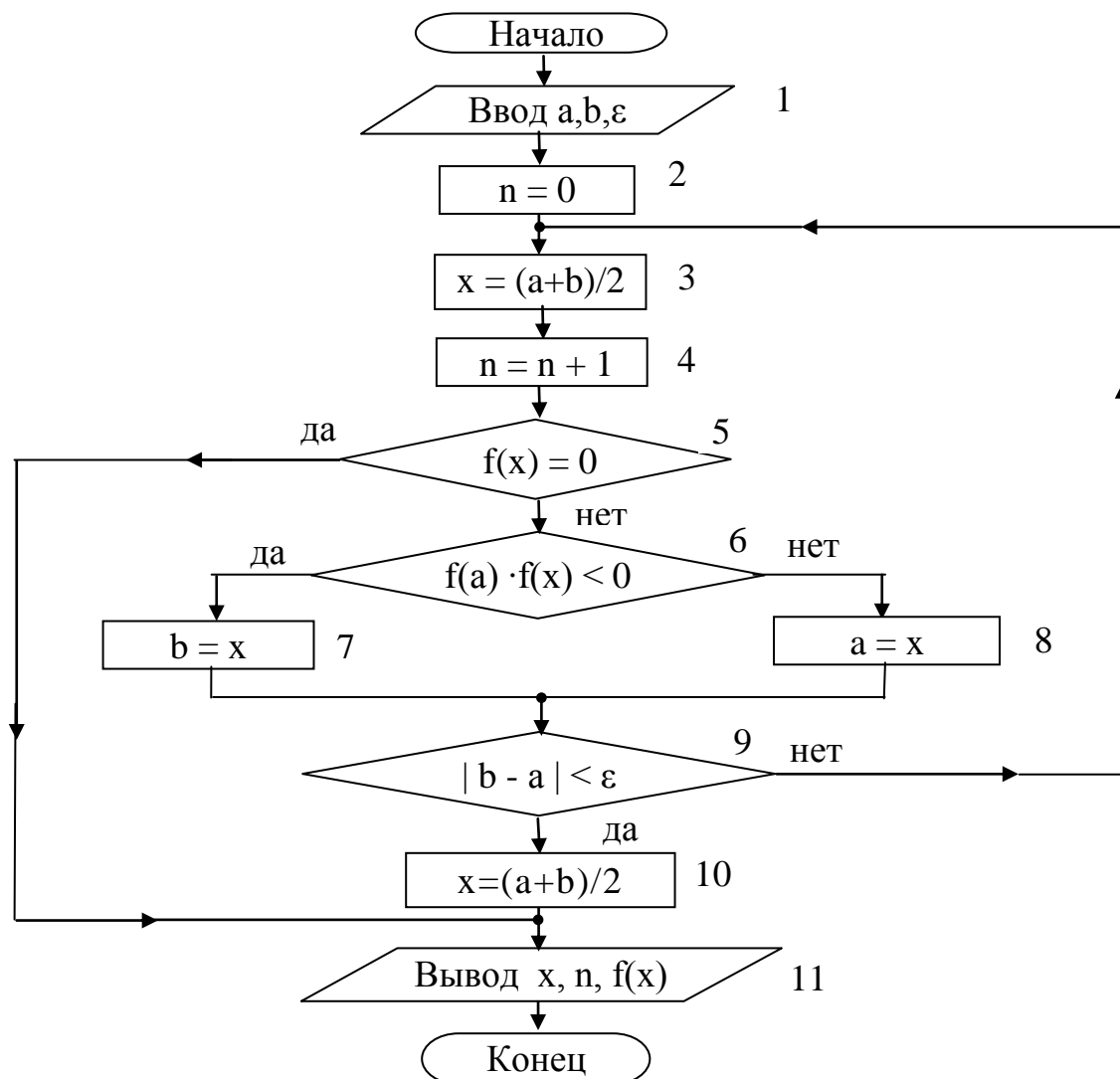


Рис. 3.6. Алгоритм метода половинного деления

n – количество произведенных делений отрезков (количество итераций).

Алгоритм метода половинного деления, представлен на рис. 3.6.

В блоке 2 (рис. 3.6) задается начальное значение счетчика n количества итераций (делений отрезка $[a, b]$ пополам). Блоки 6 – 8 реализуют выбор того из двух отрезков, на котором следует продолжать поиск корня и соответственно корректировку границы (b – при выборе левого отрезка, a – правого).

Метод половинного деления – один из самых простых и надежных. Сходимость метода обеспечена для любых непрерывных функций, в том числе и для недифференцируемых.

Метод устойчив к ошибкам округления. Однако скорость сходимости его меньше, чем у методов, которые будут рассмотрены ниже.

3.3.1.3.2. Метод Ньютона

Требуется решить уравнение $f(x)=0$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ определены, непрерывны и сохраняют постоянные знаки на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию метода Ньютона (рис. 3.7).

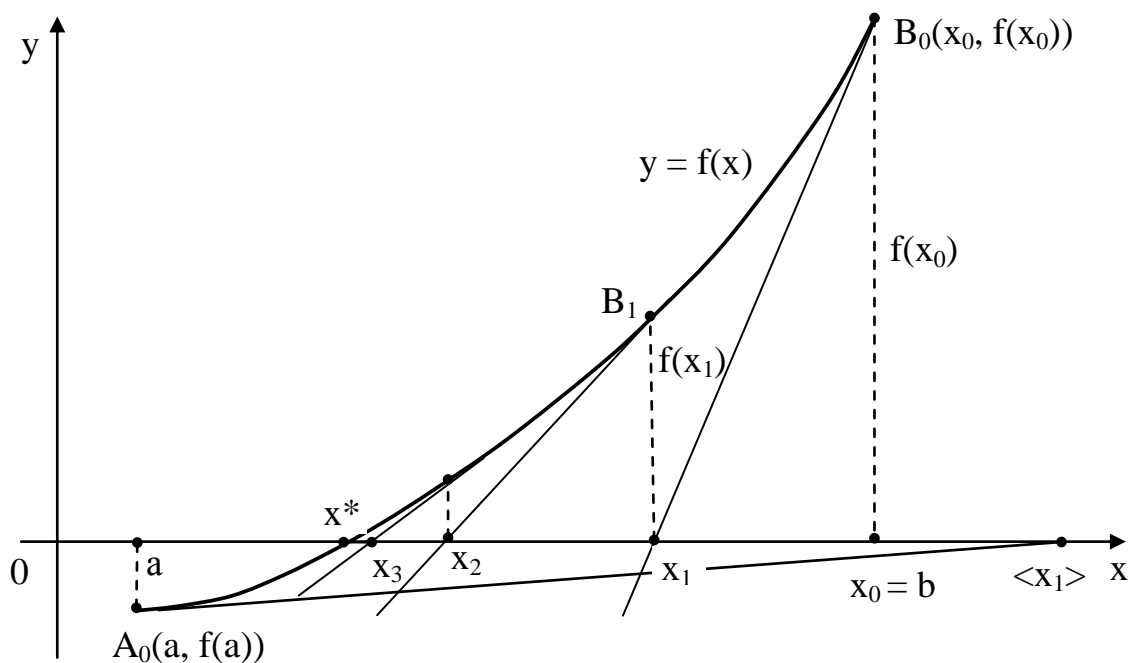


Рис. 3.7. Геометрическая интерпретация метода Ньютона

1) Выбираем x_0 – начальное приближение корня x^* . При этом надо придерживаться следующего правила: за начальное приближение корня следует принять тот конец отрезка $[a, b]$, в котором знак функции совпадает со знаком второй производной, т.е. выполняется условие:

$$f(x_0) f''(x_0) > 0. \quad (3.23)$$

Это условие сходимости метода Ньютона.

Основываясь на свойствах данной функции $f(x)$ (см. рис. 3.4), делаем вывод о том, что условие сходимости выполняется для точки b , поэтому принимаем $x_0 = b$.

2) Вычисляем значение функции $f(x_0)$. Проводим касательную к кривой $f(x)$ в точке $B_0(x_0, f(x_0))$. Абсцисса точки пересечения касательной с осью Ox принимается за новое (первое) приближение корня x_1 .

Известно, что уравнение касательной, проведенной в точке B_0 с координатами $(x_0, f(x_0))$ к кривой функции $f(x)$, имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad (3.24)$$

где x, y – текущие координаты точки, лежащей на касательной.

Для точки x_1 сделаем подстановку в уравнение касательной (3.24):

$$x = x_1; \quad (3.25)$$

$$y = 0, \quad (3.26)$$

получаем:

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0). \quad (3.27)$$

Обе части уравнения (3.27) делим на $f'(x_0)$ и выражаем x_1 :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (3.28)$$

3) Вычисляем значение функции $f(x)$ в точке x_1 , проводим касательную к кривой $f(x)$ в точке $B_1(x_1, f(x_1))$. Абсцисса точки пересечения касательной с осью Ox представляет собой второе приближение корня x_2 :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \quad (3.29)$$

4) Продолжаем последовательно проводить касательные и определять точки их пересечения с осью Ox . Тогда для текущего k -го приближения корня итерационный процесс реализуется рекуррентной формулой:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (3.30)$$

Процесс уточнения корня прекращается, когда выполнится условие близости двух последовательных приближений:

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon. \quad (3.31)$$

Алгоритм, реализующий метод Ньютона, представлен на рис. 3.8. Блок 4 реализует проверку условия сходимости метода и выбор значения начального приближения (блоки 5, 6), блок 10 реализует подсчет количества итераций, 11 – вычисление текущего приближения корня через предыдущее приближение.

Метод Ньютона обладает высокой скоростью сходимости, которая тем выше, чем больше крутизна графика функции $f(x)$ в пределах рассматриваемого отрезка. Если численное значение производной $|f'(x)|$ мало вблизи корня, то процесс уточнения корня может оказаться очень долгим.

Неудачно выбранное начальное приближение может привести к расходимости метода (см. рис. 3.7): представим, что за начальное приближение x_0 принят левый конец отрезка a , касательная, проведенная в точке A_0 , пересекает ось Ox за пределами заданного отрезка $[a, b]$. Таким образом, получили первое приближение к корню $\langle x_1 \rangle$, еще дальше отстоящее от искомого значения корня x^* , чем нулевое приближение x_0 .

3.3.1.3.3. Метод итерации (метод последовательных приближений)

Пусть требуется решить уравнение $f(x)=0$. Преобразуем его к виду:

$$x = \varphi(x). \quad (3.32)$$

На заданном отрезке $[a, b]$ выбираем начальное приближение корня x_0 .

Подставляем его в правую часть уравнения (3.32) и получаем первое приближение корня x_1 :

$$x_1 = \varphi(x_0). \quad (3.33)$$

Аналогичным образом определим второе приближение корня:

$$x_2 = \varphi(x_1). \quad (3.34)$$

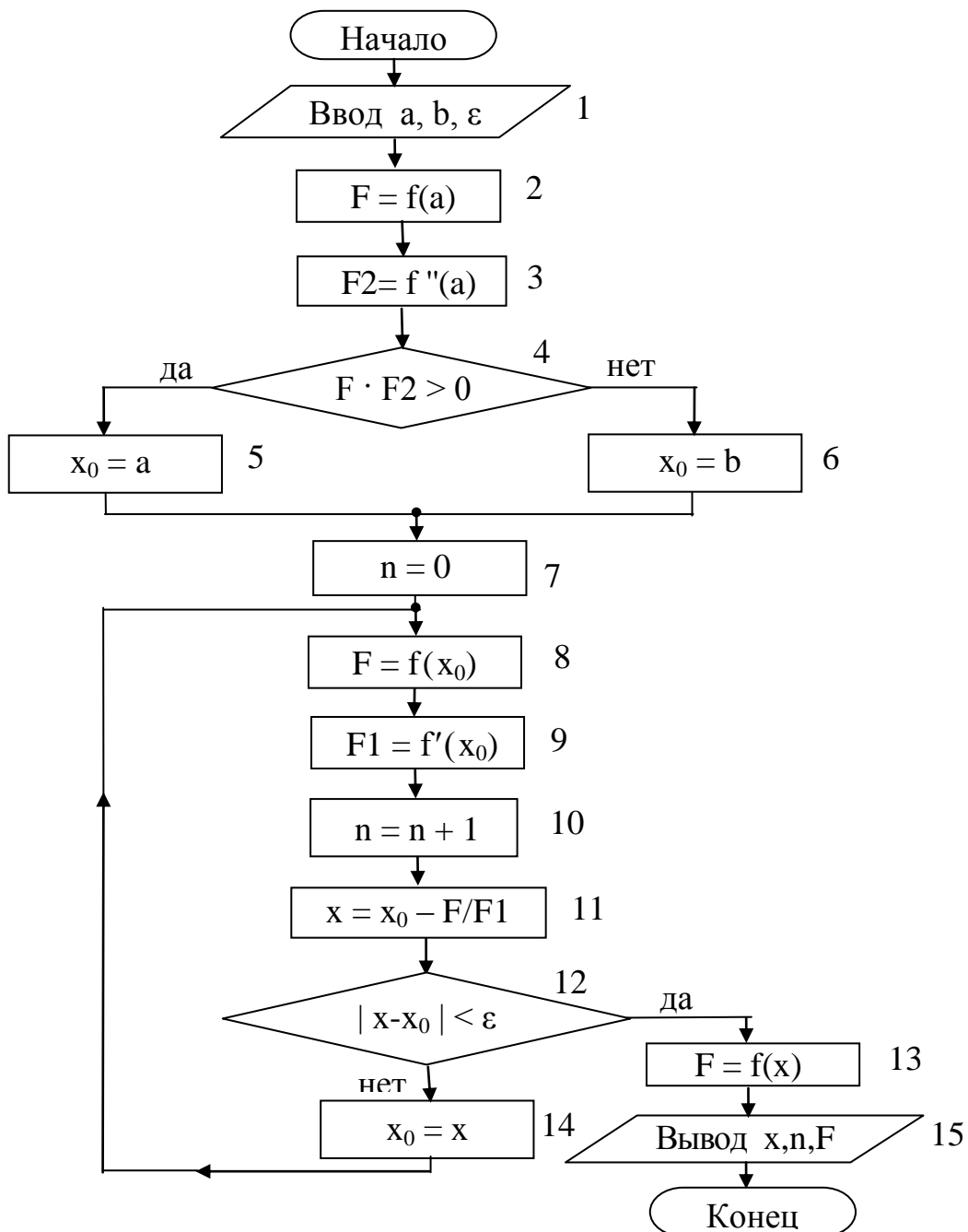


Рис. 3.8. Алгоритм метода Ньютона

Продолжая этот процесс далее, получаем последовательность чисел $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, определяемых соотношением:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}). \quad (3.35)$$

Итерационные вычисления продолжают до тех пор, пока для двух последовательных приближений x_{n-1} и x_n не выполнится условие:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon. \quad (3.36)$$

Достаточным условием сходимости метода итерации, гарантирующим, что последовательно определяемые значения $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ будут приближаться к искомому корню уравнения x^* , является условие:

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad \text{для} \quad x \in [a, b], \quad (3.37)$$

причем скорость сходимости будет тем больше, чем меньше число q .

Рассмотрим геометрическую интерпретацию метода итерации. Исходное уравнение $f(x)=0$ приводим к виду:

$$x = \varphi(x). \quad (3.38)$$

Строим графики функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$. Абсцисса точки пересечения этих графиков и будет являться корнем x^* уравнения $f(x) = 0$.

Рассмотрим несколько возможных вариантов итерационного процесса.

В а р и а н т 1. $\varphi'(x) > 0$; $|\varphi'(x)| < 1$ (рис. 3.9).

Задаем начальное приближение $x_0 \in [a, b]$. Определяем $\varphi(x_0)$. Через точку A_0 с координатами $x_0, \varphi(x_0)$ проводим горизонтальную линию до пересечения с прямой $y = x$ в точке B_1 . Через точку B_1 проводим вертикальную линию, пересекающую кривую $y = \varphi(x)$ и ось Ox . Точка пересечения этой линии с осью Ox даст первое приближение корня x_1 , а точка пересечения ее с кривой $y = \varphi(x)$ – точку A_1 с координатами $x_1, \varphi(x_1)$. Через точку A_1 проводим горизонтальную линию до пересечения с прямой $y = x$ (точка B_2). Вертикальная линия, проведенная через точку B_2 , пересекая ось Ox , даст второе приближение корня x_2 , а также определит на кривой $y = \varphi(x)$ точку A_2 с ко-

ординатами $x_2, \varphi(x_2)$. Продолжая действия по такой же схеме, получаем на оси Ox последовательность значений $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$, приближающихся

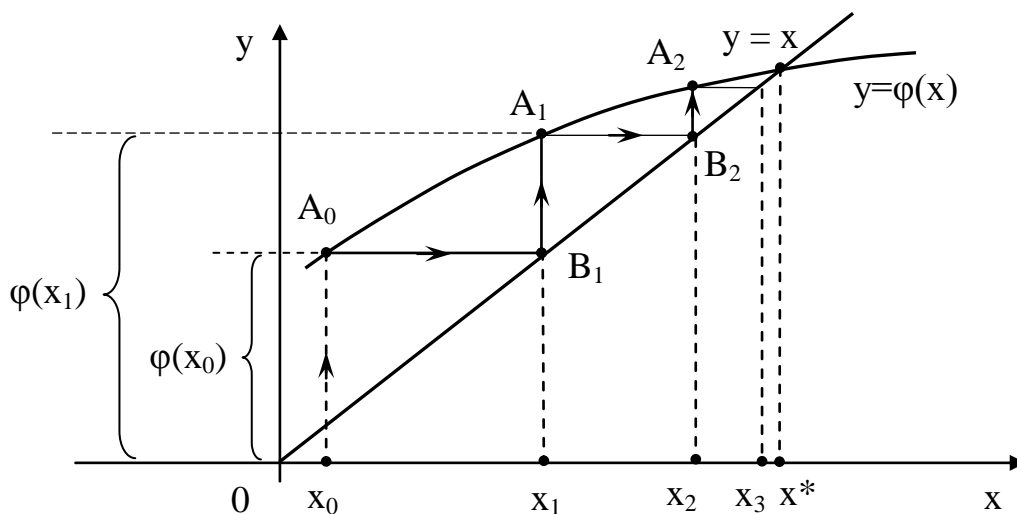


Рис. 3.9. Монотонная (односторонняя) сходимость

(сходящихся) к истинному значению корня x^* . Причем все последовательные приближения находятся с одной стороны от корня x^* . Такая сходимость называется монотонной или односторонней.

В а р и а н т 2. $\varphi'(x) > 0$; $|\varphi'(x)| > 1$ (рис. 3.10). Итерационный процесс расходится.

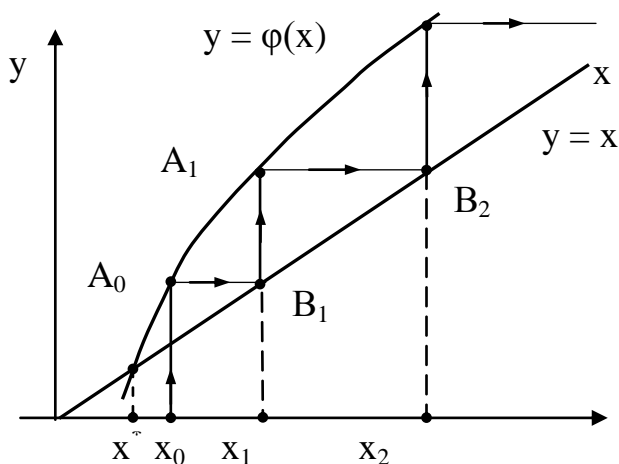


Рис. 3.10. Итерационный процесс расходится

В а р и а н т 3. $\varphi'(x) < 0$; $|\varphi'(x)| < 1$ (рис. 3.11). Итерацион-

ный процесс сходится. Процесс сходимости носит колебательный характер (двусторонняя сходимость).

В а р и а н т 4. $\varphi'(x) < 0$; $|\varphi'(x)| > 1$ (рис. 3.12). Итерационный процесс расходится.

Рекомендации по преобразованию исходного уравнения. Преобразование исходного уравнения $f(x)=0$ к эквивалентному уравнению $x=\varphi(x)$ может быть осуществлено различными способами. Выбор конкретного способа определяется целью – получить такую функцию $\varphi(x)$, для которой выполняется условие сходимости $|\varphi'(x)| \leq q < 1$. Рассмотрим несколько примеров.

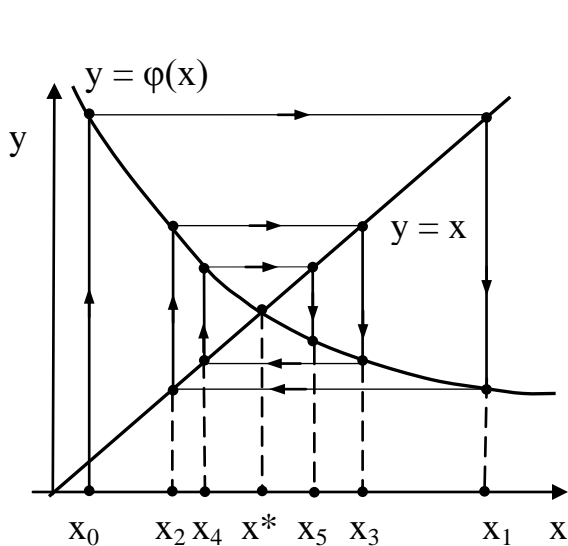


Рис. 3.11. Двусторонняя сходимость

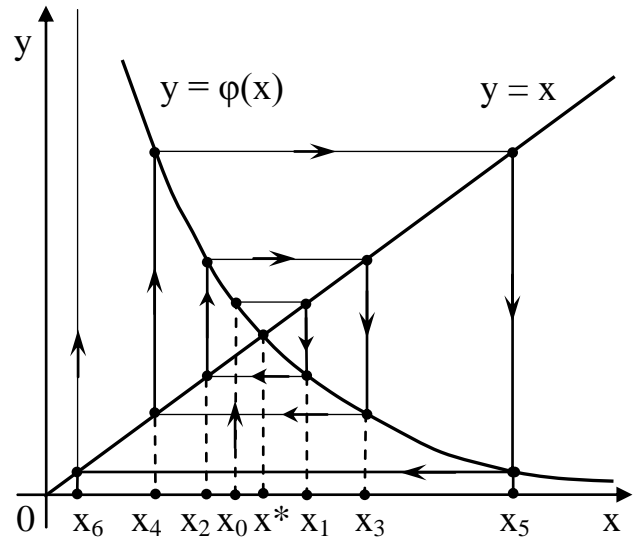


Рис. 3.12. Итерационный процесс расходится

Пример 16. Пусть требуется определить корень уравнения

$$4x^3 - 15x + 7 = 0 \quad (3.39)$$

на отрезке $[0, 1]$.

С п о с о б 1 – прибавляем к обеим частям исходного уравнения x :

$$(4x^3 - 15x + 7) + x = x, \quad (3.40)$$

получаем:

$$4x^3 - 14x + 7 = x. \quad (3.41)$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = 4x^3 - 14x + 7. \quad (3.42)$$

Проверяем, выполняется ли условие сходимости на отрезке $[0, 1]$:

$$\varphi'(x) = 12x^2 - 14, \quad (3.43)$$

$$|\varphi'(0)| = |-14| > 1, \quad (3.44)$$

$$|\varphi'(1)| = |12-14| > 1. \quad (3.45)$$

Условие сходимости не выполняется, следовательно, функция $\varphi(x)$ в таком виде непригодна.

С п о с о б 2 – выражаем x из исходного уравнения:

$$-15x = -7 - 4x^3, \quad (3.46)$$

получаем:

$$x = \frac{7}{15} + \frac{4}{15}x^3. \quad (3.47)$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = \frac{7}{15} + \frac{4}{15}x^3. \quad (3.48)$$

Проверяем, выполняется ли условие сходимости на отрезке $[0, 1]$:

$$|\varphi'(0)| = |0| < 1; \quad (3.49)$$

$$|\varphi'(1)| = \left| \frac{4}{5} \right| < 1. \quad (3.50)$$

Условие сходимости выполняется на заданном отрезке, значит, можно воспользоваться функцией $\varphi(x) = \frac{7}{15} + \frac{4}{15}x^3$ для реализации метода итерации.

Пример 17. Пусть требуется определить корень уравнения

$$e^x - e^{-x} - 1 = 0 \quad (3.51)$$

на отрезке $[0, 1]$.

С п о с о б 3 – представляем исходное уравнение в виде:

$$e^x = e^{-x} + 1 \quad (3.52)$$

и логарифмируем обе части этого уравнения:

$$\ln(e^x) = \ln(e^{-x} + 1), \quad (3.53)$$

получаем:

$$x = \ln(e^{-x} + 1). \quad (3.54)$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = \ln(e^{-x} + 1), \quad (3.55)$$

$$|\varphi'(1)| = \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1}. \quad (3.56)$$

Проверяем, выполняется ли условие сходимости на отрезке $[0, 1]$:

$$|\varphi'(0)| = |-0,5| < 1; \quad (3.57)$$

$$|\varphi'(1)| = |-0,269| < 1. \quad (3.58)$$

Условие сходимости выполняется.

С п о с о б 4 – для некоторых уравнений рассмотренные выше способы преобразования не дают желаемых результатов. В таких случаях рекомендуется применить следующий прием, гарантирующий выполнение условия сходимости метода итерации.

Левую и правую части исходного уравнения $f(x) = 0$ умножаем на произвольную константу λ и прибавляем к обеим частям неизвестное x :

$$x = x + \lambda f(x), \quad (3.59)$$

тогда

$$\varphi(x) = x + \lambda f(x). \quad (3.60)$$

Коэффициент λ задается следующим образом:

$$\lambda = -\frac{1}{M}, \quad (3.61)$$

где M – наибольшее значение производной $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$,

$$M = \max_{[a,b]} f'(x). \quad (3.62)$$

Пример 18. Пусть требуется определить корень уравнения

$$x^3 + 3x^2 - 3 = 0 \quad (3.63)$$

на отрезке $[0,5; 1,5]$.

Представляем исходное уравнение в виде:

$$x = x + \lambda(x^3 + 3x^2 - 3), \quad (3.64)$$

таким образом,

$$\varphi(x) = x + \lambda(x^3 + 3x^2 - 3). \quad (3.65)$$

Определяем λ :

$$\lambda = -\frac{1}{M}, \quad (3.66)$$

где $M = \max_{[0,5; 1,5]} f'(x) = \max_{[0,5; 1,5]} [3x^2 + 6x] = 15,75,$

следовательно, $\lambda = -\frac{1}{15,75} = -0,063.$

Таким образом,

$$\varphi(x) = x - 0,063(x^3 + 3x^2 - 3), \quad (3.67)$$

$$\varphi'(x) = 1 - 0,19x^2 - 0,38x. \quad (3.68)$$

Проверяем условие сходимости:

$$|\varphi'(0,5)| = 0,76 < 1; \quad (3.69)$$

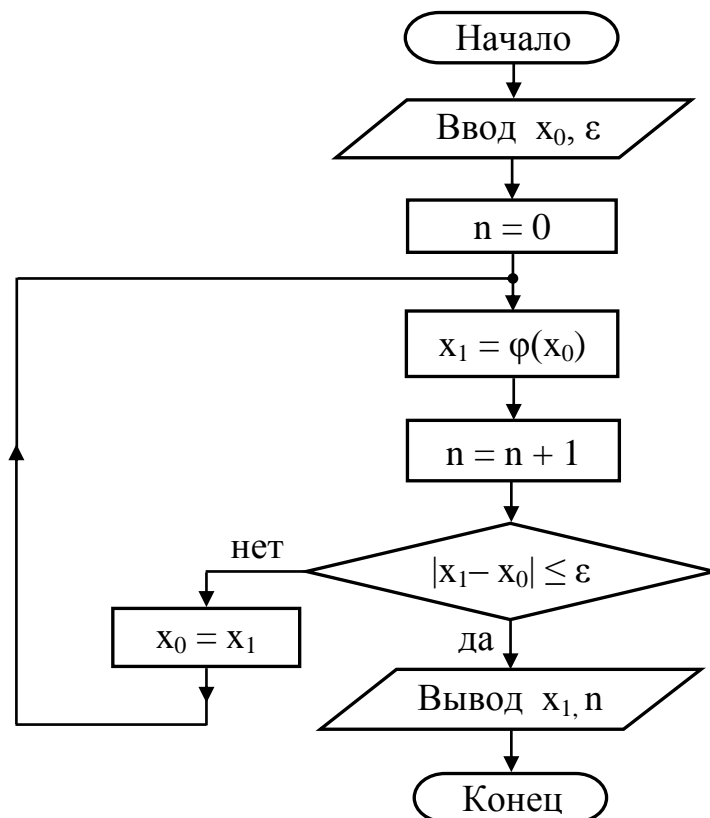


Рис. 3.13. Алгоритм метода итерации

$$|\varphi'(1,5)| = 0,0025 < 1. \quad (3.70)$$

Условие сходимости выполняется.

Алгоритм, реализующий метод итерации, представлен на рис. 3.13.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФОРМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Базовые понятия

Динамической называется модель, в математическое описание которой в качестве независимой переменной входит время.

Линейная модель описывает процессы в линейной физической системе.

Линейная система вида, представленного на рис. 4.1, может быть описана линейным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + b_{m-2} \frac{d^{m-2} x(t)}{dt^{m-2}} + \dots + b_0 x(t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $y(t)$ – искомая функция – выходной процесс;

$x(t)$ – заданная функция – входной процесс;

t – независимая переменная.

Линейным называется дифференциальное уравнение, коэффициенты которого не зависят от искомой функции y и в которое функция y и ее производные входят линейно (в первой степени).

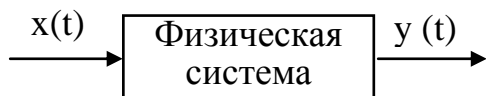


Рис. 4.1. Линейная система с одним входом и одним выходом

Основным свойством линейных систем является применимость принципа суперпозиции (наложения): *сумме воздействий на систему соответствует сумма ее реакций на эти воздействия.*

В качестве примера линейной системы рассмотрим электрическую цепь с несколькими источниками. Токи от каждого источника независимы, поэтому проводится расчет токов отдельно для каждого источника. Результирующие токи получаются суммированием частных токов.

Принцип суперпозиции существенно облегчает исследование линейных систем, так как позволяет ограничиться исследованием объекта только по одному входу.

Л и н е й н а я с т а ц и о н а р н а я м о д е л ь формируется на основе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ($a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots - \text{const}$). Такая модель описывает линейную систему, параметры которой не зависят от времени.

Пример 19. Моделируемый объект – электрическая цепь (рис. 4.2): $R, L, C - \text{const}$.

По второму закону Кирхгофа

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e \quad (4.2)$$

Выразим ток

$$i = C \frac{dU_C}{dt} \quad (4.3)$$

и сделаем подстановку в уравнение (4.2):

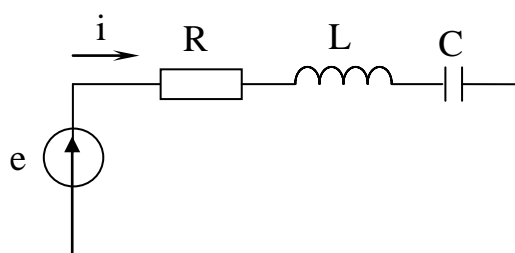


Рис. 4.2. Объект моделирования – электрическая цепь

$$\underbrace{LC}_{\text{const}} \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \underbrace{RC}_{\text{const}} \frac{du_C}{dt} + u_C = e - \quad (4.4)$$

это л и н е й н а я с т а ц и о н а р н а я м о д е л ь – обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно u_C ($y \rightarrow u_C; x \rightarrow e$).

Для системы (рис. 4.2) можно составить еще одну модель. Продифференцируем уравнение (4.2):

$$R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = \frac{de}{dt} \quad (4.5)$$

и умножим обе части уравнения (4.5) на C :

$$\underbrace{LC}_{\text{const}} \frac{d^2 i}{dt^2} + \underbrace{RC}_{\text{const}} \frac{di}{dt} + i = \underbrace{C}_{\text{const}} \frac{de}{dt} - \quad (4.6)$$

это линейная стационарная модель относительно i ($y \rightarrow i$; $x \rightarrow e$).

Пример 20. Линейной стационарной моделью в классе дифференциальных уравнений может быть описан электрический генератор постоянного тока (рис. 4.3):

$$T_{\Gamma} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_{\Gamma} x(t), \quad (4.7)$$

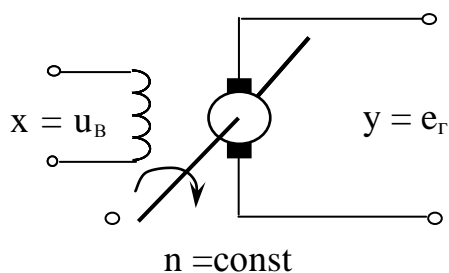


Рис. 4.3. Электрический генератор постоянного тока

где $x(t)$ – входная переменная u_B – напряжение возбуждения;

$y(t)$ – выходная переменная e_r – ЭДС, наводимая в обмотке якоря генератора;

T_{Γ} – постоянная времени генератора;

k_{Γ} – передаточный коэффициент генератора;

n – частота вращения якоря.

Линейная нестационарная модель описывает линейную систему, у которой параметры (или хотя бы один параметр) являются функцией времени. Такая модель может быть представлена линейным дифференциальным уравнением с коэффициентами, зависящими от времени.

Пример 21. Моделируемый объект – электрическая цепь (рис. 4.4): Индуктивность обеспечивается катушкой с ферромагнитным сердечником. Сердечник периодически перемещается вдоль оси катушки каким-либо устройством (рис. 4.5). Перемещение сердечника относительно катушки вызывает изменение магнитной проводимости путей замыкания магнитного потока катушки. В результате изменяется потокосцепление Ψ , т. е. $\Psi(t)$.

Индуктивность принято рассматривать как коэффициент пропорциональности между потокосцеплением Ψ и током i :

$$\Psi = Li, \quad (4.8)$$

откуда

$$L = \frac{\Psi}{i}. \quad (4.9)$$

Следовательно,

$$L = L(t). \quad (4.10)$$

Согласно второму закону Кирхгофа

$$Ri + u_L + u_C = e, \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned} u_L &= \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d[L(t)i]}{dt} = \\ &= i \frac{dL(t)}{dt} + L(t) \frac{di}{dt}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

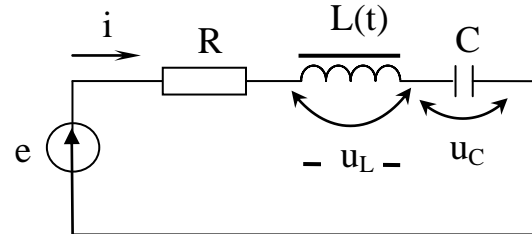


Рис. 4.4. Объект моделирования – электрическая цепь

Сделаем подстановку соотношения (4.12) в уравнение (4.11):

$$Ri + i \frac{dL(t)}{dt} + L(t) \frac{di}{dt} + u_C = e. \quad (4.13)$$

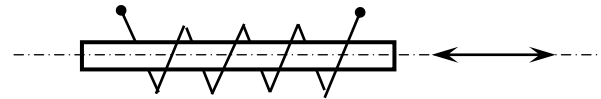


Рис. 4.5. Катушка с сердечником (магнитная проницаемость $\mu = \text{const}$)

Выразим ток i через u_C :

$$i = C \frac{du_C}{dt}. \quad (4.14)$$

Сделаем подстановку соотношения (4.14) в уравнение (4.13):

$$RC \frac{du_C}{dt} + C \frac{du_C}{dt} \frac{dL(t)}{dt} + L(t)C \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = e, \quad (4.15)$$

получим:

$$\underbrace{L(t)C \frac{d^2 u_C}{dt^2}}_{A=A(t)} + \underbrace{\left(RC + C \frac{dL(t)}{dt} \right) \frac{du_C}{dt}}_{B=B(t)} + u_C = e. \quad (4.16)$$

Дифференциальное уравнение (4.16) 2-го порядка относительно u_C представляет собой (при определенных допущениях) нестационарную линейную модель ($y \rightarrow u_C$; $x \rightarrow e$).

Нелинейные математические модели могут быть сформированы на основе дифференциальных уравнений, коэффициенты которых (или хотя бы один коэффициент) зависят от искомой функции y либо искомая функция y или ее производные входят в дифференциальное уравнение в n -й степени ($n \neq 1$).

Нелинейная модель описывает нелинейные системы.

Нелинейной считается система, которая содержит хотя бы один нелинейный элемент.

Нелинейным считается элемент, параметры которого зависят от входных и выходных сигналов.

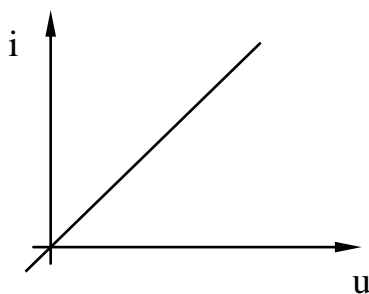


Рис. 4.6. Пример ВАХ линейного элемента ($R = \text{const}$)

Нелинейными характеристиками обладают диоды, транзисторы, катушки с ферромагнитными сердечниками, трансформаторы, магнитные усилители, преобразователи и т. д.

Если для линейного элемента вольт-амперная характеристика (ВАХ) представляет собой прямую, проходящую через начало координат (рис. 4.6), то для нелинейного элемента

$$R \neq \text{const}; \quad R = R(i). \quad (4.17)$$

Примеры ВАХ нелинейных элементов приведены на рис. 4.7.

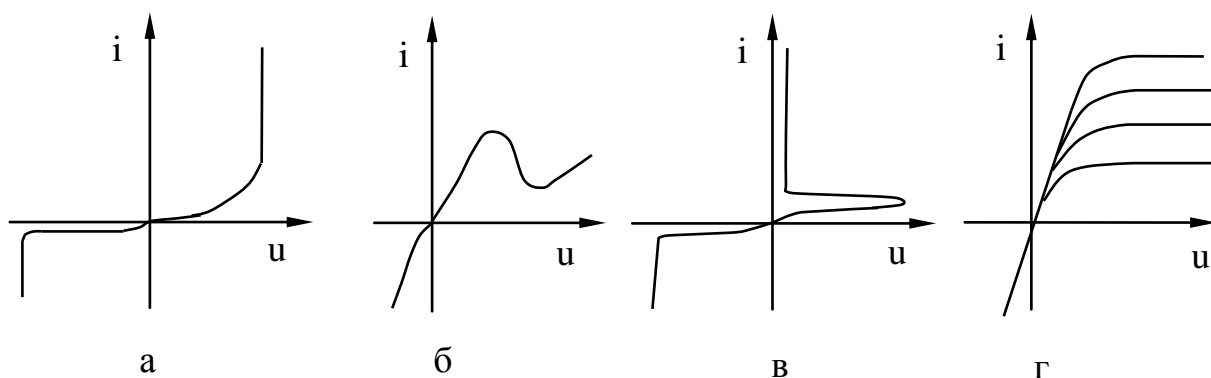


Рис. 4.7. Примеры ВАХ нелинейных элементов:
а – стабилитрон; б – туннельный диод;
в – тиристор; г – транзистор

Н е л и н е й н а я м о д е л ь может быть сформирована в виде нелинейного дифференциального уравнения.

П р и м е р 22. Моделируемый объект – нелинейная электрическая система (рис. 4.8): $R(i)$ – нелинейный элемент.

Аппроксимируем ВАХ нелинейного резистора выражением:

$$i = au^2. \quad (4.18)$$

Согласно второму закону Кирхгофа

$$u(i) + L \frac{di}{dt} = e. \quad (4.19)$$

Сделаем подстановку выражения (4.18) в уравнение (4.19):

$$u(i) + L \frac{d(au^2)}{dt} = e. \quad (4.20)$$

В итоге получаем

$$\underbrace{2auL \frac{du}{dt}}_{A = f(u)} + u = e - \quad (4.21)$$

это математическая модель в форме дифференциального уравнения 1-го порядка относительно напряжения u , н е л и н е й н а я, так как один из ее коэффициентов зависит от искомой функции u , с т а ц и о н а р н а я.

При других видах аппроксимирующего выражения получаются другие математические модели.

4.2. Решение математических моделей в классе обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка (ОДУ):

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (4.22)$$

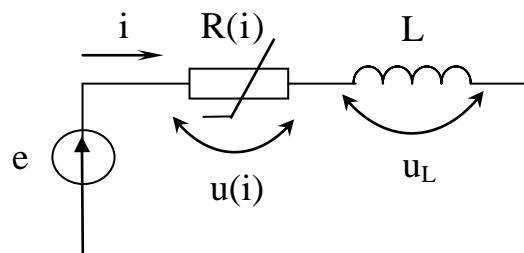


Рис. 4.8. Моделируемый объект – нелинейная электрическая система

или

$$y' = f(t, y). \quad (4.23)$$

Решением дифференциального уравнения (4.23) является всякая дифференцируемая функция y , которая при подстановке в него обращает его в тождество.

Найти общее решение дифференциального уравнения (4.23) – значит найти совокупность всех решений или семейство решений, удовлетворяющих данному уравнению:

$$y = \varphi(t, C), \quad (4.24)$$

где C – произвольная постоянная.

Геометрически общее решение дифференциального уравнения (4.23) представляет собой семейство интегральных кривых этого уравнения.

Частное решение дифференциального уравнения (4.23) (т. е. единственное из семейства решений) может быть получено из общего решения (4.24) при конкретном числовом значении произвольной постоянной C .

Для того чтобы определить значение C , требуется задать дополнительные условия, которым должно удовлетворять искомое решение.

Задача Коши. Среди всех решений (4.24) дифференциального уравнения (4.23) найти такое решение

$$y = y(t), \quad (4.25)$$

которое удовлетворяет начальным условиям: $y = y_0$ при $t = t_0$ или $y(t_0) = y_0$.

Произвольная постоянная C определяется в результате подстановки начальных условий t_0, y_0 в формулу общего решения (4.24).

Таким образом, начальные условия позволяют выбрать из семейства интегральных кривых ту кривую, которая проходит через точку с координатами t_0, y_0 .

Пример 23. Решить математическую модель в форме дифференциального уравнения:

$$y' = y \left(\frac{dy}{dt} = y \right). \quad (4.26)$$

Общее решение:

$$y = Ce^t, \quad (4.27)$$

где C – произвольная постоянная.

Полученное общее решение (4.27) определяет следующее семейство интегральных кривых (решений) (рис. 4.9).

Частное решение получим, задав начальные условия: $y_0 = 1$ при $t_0 = 0$ или $y(0) = y_0 = 1$.

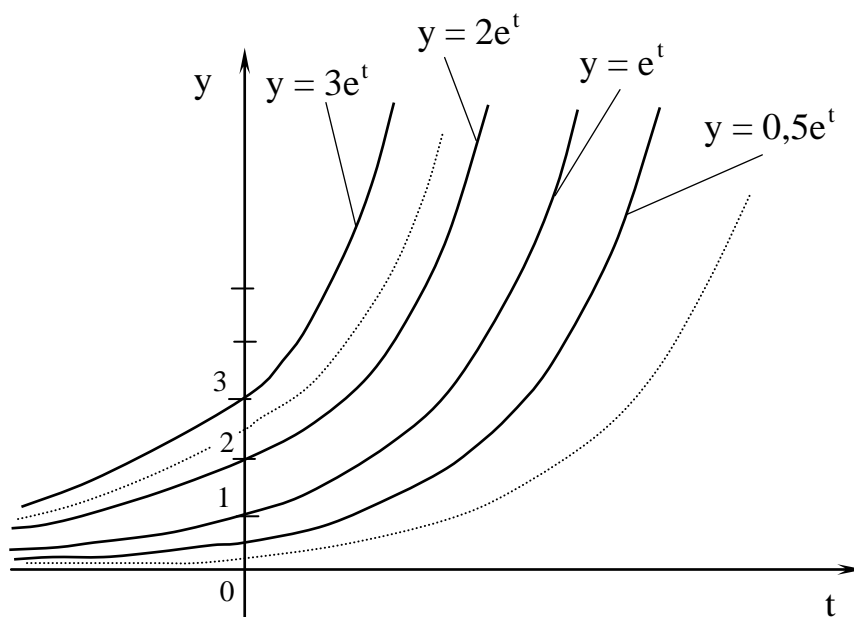


Рис. 4.9. Семейство интегральных кривых

При подстановке начальных условий в (4.27) получаем $C = 1$. Следовательно, частное решение:

$$y = e^t. \quad (4.28)$$

Для дифференциального уравнения n -го порядка

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (4.29)$$

общее решение имеет вид:

$$y = \varphi(t, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n). \quad (4.30)$$

Для определения частного (единственного) решения согласно задаче Коши должны быть заданы начальные условия:

$$\text{в точке } t = t_0: \begin{cases} y(t_0) = y_0; \\ y'(t_0) = y_{10}; \\ y''(t_0) = y_{20}; \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1,0}. \end{cases} \quad (4.31)$$

4.3. Методы решения математических моделей в классе ОДУ

Методы решения ОДУ можно разделить на следующие группы (рис.4.10).

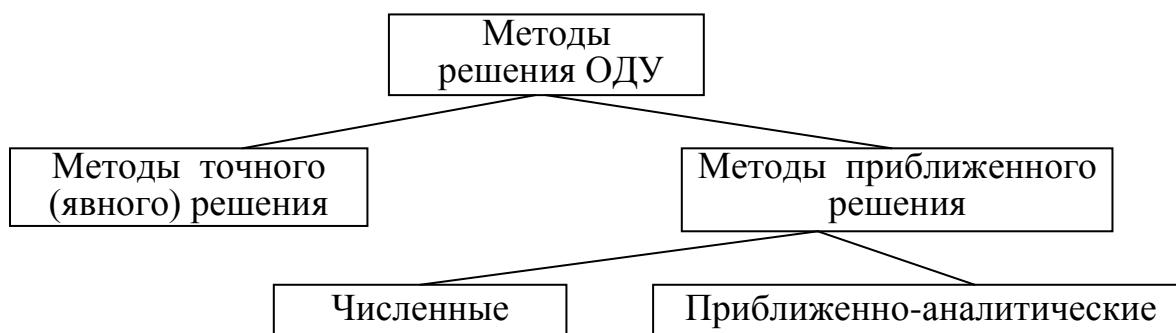


Рис. 4.10. Методы решения ОДУ

4.3.1. Ч и с л е н н ы е м е т о д ы

Ч и с л е н н ы е м е т о д ы позволяют получить искомое решение $y(t)$ дифференциального уравнения (4.23) в форме таблицы его приближенных значений $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ для заданной последовательности значений аргумента $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$.

Непрерывный отрезок $[t_0, T]$, на котором требуется получить решение дифференциального уравнения, заменяют конечной последовательностью дискретных точек $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ (у з л о в ы х т о ч е к).

Величина $h = t_i - t_{i-1}$ называется ш а г о м и н т е г р и р о в а н и я.

Численные методы делятся на два класса: о д н о ш а г о в ы е и м н о г о ш а г о в ы е.

О д н о ш а г о в ы е м е т о д ы действуют по принципу:

$$y_{i+1} = F(y_i), \quad (4.32)$$

т. е. для расчета следующего значения решения y_{i+1} достаточно знать только текущее значение y_i (методы Эйлера, Рунге – Кутты).

Многошаговые методы используют такую процедуру:

$$y_{i+1} = F(y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3}). \quad (4.33)$$

К ним относятся методы Адамса, Милна.

В основе одношаговых методов лежит следующая идея: искомое решение y_i дифференциального уравнения в окрестности текущей точки $t = t_i$ можно представить в виде ряда Тейлора.

Учитывая, что $y(t_i) = y_i$, получим:

$$y_{i+1} = y_i + y'_i h + \frac{y''_i}{2!} h^2 + \frac{y'''_i}{3!} h^3 + \dots \quad (4.34)$$

Производится усечение ряда Тейлора. Количество оставшихся членов ряда определяет порядок численного метода и, соответственно, его точность. При этом операция вычисления производных $y'', y''', \dots, y^{(k)}$ заменяется последовательностью простейших операций над значениями функции $f(t, y)$ в нескольких точках интервала $[t_i, t_{i+h}]$.

4.3.2. Метод Рунге – Кутты

Пусть на отрезке $[a, b]$ требуется найти численное решение дифференциального уравнения

$$y' = f(t, y) \quad (4.35)$$

при начальных условиях $y(t_0) = y_0$.

Разбиваем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками

$$t_i = t_0 + ih, \quad (4.36)$$

где $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$; $h = \frac{b-a}{n}$ – шаг интегрирования.

Тогда каждое последующее значение искомого решения y будет определяться так:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad (4.37)$$

где

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (4.38)$$

здесь

$$k_1 = hf(t_i, y_i); \quad (4.39)$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right); \quad (4.40)$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right); \quad (4.41)$$

$$k_4 = hf\left(t_i + h, y_i + k_3\right). \quad (4.42)$$

Это метод Рунге – Кутта 4-го порядка, одношаговый, обладает достаточной точностью, его погрешность $-(R \sim h^4)$.

Метод Рунге – Кутта применяется также для решения систем дифференциальных уравнений. В этом случае от скалярной формы записи выражений переходят к векторной: $y \rightarrow Y, \quad f(t, y) \rightarrow F(t, Y)$.

Чтобы применить метод Рунге – Кутта к дифференциальному уравнению n -го порядка

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (4.43)$$

следует свести его к системе n дифференциальных уравнений 1-го порядка (в форме Коши).

Для этого вводятся обозначения для производных: $y' = y_1; \quad y'' = y_2; \quad y''' = y_3; \quad y^{(n-1)} = y_{n-1}; \quad y^{(n)} = y_n$.

Тогда результирующая система дифференциальных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} y' = y_1; \\ y'_1 = y_2; \\ y'_2 = y_3; \\ \dots\dots\dots \\ y'_{n-1} = f(t, y, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}). \end{cases} \quad (4.44)$$

Пример 24. Преобразуем дифференциальное уравнение 3-го порядка

$$y''' = -y + 5ty'' + t^3 \quad (4.45)$$

к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка в форме Коши.

Введем обозначения: $y' = y_1$; $y'' = y_2$, тогда система будет иметь вид:

$$\begin{cases} y' = y_1; \\ y'_1 = y_2; \\ y'_2 = -y + 5ty_2 + t^3. \end{cases} \quad (4.46)$$

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Математические модели для систем с распределенными параметрами формируются на основе дифференциальных уравнений с частными производными. Физические процессы в таких системах являются не только функциями времени, но и функциями пространственных координат.

Пример 25. Моделируемый объект – двухпроводная однородная линия. Схема замещения линии с потерями представлена на рис. 5.1, где x – пространственная координата; $i_{\text{вых}} \neq i_{\text{вх}}$ из-за утечки тока через изоляцию между проводами.

Линия характеризуется параметрами, задаваемыми на единицу длины:

R_0 , L_0 – продольные активное сопротивление и индуктивность;

G_0 , C_0 – поперечные проводимость и емкость – параметры изоляции между проводами.

Математическая модель в общем случае имеет вид:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad (5.1)$$

это система двух дифференциальных уравнений в частных производных, где $u = u(t, x)$ и $i = i(t, x)$.

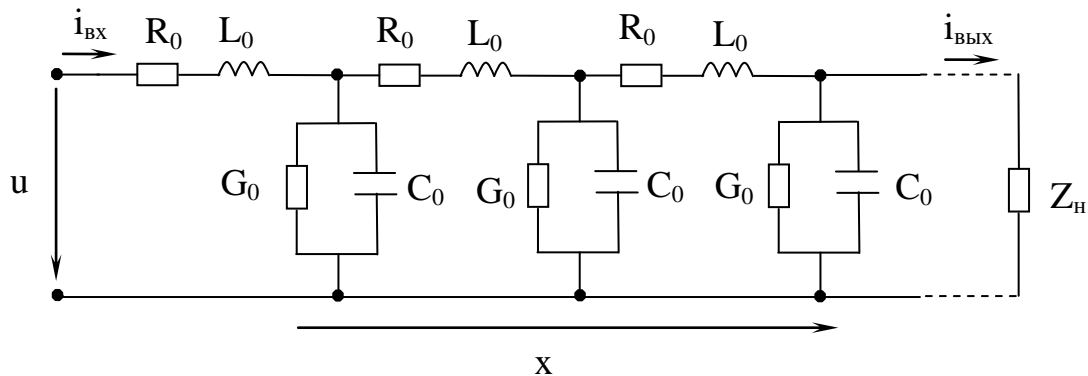


Рис. 5.1. Схема замещения линии с потерями

В результате решения модели (5.1) определяются процессы $u = u(t, x)$ и $i = i(t, x)$, т. е. напряжение и ток как функции времени t и пространственной координаты x .

Пример 26. Уравнение теплопроводности – математическая модель, описывающая процесс распространения тепла.

Рассмотрим простейший вариант.

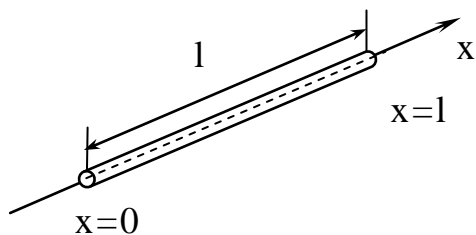


Рис. 5.2. Тонкий однородный стержень

Тонкий однородный стержень (рис. 5.2) длиной l , изолированный в тепловом отношении от окружающей среды. На концах стержня поддерживается некоторая температура – постоянная или меняющаяся во времени по какому-либо заданному закону.

Требуется определить закон распределения температуры T в любой точке стержня x в любой момент времени t .

Применим математическую модель вида:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (5.2)$$

где a – коэффициент температуропроводности, определяемый как

$$a = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad (5.3)$$

где λ – коэффициент теплопроводности;

c – удельная теплоемкость;

ρ – плотность материала стержня.

Чтобы решить уравнение (5.2) в частных производных, необходимо задать начальные условия:

$$T(x, 0) = \varphi_0(x), \quad (5.4)$$

где $\varphi_0(x)$ – начальное распределение температуры в стержне, при $t = 0$,

и граничные условия:

$$T(0, t) = \alpha(t) \quad (5.5)$$

и

$$T(1, t) = \beta(t), \quad (5.6)$$

где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – закон изменения температуры в левом и правом концах стержня.

Тогда решение уравнения $T(x, t)$ будет функцией двух переменных – пространственной координаты x и времени t (рис. 5.3).

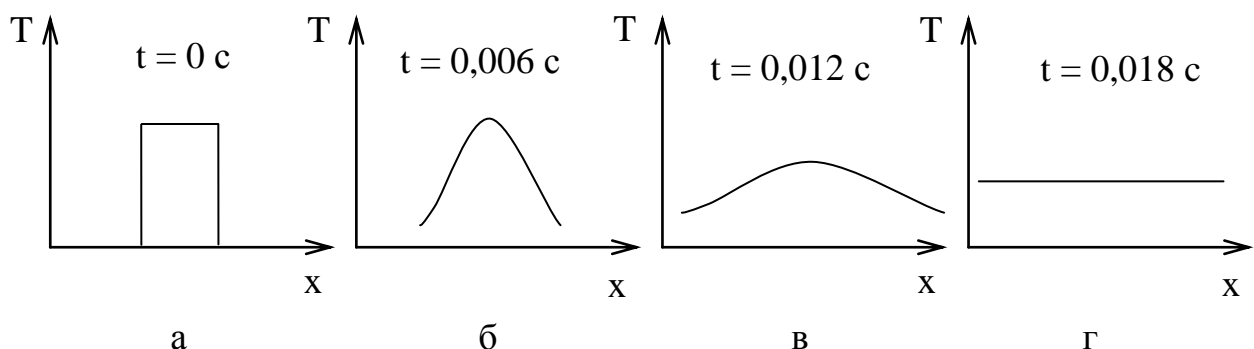


Рис. 5.3. Пример изменения распределения температуры T , как функции времени t и пространственной координаты x

Если внутри стержня имеются источники тепла или поглотители тепла, то математическая модель усложняется:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Q_v}{c\rho}, \quad (5.7)$$

где Q_v – объемная плотность теплового источника.

Математическая модель, описывающая процесс передачи тепла в однородной среде, представляет собой трехмерное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{Q_v}{c\rho}. \quad (5.8)$$

Решением уравнения (5.8) будет функция $T(x,y,z,t)$, позволяющая определить температуру T в любой точке среды с координатами (x,y,z) в любой момент времени t .

Эта модель позволяет найти закон распределения тепла внутри заданного твердого тела, ограниченного поверхностью S , для чего задаются начальные условия:

$$T(x,y,z,0) = \varphi_0(x,y,z), \quad (5.9)$$

где $\varphi_0(x,y,z)$ – начальное распределение температуры внутри тела при $t = 0$, и граничные условия:

$$T(x,y,z,t)_{\text{на } S} = f(x,y,z,t), \quad (5.10)$$

где $f(x,y,z,t)$ – функция, определяющая распределение температуры во всех точках на поверхности S в любой момент времени t .

Модель (5.8) описывает и ряд других процессов различной физической природы: диффузию одного вещества в другое, проникновение магнитного поля в плазму, поведение нейтронов в ядерном реакторе и т. д.

Математическое моделирование процесса движения сжимаемого газа, распространения возмущений электромагнитных полей, исследование колебаний приводит к так называемому волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (5.11)$$

где a – скорость распространения возмущений.

Таким образом, волновое уравнение описывает процесс распространения возмущений в некоторой среде.

6. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Все рассмотренные выше математические модели относятся к классу **детерминированных** и описывают процессы в детерминированных системах.

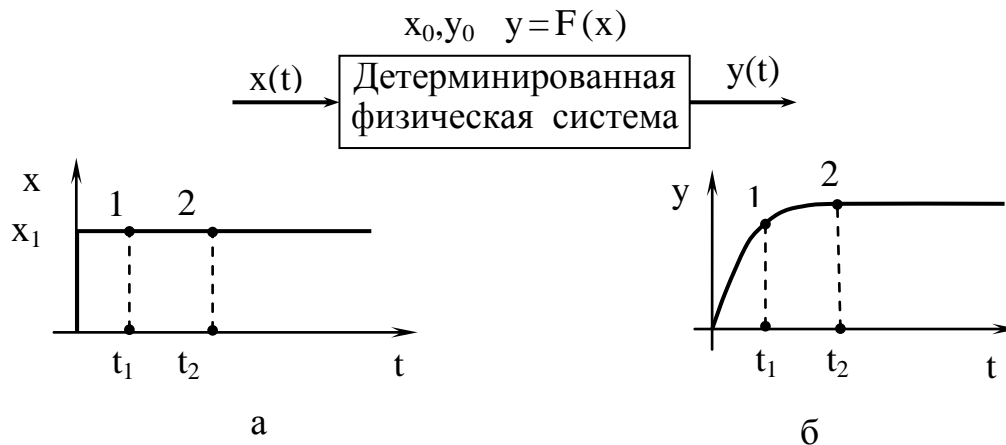


Рис. 6.1. Пример детерминированной системы: входной (а) и выходной (б) сигналы (процессы) системы

Детерминированные системы характеризуются однозначным соответствием (соотношением) между входными и выходными сигналами (процессами).

Если задан входной сигнал такой системы, известны ее характеристика $y = F(x)$, а также ее состояние в начальный момент времени, то значение сигнала на выходе системы в любой момент времени определяется однозначно (рис. 6.1).

Существует **два** подхода к исследованию физических систем: **детерминированный** и **стохастический**.

Д е т е р м и н и р о в а н н ы й п о д х о д основан на применении детерминированной математической модели физической системы.

С т о х а с т и ч е с к и й п о д х о д подразумевает использование стохастической математической модели физической системы.

С т о х а с т и ч е с к а я м а т е м а т и ч е с к а я м о д е л ь наиболее адекватно (достоверно) отображает физические процессы в реальной системе, функционирующей в условиях влияния внешних и внутренних случайных ф а к т о р о в (ш у м о в).

Перечислим внутренние и внешние случайные факторы:

внутренние факторы –

1) температурная и временная нестабильность электронных компонентов;

2) нестабильность питающего напряжения;

3) шум квантования в цифровых системах;

4) шумы в полупроводниковых приборах в результате неравномерности процессов генерации и рекомбинации основных носителей заряда;

5) тепловой шум в проводниках за счет теплового хаотического движения носителей заряда;

6) дробовой шум в полупроводниках, обусловленный случайным характером процесса преодоления носителями потенциального барьера;

7) фликкер – шум, обусловленный медленными случайными флуктуациями физико-химического состояния отдельных областей материалов электронных устройств и т. д.;

внешние –

1) внешние электрические и магнитные поля;

2) электромагнитные бури;

3) помехи, связанные с работой промышленности и транспорта;

4) вибрации;

5) влияние космических лучей, тепловое излучение окружающих объектов;

6) колебания температуры, давления, влажности воздуха;

7) запыленность воздуха и т. д.

Влияние (наличие) случайных факторов приводит к одной из ситуаций, приведенных на рис. 6.2.

Следовательно, предположение о детерминированном характере физической системы и описание ее детерминированной математической моделью является идеализацией реальной системы. Фактически имеем ситуацию, изображенную на рис. 6.3.

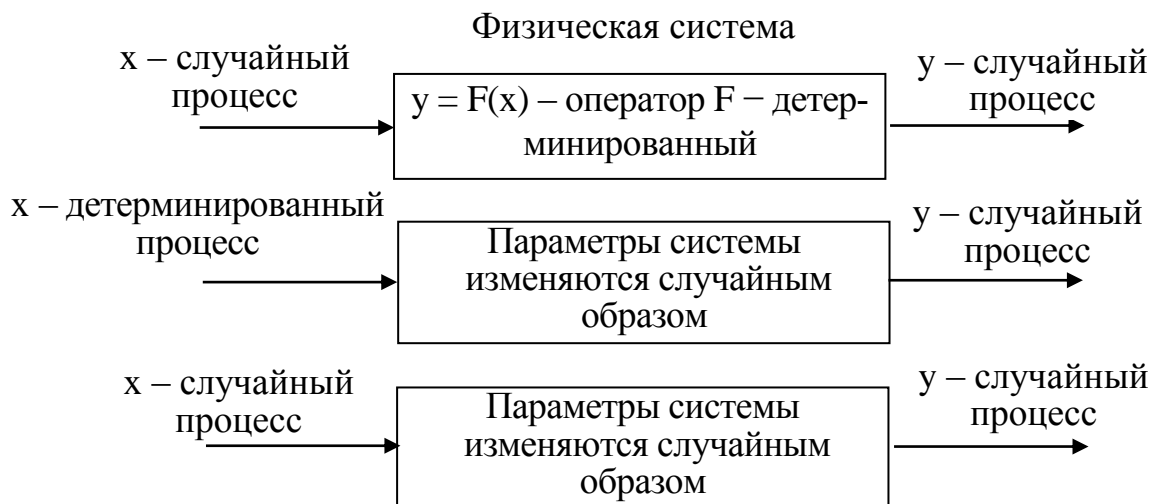


Рис. 6.2. Возможные ситуации, к которым приводит влияние на физическую систему внешних и (или) внутренних случайных факторов

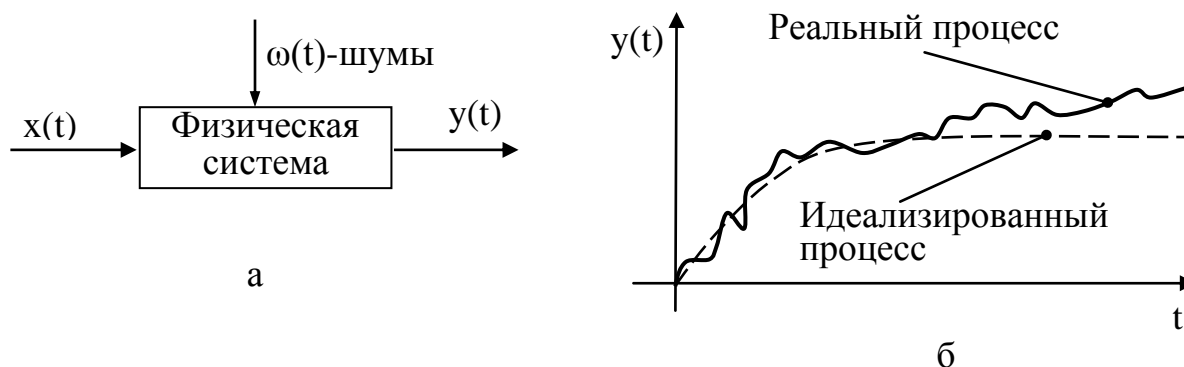


Рис. 6.3. Пример недопустимой идеализации реальной физической системы: а – реальная физическая система; б – результат моделирования (идеализированный процесс)

Детерминированная модель допустима в следующих случаях:

1) влияние случайных факторов столь незначительно, что пренебрежение ими не приведет к ощутимому искажению результатов моделирования.

2) детерминированная математическая модель отображает реальные физические процессы в усредненном смысле.

В тех задачах, где не требуется высокой точности результатов моделирования, предпочтение отдается детерминированной модели. Это объясняется тем, что реализация и анализ детерминированной математической модели много проще, чем стохастической.

Детерминированная модель недопустима в следующих ситуациях: случайные процессы $\omega(t)$ соизмеримы с детерминированными $x(t)$. Результаты, полученные с помощью детерминированной математической модели, будут неадекватными реальным процессам. Это относится к системам радиолокации, к системам наведения и управления летательными аппаратами, к системам связи, телевидению, к системам навигации, к любым системам, работающим со слабыми сигналами, в электронных устройствах контроля, в прецизионных измерительных устройствах и т. д.

В математическом моделировании случайный процесс часто рассматривают как случайную функцию времени, мгновенные значения которой являются случайными величинами.

Стохастическая математическая модель устанавливает вероятностные соотношения между входом и выходом системы. Такая модель позволяет сделать статистические выводы о некоторых вероятностных характеристиках исследуемого случайного процесса $y(t)$:

1) математическое ожидание (среднее значение):

$$m_y(t) = E[y(t)] = E_y = M\{y(t)\} = \overline{y(t)}; \quad (6.1)$$

2) дисперсия (мера рассеивания значений случайного процесса $y(t)$ относительно его среднего значения):

$$D_y(t) = E[(y(t) - \overline{y(t)})^2] = \overline{(y(t) - \overline{y(t)})^2}; \quad (6.2)$$

3) среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma_y(t) = \sqrt{D_y(t)}; \quad (6.3)$$

4) корреляционная функция (характеризует степень связи – корреляции – между значениями процесса $y(t)$, отстоящими друг от друга на время τ):

$$R_y(\tau) = E[y(t)y(t + \tau)]; \quad (6.4)$$

5) спектральная плотность случайного процесса $y(t)$:

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R_y(\tau) d\tau - \quad (6.5)$$

преобразование Фурье.

Стохастическая математическая модель формируется на основе стохастического дифференциального либо стохастического разностного уравнения.

Различают *три типа* стохастических дифференциальных уравнений: со случайными параметрами, со случайными начальными условиями, со случайным входным процессом (случайной правой частью). Приведем пример стохастического дифференциального уравнения третьего типа:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t) + \omega(t), \quad (6.6)$$

где $\omega(t)$ – аддитивный случайный процесс – входной шум.

В нелинейных системах присутствуют мультипликативные шумы $[x(t) \cdot \mu(t)]$.

Анализ стохастических моделей требует использования довольно сложного математического аппарата, особенно для нелинейных систем.

При разработке стохастической модели важное значение имеет определение характера случайного процесса $\omega(t)$. Случайный процесс может быть описан набором (последовательностью) функций распределения – одномерной, двумерной, ..., n-мерной или соответствующими плотностями распределения вероятности. В большинстве практических задач ограничиваются определением одномерного и двумерного законов распределения.

В некоторых задачах характер распределения $\omega(t)$ априорно известен.

В большинстве случаев, когда случайный процесс $\omega(t)$ представляет собой результат воздействия на физическую систему совокупности значительного числа независимых случайных факторов, полагают, что $\omega(t)$ обладает свойствами нормального (гауссовского) закона распределения. В этом случае говорят, что случайный процесс $\omega(t)$ заменяется его типовой моделью – гауссовским случайным процессом. Одномерная плотность распределения вероятности нормального (гауссовского) случайного процесса приведена на рис. 6.4.

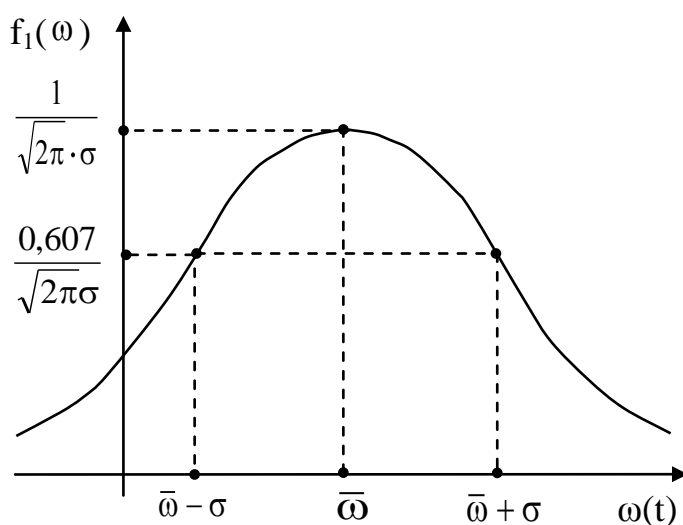


Рис. 6.4. Одномерная плотность распределения вероятности нормального (гауссовского) случайного процесса

Нормальное (гауссовское) распределение случайного процесса обладает следующими свойствами.

1. Значительное количество случайных процессов в природе подчиняются нормальному (гауссовскому) закону распределения.

2. Возможность достаточно строго определить (доказать) нормальный характер случайного процесса.

3. При воздействии на физическую систему совокупности случайных факторов с

различными законами распределения их суммарный эффект подчиняется нормальному закону распределения (центральная предельная теорема).

4. При прохождении через линейную систему нормальный процесс сохраняет свои свойства в отличие от других случайных процессов.

5. Гауссовский случайный процесс может быть полностью описан с помощью двух характеристик – математического ожидания и дисперсии.

При формировании непрерывных стохастических моделей используется понятие «случайный процесс». Разра-

ботчики разностных стохастических моделей оперируют понятием «случайная последовательность».

Особую роль в теории стохастического моделирования играют марковские случайные последовательности. Для них справедливо следующее соотношение для условной плотности вероятности:

$$f[x(t_m)|x(t_{m-1}), x(t_{m-2}), \dots, x(t_1)] = f[x(t_m)|x(t_{m-1})]. \quad (6.7)$$

Из него следует, что вероятностный закон, описывающий поведение процесса в момент времени t_m , зависит только от предыдущего состояния процесса в момент времени t_{m-1} и абсолютно не зависит от его поведения в прошлом (т. е. в моменты времени $t_{m-2}, t_{m-3}, \dots, t_1$).

Перечисленные выше внутренние и внешние случайные факторы (шумы) представляют собой случайные процессы различных классов. Другими примерами случайных процессов являются турбулентные течения жидкостей и газов, изменение нагрузки энергосистемы, питающей большое количество потребителей, распространение радиоволн при наличии случайных замираний радиосигналов, изменение координат частицы в броуновском движении, процессы отказов аппаратуры, поступления заявок на обслуживание, распределение числа частиц в малом объеме коллоидного раствора, задающее воздействие в радиолокационных следящих системах, процесс термоэлектронной эмиссии с поверхности металла и т. д.

7. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФОРМЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Математические модели в форме передаточных функций получили наибольшее применение для описания физических процессов в линейных стационарных динамических системах. Передаточные функции относятся к классу динамических моделей.

7.1. Базовые понятия

Базовым понятием в теории передаточных функций является преобразование Лапласа:

$$\mathbf{X}(s) = \int_0^{\infty} \mathbf{x}(t) e^{-st} dt, \quad (7.1)$$

которое устанавливает соответствие между функцией $x(t)$ – вещественной переменной t и функцией $X(s)$ – комплексной переменной s :

$$s = \sigma + j\omega, \quad (7.2)$$

где $x(t)$ – оригинал;

$X(s)$ – изображение (изображение по Лапласу).

Это соответствие обозначается так:

$$\mathbf{x}(t) \stackrel{\cdot}{=} \mathbf{X}(s) \quad (7.3)$$

ИЛИ

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{L}\{\mathbf{x}(t)\}. \quad (7.4)$$

Основные свойства преобразования Лапласа:

1) линейность:

$$L\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha L\{x_1(t)\} + \beta L\{x_2(t)\}; \quad (7.5)$$

2) дифференцирование:

при нулевых начальных условиях —

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0 \quad (7.6)$$

справедливо:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s X(s); \\ \mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2 X(s); \\ \\ \mathcal{L}\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s); \end{cases} \quad (7.7)$$

3) интегрирование:

$$\mathbf{L}\left\{\int_0^t \mathbf{x}(t) dt\right\} = \frac{\mathbf{X}(s)}{s}; \quad (7.8)$$

4) теорема запаздывания:

$$L\{x(t - \tau)\} = e^{-s\tau} X(s); \quad (7.9)$$

5) теорема о свертке:

$$L\left\{\int_0^t x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau\right\} = L\left\{\int_0^t x_2(\tau) x_1(t - \tau) d\tau\right\} = X_1(s) X_2(s), \quad (7.10)$$

где $\int_0^t x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$, $\int_0^t x_2(\tau) x_1(t - \tau) d\tau$ – свертка функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ (интеграл свертывания).

7.2. Передаточная функция в форме изображений Лапласа

Пусть физическая система (см. рис. 4.1) описывается математической моделью в форме линейного дифференциального уравнения

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_1 x'(t) + b_0 x(t) \quad (7.11)$$

при нулевых начальных условиях:

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Применим преобразование Лапласа:

$$L\{a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y\} = L\{b_1 x' + b_0 x\}. \quad (7.12)$$

Используя свойства линейности и дифференцирования оригинала, получим:

$$a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_1 s X(s) + b_0 X(s) \quad (7.13)$$

или

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_1 s + b_0) X(s). \quad (7.14)$$

Соотношение (7.14) представляет собой алгебраическое уравнение относительно изображений.

Выразим отношение изображения выходной величины $Y(s)$ системы к изображению входной величины $X(s)$:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = W(s), \quad (7.15)$$

где $W(s)$ – передаточная функция системы в форме изображений Лапласа.

Рассмотрим физическую систему с двумя входами (рис. 7.1).

Если физическая система имеет несколько входов, то она может быть описана несколькими передаточными функциями по каждому входу.

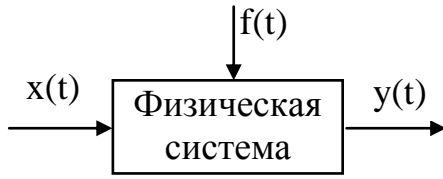


Рис. 7.1. Физическая система с двумя входами

При определении передаточной функции относительно одной из входных величин остальные входные величины полагаются равными нулю.

Пусть физическая система описывается математической моделью вида:

$$a_3 y'''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 x''(t) + b_0 x(t) + c_0 f(t) \quad (7.16)$$

при нулевых начальных условиях.

Перейдем к изображениям Лапласа:

$$(a_3 s^3 + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_2 s^2 + b_0) X(s) + c_0 F(s). \quad (7.17)$$

Положим $F(s) = 0$, тогда передаточная функция относительно входа $x(t)$

$$W_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_0}{a_3 s^3 + a_1 s + a_0}. \quad (7.18)$$

Положим $X(s) = 0$, тогда передаточная функция относительно входа $f(t)$

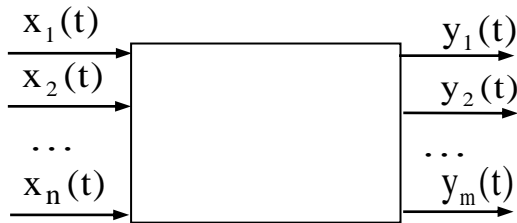


Рис. 7.2. Линейная система с n входами и m выходами

$$W_2(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{c_0}{a_3 s^3 + a_1 s + a_0}. \quad (7.19)$$

Для линейной физической системы с несколькими входами и выходами (рис. 7.2) передаточная функция превращается в матричную передаточную функцию:

$$W(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \cdots & W_{1m}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \cdots & W_{2m}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{n1}(s) & W_{n2}(s) & \cdots & W_{nm}(s) \end{bmatrix}, \quad (7.20)$$

где

$$W_{ij}(s) = \frac{Y_j(s)}{X_i(s)} - \quad (7.21)$$

передаточная функция между i -м входом и j -м выходом.

7.3. Передаточная функция в операторной форме

Передаточная функция в операторной форме получается формальным путем из дифференциального уравнения исследуемой динамической системы.

Пусть физическая система описывается линейной стационарной математической моделью вида:

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_1 x'(t) + b_0 x(t). \quad (7.22)$$

Введем оператор $p = \frac{d}{dt}$, обозначающий операцию дифференцирования.

Сделаем подстановку его в дифференциальное уравнение (7.22):

$$a_2 p^2 y(t) + a_1 p y(t) + a_0 y(t) = b_1 p x(t) + b_0 x(t) \quad (7.23)$$

или

$$(a_2 p^2 + a_1 p + a_0) y(t) = (b_1 p + b_0) x(t). \quad (7.24)$$

Введем понятие операторов:

$$A(p) = a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \quad (7.25)$$

$$B(p) = b_1 p + b_0. \quad (7.26)$$

Сделаем подстановку выражений (7.25) и (7.26) в уравнение (7.24):

$$A(p) y(t) = B(p) x(t). \quad (7.27)$$

Соотношение (7.27) представляет собой запись дифференциального уравнения (7.22) в операторной форме.

Передаточная функция в операторной форме может быть получена как отношение двух полиномов:

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}. \quad (7.28)$$

Тогда дифференциальное уравнение (7.22) можно записать в виде:

$$y(t) = W(p)x(t). \quad (7.29)$$

Передаточные функции $W(s)$ и $W(p)$ могут служить достоверным математическим описанием физической системы только при нулевых начальных условиях.

Для стационарных систем передаточные функции в форме изображения Лапласа $W(s)$ и в операторной форме $W(p)$ совпадают. На этом основании при рассмотрении линейных стационарных систем будем оперировать обобщенным термином «передаточная функция $W(p)$ », полагая, что p – комплексная переменная.

Значение переменной p , при котором функция $W(p)$ обращается в нуль, называется нулем передаточной функции. Значение p , при котором функция $W(p)$ обращается в бесконечность, называется полюсом передаточной функции.

Если приравнять к нулю полином числителя передаточной функции $W(p)$:

$$B(p) = 0, \quad (7.30)$$

то корни уравнения (7.30) будут являться нулями $W(p)$.

Если приравнять к нулю полином знаменателя передаточной функции системы $W(p)$:

$$A(p) = 0, \quad (7.31)$$

то корни уравнения (7.31) будут являться полюсами $W(p)$.

По расположению нулей и полюсов на комплексной плоскости делают вывод о свойствах исследуемой системы.

Передаточная функция является самой компактной математической моделью, описывающей динамические свойства системы, и дает исчерпывающую характеристику взаимосвязи – «вход – выход».

7.4. Элементарные типовые звенья физических систем

Исследуемая физическая система может быть представлена в виде совокупности элементарных типовых звеньев. Этот прием лежит в основе разработки и анализа автоматических систем.

Элементарные типовые звенья могут рассматриваться в качестве моделей реальных функциональных элементов различной физической природы, разных принципов действия и конструктивного выполнения, но имеющих сходное математическое описание взаимосвязи «вход – выход».

Рассмотрим некоторые элементарные типовые звенья.

Пропорциональное (усилительное, безынерционное) звено. Передаточная функция $W(p) = k$.

Уравнение, связывающее мгновенные значения входной и выходной величин: $y(t) = kx(t)$. Реакция звена $y(t)$ на единичное ступенчатое воздействие $x(t)$ показана на рис. 7.3.

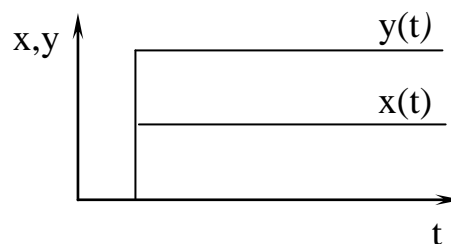


Рис. 7.3. Реакция пропорционального звена на единичное входное воздействие

Примеры функциональных элементов, моделируемых пропорциональным (усилительным) звеном: электронный усилитель, работающий на линейном участке характеристики в режиме малого сигнала (рис. 7.4), редуктор (рис. 7.5).

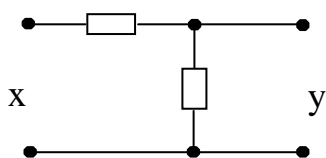


Рис. 7.4. Электронный усилитель

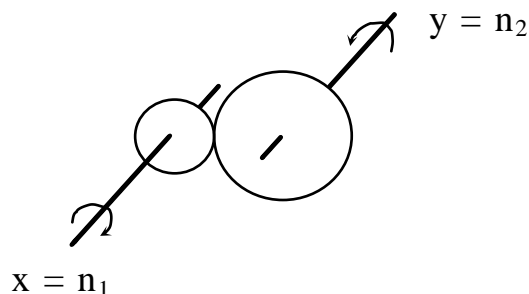


Рис. 7.5. Редуктор

Инерционное (аперiodическое) звено. Передаточная функция $W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$, где k – передаточный коэффициент; T – постоянная времени, характеризующая инерционные свойства звена.

Реакция звена на единичное ступенчатое воздействие показана на рис. 7.6.

Примеры функциональных элементов, моделируемых инерционным (апериодическим) звеном: электрический пассивный четырехполюсник (рис. 7.7), электрическая цепь (рис. 7.8), электрический генератор постоянного тока (рис. 7.9).

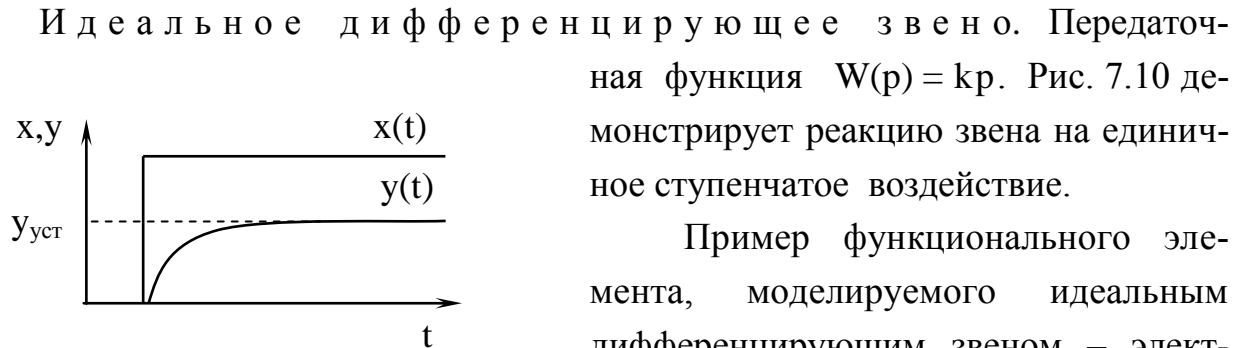


Рис. 7.6. Реакция инерционного звена на единичное ступенчатое воздействие

Пример функционального элемента, моделируемого идеальным дифференцирующим звеном – электрический тахогенератор, у которого в качестве входной переменной $x(t)$ принимается угол поворота φ его вала (рис. 7.11).

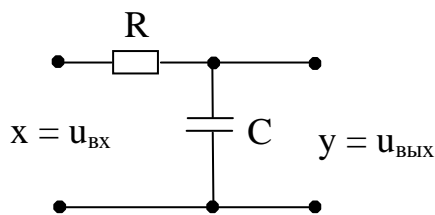


Рис. 7.7. Пассивный четырехполюсник

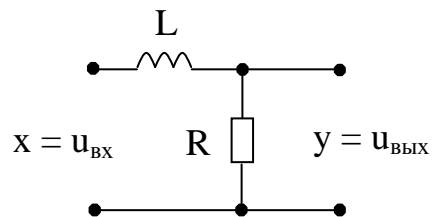


Рис. 7.8. Электрическая цепь

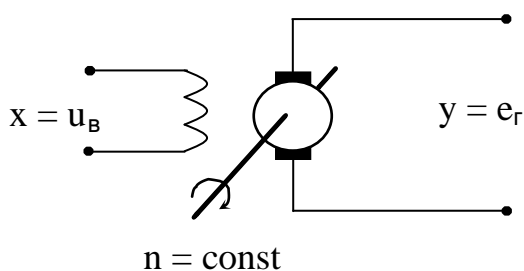


Рис. 7.9. Электрический генератор постоянного тока: u_B – напряжение возбуждения; e_r – ЭДС, наводимая в обмотке якоря генератора

Интегрирующее звено. Передаточная функция $W(p) = \frac{k}{p}$.

Рис. 7.12 демонстрирует реакцию звена на единичное ступенчатое воздействие.

Интегрирующие свойства присущи таким объектам, в которых происходит накопление вещества или энергии без ее одновременной

отдачи в окружающую среду.

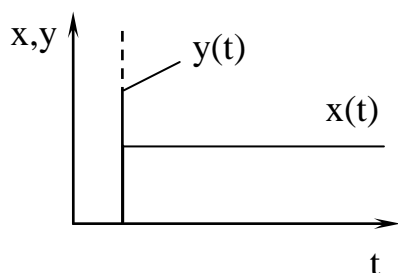


Рис. 7.10. Реакция идеального дифференцирующего звена на единичное ступенчатое воздействие

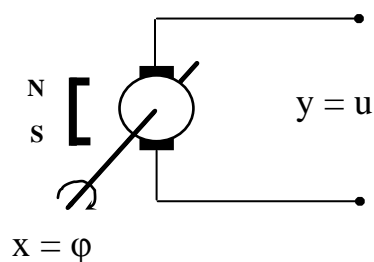


Рис. 7.11. Электрический тахогенератор

Примеры функциональных элементов, моделируемых интегрирующим звеном: конденсатор (рис. 7.13), резервуар с жидкостью (рис. 7.14), гидравлический механизм (рис. 7.15).

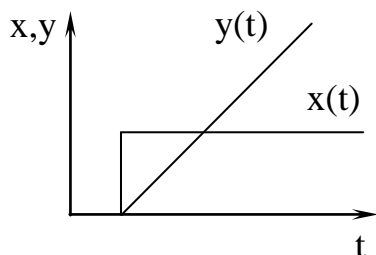


Рис. 7.12. Реакция интегрирующего звена на единичное ступенчатое воздействие

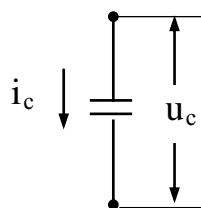


Рис. 7.13. Конденсатор:

$$u_c = \frac{1}{C} \int i_c dt; \quad x = i_c; \quad y = u_c$$

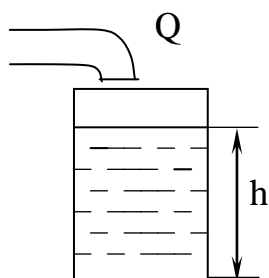


Рис. 7.14. Резервуар с жидкостью:
Q – подача жидкости, м³/с;
h – уровень жидкости; x = Q; y = h

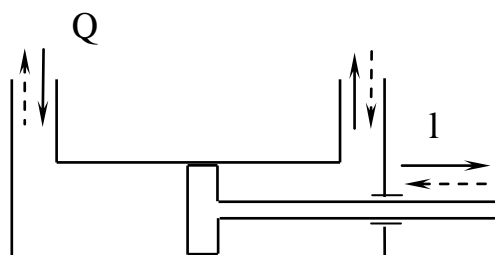


Рис. 7.15. Гидравлический механизм: Q – подача жидкости;
l – перемещение; x = Q; y = l

Апериодическое звено 2-го порядка (инерционное). Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}. \quad (7.32)$$

Рис. 7.16 демонстрирует реакцию звена на единичное ступенчатое воздействие. При $T_1 \leq 2T_2$ апериодическое звено превращается в колебательное.

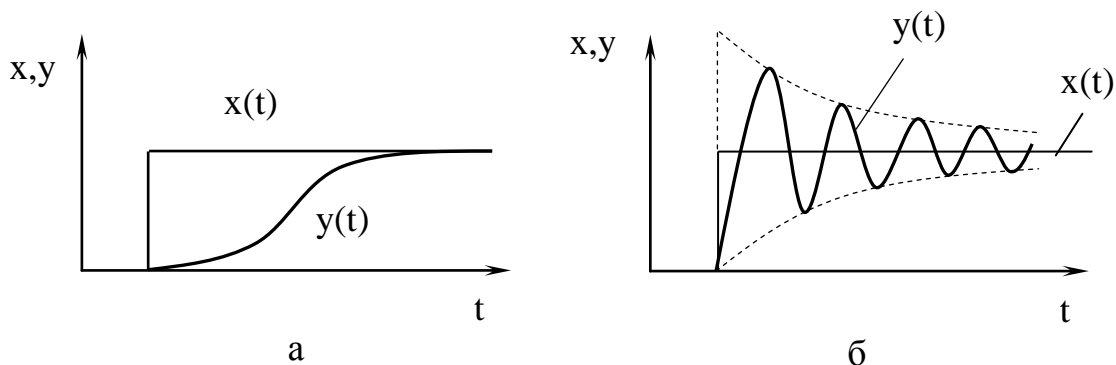


Рис. 7.16. Реакция апериодического звена 2-го порядка на единичное ступенчатое воздействие:
а – при $T_1 \geq 2T_2$; б – при $T_1 < 2T_2$

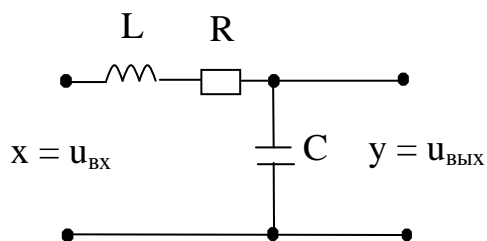


Рис. 7.17. Колебательный контур

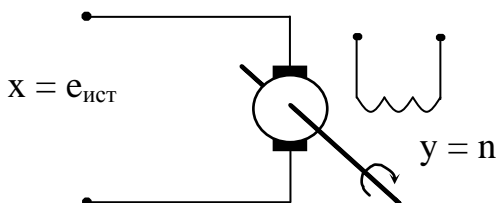


Рис. 7.18. Электрический двигатель постоянного тока с независимым возбуждением: $e_{ист}$ – ЭДС, подводимая от источника регулируемого напряжения; n – частота вращения вала; $u_B = \text{const}$

Примеры функциональных элементов, моделируемых апериодическим (инерционным) звеном: колебательный контур (рис. 7.17), электрический двигатель постоянного тока с независимым возбуждением (рис. 7.18), механическая система (рис. 7.19).

Динамическая система, которая может быть представлена как совокупность элементарных типовых звеньев, графически изображается в виде структурной схемы.

Для того чтобы определить передаточную функцию исследуемой динамической системы, следует преобразовать ее структурную схему по специальным правилам и законам.

Математическая модель в форме передаточной функции с помощью известных приемов может быть преобразована в модель в виде дифференциального уравнения n -го порядка.

Математический аппарат передаточных функций широко применяется на этапе проектирования магнитных и полупроводниковых элементов автоматики для систем автоматического управления и контроля.

Пример 27. При исследовании тепловых режимов проектируемых технических устройств используется динамическая тепловая модель. Пример такой модели представлен на рис. 7.20.

Математическая модель в форме передаточной функции легко преобразуется в математическую модель в частотной области – амплитудно-частотную и фазочастотную функции.

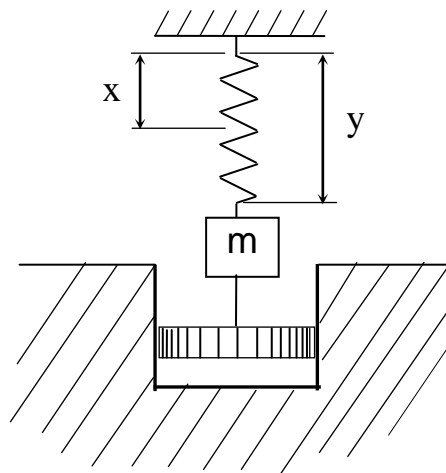


Рис. 7.19. Механическая система:
 x – исходное растяжение пружины (без груза); y – растяжение пружины при подвешенном грузе

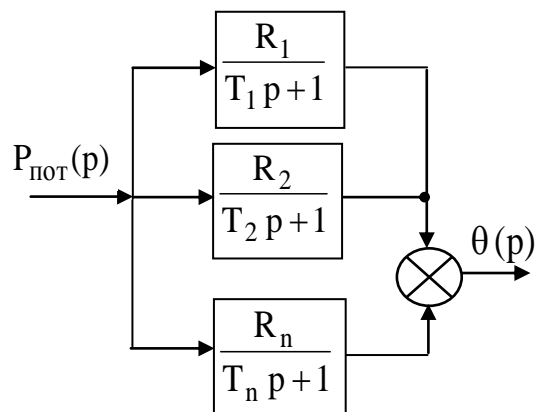


Рис. 7.20. Тепловая модель:
 θ_i – температура i -го элемента конструкции; R_i – тепловое сопротивление; C_i – теплоемкость;
 $P_{\text{пот}}(p)$ – мощность потерь;
 $\theta(p) = \sum \theta_i(p)$; $T = f(R_i, C_i)$

8. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

8.1. Основные понятия

Динамическая система – это физическая система, состояние которой изменяется во времени под действием входных сигналов и (или) возмущений.

Состояние динамической системы полностью и однозначно определяется совокупностью переменных состояния $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Состояние системы в момент времени t_1 может быть определено, если известны состояние ее в момент времени $t_0 < t_1$ и значение входного воздействия в момент времени t_1 .

Пространство состояний – это пространство, в котором каждой точке соответствует определенное состояние системы, а положение этой точки определяется значениями переменных состояния.

Вектор состояния – это совокупность переменных состояния:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \| x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t) \|^T \quad (8.1)$$

n -мерный вектор.

Начальное состояние системы характеризуется начальным вектором состояния:

$$X(t_0) = X_0 = \| x_1(t_0) \quad x_2(t_0) \quad \dots \quad x_n(t_0) \|^T. \quad (8.2)$$

Трёхмерное пространство состояний. Вектор состояния

$$X(t) = \| x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t) \|^T. \quad (8.3)$$

Координатами вектора состояния $X(t)$ являются три переменных состояния: x_1, x_2, x_3 .

Конец вектора состояния $X(t)$ при изменении времени t описывает кривую, которая называется фазовой траекторией (рис. 8.1). Таким образом, фазовая траектория отображает процесс изменения состояния системы во времени.

Вектор состояния $X(t)$ будет полностью и однозначно определять состояние физической системы только в том случае, если его размерность будет равна размерности системы.

Выбор переменных состояния для физической системы неоднозначен, т. е. для одной системы возможны различные комбинации переменных состояния.

Уравнение состояния системы – динамическая модель (модель динамики системы) – описывает поведение динамической системы, оно представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме или в форме Коши.

Уравнение состояния системы в векторно-матричной форме имеет вид:

$$\dot{X} = f(X, u, t), \quad (8.4)$$

где X – n -мерный вектор состояния;

t – независимая переменная;

u – вектор входных воздействий (в общем случае),

$$u = \| u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_m \|. \quad (8.5)$$

Уравнение (8.4) описывает динамическую систему. Решение уравнения (8.4) представляет собой математическую модель процесса $X(t)$, имеющего место в данной системе при заданных начальных условиях $X(t_0) = X_0$ и входном воздействии $u(t)$. Таким образом, в системе может рассматриваться множество процессов, соответствующих заданному множеству начальных условий и множеству входных воздействий.

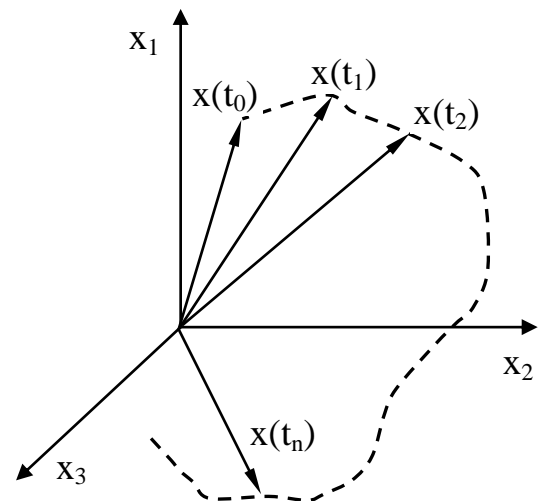


Рис. 8.1. Фазовая траектория в трехмерном пространстве состояний

Достоинства математического описания физических систем в пространстве состояний:

возможность с единой позиции рассматривать стационарные и нестационарные, линейные и нелинейные системы;

возможность учитывать ненулевые начальные условия;

наличие достаточного количества численных методов реализации таких математических моделей;

возможность более разностороннего изучения физической системы путем формирования нескольких моделей в разных пространствах состояний.

8.2. Линейные непрерывные детерминированные системы

Уравнение состояния линейной непрерывной детерминированной динамической системы при $X(t_0) = X_0$ имеет вид:

$$\dot{X}(t) = F(t)X(t) + G(t)u(t), \quad (8.6)$$

где $F(t)$ – матрица коэффициентов размерности $n \times n$;

$G(t)$ – вектор коэффициентов (n -мерный);

$u(t)$ – входное воздействие.

Динамическая модель (8.6) может быть отображена с помощью структурной схемы (рис. 8.2). Двойные стрелки на рис. 8.2 отображают векторный характер сигналов.

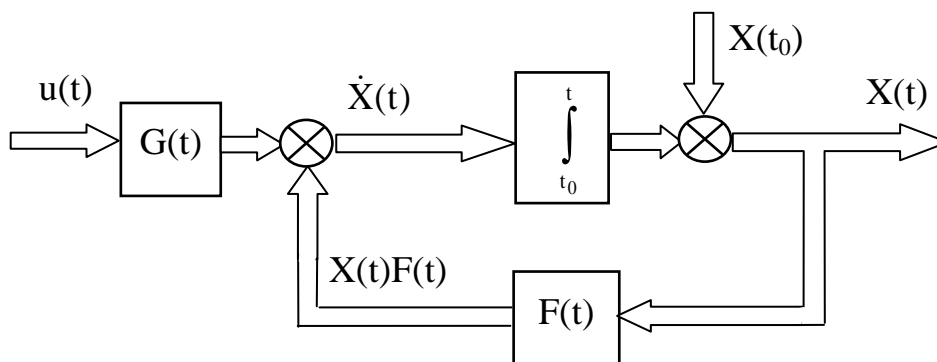


Рис. 8.2. Структурная схема динамической модели

Вектор состояния $X(t)$ определяется путем решения уравнения состояния (8.6):

$$X(t) = \Phi(t, t_0) X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) G(\tau) u(\tau) d\tau, \quad (8.7)$$

где $\Phi(t, t_0)$ – переходная матрица состояний размерности $n \times n$, которая определяется путем решения дифференциального уравнения

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = F(t) \Phi(t, t_0), \quad (8.8)$$

при начальных условиях:

$$\Phi(t_0, t_0) = I, \quad (8.9)$$

где I – единичная матрица, и замене t_0 на τ .

Стационарная динамическая система. Уравнение состояния стационарной системы имеет вид:

$$\dot{X}(t) = FX(t) + Gu(t), \quad (8.10)$$

где F и G не зависят от времени.

Решение уравнения (8.10) значительно упрощается.

Переходная матрица состояний определяется так:

$$\Phi(t) = \underbrace{e^{Ft}}_{\text{матричная экспонента}}, \quad (8.11)$$

где

$$e^{Ft} = I + Ft + \frac{1}{2!} F^2 t^2 + \frac{1}{3!} F^3 t^3 + \dots + \frac{1}{n!} F^n t^n - \quad (8.12)$$

экспоненциальный ряд.

Тогда

$$\Phi(t, t_0) = e^{F(t-t_0)} = \Phi(t - t_0); \quad (8.13)$$

$$\Phi(t, \tau) = e^{F(t-\tau)} = \Phi(t - \tau). \quad (8.14)$$

Решение динамической модели (8.10) запишется в виде:

$$X(t) = e^{F(t-t_0)} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau) d\tau. \quad (8.15)$$

При определении матричной экспоненты можно ограничиться первыми четырьмя членами ряда (8.12), что обеспечит достаточную точность результата при малых значениях $(t-t_0)$.

8.3. Формирование математической модели в пространстве состояний по дифференциальному уравнению n -го порядка

В а р и а н т 1. Пусть физическая система описывается дифференциальным уравнением:

$$a_3 \ddot{y}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_2 \ddot{u}(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t). \quad (8.16)$$

Введем оператор $p = \frac{d}{dt}$. Вынесем функции y и u за скобки. Тогда уравнение (8.16) примет вид:

$$(a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) y = (b_2 p^2 + b_1 p + b_0) u. \quad (8.17)$$

Введем обозначения:

$$(a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) = A(p); \quad (8.18)$$

$$(b_2 p^2 + b_1 p + b_0) = B(p). \quad (8.19)$$

Получим:

$$A(p)y = B(p)u. \quad (8.20)$$

Умножим обе части уравнения (8.20) на $\frac{1}{A(p)B(p)}$, после чего введем обозначение x_1 :

$$\frac{y}{B(p)} = \frac{u}{A(p)} = x_1. \quad (8.21)$$

Тогда

$$u = A(p)x_1 = (a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0)x_1. \quad (8.22)$$

Введем еще обозначения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3. \end{cases} \quad (8.23)$$

Сделаем подстановку обозначений (8.23) в выражение (8.22):

$$u = a_3 \dot{x}_3 + a_2 \dot{x}_2 + \dots + a_1 \dot{x}_1 + a_0 x_1 \quad (8.24)$$

или

$$u = a_3 \dot{x}_3 + a_2 x_3 + a_1 x_2 + a_0 x_1, \quad (8.25)$$

откуда выразим \dot{x}_3 :

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{a_3}(a_2 x_3 + a_1 x_2 + a_0 x_1) + \frac{1}{a_3} u. \quad (8.26)$$

Объединяя уравнения (8.26) и (8.23), получим систему уравнений в нормальной форме или в форме Коши, т. е. уравнения состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \dot{x}_3 = -\frac{1}{a_3}(a_2 x_3 + a_1 x_2 + a_0 x_1) + \frac{1}{a_3} u \end{cases} \quad (8.27)$$

или уравнение состояния в векторно-матричной форме при $X(t_0) = X_0$:

$$\dot{X}(t) = FX(t) + Gu(t), \quad (8.28)$$

где

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_3} & -\frac{a_1}{a_3} & -\frac{a_2}{a_3} \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a_3} \end{bmatrix}.$$

В а р и а н т 2. Пусть физическая система описывается дифференциальным уравнением:

$$\ddot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) + a_1 y(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t). \quad (8.29)$$

Введем обозначение:

$$y(t) = x_1(t) = x_1, \quad (8.30)$$

сделаем подстановку обозначения (8.30) в уравнение (8.29):

$$\ddot{x}_1 + a_2 \ddot{x}_1 + a_1 \dot{x}_1 + a_0 x_1 = b_0 u. \quad (8.31)$$

Члены уравнения (8.31), не содержащие производных, сгруппируем в правой части уравнения:

$$\ddot{x}_1 + a_2 \ddot{x}_1 + a_1 \dot{x}_1 = -a_0 x_1 + b_0 u. \quad (8.32)$$

Введем обозначение:

$$\dot{x}_3 = -a_0 x_1 + b_0 u, \quad (8.33)$$

сделаем подстановку обозначения (8.33) в уравнение (8.32) и проинтегрируем полученное выражение:

$$\ddot{x}_1 + a_2 \dot{x}_1 + a_1 x_1 = x_3. \quad (8.34)$$

Сгруппируем в правой части уравнения (8.34) члены, не содержащие производных:

$$\ddot{x}_1 + a_2 \dot{x}_1 = -a_1 x_1 + x_3. \quad (8.35)$$

Введем обозначение:

$$\dot{x}_2 = -a_1 x_1 + x_3. \quad (8.36)$$

Сделаем подстановку обозначения (8.36) в уравнение (8.35) и проинтегрируем полученное выражение:

$$\dot{x}_1 + a_2 x_1 = x_2. \quad (8.37)$$

Из уравнения (8.37) выразим \dot{x}_1 :

$$\dot{x}_1 = -a_2 x_1 + x_2. \quad (8.38)$$

Объединив уравнения (8.33), (8.36) и (8.38), получим систему уравнений состояния в форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_2 x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 = -a_1 x_1 + x_3; \\ \dot{x}_3 = -a_0 x_1 + b_0 u \end{cases} \quad (8.39)$$

или в векторно-матричной форме при $X(t_0) = X_0$:

$$\dot{X}(t) = FX(t) + Gu(t), \quad (8.40)$$

где

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

8.4. Формирование математической модели в пространстве состояний по передаточной функции системы

В подразд. 8.3 были представлены способы формирования двух вариантов математической модели в пространстве состояний.

Рассмотрим прием формирования третьего варианта модели в пространстве состояний по известной передаточной функции исследуемой физической системы.

Пусть для линейной непрерывной стационарной системы известна (определена) передаточная функция

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}. \quad (8.41)$$

Определим полюсы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ передаточной функции $W(p)$, которые являются корнями полинома знаменателя $A(p)$:

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0. \quad (8.42)$$

Степень полинома $A(p)$ соответствует порядку формируемой модели в пространстве состояний и, следовательно, количеству переменных состояния x_i .

Тогда уравнения состояния данной системы можно представить в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + u; \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + u; \\ \dot{x}_3 = \lambda_3 x_3 + u \end{cases} \quad (8.43)$$

или в векторно-матричной форме при $X(t_0) = X_0$:

$$\dot{X}(t) = FX(t) + Gu(t), \quad (8.44)$$

где

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8.5. Пример формирования математической модели в пространстве состояний для исследования процессов в электрической цепи

В электрических цепях в качестве переменных состояния принято рассматривать мгновенные значения напряжений на емкостях и токов через индуктивности. Это обусловлено тем, что мгновенные значения напряжений на емкостях и токов через индуктивности удовлетворяют следующим требованиям:

- полностью определяют состояние цепи в любой момент времени;
- являются линейно-независимыми;
- однозначно определяют запас энергии в цепи;
- по ним могут быть определены любые другие токи и напряжения.

П р а в и л о 1. Количество переменных состояния системы равно количеству реактивных элементов в цепи.

П р а в и л о 2. Токи тех ветвей цепи, которые не содержат реактивных элементов, не должны входить в систему уравнений состояния, их следует исключать.

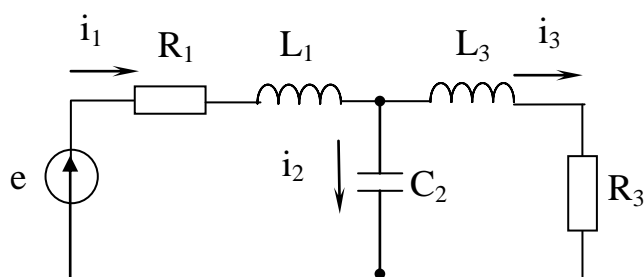


Рис. 8.3. Объект моделирования – электрическая цепь

Пример 28. Рассмотрим электрическую цепь третьего порядка (рис. 8.3). В качестве переменных состояния примем:

$$\begin{cases} x_1(t) \rightarrow i_1(t); \\ x_2(t) \rightarrow u_{C_2}(t); \\ x_3(t) \rightarrow i_3(t). \end{cases} \quad (8.45)$$

Следовательно, вектор состояния

$$X(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) & u_{C_2}(t) & i_3(t) \end{bmatrix}^T. \quad (8.46)$$

Согласно законам Кирхгофа

$$\begin{cases} i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + u_{C_2} = e; \\ L_3 \frac{di_3}{dt} + i_3 R_3 = u_{C_2}; \\ i_1 = i_2 + i_3. \end{cases} \quad (8.47)$$

Исключим все неизвестные, не являющиеся переменными состояния. Для этого ток i_2 выразим через u_{C_2} :

$$i_2 = C_2 \frac{du_{C_2}}{dt} \quad (8.48)$$

и сделаем подстановку выражения (8.48) в систему (8.47):

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} = e - i_1 R_1 - u_{C_2}; \\ L_3 \frac{di_3}{dt} = u_{C_2} - i_3 R_3; \\ C_2 \frac{du_{C_2}}{dt} = i_1 - i_3. \end{cases} \quad (8.49)$$

Приведем систему уравнений (8.49) к форме Коши (к нормальной форме). Уравнения запишем в порядке, соответствующем индексу переменных состояния:

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L_1} e - \frac{R_1}{L_1} i_1 - \frac{1}{L_1} u_{C_2}; \\ \frac{du_{C_2}}{dt} = \frac{1}{C_2} i_1 - \frac{1}{C_2} i_3; \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{1}{L_3} u_{C_2} - \frac{R_3}{L_3} i_3 \end{cases} \quad (8.50)$$

или в векторно-матричной форме при заданных начальных условиях $i_1(0); u_{C_2}(0); i_3(0)$:

$$\dot{X}(t) = FX(t) + Gu(t), \quad (8.51)$$

где

$$u(t) = e; \quad \dot{X}(t) = \left\| \frac{di_1}{dt} \quad \frac{du_{C_2}}{dt} \quad \frac{di_3}{dt} \right\|^T; \quad G(t) = \left\| \frac{1}{L_1} \quad 0 \quad 0 \right\|^T;$$

$$F = \left\| \begin{array}{ccc} -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L_3} & -\frac{R_3}{L_3} \end{array} \right\|.$$

Уравнение (8.51) решается любым численным методом.

В большинстве задач невозможно получить сразу готовую систему уравнений состояния, так как в каждом уравнении присутствуют производные нескольких переменных состояния и обычным путем они не разделяются. В таких задачах предлагается поступить следующим образом. Производные переменных состояния принимают за искомые величины $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Остальные члены уравнений принимают за свободные члены. В результате исходная система решается как обычная система линейных алгебраических уравнений соответствующим методом решения СЛАУ.

8.6. Линейные дискретные детерминированные системы

Уравнение состояния, или дискретная динамическая модель имеет вид:

$$X(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)X(t_k) + \Gamma(t_{k+1}, t_k)u(t_k), \quad (8.52)$$

где X – вектор состояния, определенный только в дискретные моменты времени t_k при $k = 0, 1, 2, \dots$;

$\Phi(t_{k+1}, t_k)$ – переходная матрица состояния размерности $n \times n$;

$\Gamma(t_{k+1}, t_k)$ – переходная матрица входного воздействия размерности $n \times 1$;

$u(t_k)$ – входная последовательность при начальных условиях $X(t_0) = X_0$.

Модель (8.52) можно записать в сокращенном виде:

$$X(k+1) = \Phi(k+1, k) X(k) + \Gamma(k+1, k) u(k). \quad (8.53)$$

Вектор состояния $X(k)$ определяется путем решения уравнения состояния (8.53):

$$X(k) = \Phi(k, 0) X(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k, i) \Gamma(k, i) u(i), \quad (8.54)$$

где $X(0) = X(t_0)$.

В некоторых задачах при исследовании непрерывных физических систем предпочитают перейти от непрерывной динамической модели к дискретной. В основе процедуры дискретизации непрерывной модели лежит тесная взаимосвязь дифференциальных и разностных уравнений.

9. ДРУГИЕ ВИДЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

9.1. Переходная функция

Переходная функция $h(t)$ представляет собой реакцию динамической системы на единичное ступенчатое воздействие (рис. 9.1):

$$x(t) = l(t), \quad (9.1)$$

$$\text{где } l(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

при нулевых начальных условиях.

Математическое выражение для $h(t)$ определяется путем решения дифференциального уравнения, описывающего данную

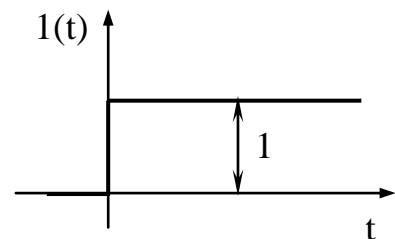


Рис. 9.1. Единичное ступенчатое воздействие

физическую систему при нулевых начальных условиях

$$y(-0) = y'(-0) = y''(-0) = \dots = y^{(n)}(-0) = 0. \quad (9.2)$$

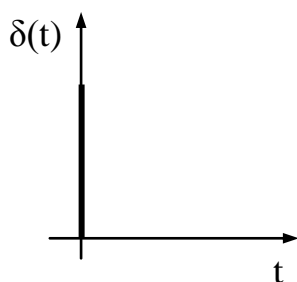
Зная переходную функцию динамической системы, можно определить ее реакцию на произвольное входное воздействие $x(t)$ на основе интеграла Дюамеля – Карсона

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t x'(\tau)h(t-\tau) d\tau. \quad (9.3)$$

9.2. Импульсная переходная функция

И м п у л ь с н а я п е р е х о д н а я ф у н к ц и я $\omega(t)$ представляет собой реакцию физической системы на входное воздействие вида

$$x(t) = \delta(t), \quad (9.4)$$



где $\delta(t)$ – д е л ь т а - ф у н к ц и я:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0; \\ \infty & \text{при } t = 0, \end{cases} \quad (9.5)$$

Рис. 9.2. Дельта-функция

$$\begin{cases} \delta(t) = \frac{dl(t)}{dt}; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \end{cases} \quad (9.6)$$

Таким образом, дельта-функцию можно рассматривать как импульс, имеющий бесконечно большую высоту, бесконечно малую длительность и единичную площадь (рис. 9.2). Переходная функция $h(t)$ и импульсная переходная функция $\omega(t)$ связаны между собой соотношениями:

$$\begin{cases} h(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau; \\ \omega(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \end{cases} \quad (9.7)$$

Зная импульсную переходную функцию динамической системы, можно определить ее реакцию на любое входное воздействие $x(t)$. Для этого используется интеграл свертки

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\tau) \omega(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} x(t - \tau) \omega(\tau) d\tau = \int_0^t x(t - \tau) \omega(\tau) d\tau. \quad (9.8)$$

10. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

В частотной области для исследования динамических (передаточных) свойств физических систем используют математические модели в форме частотных характеристик.

Частотные характеристики позволяют оценить реакцию системы на входной гармонический сигнал любой частоты, а также на сумму гармонических сигналов различной частоты в установившемся режиме.

Для стационарной линейной динамической системы модель, связывающая выходной и входной сигналы в частотной области, может быть представлена в виде частотной передаточной функции:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}, \quad (10.1)$$

где $Y(j\omega)$ и $X(j\omega)$ – преобразования Фурье соответственно выходного и входного сигналов системы.

Частотную передаточную функцию можно выразить в показательной форме

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (10.2)$$

где $A(\omega)$ – модуль частотной передаточной функции, называемый амплитудной частотной функцией;

$\varphi(\omega)$ – аргумент частотной передаточной функции, называемый фазовой частотной функцией.

Амплитудная частотная функция $A(\omega)$ характеризует зависимость отношения амплитуд установившегося выходного и входного сигналов системы от частоты ω .

Фазовая частотная функция $\varphi(\omega)$ отражает зависимость фазового сдвига между выходным и входным сигналами системы от частоты ω .

Частотные характеристики используют для исследования устойчивости систем, для оценивания качества переходных процессов в них.

11. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФОРМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Физические явления, в основе которых лежат законы сохранения массы, импульса, энергии, математически отображаются с помощью интегральных уравнений.

Исследование физических систем, процессы в которых подчиняются законам газовой динамики, гидродинамики, электродинамики, квантовой механики и ряду других, приводит к математическим моделям в форме интегральных уравнений. Математический аппарат интегральных уравнений применяется в теории автоматического управления, в теории оптимальной фильтрации, в спектроскопии, акустике, в теории надежности и др.

Общий вид интегрального уравнения:

$$\int_a^b K(x, s, y(s)) ds = f(x, y(x)), \quad a \leq x \leq b, \quad (11.1)$$

где $K(x, s, y(s))$ – ядро интегрального уравнения;

x – независимая переменная;

$y(x)$ – искомая функция;

s – переменная интегрирования;

$f(x, y(x))$ – заданная функция.

Интегральные уравнения в отличие от дифференциальных не содержат производных искомой функции и, следовательно, не накладывают жестких ограничений на гладкость решения.

Приведем несколько примеров математических моделей в форме интегральных уравнений.

Пример 29. При проектировании деталей и устройств для железнодорожного транспорта, машиностроения, радиоэлектронной аппаратуры проводится исследование напряженно-деформированных состояний создаваемых конструкций. Это необходимо для оценки прочности, долговечности, виброустойчивости изделий.

Анализ напряжений и упругих деформаций в исследуемой физической системе может быть осуществлен на основе следующей математической модели:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E} \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (11.2)$$

где E – модуль упругости;

$K(t-\tau)$ – функция влияния напряжения $\sigma(t)$ в момент τ на деформацию $\varepsilon(t)$ в момент t .

Пример 30. Решение ряда научных и технических задач (теплотехника, ракетная техника, метеорология, гелиотехника и т. д.) связано с изучением процесса лучистого теплообмена в исследуемой системе твердых тел.

Для замкнутой системы, состоящей из серых диффузно отражающих тел, разделенных прозрачной средой, используется математическая модель в форме интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$E_{\text{пад}}(M) - \int_F R(N) E_{\text{пад}}(N) d\varphi_{dF_M, dF_N} = \int_F A(N) E_0(N) d\varphi_{dF_M, dF_N}, \quad (11.3)$$

где $E_{\text{пад}}(M)$ – падающее излучение в точке M ;

$R(N)$ – коэффициент отражения;

$d\varphi_{dF_M, dF_N}$ – элементарный угловой коэффициент;

$A(N)$ – коэффициент поглощения;

$E_0(N)$ – интегральная плотность полусферического излучения абсолютно черного тела.

Решение модели (11.3) позволяет получить распределение потоков падающего излучения по поверхности системы при заданных на ней оптических константах и поля температур.

Пример 31. В радиотехнике математическая модель, связывающая принятый радиосигнал $f(t)$ с переданным сигналом $u(t)$, представляет собой интеграл свертки

$$\int_0^t K(t-\tau) u(\tau) d\tau = f(t), \quad (11.4)$$

где ядро $K(t-\tau)$ определяется свойствами приемной аппаратуры и среды, через которую проходит сигнал.

Библиографический список

1. Голубева Н. В. Базовый инструмент исследовательской деятельности: формирование компетентного инженера // Человек и образование. 2019. № 1. С. 141–146.
2. Колесов Ю. Б. Моделирование систем. Динамические и гибридные системы / Ю. Б. Колесов, Ю. Б. Сениченков. СПб: БХВ-Петербург, 2012. 224 с.
3. Вержбицкий В. М. Основы численных методов: Учебник для вузов/ В. М. Вержбицкий. М.: Высшая школа, 2002. 840 с.
4. Васильков Ю. В. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании / Ю. В. Васильков, Н. Н. Василькова. М.: Финансы и статистика, 2002. 255 с.
5. Математические основы теории автоматического регулирования / В. А. Иванов, В. С. Медведев и др.; Под ред. Б. К. Чемоданова. М.: Высшая школа, 1977. Т. 1. 366 с.
6. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования / Под ред. В. В. Солодовникова. М.: Машиностроение, 1967. Кн.1. 770 с.
7. Каханер Д. Численные методы и программное обеспечение: Пер. с англ. / Д. Каханер, К. Моулера, С. Нэш. М.: Мир, 2001. 575 с.
8. Березин И. С. Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков. М.: Физматгиз, 1962. Т. 2. 639 с.
9. Поль Р. В. Механика, акустика и учение о теплоте: Пер. с нем. / Р. В. Поль. М.: Физматгиз, 1957. 484 с.
10. Корячко В. П. Теоретические основы САПР: Учебник для вузов / В. П. Корячко, В. М. Курейчик, И. П. Норенков. М.: Энергоатомиздат, 1987. 400 с.
11. Заде Л. Теория линейных систем. Метод пространства состояний: Пер. с англ. / Л. Заде, Ч. Дезоер. М.: Наука, 1970. 704 с.
12. Влах И. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем: Пер. с англ. / И. Влах К. Сингхал. М.: Радио и связь, 1988. 560 с.

13. Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. СПб: Лань, 2011. 672 с.
14. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
15. Плис А. И. Mathcad. Математический практикум для инженеров и экономистов: Учебное пособие / А. И. Плис, Н. А. Сливина. М.: Финансы и статистика, 2003. 656 с.
16. Ракитин В. И. Руководство по методам вычислений и приложения Mathcad: Учебное пособие. М.: Физматлит, 2005. 263 с.
17. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / В. Е. Гмурман. М.: Высшее образование, 2015. 479 с.
18. Мирошник И. В. Теория автоматического управления. Линейные системы / И. В. Мирошник. СПб: Питер, 2005. 336 с.
19. Мирошник И. В. Теория автоматического управления. Часть 2. Нелинейные и оптимальные системы / И. В. Мирошник. СПб: Питер, 2005. 339 с.
20. Новгородцев А. Б. Теоретические основы электротехники. 30 лекций по теории электрических цепей: Учеб. пособие / А. Б. Новгородцев. СПб: Питер, 2006. 576 с.
21. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. М.: Радио и связь, 1989. 656 с.
22. Волков И. К. Случайные процессы: Учебник для вузов / И. К. Волков, С. М. Зуев, Г. М. Цветкова / МГТУ им. Н. Э. Баумана. М., 2006. 448 с.
23. Голубева Н. В. Математическое моделирование систем и процессов: Учебное пособие / Н. В. Голубева. СПб: Лань, 2016. 192 с.
24. Голубева Н. В. Математическое моделирование систем и процессов: Учебно-метод. пособие / Н. В. Голубева / Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2017. 37 с

Учебное издание

ГОЛУБЕВА Нина Викторовна

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие

Редактор Н. А. Майорова

* * *

Подписано в печать 27.08.2019. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 5,9. Уч.-изд. л. 6,6.
Тираж 100 экз. Заказ .

* *

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35