

Н. В. ГОЛУБЕВА

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И
ПРОЦЕССОВ**

ЧАСТЬ 5

ОМСК 2018

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

Н. В. Голубева

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И
ПРОЦЕССОВ

Часть 5

Утверждено методическим советом университета
в качестве учебно-методического пособия
к выполнению лабораторных работ и самостоятельной работы
по дисциплинам «Математическое моделирование систем и процессов»,
«Численные методы моделирования» и
«Вычислительная техника в инженерных задачах»

Омск 2018

УДК 519.65(075.8)
ББК 22.19я73
Г62

Математическое моделирование систем и процессов: Учебно-методическое пособие к выполнению лабораторных работ и самостоятельной работы. Часть 5 / Н. В. Голубева; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2018. 39 с.

Рассматриваются математические модели различных классов, методы их решения и графического отображения результатов моделирования средствами интегрированной среды PTC Mathcad Prime 3.1.

Предназначено для студентов 2-го и 3-го курсов, обучающихся по специальностям «Системы обеспечения движения поездов», «Электроэнергетика и электротехника», «Подвижной состав железных дорог», «Эксплуатация железных дорог»; по направлениям подготовки «Стандартизация и метрология», «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», «Теплоэнергетика и теплотехника», «Наземные транспортно-технологические комплексы»; для студентов заочной формы обучения и для обучения с использованием дистанционных образовательных технологий.

Библиогр.: 2 назв. Табл. 4. Рис. 7.

Рецензенты: доктор техн. наук, профессор В. Н. Горюнов;
доктор техн. наук, профессор В. А. Нехаев.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Лабораторная работа 12. Математические модели в пространстве состояний, их взаимосвязь с моделями в форме передаточных функций и дифференциальных уравнений	6
12.1. Постановка задачи	6
12.2. Информация к выполнению задания 1	6
12.3. Информация к выполнению задания 2	10
12.4. Информация к выполнению задания 3	12
12.5. Информация к выполнению задания 4.....	13
12.6. Информация к выполнению задания 5.....	14
12.7. Задания	16
Лабораторная работа 13. Численное интегрирование.....	20
13.1. Постановка задачи	20
13.2. Обзор классических методов численного интегрирования ...	22
13.3. Метод Монте-Карло (метод статистических испытаний).....	27
13.4. Информация к выполнению задания 1	29
13.5. Информация к выполнению задания 2	30
13.6. Информация к выполнению задания 3	31
13.7. Информация к выполнению задания 4.....	33
13.8. Задания	35
Библиографический список.....	38

ВВЕДЕНИЕ

Важнейшей частью программы подготовки современного специалиста – выпускника технического университета – является обучение его основам, приемам и инструментам математического моделирования – главного научного метода познания – и формирование у него соответствующих профессиональных компетенций. Решение научных и инженерно-технических задач, связанных с исследованием и проектированием технических систем, оптимизацией их параметров или структуры, оптимальным управлением объектом или прогнозированием его поведения, изучением механизма явлений, осуществляется на основе математического моделирования.

Учебно-методическое пособие по дисциплинам «Математическое моделирование систем и процессов», «Численные методы моделирования» и «Вычислительная техника в инженерных задачах» состоит из пяти частей.

Настоящее учебно-методическое пособие включает в себя две лабораторные работы. В двенадцатой лабораторной работе рассматриваются принципы формирования моделей на основе математического аппарата пространства состояний, взаимосвязь моделей в пространстве состояний с передаточными функциями и дифференциальными уравнениями, особенности их решения и построения фазовых траекторий в среде РТС Mathcad Prime 3.1. Лабораторная работа 13 позволяет освоить классические методы численного интегрирования, метод Монте-Карло, а также получить навыки их реализации с помощью инструментов РТС Mathcad Prime 3.1. В процессе выполнения лабораторных работ студент должен уяснить важность правильной постановки задачи, выбора метода ее решения и способа отображения результатов моделирования и умения правильно интерпретировать их.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов 2-го и 3-го курсов очного и заочного обучения, а также для обучения с использованием дистанционных образовательных технологий.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ, ИХ ВЗАИМОСВЯЗЬ С МОДЕЛЯМИ В ФОРМЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

12.1. Постановка задачи

Описание объектов и процессов с помощью математического аппарата пространства состояний применяется в теории систем, в теории автоматического управления, в радиотехнике и связи, в электротехнике и во многих других областях. Моделирование в пространстве состояний обеспечивает широкие возможности при решении задач анализа, синтеза и проектирования систем различной физической природы. Метод пространства состояний имеет следующие достоинства:

- возможность с единой позиции рассматривать стационарные и нестационарные, линейные и нелинейные системы;

- возможность учитывать ненулевые начальные условия;

- наличие достаточного количества численных методов реализации таких математических моделей;

- возможность более разностороннего изучения физической системы путем формирования нескольких моделей в разных пространствах состояний.

В данной работе рассматриваются различные способы формирования математических моделей в пространстве состояний, в том числе по передаточной функции исследуемой системы, по ее дифференциальному уравнению. Решается задача моделирования объекта – электрической цепи – с помощью математического аппарата пространства состояний. Уделяется внимание особенностям решения моделей такого класса средствами системы MathCAD Prime.

12.2. Информация к выполнению задания 1

Встроенная функция $\text{polyroots}(A_k)$ вычисляет корни полинома. Параметр функции A_k – вектор, составленный из коэффициентов полинома $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Результатом функции является вектор, состоящий из n корней полинома.

Пример выполнения задания 1 а.

Пусть для линейного непрерывного стационарного динамического объекта задана математическая модель в форме передаточной функции:

$$W(p) = \frac{5p+100}{p^3 + 53p^2 + 162p + 90} = \frac{B(p)}{A(p)}. \quad (12.1)$$

Сформировать для данного динамического объекта математическую модель в пространстве состояний на основе полюсов передаточной функции.

1. Формирование вектора коэффициентов полинома $A(p)$:

ORIGIN := 0

$$a_0 := 90$$

$$a_1 := 162$$

$$a_2 := 53$$

$$a_3 := 1$$

$$\text{коэфф_полином} := \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

2. Определение корней характеристического уравнения $A(p) = 0$, т. е. полюсов передаточной функции $W(p)$:

$$\lambda := \text{polyroots}(\text{коэфф_полином})$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} -49.782 \\ -2.493 \\ -0.725 \end{bmatrix}$$

3. Запись модели в пространстве состояний в общем виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + u; \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + u; \\ \dot{x}_3 = \lambda_3 x_3 + u \end{cases} \quad (12.2)$$

или в векторно-матричной форме:

$$\dot{X}(t) = FX(t) + Gu(t), \quad (12.3)$$

где

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Подстановка числовых значений полюсов в систему (12.2):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -49,782 x_1 + u; \\ \dot{x}_2 = -2,493 x_2 + u; \\ \dot{x}_3 = -0,725 x_3 + u, \end{cases} \quad (12.4)$$

где

$$F = \begin{bmatrix} -49,782 & 0 & 0 \\ 0 & -2,493 & 0 \\ 0 & 0 & -0,725 \end{bmatrix}.$$

Пример выполнения задания 1 б.

Линейный стационарный динамический объект описан передаточной функцией (12.1). Сформировать модель в пространстве состояний по дифференциальному уравнению, соответствующему данной передаточной функции.

1. Перейдем от передаточной функции к дифференциальному уравнению в операторной форме:

$$A(p)y(t) = B(p)u(t) \quad (12.5)$$

или

$$(p^3 + 53p^2 + 162p + 90)y(t) = (5p + 100)u(t). \quad (12.6)$$

2. Представим дифференциальное уравнение (12.5) в обычной форме:

$$y'''(t) + 53y''(t) + 162y'(t) + 90y(t) = 5u'(t) + 100u(t). \quad (12.7)$$

3. Введем обозначение

$$y(t) = x_1(t) = x_1 \quad (12.8)$$

и сделаем подстановку его в уравнение (12.7):

$$x_1''' + 53x_1'' + 162x_1' + 90x_1 = 5u' + 100u. \quad (12.9)$$

4. Сгруппируем члены уравнения (12.9), не содержащие производных, в правой части уравнения:

$$x_1''' + 53x_1'' + 162x_1' - 5u' = -90x_1 + 100u. \quad (12.10)$$

5. Введем обозначение

$$x_3' = -90x_1 + 100u \quad (12.11)$$

и сделаем подстановку его в уравнение (12.10):

$$x_1''' + 53x_1'' + 162x_1' - 5u' = x_3'. \quad (12.12)$$

6. Проинтегрируем выражение (12.12) и сгруппируем в правой части члены полученного уравнения, не содержащие производных:

$$x_1'' + 53x_1' = -162x_1 + x_3 + 5u. \quad (12.13)$$

7. Введем обозначение

$$x_2' = -162x_1 + x_3 + 5u \quad (12.14)$$

и сделаем подстановку его в уравнение (12.13):

$$x_1'' + 53x_1' = x_2'. \quad (12.15)$$

8. Проинтегрируем уравнение (12.15) и из полученного соотношения выразим x_1' :

$$x_1' = -53x_1 + x_2. \quad (12.16)$$

9. Объединив соотношения (12.16), (12.14) и (12.11), получим систему уравнений состояния:

$$\begin{cases} x_1' = -53x_1 + x_2; \\ x_2' = -162x_1 + x_3 + 5u; \\ x_3' = -90x_1 + 100u \end{cases} \quad (12.17)$$

или в векторно-матричной форме:

$$\dot{X}(t) = FX(t) + Gu(t), \quad (12.18)$$

где

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} -53 & 1 & 0 \\ -162 & 0 & 1 \\ -90 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

12.3. Информация к выполнению задания 2

Пример выполнения задания 2.

Исследуемый объект – линейная электрическая цепь третьего порядка (рис. 12.1). Сформировать математическую модель данного объекта в пространстве состояний.

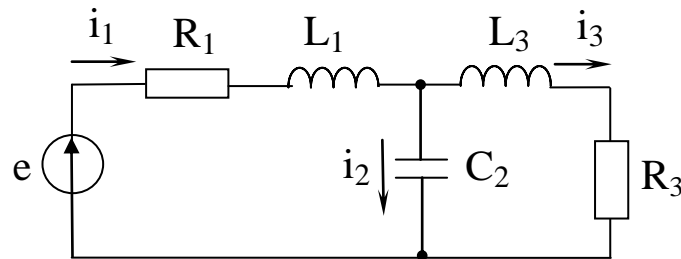


Рис. 12.1. Исследуемый объект – линейная электрическая цепь третьего порядка

1. В качестве переменных состояния принимаем:

$$x_1(t) = i_1(t); \quad x_2(t) = u_{C_2}(t); \quad x_3(t) = i_3(t). \quad (12.19)$$

Следовательно, вектор состояния имеет вид:

$$X(t) = \left\| i_1(t) \quad u_{C_2}(t) \quad i_3(t) \right\|^T. \quad (12.20)$$

2. На основании законов Кирхгофа формируем систему уравнений, количество которых должно быть равно порядку моделируемого объекта:

$$\begin{cases} i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + u_{C_2} = e; \\ L_3 \frac{di_3}{dt} + i_3 R_3 = u_{C_2}; \\ i_1 = i_2 + i_3. \end{cases} \quad (12.21)$$

3. Исключаем из системы (12.21) все неизвестные, не являющиеся переменными состояния. Для этого ток i_2 выразим через u_{C_2}

$$i_2 = C_2 \frac{du_{C_2}}{dt} \quad (12.22)$$

и сделаем подстановку его в систему (12.21):

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} = e - i_1 R_1 - u_{C_2}; \\ L_3 \frac{di_3}{dt} = u_{C_2} - i_3 R_3; \\ C_2 \frac{du_{C_2}}{dt} = i_1 - i_3. \end{cases} \quad (12.23)$$

4. Приводим систему (12.23) к нормальной форме и записываем уравнения в порядке, соответствующем расположению переменных состояния в векторе состояния (12.20):

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L_1} e - \frac{R_1}{L_1} i_1 - \frac{1}{L_1} u_{C_2}; \\ \frac{du_{C_2}}{dt} = \frac{1}{C_2} i_1 - \frac{1}{C_2} i_3; \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{1}{L_3} u_{C_2} - \frac{R_3}{L_3} i_3 \end{cases} \quad (12.24)$$

или в векторно-матричной форме:

$$\dot{X}(t) = FX(t) + Gu(t), \quad (12.25)$$

где

$$\dot{X}(t) = \left\| \frac{di_1}{dt} \quad \frac{du_{C_2}}{dt} \quad \frac{di_3}{dt} \right\|^T; \quad G(t) = \left\| \frac{1}{L_1} \quad 0 \quad 0 \right\|^T;$$

$$F = \left\| \begin{array}{ccc} -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L_3} & -\frac{R_3}{L_3} \end{array} \right\|; \quad u(t) = e$$

при заданных начальных условиях: $i_1(0)$; $u_{C_2}(0)$; $i_3(0)$.

12.4. Информация к выполнению задания 3

Пример выполнения задания 3.

Решение математической модели (12.25).

1. Задание параметров электрической цепи:

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$R1 := 30 \quad R3 := 10 \quad L1 := 0.1$$

$$C2 := 0.006 \quad L3 := 0.3 \quad e := 100$$

2. Решение задачи Коши с помощью встроенной функции Rkadapt:

$$\text{Начальный вектор состояния: } x := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

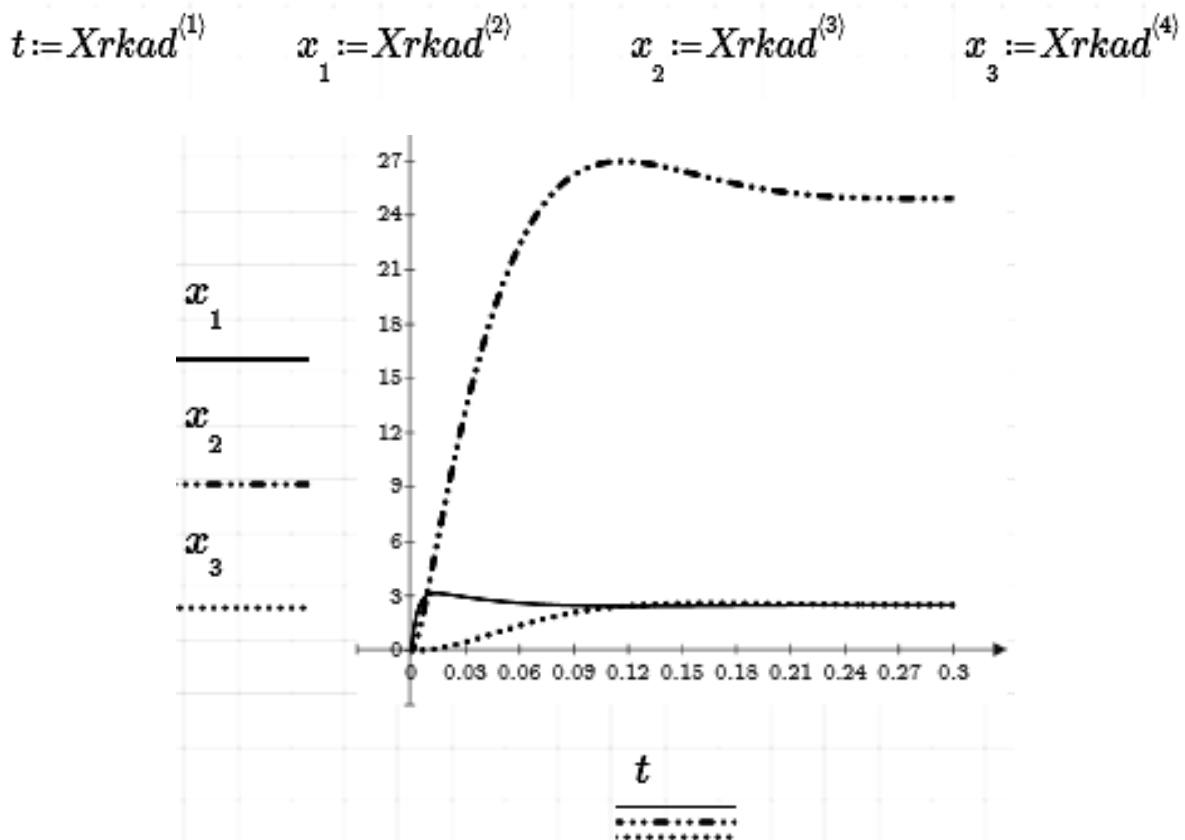
$$D(t, x) := \begin{bmatrix} \frac{1}{L1} \cdot e - \frac{R1}{L1} \cdot x_1 - \frac{1}{L1} \cdot x_2 \\ \frac{1}{C2} \cdot x_1 - \frac{1}{C2} \cdot x_3 \\ \frac{1}{L3} \cdot x_2 - \frac{R3}{L3} \cdot x_3 \end{bmatrix}$$

$$Xrkad := \text{Rkadapt}(x, 0, 0.3, 600, D)$$

3. Вывод матрицы решения:

$$Xrkad = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 \cdot 10^{-4} & 0.464 & 0.02 & 1.111 \cdot 10^{-5} \\ 3 & 0.001 & 0.864 & 0.076 & 8.531 \cdot 10^{-5} \\ 4 & 0.002 & 1.207 & 0.162 & 2.767 \cdot 10^{-4} \\ 5 & 0.002 & 1.502 & 0.275 & 6.306 \cdot 10^{-4} \\ 6 & 0.003 & 1.756 & 0.411 & 0.001 \\ 7 & 0.003 & 1.973 & 0.567 & 0.002 \\ 8 & 0.004 & 2.16 & 0.739 & 0.003 \\ 9 & 0.004 & 2.319 & 0.925 & 0.004 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 601 & & & & \end{bmatrix}$$

4. Отображение динамики изменения переменных состояния объекта:



12.5. Информация к выполнению задания 4

Фазовая траектория для данного динамического объекта (рис. 12.1) строится в трехмерном пространстве состояний с помощью инструмента 3D-график с вкладки График \Rightarrow меню Вставить график.

Для того чтобы по оси x отображались значения переменной состояния x_1 , по оси y – значения переменной состояния x_2 , по оси z – значения x_3 , необходимо сделать соответствующую перестановку столбцов в матрице $Yrkad$. Для этого следует применить встроенную функцию `augment()`. Матрицу, полученную в результате перестановки столбцов, обозначим как $X_фаз_тр$.

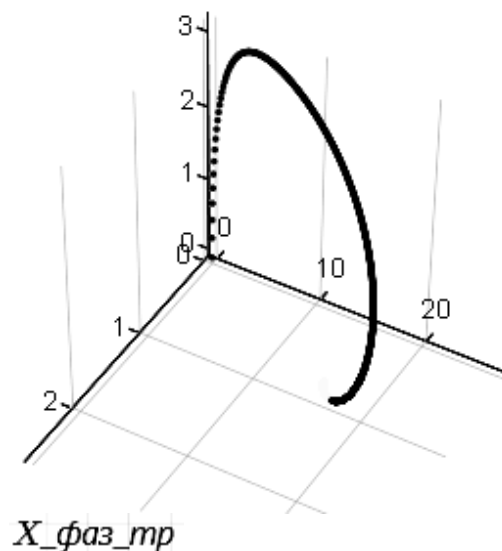
Пример выполнения задания 4.

Формирование матрицы $X_фаз_тр$ путем перестановки столбцов в исходной матрице решений $Yrkad$:

$$X_фаз_тр := \text{augment}(x_3, x_2, x_1)$$

$$X_{\text{фаз_тр}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.111 \cdot 10^{-5} & 0.02 & 0.464 \\ 8.531 \cdot 10^{-5} & 0.076 & 0.864 \\ 2.767 \cdot 10^{-4} & 0.162 & 1.207 \\ 6.306 \cdot 10^{-4} & 0.275 & 1.502 \\ 0.001 & 0.411 & 1.756 \\ 0.002 & 0.567 & 1.973 \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

Фазовая траектория:



12.6. Информация к выполнению задания 5

Встроенная функция $\text{statespace}(x, t_0, t_k, m, F, G, u)$ реализует решение модели в пространстве состояний (12.25) на отрезке $[t_0; t_k]$. Параметры функции statespace : x – начальный вектор состояния (n -мерный); m – число шагов интегрирования; F – матрица коэффициентов размерности $n \times n$; G – вектор коэффициентов при входном воздействии (n -мерный); u – входное воздействие.

Результат функции statespace выдается в виде матрицы $X_{\text{пр_сост}}$, состоящей из $(m+1)$ строк и $(n+1)$ столбцов: первый столбец $X_{\text{пр_сост}}^{(1)}$ содержит значения аргумента t , второй столбец $X_{\text{пр_сост}}^{(2)}$ – значения искомой переменной состояния $x_1(t)$, третий столбец $X_{\text{пр_сост}}^{(3)}$ – значения переменной состояния $x_2(t)$, $(n+1)$ -й столбец $X_{\text{пр_сост}}^{(n+1)}$ – значения переменной состояния $x_n(t)$.

Пример выполнения задания 5.

Исходные данные:

$$F(t) := \begin{bmatrix} -\frac{R1}{L1} & -\frac{1}{L1} & 0 \\ \frac{1}{C2} & 0 & -\frac{1}{C2} \\ 0 & \frac{1}{L3} & -\frac{R3}{L3} \end{bmatrix} \quad G(t) := \begin{bmatrix} \frac{1}{L1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u(t) := e \quad x := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Реализация решения модели (12.25):

$$X_пр_сост := \text{statespace}(x, 0, 0.3, 600, F, G, u)$$

Вывод матрицы решения:

$$X_пр_сост = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 \cdot 10^{-4} & 0.464 & 0.02 & 1.11 \cdot 10^{-5} \\ 0.001 & 0.864 & 0.076 & 8.533 \cdot 10^{-5} \\ 0.002 & 1.207 & 0.162 & 2.767 \cdot 10^{-4} \\ 0.002 & 1.502 & 0.275 & 6.306 \cdot 10^{-4} \\ 0.003 & 1.756 & 0.411 & 0.001 \\ 0.003 & 1.973 & 0.567 & 0.002 \\ 0.004 & 2.16 & 0.739 & 0.003 \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

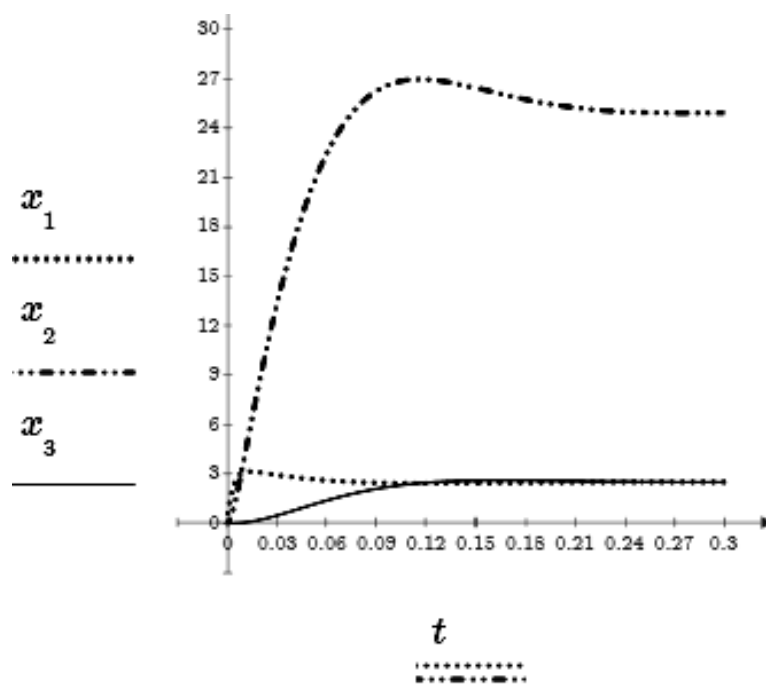
Отображение динамики изменения переменных состояния объекта:

$$t := X_пр_сост^{(1)}$$

$$x_1 := X_пр_сост^{(2)}$$

$$x_2 := X_пр_сост^{(3)}$$

$$x_3 := X_пр_сост^{(4)}$$



12.7. Задания

1. Для линейного непрерывного стационарного объекта задана математическая модель в форме передаточной функции $W(p)$ (табл. 12.1). Сформировать два варианта математической модели данного объекта в пространстве состояний на основе:

- а) полюсов передаточной функции;
- б) дифференциального уравнения, соответствующего заданной передаточной функции.

2. Для заданного объекта – электрической цепи (табл. 12.2) – сформировать математическую модель в пространстве состояний.

3. Решить сформированную модель с помощью встроенной функции `Rkadapt`. Отобразить графически динамику изменения каждой переменной состояния x_i исследуемого объекта.

4. Построить фазовую траекторию для отображения изменения состояния исследуемого объекта во времени.

5. Решить сформированную модель с помощью встроенной функции `statespace`. Отобразить графически динамику изменения каждой переменной состояния x_i исследуемого объекта.

6. Ответить на контрольные вопросы:

а) для физических систем какого класса передаточные функции в форме изображений Лапласа и в операторной форме совпадают?

б) почему задача определения нулей и полюсов передаточной функции имеет важное значение при исследовании объектов и систем?

в) при каких условиях передаточные функции $W(s)$ и $W(p)$ могут достоверно описывать исследуемую физическую систему?

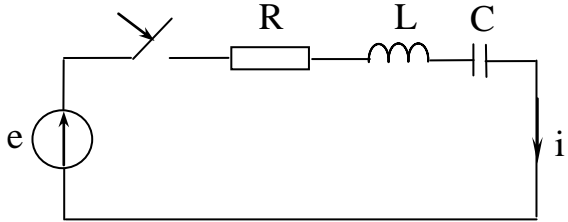
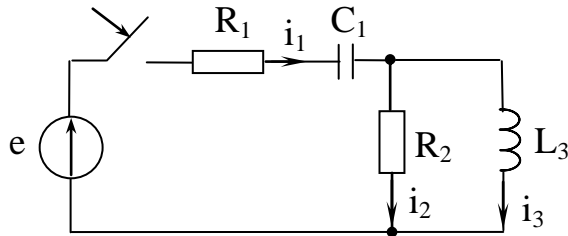
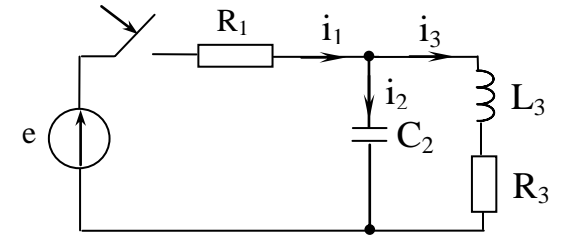
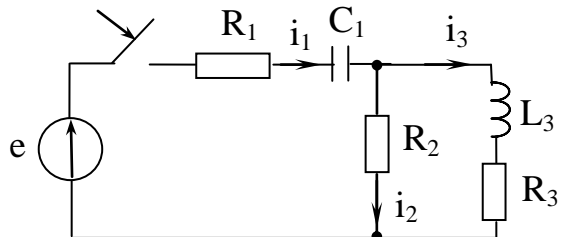
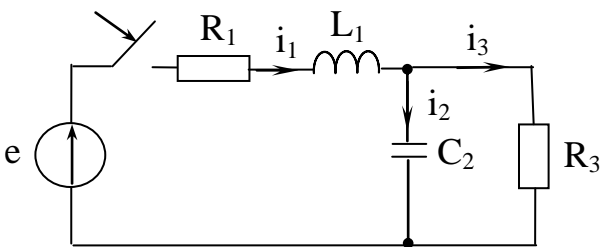
г) как определить порядок будущей модели в пространстве состояний, если известна передаточная функция исследуемого объекта?

Т а б л и ц а 12.1

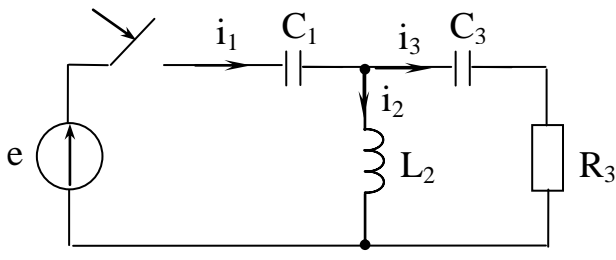
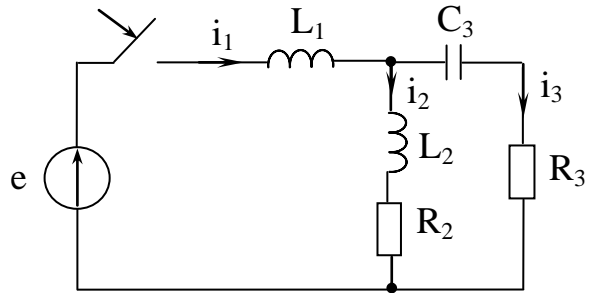
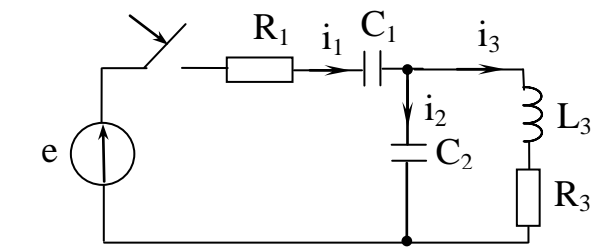
Математические модели в форме передаточных функций

Вариант	Передаточная функция $W(p)$	Вариант	Передаточная функция $W(p)$
1	$\frac{8p+1}{(15p+1)(9p+1)(12p+1)}$	8	$\frac{p^2+11p}{47p^3+52p^2+15,2p+1}$
2	$\frac{p+23}{40p^3+38p^2+11p+1}$	9	$\frac{p+6}{p(10p+1)(0,5p+1)}$
3	$\frac{5}{(0,1p+1)(0,2p+1)(0,5p+1)}$	10	$\frac{20}{14p^3+21p^2+8,8p+1}$
4	$\frac{p^2+7p}{p^3+55p^2+26p+1}$	11	$\frac{10p+1}{(3p+1)(11p+1)(5p+1)}$
5	$\frac{p^2+16p}{24p^3+26p^2+9p+1}$	12	$\frac{p^2+4p}{p^3+8p^2+11p+1}$
6	$\frac{3p+1}{(2p+1)(6p+1)(0,2p+1)}$	13	$\frac{p+10}{p(7p+1)(0,2p+1)}$
7	$\frac{4p+1}{(10p+1)(0,1p+1)(2p+1)}$	14	$\frac{p^2+5p}{p^3+12p^2+8,5p+1}$

Исходные данные к заданию 2

Вариант	Исходные данные	Объект-оригинал
1	2	3
1	$i(0) = 0; \quad u_C(0) = 0;$ $R = 20 \text{ Ом};$ $L = 0,06 \text{ Гн};$ $C = 0,001 \text{ Ф}; \quad e = 200 \text{ В}$	
2	$i_3(0) = 0; \quad u_{C_1}(0) = 0;$ $R_1 = 2 \text{ Ом}; \quad R_2 = 10 \text{ Ом};$ $C_1 = 0,008 \text{ Ф};$ $L_3 = 0,2 \text{ Гн}; \quad e = 100 \text{ В}$	
3	$i_3(0) = 0; \quad u_{C_2}(0) = 0;$ $R_1 = 10 \text{ Ом}; \quad R_3 = 2 \text{ Ом};$ $C_2 = 0,0008 \text{ Ф};$ $L_3 = 0,5 \text{ Гн}; \quad e = 100 \text{ В}$	
4	$i_3(0) = 0; \quad u_{C_1}(0) = 0;$ $R_1 = 5 \text{ Ом}; \quad R_2 = 80 \text{ Ом};$ $C_1 = 0,0008 \text{ Ф}; \quad e = 200 \text{ В};$ $L_3 = 0,04 \text{ Гн}; \quad R_3 = 10 \text{ Ом}$	
5	$i_1(0) = 0; \quad u_{C_2}(0) = 0;$ $R_1 = 40 \text{ Ом}; \quad R_3 = 10 \text{ Ом};$ $L_1 = 0,5 \text{ Гн}; \quad e = 100 \text{ В};$ $C_2 = 0,0005 \text{ Ф}$	

1	2	3
6	$i_1(0) = 0; \quad i_3(0) = 0;$ $R_1 = 5 \text{ Ом}; \quad R_2 = 10 \text{ Ом};$ $L_1 = 0,08 \text{ Гн}; \quad R_3 = 20 \text{ Ом};$ $L_3 = 0,03 \text{ Гн}; \quad e = 100 \text{ В}$	
7	$i_1(0) = 0; \quad i_2(0) = 0;$ $R_1 = 5 \text{ Ом}; \quad L_1 = 0,5 \text{ Гн};$ $R_3 = 40 \text{ Ом};$ $L_2 = 1 \text{ Гн}; \quad e = 100 \text{ В}$	
8	$i_2(0) = 0; \quad u_{C1}(0) = 0;$ $R_3 = 10 \text{ Ом}; \quad e = 100 \text{ В};$ $C_1 = 0,0008 \text{ Ф};$ $L_2 = 0,2 \text{ Гн}$	
9	$i_3(0) = 0; \quad u_{C2}(0) = 0;$ $R_1 = 30 \text{ Ом}; \quad e = 100 \text{ В};$ $R_2 = 1 \text{ Ом}; \quad L_3 = 0,3 \text{ Гн};$ $C_2 = 0,0005 \text{ Ф}$	
10	$i_2(0) = 0; \quad u_{C3}(0) = 0;$ $R_1 = 10 \text{ Ом};$ $L_2 = 0,3 \text{ Гн};$ $C_3 = 0,0006 \text{ Ф}$	

1	2	3
11	$i_2(0) = 0; \quad u_{C3}(0) = 0;$ $R_3 = 10 \text{ Ом}; \quad C_1 = 0,001 \text{ Ф};$ $L_2 = 0,2 \text{ Гн}; \quad e = 200 \text{ В};$ $C_3 = 0,004 \text{ Ф}$	
12	$i_1(0) = 0; \quad i_2(0) = 0;$ $R_2 = 10 \text{ Ом}; \quad L_1 = 0,4 \text{ Гн};$ $R_3 = 5 \text{ Ом}; \quad C_3 = 0,008 \text{ Ф};$ $L_2 = 0,8 \text{ Гн}; \quad e = 100 \text{ В}$	
13	$i_2(0) = 0; \quad u_{C3}(0) = 0;$ $R_1 = 10 \text{ Ом}; \quad C_1 = 0,002 \text{ Ф};$ $L_3 = 0,2 \text{ Гн}; \quad e = 200 \text{ В};$ $C_2 = 0,0008 \text{ Ф}; \quad R_3 = 5 \text{ Ом}$	

Лабораторная работа 13

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

13.1. Постановка задачи

Решение многих научных и инженерных задач на разных этапах приводит к необходимости вычисления значения определенного интеграла. К интегрированию функций сводятся задачи вычисления площадей и объемов, пути, пройденного точкой при неравномерном движении, определения центров тяжести и моментов инерции тел, работы, произведенной некоторыми силами, и др.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и известна ее первообразная $F(x)$, то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (13.1)$$

где $F'(x) = f(x)$.

Однако на практике только для ограниченного числа подынтегральных функций $f(x)$ удастся воспользоваться формулой (13.1) и найти аналитическое решение, т. е. выразить первообразную в виде комбинации алгебраических и трансцендентных функций.

В большинстве задач первообразную $F(x)$ не удастся выразить через элементарные функции или она получается чрезмерно сложной. Кроме того, функция $f(x)$ часто задается в виде таблицы ее значений на фиксированном конечном множестве точек X_i и, следовательно, теряет смысл само понятие первообразной. В этих случаях применяются методы численного интегрирования.

В основу классических методов численного интегрирования положено геометрическое толкование определенного интеграла как площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 13.1).

Задача численного интегрирования состоит в нахождении приближенного значения определенного интеграла с помощью некоторой

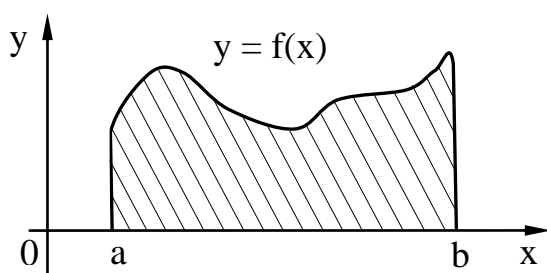


Рис. 13.1. Геометрический смысл определенного интеграла

приближенной формулы через известные значения подынтегральной функции $f(x)$ (иногда и через значения ее производных) в заданных точках. Такие формулы называются **к в а д р а т у р н ы м и** («квadrатура» происходит от латинского слова *quadratura* – вычисление площади или квадрирование).

Квадратурная формула позволяет искомый интеграл заменить определенной линейной комбинацией (линейной функцией) значений подынтегральной функции $f(x_k)$ в $n + 1$ точках интервала $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (13.2)$$

где A_k – коэффициенты, называемые весами; $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ – узлы квадратурной формулы; $R(f)$ – методическая погрешность квадратурной формулы или ее остаточный член.

Принцип построения классических квадратурных формул: данная подынтегральная функция $f(x)$ на интервале $[a; b]$ заменяется интерполирующей функцией $\varphi(x)$ простого вида (например, интерполяционным многочленом), от которой легко находится интеграл. Для повышения точности вычисления интеграла исходный отрезок $[a; b]$ разделяют на n частей с шагом $h = \frac{b-a}{n}$. На каждом из полученных интервалов $[x_k; x_{k+1}]$ строится свой ин-

терполяционный многочлен и искомый интеграл $\int_a^b f(x) dx$ вычисляется как сумма n частичных интегралов с помощью простейших квадратурных формул:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx. \quad (13.3)$$

Выбор квадратурной формулы определяется классом функции $f(x)$, формой ее задания, набором узловых значений $\{x_k\}$ и классом интерполирующей функции $\varphi(x)$.

Элементарные квадратурные формулы проще всего выводятся исходя из геометрической трактовки интеграла. Рассмотрим некоторые из них.

13.2. Обзор классических методов численного интегрирования

Метод прямоугольников. Интервал интегрирования $[a; b]$ разбивают на n равных частей точками x_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$); $x_0 = a$; $x_n = b$. Длина h каждого из отрезков $[x_k; x_{k+1}]$ равна $\frac{b-a}{n}$. Значения подынтегральной функции $f(x)$ в узлах x_k обозначают так:

$$y_0 = f(x_0); \quad y_1 = f(x_1); \quad y_2 = f(x_2); \quad \dots; \quad y_n = f(x_n). \quad (13.4)$$

Функцию $f(x)$ заменяют ступенчатой функцией, которая в пределах каждого элементарного отрезка $[x_k; x_{k+1}]$ принимает постоянное значение, равное, например, значению подынтегральной функции $f(x)$ на левом конце отрезка, т. е. $f(x) = f(x_k)$. Геометрически это означает, что на интервале $[x_k; x_{k+1}]$ частичный интеграл (13.3) приближенно определяется как площадь элементарного прямоугольника (рис. 13.2):

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx f(x_k) h \approx y_k h. \quad (13.5)$$

Тогда площадь криволинейной трапеции ABCD, определяющая значение искомого интеграла $\int_a^b f(x) dx$, приближенно заменяется суммой площадей n прямоугольников с высотами y_k и основаниями h , что выражается формулой

$$\int_a^b f(x) dx \approx y_0 h + y_1 h + y_2 h + \dots + y_{n-1} h = h \sum_{k=0}^{n-1} y_k, \quad (13.6)$$

которая называется квадратурной формулой левых прямоугольников.

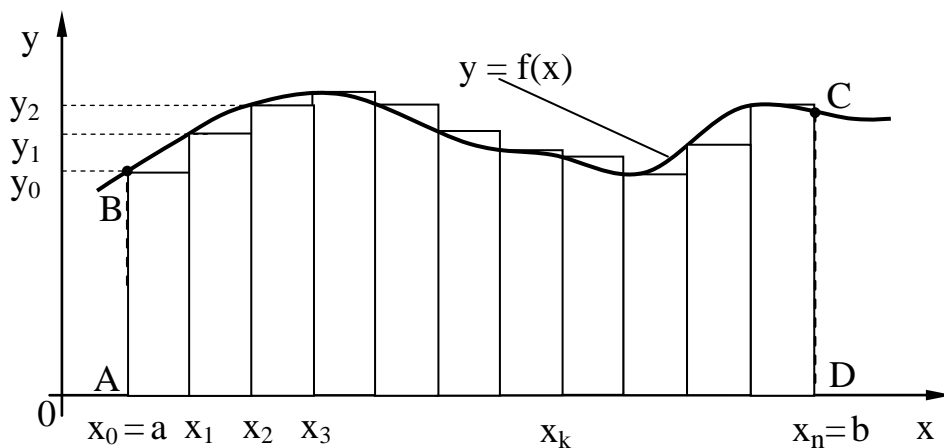


Рис. 13.2. Геометрическая интерпретация формулы левых прямоугольников

Метод левых прямоугольников дает грубую оценку искомого интеграла. Методическая погрешность данного метода определяется соотношением:

$$R(f) \leq \frac{b-a}{2} h \max_{[a;b]} |f'(x)|, \quad (13.7)$$

т. е. для непрерывно дифференцируемых функций она убывает по линейному закону с уменьшением величины шага h . Следовательно, метод левых прямоугольников имеет первый порядок точности.

Более точный результат вычисления определенного интеграла можно получить, если площадь криволинейной трапеции ABCD заменить суммой площадей n прямоугольников с высотами, равными значениям подынтегральной функции $f(x)$ в средних точках элементарных отрезков $[x_k; x_{k+1}]$ (рис. 13.3).

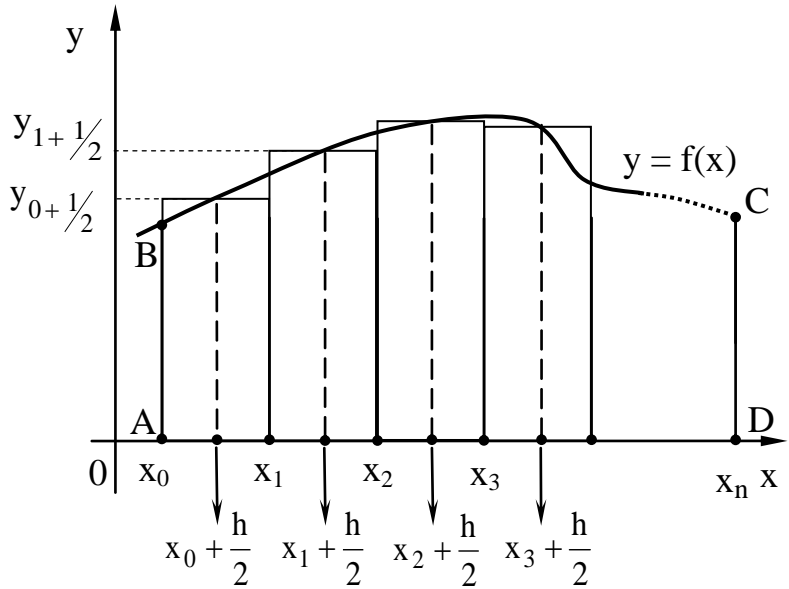


Рис. 13.3. Геометрическая интерпретация формулы средних прямоугольников

Обозначаем середину отрезка $[x_k; x_{k+1}]$

как $x_k + \frac{h}{2}$, а значение

функции $f(x)$ в этой

точке — $f(x) = f\left(x_k + \frac{h}{2}\right) = y_{k+1/2}$. Получаем квадратурную формулу

средних прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx \approx y_{0+1/2} h + y_{1+1/2} h + y_{2+1/2} h + \dots + y_{n-1+1/2} h = h \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1/2}. \quad (13.8)$$

Методическая погрешность метода средних прямоугольников для тех случаев, когда подынтегральная функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную, определяется соотношением:

$$R(f) \leq \frac{b-a}{24} h^2 \max_{[a;b]} |f''(x)|. \quad (13.9)$$

Таким образом, погрешность убывает прямо пропорционально величине h^2 , следовательно, метод средних прямоугольников имеет второй порядок точности.

Метод трапеций. Подынтегральную функцию $f(x)$ заменяют кусочно-линейной функцией. Геометрически это означает, что в пределах каждого элементарного отрезка $[x_k; x_{k+1}]$ функция $f(x)$ аппроксимируется

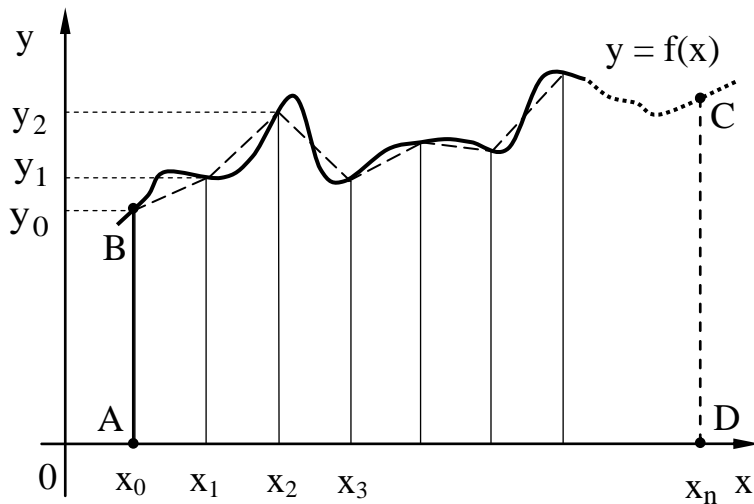


Рис. 13.4. Геометрическая интерпретация формулы трапеций

прямой линией, проходящей через две соседние точки с координатами $[x_k; f(x_k)]$ и $[x_{k+1}; f(x_{k+1})]$ (рис. 13.4). Это дает возможность приближенно заменить площадь криволинейной трапеции ABCD, определяющую значение искомого инте-

грала $\int_a^b f(x)dx$, суммой площадей n элементарных трапеций. Учиты-

вая, что площадь такой трапеции определяется как произведение полусуммы оснований на высоту:

$$S = \frac{y_k + y_{k+1}}{2} h, \quad (13.10)$$

получаем квадратурную формулу трапеций:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx h \left[\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right] \approx \\ &\approx \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + y_n). \end{aligned} \quad (13.11)$$

Формула (13.11) может быть выведена и другим способом – с применением математического аппарата интерполирования. При этом в формуле (13.3) подынтегральная функция $f(x)$ на частичном отрезке $[x_k; x_{k+1}]$ заменяется

интерполяционным многочленом Лагранжа первой степени, построенным на узлах x_k и x_{k+1} :

$$L(x) = \frac{1}{h} [f(x_{k+1})(x - x_k) - f(x_k)(x - x_{k+1})]. \quad (13.12)$$

Методическая погрешность метода трапеций оценивается соотношением:

$$R(f) \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{[a;b]} |f''(x)|. \quad (13.13)$$

Метод трапеций имеет второй порядок точности, так как его погрешность убывает прямо пропорционально величине h^2 .

Метод Симпсона. Интервал интегрирования $[a; b]$ разбивают на четное количество равных отрезков. На каждых двух смежных элементарных отрезках $[x_k; x_k + 2h = x_{k+2}]$ подынтегральную функцию $f(x)$ заменяют интерполяционным полиномом второй степени $a_i x^2 + b_i x + c_i$ либо интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени, построенным на узлах x_k, x_{k+1}, x_{k+2} . Геометрически это означает, что в пределах частичного сдвоенного интервала $[x_k; x_k + 2h = x_{k+2}]$ подынтегральная функция $f(x)$ заменяется параболой, проходящей через три соседние точки с координатами $[x_k; f(x_k)]$, $[x_{k+1}; f(x_{k+1})]$ и $[x_{k+2}; f(x_{k+2})]$ (рис. 13.5).

Таким образом, площадь исходной криволинейной трапеции приближенно заменяется суммой n площадей элементарных криволинейных трапеций.

Квадратурная формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \quad (13.14)$$

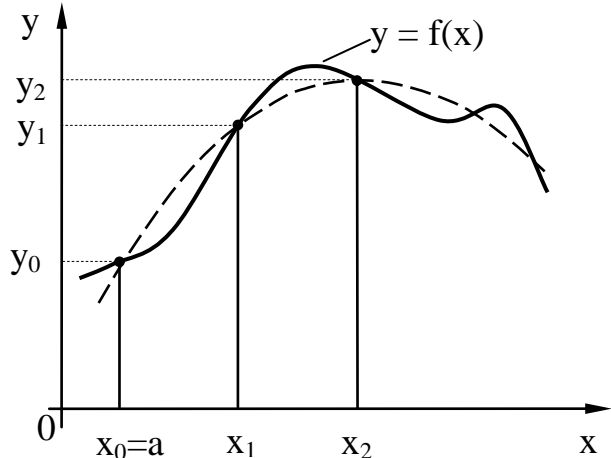


Рис. 13.5. Геометрическая интерпретация формулы Симпсона

Методическая погрешность метода Симпсона для тех случаев, когда подынтегральная функция $f(x)$ имеет непрерывную четвертую производную, определяется соотношением:

$$R(f) \leq \frac{b-a}{180} h^4 \max_{[a;b]} |f^{(4)}(x)|. \quad (13.15)$$

Метод Симпсона имеет четвертый порядок точности.

Следует подчеркнуть, что сложно дать однозначную оценку рассмотренных методов с точки зрения их точности. Точность численного интегрирования в каждой конкретной задаче зависит от характера изменения (свойств) подынтегральной функции $f(x)$ и поведения ее производных на интервале интегрирования $[a; b]$. Так, например, метод Симпсона обеспечит значительное преимущество над другими методами по точности результата только при условии, что четвертая производная функции $f(x)$ не будет слишком велика. В противном случае методы трапеций и средних прямоугольников дадут существенно более точный результат.

Квадратурные формулы прямоугольников (13.6), (13.8), трапеций (13.11) и Симпсона (13.14) являются частными случаями формул Ньютона – Котеса, в основе которых лежит замена подынтегральной функции интерполяционным многочленом Лагранжа. В методе Эйлера подынтегральная функция замещается интерполяционным многочленом Эрмита. Методы Гаусса – Кристоффеля предполагают применение полиномов Лежандра и неравноотстоящих узлов, выбираемых из расчета минимума погрешности интегрирования. Различные подходы к формированию квадратурных формул реализованы в методах Чебышева, Маркова, Ромберга и др.

13.3. Метод Монте-Карло (метод статистических испытаний)

Суть метода Монте-Карло (метода статистических испытаний) заключается в следующем. Для решения вычислительной задачи подбирается соответствующая вероятностная модель, в которую входит искомая неизвестная величина. Проводятся статистические испытания данной вероятностной модели с последующей статистической обработкой результатов ее многократных «наблюдений». В итоге получают оценку искомой величины. Иными словами, моделируются входные случайные после-

довательности с заданными законами распределения. Каждый элемент входной последовательности преобразуется по алгоритму, соответствующему поставленной задаче. Полученная в итоге преобразований выходная случайная последовательность подвергается статистической обработке для определения той вероятностной характеристики, которая принимается за оценку искомой величины. Чаще всего такой вероятностной характеристикой является математическое ожидание.

Пусть требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Если из-

вестно, что данная подынтегральная функция $f(x)$ на интервале интегрирования $[a; b]$ не превышает некоторого значения C , то кривая $y = f(x)$ располагается внутри прямоугольника с основанием $(b - a)$ и высотой C (рис. 13.6).

Моделируют процесс случайного попадания точек в обозначенный прямоугольник. Для этого генерируют N пар случайных чисел x_i и y_i , равномерно распределенных на интервалах $[a; b]$ и $[0; C]$ соответственно. Каждая пара x_i, y_i представляет собой координаты текущей точки. Таким образом, получают N точек, равномерно рассеянных внутри прямоугольника.

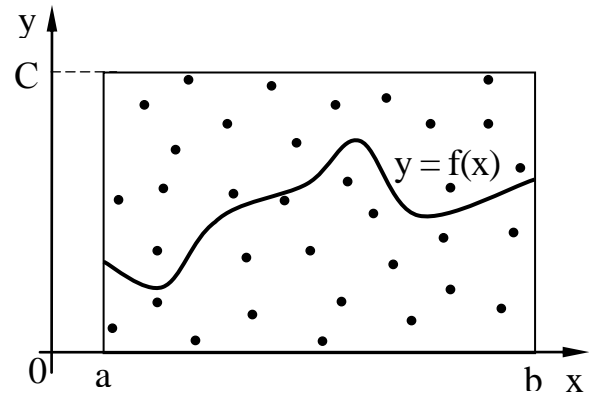


Рис. 13.6. К методу Монте-Карло

Тогда приближенное значение интеграла (оценка интеграла) может быть вычислено по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{\text{пр}} \frac{n_f}{N}, \quad (13.16)$$

где n_f – количество точек, попавших под кривую $y=f(x)$; N – общее количество точек (число испытаний, объем выборки); $S_{\text{пр}}$ – площадь прямоугольника.

Выражение $S_{\text{пр}} \frac{n_f}{N}$ тем точнее определяет значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$,

чем больше объем выборки N (общее количество точек), т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{\text{np}} \frac{n_f}{N} = \int_a^b f(x) dx. \quad (13.17)$$

Наиболее эффективен метод Монте-Карло при оценивании многомерных (кратных) интегралов. В отличие от других методов численного интегрирования трудоемкость метода Монте-Карло (объем вычислений) незначительно зависит от размерности решаемой задачи.

13.4. Информация к выполнению задания 1

Вычисление значения определенного интеграла от функции $f(x) = \sin(x)$ с помощью оператора интегрирования:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sin(x) \\ a &:= 0 & b &:= \frac{\pi}{2} \\ \int_a^b f(x) dx &= 1 \end{aligned}$$

Вычисление значения определенного интеграла в заданиях 1б, 1в, 1г следует реализовать программно с помощью встроенных средств программирования PTC Mathcad Prime 3.1.

Пример программы, реализующей вычисление определенного интеграла от функции $f(x) = \sin(x)$ методом левых прямоугольников:

$$\begin{aligned} I_{\text{лев_np}}(n) &:= \begin{aligned} &s \leftarrow 0 \\ &h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ &\text{for } i \in 0..n-1 \\ &\quad x \leftarrow a + i \cdot h \\ &\quad s \leftarrow s + f(x) \\ &I_{\text{лев_np}} \leftarrow h \cdot s \end{aligned} \end{aligned}$$

$$I_{\text{лев_np}}(10) = 0.919$$

$$I_{\text{лев_np}}(100) = 0.992$$

$$I_{\text{лев_np}}(1000) = 0.999$$

13.5. Информация к выполнению задания 2

В качестве примера рассмотрим процедуру оценивания методической погрешности метода трапеций (см. формулу (13.13)) при числе разбиений интервала интегрирования n , равном 1000.

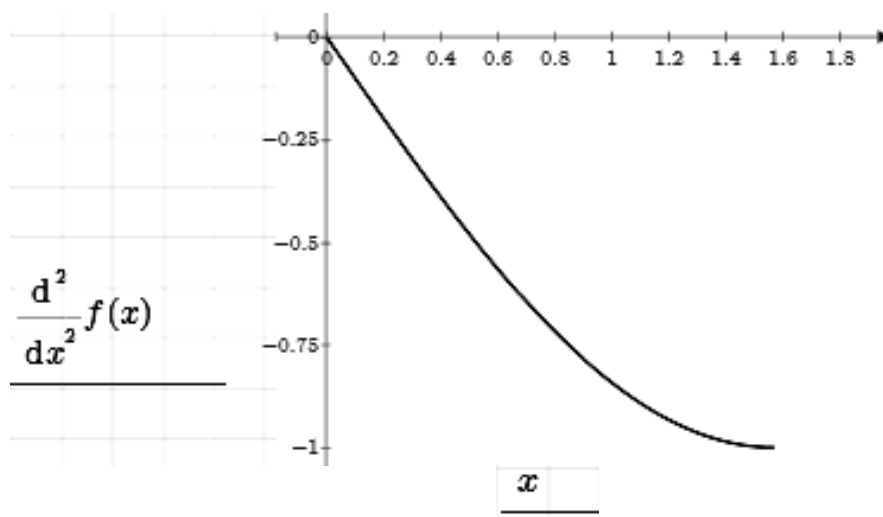
Пример выполнения задания 2.

1. Задание исходных данных:

$$n := 1000 \quad h := \frac{b-a}{n}$$

2. Построение графика второй производной подынтегральной функции на заданном интервале интегрирования $[a; b]$:

$$x := a, a+h..b$$



3. Определение (визуально) по графику значения величины $M = \max_{[a;b]} |f''(x)|$. В данном случае $M = 1$.

4. Подстановка значения M в формулу (13.13) и получение оценки методической погрешности метода трапеций R :

$$M := 1$$

$$R := \frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot M \quad R = 3.23 \cdot 10^{-7}$$

13.6. Информация к выполнению задания 3

Вычисление определенного интеграла методом Монте-Карло (методом статистических испытаний) предполагает моделирование процесса случайного попадания точек в прямоугольник с основанием $(b - a)$ и высотой C . Для этого используется встроенная функция `runif(N, m1, m2)`, которая генерирует последовательность из N независимых случайных чисел, имеющих равномерное распределение на интервале $[m1; m2]$.

Переменная nf – количество точек, попавших под кривую $y = f(x)$ из общего количества точек N , равномерно рассеянных внутри прямоугольника.

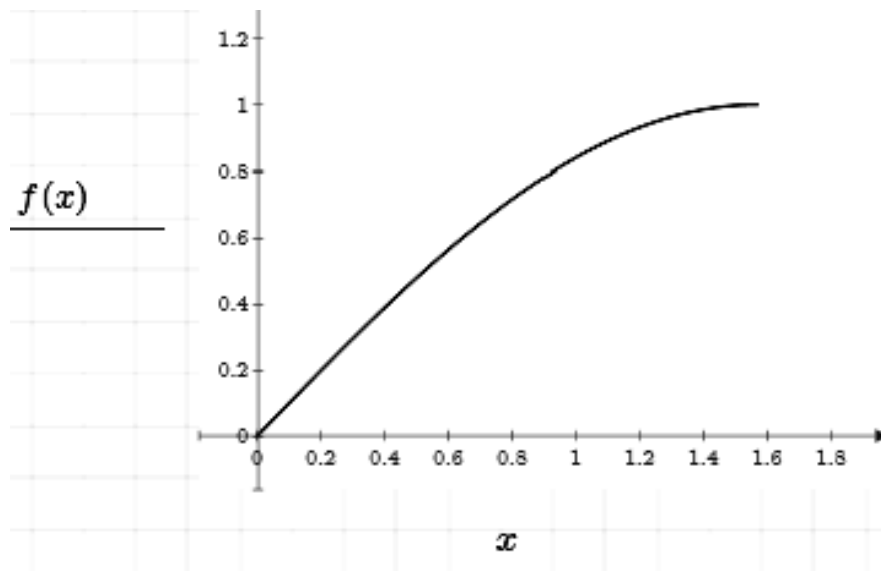
Векторы X и Y формируются с помощью встроенной функции `runif(N, m1, m2)`. Элементами векторов X и Y являются соответственно координаты X_i и Y_i точек, попадающих внутрь прямоугольника с основанием $(b - a)$ и высотой C . Таким образом генерируемые значения координат X_i и Y_i должны удовлетворять условиям: $(a \leq X_i \leq b)$ и $(0 \leq Y_i \leq C)$.

Пример выполнения задания 3.

1. Формирование вектора X:

$$N:=1000$$
$$X := \text{runif}(N, a, b)$$
$$X = \begin{bmatrix} 0.002 \\ 0.304 \\ 0.919 \\ 0.55 \\ 1.293 \\ 0.274 \\ 1.116 \\ 0.478 \\ 0.144 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

2. Задание верхней границы интервала $[0; C]$:



$$C := 1.2$$

3. Формирование вектора Y :

$$Y := \text{runif}(N, 0, C)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.714 \\ 0.63 \\ 0.625 \\ 0.753 \\ 0.67 \\ 0.906 \\ 0.734 \\ 0.935 \\ 0.223 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

4. Вычисление nf – количества точек, попавших под кривую $y = f(x)$:

```

nf := || nf ← 0
      || for i ∈ 0..N-1
      ||   || if  $Y_i \leq f(X_i)$ 
      ||   ||   || nf ← nf + 1
      || nf
nf = 549

```

5. Вычисление площади прямоугольника с основанием $(b - a)$ и высотой C :

$$S := (b - a) \cdot (C - 0) \quad S = 1.885$$

6. Вычисление значения определенного интеграла:

$$I := S \cdot \frac{nf}{N} \quad I = 1.035$$

13.7. Информация к выполнению задания 4

Встроенная функция `cspline(X,Y)` вычисляет вектор вторых производных подынтегральной функции $y=f(x)$, используя приближение сплайн-функции в узлах кубическим полиномом.

Встроенная функция `interp(Pr,X,Y,x)` вычисляет значение подынтегральной функции $y = f(x)$ в произвольной точке x с помощью интерполяции сплайн-функцией.

Пример выполнения задания 4.

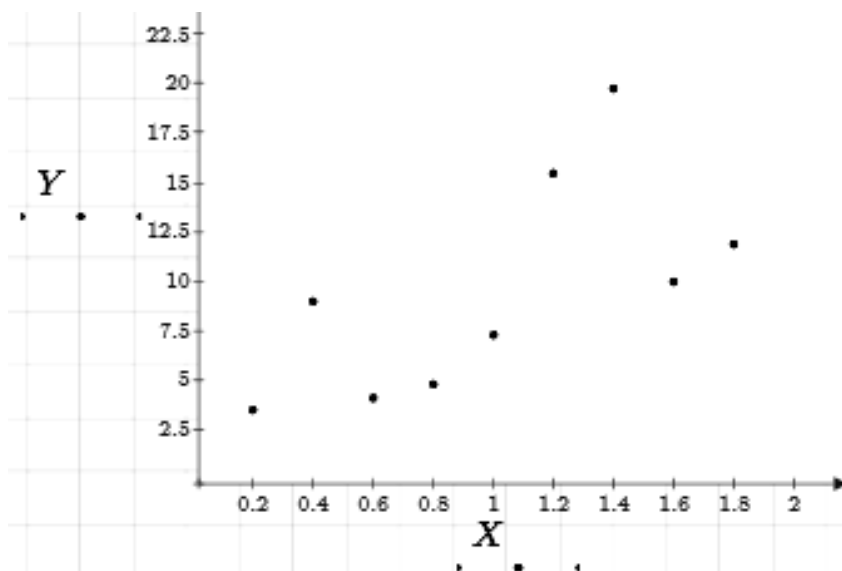
Пусть подынтегральная функция $y = f(x)$ задана таблицей значений y_i , определенных в узлах x_i :

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
y	3,5	9,0	4,1	4,8	7,3	15,5	19,7	10,0	11,9

1. Задание вектора значений узлов X и вектора значений подынтегральной функции Y :

$$X := \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \\ 1.2 \\ 1.4 \\ 1.6 \\ 1.8 \end{bmatrix} \quad Y := \begin{bmatrix} 3.5 \\ 9.0 \\ 4.1 \\ 4.8 \\ 7.3 \\ 15.5 \\ 19.7 \\ 10.0 \\ 11.9 \end{bmatrix}$$

2. Отображение на графике подынтегральной функции $y = f(x)$:



3. Вычисление определенного интеграла методом левых прямоугольников:

$$h := 0.2 \quad n := 8$$

$$I_{л_np} := h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} Y_k = 14.78$$

4. Вычисление определенного интеграла методом трапеций:

$$I_{mp} := \frac{h}{2} \cdot \left(Y_0 + Y_n + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot Y_k \right) = 15.62$$

5. Вычисление определенного интеграла методом Симпсона:

$$m := 1, 1 + 2 \dots n - 1 \quad j := 2, 2 + 2 \dots n - 2$$

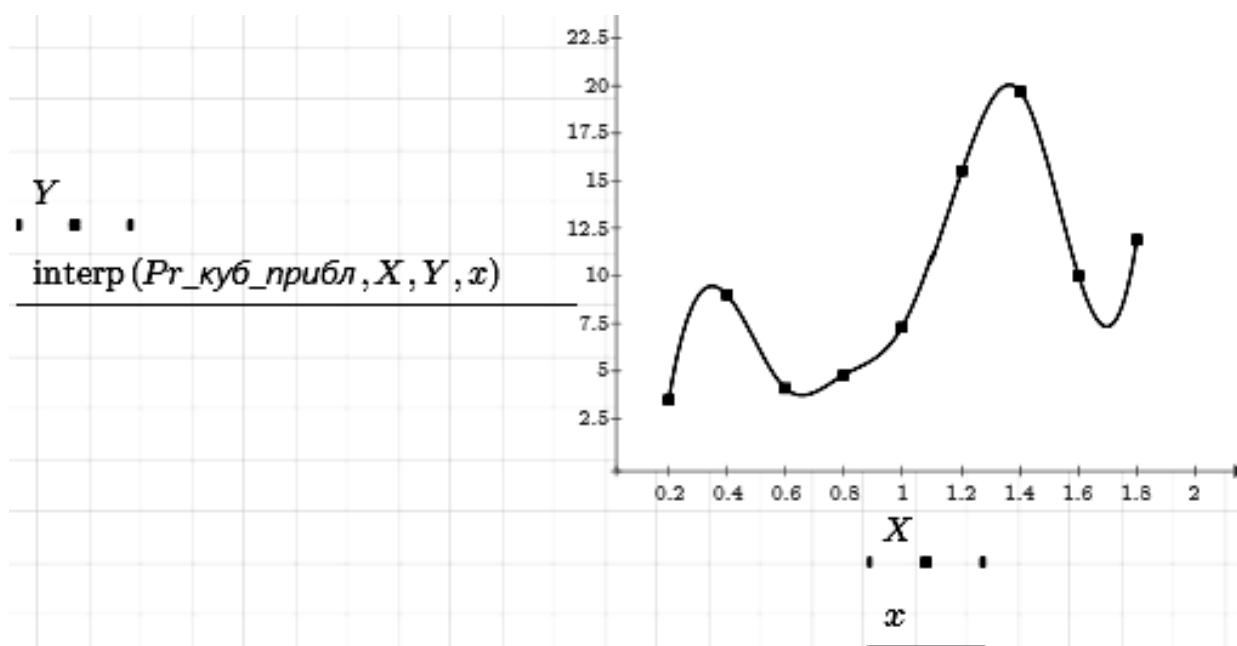
$$I_{Cимп} := \frac{h}{3} \cdot \left(Y_0 + \sum_m 4 \cdot Y_m + \sum_j 2 \cdot Y_j + Y_n \right) = 15.653$$

6. Вычисление определенного интеграла на основе сплайн-интерполяции подынтегральной функции $y = f(x)$ с последующим применением оператора интегрирования:

$$Pr_куб_прибл := cspline(X, Y)$$

Результат сплайн-интерполяции подынтегральной функции $y = f(x)$:

$$x := 0.2, 0.2 + 0.01 \dots 1.8$$



Вычисление значения определенного интеграла:

$$I_{\text{сплайн}} := \int_{0.2}^{1.8} \text{interp}(Pr_куб_прибл, X, Y, x) dx$$

$$I_{\text{сплайн}} = 15.6$$

13.8. Задания

1. Вычислить значение определенного интеграла детерминированными численными методами для подынтегральной функции $f(x)$, заданной аналитически (табл. 13.1):

- а) с помощью оператора интегрирования;
- б) методом средних прямоугольников (для $n = 10, 100, 1000$);
- в) методом трапеций (для $n = 10, 100, 1000$);
- г) методом Симпсона (для $n = 10, 100, 1000$).

2) Оценить значение методической погрешности методов средних прямоугольников и Симпсона при $n = 10, 1000$.

3) Вычислить значение определенного интеграла методом Монте-Карло (методом статистических испытаний).

Т а б л и ц а 13.1

Исходные данные для численного интегрирования функции,
заданной аналитически

Вариант	Определенный интеграл	Вариант	Определенный интеграл
1	$\int_4^{10} e^{\sqrt{x}} \cos x + 23 \, dx$	9	$\int_{0,8}^{5,2} \frac{1}{x} + x^2 \, dx$
2	$\int_{0,1}^3 e^x \lg x + 2 \, dx$	10	$\int_2^5 x^3 - 0,8e^x \, dx$
3	$\int_{0,6}^5 \frac{\ln^2 x}{x} \, dx$	11	$\int_2^{12} \frac{3x}{e^x - 1} \, dx$
4	$\int_1^4 x^3 - 15\sqrt{x} + 17 \, dx$	12	$\int_{0,1}^{2,5} e^{2x} - x \, dx$
5	$\int_{0,1}^{0,8} e^{1,4x} a \cos x \, dx$	13	$\int_{\pi/10}^{\pi} x + \cos x \, dx$
6	$\int_{0,05}^{1,7} \frac{x}{e^x} \, dx$	14	$\int_{0,2}^2 \sqrt{3x^3 + 1} \, dx$
7	$\int_1^{12} \frac{\lg x}{x} \, dx$	15	$\int_{\pi/8}^{\pi} \frac{1}{\sin x + 4} \, dx$
8	$\int_{0,5}^5 \frac{e^x + 3}{\sqrt[3]{x}} \, dx$	16	$\int_{0,1}^2 \frac{x}{x^3 + 1} \, dx$

4) Вычислить значение определенного интеграла для подынтегральной функции $f(x)$, заданной таблично (табл. 13.2):

- а) методом левых прямоугольников;
- б) методом трапеций;
- в) методом Симпсона;

г) на основе сплайн-интерполяции подынтегральной функции $y=f(x)$ с последующим применением оператора интегрирования.

Т а б л и ц а 13.2

Исходные данные для численного интегрирования функции,
заданной таблично

Вариант	Узловые значения x_i и значения подынтегральной функции y_i в узлах
1	2
1	$x = \{1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 6,5; 7\}$ $y = \{15,4; 4,7; 1; 8,9; 28,4; 18; 15,5; 1; 3; 5,3; 11; 2; 4,1\}$
2	$x = \{7; 8,1; 9,2; 10,3; 11,4; 12,5; 13,6; 14,7; 15,8; 16,9; 18\}$ $y = \{9,8; 1,2; 6; 3,5; 1,9; 4,4; 11; 8,2; 1,3; 9; 17\}$
3	$x = \{0,1; 0,5; 0,9; 1,3; 1,7; 2,1; 2,5; 2,9; 3,3; 3,7; 4,1\}$ $y = \{0,4; 7,2; 1,7; 22; 7,9; 11,5; 4,9; 8; 1,4; 0,7; 12\}$
4	$x = \{5; 6,15; 7,3; 8,39; 10; 10,7; 12,3; 12,8; 13\}$ $y = \{13,312; 8,7; -5,07; -7,973; -8,74; 2,5; 4,25; 13; 8,33\}$
5	$x = \{3; 3,5; 4; 4,5; 5,5; 6,5; 7; 7,5; 8; 8,5; 9\}$ $y = \{14,3; 6,1; 7; 33,4; 8,7; 2; 19,2; 7,1; 11; 37; 20\}$
6	$x = \{2,6; 4,8; 7; 9,2; 11,4; 13,6; 15,8; 18; 20,2\}$ $y = \{5; 0,7; 1,8; 4,6; 12, 1; 5; 14,9; 3,5; 0,3\}$
7	$x = \{5; 5,3; 5,6; 5,9; 6,2; 6,5; 6,8; 7,1; 7,4; 7,7; 8\}$ $y = \{25; 12, 8,8; 0,7; 11,5; 1,7; 17; 0,9; 1, 4; 4; 7,1\}$
8	$x = \{0,2; 0,8; 1,4; 2; 2,6; 3,4; 4; 4,6; 5,2; 5,8; 6,4\}$ $y = \{1,2; 2,9; 19; 1,8; 11,7; 32,9; 23; 5; 17,1; 4; 15,2\}$
9	$x = \{1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 6,5; 7\}$ $y = \{17; 5,1; 3; 16,7; 7,2; 2,5; 27; 1,5; 17,2; 8; 0,2; 6,1; 13\}$
10	$x = \{7,5; 7,8; 8,1; 8,4; 8,7; 9; 9,3; 9,6; 9,9; 10,2; 10,5\}$ $y = \{31,2; 17,3; 4,5; 9,9; 2; 7,5; 25; 11,2; 42; 11,8; 3,7\}$
11	$x = \{1,3; 1,9; 2,5; 3,1; 3,7; 4,3; 4,9; 5,5; 6,1; 6,7; 7,3\}$ $y = \{3,9; 1,7; 9,9; 13; 5,4; 10,5; 25; 13,1; 2; 8,2; 7\}$

1	2
12	$x = \{3; 3,5; 4; 4,5; 5,5; 6,5; 7; 7,5; 8; 8,5; 9; 9,5; 10\}$ $y = \{3,6; 1,3; 7; 4,2; 7,8; 7; 19; 6,1; 4,8; 18,1; 10; 15,5; 7\}$
13	$x = \{5,9; 7; 8,1; 9,2; 10,3; 11,4; 12,5; 13,6; 14,7; 15,8; 16,9\}$ $y = \{0,6; 29; 10,4; 2,1; 15,7; 6,3; 1; 3,16; 16,9; 27; 4,8\}$
14	$x = \{0,9; 1,3; 1,7; 2,1; 2,5; 2,9; 3,3; 3,7; 4,1; 4,5; 4,9\}$ $y = \{25; 10; 5,4; 1,5; 7,8; 15,3; 3; 8,8; 1,9; 29; 21,5\}$
15	$x = \{0,8; 1,4; 2; 2,6; 3,4; 4; 4,6; 5,2; 5,8; 6,4; 7; 7,6; 8,2\}$ $y = \{6,1; 13,3; 37; 8; 1,8; 9,3; 25; 12,7; 7; 28,5; 11; 3,3; 7\}$
16	$x = \{5,9; 6,2; 6,5; 6,8; 7,1; 7,4; 7,7; 8; 8,3; 8,6; 8,9\}$ $y = \{7; 2,9; 9; 2,7; 11,7; 5,8; 11; 25,1; 10; 14; 1,8\}$

Библиографический список

1. Голубева Н. В. Математическое моделирование систем и процессов: Учебное пособие / Н. В. Голубева. СПб: Лань, 2013. 192 с.

2. Амосов А. А. Вычислительные методы: Учебное пособие / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. СПб: Лань, 2014. 672 с.

Учебное издание

ГОЛУБЕВА Нина Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Часть 5

Учебно-методическое пособие

Редактор Н. А. Майорова

* * *

Подписано в печать 12.09.2018. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,4. Уч.- изд. л. 2,7.
Тираж 350 экз. Заказ .

* *

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35