Н. В. ГОЛУБЕВА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

ЧАСТЬ 3

ОМСК 2017

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

Н. В. Голубева

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Часть 3

Утверждено методическим советом университета
в качестве учебно-методического пособия
к выполнению лабораторных работ и самостоятельной работы
по дисциплинам «Математическое моделирование систем и процессов»,
«Численные методы моделирования» и
«Вычислительная техника в инженерных задачах»

Омск 2017

УДК 519.65(075.8)
ББК 22.19я73
Г62

Математическое моделирование систем и процессов: Учебно-методическое пособие к выполнению лабораторных работ и самостоятельной работы. Часть 3 / Н. В. Голубева; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2017. 37 с.

Рассматриваются математические модели различных классов, методы их решения и графического отображения результатов моделирования средствами интегрированной среды PTC Mathcad Prime 3.1.

Предназначено для студентов 2-го и 3-го курсов, обучающихся по специальностям «Системы обеспечения движения поездов», «Электроэнергетика и электротехника», «Подвижной состав железных дорог», «Эксплуатация железных дорог»; по направлениям подготовки «Стандартизация и метрология», «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», «Теплоэнергетика и теплотехника», «Наземные транспортно-технологические комплексы»; для студентов заочной формы обучения и для обучения с использованием дистанционных образовательных технологий.

Библиогр.: 5 назв. Табл. 4.

Рецензенты: доктор техн. наук, профессор В. Н. Горюнов;
доктор техн. наук, профессор В. А. Нехаев.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Важнейшей частью программы подготовки современного специалиста − выпускника технического университета − является обучение его основам, приемам и инструментам математического моделирования − главного научного метода познания − и формирование у него соответствующих профессиональных компетенций. Решение научных и инженерно-технических задач, связанных с исследованием и проектированием технических систем, оптимизацией их параметров или структуры, оптимальным управлением объектом или прогнозированием его поведения, изучением механизма явлений, осуществляется на основе математического моделирования.

Учебно-методическое пособие по дисциплинам «Математическое моделирование систем и процессов», «Численные методы моделирования» и «Вычислительная техника в инженерных задачах» состоит из пяти частей.

Настоящее учебно-методическое пособие включает в себя три лабораторные работы. В седьмой лабораторной работе рассматриваются математические модели в форме обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и возможности реализация численных методов их решения в среде PTC Mathcad Prime 3.1. Лабораторная работа 8 нацелена на получение навыков и умения численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений n-го порядка и освоение метода качественного анализа динамических систем. В лабораторной работе 9 рассматриваются принципы и особенности реализации типовых моделей двух классов случайных последовательностей, используемых при формировании стохастических моделей физических систем. В процессе выполнения лабораторных работ студент должен уяснить важность правильной постановки задачи, выбора метода ее решения и способа отображения результатов моделирования и умения правильно интерпретировать их.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов 2-го и 3-го курсов очного и заочного обучения, а также для обучения с использованием дистанционных образовательных технологий.

Лабораторная работа 7

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФОРМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

7.1. Постановка задачи

Решение многих научно-технических задач, связанных с проектированием и исследованием технических систем, базируется на математическом моделировании различных элементов и устройств обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Математический аппарат ОДУ используется в механике, физике, электронике, электротехнике, теории автоматического управления, радиотехнике, гидродинамике для описания процессов и объектов различной физической природы.

Данная лабораторная работа посвящена динамическим математическим моделям в форме ОДУ первого порядка и численным методам их решения. Особое внимание уделяется постановке задачи Коши, ее решению различными методами и средствами PTC Mathcad Prime 3.1, представлению результатов решения в графическом виде.

Дана математическая модель в форме ОДУ первого порядка, принадлежащая классу линейных нестационарных моделей:

$$\left(t^2+9\right)\frac{dy(t)}{dt}+19{,}5\,t\,y(t)-7=0.$$

Требуется найти численное решение данного ОДУ на отрезке [0; 8] при начальных условиях $y(t_0)$ = 0,24, т. е. решить задачу Коши различными методами и различными средствами PTC Mathcad Prime 3.1; получить семейство интегральных кривых, варьируя начальные условия; выявить зависимость результатов моделирования от числа шагов интегрирования; ответить на контрольные вопросы.

7.2. Информация к выполнению задания 1

Применение Блока решения PTC Mathcad Prime 3.1 для решения ОДУ имеет свои особенности.

Сначала в верхнюю строку вводится обыкновенное дифференциальное уравнение в естественной математической форме. При этом производная задается либо с помощью оператора производной $\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$, либо с помощью оператора «штрих» f' с вкладки Математика ⇒ группа Операторы и символы ⇒ список Операторы.

Искомая функция y представляется как функция независимой переменной t – y(t).

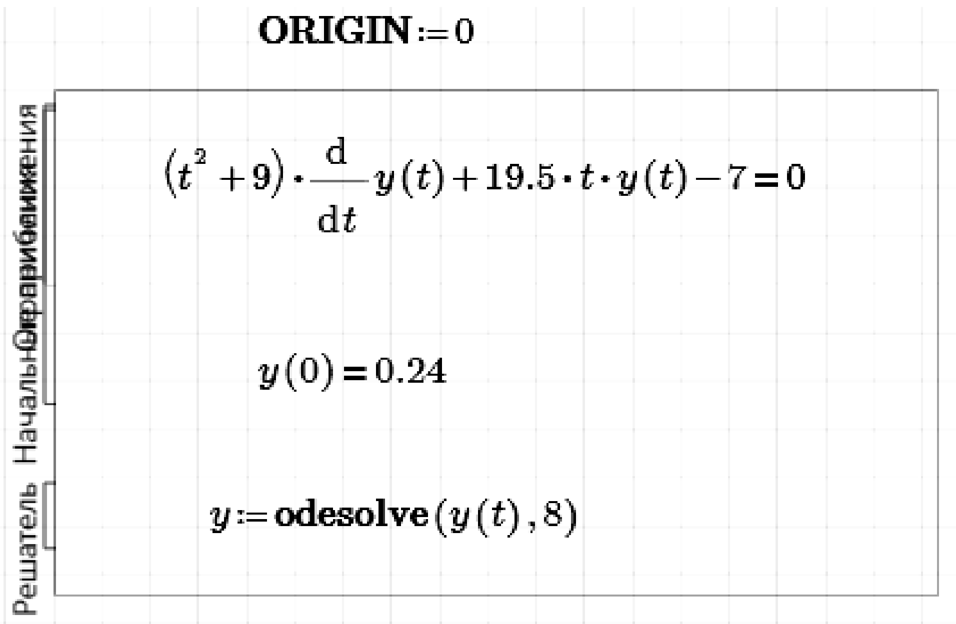
В следующей строке задаются начальные условия.

При записи ОДУ и начальных условий необходимо применять логический оператор «равно» **=**.

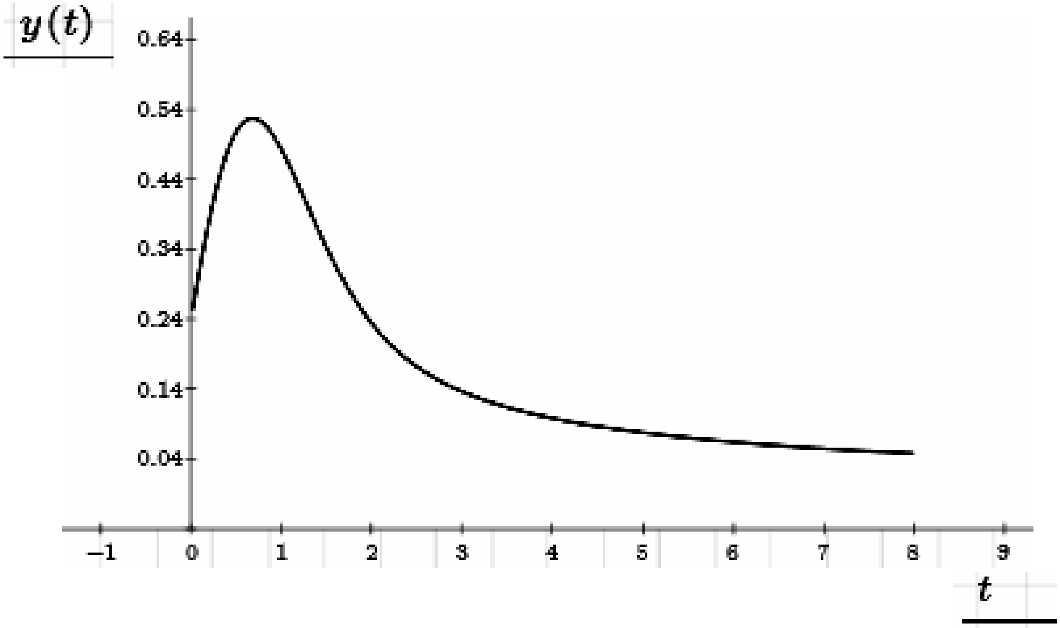
В раздел Решатель вводится встроенная функция odesolve(y(t), t_k), которая реализует решение задачи Коши численным методом Адамса – Башфорта. Аргументы функции odesolve: y(t) – искомая функция; t_k – правая граница интервала интегрирования [t_0; t_k], на котором требуется найти решение ОДУ.

Пример выполнения задания 1.

Решение задачи Коши для заданного ОДУ с помощью Блока решения и встроенной функции odesolve( ):



Интегральная кривая – график решения y(t):



7.3. Информация к выполнению задания 2

Встроенная функция r k f i x e d(y, t_0, t_k, n, D) реализует численное решение задачи Коши на отрезке $[t_0;\ t_k]$ методом Рунге – Кутта четвертого порядка с фиксированным шагом. Параметры функции r k f i x e d: y – начальные условия; n – число шагов интегрирования (количество точек, в которых определяется приближенное решение ОДУ); D – функция, содержащая правую часть ОДУ, приведенного к форме Коши или к нормальной форме, т. е. разрешенного относительно первой производной.

Результат функции r k f i x e d выдается в виде матрицы Yrk, состоящей из (n + 1) строк и двух столбцов: первый столбец $\left(Yrk^{\langle 0\rangle}\right)$ содержит значения аргумента t, второй $\left(Yrk^{\langle 1\rangle}\right)$ – значения искомой функции y(t).

На экран выводится только верхний фрагмент матрицы Yrk. Чтобы увидеть остальные элементы матрицы Yrk, следует щелкнуть по ней ЛКМ. При этом слева появляются порядковые номера строк матрицы. Поместить указатель мыши в самую нижнюю строку под знаком «⁝». Добиться, чтобы указатель принял форму ⟺, после чего посредством ЛКМ перемещать его вниз.

П р и м е р в ы п о л н е н и я з а д а н и я 2.

Решение задачи Коши с помощью встроенной функции R k f i x e d:

$$y_0 := 0.24$$

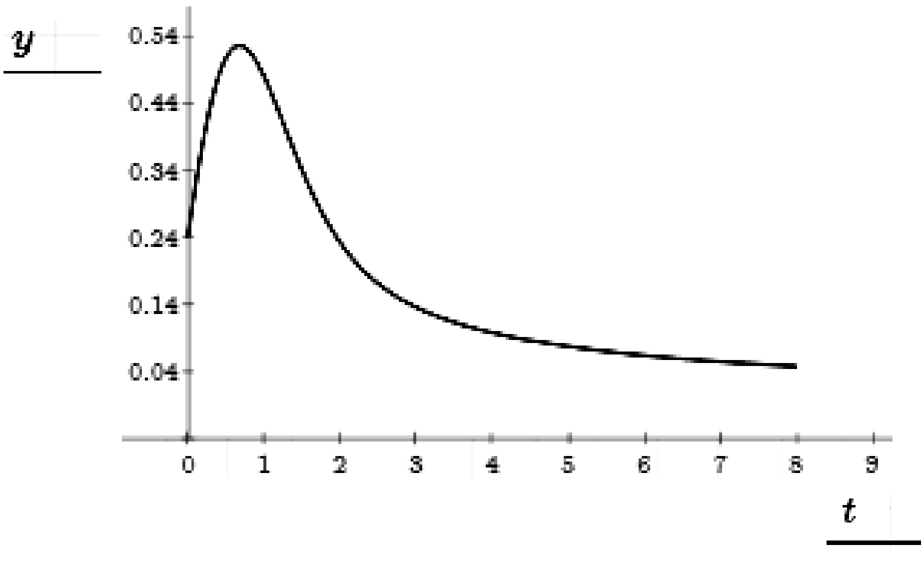
$$D(t,y) := \frac{-19.5 \cdot t \cdot y_0 + 7}{t^2 + 9}$$

$$Yrk := \text{rkfixed}(y, 0, 8, 500, D)$$

Матрица решения Yrk и интегральная кривая – график решения y(t):

$$Yrk = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ \vdots \\ 500 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0.24 \\ 0.016 & 0.252 \\ 0.032 & 0.265 \\ 0.048 & 0.277 \\ 0.064 & 0.289 \\ 0.08 & 0.3 \\ 0.096 & 0.312 \\ 0.112 & 0.323 \\ 0.128 & 0.334 \\ & \vdots \end{bmatrix}$$

$t := Yrk^{\langle 0 \rangle}$ $\quad y := Yrk^{\langle 1 \rangle}$



7.4. Информация к выполнению задания 3

Встроенная функция Rkadapt(y_0,t_0,t_k,n,D) реализует решение задачи Коши на отрезке [t_0; t_k] методом Рунге − Кутта четвертого порядка с шагом интегрирования, адаптивно выбираемым в зависимости от характера изменения функции y(t). Параметры y_0,t_0,t_k,n,D функции Rkadapt аналогичны параметрам функции rkfixed.

Результат функции R k a d a p t выдается в виде матрицы Yrkad размером $(n+1)\times 2$.

Пример выполнения задания 3.

Решение задачи Коши с помощью встроенной функции R k a d a p t:

$$\mathbf{clear}(y)$$

$$y_0 := 0.24$$

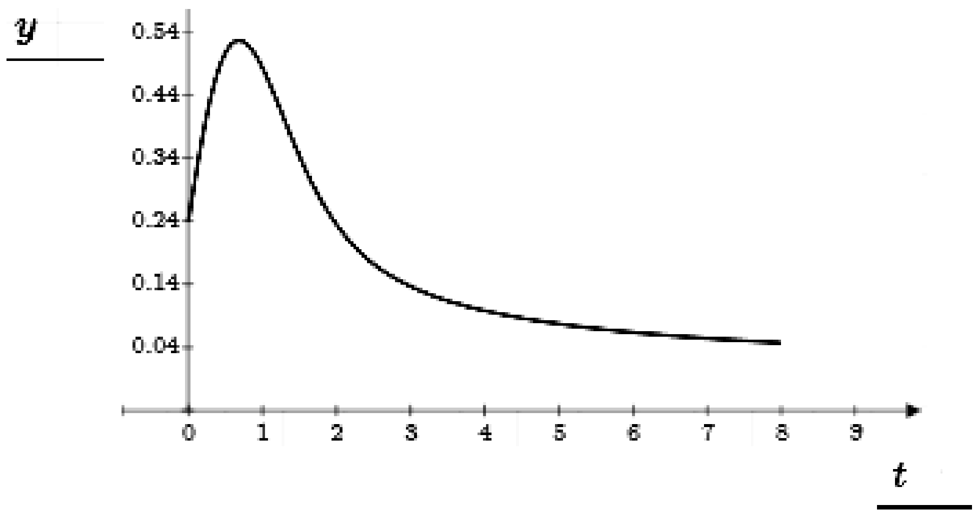
$$D(t,y) := \frac{-19.5\cdot t\cdot y_0+7}{t^2+9}$$

$$Yrkad := \mathrm{Rkadapt}(y,0,8,500,D)$$

Матрица решения Yrkad и интегральная кривая – график решения y(t):

$$Yrkad = \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\ \vdots\\500 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 0.24\\ 0.016 & 0.252\\ 0.032 & 0.265\\ 0.048 & 0.277\\ 0.064 & 0.289\\ 0.08 & 0.3\\ 0.096 & 0.312\\ 0.112 & 0.323\\ 0.128 & 0.334\\ & \vdots \end{bmatrix}$$

$$t := Yrkad^{\langle 0\rangle} \qquad y := Yrkad^{\langle 1\rangle}$$



7.5. Информация к выполнению задания 4

Для получения нескольких интегральных кривых из семейства интегральных кривых заданного ОДУ необходимо варьировать начальные условия y_0. Для отображения четырех кривых, соответствующих разным начальным условиям, в одной графической области надо использовать разные обозначения для столбца $\boldsymbol{Yrk}^{\langle 1\rangle}$, содержащего значения искомой функции y.

П р и м е р   в ы п о л н е н и я   з а д а н и я   4.

Получение четырех кривых из семейства интегральных кривых заданного ОДУ с помощью встроенной функции r k f i x e d:

$$\mathbf{clear}(y)$$

$$y_0 := 0.5$$

$$D(t,y) := \frac{-19.5 \cdot t \cdot y_0 + 7}{t^2 + 9}$$

$$Yrk := \text{rkfixed}(y, 0, 8, 500, D)$$

$$t := Yrk^{\langle 0\rangle} \qquad y\_0.5 := Yrk^{\langle 1\rangle}$$

$$y_0 := 1.5$$

$$D(t,y) := \frac{-19.5 \cdot t \cdot y_0 + 7}{t^2 + 9}$$

$$Yrk := \text{rkfixed}(y, 0, 8, 500, D)$$

$$t := Yrk^{\langle 0\rangle} \qquad y\_1.5 := Yrk^{\langle 1\rangle}$$

$$y_0 := 3$$

$$D(t,y) := \frac{-19.5 \cdot t \cdot y_0 + 7}{t^2 + 9}$$

$$Yrk := \text{rkfixed}(y, 0, 8, 500, D)$$

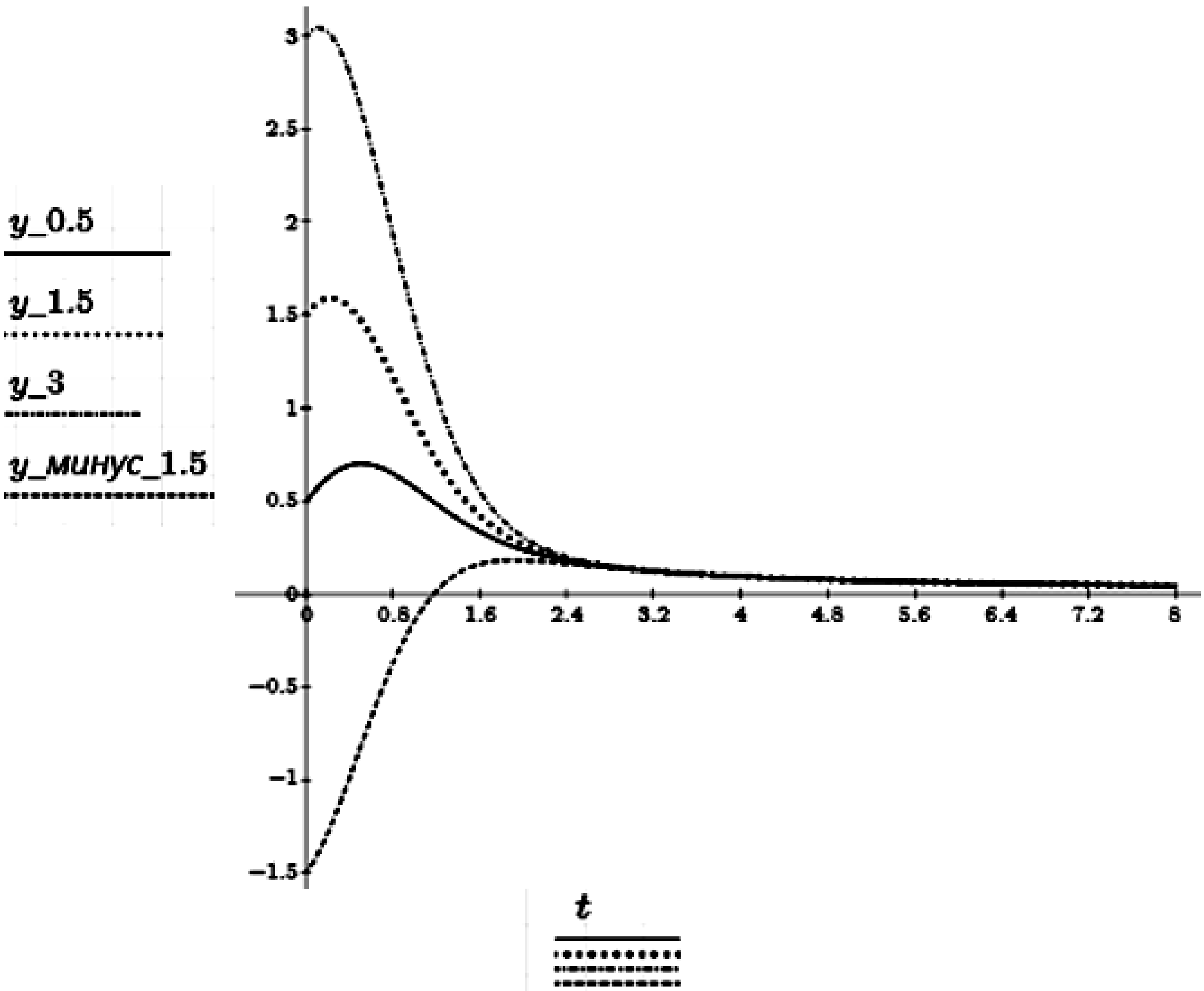
$$t := Yrk^{\langle 0\rangle} \qquad y\_3 := Yrk^{\langle 1\rangle}$$

$$y_0 := -1.5$$

$$D(t,y) := \frac{-19.5 \cdot t \cdot y_0 + 7}{t^2 + 9}$$

$$Yrk := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 8, 500, D)$$

$$t := Yrk^{\langle 0 \rangle} \qquad y\_минус\_1.5 := Yrk^{\langle 1 \rangle}$$



7.6. Задания

1) Решить задачу Коши для заданной модели (табл. 7.1) с помощью Блока решения и встроенной функции o d e s o l v e ( ).

2) Решить задачу Коши для заданной модели (см. табл. 7.1) с помощью встроенной функции r k f i x e d.

3) Решить задачу Коши для заданной модели (см. табл. 7.1) с помощью встроенной функции R k a d a p t.

4) Построить четыре кривые из семейства интегральных кривых заданной модели с помощью встроенной функции rkfixed.

5) Ответить на *контрольные вопросы:*

а) к какому классу принадлежит исследуемая математическая модель с точки зрения классификации по форме представления?

б) определить характер модели;

в) раскрыть понятия «общее решение ОДУ», «частное решение ОДУ»;

г) сформулировать постановку задачи Коши;

д) к какому классу относятся методы решения моделей в форме ОДУ, примененные в данной лабораторной работе;

е) в чем суть (особенность) численных методов решения ОДУ;

ж) чем определяется порядок и точность численного метода;

з) какие средства Mathcad вы использовали для решения модели в форме ОДУ первого порядка? В чём особенность каждого из них?

Таблица 7.1

Математические модели в форме ОДУ первого порядка

Вариант	Математическая модель	Начальные условия	Интервал
1	2	3	4
1	$y'(t)+6,3t^2\,y(t)-1.7\sqrt{t}=0$	$y(0)=-1,1$	$[0;5]$
2	$2,1y'(t)+\sqrt{t}\,\sin y(t)=0$	$y(0)=-1$	$[0;7]$
3	$\dfrac{12}{t+7,7}\,y'(t)-\dfrac{3,7}{y(t)\,t^3+2}=0$	$y(0)=1$	$[0;7]$
4	$(t+1,7)\,y'(t)+\dfrac{38\cos(1.3t)}{4.2\,y(t)+4.7}=0$	$y(0)=2$	$[0;20]$
5	$y'(t)+4.6\sqrt{t}+\dfrac{3y(t)}{5,2+t}-11=0$	$y(0)=5,5$	$[0;10]$
6	$1,3y'(t)-\dfrac{5+t\,y(t)}{\sin t-1,5}=0$	$y(0)=-2$	$[0;12]$
7	$3,3y'(t)+(y(t)+5,7)\,y(t)=0$	$y(0)=1,2$	$[0;4]$

Окончание табл. 7.1

1	2	3	4
8	$y'(t)+\dfrac{0,11}{t+0,6}\sin(4,7t)\,y(t)=0$	$y(0)=1$	[0;14]
9	$0,7y'(t)+\dfrac{y(t)}{t^3+1,8}=0$	$y(0)=10$	[0;8]
10	$(t+3,8)y'(t)+8\cos\left(2t^2\right)y(t)=0$	$y(0)=3$	[0;6]
11	$y'(t)-(1,6\,t\,y(t)+0,2)\,y(t)+7=0$	$y(0)=2$	[0;10]
12	$y'(t)+0,45y(t)+2,7\sin(3,14t)=0$	$y(0)=5$	[0;17]
13	$0,5y(t)\,y'(t)+0,7\sqrt{t}\,y(t)-0,64=0$	$y(0)=4,5$	[0;15]
14	$y'(t)+\dfrac{5,5\,t\,y(t)}{\cos(3t)+2,7}-7=0$	$y(0)=-4$	[0;14]
15	$5.3y'(t)-y(t)(y(t)-4\sqrt{t})=0$	$y(0)=-3$	[0;9]

Лабораторная работа 8

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФОРМЕ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-го ПОРЯДКА

8.1. Численное решение модели в форме системы ОДУ

Численное решение системы ОДУ предполагает ее представление в форме Коши или в нормальной форме:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}. \tag{8.1}$$

З а д а ч а К о ш и для системы ОДУ формулируется так: *найти решение системы ОДУ, удовлетворяющее начальным условиям:* $y_1(t_0) = y_{10};\ y_2(t_0) = y_{20};\ \ldots;\ y_n(t_0) = y_{n0}$.

В векторной форме нормальная система ОДУ имеет вид:

$$Y' = F(t, Y) \ \text{ при } \ Y(t_0) = Y_0.$$

Дана математическая модель в виде системы двух ОДУ первого порядка в нормальной форме:

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 - y_2^2 - 11{,}7\,y_2; \\ y_2' = -y_2 - 0{,}3\,y_1^2 + y_1 y_2. \end{cases} \tag{8.2}$$

Требуется найти численное решение данной системы ОДУ на отрезке [0; 4] при начальных условиях $y_1(t_0) = 3,\ y_2(t_0) = -1,$ т. е. решить задачу Коши.

8.2. Информация к выполнению задания 1.а

В Блок решения последовательно вводятся первое дифференциальное уравнение заданной системы ОДУ, начальные условия для первой искомой функции y_1, в следующую строку – второе дифференциальное уравнение системы ОДУ, начальные условия для второй искомой функции y_2. При этом производные задаются либо с помощью оператора производной $\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$, либо с помощью оператора «штрих» f' с вкладки Математика => группа Операторы и символы =>список Операторы. Искомые функции y_1 и y_2 представляются как функции независимой переменной t, − $y_1(t)$ и $y_2(t)$.

При записи ОДУ и начальных условий необходимо применять логический оператор «равно» **=**.

В раздел Решатель вводится встроенная функция o d e s o l v e (Y(t), t_k), которая реализует решение задачи Коши одним из численных методов. Через функцию o d e s o l v e система Mathcad осуществляет выбор целесообразного численного метода решения из следующего перечня методов: Адамса − Башфорта, BDF (формула обратного дифференцирования) – для жестких систем ОДУ, Рунге − Кутта четвертого порядка с фиксированным или адаптивно выбираемым шагом в зависимости от характера изменения функций, Radau – для жестких или имеющих алгебраические ограничения систем ОДУ.

Аргументы функции odesolve: Y(t) – вектор-столбец, содержащий искомые функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$; t_k – правая граница интервала интегрирования $[t_0; t_k]$, на котором требуется найти решение системы ОДУ.

Пример выполнения задания 1.а

Решение задачи Коши для заданной системы ОДУ с помощью Блока решения и встроенной функции odesolve( ):

$$\mathbf{ORIGIN} := 1$$

$$y1'(t) = -3\cdot y1(t) - y2(t)^2 - 11.7\cdot y2(t)$$

$$y1(0) = 3$$

$$y2'(t) = -y2(t) - 0.3\cdot y1(t)^2 + y1(t)\cdot y2(t)$$

$$y2(0) = -1$$

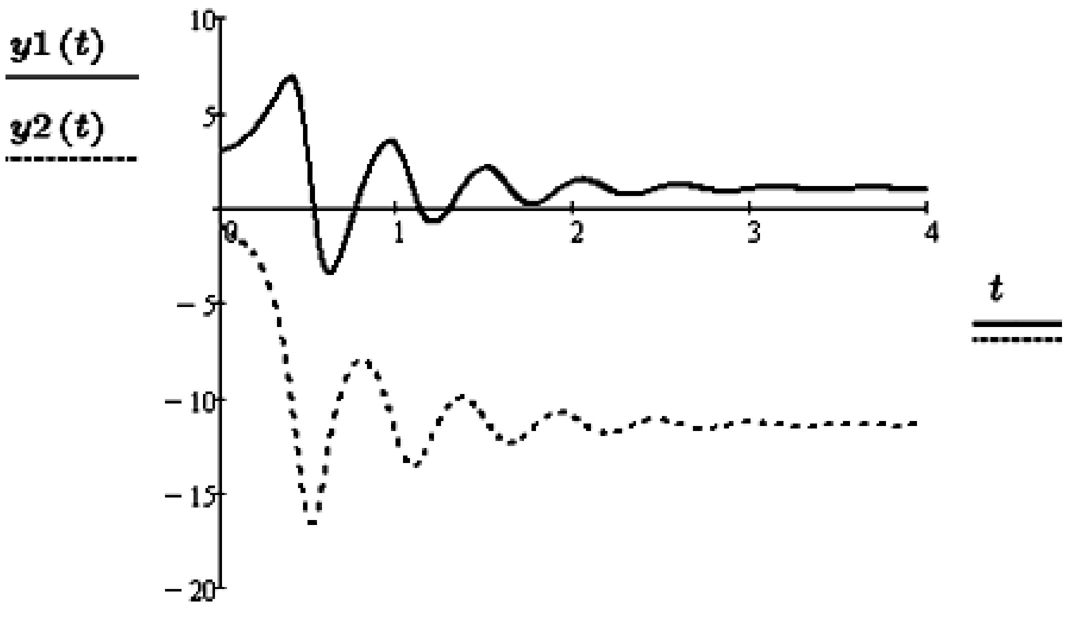
$$\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \end{bmatrix} := \mathbf{odesolve}\left(\begin{bmatrix} y1(t) \\ y2(t) \end{bmatrix}, 4\right)$$

Начальные приближения

Ограничения

Решатель

График решения системы ОДУ:



8.3. Информация к выполнению задания 1.б

Встроенная функция Rkadapt (y,t_0,t_k,m,D) реализует решение задачи Коши на отрезке $[t_0;\ t_k]$ методом Рунге − Кутта с шагом интегрирования, адаптивно выбираемым в зависимости от характера изменения функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$. Параметры функции Rkadapt: y – вектор начальных условий; m – число шагов интегрирования; D – вектор-функция, содержащая правые части $F(t, Y)$ уравнений системы ОДУ, приведенной к форме Коши (нормальной форме).

Результат функции Rkadapt выдаётся в виде матрицы Yrkad, состоящей из $(m+1)$ строк и $(n+1)$ столбцов: первый столбец $Yrkad^{\langle 1\rangle}$ содержит значения аргумента t, второй $Yrkad^{\langle 2\rangle}$ – значения искомой функции $y_1(t)$, третий $Yrkad^{\langle 3\rangle}$ – значения искомой функции $y_2(t)$, $(n+1)$-й столбец $Yrkad^{\langle n+1\rangle}$ – значения искомой функции $y_n(t)$.

Пример выполнения задания 1.б

$$\mathbf{clear}(t)$$

$$y := \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$D(t,y) := \begin{bmatrix} -3\cdot y_1 - {y_2}^2 - 11.7\cdot y_2 \\ -y_2 - 0.3\cdot {y_1}^2 + y_1\cdot y_2 \end{bmatrix}$$

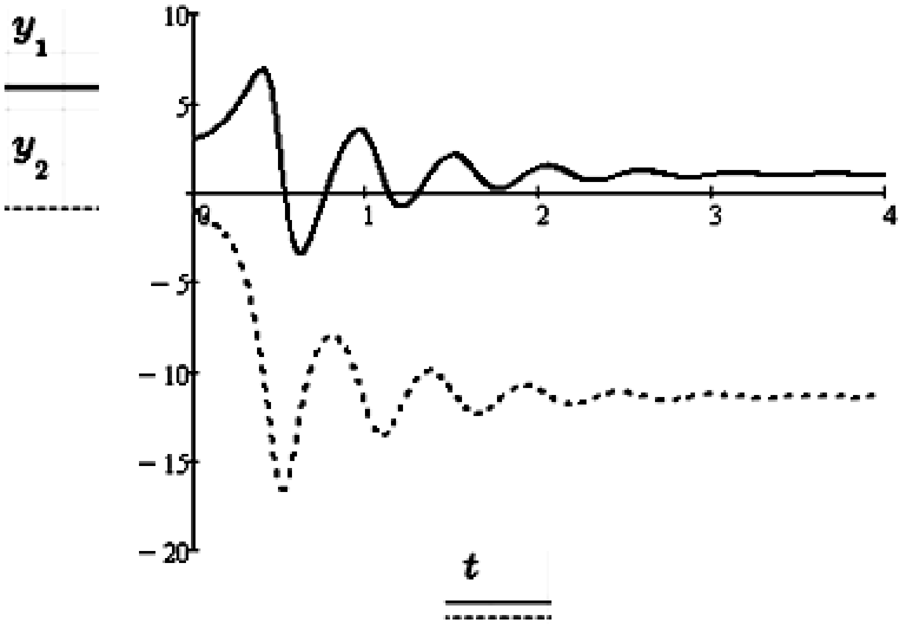
$$Yrkad := \mathrm{Rkadapt}(y, 0, 4, 600, D)$$

Матрица решения:

$$Yrkad = \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ \vdots \\ 601 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0.007 & 3.012 & -1.032 \\ 0.013 & 3.026 & -1.064 \\ 0.02 & 3.042 & -1.097 \\ 0.027 & 3.06 & -1.131 \\ 0.033 & 3.079 & -1.166 \\ 0.04 & 3.1 & -1.201 \\ 0.047 & 3.123 & -1.238 \\ 0.053 & 3.148 & -1.275 \\ & & \vdots \\ & & \end{bmatrix}$$

График решения системы ОДУ:

$t := Yrkad^{\langle 1 \rangle}$ $\qquad$ $y_1 := Yrkad^{\langle 2 \rangle}$ $\qquad$ $y_2 := Yrkad^{\langle 3 \rangle}$



8.4. Информация к выполнению задания 1.в

Для динамического объекта, моделируемого системой двух ОДУ ($n = 2$), можно построить фазовую траекторию $y_2(t) = f(y_1(t))$ на фазовой плоскости. Значения искомых функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$ в момент времени t_i представляют собой координаты изображающей точки, характеризующей состояние исследуемого динамического объекта в данный момент времени. Совокупность таких точек для последовательных моментов времени $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_m$ образует фазовую траекторию. Для $n > 2$ фазовые траектории располагаются в фазовом пространстве.

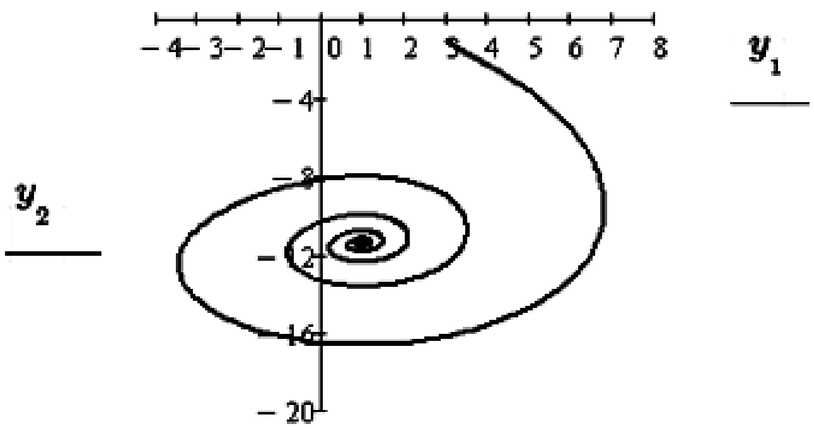
Интегральные кривые для системы двух ОДУ получают в трехмерном пространстве переменных y_1, y_2, t.

Для построения интегральной кривой следует вставить шаблон 3D-графика с вкладки График ⇒ меню Вставить график. В местозаполнитель ввести имя матрицы, содержащей три столбца. При этом данные первого столбца матрицы интерпретируются как координаты отображаемых точек по оси x, данные второго столбца – координаты по оси y, данные третьего столбца – координаты по оси z.

Для того чтобы по оси x отображались значения функции y_1, по оси y – значения функции y_2, по оси z – значения времени t, необходимо сделать соответствующую перестановку столбцов в матрице Yrkad. Для этого следует применить встроенную функцию a u g m e n t ( ). Матрицу, полученную в результате перестановки столбцов, обозначим как YintegrKr.

П р и м е р   в ы п о л н е н и я   з а д а н и я   1.в

Фазовая траектория исследуемой динамической системы:

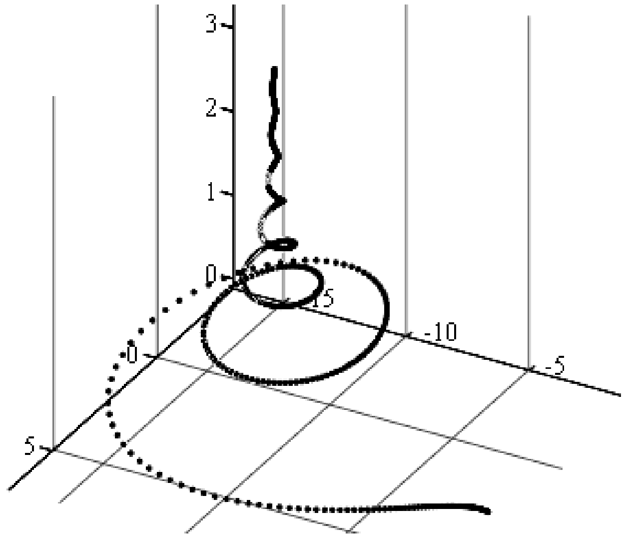


Формирование матрицы YintegrKr путем перестановки столбцов в исходной матрице решений Yrkad:

$$YintegrKr := \text{augment}\left(y_1, y_2, t\right)$$

$$YintegrKr = \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ \vdots \\ 601 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3.012 & -1.032 & 0.007 \\ 3.026 & -1.064 & 0.013 \\ 3.042 & -1.097 & 0.02 \\ 3.06 & -1.131 & 0.027 \\ 3.079 & -1.166 & 0.033 \\ 3.1 & -1.201 & 0.04 \\ 3.123 & -1.238 & 0.047 \\ 3.148 & -1.275 & 0.053 \\ & & \vdots \\ & & \end{bmatrix}$$

Интегральная кривая для заданной системы двух ОДУ:



YintegrKr

8.5. Численное решение модели в форме ОДУ третьего порядка

Дана математическая модель в форме ОДУ третьего порядка:

$$y'''(t) + 0.93y''(t) + 25.3y'(t) + 43\ y^2(t) = 0$$

Требуется найти численное решение данного ОДУ на отрезке [0;10] при начальных условиях $y(t_0)=0$; $y'(t_0)=0,4$; $y''(t_0)=1,5$, т. е. решить задачу Коши.

Для численного решения ОДУ n-го порядка с помощью встроенных функций R k a d a p t и r k f i x e d следует предварительно свести его к нормальной системе n ОДУ первого порядка (в форме Коши).

Информация к выполнению заданий 2.а,б

Системной переменной ORIGIN присваивается значение 0.

Встроенная функция R k a d a p t (y_0,t_0,t_k,m,D) реализует решение задачи Коши на отрезке $[t_0;t_k]$ методом Рунге − Кутта с шагом интегрирования, адаптивно выбираемым в зависимости от характера изменения функции y(t). D – вектор-функция, содержащая правые части уравнений системы ОДУ в форме Коши (в нормальной форме), к которой предварительно сведено заданное ОДУ n-го порядка.

Результат функции R k a d a p t выдаётся в виде матрицы Yrkad, состоящей из $(m+1)$ строк и $(n+1)$ столбцов: нулевой столбец $Yrkad^{\langle 0\rangle}$ содержит значения аргумента t, первый $Yrkad^{\langle 1\rangle}$ – значения искомой функции $y(t)$, второй $Yrkad^{\langle 2\rangle}$ – значения первой производной искомой функции $y'(t)$, третий $Yrkad^{\langle 3\rangle}$ – значения второй производной искомой функции $y''(t)$, n-й столбец – значения $(n-1)$-й производной искомой функции $y^{(n-1)}(t)$.

Для построения фазовой траектории динамической системы, описываемой моделью в форме ОДУ n-го порядка, по осям координат откладывают искомую функцию (решение) $y(t)$ и скорость ее изменения $y'(t)$.

Пример выполнения задания 2.а

$\mathbf{clear}(t) \quad \mathbf{clear}(y)$

$\mathbf{ORIGIN} := 0$

$$y := \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 1.5 \end{bmatrix} \qquad D(t,y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -0.93 \cdot y_2 - 25.3 \cdot y_1 - 43 \cdot {y_0}^2 \end{bmatrix}$$

$$Yrkad := \mathrm{Rkadapt}(y, 0, 10, 500, D)$$

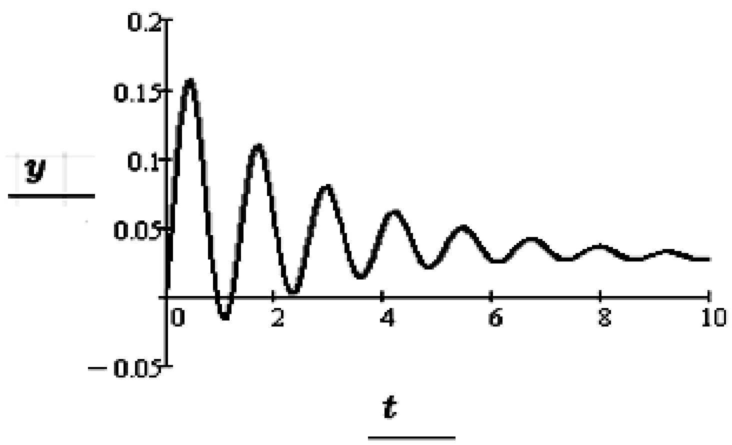
Матрица решения:

$Yrkad =$

0	0	0	0.4	1.5
1	0.02	$8.28 \cdot 10^{-3}$	0.43	1.26
2	0.04	0.02	0.45	1.02
3	0.06	0.03	0.47	0.77
4	0.08	0.04	0.48	0.52
5	0.1	0.05	0.49	0.26
6	0.12	0.06	0.49	0.01
7	0.14	0.07	0.49	−0.24
8	0.16	0.07	0.48	−0.48
⋮				⋮
500				

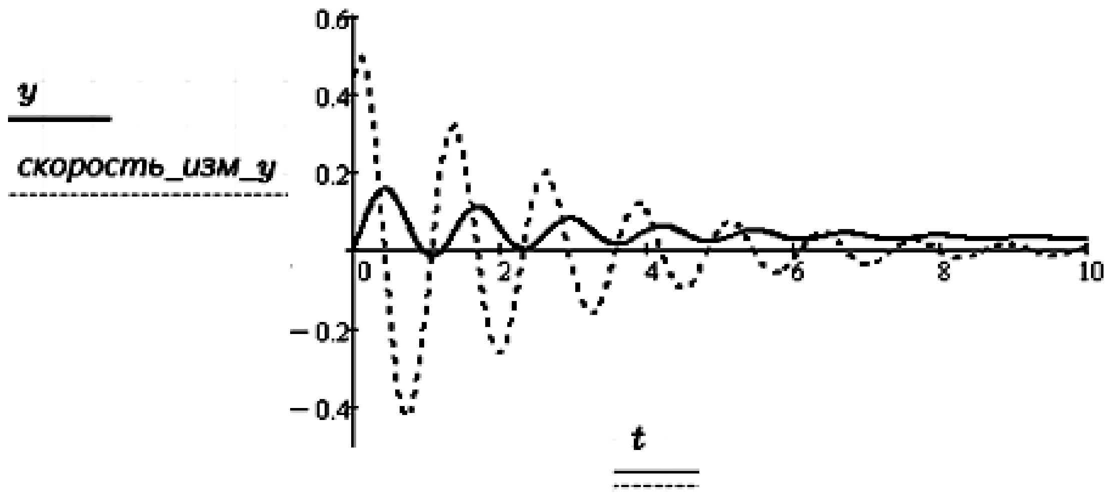
График решения y(t):

$$t := Yrkad^{\langle 0 \rangle} \qquad y := Yrkad^{\langle 1 \rangle}$$

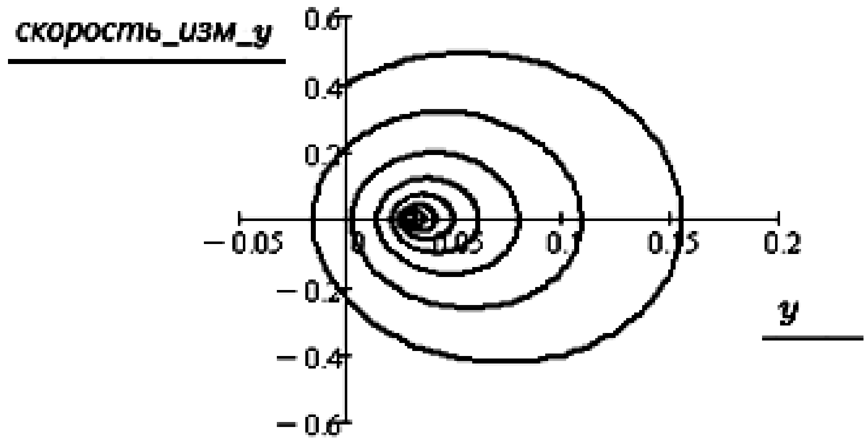


Добавление к графику решения $y(t)$ графика производной решения $y'(t)$:

$$скорость\_изм\_y := Yrkad^{\langle 2 \rangle}$$



Фазовая траектория исследуемой динамической системы:



8.6. Задания

1) Реализовать численное решение математической модели в форме системы ОДУ средствами Mathcad (табл. 8.1):

а) решить задачу Коши с помощью Блока решения и встроенной функции odesolve;

б) решить задачу Коши с помощью встроенной функции Rkadapt;

в) построить фазовую траекторию исследуемой физической системы и интегральную кривую. Интерпретировать полученные результаты.

2) Реализовать численное решение математической модели в форме ОДУ третьего порядка (табл. 8.2) средствами Mathcad:

а) решить задачу Коши с помощью встроенной функции Rkadapt;

б) построить фазовую траекторию исследуемой динамической системы. Интерпретировать полученные результаты.

Таблица 8.1

Математические модели в форме системы ОДУ

Вариант	Система ОДУ	Начальные условия	Интервал
1	2	3	4
1	$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 3y_1 y_2 \\ y_2' = 0,75y_1 - y_1 y_2 + 1,7\sin 2,5t \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	[0;10]
2	$\begin{cases} y_1' = -y_1^2 y_2 \\ y_2' = 11,5y_1 - 5,43y_2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$	[0;1]
3	$\begin{cases} y_1' = 0,6y_1 - y_2^2 \\ y_2' = -y_1^2 - 3y_2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$	[0;8]
4	$\begin{cases} y_1' = -7,3y_2 + 29\cos 3t \\ y_2' = 1,5y_1 - y_2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	[0;15]
5	$\begin{cases} y_1' = -y_1^2 y_2 + 0,7y_1 \\ y_2' = 4y_1^2 - 11y_2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	[0;2]
6	$\begin{cases} y_1' = y_1y_2 - 2,4y_2^2 - 15y_2 \\ y_2' = 0,7y_1^2 + 4y_1y_2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ -7 \end{bmatrix}$	[0;1,5]
7	$\begin{cases} y_1' = -y_2^2 - y_1 y_2 \\ y_2' = 0,5y_1 - y_2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$	[0;5]
8	$\begin{cases} y_1' = -0,15(y_1y_2)^2 - 5.5y_2 \\ y_2' = -1,7y_2^2 - 1,77y_1y_2 + 3,7y_1 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$	[0;7]
9	$\begin{cases} y_1' = 4,1y_1 y_2 + 0,01{y_2}^2 \\ y_2' = -1,43y_1 - y_1 y_2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	[0;6]
10	$\begin{cases} y_1' = -y_1^2 - y_1 y_2 \\ y_2' = 4,5y_1 - 0,43y_2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$	[0;6]

Окончание табл. 8.1

1	2	3	4
11	$\begin{cases} y_1' = 19{,}2\,y_1 - 4{,}3\,y_1 y_2 \\ y_2' = 2{,}8\,y_1^2 - 2{,}2\,y_2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$	[0;4]
12	$\begin{cases} y_1' = 2{,}2\,y_2 - 0{,}3y_1^3 \\ y_2' = -0{,}23\,y_1\,y_2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$	[0;10]
13	$\begin{cases} y_1' = -0{,}38\,y_1^3 - 5{,}7\,y_1\,y_2 \\ y_2' = 3{,}6\,y_1 - 3{,}3\,y_2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} -14 \\ -2 \end{bmatrix}$	[0;7]
14	$\begin{cases} y_1' = 3{,}8\,y_2 - 0{,}8\,y_1\,y_2 \\ y_2' = 5{,}73\,y_1 - 2{,}1\,y_1 y_2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$	[0;8]
15	$\begin{cases} y_1' = 3{,}7\,y_1 + 0{,}85(y_1 y_2)^2 \\ y_2' = -0{,}68\,y_1^2 - 0{,}72\,y_2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$	[0;5]

Таблица 8.2

Математические модели в форме ОДУ третьего порядка

Вариант	ОДУ	Начальные условия	Интервал
1	2	3	4
1	$y'''(t) - 0{,}5y'(t) + 1{,}3y(t) - 4{,}7 = 0$	y(0)=3 $y'(0) = -0{,}2$ $y''(0) = -0{,}1$	[0;10]
2	$y'''(t) - 0{,}36y''(t) + 0{,}34y(t) - 0{,}82\,t = 0$	$y(0) = -0{,}3$ $y'(0) = 0$ $y''(0) = -1$	[0;12]
3	$y'''(t) - 0{,}12y''(t) - 0{,}78y(t) + 0{,}3 = 0$	y(0)= 2 $y'(0) = 0{,}8$ $y''(0) = -1{,}9$	[0;5]
4	$y'''(t) - 0{,}1y'(t) + 1{,}9y(t) - 0{,}9\,t = 0$	y(0)=0,5 $y'(0) = -7{,}7$ $y''(0) = -2$	[0;6]
5	$y'''(t) - 3{,}4y''(t) + 21y'(t) - 0{,}7\,t + 0{,}13 = 0$	y(0)=2 $y'(0) = -0{,}12$ $y''(0) = 0$	[0;5]

Окончание табл. 8.2

1	2	3	4
6	$y'''(t)+5{,}8y''(t)-5y'(t)+8y(t)=0$	y(0)=0,5 y′(0)= −1 y″(0)= 1,3	[0;13]
7	$y'''(t)+4{,}9y''(t)-1{,}7y'(t)+2y(t)+2{,}4t=0$	y(0)=0 y′(0)= −1,2 y″(0)= 1	[0;30]
8	$y'''(t)+12y'(t)+1{,}8y(t)-0{,}6t=0$	y(0)= −10 y′(0)= −0,3 y″(0)= 0,7	[0;30]
9	$y'''(t)+17y'(t)+3{,}9y(t)+2=0$	y(0)= 5 y′(0)= −0,8 y″(0)= 1,4	[0;20]
10	$y'''(t)+80y'(t)+0{,}22y(t)-2=0$	y(0)= 0 y′(0)= −3 y″(0)= 1,3	[0;8]
11	$y'''(t)-0{,}42y''(t)+10{,}4y'(t)-0{,}4y(t)+0{,}03t=0$	y(0)= −8 y′(0)= 0,3 y″(0)= 9,1	[0;25]
12	$y'''(t)+8y''(t)-0{,}26y(t)+\frac{7{,}69}{t+190}=0$	y(0)= 10,58 y′(0)= 0,29 y″(0)= −18,51	[0;30]
13	$y'''(t)+0{,}1\sqrt{t}\,y''(t)+0{,}03y'(t)+27\cos t=0$	y(0)= 80 y′(0)= −0,01 y″(0)= 0,53	[0;36]
14	$y'''(t)+83y'(t)+14{,}45y(t)+270\sin t=0$	y(0)= 25 y′(0)= −0,2 y″(0)= 60,3	[0;30]
15	$y'''(t)+19y''(t)+3{,}93y'(t)+y(t)=0$	y(0)= 3 y′(0)= 6,4 y″(0)= 3,6	[0;40]

Лабораторная работа 9

РЕАЛИЗАЦИЯ ТИПОВЫХ МОДЕЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ

9.1. Постановка задачи

Физическая система, функционирующая в условиях влияния внутренних и внешних случайных факторов (шумов), наиболее адекватно (достоверно) может быть описана с т о х а с т и ч е с к о й математической моделью.

В отличие от д е т е р м и н и р о в а н н о й модели стохастическая модель учитывает случайный характер процессов в моделируемой системе. Во многих задачах это реализуется посредством включения в математическую модель случайного мешающего процесса (ш у м а) $\omega(t)$, воздействующего на исследуемую систему аддитивно или мультипликативно.

В дискретных стохастических моделях понятие «с л у ч а й н ы й п р о ц е с с» заменяется понятием «с л у ч а й н а я п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь».

В связи с этим на этапе исследования и апробации сформированной стохастической модели большое значение приобретают алгоритмы и инструменты реализации т и п о в ы х м о д е л е й случайных процессов (случайных последовательностей). Для этой цели в любой среде программирования созданы генераторы случайных чисел.

Часто в процессе моделирования приходится решать следующую задачу: определять характер распределения некоторой случайной величины x по результатам ее многократных измерений (наблюдений) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Решение основано на построении г и с т о г р а м м ы – ступенчатого графика, аппроксимирующего по результатам измерения случайной величины плотность ее распределения. Диапазон значений случайной величины $[x_{min}; x_{max}]$ разбивают на некоторое количество интервалов, а затем подсчитывают частоту (процент) попадания данных в каждый интервал. Таким образом, гистограмма отображает частоту попадания значений случайной величины в каждый из интервалов.

9.2. Информация к выполнению задания 1

Встроенная функция r n o r m(nn, m_y, σ_y) (категория *Случайные числа*) генерирует последовательность случайных чисел, распределенных по нормальному закону с математическим ожиданием m_y и среднеквадратическим отклонением σ_y. Результатом функции rnorm( ) является вектор y из nn случайных чисел y_i (i – счетчик чисел случайной последовательности y).

Для вывода графика, иллюстрирующего распределение случайных чисел, необходимо воспользоваться инструментом «График XY». При форматировании графика следует установить параметры: символ – «○», стиль линии – «нет», минимальную толщину кривой.

Для построения гистограммы вводятся переменные:

m – количество интервалов, на которые разбивается диапазон изменения случайной величины [y_min; y_max];

y_min – минимальное значение случайной величины y, определяемое с помощью встроенной функции min(y);

y_max – максимальное значение случайной величины y, определяемое с помощью встроенной функции max(y);

велич_интервала – величина интервала (все интервалы имеют одинаковую величину).

Встроенная функция histogram(m, y) (категория – *Статистические функции*) определяет матрицу *Gist*, первый столбец которой содержит середины интервалов, второй столбец – абсолютные частоты попадания значений случайной величины y в соответствующий интервал.

Для построения гистограммы используется инструмент «График XY». При форматировании графика следует установить тип кривой «столбцы», минимальную толщину кривой.

Встроенная функция sort(y) упорядочивает элементы вектора y по возрастанию.

Встроенная функция dnorm(y,m_y,σ_y) (категория *Плотность вероятности*) определяет плотность распределения вероятностей случайной величины y, распределенной по нормальному закону.

Пример выполнения задания 1.

а) Генерирование случайной последовательности y из 1000 чисел (nn = 1000), подчиняющихся нормальному (гауссовскому) закону распределения, с параметрами $m_y = 0$ и $\sigma_y = 1$.

$$\mathbf{ORIGIN} := 0 \qquad nn := 1000$$

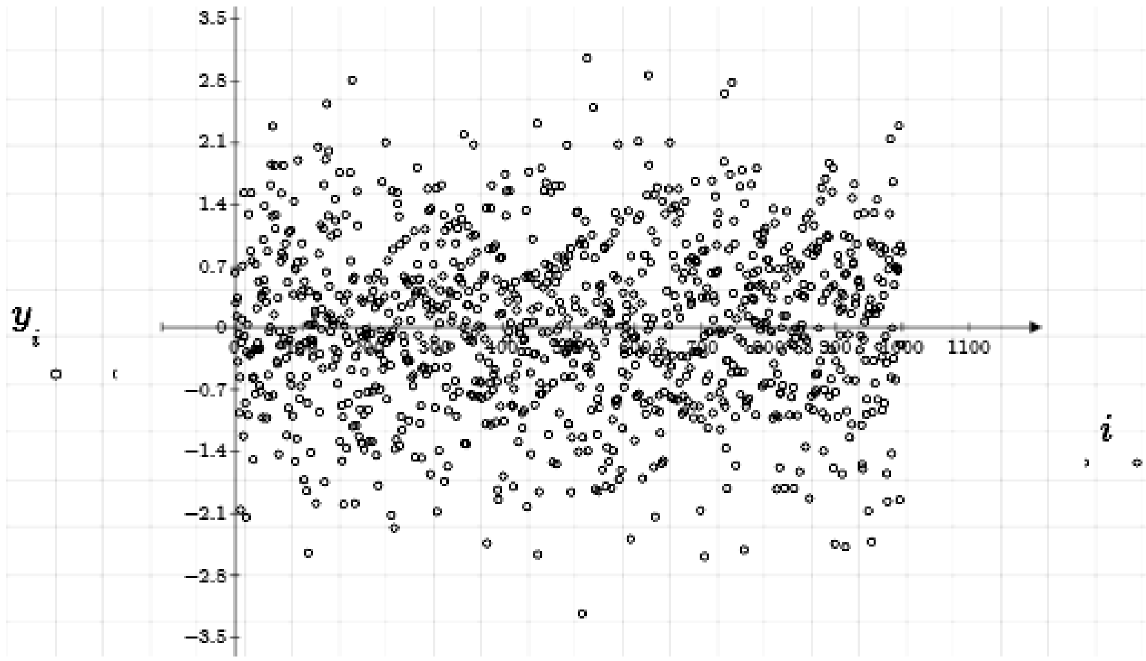
$$y := \mathrm{rnorm}(nn, 0, 1)$$

Вывод вектора случайных чисел y:

$$y = \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ \vdots \\ 999 \end{array} \begin{bmatrix} 1.32 \\ -0.075 \\ -1.466 \\ 0.669 \\ -0.589 \\ 0.046 \\ 0.155 \\ 0.762 \\ -0.976 \\ -1.527 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Построение графика (диаграммы рассеяния), иллюстрирующего распределение случайных чисел y:

$i := 0 .. 999$



б) Построение гистограммы.

Определение величины интервала:

$$m := 20$$

$$y\_min := \min(y) = -2.8 \qquad y\_max := \max(y) = 2.95$$

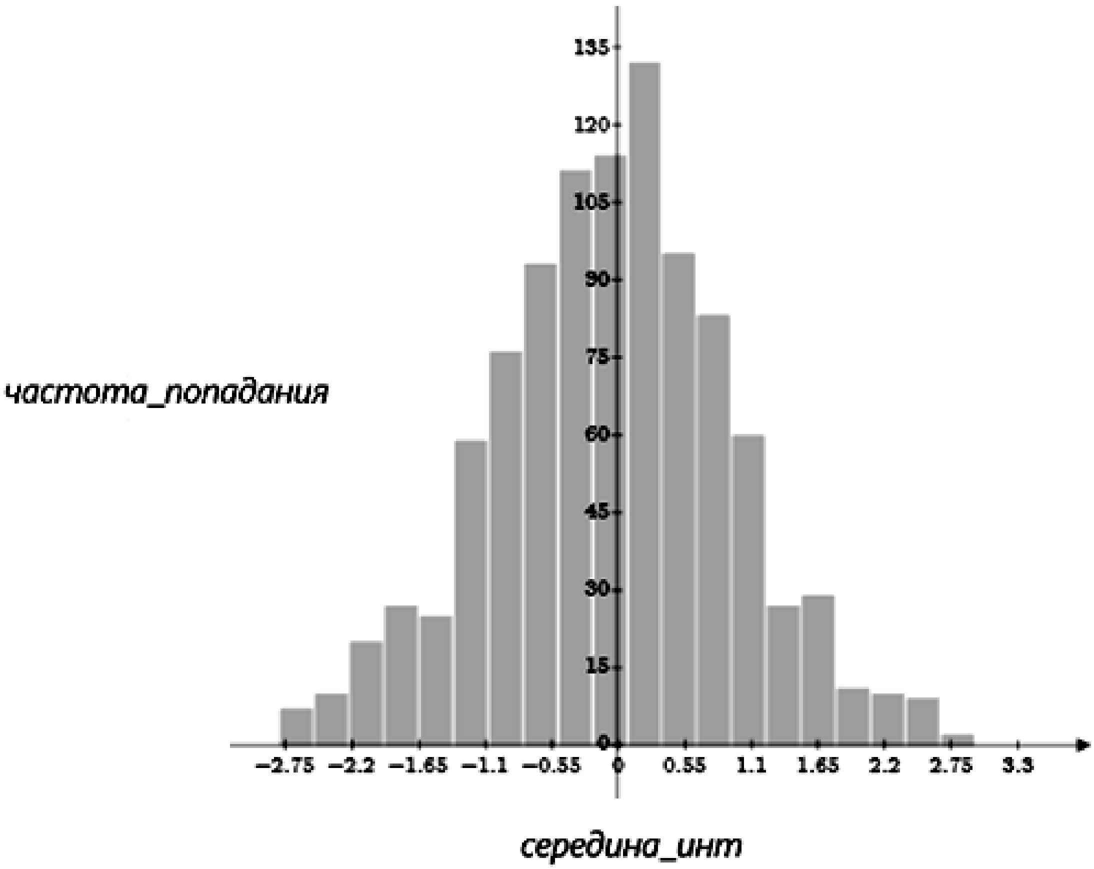
$$велич\_интервала := \frac{y\_max - y\_min}{m} = 0.29$$

Построение гистограммы для абсолютных частот:

$$Gist := \text{histogram}(m, y)$$

$$Gist = \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ \vdots \\ 19 \end{array} \begin{bmatrix} -2.658 & 7 \\ -2.371 & 10 \\ -2.084 & 20 \\ -1.796 & 27 \\ -1.509 & 25 \\ -1.221 & 59 \\ -0.934 & 76 \\ -0.646 & 93 \\ -0.359 & 111 \\ -0.071 & 114 \\ & \vdots \end{bmatrix}$$

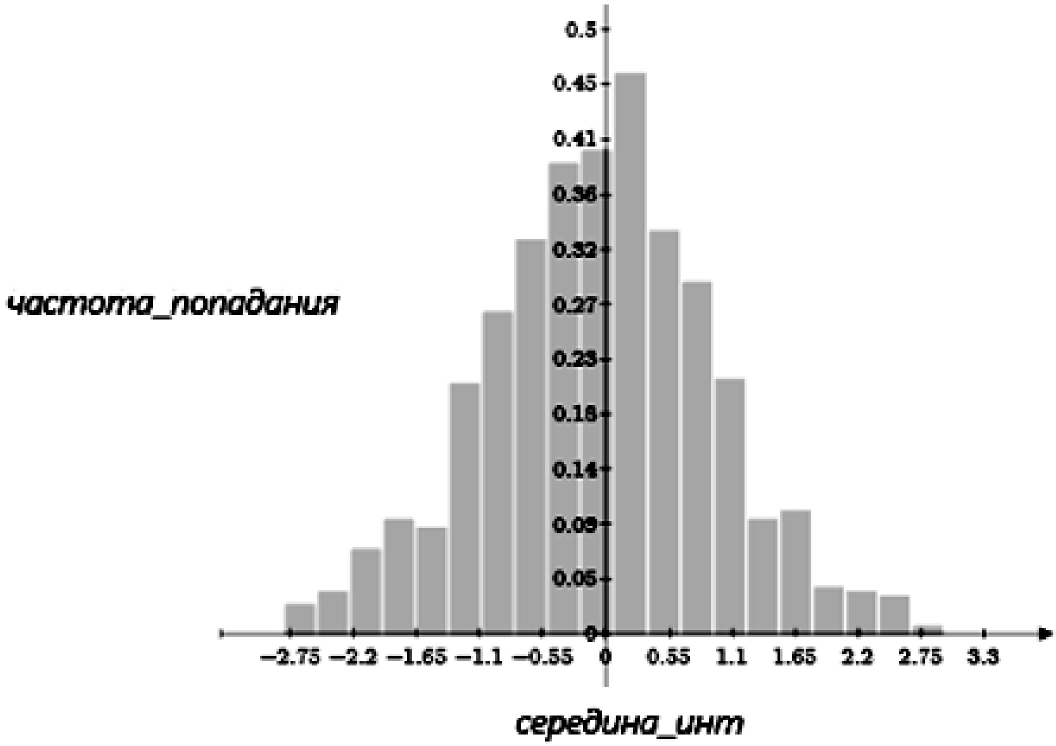
$$середина\_инт := Gist^{\langle 0 \rangle} \qquad частота\_попадания := Gist^{\langle 1 \rangle}$$



Переход от абсолютных частот к относительным:

$$\text{частота\_попадания} := \frac{\text{частота\_попадания}}{nn \cdot (\text{велич\_интервала})}$$

Построение гистограммы для относительных частот:

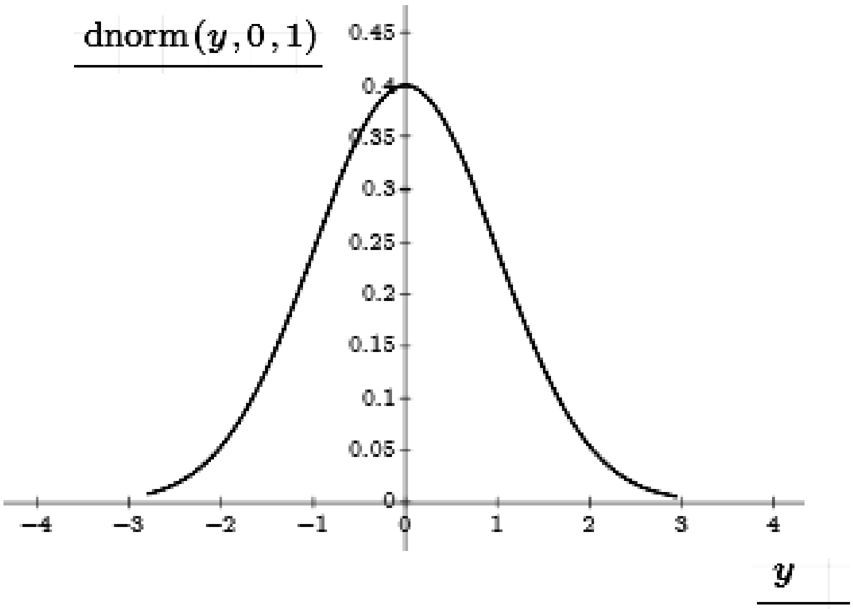


в) Построение графика функции плотности распределения вероятности случайной последовательности y_i:

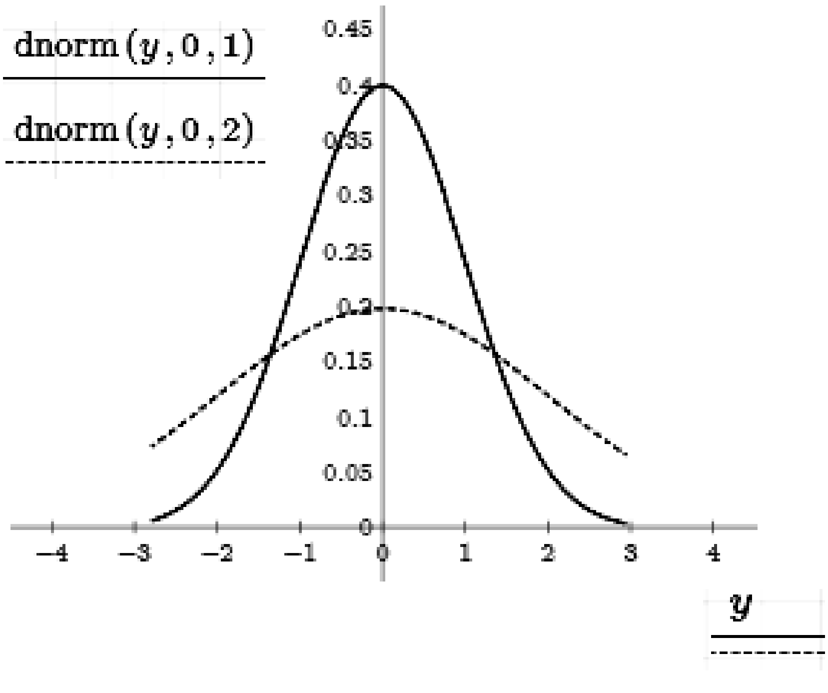
Сортировка элементов вектора y в порядке возрастания:

$$y := \mathrm{sort}(y)$$

$$y = \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ \vdots \\ 999 \end{array} \begin{bmatrix} -2.802 \\ -2.768 \\ -2.695 \\ -2.691 \\ -2.6 \\ -2.595 \\ -2.593 \\ -2.499 \\ -2.465 \\ -2.433 \\ \vdots \\ \end{bmatrix}$$



Сравнение графиков функции плотности распределения вероятности для разных значений среднеквадратического отклонения σ_y:



9.3. Информация к выполнению задания 2

Встроенная функция r u n i f (nn,a,b) (категория *Случайные числа*) генерирует последовательность из nn случайных чисел, распределенных по равномерному закону на интервале [a; b]. Результатом функции является вектор x случайных чисел x_i. Порядковый номер случайного числа задается счетчиком i. Количество случайных чисел x_i задается переменной *nn*.

Переменная m – количество интервалов, на которые разбиваем диапазон [a; b] изменения случайной величины x.

Переменная *велич_интервала* – величина интервала.

Переменная-диапазон *граница_инт* задает значения границ интервалов.

Встроенная функция dunif(x,a,b) (категория *Плотность вероятности*) определяет плотность распределения вероятностей случайной величины x, распределенной по равномерному закону в диапазоне [a; b].

Пример выполнения задания 2.

а) Генерирование случайной последовательности x из 1000 чисел, подчиняющихся равномерному закону распределения в диапазоне [a; b]:

$$nn := 1000 \qquad i := 1..1000$$

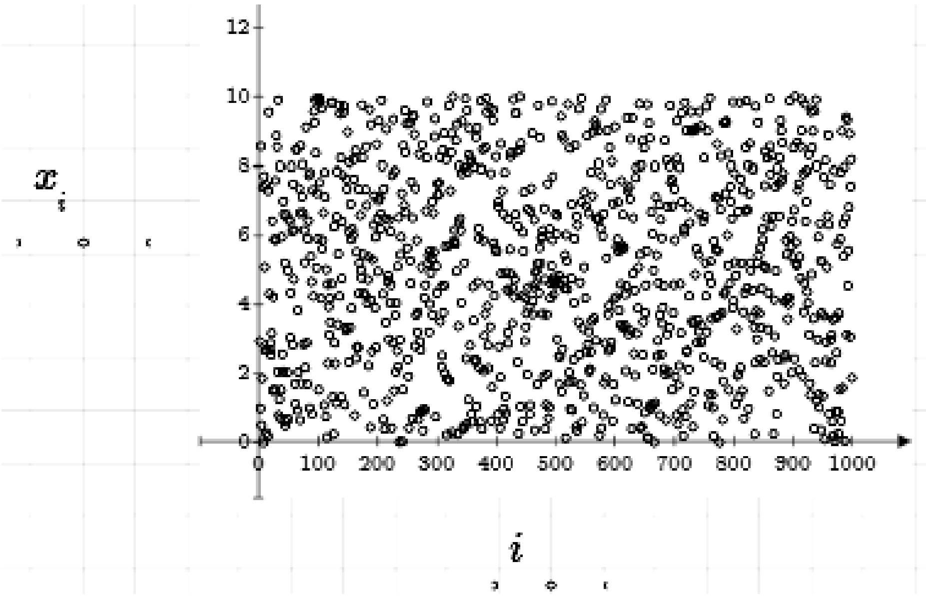
$$a := 0 \qquad b := 10$$

$$x := \mathrm{runif}(nn, a, b)$$

Вывод вектора случайных чисел x:

$$x = \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ \vdots \\ 999 \end{array} \begin{bmatrix} 1.286 \\ 2.448 \\ 5.046 \\ 4.786 \\ 3.253 \\ 9.431 \\ 9.04 \\ 9.945 \\ 2.727 \\ \vdots \\ \end{bmatrix}$$

График, иллюстрирующий распределение случайных чисел x:



б) Построение гистограммы.

$$m := 14$$

$$велич\_интервала := \frac{b-a}{m} = 0.714$$

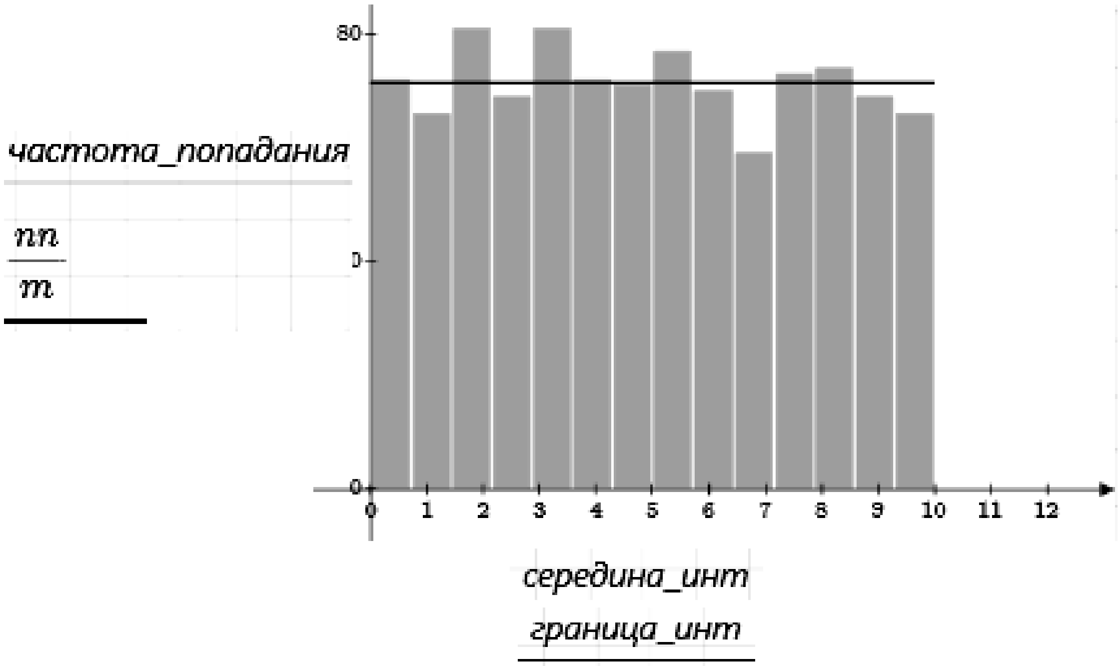
$$Gist := \mathbf{histogram}(m, x)$$

$$Gist = \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ \vdots \\ 13 \end{array} \begin{bmatrix} 0.373 & 72 \\ 1.086 & 66 \\ 1.799 & 81 \\ 2.512 & 69 \\ 3.225 & 81 \\ 3.938 & 72 \\ 4.651 & 71 \\ 5.364 & 77 \\ 6.077 & 70 \\ & \vdots \end{bmatrix}$$

$$середина\_инт := Gist^{\langle 0 \rangle} \qquad частота\_попадания := Gist^{\langle 1 \rangle}$$

$$граница\_инт := a, 0 + велич\_интервала .. b$$

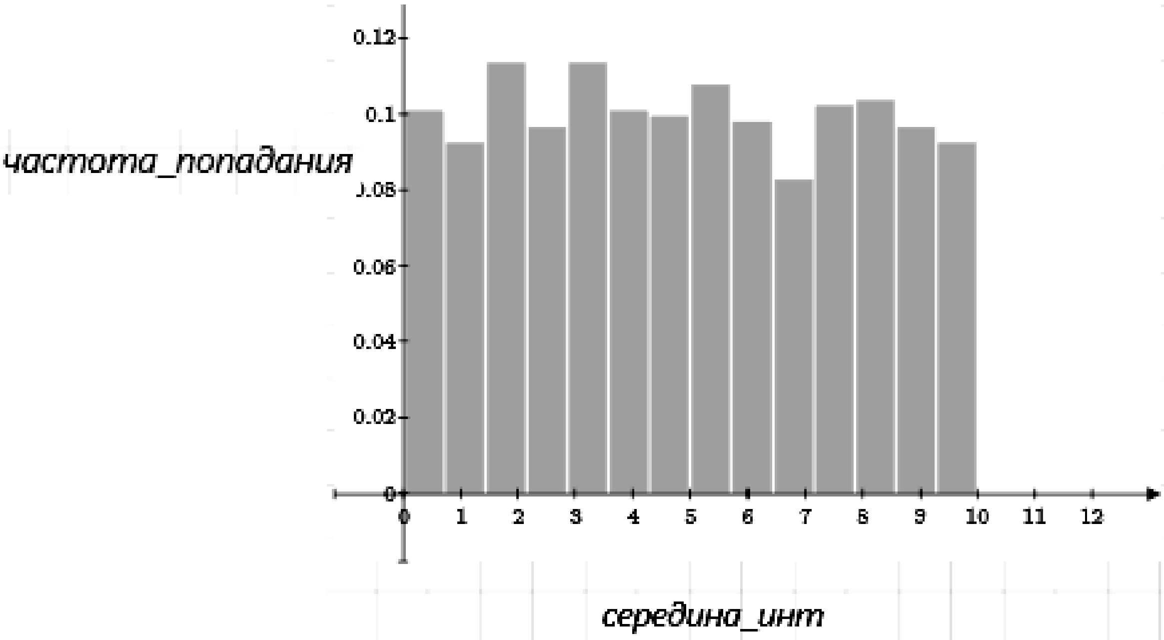
Гистограмма (для абсолютных частот):



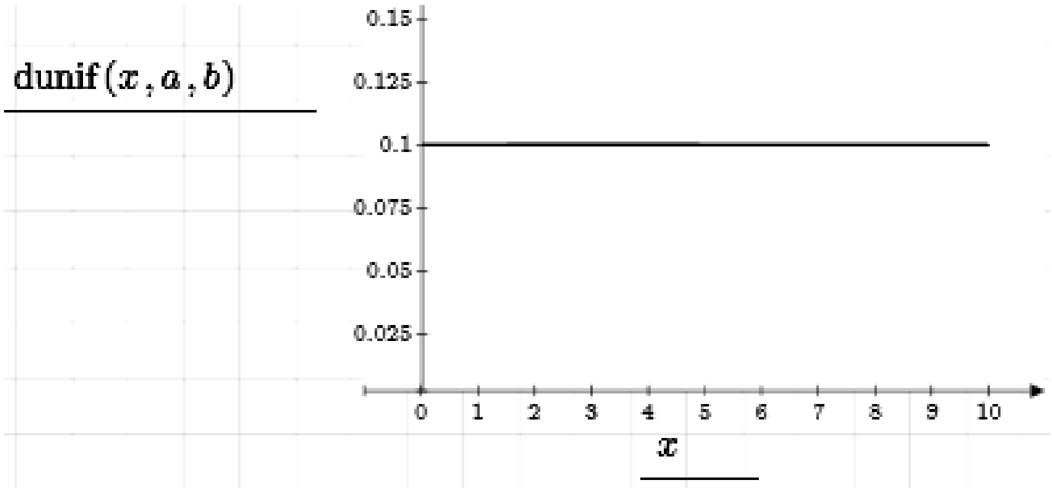
Переход от абсолютных частот к относительным:

$$частота\_попадания := \frac{частота\_попадания}{nn \cdot (велич\_интервала)}$$

Гистограмма (для относительных частот):



в) Построение графика функции плотности распределения вероятности последовательности случайных чисел x_i.



9.4. Задания

1) Исследовать особенности реализации типовой модели нормального (гауссовского) случайного процесса:

а) сгенерировать случайную последовательность из nn чисел, подчиняющихся нормальному (гауссовскому) закону распределения, с параметрами: математическое ожидание m_y; среднеквадратическое отклонение σ_y;

б) построить гистограмму (столбчатую диаграмму);

в) построить график функции плотности распределения вероятности для сгенерированной случайной последовательности.

2) Исследовать особенности реализации типовой модели равномерно распределенного случайного процесса:

а) сгенерировать случайную последовательность из 1000 чисел, подчиняющихся равномерному закону распределения, на интервале [a; b];

б) построить гистограмму (столбчатую диаграмму);

в) построить график функции плотности распределения вероятности для сгенерированной случайной последовательности.

Таблица 9.1

Исходные данные для типовых моделей случайных процессов

Вариант	К заданию 1			К заданию 2
	nn	m_y	σ_y	диапазон [a; b] изменения случайной величины x
1	2	3	4	5
1	1200	1	0,5	[0; 5]
2	1500	−1	0,8	[0; 12]

Окончание табл. 9.1

1	2	3	4	5
3	2000	2	0,7	[0; 3]
4	1300	−2	1,2	[0; 8]
5	1400	3	1,5	[0; 15]
6	2500	−3	1,7	[0; 5]
7	2200	4	1,8	[0; 8]
8	1800	−4	2	[0; 15]
9	1500	5	0,4	[0; 20]
10	1200	−5	1,5	[0; 2]
11	1300	0,5	1	[0; 4]
12	1400	1,5	1	[0; 5]
13	1600	2	1,5	[0; 6]
14	1700	−2	2	[0; 9]
15	1800	−1	0,6	[0; 10]
16	1900	1	0,7	[0; 8]

Библиографический список

1. Голубева Н. В. Математическое моделирование систем и процессов: Учебное пособие / Н. В. Голубева. СПб: Лань, 2013. 192 с.

2. Амосов А. А. Вычислительные методы: Учебное пособие / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. СПб: Лань, 2014. 672 с.

3. Вержбицкий В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): Учебное пособие / В. М. Вержбицкий. М.: Директ-Медиа, 2013. 400 с.

4. Голубева Н. В. Основы математического моделирования систем и процессов: Учебное пособие / Н. В. Голубева / Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2006. 96 с.

5. Письменный Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. М.: Айрис-пресс, 2008. 288 с.

Учебное издание

ГОЛУБЕВА Нина Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Часть 3

Учебно-методическое пособие

Редактор Н. А. Майорова

* * *

Подписано в печать 18.12.2017. Формат $60 \times 84\ \frac{1}{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,3. Уч.- изд. л. 2,5.
Тираж 350 экз. Заказ .

* *

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35