Н. В. ГОЛУБЕВА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

ЧАСТЬ 4

ОМСК 2018

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

Н. В. Голубева

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Часть 4

Утверждено методическим советом университета
в качестве учебно-методического пособия
к выполнению лабораторных работ и самостоятельной работы
по дисциплинам «Математическое моделирование систем и процессов»,
«Численные методы моделирования» и
«Вычислительная техника в инженерных задачах»

Омск 2018

УДК 519.65(075.8)
ББК 22.19я73
Г62

Математическое моделирование систем и процессов: Учебно-методическое пособие к выполнению лабораторных работ и самостоятельной работы. Часть 4 / Н. В. Голубева; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2018. 37 с.

Рассматриваются математические модели различных классов, методы их решения и графического отображения результатов моделирования средствами интегрированной среды PTC Mathcad Prime 3.1.

Предназначено для студентов 2-го и 3-го курсов, обучающихся по специальностям «Системы обеспечения движения поездов», «Электроэнергетика и электротехника», «Подвижной состав железных дорог», «Эксплуатация железных дорог»; по направлениям подготовки «Стандартизация и метрология», «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», «Теплоэнергетика и теплотехника», «Наземные транспортно-технологические комплексы»; для студентов заочной формы обучения и для обучения с использованием дистанционных образовательных технологий.

Библиогр.: 2 назв. Табл. 3. Рис. 3.

Рецензенты: доктор техн. наук, профессор В. Н. Горюнов;
доктор техн. наук, профессор В. А. Нехаев.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Важнейшей частью программы подготовки современного специалиста − выпускника технического университета − является обучение его основам, приемам и инструментам математического моделирования − главного научного метода познания − и формирование у него соответствующих профессиональных компетенций. Решение научных и инженерно-технических задач, связанных с исследованием и проектированием технических систем, оптимизацией их параметров или структуры, оптимальным управлением объектом или прогнозированием его поведения, изучением механизма явлений, осуществляется на основе математического моделирования.

Учебно-методическое пособие по дисциплинам «Математическое моделирование систем и процессов», «Численные методы моделирования» и «Вычислительная техника в инженерных задачах» состоит из пяти частей.

Настоящее учебно-методическое пособие включает в себя две лабораторные работы. В десятой лабораторной работе рассматриваются принципы и методы решения задачи интерполяции и возможности их реализации в среде PTC Mathcad Prime 3.1. Лабораторная работа 11 позволяет освоить принципы и методику построения эмпирических моделей на основе аппроксимации данных, полученных в результате эксперимента, а также получить навыки реализации решения данной задачи с помощью инструментов PTC Mathcad Prime 3.1. В процессе выполнения лабораторных работ студент должен уяснить важность правильной постановки задачи, выбора метода ее решения и способа отображения результатов моделирования и умения правильно интерпретировать их.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов 2-го и 3-го курсов очного и заочного обучения, а также для обучения с использованием дистанционных образовательных технологий.

Лабораторная работа 10

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

10.1. Постановка задачи

В процессе математического моделирования, как на стадии формирования модели, так и на этапе решения модели часто появляется необходимость аппроксимировать ту или иную функциональную зависимость. Под аппроксимацией понимают приближение (приближенную замену) исходной функции другой функцией, более простой и легко вычисляемой.

Решение многих задач электроники, электротехники, физики, радиотехники, теории автоматического управления предполагает аппроксимацию вольт-амперных характеристик нелинейных элементов, амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик фильтров, усилителей и т. д. Аппроксимация широко используется в научных исследованиях для представления (описания) физических закономерностей на основе полученных экспериментально (эмпирических) данных. В некоторых задачах, связанных со сложными многомерными моделями, приходится иметь дело с функциями, заданными громоздкими аналитическими выражениями. Анализ таких функций затруднен, вычислительные операции над ними трудоемки. Проблема решается с помощью аппроксимации данной функции другой функцией с такими свойствами, которые упрощают работу исследователя.

Выбор критерия близости (критерия согласия) аппроксимирующей и аппроксимируемой функций определяется постановкой задачи. Если в качестве критерия близости принято условие совпадения аппроксимирующей и аппроксимируемой функций в заданном ряде дискретных точек (в узлах), то приходят к задаче интерполяции, или интерполирования. Основная задача интерполяции – нахождение значения таблично заданной функции в промежуточных точках между узлами. Если требуется определить значение функции в точке, находящейся за пределами заданного интервала аппроксимации, то решают задачу экстраполяции.

Конкретизируем задачу интерполяции. Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей значений, определенных в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ (узлах):

$$y_0 = f(x_0); \quad y_1 = f(x_1); \quad y_2 = f(x_2); \; \dots \; ; \quad y_n = f(x_n). \qquad (10.1)$$

Требуется построить интерполирующую (аппроксимирующую) функцию F(x), принадлежащую известному классу и принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и заданная функция f(x), т. е. такую, что

$$F(x_0)=y_0;\;\; F(x_1)=y_1;\;\; F(x_2)=y_2;\; \ldots;\;\; F(x_n)=y_n. \tag{10.2}$$

Геометрически это означает, что надо построить кривую y = F(x) определенного типа, проходящую через точки с координатами $(x_0;y_0)$, $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, … , $(x_n;y_n)$ (рис. 10.1).

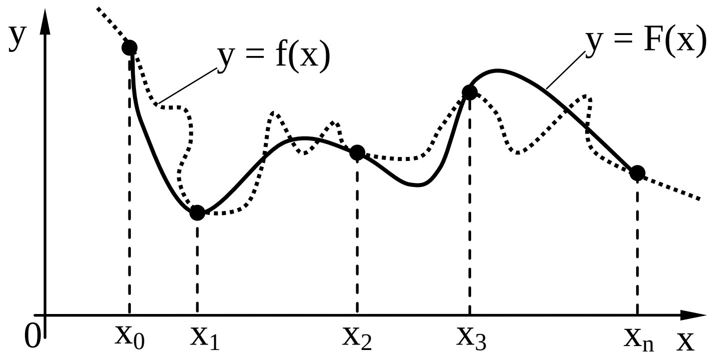


Рис. 10.1. Геометрическая интерпретация задачи интерполяции

В такой постановке задача интерполяции имеет бесчисленное множество решений. Однозначное решение можно получить, если в качестве аппроксимирующей функции F(x) выбрать полином (многочлен) $P_n(x)$ степени не выше n, удовлетворяющий условиям:

$$P_n(x_0)=y_0;\;\; P_n(x_1)=y_1;\;\; P_n(x_2)=y_2;\;\; \ldots;\;\; P_n(x_n)=y_n. \tag{10.3}$$

Полиномы имеют очевидные преимущества перед другими классами интерполирующих функций: они являются линейными функциями своих коэффициентов, их можно легко вычислять, складывать, умножать, интегрировать и дифференцировать.

В зависимости от решаемой задачи используют различные формы (формулы) представления интерполяционного полинома (в каноническом виде, формулы Лагранжа, Ньютона, Стирлинга, Бесселя и т. д.).

10.2. Интерполяция полиномом в каноническом виде

Пусть для функции y = f(x), заданной таблично, требуется найти полином $P_n(x)$, для которого будут выполняться условия интерполяции (10.3).

В качестве интерполирующей функции выберем полином $P_n(x)$ степени n в каноническом виде:

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n. \tag{10.4}$$

Определим коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ полинома (10.4). Для этого исходя из условия совпадения аппроксимирующей и аппроксимируемой функций в n + 1 узлах (10.3) составим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0; \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_{n1}, \end{cases} \qquad (10.5)$$

которая в векторно-матричной форме имеет вид:

$$MX \cdot A = Y, \qquad (10.6)$$

где $Y = \left[y_0 \ y_1 \ y_2 \ldots y_n \right]^T$ – вектор свободных членов; $A = \left[a_0 \ a_1 \ a_2 \ldots a_n \right]^T$ – вектор неизвестных коэффициентов полинома; MX – матрица вида:

$$MX = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}. \qquad (10.7)$$

Так как среди узлов x_i нет совпадающих, определитель системы (10.5) отличен от нуля, то данная система, а следовательно, и поставленная задача имеют единственное решение.

Решаем систему (10.5) матричным методом:

$$A = MX^{-1} \cdot Y, \qquad (10.8)$$

находим искомые коэффициенты a_0, a_1, a_2, …, a_n полинома $P_n(x)$.

Итак, интерполирующий полином $P_n(x)$ найден. Теперь с его помощью можно определить приближенное значение заданной функции y = f(x) в любой произвольной точке xx интервала интерполяции $[x_0; x_n]$:

$$y_{xx} = f(xx) \approx P_n(xx) = a_0 + a_1 xx + a_2 xx^2 + a_3 xx^3 + \ldots + a_n xx^n = \sum_{i=0}^{n} a_i xx^i. \quad (10.9)$$

10.3. Интерполяция полиномом Лагранжа

Лагранж предложил строить интерполирующий полином – полином Лагранжа в виде линейной комбинации полиномов $p_i(x)$ n-й степени:

$$L(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i p_i(x)=y_0p_0(x)+y_1p_1(x)+y_2p_2(x)+\cdots y_np_n(x). \qquad (10.10)$$

При этом требовалось, чтобы все полиномы $p_i(x)$ удовлетворяли условию:

$$p_i(x_j)=\begin{cases}0 & \text{при } j\neq i;\\ 1 & \text{при } j=i\end{cases} \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3, \ldots, n). \qquad (10.11)$$

Условие (10.11) означает, что каждый полином $p_i(x)$ должен обращаться в ноль во всех узлах интерполяции кроме i-го, в котором он примет значение, равное единице. Таким образом, для каждого j-го узла получим:

$$\begin{aligned}L(x_j)&=y_0p_0(x_j)+y_1p_1(x_j)+\cdots+y_jp_j(x_j)+\cdots+y_np_n(x_j)=\\&=0+0+\cdots+y_j+\cdots+0=y_j,\end{aligned} \qquad (10.12)$$

т. е. выполняются условия интерполяции (10.3).

Легко доказать, что условию (10.11) удовлетворяет полином:

$$p_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}. \qquad (10.13)$$

Следовательно, интерполяционный полином Лагранжа имеет вид:

$$\begin{aligned}L(x)&=\sum_{i=0}^{n} y_i\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}=\\&=\sum_{i=0}^{n} y_i\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}.\end{aligned} \qquad (10.14)$$

Для определения приближенного значения функции $y=f(x)$ в произвольной точке xx интервала интерполяции $[x_0;\ x_n]$ применяется интерполяционная формула Лагранжа:

$$y_{xx} = f(xx) \approx L(xx) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(xx - x_0)(xx - x_1)\cdots(xx - x_{i-1})(xx - x_{i+1})\cdots(xx - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}. \qquad (10.15)$$

Алгоритм вычисления приближенного значения функции по интерполяционной формуле Лагранжа (10.15) приведен на рис. 10.2.

10.4. Интерполяция сплайнами

Сплайн – это функция, образуемая из последовательности сопряженных (состыкованных в узлах) полиномов. На каждом i-м интервале $[x_{i-1}, x_i]$ сплайн-функция представляется i-м полиномом, определенным для данного конкретного интервала. Полиномы соседних интервалов стыкуются так, чтобы функция и соответствующие ее производные были непрерывны. Наиболее популярна интерполяция кубическими сплайнами.

Кубический сплайн – это кусочнополиномиальная функция, которая образуется путем стыковки (сшивания) в узлах полиномов третьей степени. При этом на i-м интервале $[x_{i-1}, x_i]$ функция $y = f(x)$ интерполируется кубическим полиномом:

$$S_i(x) = a_{0i} + a_{1i}(x - x_i) + a_{2i}(x - x_i)^2 + a_{3i}(x - x_i)^3. \qquad (10.16)$$

Для всего интервала интерполяции $[x_0; x_n]$ необходимо определить n кубических полиномов, отличающихся коэффициентами $a_{0i}, a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}$.

Коэффициенты полиномов (10.16) сплайна определяются из следующих условий:

каждый i-й полином проходит через два соседних узла x_{i-1} и x_i, т. е. значения сплайна равны значениям заданной аппроксимируемой функции $y = f(x)$ в узлах интерполяции (условие интерполирования);

первая производная сплайн-функции S(x) непрерывна в узлах интерполяции (условие гладкости функции);

вторая производная сплайн-функции S(x) непрерывна в узлах интерполяции (условие гладкости первой производной функции);

граничные условия, задающие поведение сплайн-функции S(x) в граничных точках интервала интерполяции x_0 и x_n (определяются постановкой задачи).

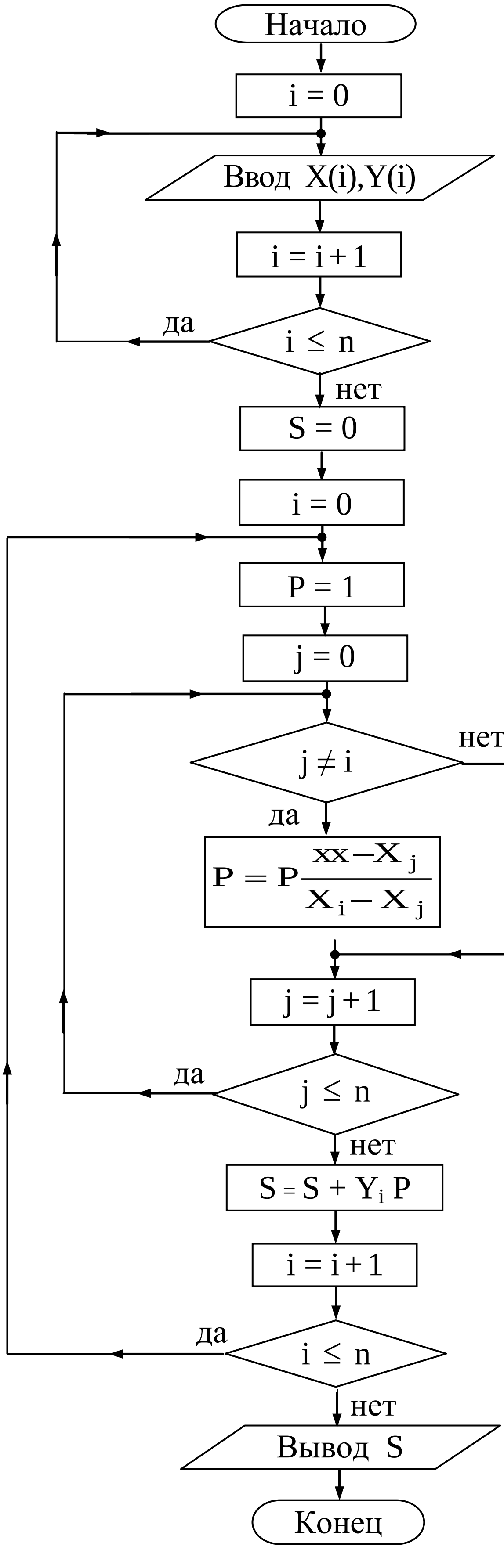


Рис. 10.2. Реализация интерполяционной формулы Лагранжа

Достоинством интерполирования кубическими сплайнами является его сходимость. При неограниченном возрастании числа узлов последовательность получаемых сплайн-функций сходится к заданной интерполируемой функции $y = f(x)$. Использование сплайнов обеспечивает получение наиболее гладкой интерполяционной функции.

10.5. Информация к выполнению задания 1

При построении интерполяционного полинома в каноническом виде (см. подразд. 10.2) матрица MX формируется из элементов вектора X согласно выражению (10.7).

Приближенное значение функции y_{xx}= f(xx), определяемое с помощью интерполяционного полинома в каноническом виде (по формуле (10.9)), обозначается как *полином_канонич(xx)*. Переменная xx задается как переменная-диапазон для построения графика интерполирующей функции на заданном интервале интерполяции $[x_0;\ x_n]$.

Пример выполнения задания 1

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей значений y_i, определенных в узлах x_i:

x	0,5	2,4	5,3	7,9	10	11,6	13	16	17,7	20
y	6,252	3,831	− 9	0,904	2	2,735	5	1,721	− 4	−6,108

Построить интерполяционный полином в каноническом виде и определить приближенное значение функции $y = f(x)$ в точках xx1 = 3,7; xx2 = 8,35; xx3 = 18,9.

1. Задание вектора значений узлов интерполяции X и вектора значений исходной функции Y:

$$X := \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2.4 \\ 5.3 \\ 7.9 \\ 10 \\ 11.6 \\ 13 \\ 16 \\ 17.7 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad Y := \begin{bmatrix} 6.252 \\ 3.831 \\ -9 \\ 0.904 \\ 2 \\ 2.735 \\ 5 \\ 1.721 \\ -4 \\ -6.108 \end{bmatrix}$$

2. Формирование матрицы MX:

$$MX(X) := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..9 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..9 \\ \quad \left\| MX_{i,j} \leftarrow X_i^{\,j} \right. \end{array} \right. \\ MX \end{array} \right.$$

$$MX(X) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots\ 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.25 & 0.125 & 0.063 & 0.031 & \\ 1 & 2.4 & 5.76 & 13.824 & 33.178 & 79.626 & \\ 1 & 5.3 & 28.09 & 148.877 & 789.048 & 4.182\cdot10^{3} & \\ 1 & 7.9 & 62.41 & 493.039 & 3.895\cdot10^{3} & 3.077\cdot10^{4} & \\ 1 & 10 & 100 & 1\cdot10^{3} & 1\cdot10^{4} & 1\cdot10^{5} & \\ 1 & 11.6 & 134.56 & 1.561\cdot10^{3} & 1.811\cdot10^{4} & 2.1\cdot10^{5} & \\ 1 & 13 & 169 & 2.197\cdot10^{3} & 2.856\cdot10^{4} & 3.713\cdot10^{5} & \\ 1 & 16 & 256 & 4.096\cdot10^{3} & 6.554\cdot10^{4} & 1.049\cdot10^{6} & \\ 1 & 17.7 & 313.29 & 5.545\cdot10^{3} & 9.815\cdot10^{4} & 1.737\cdot10^{6} & \\ 1 & 20 & 400 & 8\cdot10^{3} & 1.6\cdot10^{5} & 3.2\cdot10^{6} & \ldots \end{bmatrix} \end{array}$$

3. Определение коэффициентов интерполяционного полинома:

$$a := MX(X)^{-1} \cdot Y$$

$$a = \begin{bmatrix} -15.338 \\ 61.769 \\ -42.508 \\ 11.349 \\ -1.417 \\ 0.073 \\ 0.001 \\ -3.125\cdot10^{-4} \\ 1.333\cdot10^{-5} \\ -1.906\cdot10^{-7} \end{bmatrix}$$

4. Определение приближенного значения функции y = f(x) в точках xx1, xx2, xx3 с помощью интерполяционного полинома $P_n(x)$ (10.4) согласно формуле (10.9):

$$\text{полином\_канонич}(xx) := \sum_{i=0}^{9} a_i \cdot xx^{i}$$

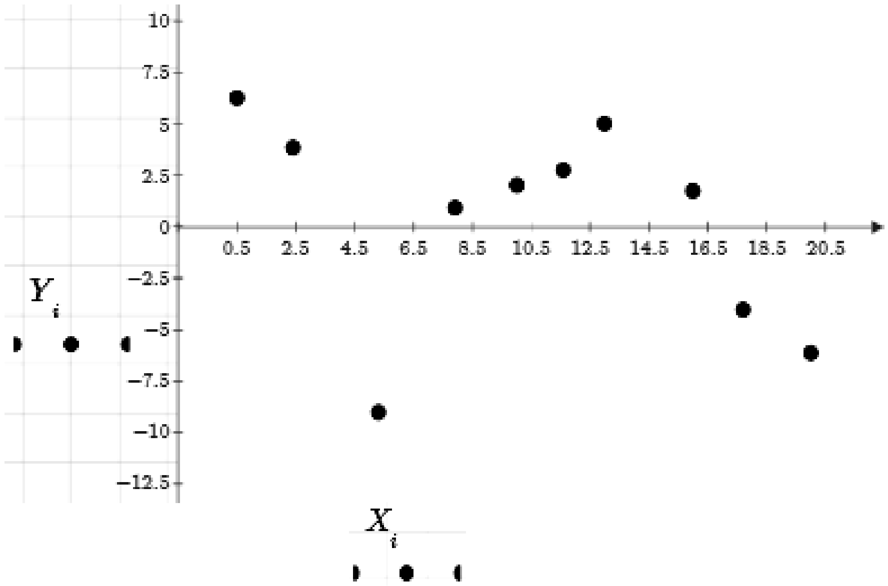
$$полином\_канонич(3.7) = -8.449$$

$$полином\_канонич(8.35) = 1.621$$

$$полином\_канонич(18.9) = -2.536$$

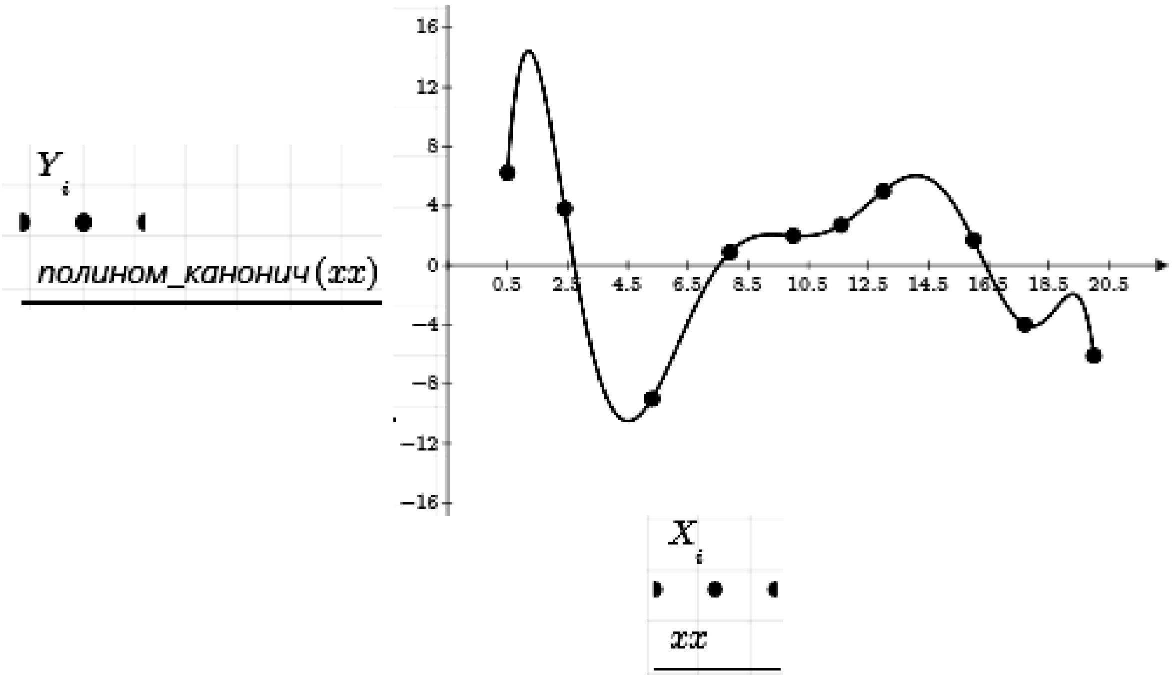
5. Отображение на графике исходной интерполируемой функции y = f(x):

$$i := 0..9$$



6. Построение графика интерполирующей кривой:

$$xx := 0.5, 0.5 + 0.01..20$$



10.6. Информация к выполнению задания 2

Приближенное значение функции $y_{xx} = f(xx)$ в точке xx, определяемое с помощью интерполяционного полинома Лагранжа (10.14) согласно формуле (10.15), обозначается как *полином_Лагранжа(X,Y,xx)*. Алгоритм вычисления приближенного значения функции в произвольной точке xx с помощью интерполяционного полинома Лагранжа представлен на рис. 10.2.

Пример выполнения задания 2

1. Вычисление приближенного значения функции в произвольной точке xx с помощью интерполяционного полинома Лагранжа:

$$полином\_Лагранжа(X, Y, xx) := \left\| \begin{array}{l} S \leftarrow \\ \ldots \end{array} \right.$$

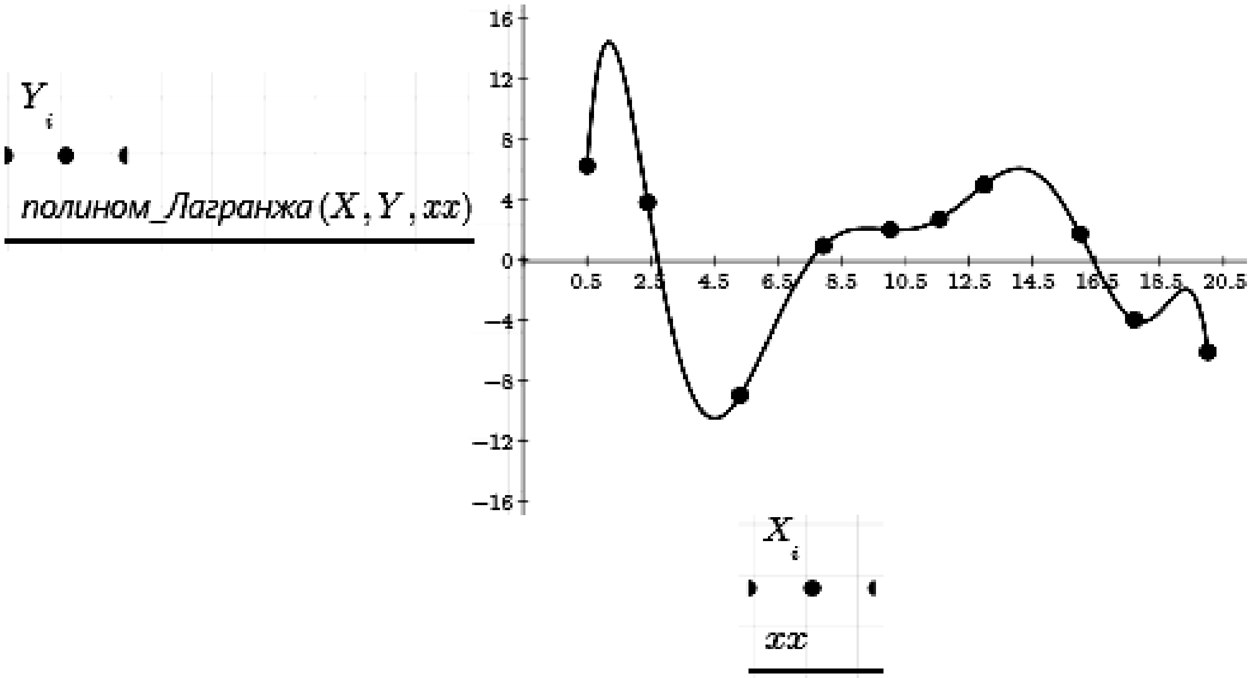
2. Определение приближенного значения функции $y = f(x)$ в точках xx1, xx2, xx3 с помощью интерполяционного полинома Лагранжа:

$$полином\_Лагранжа(X, Y, 3.7) = -8.449$$

$$полином\_Лагранжа(X, Y, 8.35) = 1.621$$

$$полином\_Лагранжа(X, Y, 18.9) = -2.536$$

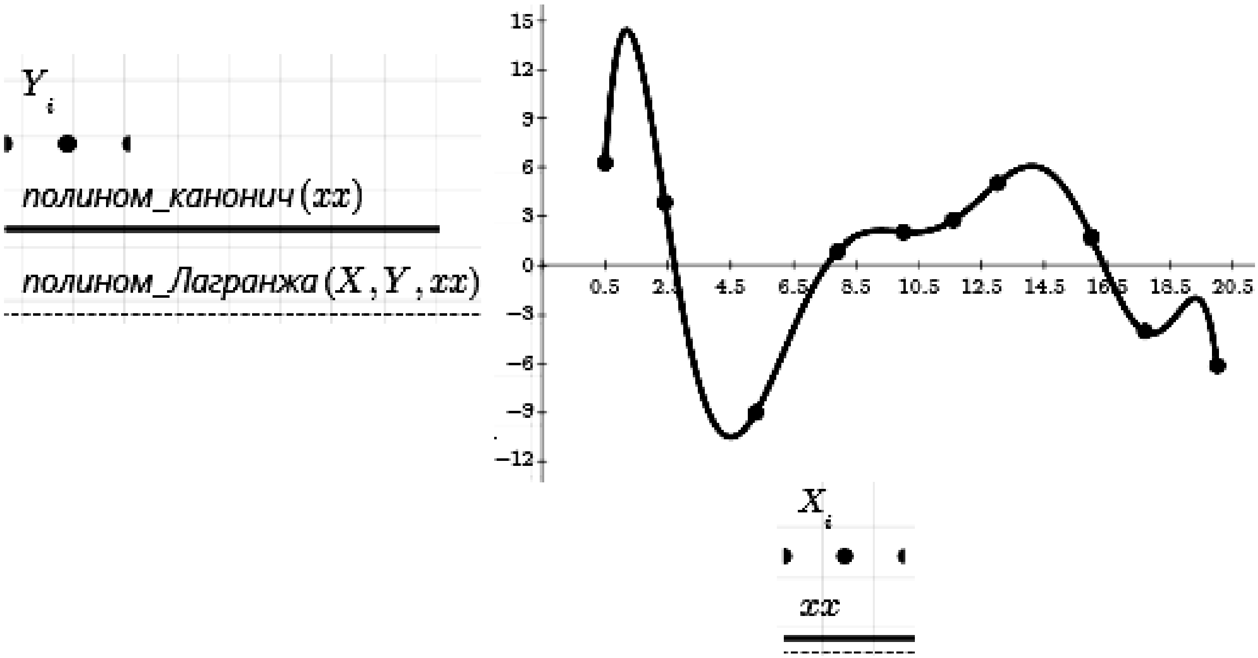
3. Построение графика интерполирующей кривой:



10.7. Информация к выполнению задания 3

Пример выполнения задания 3

Сопоставление кривых интерполирующих функций, полученных по интерполяционным формулам (10.9) – на основе полинома в каноническом виде и (10.15) – на основе полинома Лагранжа:



Кривые интерполирующих функций на основе полинома в каноническом виде и полинома Лагранжа совпадают.

10.8. Информация к выполнению задания 4

Встроенная функция cspline(X,Y) вычисляет вектор вторых производных функции y = f(x), используя приближение сплайн-функции в узлах кубическим полиномом.

Встроенная функция interp(Pr,X,Y,xx) вычисляет значение функции y = f(x) в произвольной точке xx с помощью интерполяции сплайн-функцией.

Встроенные функции lspline(X,Y) и pspline(X,Y) определяют вектор вторых производных, используя соответственно линейное и квадратичное (параболическое) приближения сплайн-функции в узлах.

Пример выполнения задания 4

1. Определение вектора вторых производных с приближением в узлах кубическим полиномом:

$$Pr\_куб\_прибл := \mathrm{cspline}(X, Y)$$

2. Определение приближенного значения функции y = f(x) в произвольной точке xx с помощью интерполяции сплайн-функцией:

$$сплайн\_куб\_пр(xx) := \mathrm{interp}(Pr\_куб\_прибл, X, Y, xx)$$

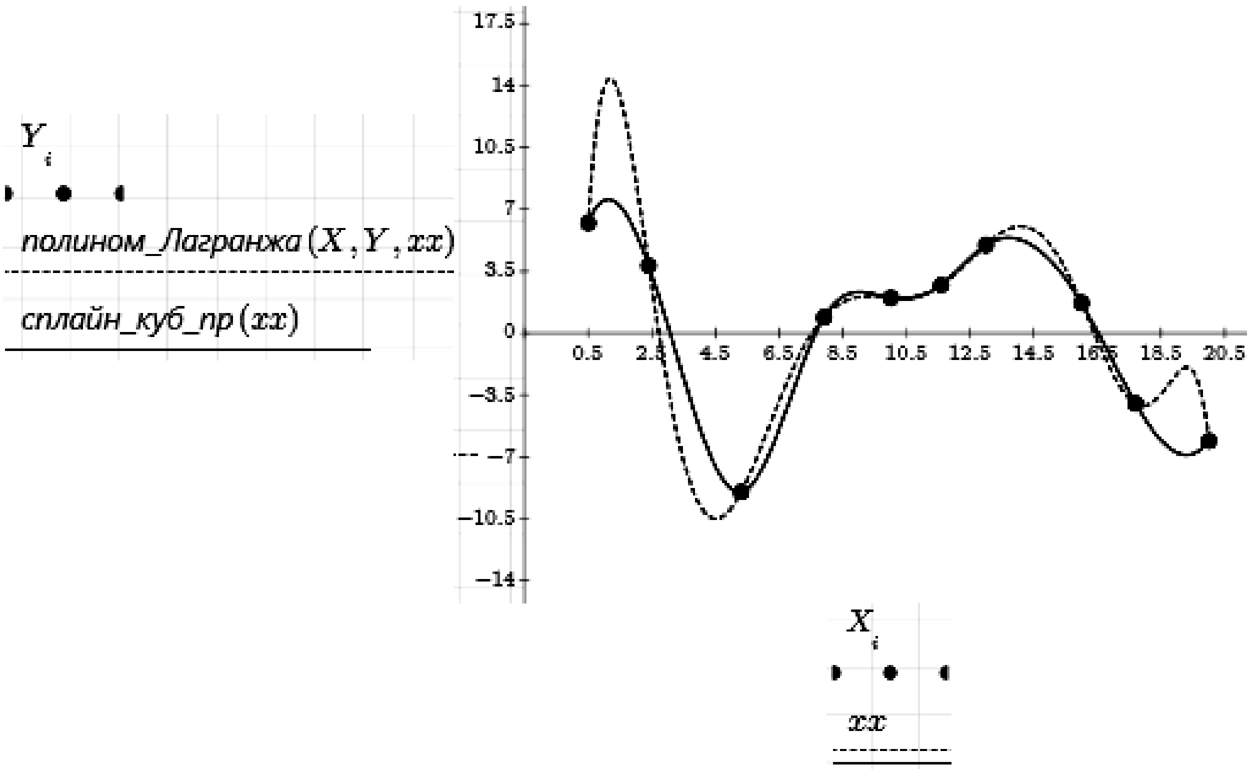
3. Определение приближенного значения функции y = f(x) в точках xx1, xx2, xx3:

$$сплайн\_куб\_пр(3.7) = -3.724$$

$$сплайн\_куб\_пр(8.35) = 1.892$$

$$сплайн\_куб\_пр(18.9) = -6.684$$

4. Построение интерполяционных кривых с помощью сплайн-функции и полинома Лагранжа:



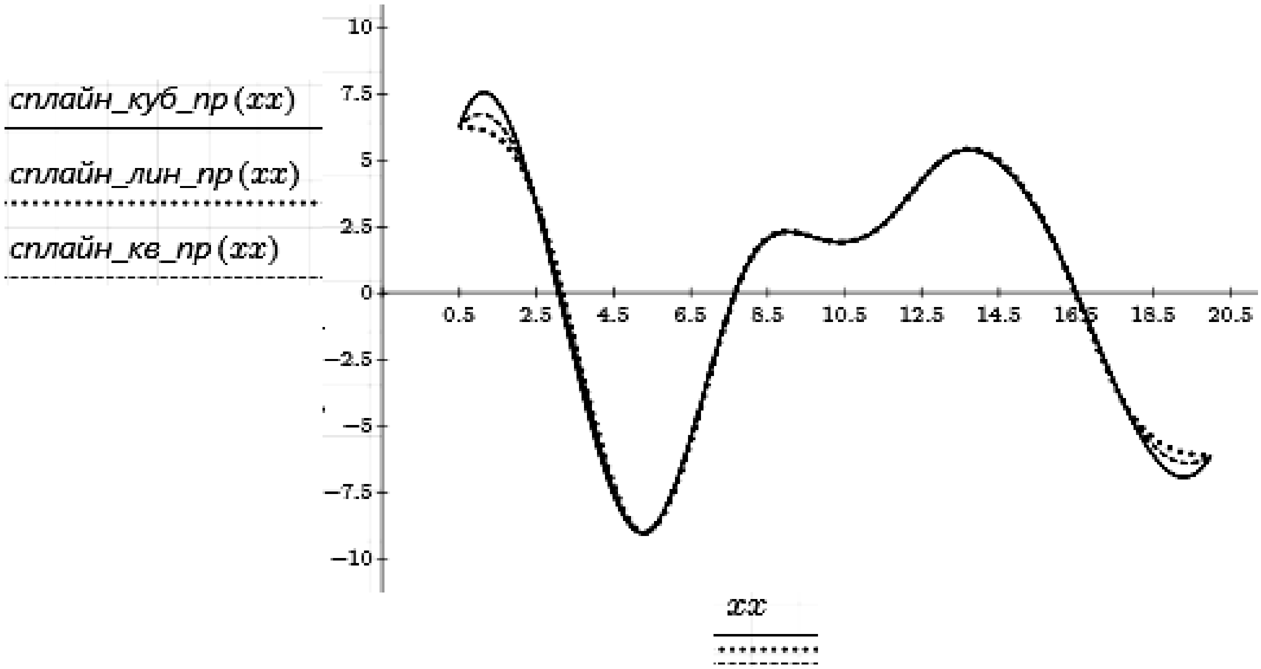
5. Построение графиков трех сплайн-функций, полученных при разных типах приближений кубического сплайна в узловых точках:

$$Pr\_лин\_прибл := \mathrm{lspline}(X, Y)$$

$$сплайн\_лин\_пр(xx) := \mathrm{interp}(Pr\_лин\_прибл, X, Y, xx)$$

$Pr\_кв\_прибл := \mathrm{pspline}(X, Y)$

$сплайн\_кв\_пр(xx) := \mathrm{interp}(Pr\_кв\_прибл, X, Y, xx)$



10.9. Задания

1) Для функции y = f(x), заданной таблично (табл. 10.1), построить интерполяционный полином в каноническом виде и определить приближенное значение функции в точках xx1, xx2, xx3. Построить график интерполяционной функции.

2) Для функции y = f(x) (см. табл. 10.1) составить программу вычисления приближенного значения функции в любой произвольной точке xx интервала интерполяции $[x_0;\ x_n]$ с помощью интерполяционного полинома Лагранжа. Определить приближенное значение функции в точках xx1, xx2, xx3. Построить график интерполяционной функции.

3) Построить в одной графической области интерполяционные кривые, полученные в первом и втором заданиях, и убедиться в том, что они совпадают.

4) Произвести интерполяцию заданной функции y = f(x) (см. табл. 10.1) с помощью кубических сплайнов. Определить приближенное значение функции в точках xx1, xx2, xx3. Сравнить интерполяционные кривые, построенные с помощью сплайн-функции и полинома Лагранжа. Сравнить графики трех сплайн-функций, полученных при разных типах приближений кубического сплайна в узловых точках.

Т а б л и ц а 10.1

Исходные данные для решения задачи интерполяции

Вариант	Координаты x_i и y_i точек исходной функции $y = f(x)$	Значения xx1, xx2, xx3
1	2	3
1	x = {1; 1,6; 1,8; 3,05; 4; 5; 7,13; 8; 8,97} y = {−5,4; −4,07; −1; 3,9; 8,477; 12; 3,024; 7; 9,121}	xx1 = 2,3 xx2 = 4,2 xx3 = 6
2	x = {−7,5; −5,9; −2,9; 0,2; 3; 6,08; 7,63; 10; 11,7} y = { 1,8; 12,2; 6; −3,475; 1,99; 4,457; 11; 8,22; 5,3}	xx1 = −4 xx2 = −1,3 xx3 = 4,7
3	x = {0; 1,5; 3,73; 5; 5,97; 7,8; 11; 12,8; 14,5} y = {0,4; 6,22; 1,7; −2,712; −7,37; −9,505; 5,59; 5; 13,47}	xx1 = 0,6 xx2 = 7,1 xx3 = 9
4	x = {5; 6,15; 7,3; 8,39; 10; 10,7; 12,3; 12,8; 13} y = {13,312; 8,7; −5,07; −7,973; −8,74; 2,5; 4,25; 13; 8,33}	xx1 = 6,6 xx2 = 9,3 xx3 = 11
5	x = {7; 9,8; 12; 15,61; 18,07; 20,8; 22,83; 25; 27,9} y = {12,33; 6,51; −7; 3,4; 18,77; 2; −19,209; −7,21; 11,07}	xx1 = 8,2 xx2 = 14 xx3 = 23,7
6	x = {2,6; 4,98; 10,2; 11; 14,7; 17,68; 20; 21,3; 23,47} y = {5; −3,713; −11; −4,65; 4,711; 15; 4,99; 23,5; 6}	xx1 = 7,5 xx2 = 13 xx3 = 18,2
7	x = {−5; −2,11; 1,07; 4,39; 5,7; 9; 10,12; 14,3; 15,85} y = {25; 12,405; 8,58; −3,7; −11,75; 1,67; 17; 4,9; 16,214}	xx1 = −0,6 xx2 = 3 xx3 = 7,7
8	x = {0; 1,68; 4,02; 8,25; 11; 14,74; 15,993; 19; 20,7} y = {13,2; −2,97; −19; −1,854; 11,71; 2,99; 23,4; −5; −7,1}	xx1 = 3 xx2 = 9,2 xx3 = 18,6
9	x = {−10,2; −7,25; −2,9; 0,1; 2,41; 3,99; 8; 11,1; 13; 14,88} y = {17,52; 5,311; −3; −16,7; −7,2; 2,35; 27; 1,525; 17,2; 8,08}	xx1 = −9,5 xx2 = −5 xx3 = 5,7
10	x = {−7,5; −5,42; −1,3; 4; 5,98; 8,61; 10; 14,23; 15,7; 17} y = {31,2; 17,33; 4,503; −9,07; −2; 9,5; 25; 11,212; 42; 11,862}	xx1 = −3,6 xx2 = 1,7 xx3 = 12

Окончание табл. 10.1

1	2	3
11	x = {1,3; 2,61; 7,1; 8,72; 11,2; 14; 15,21; 17,19; 19,99; 21} y = {−3,91; 1,73; 9,392; −13,7; −5; 10,45; 5,196; 13,18; 2; 8,82}	xx1 = 5,2 xx2 = 10 xx3 = 18,3
12	x = {−0,99; 1,5; 3,35; 5,1; 8,08; 9,81; 12; 14,68; 16,7; 18,22} y = {3,26; 19,3; 7,314; 4,27; −7,8; 7,503; 19; 6,11; 4,289; 18,12}	xx1 = 4,1 xx2 = 6,6 xx3 = 15
13	x = {4,5; 5,78; 7,97; 10; 11;68; 12,57; 14; 14,8; 16,03; 18,1} y = {3,607; 29,3; 10,47; 2,715; −15,72; −6,3; −1; 3,16; 16,99; 27}	xx1 = 9,2 xx2 = 10,4 xx3 = 17
14	x = {2,3; 4,16; 5,31; 6,99; 8; 10,11; 12,3; 13,38, 14; 15,5} y = {25; 10,31; 5,442; 1,75; 7,807; 15,03; 3; 8,802; 1,99; 29,12}	xx1 = 3,3 xx2 = 9 xx3 = 14,8
15	x = {−7,5; −5,71; −4,35; −2; 0,1; 2,25; 3,99; 5; 6,71; 8,2} y = {−6,135; −13,31; −37; −8,77; −1,803; −9,393; −25; −12,71; −7,91; −28,57}	xx1 = −3,1 xx2 = 1,4 xx3 = 7
16	x = {3,1; 4,27; 6; 7,98 ; 9,13; 12,08; 13; 15,25; 17,4} y = {7,514; 2,99; 9; 27,537; 11,71; 5,8; 11,85; 25,511; 10}	xx1 = 5,1 xx2 = 11 xx3 = 14,2

Лабораторная работа 11

ПОСТРОЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ АППРОКСИМАЦИИ ДАННЫХ

11.1. Постановка задачи

Эмпирические модели формируются по результатам эксперимента (на основании данных наблюдений). Моделируемый объект рассматривается как кибернетическая модель «черный ящик». Для измерения доступны только его входные сигналы (управляющие воздействия) и выходные сигналы (отклики или реакции). Ставится задача − на основе обработки результатов измерений входных и выходных сигналов исследуемого объекта выявить эмпирические закономерности в полученных данных и математически описать их формальной приближенной аналитической моделью.

В инженерной практике и в научных исследованиях часто приходится решать следующую задачу.

В результате серии измерений получены m пар значений x_i, y_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, m$), которые представлены в табличной форме. Полагают, что x – независимая переменная (фактор), а y – зависимая переменная (функция, отклик). Требуется установить функциональную зависимость между x и y, т. е. определить такую приближенную аналитическую формальную модель, которая бы наиболее соответствовала данному набору экспериментальных данных x_i, y_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, m$).

Задача аналитического приближения таблично заданных функций представляет одну из категорий задач аппроксимации.

Под аппроксимацией понимают приближение (приближенную замену) исходной функции другой функцией с известными свойствами, более простой и легко вычисляемой.

Исследование, анализ, идентификация физических систем в различных научных областях − электронике, электротехнике, физике, теории электрических цепей, радиотехнике, теории автоматического управления, энергетике – предполагают аппроксимацию вольт-амперных характеристик нелинейных элементов, кривых намагничивания сердечников, переходных, амплитудно-частотных, фазочастотных характеристик фильтров, усилителей, регуляторов, компенсирующих устройств и т. д.

Решение задачи аналитического приближения таблично заданной функции предполагает следующие действия.

1. Выбор класса аппроксимирующей функции – эмпирической модели

$$y = f(x, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{11.1}$$

наилучшим образом отражающей связь между экспериментальными данными x и y (наилучшим образом приближающейся к эмпирическим данным).

2. Оценивание (нахождение числовых оценок) параметров a_0, a_1, a_2, … , a_n приближающей функции (11.1), при которых достигается наилучшее соответствие

(согласие) между экспериментальными данными и аппроксимирующей функцией (эмпирической моделью).

Невозможно точно определить значения параметров a_0, a_1, a_2, … , a_n эмпирической формулы (11.1) по результатам измерений, поскольку экспериментальные данные, как правило, содержат случайные ошибки, обусловленные неидеальностью измерительной техники (погрешностями измерений) и влиянием неконтролируемых случайных факторов (внешних и внутренних), т. е. являются случайными величинами. Следовательно, искомые параметры a_0, a_1, a_2, … , a_n эмпирической модели (11.1) также являются случайными величинами. Поэтому ставится задача − найти оценки этих параметров, наилучшие (оптимальные) с точки зрения заданного критерия.

Приближающую функциональную зависимость называют эмпирической формулой, или уравнением регрессии. График приближающей функции называют линией регрессии.

Определение аналитического выражения для описания связи зависимой величины y (функции) с независимыми величинами (факторами) x_1, x_2, … , x_m называют задачей регрессионного анализа. Если требуется определить уравнение взаимосвязи для двух переменных − y и x, то речь идет о задаче парной (однофакторной) регрессии. Если зависимая переменная y является функцией нескольких факторов, то решается задача множественной (многофакторной) регрессии.

Одним из методов, применяемых для определения оценок параметров (коэффициентов) a_0, a_1, a_2, … , a_n эмпирической (регрессионной) модели (11.1), является метод наименьших квадратов (МНК).

Метод наименьших квадратов обеспечивает нахождение наиболее вероятных значений параметров эмпирической модели $y = f(x, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на основе критерия минимума суммы квадратов отклонений d_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, m$) значений приближающей функции (значений, предсказанных моделью) y от результатов эксперимента y_i (рис. 11.1). При этом предполагается, что отклонения d_i подчиняются нормальному закону распределения.

С точки зрения **м е т о д а н а и м е н ь ш и х к в а д р а т о в** наилучшее согласование линии регрессии с результатами измерений y_i достигается при выполнении условия

$$\sum_{i=1}^{m} d_i^2 = \sum_{i=1}^{m} \left[y_i - f\left(x_i, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\right) \right]^2 = S = \min. \qquad (11.2)$$

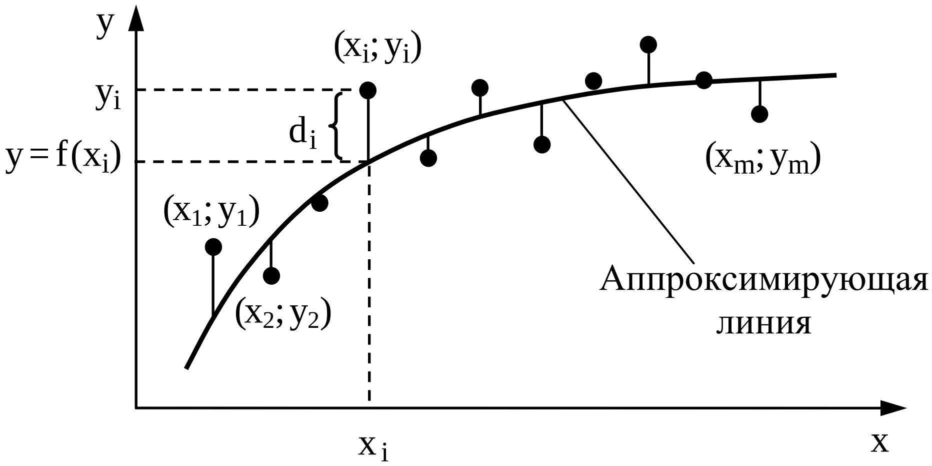


Рис. 11.1. Отклонения d_i значений аппроксимирующей функции $y = f(x_i)$ от результатов эксперимента y_i

Необходимым условием минимума функции $S = S(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ является равенство нулю ее частных производных по всем переменным. Поэтому задача нахождения параметров $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ эмпирической модели (11.1) сводится к решению следующей системы уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0; \quad \cdots; \quad \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0. \qquad (11.3)$$

Оценки параметров $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ аппроксимирующей функции (11.1), полученные методом наименьших квадратов, являются несмещенными и состоятельными.

При решении **з а д а ч и л и н е й н о й р е г р е с с и и**, когда результаты эксперимента приближаются линейной функцией вида

$$y = ax + b, \qquad (11.4)$$

система уравнений (11.3) принимает вид:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0. \qquad (11.5)$$

После соответствующих подстановок система (11.5) приводится к виду:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} y_i = am + b\sum\limits_{i=1}^{m} x_i; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i = a\sum\limits_{i=1}^{m} x_i + b\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2. \end{cases} \qquad (11.6)$$

Решая систему (11.6), находят искомые оценки параметров a и b регрессионной модели (11.4):

$$a = \frac{m\sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{m} x_i \sum\limits_{i=1}^{m} y_i}{m\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\right)^2}; \quad b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 - \sum\limits_{i=1}^{m} x_i \sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i}{m\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\right)^2}. \qquad (11.7)$$

Найденные значения a и b определяют регрессионную прямую, наиболее близкую к экспериментальным точкам x_i, y_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, m$) с точки зрения критерия минимума суммы квадратов отклонений результатов измерений y_i от значений y, определяемых построенной линией регрессии.

Оценить степень отклонения связи между экспериментальными данными x и y от линейной (тесноту линейной связи) можно с помощью коэффициента парной корреляции (коэффициента корреляции Пирсона)

$$R = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i \sum\limits_{i=1}^{m} y_i\right) \Big/ m}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\right)^2}{m}} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} y_i\right)^2}{m}}}. \qquad (11.8)$$

Чем ближе значение коэффициента R по абсолютной величине к единице, тем сильнее проявляется линейная зависимость между x_i и y_i, и, следовательно, тем лучше экспериментальные точки согласуются с линейной моделью. Считается, что при $0,9 < |R| < 0,99$ очень сильная теснота линейной связи; при $0,7 < |R| < 0,9$ – сильная; при $0,5 < |R| < 0,7$ – заметная; при $0,3 < |R| < 0,5$ – слабая теснота линейной связи.

Поиск эмпирической функции в виде полинома (многочлена)

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{11.9}$$

называют решением з а д а ч и   п о л и н о м и а л ь н о й   р е г р е с с и и. Достоинство полиномов состоит в том, что они являются линейными функциями относительно своих коэффициентов.

Рассмотрим частный случай, когда результаты эксперимента x_i, y_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, m$) приближаются (аппроксимируются) п о л и н о м о м   в т о р о й   с т е п е н и

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2. \tag{11.10}$$

Значения (оценки) коэффициентов a_0, a_1, a_2 эмпирической модели согласно методу наименьших квадратов определяем из условия:

$$\sum_{i=1}^{m} \left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 \right) \right]^2 = S = \min. \tag{11.11}$$

Минимизируем функцию S, приравнивая к нулю ее частные производные по каждому из коэффициентов:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0. \tag{11.12}$$

В итоге приходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} a_2 \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^4 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^3 + a_0 \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 y_i; \\ a_2 \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^3 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 + a_0 \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i; \\ a_2 \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{m} x_i + a_0 m = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i, \end{cases} \tag{11.13}$$

решая которую, находим искомые значения (оценки) параметров a_0, a_1, a_2 регрессионной модели (11.10).

Система (11.13) имеет единственное решение при условии, что все значения x_i различны.

11.2. Информация к выполнению задания 1

Для построения (графического представления в PTC MathCAD Prime 3.1) линии регрессии вводится вспомогательная переменная xx, задаваемая как переменная-диапазон, граничные значения которой определяются соответственно минимальным и максимальным значениями результатов измерений x_i независимой переменной x.

Встроенные функции slope(X,Y) и intercept(X,Y) (категория *Аппроксимация и сглаживание кривых*) используются для определения параметров эмпирической модели $y = ax + b$. Исходные экспериментальные данные представлены векторами X и Y.

Встроенная функция slope(X,Y) возвращает тангенс угла наклона прямой линии (угловой коэффициент прямой линии регрессии – параметр a).

Встроенная функция intercept(X,Y) возвращает свободный член в уравнении линейной регрессии (смещение линии регрессии по вертикали (по оси ординат) – параметр b).

Встроенная функция line(X,Y) (категория *Аппроксимация и сглаживание кривых*) определяет вектор коэффициентов уравнения линейной регрессии.

Встроенная функция stderr(X,Y) (категория *Статистические*) вычисляет стандартное отклонение результатов измерения y_i от предсказанных эмпирической моделью значений y, характеризующее среднеквадратическую ошибку регрессии.

Встроенная функция corr (X,Y) (категория *Аппроксимация и сглаживание кривых*) вычисляет коэффициент парной корреляции (коэффициент корреляции Пирсона) на основании формулы (11.8).

Пример выполнения задания 1.

Пусть в результате серии измерений величин x и y получены 10 пар значений x_i, y_i ($i = 1, 2, 3, \dots , 10$), которые представлены в табличной форме:

x	1,3	2,1	2,9	3,7	4,5	5,3	6,1	6,9	7,7	8,5
y	0,2	1,31	6	6,11	12,53	13,9	18	18,8	22,4	27,05

Решить задачу аналитического приближения полученных экспериментальных данных x_i; y_i линейной функцией вида y = a x + b, т. е. задачу линейной регрессии. Построить эмпирическую модель. Оценить степень отклонения связи между экспериментальными данными x_i и y_i от линейной (тесноту линейной связи).

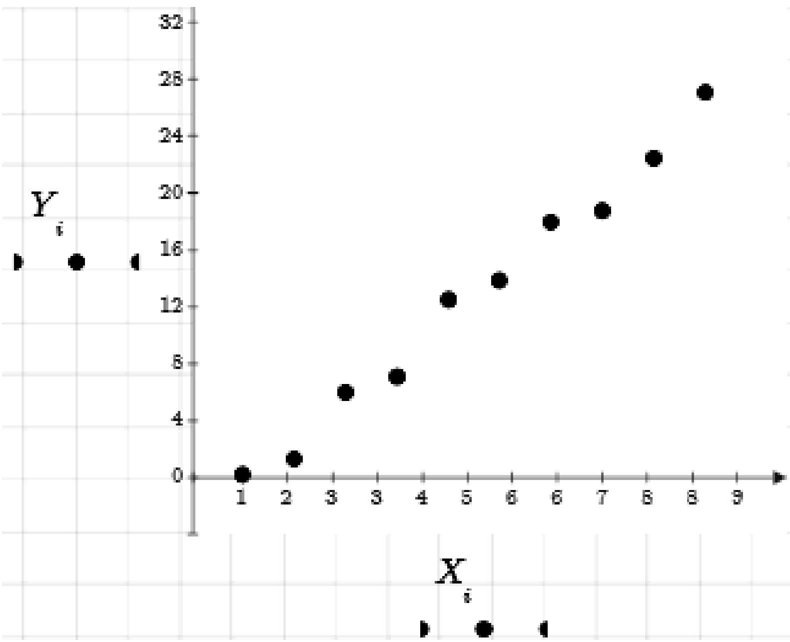
1. Задание векторов исходных экспериментальных данных (результатов измерений) X и Y:

$$\mathbf{ORIGIN} := 1$$

$$X := \begin{bmatrix} 1.3 \\ 2.1 \\ 2.9 \\ 3.7 \\ 4.5 \\ 5.3 \\ 6.1 \\ 6.9 \\ 7.7 \\ 8.5 \end{bmatrix} \qquad Y := \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.31 \\ 6 \\ 6.11 \\ 12.53 \\ 13.9 \\ 18 \\ 18.8 \\ 22.4 \\ 27.05 \end{bmatrix}$$

2. Отображение экспериментальных данных графически:

$$i := 1..10$$



3. Определение оценок параметров эмпирической модели y = a x + b на основе метода наименьших квадратов по формулам (11.7):

$$m := 10$$

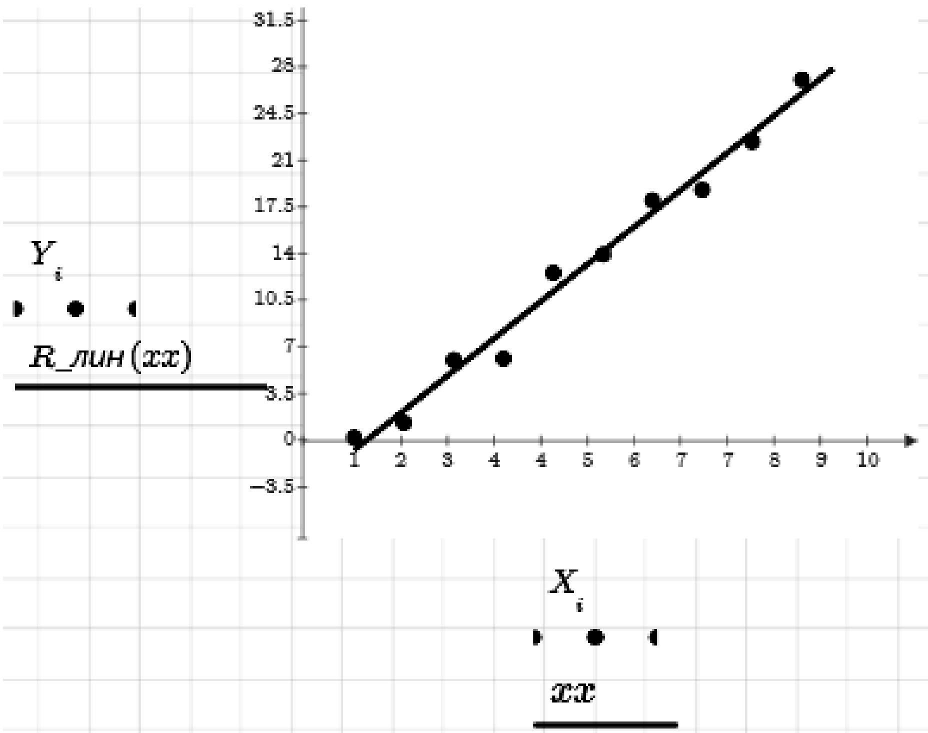
$$a := \frac{m \cdot \sum_{i=1}^{m} X_i \cdot Y_i - \sum_{i=1}^{m} X_i \cdot \sum_{i=1}^{m} Y_i}{m \cdot \sum_{i=1}^{m} {X_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)^2} \qquad a = 3.715$$

$$b := \frac{\sum_{i=1}^{m} Y_i \cdot \sum_{i=1}^{m} {X_i}^2 - \sum_{i=1}^{m} X_i \cdot \sum_{i=1}^{m} X_i \cdot Y_i}{m \cdot \sum_{i=1}^{m} {X_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)^2} \qquad b = -5.571$$

4. Построение линии регрессии:

$$xx := 1.3, 1.3 + 0.01 .. 8.5$$

$$R\_лин(xx) := a \cdot xx + b$$



5. Определение оценок параметров эмпирической модели $y = ax + b$ с помощью встроенных функций MathCad:

$a := \mathrm{slope}(X, Y)$ $\qquad$ $b := \mathrm{intercept}(X, Y)$

$a = 3.715$ $\qquad$ $b = -5.571$

$$\text{вект\_коэфф} := \mathrm{line}(X, Y) = \begin{bmatrix} -5.571 \\ 3.715 \end{bmatrix}$$

6. Представление построенной эмпирической модели:

$$y = 3{,}715\,x - 5{,}571$$

7. Определение стандартного отклонения результатов измерения y_i от предсказанных эмпирической моделью значений y (от линии регрессии):

$$\mathrm{stderr}(X, Y) = 1.25$$

8. Оценка степени отклонения связи между экспериментальными данными x_i и y_i от линейной (тесноты линейной связи) с помощью коэффициента парной корреляции Пирсона:

$$\text{коэфф\_Пирсона} := \mathrm{corr}(X, Y) = 0.992$$

Следовательно, между экспериментальными данными x_i и y_i *очень сильная теснота линейной связи*.

11.3. Информация к выполнению задания 2

СЛАУ (11.13) представляем в векторно-матричной форме

$$M \cdot A = C, \qquad (11.14)$$

где A – вектор-столбец неизвестных – искомых параметров $[a_2, a_1, a_0]$;

M – матрица коэффициентов при неизвестных a_2, a_1, a_0 вида

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_i^4 & \sum_{i=1}^{m} x_i^3 & \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{m} x_i^3 & \sum_{i=1}^{m} x_i^2 & \sum_{i=1}^{m} x_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i^2 & \sum_{i=1}^{m} x_i & m \end{bmatrix}; \qquad (11.15)$$

С – вектор-столбец свободных членов (правых частей системы (11.13))

$$\left[\sum_{i=1}^{m} x_i^2 y_i \quad \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \quad \sum_{i=1}^{m} y_i\right]^T. \qquad (11.16)$$

Встроенная функция polyfit(X,Y,k) (категория *План эксперимента*) определяет регрессионный полином, наилучшим образом с точки зрения метода наименьших квадратов приближающий экспериментальные данные x_i, y_i. Переменная k задает порядок приближающего полинома.

Пример выполнения задания 2.

Пусть в результате серии измерений величин x и y получены 10 пар значений x_i, y_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, 10$), которые представлены в табличной форме:

x	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
y	0,25	3,9	5,37	10, 5	16,24	16,1	20,02	18,88	15,51	8,83

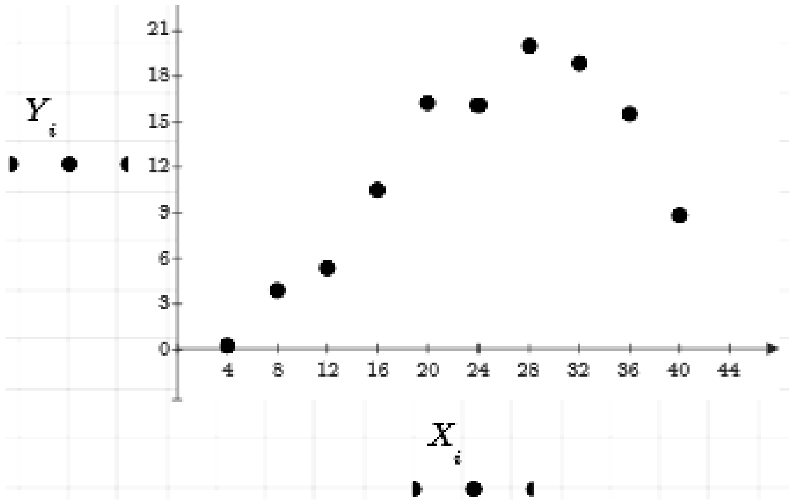
Решить задачу аналитического приближения полученных экспериментальных данных полиномом второй степени $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Построить эмпирическую модель.

1. Задание векторов исходных экспериментальных данных (результатов измерений) X и Y:

$$X := \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \\ 20 \\ 24 \\ 28 \\ 32 \\ 36 \\ 40 \end{bmatrix} \qquad Y := \begin{bmatrix} 0.25 \\ 3.9 \\ 5.37 \\ 10.5 \\ 16.24 \\ 16.1 \\ 20.02 \\ 18.88 \\ 15.51 \\ 8.83 \end{bmatrix}$$

2. Отображение экспериментальных данных графически:

$$i := 1\,..\,10$$



3. Формирование M – матрицы коэффициентов при неизвестных a_2, a_1, a_0:

$$m := 10$$

$$M_{1,1} := \sum_{i=1}^{m} {X_i}^4 \qquad M_{1,2} := \sum_{i=1}^{m} {X_i}^3 \qquad M_{1,3} := \sum_{i=1}^{m} {X_i}^2$$

$$M_{2,1} := \sum_{i=1}^{m} {X_i}^3 \qquad M_{2,2} := \sum_{i=1}^{m} {X_i}^2 \qquad M_{2,3} := \sum_{i=1}^{m} X_i$$

$$M_{3,1} := \sum_{i=1}^{m} {X_i}^2 \qquad M_{3,2} := \sum_{i=1}^{m} X_i \qquad M_{3,3} := m$$

$$M = \begin{bmatrix} 6.485 \cdot 10^6 & 1.936 \cdot 10^5 & 6.16 \cdot 10^3 \\ 1.936 \cdot 10^5 & 6.16 \cdot 10^3 & 220 \\ 6.16 \cdot 10^3 & 220 & 10 \end{bmatrix}$$

4. Формирование вектор-столбца свободных членов (правых частей системы (11.10)):

$$C_1 := \sum_{i=1}^{m} {X_i}^2 \cdot Y_i \qquad C_2 := \sum_{i=1}^{m} X_i \cdot Y_i \qquad C_3 := \sum_{i=1}^{m} Y_i$$

$$C = \begin{bmatrix} 8.874 \cdot 10^4 \\ 3.052 \cdot 10^3 \\ 115.6 \end{bmatrix}$$

5. Определение параметров эмпирической модели $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ путем решения СЛАУ (11.13), (11.14) матричным методом:

$$A := M^{-1} \cdot C \qquad A = \begin{bmatrix} -0.036 \\ 1.968 \\ -9.578 \end{bmatrix}$$

6. Представление полученной эмпирической модели:

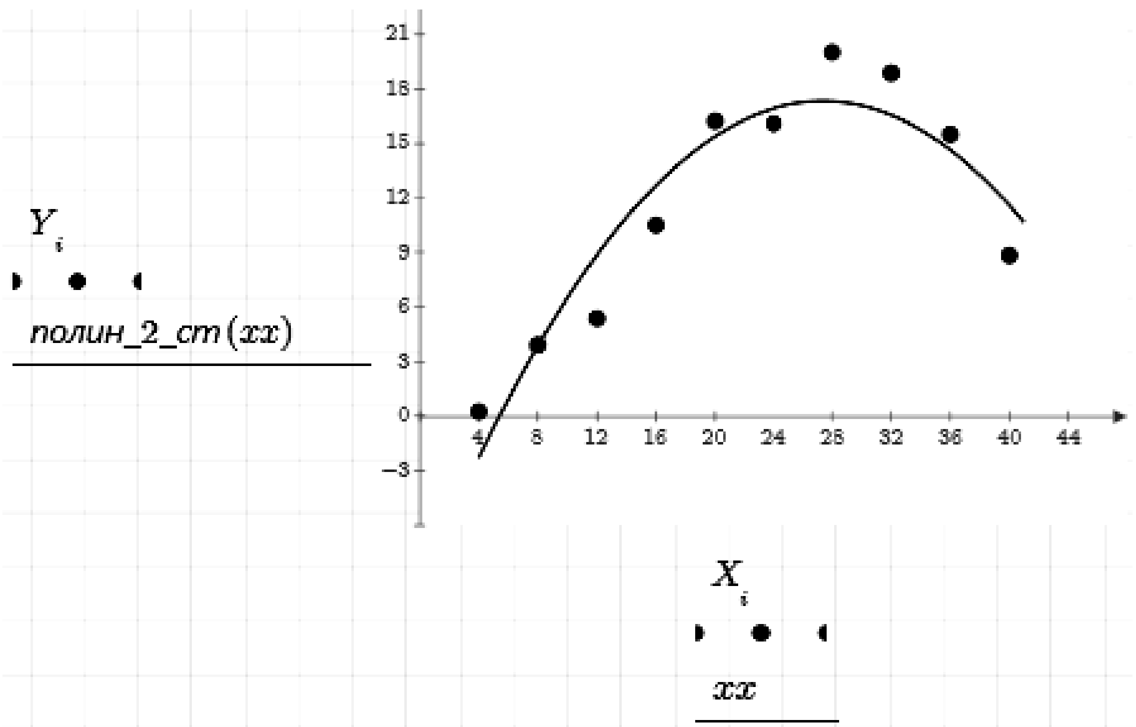
$$y = -9{,}578 + 1{,}968\ x - 0{,}036\ x^2$$

7. Определение приближающей функции – эмпирической модели класса $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ с помощью встроенной функции MathCad:

$$полин\_2\_ст := \mathrm{polyfit}(X, Y, 2)$$

8. Построение линии регрессии:

$$xx := 4, 4 + 0.01 .. 41$$



11.4. Задания

1) Найти эмпирическую модель класса линейных функций $y = a x + b$, которая бы наилучшим образом отражала связь (зависимость) между экспериментальными данными x и y, т. е. решить задачу линейной регрессии для функции, заданной таблично (табл. 11.1) средствами MathCAD.

2) Аппроксимировать (приблизить) экспериментальные данные x и y, представленные в табл. 11.2, полиномом второй степени, т. е. решить задачу полиномиальной регрессии.

3) Аппроксимировать (приблизить) экспериментальные данные x и y, представленные в табл. 11.2, полиномом шестой степени. Проанализировать полученные результаты.

4) Решить задачу линейной регрессии для функции, заданной таблично (см. табл. 11.1), с помощью средств табличного процессора Excel. Вывести уравнение линии регрессии. Оценить величину погрешности аппроксимации.

5) Решить задачу полиномиальной регрессии для функции, заданной таблично (см. табл. 11.2), с помощью средств табличного процессора Excel. Построить две эмпирические модели на основе полиномов второй и шестой степени. Вывести уравнения построенных линий регрессии.

Таблица 11.1

Исходные экспериментальные данные для заданий 1 и 4

Вариант	Экспериментальные данные (результаты измерений)
1	2
1	x = {1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22; 25; 28; 31; 34} y = {13,5; 11,57; 11,2; 8,56; 8,79; 6,47; 6; 4,11; 3,98; 2; 0,33; 0,99}
2	x = {3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; 25} y = {10,2; 11,49; 13,2; 18,1; 19; 22,17; 22; 26,81; 28; 32,6; 33,2; 37}
3	x = {0; 1,5; 3; 4,5; 6; 7,5; 9; 10,5; 12; 13,5; 15} y = {1,4; 3,25; 10; 8,07; 13,27; 12; 16,39; 17,8; 22,79; 26,91; 25,3}
4	x = {2,5; 5; 7,5; 10; 12,5; 15; 17,5; 20; 22,5; 25; 27,5; 30} y = {21,4; 22,28; 15; 14,91; 13,1; 9; 9,95; 6,81; 2,3; 2,75; 0,47; 2}
5	x = {7; 7,4; 7,8; 8,2; 8,6; 9; 9,4; 9,8; 10,2; 10,6; 11; 11,4; 11,8} y = {19,3; 15,74; 15; 11,69; 11,81; 9,1; 8,57; 5,25; 4,79; 3; 3,37; 2,15; 0,81}
6	x = {4,2; 5,4; 6,6; 7,8; 9; 10,2; 11,4; 12,6; 13,8; 15; 16,2} y = {10,23; 12,5; 18,29; 24; 25,57; 27,4; 34,61; 39; 41,6; 42,78; 49,52}

О к о н ч а н и е т а б л. 11.1

1	2
7	x = {0,6; 1,2; 1,8; 2,4; 3; 3,6; 4,2; 4,8; 5,4; 6; 6,6; 7,2} y = {7,6; 7,39; 6,05; 5,2; 4,95; 3,74; 3,77; 2,16; 2,07; 1; 1,19; 0,48}
8	x = {7,1; 7,4; 7,7; 8; 8,3; 8,6; 8,9; 9,2; 9,5; 9,8; 10,1; 10,4} y = {6,15; 7,09; 7,11; 8; 8,82; 9,3; 11,14; 11; 12,15; 12,04; 13; 14,99}
9	x = {3,3; 3,8; 4,3; 4,8; 5,3; 5,8; 6,3; 6,8; 7,3; 7,8; 8,3; 8,8} y = {1,25; 6; 15,46; 15,5; 33,31; 39; 55,11; 58,16; 70,81; 69,2; 96,8; 101,5}
10	x = {1; 2,2; 3,4; 4,6; 5,8; 7; 8,2; 9,4; 10,6; 11,8; 13; 14,2; 15,4} y = {16,1; 15,7; 12,48; 12,24; 8,47; 9; 7,97; 6,22; 3,36; 3,97; 3; 1,05; 0,28}
11	x = {4,5; 5,2; 5,9; 6,6; 7,3; 8; 8,7; 9,4; 10,1; 10,8; 11,5} y = {113,8; 97; 98,47; 77,04; 71,9; 69,33; 52; 33,21; 34,11; 15,06; 13,15}
12	x = {2,5; 5; 7,5; 10; 12,5; 15; 17,5; 20; 22,5; 25; 27,5; 30} y = {1,4; 3,25; 10; 8,07; 13,27; 12; 16,39; 17,8; 22,79; 26,9; 25,3; 28}
13	x = {7; 7,4; 7,8; 8,2; 8,6; 9; 9,4; 9,8; 10,2; 10,6; 11} y = {77,28; 64,05; 62; 59,12; 48,32; 41,1; 38,43; 31,17; 22; 20,77; 14,31}
14	x = {12; 12,7; 13,4; 14,1; 14,8; 15,5; 16,2; 16,9; 17,6; 18,3; 19; 19,7} y = {33,15; 27; 28,07; 23,14; 18,34; 16,8; 10,08; 11,65; 7,17; 4,22; 3,35; 0,27}
15	x = {1,5; 3; 4,5; 6; 7,5; 9; 10,5; 12; 13,5; 15; 16,5} y = {19,11; 23,7; 23; 27,98; 30,24; 38,71; 39; 43,15; 42,77; 49,17; 47}
16	x = {3; 3,6; 4,2; 4,8 ; 5,4; 6; 6,6; 7,2; 7,8; 8,4; 9} y = {20,5; 21,19; 14; 13,88; 12,2; 8; 8,87; 5,73; 1,2; 0,59; 1,03}

Т а б л и ц а 11.2

Исходные экспериментальные данные для заданий 2, 3, 5

Вариант	Экспериментальные данные (результаты измерений)
1	2
1	x = {0; 1,5; 3; 4,5; 6; 7,5; 9; 10,5; 12; 13,5; 15; 16,5; 18} y = {13,51; 8,99; 8,13; 6,79; 6,24; 10,6; 13,02; 13; 15,51; 19,13; 27; 23,15; 24,9}
2	x = {2,5; 5; 7,5; 10; 12,5; 15; 17,5; 20; 22,5; 25; 27,5; 30} y = {1,27; 4,81; 6,99; 8; 10,17; 9,05; 8,98; 6,81; 4,15; 3,71; 3,13; 1,57}
3	x = {7,1; 7,4; 7,7; 8; 8,3; 8,6; 8,9; 9,2; 9,5; 9,8; 10,1; 10,4; 10,7} y = {8,27; 2,61; 3,24; 1,69; 1,48; 3,7; 5,05; 5,47; 10,3; 11; 17,21; 15,8; 17,99; 24,33}
4	x = {7,5; 10; 12,5; 15; 17,5; 20; 22,5; 25; 27,5; 30; 32,5} y = {7,06; 2,41; 4; 2,05; 3,94; 4,06; 8,96; 13; 16,64; 17,3; 23}
5	x = {9; 9,5; 10; 10,5; 11; 11,5; 12; 12,5; 13; 13,5; 14; 14,5} y = {11,81; 15,2; 22,73; 25,37; 24; 13,42; 12,99; 7,67; 3; 1,55; 2,14; 0,77}
6	x = {4,2; 5,4; 6,6; 7,8; 9; 10,2; 11,4; 12,6; 13,8; 15; 16,2} y = {1,72; 3,05; 7; 10,21; 9,13; 10,38; 8,51; 9,62; 7,28; 3,18; 1,17}
7	x = {1; 2,2; 3,4; 4,6; 5,8; 7; 8,2; 9,4; 10,6; 11,8; 13; 14,2} y = {5,36; 2,28; 1,8; 2,05; 6,11; 10,07; 10,51; 12; 16,93; 16,37; 20; 26,44}
8	x = {10; 13; 16; 19; 22; 25; 28; 31; 34; 37; 40; 43; 46} y = {17,6; 8,42; 4,94; 7,7; 6,9; 7,37; 10,21; 18; 16,25; 29,43; 37,57; 37,95; 41}
9	x = {7; 7,4; 7,8; 8,2; 8,6; 9; 9,4; 9,8; 10,2; 10,6; 11; 11,4} y = {1,52; 8,71; 15,17; 22; 20,65; 14,97; 13,11; 8,13; 6,39; 1,99; 3; 2,45}

Окончание табл. 11.2

1	2
10	x = {4,5; 6; 7,5; 9; 10,5; 12; 13,5; 15; 16,5; 18; 19,5; 21; 22,5} y = {115; 110,21; 98,1; 65,77; 62; 43,27; 38,13; 35,84; 30; 35,76; 40,14; 55; 57,72}
11	x = {1; 2,2; 3,4; 4,6; 5,8; 7; 8,2; 9,4; 10,6; 11,8; 13; 14,2; 15,4} y = {18,73; 11,17; 4,95; 5,27; 2; 8,61; 10,37; 34; 35,99; 50,37; 49,24; 71; 74,12}
12	x = {4,2; 5,4; 6,6; 7,8; 9; 10,2; 11,4; 12,6; 13,8; 15; 16,2} y = {65,38; 68,15; 77; 81,99; 80,72; 78,15; 66,77; 64; 50,04; 41,15; 42,38}
13	x = {3,3; 3,8; 4,3; 4,8; 5,3; 5,8; 6,3; 6,8; 7,3; 7,8; 8,3; 8,8; 9,3} y = {15,37; 21; 29,07; 30,24; 25,61; 21,15; 22; 17,06; 10,19; 4,35; 4,11; 0,27; 0,99}
14	x = {2,5; 5; 7,5; 10; 12,5; 15; 17,5; 20; 22,5; 25; 27,5; 30} y = {12,55; 21,57; 22; 28,79; 35,63; 29; 27,59; 13,36; 12,71; 9; 6,99; 2,27}
15	x = {3,4; 4,2; 5; 5,8; 6,6; 7,4; 8,2; 9; 9,8; 10,6; 11,4; 12,2} y = {17,41; 8,77; 10,25; 4; 3,13; 8,36; 11,48; 23,37; 21,75; 35; 41,09; 42,07}
16	x = {7,1; 7,4; 7,7; 8; 8,3; 8,6; 8,9; 9,2; 9,5; 9,8; 10,1; 10,4} y = {37,51; 24; 23,68; 17,27; 16,25; 12,07; 12,51; 16; 18,25; 29,43; 30,17; 38,65}

Библиографический список

1. Голубева Н. В. Математическое моделирование систем и процессов: Учебное пособие / Н. В. Голубева. СПб: Лань, 2013. 192 с.

2. Амосов А. А. Вычислительные методы: Учебное пособие / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. СПб: Лань, 2014. 672 с.

Учебное издание

ГОЛУБЕВА Нина Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Часть 4

Учебно-методическое пособие

Редактор Н. А. Майорова

* * *

Подписано в печать 31.01.2018. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,3. Уч.- изд. л. 2,5.
Тираж 350 экз. Заказ .

* *

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35