Н. В. ГОЛУБЕВА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

ЧАСТЬ 2

ОМСК 2017

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

Н. В. Голубева

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Часть 2

Утверждено методическим советом университета
в качестве учебно-методического пособия
к выполнению лабораторных работ и самостоятельной работы
по дисциплинам «Математическое моделирование систем и процессов»,
«Численные методы моделирования» и
«Вычислительная техника в инженерных задачах»

Омск 2017

УДК 519.65(075.8)
ББК 22.19я73
Г62

Математическое моделирование систем и процессов: Учебно-методическое пособие к выполнению лабораторных работ и самостоятельной работы. Часть 2 / Н. В. Голубева; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2017. 35 с.

Рассматриваются математические модели различных классов, методы их решения и графического отображения результатов моделирования средствами интегрированной среды PTC Mathcad Prime 3.1.

Предназначено для студентов 2-го и 3-го курсов, обучающихся по специальностям «Системы обеспечения движения поездов», «Электроэнергетика и электротехника», «Подвижной состав железных дорог», «Эксплуатация железных дорог»; по направлениям подготовки «Стандартизация и метрология», «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», «Теплоэнергетика и теплотехника», «Наземные транспортно-технологические комплексы»; для студентов заочной формы обучения и для обучения с использованием дистанционных образовательных технологий.

Библиогр.: 4 назв. Табл. 4. Рис. 3.

Рецензенты: доктор техн. наук, профессор В. Н. Горюнов;
доктор техн. наук, профессор В. А. Нехаев.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение ………………………………………………………….... 5
Лабораторная работа 4. Математические модели в форме систем линейных алгебраических уравнений и методы их решения… 6
4.1. Постановка задачи ………………………………………. 6
4.2. Информация к выполнению задания 1.а ……………………… 7
4.3. Информация к выполнению задания 1.б ……………………… 9
4.4. Информация к выполнению задания 1.в ……………………… 10
4.5. Информация к выполнению задания 1.г ……………………… 11
4.6. Информация к выполнению задания 1.д ……………………… 12
4.7. Задания ……………………………………………….. 12
Лабораторная работа 5. Средства программирования Mathcad …….. 15
5.1. Особенности создания программных модулей в Mathcad ……. 15
5.2. Задания ………………………………………...................... 23
Лабораторная работа 6. Математические модели в форме нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений и особенности их решения численными методами ……………………………………. 27
6.1. Постановка задачи ………………………………………. 27
6.2. Информация к выполнению задания 1………………………… 27
6.3. Задания ………………………………………...................... 33
Библиографический список………………………..…………………....... 34

ВВЕДЕНИЕ

Важнейшей частью программы подготовки современного специалиста − выпускника технического университета − является обучение его основам, приемам и инструментам математического моделирования − главного научного метода познания − и формирование у него соответствующих профессиональных компетенций. Решение научных и инженерно-технических задач, связанных с исследованием и проектированием технических систем, оптимизацией их параметров или структуры, оптимальным управлением объектом или прогнозированием его поведения, изучением механизма явлений, осуществляется на основе математического моделирования.

Учебно-методическое пособие по дисциплинам «Математическое моделирование систем и процессов», «Численные методы моделирования» и «Вычислительная техника в инженерных задачах» состоит из пяти частей.

Настоящее учебно-методическое пособие включает в себя три лабораторные работы. Четвертая лабораторная работа открывает цикл работ, посвященных особенностям формирования и реализации математических моделей различных классов. В ней рассматриваются математические модели в форме систем линейных алгебраических уравнений и методы их решения, реализуемые средствами системы PTC Mathcad Prime 3.1. Лабораторная работа 5 знакомит студента с возможностями встроенной системы программирования среды PTC Mathcad Prime 3.1. Шестая лабораторная работа посвящена математическим моделям в форме нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений и особенностям их решения численными методами. Студент должен получить решение модели каждого класса несколькими способами (различными инструментами Mathcad). В процессе выполнения лабораторных работ студент должен уяснить важность правильной постановки задачи, выбора метода ее решения и способа отображения результатов моделирования и умения правильно интерпретировать их.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов 2-го и 3-го курсов очного и заочного обучения, а также для обучения с использованием дистанционных образовательных технологий.

Лабораторная работа 4

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФОРМЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

4.1. Постановка задачи

Некоторые физические системы могут быть адекватно описаны математической моделью в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1; \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2; \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \cdots + a_{nn}\cdot x_n = b_n, \end{cases} \tag{4.1}$$

которая может быть представлена в векторно-матричной форме:

$$A \cdot X = B, \tag{4.2}$$

где $B = \left[b_1\ b_2\ \ldots\ b_n\right]^T$ – вектор свободных членов; $X = \left[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n\right]^T$ – вектор неизвестных; A – матрица коэффициентов системы, размером $n \times n$.

При исследовании многих систем и процессов, при проектировании технических объектов на промежуточных этапах решения сложной задачи часто возникает необходимость решения СЛАУ. Например, при аппроксимации экспериментальных данных функцией определенного класса.

Математические модели в форме дифференциальных уравнений в частных производных, описывающие процессы различной физической природы, с помощью разностной аппроксимации (дискретизации) при определенных условиях сводятся к решению СЛАУ.

Анализ прочности и устойчивости инженерных конструкций и сооружений в условиях равновесия осуществляется с применением математического аппарата СЛАУ.

Сущность многих физических процессов математически отображается с помощью интегральных уравнений. Ввиду сложности решения многих из них исследователь предпочитает свести задачу к решению модели в форме СЛАУ, используя для этого известные методы аппроксимации или дискретизации.

Таким образом, решение СЛАУ приобретает особое значение в процессе инженерной и научной деятельности. В связи с этим необходимо уделить серьезное внимание методам решения математических моделей этого класса и их реализации средствами системы PTC Mathcad Prime 3.1.

В данной лабораторной работе рассмотрим две группы методов решения СЛАУ – прямые (точные) и итерационные (приближённые).

4.2. Информация к выполнению задания 1.а

Для реализации метода Гаусса в среде Mathcad требуется ввести понятие **расширенной матрицы системы.** Для системы (4.1) расширенная матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Прямой ход метода Гаусса приводит расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* & b_1^* \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n}^* & b_2^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n^* \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Обратный ход преобразует матрицу (4.4) к виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

где последний столбец содержит решение системы (4.1).

Для реализации метода Гаусса рекомендуется использовать следующие встроенные функции Mathcad:

augment(A, B) – формирует расширенную матрицу AR путем добавления к матрице коэффициентов системы A столбца свободных членов B;

rref(AR) − приводит расширенную матрицу AR вида (4.3) системы к виду (4.5), т. е. реализует прямой и обратный ходы метода Гаусса;

submatrix(AS,$i_н$,$i_к$,$j_н$,$j_к$) − извлекает фрагмент матрицы AS ($i_н$ и $i_к$ – номера соответственно начальной и конечной строк извлекаемого фрагмента, $j_н$ и $j_к$ − номера начального и конечного столбцов извлекаемого фрагмента).

Пример выполнения задания 1.a

Решить заданную СЛАУ методом Гаусса:

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 9x_3 = 5; \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -10; \\ -2x_1 - 6x_3 = -1. \end{cases} \qquad (4.6)$$

1. Задание матрицы коэффициентов A и вектора свободных членов B:

$$\mathbf{ORIGIN} := 1$$

$$A := \begin{bmatrix} 10 & -1 & 9 \\ 5 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Формирование расширенной матрицы системы AR:

$$AR := \mathrm{augment}(A, B) \qquad AR = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 9 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & -10 \\ -2 & 0 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Выполнение прямого и обратного ходов метода Гаусса и приведение расширенной матрицы системы AR к виду (4.5):

$$AS := \mathrm{rref}(AR) \qquad AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.17 \\ 0 & 1 & 0 & -4.688 \\ 0 & 0 & 1 & 0.223 \end{bmatrix}$$

4. Извлечение из матрицы AS последнего столбца, представляющего собой решение заданной системы X:

$$X := \mathrm{submatrix}(AS, 1, 3, 4, 4) \qquad X = \begin{bmatrix} -0.17 \\ -4.688 \\ 0.223 \end{bmatrix}$$

5. Проверка правильности решения:

$$A \cdot X - B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.776 \cdot 10^{-15} \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.3. Информация к выполнению задания 1.б

Для реализации метода LU-разложения рекомендуется использовать встроенную функцию L U (A), которая осуществляет LU-разложение матрицы A, а именно формирует составной вектор Q, элементами которого являются три вложенные матрицы P, L и U:

$$\text{для}\quad A=\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix};\qquad Q=\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \end{bmatrix}\begin{matrix} \text{P} \\ \\ \\ \text{L} \\ \\ \\ \text{U} \end{matrix}$$

П р и м е р   в ы п о л н е н и я   з а д а н и я   1.б

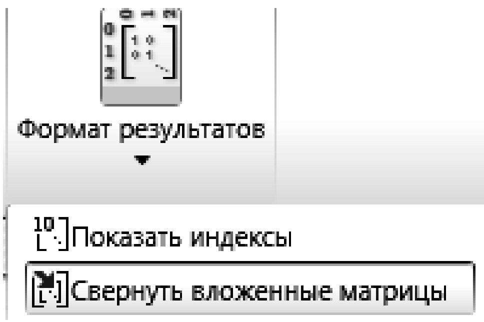
Решить заданную СЛАУ (4.6) методом LU-разложения.

1. LU-разложение матрицы коэффициентов A и формирование составного вектора Q:

$$Q:=\mathrm{LU}(A)$$

$$Q=\begin{bmatrix} [3\times 3] \\ [3\times 3] \\ [3\times 3] \end{bmatrix}$$

Если вектор Q отображается в таком свернутом виде, то следует применить инструмент: вкладка Матрицы /таблицы ⇒ кнопка Формат результатов. Щелчком отменить команду Свернуть вложенные матрицы.



$$Q := \mathrm{LU}(A) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.2 & -0.08 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 10 & -1 & 9 \\ 0 & 2.5 & -3.5 \\ 0 & 0 & -4.48 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

2. Извлечение нижней треугольной матрицы L из составного вектора Q:

$$L := Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.2 & -0.08 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Извлечение верхней треугольной матрицы U из составного вектора Q:

$$U := Q_3 = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 9 \\ 0 & 2.5 & -3.5 \\ 0 & 0 & -4.48 \end{bmatrix}$$

4. Определение вектора вспомогательных переменных G:

$$G := L^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 5 \\ -12.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5. Определение вектора решения системы X

$$X := U^{-1} \cdot G = \begin{bmatrix} -0.17 \\ -4.688 \\ 0.223 \end{bmatrix}$$

4.4. Информация к выполнению задания 1.в

Обозначение: det_A – определитель (детерминант) матрицы А. Для нахождения определителя используется встроенная функция det(A).

Если определитель матрицы А не равен нулю, то решение СЛАУ (4.6) существует и оно единственное. В этом случае матрица А называется *невырожденной*, или *неособенной*.

Пример выполнения задания 1.в

Решить заданную СЛАУ (4.6) матричным методом.

1. Проверка условия невырожденности матрицы A

$$det\_A := \det(A) \qquad det\_A = -112$$

2. Определение решения системы X

$$X := A^{-1} \cdot B \qquad X = \begin{bmatrix} -0.17 \\ -4.688 \\ 0.223 \end{bmatrix}$$

4.5. Информация к выполнению задания 1.г

Метод итерации относится к разряду приближённых.

Для реализации метода итерации следует применить Блок решения PTC Mathcad Prime 3.1. Вставка Блока решения осуществляется с помощью инструмента вкладка Математика => группа Области => команда Блок решения.

Область Блока решения содержит три раздела: Начальные приближения, Ограничения и Решатель.

В раздел Начальные приближения вводятся начальные (нулевые) приближения для искомых неизвестных:

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)},$$

в качестве которых рекомендуется принимать соответствующие значения свободных членов $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$.

В раздел Ограничения вводятся уравнения решаемой СЛАУ, представленные в виде равенств с помощью логических операторов «равно» **=**.

Для вставки логического оператора «равно» **=** следует применить инструмент: вкладка Математика => группа Операторы и символы => список Операторы.

В раздел Решатель надо вставить встроенную функцию find( ), которая реализует решение задачи соответствующим методом, выбираемым в зависимости от того, какая поставлена задача – линейная или нелинейная. В качестве аргументов функции find( ) следует задать искомые неизвестные x1, x2, x3.

Пример выполнения задания 1.г.

Решить заданную СЛАУ (4.6) методом итерации.

Начальные приближения

$$x1 := 5 \qquad x2 := -10 \qquad x3 := -1$$

Ограничения

$$10 \cdot x1 - x2 + 9 \cdot x3 = 5$$

$$5 \cdot x1 + 2 \cdot x2 + x3 = -10$$

$$-2 \cdot x1 - 6 \cdot x3 = -1$$

Решатель

$$\mathbf{find}(x1, x2, \mathbf{x3}) = \begin{bmatrix} -0.17 \\ -4.688 \\ 0.223 \end{bmatrix}$$

4.6. Информация к выполнению задания 1.д

Пример выполнения задания 1.д.

Решить заданную СЛАУ (4.6) с помощью встроенной функции lsolve ( ).

$$X := \mathrm{lsolve}(A, B)$$

$$X = \begin{bmatrix} -0.17 \\ -4.688 \\ 0.223 \end{bmatrix}$$

4.7. Задания

1) Решить заданную СЛАУ (из табл. 4.1) пятью методами:
   а) методом Гаусса;
   б) методом LU-разложения;
   в) матричным методом;
   г) методом итерации;
   д) с помощью встроенной функции Mathcad lsolve (…).

2) Ответить на контрольные вопросы:

а) решение каких задач приводит к моделям в форме СЛАУ;

б) решением СЛАУ является …. ;

в) в чем суть прямых методов решения СЛАУ;

г) в чем суть итерационных методов решения СЛАУ, поясните термин «итерация»;

д) сформулируйте условие сходимости метода простых итераций;

е) какие средства PTC Mathcad Prime 3.1 применялись для решения моделей в форме СЛАУ?

Таблица 4.1

Таблица исходных данных к заданию 1

Вариант	СЛАУ	Решение
1	2	3
1	$\begin{cases} 4x_1-2x_2+x_3=1; \\ 2x_1+3x_2+x_3=2; \\ -2x_1+5x_2-4x_3=-1 \end{cases}$	$x_1=0{,}281;$ $x_2=0{,}313;$ $x_3=0{,}5$
2	$\begin{cases} 15x_1-x_2+3x_3=-4; \\ 2x_1+13x_2-x_3=1; \\ 6x_1-2x_2+x_3=-1 \end{cases}$	$x_1=0{,}151;$ $x_2=-0{,}11;$ $x_3=-2{,}123$
3	$\begin{cases} 12x_1+x_2+x_3=7; \\ 2x_1+8x_2+3x_3=10; \\ -4x_1+7x_2+5x_3=14 \end{cases}$	$x_1=0{,}329;$ $x_2=0{,}04;$ $x_3=3{,}008$
4	$\begin{cases} 12x_1-x_2+3x_3=-6; \\ x_1+9x_2-2x_3=10; \\ 5x_1-2x_2+5x_3=-1 \end{cases}$	$x_1=-0{,}631;$ $x_2=1{,}402;$ $x_3=0{,}992$
5	$\begin{cases} 11x_1-x_2+x_3=4; \\ x_1+6x_2+2x_3=9; \\ -x_1-2x_2+5x_3=2 \end{cases}$	$x_1=0{,}382;$ $x_2=1{,}127;$ $x_3=0{,}927$
6	$\begin{cases} 10x_1-7x_2=9; \\ -3x_1+8x_2+6x_3=4; \\ 4x_1-x_2+5x_3=6 \end{cases}$	$x_1=1{,}615;$ $x_2=1{,}021;$ $x_3=0{,}112$

Окончание табл. 4.1

1	2	3
7	$\begin{cases} 18x_1+3x_2+4x_3=2; \\ x_1+9x_2+6x_3=1; \\ 4x_1+x_2+10x_3=5 \end{cases}$	$x_1=0,037;$ $x_2=-0,232;$ $x_3=0,508$
8	$\begin{cases} 5x_1+3x_2+4x_3=21; \\ x_1+4x_2-1x_3=15; \\ -2x_1+x_2+3x_3=20 \end{cases}$	$x_1=-1,857;$ $x_2=5,143;$ $x_3=3,714$
9	$\begin{cases} 24x_1-13x_2+7x_3=27; \\ 5x_1+18x_2-6x_3=11; \\ -11x_1+10x_2+18x_3=38 \end{cases}$	$x_1=1,055;$ $x_2=1,043;$ $x_3=2,176$
10	$\begin{cases} 16x_1-3x_2+4x_3=37; \\ 10x_1+14x_2-7x_3=29; \\ -10x_1+5x_2+15x_3=43 \end{cases}$	$x_1=1,92;$ $x_2=2,377;$ $x_3=3,354$
11	$\begin{cases} 15x_1-4x_2-x_3=32; \\ -5x_1+7x_2+5x_3=20; \\ 3x_1-2x_2+12x_3=16 \end{cases}$	$x_1=3,39;$ $x_2=4,407;$ $x_3=1,22$
12	$\begin{cases} 17x_1-2x_2-5x_3=31; \\ -8x_1+7x_2+2x_3=28; \\ 7x_1-2x_2+12x_3=1 \end{cases}$	$x_1=2,575;$ $x_2=7,015;$ $x_3=-0,25$
13	$\begin{cases} -20x_1-5x_2+2x_3=8; \\ -x_1+16x_2+5x_3=1; \\ 4x_1-2x_2+14x_3=-5 \end{cases}$	$x_1=-0,447;$ $x_2=0,102;$ $x_3=-0,215$
14	$\begin{cases} -18x_1-6x_2+7x_3=-18; \\ 12x_1+14x_2+11x_3=22; \\ 9x_1-5x_2+11x_3=-25 \end{cases}$	$x_1=-0,21;$ $x_2=2,507;$ $x_3=-0,962$
15	$\begin{cases} 19x_1-x_2+5x_3=7; \\ -4x_1+14x_2-6x_3=12; \\ 8x_1-2x_2+15x_3=15 \end{cases}$	$x_1=0,15;$ $x_2=1,373;$ $x_3=1,103$

Лабораторная работа 5

СРЕДСТВА ПРОГРАММИРОВАНИЯ MATHCAD

5.1. Особенности создания программных модулей в Mathcad

Встроенные инструменты программирования PTC Mathcad Prime 3.1 существенно расширяют возможности решения задач математического моделирования.

Программный модуль (программа) Mathcad представляет собой макрофункцию и обладает поэтому основными свойствами функции. Программному модулю можно присвоить имя с перечнем аргументов (параметров).

Инструменты для создания программных модулей PTC Mathcad Prime 3.1 представлены на вкладке Математика => группа Операторы и символы => Программирование (рис. 5.1).

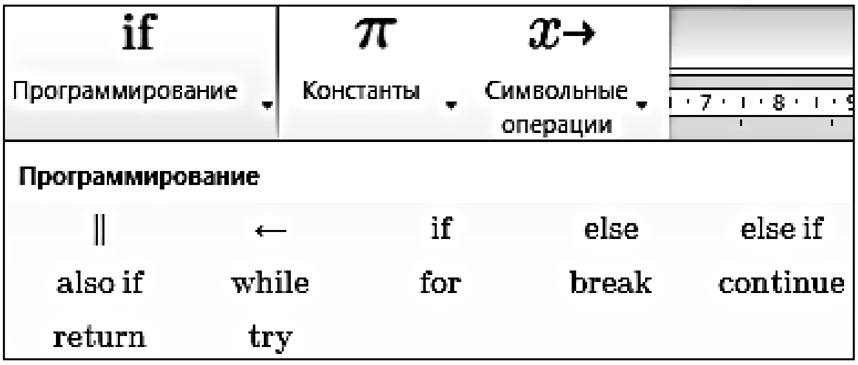


Рис. 5.1. Инструменты для создания программ

Создание программного модуля начинается с ввода оператора Программа ‖.

Оператор локального присваивания ← используется внутри программного модуля. Переменные, значения которых введены с помощью этого оператора, называются локальными. Их значения действуют только в пределах данного программного модуля.

Оператор условного перехода if реализует ветвление вычислительного процесса.

П р и м е р 5.1. Создать программный модуль, реализующий вычисление значений функции f на основе алгоритма простого ветвления, представленного на рис. 5.2, при t = 5,3.

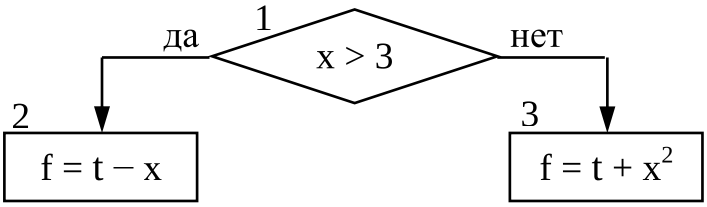
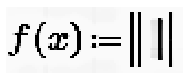


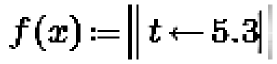
Рис. 5.2. Алгоритм простого ветвления вычислительного процесса

Создаваемому программному модулю присвоить имя f(x), где x – параметр или аргумент функции. (Через аргументы функции в программу вводятся входные данные.)

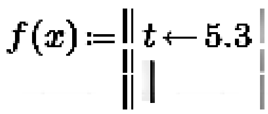
После оператора присваивания вставить оператор Программа.



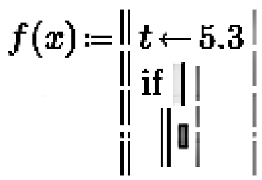
В местозаполнитель, где мигает голубой курсор, ввести оператор локального присваивания.



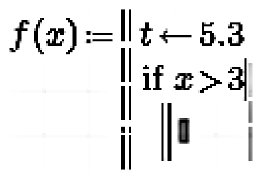
Убедиться, что мигающий голубой курсор находится в конце введенного оператора локального присваивания. Нажать Enter для добавления новой строки в программу.



Ввести шаблон оператора if, используя встроенные средства программирования (см. рис. 5.1). При этом ниже оператора if появляется вложенный шаблон оператора Программа ‖. Это означает, что все операции, введенные справа от оператора ‖, будут относиться к оператору if.



Справа от оператора if ввести условие (логическое выражение) (см. рис. 5.2, блок 1).



Установить курсор в местозаполнитель, справа от вложенного шаблона оператора Программа.

$$f(x) := \left\| \begin{array}{l} t \leftarrow 5.3 \\ \text{if } x > 3 \\ \quad \| \end{array} \right.$$

Ввести оператор локального присваивания (см. рис. 5.2, блок 2), который следует выполнить, если условие x > 3 выполняется (логическое выражение x > 3 принимает значение «истина»).

$$f(x) := \left\| \begin{array}{l} t \leftarrow 5.3 \\ \text{if } x > 3 \\ \quad \| f \leftarrow t - x \end{array} \right.$$

Установить курсор за серой вертикальной линией, расположенной справа, указывающей область действия оператора if.

$$f(x) := \left\| \begin{array}{l} t \leftarrow 5.3 \\ \text{if } x > 3 \\ \quad \| f \leftarrow t - x \end{array} \right.$$

Ввести оператор альтернативного выбора else.

$$f(x) := \left\| \begin{array}{l} t \leftarrow 5.3 \\ \text{if } x > 3 \\ \quad \| f \leftarrow t - x \\ \text{else} \\ \quad \| \end{array} \right.$$

В местозаполнитель под оператором else справа от вложенного шаблона оператора ‖ ввести оператор локального присваивания (см. рис. 5.2, блок 3), который следует выполнить, если условие x > 3 не выполняется (логическое выражение x > 3 принимает значение «ложь»).

$$f(x) := \left\| \begin{array}{l} t \leftarrow 5.3 \\ \text{if } x > 3 \\ \quad \| f \leftarrow t - x \\ \text{else} \\ \quad \| f \leftarrow t + x^2 \end{array} \right.$$

Для получения результата программы при конкретном значении параметра x ввести её имя и затем, в скобках, − значение параметра x.

$$f(x) := \left\| \begin{array}{l} t \leftarrow 5.3 \\ \text{if } x > 3 \\ \quad \| f \leftarrow t - x \\ \text{else} \\ \quad \| f \leftarrow t + x^2 \end{array} \right.$$

$$f(8) = -2.7$$

$$f(-3) = 14.3$$

Пример 5.2. Создать программу для вычисления значений функции y:

$$y = \begin{cases} |x| & \text{при} \quad x < 2; \\ x^3 + b & \text{при} \quad 2 \le x < 10; \\ \sqrt{x + b} & \text{при} \quad x \ge 10 \end{cases}$$

при b = 10.

Решение задачи требует реализации алгоритма сложного ветвления, представленного на рис. 5.3.

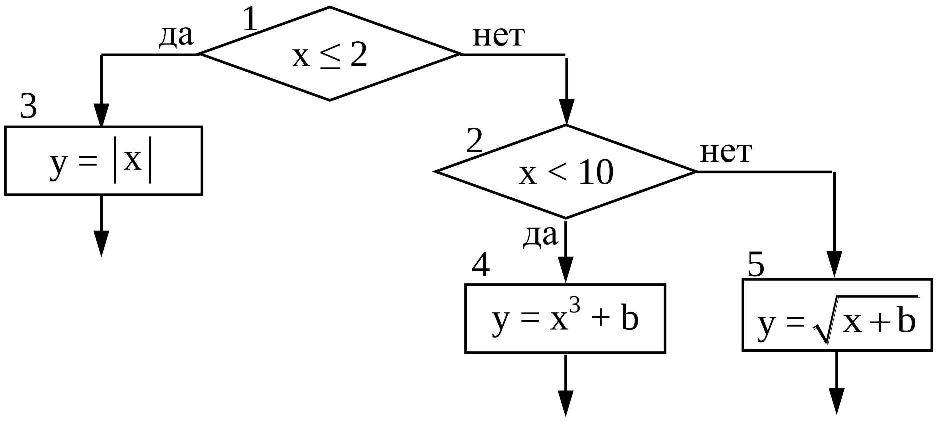


Рис. 5.3. Алгоритм сложного ветвления вычислительного процесса

Рассмотрим два варианта программы.

Вариант 1.

Сложное ветвление реализовано с помощью последовательно применяемых операторов условного перехода if. Условия (логические выражения) в каждом операторе if задаются в том же естественном математическом виде, как они записаны в условии задачи.	$y(x) :=$ $b \leftarrow 10$ if $x < 2$ $\quad y \leftarrow \lvert x \rvert$ if $2 \le x < 10$ $\quad y \leftarrow x^3 + b$ if $x \ge 10$ $\quad y \leftarrow \sqrt{x + b}$ $y(-5) = 5$ $y(4) = 74$ $y(15) = 5$

Вариант 2.

Сложное ветвление реализовано в соответствии с алгоритмом, представленным на рис. 5.3. В четвертой строке программы введен оператор альтернативного выбора else if. Оператор else if выполняется в том случае, когда логическое выражение в предшествующем операторе if (x < 2) принимает значение «ложь». В операторе else if проверяется условие x < 10 (см. рис. 5.3, блок 2). Если это условие выполняется, то будет реализован оператор локального присваивания $y = x^3 + b$, (см. рис. 5.3, блок 4). В противном случае (иначе) выполнится оператор локального присваивания $y = \sqrt{x+b}$.	$y(x) := \begin{array}{l} b \leftarrow 10 \\ \text{if } x < 2 \\ \quad y \leftarrow \lvert x \rvert \\ \text{else if } x < 10 \\ \quad y \leftarrow x^3 + b \\ \text{else} \\ \quad y \leftarrow \sqrt{x+b} \end{array}$ $y(-5) = 5$ $y(4) = 74$ $y(15) = 5$

Оператор цикла for служит для организации циклов с заданным числом повторений.

Пример 5.3. Создать программный модуль, реализующий вычислительный процесс накопления суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \cos ai \qquad \text{при } a = 3{,}05.$$

Программному модулю присвоить имя S(n).

$S(n) := \Vert \; \vert$

Ввести оператор локального присваивания. Нажать Enter для добавления новой строки в программу.

$S(n) := \begin{array}{l} a \leftarrow 3.05 \\ \vert \end{array}$

Ввести исходное значение суммы s. Нажать Enter для добавления новой строки в программу.

$S(n) := \begin{array}{l} a \leftarrow 3.05 \\ s \leftarrow 0 \\ \vert \end{array}$

Ввести шаблон оператора цикла for.

$$S(n):=\left\|\begin{array}{l} a \leftarrow 3.05 \\ s \leftarrow 0 \\ \text{for } \blacksquare \in \blacksquare \\ \quad \| \blacksquare \end{array}\right.$$

В первый местозаполнитель после for ввести имя переменной − диапазона i, во второй местозаполнитель ввести диапазон изменения i.

В нижний местозаполнитель ввести оператор локального присваивания, реализующий вычисление текущего значения суммы s в теле цикла.

$$S(n):=\left\|\begin{array}{l} a \leftarrow 3.05 \\ s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left\| s \leftarrow s+\sqrt[\blacksquare]{i}\cdot cos(a\cdot i) \right. \end{array}\right.$$

Установить курсор за серой вертикальной линией, расположенной справа, указывающей область действия оператора for.

$$S(n):=\left\|\begin{array}{l} a \leftarrow 3.05 \\ s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left\| s \leftarrow s+\sqrt[\blacksquare]{i}\cdot cos(a\cdot i) \right. \end{array}\right.$$

Добавить ниже новую строку в программу.

Ввести в последнюю строку переменную s, через которую возвращается результат выполнения программного модуля.

$$S(n):=\left\|\begin{array}{l} a \leftarrow 3.05 \\ s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left\| s \leftarrow s+\sqrt[\blacksquare]{i}\cdot cos(a\cdot i) \right. \\ s \end{array}\right.$$

Для получения результата программы при конкретном значении параметра n ниже программы ввести её имя и затем, в скобках, − значение параметра n.

$$S(7)=-1.442$$

$$S(15)=-0.679$$

Оператор цикла while служит для организации итерационного цикла, который обеспечивает выполнение соответствующей последовательности действий (операций) до тех пор, пока выполняется заданное условие.

П р и м е р 5.4. Создать программный модуль, вычисляющий сумму членов бесконечного ряда

$$\frac{b}{2}+\frac{b^2}{8}+\frac{b^3}{48}+\frac{b^4}{384}+\cdots$$

с точностью до члена ряда, не превышающего $\varepsilon = 0{,}00001$, для $b = 5{,}77$.

Анализируя данный ряд, устанавливаем следующую закономерность: каждый текущий член ряда связан с предыдущим членом рекуррентной зависимостью:

$$a_i = a_{i-1}\,\frac{b}{2i}. \qquad (*)$$

Задать значение b и исходное значение суммы s ряда.

```
b ← 5.77
s ← 0
```

Задать исходное значение 1 порядковому номеру i члена ряда.

Задать исходное (стартовое) значение переменной a.

```
b ← 5.77
s ← 0
i ← 1
a ← 1
```

Ввести шаблон оператора while.

```
b ← 5.77
s ← 0
i ← 1
a ← 1
while ■
    ■
```

В местозаполнитель справа от while ввести условие «пока текущий член ряда a больше или равен 0,00001».

В нижний местозаполнитель ввести оператор локального присваивания, который формирует текущий член ряда a согласно рекуррентной формуле (*).

```
b ← 5.77
s ← 0
i ← 1
a ← 1
while a ≥ 0.00001
    a ← a · b/(2·i)
```

Установить курсор в конец оператора локального присваивания и нажать Enter для добавления новой строки в программу.

$$\begin{array}{l} b \leftarrow 5.77 \\ s \leftarrow 0 \\ i \leftarrow 1 \\ a \leftarrow 1 \\ \text{while } a \geq 0.00001 \\ \quad a \leftarrow a \cdot \dfrac{b}{2 \cdot i} \\ \quad \blacksquare \end{array}$$

В нижний местозаполнитель ввести оператор локального присваивания, реализующий вычисление текущего значения суммы s членов ряда.

$$\begin{array}{l} b \leftarrow 5.77 \\ s \leftarrow 0 \\ i \leftarrow 1 \\ a \leftarrow 1 \\ \text{while } a \geq 0.00001 \\ \quad a \leftarrow a \cdot \dfrac{b}{2 \cdot i} \\ \quad s \leftarrow s + a \end{array}$$

В следующей строке задать приращение порядковому номеру i члена ряда.

Установить курсор за серой вертикальной линией, расположенной справа, указывающей область действия оператора while.

$$\begin{array}{l} b \leftarrow 5.77 \\ s \leftarrow 0 \\ i \leftarrow 1 \\ a \leftarrow 1 \\ \text{while } a \geq 0.00001 \\ \quad a \leftarrow a \cdot \dfrac{b}{2 \cdot i} \\ \quad s \leftarrow s + a \\ \quad i \leftarrow i + 1 \end{array}$$

В следующую строку ввести переменную s, через которую будет возвращен результат программного модуля.

Установить курсор за крайней справа серой вертикальной линией и ввести оператор вычисления «=».

$$\left| \begin{array}{l} b \leftarrow 5.77 \\ s \leftarrow 0 \\ i \leftarrow 1 \\ a \leftarrow 1 \\ \text{while } a \geq 0.00001 \\ \quad a \leftarrow a \cdot \dfrac{b}{2 \cdot i} \\ \quad s \leftarrow s + a \\ \quad i \leftarrow i + 1 \\ s \end{array} \right| = 16.904$$

О п е р а т о р b r e a k используется для прерывания работы программы.

О п е р а т о р c o n t i n u e прекращает выполнение текущей итерации цикла и начинает выполнение следующей итерации с первого оператора тела цикла.

П р и м е р 5.5. Создать программный модуль, реализующий вычисление суммы, произведения и количества тех элементов массива (вектора) D, значения которых являются четными числами.

$$\mathbf{ORIGIN} := 1$$

$$D := \begin{bmatrix} 15 & 6 & 4 & 17 & 10 & 14 & 1 & 8 & 16 & 7 & 2 & 12 & 25 & 8 \end{bmatrix}^{T}$$

```
V(D,n) := | S ← 0
          | P ← 1
          | k ← 0
          | for i ∈ 1..n
          |   | if mod(D_i, 2) = 0
          |   |   | [ S ← S + D_i ]
          |   |   | [ P ← P·D_i   ]
          |   |   | [ k ← k + 1   ]
          | [ S ]
          | [ P ]
          | [ k ]
```

$$V(D,14) = \begin{bmatrix} 80 \\ 8.258 \cdot 10^{7} \\ 9 \end{bmatrix}$$

5.2. Задания

1) Выполнить примеры-образцы 5.1 – 5.5 из подразд. 5.1.

2) Составить два варианта программы вычисления значений функции y (табл. 5.1).

3) Вычислить значение выражения (табл. 5.2) тремя способами:

а) с помощью операторов $\sum$ или $\prod$;

б) программно с помощью оператора цикла for;

в) программно с помощью оператора цикла while.

Таблица 5.1

Таблица исходных данных к заданию 2

Вариант	Функция	Исходные данные	Контрольные значения аргумента x	Результат
1	2	3	4	5
1	$y=\begin{cases} 0{,}16\left\|x^3\right\|, & x<-2; \\ \sin(\cos(ax)), & -2\le x\le 8{,}5; \\ \operatorname{tg}^2\left(a\sqrt[3]{x}\right), & x>8{,}5 \end{cases}$	$a = 2{,}38$	$x_1=-7{,}23$; $x_2=2{,}02$; $x_3=11$	$y(x_1)=60{,}469$; $y(x_2)=0{,}095$; $y(x_3)=2{,}323$
2	$y=\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\sin^2(x)\right), & x<3{,}5; \\ \lg\left(e^x\right), & 3{,}5\le x\le 11; \\ \cos^3\left(\sqrt{x+b}\right), & x>11 \end{cases}$	$b = 0{,}91$	$x_1=-1{,}5$; $x_2=6{,}2$; $x_3=19$	$y(x_1)=1{,}54$; $y(x_2)=2{,}693$; $y(x_3)=-0{,}015$
3	$y=\begin{cases} \sqrt[3]{\left\|xc\right\|}, & x<-1; \\ \sin\left(\ln\left(x^2\right)\right), & -1\le x\le 8{,}9; \\ \operatorname{tg}^2\left(a\sqrt[3]{x}\right), & x>8{,}9 \end{cases}$	$c = 0{,}04$ $a = 0{,}13$	$x_1=-9$; $x_2=3{,}4$; $x_3=31$	$y(x_1)=0{,}711$; $y(x_2)=0{,}64$; $y(x_3)=0{,}187$
4	$y=\begin{cases} a\cos^2(x), & x<0; \\ \sqrt{\left\|\lg(a-x)\right\|}, & 0<x\le 15; \\ \sqrt[3]{x-b}, & x>15 \end{cases}$	$a = 7{,}13$ $b = -4{,}71$	$x_1=-4{,}4$; $x_2=6{,}8$; $x_3=21$	$y(x_1)=0{,}673$; $y(x_2)=0{,}694$; $y(x_3)=2{,}951$
5	$y=\begin{cases} \sqrt[5]{\operatorname{tg}(x-b)}, & x\le -7; \\ e^{\operatorname{arctg}(x)}, & -7<x\le 12; \\ \sin(b\cos(x)), & x>12 \end{cases}$	$b = 7{,}5$	$x_1=-11$; $x_2=-1{,}3$; $x_3=18{,}3$	$y(x_1)=0{,}817$; $y(x_2)=0{,}4$; $y(x_3)=0{,}112$
6	$y=\begin{cases} e^{\sin(kx)}, & x\le 3; \\ \cos^{-5}(x+k), & 3<x\le 12{,}5; \\ \lg\sqrt{\operatorname{tg}(x)}, & x>12{,}5 \end{cases}$	$k = -4{,}7$	$x_1=-2{,}9$; $x_2=4{,}31$; $x_3=29{,}6$	$y(x_1)=2{,}397$; $y(x_2)=1{,}477$; $y(x_3)=0{,}301$
7	$y=\begin{cases} \lg\sqrt[3]{\left\|x\right\|}, & x\le -7; \\ \sin(\operatorname{tg}(mx)), & -7<x<12; \\ m\,e^{\cos(x)}, & x\ge 12 \end{cases}$	$m = 3{,}02$	$x_1=-13$; $x_2=1{,}23$; $x_3=14{,}9$	$y(x_1)=0{,}371$; $y(x_2)=0{,}601$; $y(x_3)=1{,}513$

Окончание табл. 5.1

1	2	3	4	5
8	$y=\begin{cases} d\sin\left(\sqrt[3]{x}\right), & x\le -15; \\ e^{d\sqrt{x}}, & -15<x<5; \\ \cos\left(\ln(x)\right), & x\ge 5 \end{cases}$	d = 2,5	$x_1 = -25,1$; $x_2 = 2,6$; $x_3 = 13,3$	$y(x_1) = -0,53$; $y(x_2) = 56,324$; $y(x_3) = -0,851$
9	$y=\begin{cases} \sqrt[3]{a\,tg(x)}, & x\le 1,5; \\ e^{\cos\left(\sqrt{x}\right)}, & 1,5<x<8; \\ a\sin\left(x^3\right), & x\ge 8 \end{cases}$	a = −8,4	$x_1 = 0,11$; $x_2 = 4,99$; $x_3 = 17$	$y(x_1) = -0,975$; $y(x_2) = 0,54$; $y(x_3) = 3,661$
10	$y=\begin{cases} tg\left(\cos(r\,x)\right), & x<-22; \\ r-e^{0,01\lvert x\rvert}, & -22\le x<2; \\ \sqrt{\lvert r\rvert}\sin^2(x), & x\ge 2 \end{cases}$	r = −102	$x_1 = -28,99$; $x_2 = -3$; $x_3 = 9,92$	$y(x_1) = -0,909$; $y(x_2) = -103,03$; $y(x_3) = 2,281$
11	$y=\begin{cases} n\cos(\pi x), & x<-16; \\ tg\left(e^{-\sqrt{\lvert x\rvert}}\right), & -16\le x\le 31; \\ \sin^2(\pi x+n), & x>31 \end{cases}$	n = 7,25	$x_1 = -21$; $x_2 = 17,3$; $x_3 = 38$	$y(x_1) = -7,25$; $y(x_2) = 0,016$; $y(x_3) = 0,677$
12	$y=\begin{cases} e^{\arcsin(x)}, & x<3; \\ \ln\left(\cos(\pi x)\right), & 3\le x\le 10; \\ m\,tg\left(\sqrt{x}\right), & x>10 \end{cases}$	m = 1,5	$x_1 = 0,28$; $x_2 = 8,17$; $x_3 = 19,5$	$y(x_1) = 1,328$; $y(x_2) = -0,15$; $y(x_3) = 4,91$
13	$y=\begin{cases} \ln\left(\cos(x)\right), & x<-2; \\ e^{-\cos(x)}, & -2\le x\le 7,4; \\ \sqrt{tg(x)+k}, & x>7,4 \end{cases}$	k = 9,1	$x_1 = -5,5$; $x_2 = 1,9$; $x_3 = 14$	$y(x_1) = -0,344$; $y(x_2) = 1,382$; $y(x_3) = 4,043$
14	$y=\begin{cases} \sqrt[3]{\lvert x\cos(x)\rvert}, & x<-4; \\ e^{\sqrt[5]{a}\sin(x)}, & -4\le x\le 3; \\ tg\left(e^{-0,1x}\right), & x>3 \end{cases}$	a = −15	$x_1 = -11$; $x_2 = -2,7$; $x_3 = 10$	$y(x_1) = 0,365$; $y(x_2) = 2,085$; $y(x_3) = 0,385$
15	$y=\begin{cases} \lg\left\lvert\sqrt[3]{x}\right\rvert, & x<-9; \\ tg\left(b\,x^4\right), & -9\le x\le 4,2; \\ b\,e^{\sqrt{b\,x}}, & x>4,2 \end{cases}$	b = 3,9	$x_1 = -16,2$; $x_2 = 0,77$; $x_3 = 13,3$	$y(x_1) = 0,403$; $y(x_2) = 4,938$; $y(x_3) = 5235$

Таблица 5.2

Таблица исходных данных к заданию 3

Вариант	Выражение	Исходные данные	Вариант	Выражение	Исходные данные
1	$F = x^3 \sum_{i=1}^{12} i\, e^{\cos(ix)}$	x = 1,3	2	$D = \operatorname{tg} x + \prod_{n=1}^{6} \sqrt{n}\, \sin^n x$	x = −1,3
3	$Y = e^x + \prod_{k=3}^{8} \frac{\operatorname{tg}(k \sin x)}{k+x}$	x = 2,9	4	$H = \sum_{m=3}^{23} m \cos^3\left(x^2 - m\right)$	x = −7
5	$F = x - \sum_{n=5}^{14} \ln\left(\sin^2(n+x)\right)$	x = 10	6	$Y = \prod_{i=2}^{10} \operatorname{tg}\left(i^2 e^{\sqrt[3]{x}}\right)$	x = −8,6
7	$D = \ln x + \prod_{k=1}^{6} k^5 \lg(\cos x)$	$x = \pi/16$	8	$F = \frac{1}{\sin x} \sum_{a=4}^{18} e^{\sin ax} - \sqrt{a}$	x = 17
9	$D = \lvert x \rvert - \prod_{m=2}^{7} \sqrt[3]{m + \cos^2 x}$	x = −26	10	$V = \prod_{i=1}^{5} e^{\sin(i+x)} - \operatorname{tg} i$	$x = \pi/8$
11	$H = \sqrt[3]{x} - \sum_{v=6}^{13} \ln^2\left(e^{-0,1v}\right)$	x = 5,7	12	$Y = x \prod_{n=1}^{6} \frac{\lg(n \cos x)}{\sin x}$	x = −18
13	$Y = \sum_{i=2}^{13}\left(\operatorname{tg}^3\left(\sin^2(ix)\right) - i\right)$	$x = \pi/4$	14	$F = \sqrt[3]{x} + \prod_{k=2}^{7} \sqrt{\operatorname{tg}\left(k + x e^{-k}\right)}$	x = 1,98
15	$B = \prod_{c=1}^{5}\left(x e^{-c \sin x} - \sqrt{c}\right)$	x = 3,3	16	$G = \sum_{v=7}^{15}\left(e^{\ln x} + v \cos\sqrt{v}\right)$	x = 7

Лабораторная работа 6

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФОРМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОСОБЕННОСТИ ИХ РЕШЕНИЯ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

6.1. Постановка задачи

Исследование систем различной физической природы в установившемся режиме часто приводит к статическим моделям в форме нелинейных алгебраических уравнений. При решении многих задач физики, химии, электротехники, баллистики для адекватного математического описания изучаемых процессов используют модели в форме нелинейных трансцендентных уравнений. Исход моделирования в значительной степени определяется выбором метода решения модели и умением правильно интерпретировать полученные результаты.

Данная лабораторная работа посвящена численным методам решения моделей в форме нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений. Основное внимание в этой работе уделяется постановке задачи – определить приближённое значение корня уравнения с заданной точностью, используя итерационные методы (методы последовательных приближений к решению задачи). Рассматриваются этапы реализации численного решения уравнения с последующей интерпретацией результатов моделирования.

6.2. Информация к выполнению задания 1

На этапе отделения корня рекомендуется выбирать такой участок [a; b], на котором функция f(x) монотонна.

Встроенная функция root( ) предназначена для решения уравнений вида:

$$f(x) = 0.$$

В основе функции root( ) лежит итерационный метод вычисления приближённого значения корня x* уравнения с заданной точностью.

Рассмотрим два варианта применения функции root( ).

Вариант 1. root(f(x), x, a, b),

где x – значение аргумента функции f(x), при котором она принимает значение «0»; a и b – соответственно левая и правая границы уточненного интервала, найденного на этапе отделения корней.

Вариант 2. root(f(x), x),

где x – начальное приближение корня, определённое на этапе отделения корней.

Корень уравнения будет определен с точностью, заданной системной (встроенной) переменной TOL (по умолчанию TOL = 0,001).

Для вставки оператора дифференцирования $\frac{d}{dt}$ использовать вкладку Математика => группа Операторы и символы => список Операторы.

Пример выполнения задания 1

Дана математическая модель в форме нелинейного трансцендентного уравнения:

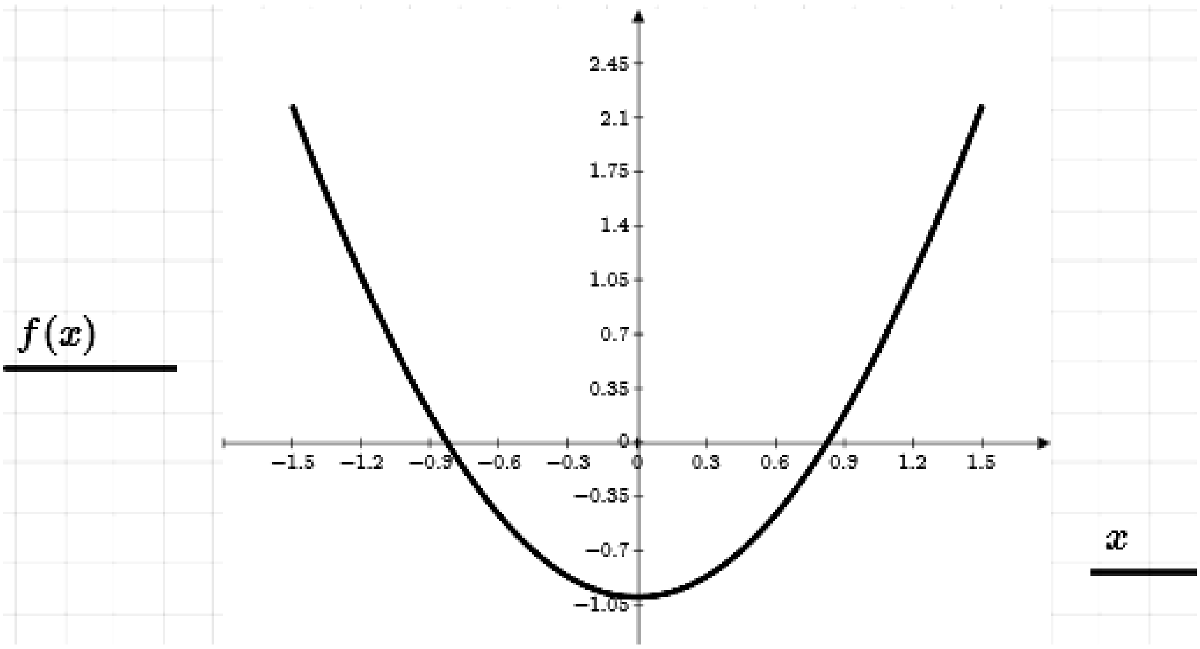
$$x^2 - \cos x = 0.$$

Задание 1.1. Произвести отделение корня способом 1 (по графику функции y = f(x)).

1. Построение графика функции f(x).

$$x := -1.5, -1.5 + 0.01 .. 1.5$$

$$f(x) := x^2 - \cos(x)$$

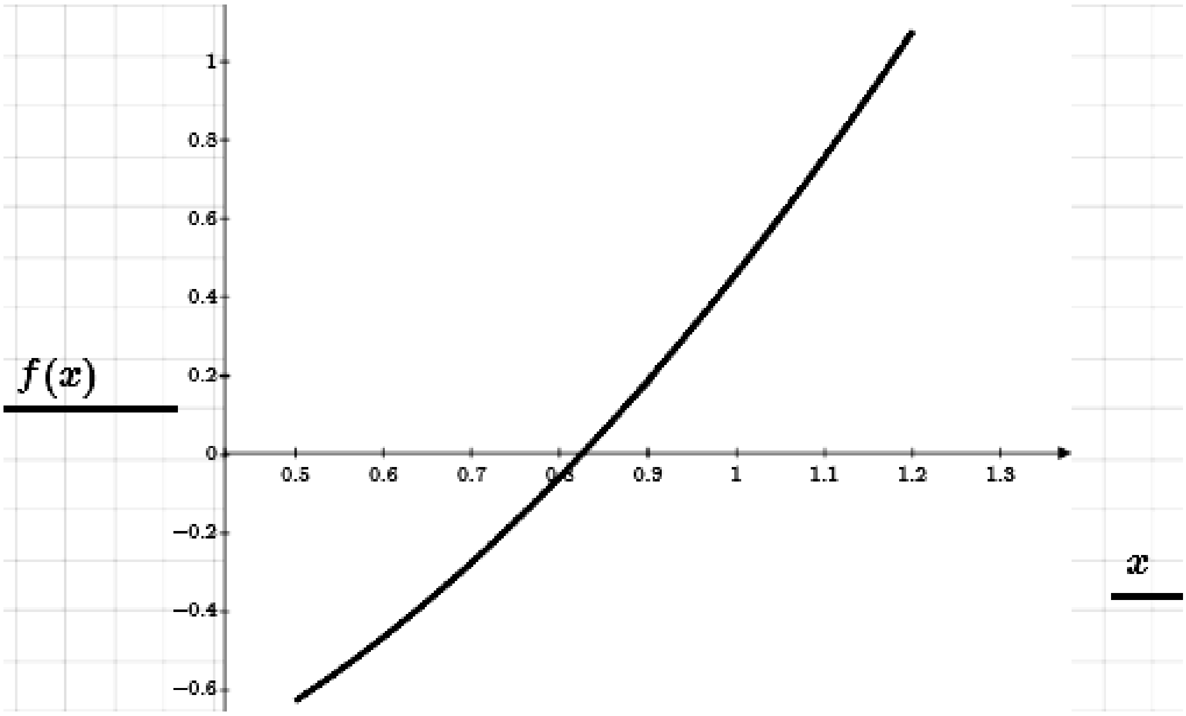


На интервале $[-1{,}5;\ 1{,}5]$ уравнение имеет два корня. Отделим корень, лежащий в области $x > 0$ (положительный корень).

2. Устанавливаем визуально по графику границы $a_{ут}$ и $b_{ут}$ отрезка, в пределах которого заключен только один корень x^* (положительный): принимаем $a_{ут} = 0{,}5$; $b_{ут} = 1{,}2$. Следовательно, искомый отрезок – [0,5; 1,2]. Называем этот отрезок у т о ч н ё н н ы м.

3. Построение графика функции f(x) на уточнённом интервале [0,5; 1,2]:

$$x := 0.5, 0.5 + 0.01 .. 1.2$$



4. Приближенное значение корня x^* определяем по графику: $x^* \approx 0{,}8$.

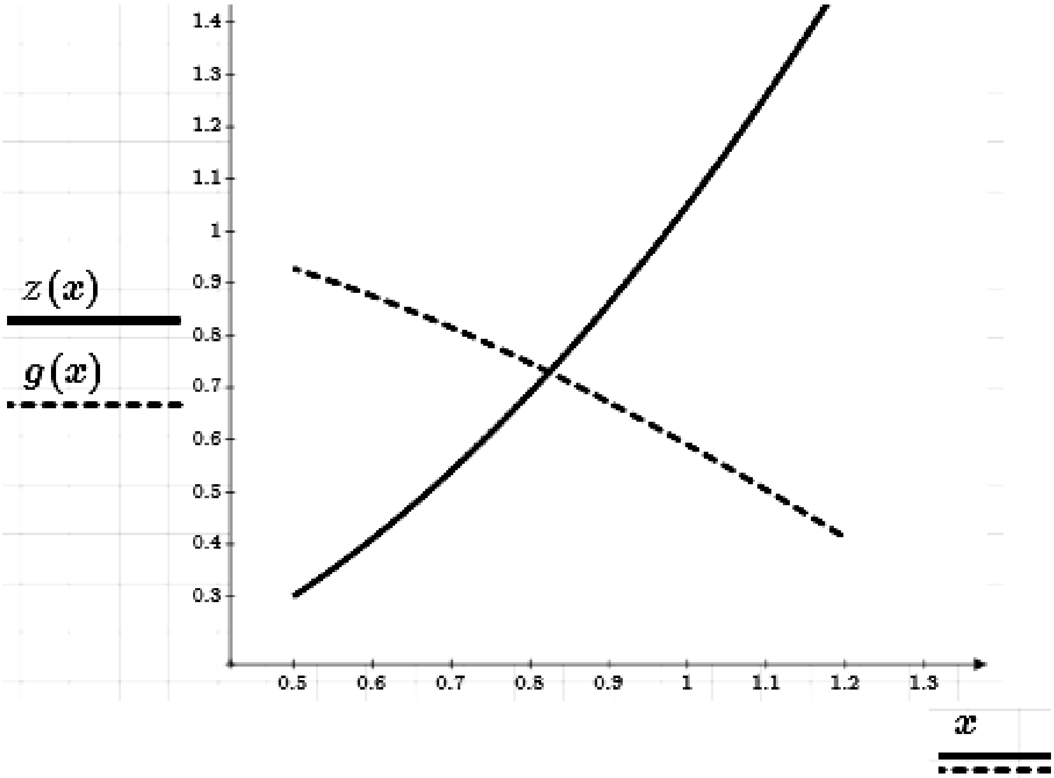
З а д а н и е 1.2. Произвести отделение корня способом 2 (заменой исходного уравнения).

1. Замена исходного уравнения $x^2 - \cos x = 0$ равносильным:

$$x^2 = \cos x.$$

2. Построение графиков двух полученных функций на уточненном интервале [0,5; 1,2]:

$$z(x) := x^2 \qquad g(x) := \cos(x)$$



3. Приближённое значение корня x* определяем как абсциссу точки пересечения кривых z(x) и g(x): x* ≈ 0,8.

Задание 1.3. Уточнить приближённое значение корня заданного уравнения с помощью встроенной функции Mathcad root(…).

$$\mathbf{root}(f(x), x, 0.5, 1.2) = 0.824$$

$$x := 0.8$$

$$\mathbf{root}(f(x), x) = 0.824$$

Задание 1.4. Уточнить приближённое значение корня заданного уравнения численным методом − методом итерации.

1. Преобразование исходного уравнения вида f(x) = 0, где

$$f(x) := x^2 - \cos(x)$$

к эквивалентному уравнению $x = \varphi(x)$ способом 1.

Для этого к обеим частям исходного уравнения $x^2 - \cos(x) = \mathbf{0}$ прибавим x, получим:

$$\varphi(x) := x^2 - \cos(x) + x$$

2. Проверка условия сходимости метода итерации $|\varphi'(x)| \le q < 1$ на отрезке [0,5; 1,2] (см. [1, п. 3.3.1.3.3, с. 54]):

$$x := 0.5 \qquad \left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right| = 2.479$$

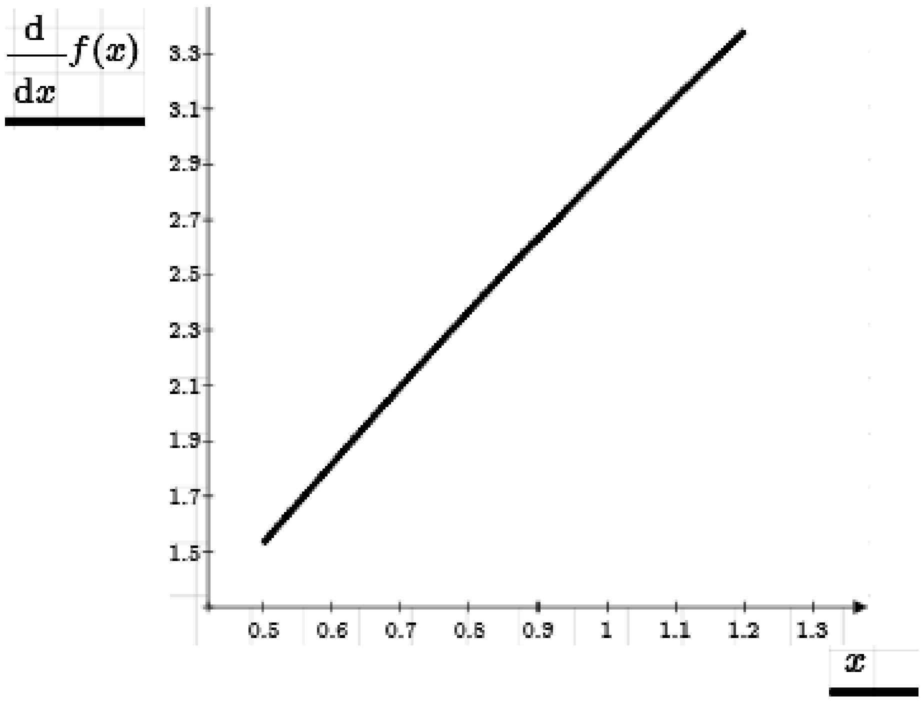
$$x := 1.2 \qquad \left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right| = 4.332$$

У с л о в и е с х о д и м о с т и н е в ы п о л н я е т с я.

3. Определение эквивалентного уравнения $x = \varphi(x)$ способом 4 (см. [1, п. 3.3.1.3.3, с. 59]).

Строим график первой производной исходной функции f(x).

$$x := 0.5, 0.5 + 0.01 .. 1.2$$



Из полученного графика делаем вывод, что максимальное по модулю значение производная f′(x) имеет при x, равном 1,2.

$$x := 1.2 \qquad M := \left|\frac{d}{dx}f(x)\right| \qquad M = 3.332$$

$$\lambda := -\frac{1}{M} \qquad \lambda = -0.3$$

$$\varphi(x) := x + \lambda \cdot \left(x^2 - \cos(x)\right) \qquad (*)$$

4. Проверка условия сходимости $\left|\varphi'(x)\right| \le q < 1$ на отрезке [0,5; 1,2]:

$$x := 0.5 \qquad \left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right| = 0.556$$

$$x := 1.2 \qquad \left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right| = 2.553 \cdot 10^{-16}$$

Условие сходимости выполняется.

Примечание. Если производная $f'(x)$ на отрезке [a; b] отрицательная, то вместо уравнения $f(x) = 0$ следует рассматривать уравнение

$$-f(x) = 0.$$

Это следует учесть в выражении (∗).

Программа, реализующая метод итерации с помощью встроенных средств программирования Mathcad, имеет вид:

```
метод_итерации(φ, a, b) := | x ← a
                           | n ← 0
                           | while |φ(x) − x| > 0.0001
                           |    | x ← φ(x)
                           |    | n ← n + 1
                           | [ x ; n ; f(x) ]
```

$$\text{метод\_итерации}(\varphi, 0.5, 1.2) = \begin{bmatrix} 0.824 \\ 7 \\ -2.269 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

6.3. Задания

1) Реализовать численное решение заданного уравнения (табл. 6.1):

а) произвести отделение корня способом 1 (по графику функции y = f(x));

б) произвести отделение корня способом 2 (заменой уравнения);

в) уточнить приближённое значение корня заданного уравнения с помощью встроенной функции Mathcad root (…);

г) уточнить приближённое значение корня заданного уравнения методом итераций. Метод реализовать программно;

д) уточнить приближённое значение корня заданного уравнения методом половинного деления. Метод реализовать программно;

е) уточнить приближённое значение корня заданного уравнения методом Ньютона. Метод реализовать программно.

2) Произвести сравнительный анализ результатов, полученных с помощью разных методов уточнения корней.

Таблица 6.1

Математические модели
в форме нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений

Вариант	Уравнение	Интервал поиска корня
1	2	3
1	$x+e^{0,7x}=0$	$[-4;4]$
2	$e^{x}-0,87x-5,15=0$	$[-10;4]$
3	$\ln(x)+0,5x-3,25=0$	$[0,2;10]$
4	$0,07x^2-2\ln x=0$	$[0,1;13]$
5	$0,9\ln x-\frac{0,5}{x}-1,6=0$	$[0,2;17]$
6	$\frac{1}{1+x^2}-0,1x-0,6=0$	$[-10;7]$
7	$\frac{x}{2+x}-0,1x^2+1=0$	$[0,5;8]$

Окончание табл. 6.1

1	2	3
8	$e^{-x}-3\sin x=0$	$[2;10]$
9	$\frac{5}{x}+e^{-x}-0{,}7=0$	$[3{,}5;11]$
10	$\cos x+e^{-0{,}2x}=0$	$[-2;12]$
11	$\frac{53\sin x}{x+1}-\sqrt{x}+5{,}4=0$	$[0{,}5;14]$
12	$60{,}3\ln x-e^{2x}+41=0$	$[0{,}1;2{,}5]$
13	$\frac{23\cos 3x}{x}-x^2=0$	$[0{,}2;4]$
14	$\lg\left(\frac{1}{x}\right)^2-\mathrm{arctg}\,x=0$	$[0{,}3;30]$
15	$\frac{1}{x^3+3{,}3}-4\sin x=0$	$[0;8]$

Библиографический список

1. Голубева Н. В. Математическое моделирование систем и процессов: Учебное пособие / Н. В. Голубева. СПб: Лань, 2013. 192 с.

2. Амосов А. А. Вычислительные методы: Учебное пособие / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. СПб: Лань, 2014. 672 с.

3. Вержбицкий В. М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения: Учебное пособие / В. М. Вержбицкий. М: Директ-Медиа, 2013. 432 с.

4. Голубева Н. В. Основы математического моделирования систем и процессов: Учебное пособие / Н. В. Голубева / Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2006. 96 с.

Учебное издание

ГОЛУБЕВА Нина Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Часть 2

Учебно-методическое пособие

Редактор Н. А. Майорова

* * *

Подписано в печать 31.10.2017. Формат $60 \times 84\ ^1\!/_{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,2. Уч.-изд. л. 2,4.
Тираж 350 экз. Заказ .

* *

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35