Е. А. СИДОРОВА, А. В. ДОЛГОВА

ОСНОВЫ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ И ЛОГИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВ

ОМСК 2019

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

Е. А. Сидорова, А. В. Долгова

ОСНОВЫ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ И ЛОГИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВ

Утверждено методическим советом университета
в качестве учебно-методического пособия
к выполнению самостоятельной работы

Омск 2019

УДК 510.633(075.8)
ББК 22.12я73
С34

Основы булевой алгебры и логические элементы цифровых устройств: Учебно-методическое пособие к выполнению самостоятельной работы / Е. А. Сидорова, А. В. Долгова; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2019. 36 с.

Учебно-методическое пособие разработано в соответствии с рабочими программами дисциплин информационного профиля с учетом требований ФГОС ВО последнего поколения.

Содержит основные понятия булевой алгебры, описание логических операций, порядок построения таблицы истинности логического выражения. Приведены рекомендации по упрощению логических выражений с применением законов алгебры логики. Рассмотрен процесс построения и анализа логических схем. Представлены примеры решения задач, контрольные вопросы и практические задания.

Предназначено для самостоятельной работы студентов всех направлений подготовки (специальностей) очной и заочной форм обучения по дисциплинам, изучающим алгебру логики.

Библиогр.: 4 назв. Табл. 6. Рис. 28.

Рецензенты: доктор техн. наук, профессор В. Н. Горюнов;
канд. физ.-мат. наук, доцент О. В. Гателюк.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время практически во всех областях науки и техники применяются цифровые устройства, в том числе персональные компьютеры. Работа основных логических элементов, входящих в структуру современных компьютерных систем и цифровых устройств, строится на базовых принципах одного из разделов математической логики – булевой алгебры.

Булева алгебра представляет собой обширную научную область, которая находит применение в исследовании оснований математики, синтезе и анализе автоматических устройств, создании и развитии искусственного интеллекта.

В пособии рассмотрены основные понятия булевой алгебры, описаны основные логические операции, подробно изложен порядок построения таблицы истинности логического выражения. Приведены рекомендации по упрощению логических выражений с применением законов алгебры логики. Особое внимание уделено построению логических схем и определению логической функции на выходе логической схемы. Представлены примеры решения задач, контрольные и тестовые вопросы, практические задания по индивидуальным вариантам.

Библиографический список, приведенный в конце пособия, содержит литературу для углубленного изучения материала по рассматриваемой тематике.

1. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Логика – это наука о формах и способах мышления.

Основоположником математической логики является английский математик Джордж Буль (1815 – 1864). Он впервые применил к высказываниям законы и правила алгебраических действий, ввел логические операции, предложил способ записи высказываний в символической форме. Дж. Буль изобрел алгебру логики (исчисление высказываний) – систему обозначений и правил логических вычислений, применимую к всевозможным объектам, – от чисел и букв до предложений. Вследствие значительного вклада Дж. Буля в исчисление высказываний алгебра логики также называется алгеброй Буля, или булевой алгеброй.

Современная **алгебра логики** – раздел математической логики, в котором изучаются строение сложных логических высказываний и способы установления их истинности с помощью алгебраических методов.

Основным объектом математической логики является высказывание.

Высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого однозначно можно сказать истинно оно или ложно. В булевой алгебре истинность обозначается цифрой 1, а ложь – 0.

В алгебре логики не рассматриваются внутренняя структура и смысл высказываний, достаточно только определения их истинности либо ложности.

Высказывания обозначают прописными латинскими буквами, а текст высказывания заключают в фигурные скобки. Примеры высказываний:

A = {Рубль – российская валюта} – истинное высказывание;

B = {Два умножить на два равно четырем} – истинное высказывание;

C = {Рельсы изготавливают из стали} – истинное высказывание;

D = {На яблонях растут бананы} – ложное высказывание.

Повелительные, вопросительные и неоднозначные предложения не являются высказываниями, например:

«Стой!» – не высказывание, так как это повелительное предложение;

«$x^2 + 5x - 6 = 0$» – не высказывание, так как не указано значение x, при котором оно рассматривается;

«В суп добавили немного соли» – не высказывание, так как оно неоднозначно (неконкретно).

Высказывания бывают простые (*A*, *B*, *C*) и составные (*A* **И** *B*, *A* **ИЛИ** *B*).

Простое высказывание – высказывание, которое нельзя разделить на отдельные части, каждая из которых также является высказыванием, например: *A* = {Светит солнце}.

Составное (сложное) высказывание – высказывание, которое можно разложить на простые высказывания, например: B = {Компьютер работает **И** принтер печатает}. Простые высказывания соединяются в составные с помощью логических операций – логических связок, например, И, ИЛИ, НЕ.

2. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ, ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

2.1. Основные термины и понятия

Логическая операция – способ построения сложного высказывания из простых высказываний, при котором значение истинности сложного высказывания определяется значениями истинности исходных высказываний.

Наиболее часто применяются следующие логические операции: *инверсия, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность*. Описание этих операций приведено ниже.

Логические операции реализуются в виде логических функций (функций алгебры логики, булевых функций).

Логической функцией называется функция $F(X_1, X_2, ..., X_n)$, аргументы которой $X_1, X_2, ..., X_n$ и сама функция F представляют собой логические переменные.

Логическая переменная – высказывание, которому соответствует значение *Истина* (1) или *Ложь* (0).

Логическая функция может задаваться в виде логического выражения, таблицы истинности или логической схемы.

Логическим выражением (**логической формулой**) называется выражение, составленное из логических переменных, знаков логических операций и скобок. Отдельная составляющая логического выражения, над которой выполняются логические операции, называется **операндом**.

Для установления истинности логического выражения необходимо построить для него таблицу истинности. **Таблица истинности** логического выражения – это таблица, в которой отражены значения логического выражения при всех наборах значений входящих в него логических переменных.

Логическое выражение называется **тождественно истинным**, если оно принимает значение 1 при всех наборах значений входящих в него переменных, и, наоборот, логическое выражение называется **тождественно ложным**, если оно принимает значение 0 при всех наборах значений входящих в него переменных.

Рассмотрим основные логические операции и соответствующие им таблицы истинности.

2.2. Инверсия

Инверсией (логическим отрицанием, функцией НЕ) высказывания A называется высказывание, которое истинно в том случае, когда ложно высказывание A и, наоборот, ложно, когда высказывание A истинно. Таблица истинности инверсии в соответствии с этим определением приведена на рис. 1.

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Рис. 1. Таблица истинности инверсии переменной

Существуют различные обозначения операции инверсии: $\overline{A}$, $\neg A$, НЕ(A), которые читаются как «не A», «неверно, что A».

Например, A = {Число 10 четное}, $\overline{A}$ = {Число 10 **НЕ**четное}. В данном случае высказывание A истинное, $\overline{A}$ ложное.

2.3. Конъюнкция

Конъюнкцией (логическим умножением, функцией И) двух высказываний – A и B – называется высказывание, которое истинно, когда оба высказывания истинны, и ложно в остальных случаях. Таблица истинности конъюнкции приведена на рис. 2.

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Рис. 2. Таблица истинности конъюнкции двух переменных

Конъюнкция образуется соединением двух высказываний в одно с помощью союза «И».

Обозначения: $A \cdot B$, $A \wedge B$, $A \,\&\, B$, A И B (читаются как «A и B»).

Например, A = {Число 2 положительное}, B = {Число 5 четное}, $A \cdot B$ = {Число 2 положительное **И** Число 5 четное}. В данном случае высказывание A истинное, высказывание B ложное. В соответствии с таблицей истинности конъюнкции (см. рис. 2) при $A = 1$ и $B = 0$ результирующее высказывание $A \cdot B$ ложное.

2.4. Дизъюнкция

A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Рис. 3. Таблица истинности дизъюнкции двух переменных

Дизъюнкцией (логическим сложением, функцией ИЛИ) двух высказываний – A и B – называется высказывание, которое ложно, когда оба высказывания ложны, и истинно в остальных случаях. Таблица истинности дизъюнкции приведена на рис. 3.

Дизъюнкция образуется соединением двух высказываний в одно с помощью союза «ИЛИ».

Обозначения: $A + B$, $A \vee B$[1], A ИЛИ B (читаются как «A или B»).

Например, A = {Число 2 четное}, B = {Число 5 четное}, $A + B$ = {Число 2 четное **ИЛИ** Число 5 четное}. В данном случае высказывание A истинное, высказывание B ложное. В соответствии с таблицей истинности дизъюнкции (см. рис. 3) при $A = 1$ и $B = 0$ результирующее высказывание $A + B$ истинное.

2.5. Импликация

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Рис. 4. Таблица истинности импликации двух переменных

Импликацией (логическим следованием) двух высказываний – A (посылка) и B (заключение) – называется высказывание, которое ложно, когда посылка A истинна, а заключение B ложно, и истинно в остальных случаях. Таблица истинности импликации приведена на рис. 4.

Обозначения: $A \to B$, $A \Rightarrow B$ (читаются как «из A следует B», «если A, то B», «A влечет B»).

Например, A = {Письмо отправлено адресату}, B = {Письмо доставлено адресату}, $A \to B$ = {**ЕСЛИ** Письмо отправлено адресату, **ТО** Письмо доставлено адресату}. В соответствии с таблицей истинности импликации (см. рис. 4), например, при $A = 1$ и $B = 0$ результирующее высказывание $A \to B$ ложное.

---

[1] В тех случаях, когда одновременно рассматриваются и арифметические, и логические операции, арифметическое сложение обозначается знаком «+», логическое – знаком «∨».

2.6. Эквивалентность

Эквивалентностью (эквиваленцией, равнозначностью) двух высказываний – A и B – называется высказывание, которое истинно, когда оба высказывания одновременно истинны или ложны, и ложно в остальных случаях. Таблица истинности эквивалентности приведена на рис. 5.

Обозначения: $A \leftrightarrow B$, $A \equiv B$, $A \sim B$ (читаются как «A эквивалентно B», «A тогда и только тогда, когда B»).

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Рис. 5. Таблица истинности эквивалентности двух переменных

Например, A = {Компьютер может производить вычисления}, B = {Компьютер включен}, $A \leftrightarrow B$ = {Компьютер может производить вычисления **ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА** Компьютер включен}. В соответствии с таблицей истинности эквивалентности (см. рис. 5), например, при $A = 1$ и $B = 0$ результирующее высказывание $A \leftrightarrow B$ ложное.

2.7. Приоритет выполнения логических операций

В логическом выражении логические операции выполняются в соответствии с их приоритетом в следующем порядке:

1) инверсия;
2) конъюнкция;
3) дизъюнкция;
4) импликация;
5) эквивалентность.

Операции одного приоритета выполняются по порядку слева направо, для изменения порядка действий применяют скобки. В качестве примера на рис. 6 приведены два логических выражения, имеющих одинаковый набор логических операций, последовательность выполнения которых различается из-за наличия скобок. Порядковые номера логических операций, отражающие последовательность их выполнения в рассматриваемом выражении, на рис. 6 и последующих рисунках обозначены цифрами в кружках.

$$\overbrace{\underbrace{A+B}_{3}}^{4} \xrightarrow{5} \underbrace{C\cdot D}_{2} \xrightarrow{6} \overset{1}{\overline{A}}$$

а

$$\overbrace{\underbrace{A+B}_{4}}^{5} \xrightarrow{6} C \overset{3}{\cdot} \left(D \xrightarrow{2} \overset{1}{\overline{A}} \right)$$

б

Рис. 6. Примеры логических выражений с указанием последовательности выполнения логических операций

Для решения логических задач целесообразно систематизировать все рассмотренные выше логические операции в порядке их приоритета в одной обобщенной таблице истинности, которая представлена на рис. 7.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cdot B$	$A + B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1

Рис. 7. Обобщенная таблица истинности логических операций для двух переменных

2.8. Построение таблицы истинности логического выражения

Для построения таблицы истинности логического выражения необходимо выполнить следующие действия.

1) Подсчитать количество переменных в логическом выражении (n).

2) Подсчитать количество логических операций (k) и установить последовательность их выполнения.

3) Определить количество строк в таблице истинности, содержащих все наборы значений входящих в логическое выражение переменных:

$$m = 2^n, \tag{1}$$

где n – количество переменных в логическом выражении.

Помимо строк с наборами значений в таблице истинности следует предусмотреть строку для записи заголовков столбцов.

4) Определить количество столбцов в таблице истинности:

$$s = n + k, \tag{2}$$

где k – количество операций в логическом выражении.

5) Создать заготовку таблицы с количеством строк $m + 1$ и количеством столбцов s. В верхней строке таблицы ввести заголовки столбцов: сначала имена переменных, затем логические операции в соответствии с установленной в п. 2 последовательностью их выполнения.

6) Заполнить столбцы логических переменных наборами их возможных значений, т. е. в столбцах построчно перечислить различные комбинации нулей и единиц, отражающие возможные сочетания истинности и ложности этих переменных.

Наборы значений логических переменных фактически представляют собой последовательность чисел в двоичной системе счисления, количество разрядов которых равно количеству переменных. Наборы значений формируются таким образом, чтобы обеспечить отсутствие среди них повторяющихся или пропущенных комбинаций нулей и единиц. Для этого, начиная с 0, каждое следующее двоичное число можно получать путем увеличения предыдущего на единицу, но удобнее заполнение столбца значений каждой переменной осуществлять путем чередования групп нулей и единиц с шагом (количеством повторяющихся в группе значений 0 или 1) h:

$$h = 2^{n-i}, \tag{3}$$

где n – количество переменных в логическом выражении;

i – порядковый номер переменной в таблице истинности.

Заполнять столбцы значений переменных рекомендуется, начиная с последней переменной. В соответствии с формулой (3) при построении таблицы истинности логического выражения с двумя переменными значения второй переменной следует чередовать с шагом $h = 1$ (0101), первой переменной – с шагом $h = 2$ (0011) (рис. 8, а). При построении таблицы истинности выражения с тремя переменными значения третьей переменной чередуются с шагом $h = 1$ (01010101), второй переменной – с шагом $h = 2$ (00110011), первой переменной – с шагом $h = 4$ (00001111) (рис. 8, б).

7) Заполнить оставшиеся столбцы таблицы истинности, выполняя логические операции в соответствии с установленной в п. 2 последовательностью.

Переменная 1 (h = 2)	Переменная 2 (h = 1)
A	***B***
0	0
0	1
1	0
1	1

а

Переменная 1 (h = 4)	Переменная 2 (h = 2)	Переменная 3 (h = 1)
A	***B***	***C***
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

б

Рис. 8. Наборы значений логических переменных:
а – двух переменных; б – трех переменных

Пример 1. Построить таблицу истинности логического выражения $A + B \cdot \overline{A}$.

Применим изложенный выше порядок построения таблицы истинности:

1) количество переменных в выражении $n = 2$ (A, B);

$$A \overset{3}{+} \underbrace{B \cdot \overset{1}{\overline{A}}}_{2}$$

Рис. 9. Последовательность выполнения операций в примере 1

2) количество операций в выражении $k = 3$, последовательность их выполнения приведена на рис. 9;

3) количество строк в таблице истинности $m = 2^n = 2^2 = 4$ плюс строка заголовков столбцов;

4) количество столбцов в таблице $s = n + k = 2 + 3 = 5$;

5) создадим заготовку таблицы, содержащую пять строк и пять столбцов (рис. 10, а). В верхней строке таблицы в первых двух столбцах запишем имена переменных A и B, в остальных столбцах – логические операции в соответствии с установленной последовательностью их выполнения (рис. 10, б);

6) заполним первые два столбца таблицы наборами всех возможных значений переменных *A* и *B* (рис. 10, в) по образцу, приведенному на рис. 8, а;

а

Переменные		1	2	3
A	B	$\overline{A}$	$B \cdot \overline{A}$	$A + B \cdot \overline{A}$

б

Переменные		1	2	3
A	B	$\overline{A}$	$B \cdot \overline{A}$	$A + B \cdot \overline{A}$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

в

Переменные		1	2	3
A	B	$\overline{A}$	$B \cdot \overline{A}$	$A + B \cdot \overline{A}$
0	0	1		
0	1	1		
1	0	0		
1	1	0		

г

Переменные		1	2	3
A	B	$\overline{A}$	$B \cdot \overline{A}$	$A + B \cdot \overline{A}$
0	0	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	1	0	0	

д

Переменные		1	2	3
A	B	$\overline{A}$	$B \cdot \overline{A}$	$A + B \cdot \overline{A}$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

е

Рис. 10. Построение таблицы истинности в примере 1

7) заполним оставшиеся столбцы таблицы, выполняя логические операции в соответствии с установленной в п. 2 последовательностью (рис. 10, г – е).

При определении результата логической операции для каждого набора исходных значений (комбинаций 0 и 1) удобно пользоваться обобщенной таблицей истинности логических операций (см. рис. 7). Для наглядной демонстрации поэтапного заполнения столбцов таблицы истинности на рис. 10, г – е столбцы исходных значений для выполняемой операции обведены пунктирной линией, столбец значений результата этой операции – сплошной линией.

П р и м е р 2. Построить таблицу истинности логического выражения $\overline{A+B}\cdot A$.

В отличие от примера 1 в данном случае имеется инверсия не отдельной переменной, а логической операции (дизъюнкции). Применим изложенный выше порядок построения таблицы истинности:

1) количество переменных в выражении $n = 2$ (A, B);

$$\overset{2}{\overline{\underbrace{A+B}_{1}}}\overset{3}{\cdot} A$$

Рис. 11. Последовательность выполнения операций в примере 2

2) количество операций в выражении $k = 3$, последовательность их выполнения приведена на рис. 11;

3) количество строк в таблице истинности $m = 2^n = 2^2 = 4$ плюс строка заголовков столбцов;

4) количество столбцов в таблице $s = n + k = 2 + 3 = 5$;

5) создадим заготовку таблицы, содержащую пять строк и пять столбцов. В верхней строке таблицы в первых двух столбцах запишем имена переменных A и B, в остальных столбцах – логические операции в соответствии с установленной последовательностью их выполнения (рис. 12, а);

6) заполним первые два столбца таблицы наборами всех возможных значений переменных A и B (см. рис. 12, а) по образцу, приведенному на рис. 8, а;

7) заполним оставшиеся столбцы таблицы истинности, выполняя логические операции в соответствии с установленной в п. 2 последовательностью (рис. 12, б).

В данном примере логическое выражение принимает значение 0 при всех наборах значений входящих в него переменных (см. последний столбец таблицы истинности на рис. 12, б), следовательно, оно является тождественно ложным.

Переменные		1	2	3
A	B	$A+B$	$\overline{A+B}$	$\overline{A+B}\cdot A$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

а

Переменные		1	2	3
A	B	$A+B$	$\overline{A+B}$	$\overline{A+B}\cdot A$
0	0	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

б

Рис. 12. Построение таблицы истинности в примере 2

Пример 3. Построить таблицу истинности логического выражения $A\cdot\overline{B+\overline{C}}$.

Применим изложенный выше порядок построения таблицы истинности:

1) количество переменных в выражении $n = 3$ (A, B, C);

2) количество операций в выражении $k = 4$, последовательность их выполнения приведена на рис. 13;

$$A \overset{4}{\cdot} \overset{3}{\overline{\underbrace{B+\overset{1}{\overline{C}}}_{2}}}$$

Рис. 13. Последовательность выполнения операций в примере 3

3) количество строк в таблице истинности $m = 2^n = 2^3 = 8$ плюс строка заголовков столбцов;

4) количество столбцов в таблице $s = n + k = 3 + 4 = 7$;

5) создадим заготовку таблицы, содержащую девять строк и семь столбцов. В верхней строке таблицы в первых трех столбцах запишем имена переменных A, B и C, в остальных столбцах – логические операции в соответствии с установленной последовательностью их выполнения (рис. 14, а);

6) заполним первые три столбца таблицы наборами всех возможных значений переменных A, B и C (см. рис. 14, а) по образцу, приведенному на рис. 8, б;

7) заполним оставшиеся столбцы таблицы истинности, выполняя логические операции в соответствии с установленной в п. 2 последовательностью (рис. 14, б).

Переменные			1	2	3	4
A	B	C	$\overline{C}$	$B+\overline{C}$	$\overline{B+\overline{C}}$	$A\cdot\overline{B+\overline{C}}$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

а

Переменные			1	2	3	4
A	B	C	$\overline{C}$	$B+\overline{C}$	$\overline{B+\overline{C}}$	$A\cdot\overline{B+\overline{C}}$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0

б

Рис. 14. Построение таблицы истинности в примере 3

Пример 4. Построить таблицу истинности логического выражения $A\rightarrow\overline{B\cdot C}$.

Применим изложенный выше порядок построения таблицы истинности:

1) количество переменных в выражении $n = 3$ (A, B, C);

$$A \overset{3}{\rightarrow} \overbrace{\overline{\underbrace{B\cdot C}_{1}}}^{2}$$

Рис. 15. Последовательность выполнения операций в примере 4

2) количество операций в выражении $k = 3$, последовательность их выполнения приведена на рис. 15;

3) количество строк в таблице истинности $m = 2^n = 2^3 = 8$ плюс строка заголовков столбцов;

4) количество столбцов в таблице $s = n + k = 3 + 3 = 6$;

5) создадим заготовку таблицы, содержащую девять строк и шесть столбцов. В верхней строке таблицы в первых трех столбцах запишем имена переменных A, B и C, в остальных столбцах – логические операции в соответствии с установленной последовательностью их выполнения (рис. 16, а);

6) заполним первые три столбца таблицы наборами всех возможных значений переменных A, B и C (см. рис. 16, а) по образцу, приведенному на рис. 8, б;

7) заполним оставшиеся столбцы таблицы истинности, выполняя логические операции в соответствии с установленной в п. 2 последовательностью (рис. 16, б).

Переменные			1	2	3
A	B	C	$B \cdot C$	$\overline{B \cdot C}$	$A \to \overline{B \cdot C}$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

а

Переменные			1	2	3
A	B	C	$B \cdot C$	$\overline{B \cdot C}$	$A \to \overline{B \cdot C}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0

б

Рис. 16. Построение таблицы истинности в примере 4

3. ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Для приведения к определенному виду или упрощения логических выражений, полученных при формализации условий логических задач, в булевой алгебре производятся равносильные преобразования, опирающиеся на основные логические законы, представленные в табл. 1. В справедливости всех законов можно убедиться, построив таблицы истинности для левой и правой частей сформулированного закона.

3.1. Упрощение логических выражений

Две формулы алгебры логики называются **равносильными**, если они принимают одинаковые логические значения при любом наборе значений входящих в них переменных.

Таблица 1

Основные законы алгебры логики

№ п/п	Наименование закона	Формула	Примечание
1	Двойного отрицания	$A = \overline{\overline{A}}$	
2	Переместительный (коммутативный)	$A + B = B + A$ $A \cdot B = B \cdot A$	От перемены мест слагаемых или множителей результат не изменяется
3	Сочетательный (ассоциативный)	$(A + B) + C = A + (B + C)$ $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$	Если над переменными выполняются однотипные действия, то эти переменные можно произвольно группировать (объединять), изменяя последовательность действий
4	Распределительный (дистрибутивный)	$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$ $(A \cdot B) + C = (A + C) \cdot (B + C)$	Общий множитель для суммы или общее слагаемое для произведения можно вынести за скобки
5	Общей инверсии (законы де Мóргана)	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	Отрицание дизъюнкции двух переменных равно конъюнкции отрицаний этих переменных. Отрицание конъюнкции двух переменных равно дизъюнкции отрицаний этих переменных
6	Поглощения	$(A \cdot B) + A = A$ $(A + B) \cdot A = A$	–
7	Исключения (склеивания)	$(A \cdot B) + (A \cdot \overline{B}) = A$ $(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$	–
8	Идемпотентности (идемпотенции)	$A + A = A$ $\quad$ $A \cdot A = A$	–
9	Операции переменной с ее инверсией	$A + \overline{A} = 1$ $\quad$ $A \cdot \overline{A} = 0$	–
10	Операции с константами 0 и 1	$A + 0 = A$ $\quad$ $A \cdot 0 = 0$ $A + 1 = 1$ $\quad$ $A \cdot 1 = A$	–

Под упрощением логической формулы, не содержащей операций импликации и эквивалентности, понимают равносильное преобразование, приводящее к формуле, которая либо содержит по сравнению с исходной меньшее число операций конъюнкции и дизъюнкции и не содержит отрицаний неэлементарных формул, либо содержит меньшее число вхождений переменных. Основная цель упрощения логической формулы – минимизация функции для последующего уменьшения количества логических элементов в реализующей эту формулу логической схеме.

При упрощении логических выражений рекомендуется, как правило, выполнять действия в следующем порядке:

1) раскрыть инверсии сложных выражений по законам де Мóргана (см. табл. 1) таким образом, чтобы операции отрицания остались только для отдельных переменных;

2) упростить выражение, используя раскрытие скобок, вынесение общих множителей за скобки и другие законы алгебры логики (см. табл. 1).

При упрощении логического выражения целесообразно так сгруппировать его операнды путем применения сочетательного и распределительного законов, чтобы можно было применить законы поглощения, исключения, идемпотентности, производить операции переменной с ее инверсией и с константами 0 и 1 (см. табл. 1).

Пример 5. Упростить логическое выражение $(A+\overline{B})\cdot\overline{A+C}$.

Решение этого примера приведено на рис. 17.

$$(A+\overline{B})\cdot\underbrace{\overline{A+C}}_{\substack{\text{Закон общей}\\ \text{инверсии}}}=\underbrace{(A+\overline{B})\cdot\overline{A}\cdot\overline{C}}_{\substack{\text{Сочетательный}\\ \text{закон}}}=\left(\underbrace{(A+\overline{B})\cdot\overline{A}}_{\substack{\text{Распределительный}\\ \text{закон}}}\right)\cdot\overline{C}=$$

$$=\left(\underbrace{(A\cdot\overline{A})}_{\substack{\text{Операция}\\ \text{переменной}\\ \text{с ее инверсией}}}+(\overline{B}\cdot\overline{A})\right)\cdot\overline{C}=\left(\underbrace{0+(\overline{B}\cdot\overline{A})}_{\substack{\text{Операция}\\ \text{с константой 0}}}\right)\cdot\overline{C}=\overline{B}\cdot\overline{A}\cdot\overline{C}.$$

Рис. 17. Упрощение логического выражения в примере 5

П р и м е р 6. Упростить логическое выражение $\overline{(A+B)\cdot(A+\overline{B})}$.

Решение этого примера тремя разными способами приведено на рис. 18, а – в. Третий способ (см. рис. 18, в) является самым рациональным и демонстрирует тот факт, что в данном примере раскрывать общую инверсию нецелесообразно.

$$\underbrace{\overline{(A+B)\cdot(A+\overline{B})}}_{\substack{\text{Закон общей}\\ \text{инверсии}}}=\underbrace{\overline{(A+B)}}_{\substack{\text{Закон общей}\\ \text{инверсии}}}+\underbrace{\overline{(A+\overline{B})}}_{\substack{\text{Закон общей}\\ \text{инверсии}}}=(\overline{A}\cdot\overline{B})+\left(\overline{A}\cdot\underbrace{\overline{\overline{B}}}_{\substack{\text{Закон}\\ \text{двойного}\\ \text{отрицания}}}\right)=$$

$$=\underbrace{(\overline{A}\cdot\overline{B})+(\overline{A}\cdot B)}_{\substack{\text{Дистрибутивный}\\ \text{закон}}}=\overline{A}\cdot\underbrace{(\overline{B}+B)}_{\substack{\text{Операция}\\ \text{переменной}\\ \text{с ее инверсией}}}=\underbrace{\overline{A}\cdot 1}_{\substack{\text{Операция}\\ \text{с константой 1}}}=\overline{A}.$$

а

$$\underbrace{\overline{(A+B)\cdot(A+\overline{B})}}_{\substack{\text{Закон общей}\\ \text{инверсии}}}=\underbrace{\overline{(A+B)}}_{\substack{\text{Закон общей}\\ \text{инверсии}}}+\underbrace{\overline{(A+\overline{B})}}_{\substack{\text{Закон общей}\\ \text{инверсии}}}=(\overline{A}\cdot\overline{B})+\left(\overline{A}\cdot\underbrace{\overline{\overline{B}}}_{\substack{\text{Закон}\\ \text{двойного}\\ \text{отрицания}}}\right)=$$

$$=\underbrace{(\overline{A}\cdot\overline{B})+(\overline{A}\cdot B)}_{\text{Закон исключения}}=\overline{A}.$$

б

$$\underbrace{\overline{(A+B)\cdot(A+\overline{B})}}_{\text{Закон исключения}}=\overline{A}.$$

в

Рис. 18. Упрощение логического выражения разными способами в примере 6

4. ЛОГИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ И СХЕМЫ

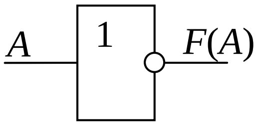
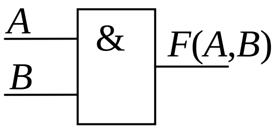
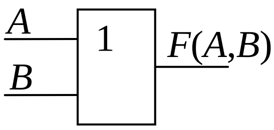
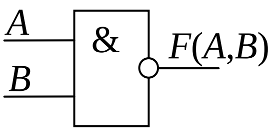
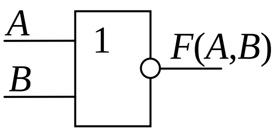
Функции математической логики физически реализуются в логических схемах, которые являются основой любых систем обработки дискретной информации. Для преобразования цифровых сигналов в электронных узлах цифровых устройств применяются логические элементы.

Логическим элементом (вентилем) называется устройство, которое после обработки входных двоичных сигналов выдает на выходе сигнал, являющийся результатом одной из логических операций.

Основные логические элементы представлены в табл. 2.

Таблица 2

Основные логические элементы

Название элемента	Изображение элемента	Реализуемая логическая функция
НЕ (инвертор)		$F(A)=\overline{A}$
И (конъюнктор)		$F(A,B)=A\cdot B$
ИЛИ (дизъюнктор)		$F(A,B)=A+B$
И-НЕ		$F(A,B)=\overline{A\cdot B}$
ИЛИ-НЕ		$F(A,B)=\overline{A+B}$

Примечание. В таблице приведены стандартные обозначения логических элементов. В учебно-методической литературе внутри элемента НЕ цифру 1 для упрощения иногда не ставят.

Логические элементы с помощью линий связи объединяются в логическую схему.

4.1. Построение логической схемы

На логической схеме каждой логической переменной соответствует один вход. Входы изображают в виде параллельных линий обычно в левой части схемы. Каждой логической операции в выражении соответствует логический элемент, на входы которого поступают ее операнды. С целью оптимизации соединительных линий построение логической схемы, как правило, начинают с ее выхода, т. е. с логической операции, которая должна выполняться последней, располагая соответствующие операнды у входов логического элемента. Затем поэтапно для каждого логического выражения, расположенного на входах логических элементов, производятся аналогичные действия.

П р и м е р 7. По логической функции $F(A,B)=B\cdot\overline{A}+\overline{B}\cdot A$ построить логическую схему.

$$F(A,B)=B\overset{3}{\cdot}\overset{1}{\overline{A}}\overset{5}{+}\overset{2}{\overline{B}}\overset{4}{\cdot}A$$

Рис. 19. Последовательность выполнения операций в примере 7

Определим последовательность выполнения операций в заданном логическом выражении (рис. 19).

В выражение входят две переменные – *A* и *B*, поэтому изобразим в левой части логической схемы два входа – *A* и *B* (рис. 20).

Последней (пятой по счету) в заданном выражении выполняется операция дизъюнкции (см. рис. 19), следовательно, последним логическим элементом в схеме будет элемент ИЛИ (дизъюнктор) (см. табл. 2), входами которого являются операнды $B\cdot\overline{A}$ и $\overline{B}\cdot A$ (см. рис. 20). Для наглядной демонстрации процесса построения схемы логические элементы, реализующие рассматриваемую на данном этапе логическую операцию, на рисунках обведены толстой сплошной линией.

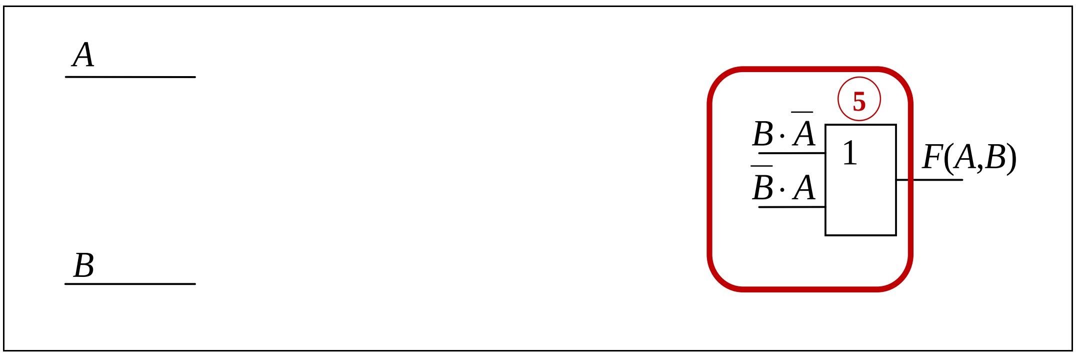


Рис. 20. Первый этап построения логической схемы (операция 5)

Четвертой операцией в логическом выражении является конъюнкция $\overline{B} \cdot A$, следовательно, в логическую схему необходимо включить элемент И (конъюнктор), входами которого являются операнды $\overline{B}$ и A (рис. 21).

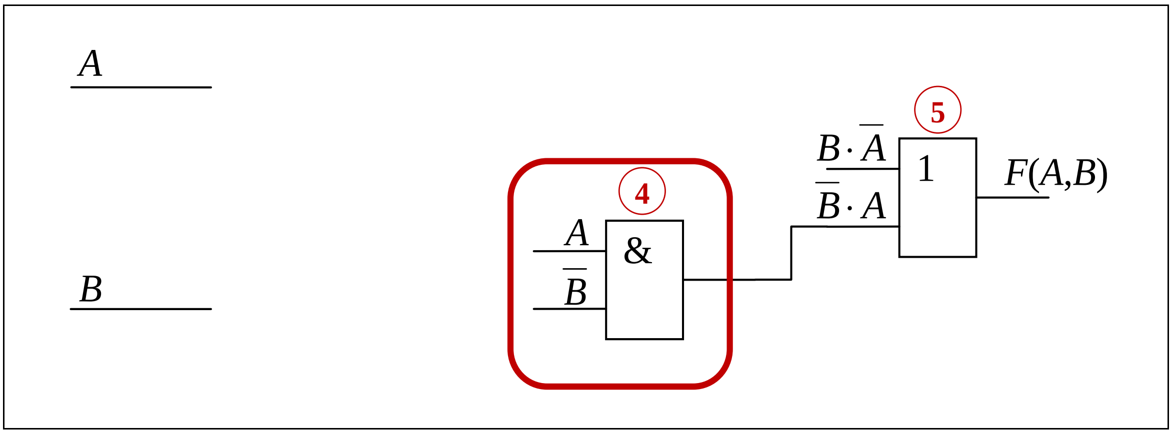


Рис. 21. Второй этап построения логической схемы (операция 4)

Третьей операцией в логическом выражении является конъюнкция $B \cdot \overline{A}$, следовательно, в логическую схему необходимо включить еще один элемент И (конъюнктор), входами которого являются операнды B и $\overline{A}$ (рис. 22).

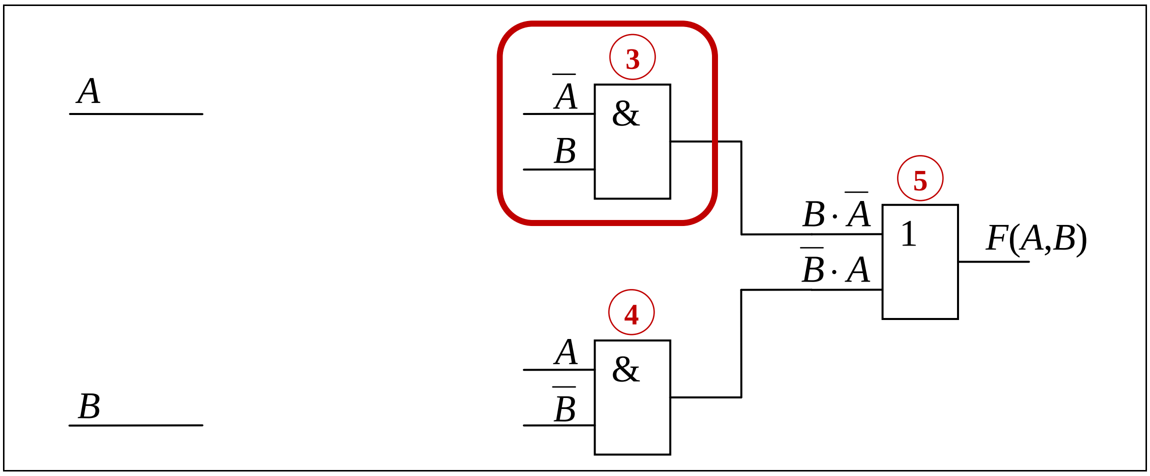


Рис. 22. Третий этап построения логической схемы (операция 3)

Второй и первой операциями в логическом выражении являются инверсии переменных A и B. Для получения сигналов в инверсном представлении в логическую схему необходимо включить два элемента НЕ (инвертор), входами которых являются соответственно операнды A и B (рис. 23).

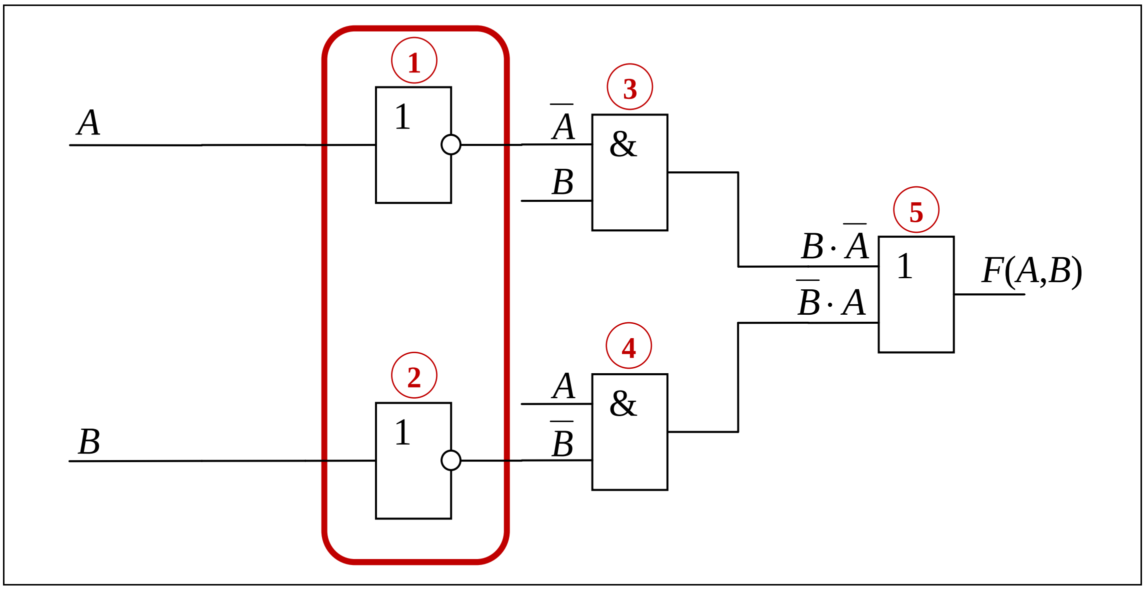


Рис. 23. Четвертый этап построения логической схемы (операции 2 и 1)

Соединим операнды *A* и *B* конъюнкторов, реализующих третью и четвертую операции, с соответствующими входными сигналами *A* и *B* и получим результирующую логическую схему (рис. 24).

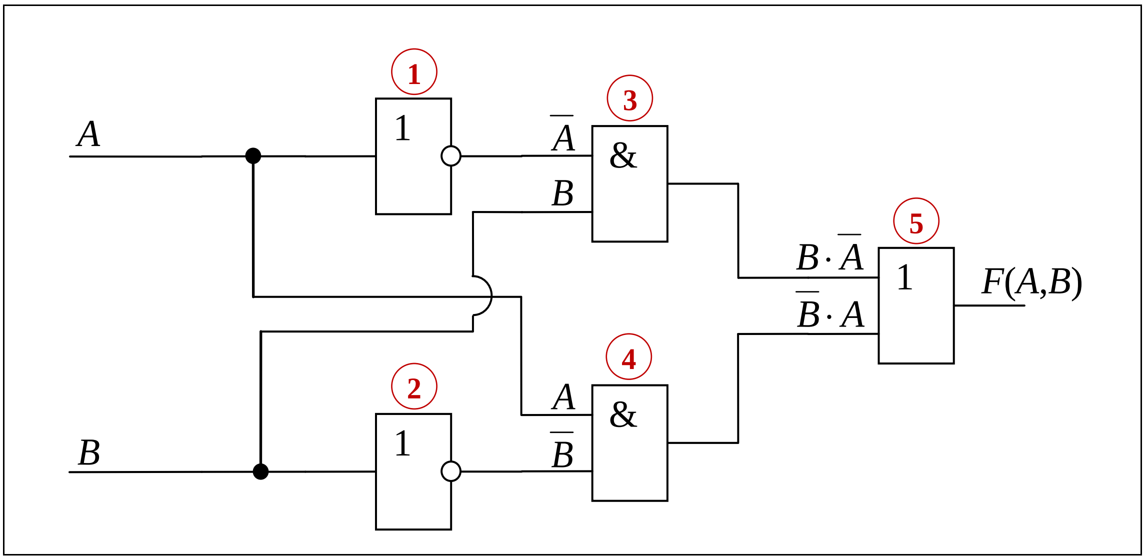


Рис. 24. Результирующая логическая схема в примере 7

Пример 8. По логической функции $F(A,B,C)=\overline{A}+B\cdot C$ построить логическую схему.

В отличие от примера 7 аргументами данной функции являются три переменные – *A*, *B* и *C*. Поэтапное построение логической схемы продемонстрировано в примере 7, поэтому ограничимся лишь некоторыми пояснениями.

Определим последовательность выполнения операций в заданном логическом выражении (рис. 25).

$$F(A,B,C)=\overset{1}{\overline{A}}\overset{3}{+}B\overset{2}{\cdot}C$$

Рис. 25. Последовательность выполнения операций в примере 8

Изобразим в левой части логической схемы три входа, соответствующие входящим в заданную функцию логическим переменным *A*, *B* и *C* (рис. 26).

Последней (третьей по счету) в заданном выражении выполняется операция дизъюнкции (см. рис. 25), следовательно, последним логическим элементом в схеме будет элемент ИЛИ (дизъюнктор) (см. табл. 2), входами которого являются операнды $B \cdot C$ и $\overline{A}$ (см. рис. 26).

Второй операцией в логическом выражении является конъюнкция $B \cdot C$, следовательно, в логическую схему необходимо включить элемент И (конъюнктор), входами которого являются операнды *B* и *C* (см. рис. 26).

Первой операцией в логическом выражении является инверсия переменной *A*. Для получения сигнала в инверсном представлении в логическую схему нужно включить элемент НЕ (инвертор), на вход которого поступает операнд *A* (см. рис. 26).

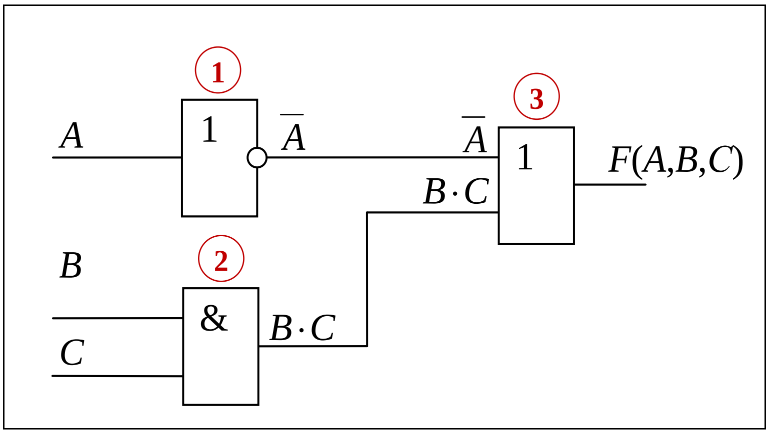


Рис. 26. Результирующая логическая схема в примере 8

4.2. Анализ логической схемы

Задача анализа логической схемы заключается в определении логической функции, реализуемой на выходах этой схемы. Для этого последовательно, начиная с входов логической схемы, определяют результат на выходе каждого логического элемента. Полученная на выходе логического элемента функция по линии связи поступает на вход следующего элемента и является операндом очередной логической операции. Такой процесс продолжают до получения результирующей функции на выходе последнего логического элемента схемы. С целью исключения ошибок при анализе логической схемы рекомендуется записывать полученные на каждом его этапе функции не только на выходах логических элементов, но и на их входах.

Пример 9. Логическая схема имеет два входа – A и B (рис. 27). Определить логические функции $F_1(A, B)$ и $F_2(A, B)$, которые реализуются на двух ее выходах.

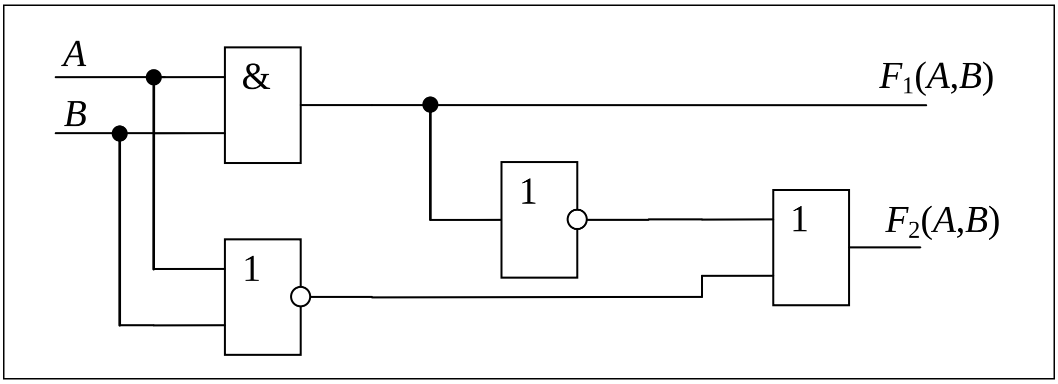


Рис. 27. Заданная логическая схема в примере 9

Для удобства изложения материала пронумеруем логические элементы схемы в порядке выполнения операций (рис. 28). Первым логическим элементом в схеме является элемент И (конъюнктор). На его входы подаются сигналы A и B, следовательно, результат выполнения операции на выходе элемента № 1 представляет собой конъюнкцию $A \cdot B$, которая далее является входным операндом для элемента № 2, а также определяет первую искомую функцию $F_1(A, B) = A \cdot B.$

Элемент № 2 (элемент НЕ) инвертирует полученную с выхода элемента № 1 логическую функцию $A \cdot B$, в результате чего на его выходе реализуется функция $\overline{A \cdot B}$, поступающая затем на первый вход элемента № 4.

Элемент № 3 (элемент ИЛИ-НЕ) осуществляет логическое сложение сигналов A и B и инверсию полученного результата, вследствие чего на его выходе реализуется логическая функция $\overline{A + B}$. Указанная функция поступает на второй вход дизъюнктора № 4, на выходе которого реализуется вторая искомая функция $F_2(A, B) = \overline{A \cdot B} + \overline{A + B}$ (см. рис. 28).

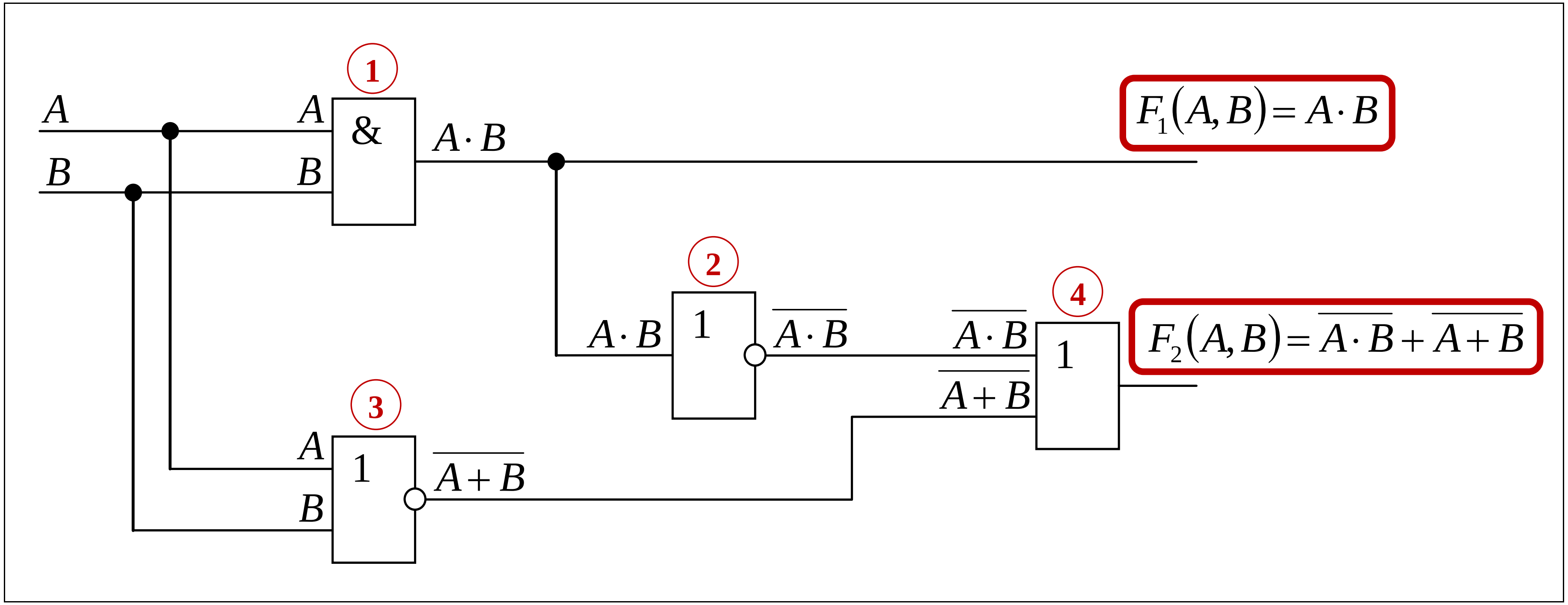


Рис. 28. Реализация логических функций $F_1(A, B)$ и $F_2(A, B)$ на выходах логической схемы в примере 9

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1) Что в математической логике называется высказыванием?

2) Перечислите основные логические операции. В каком порядке они выполняются в логическом выражении?

3) Опишите порядок построения таблицы истинности.

4) Назовите основные логические элементы.

5) В чем заключается задача анализа логической схемы?

6. ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ВОПРОСОВ

Вопрос № 1 (один верный ответ)

Значение логической функции «A и 1» равно…

Варианты ответов:

1) НЕ(A).

2) A.

3) 0.

4) 1.

Вопрос № 2 (один верный ответ)

Какое из следующих предложений является логическим высказыванием?

Варианты ответов:

1) Земля – планета Солнечной системы.

2) $2x + 6 = 10$.

3) Вынеси мусор.

4) В котором часу начинаются занятия?

Вопрос № 3 (один верный ответ)

Какое из перечисленных логических выражений не является тождественно истинным?

Варианты ответов:

1) НЕ(A И B) И A.

2) A ИЛИ НЕ(B) ИЛИ НЕ(A).

3) НЕ(A) ИЛИ A ИЛИ НЕ(B).

4) A И B ИЛИ НЕ(A) ИЛИ НЕ(B).

Вопрос № 4 (один верный ответ)

При каком значении переменной *A* логическое выражение $(A \vee B) \& (A \vee \overline{B})$ будет ложным?

Варианты ответов:

1) Ложь.

2) Истина.

3) *B*.

4) НЕ(*B*).

Вопрос № 5 (один верный ответ)

Сколько различных решений имеет уравнение *A* и *B* и *C* = 1?

Варианты ответов:

1) 1.

2) 2.

3) 7.

4) 8.

Вопрос № 6 (один верный ответ)

Дана таблица истинности логического выражения *F*. Определить, какому выражению она соответствует.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Варианты ответов:

1) НЕ(*A*) ИЛИ НЕ(*B*) ИЛИ НЕ(*C*).

2) *A* И НЕ(*B*) И НЕ(*C*).

3) *A* ИЛИ *B* ИЛИ *C*.

4) *A* И *B* И *C*.

7. ЗАДАНИЯ

З а д а н и е 1. Построить таблицу истинности логического выражения (табл. 3) и определить, является ли оно тождественно истинным (тождественно ложным).

Т а б л и ц а 3

Исходные данные для задания 1

Вариант	Логическое выражение	Вариант	Логическое выражение	Вариант	Логическое выражение
0	$(A+B)\cdot\overline{B}$	7	$\overline{A+B}\cdot B$	14	$A\cdot\overline{B}\cdot A$
1	$(\overline{A}\to B)+A$	8	$\overline{A}\cdot B\to B$	15	$\overline{A}\to B\cdot A$
2	$A\cdot(B+\overline{A})$	9	$\overline{A}+B\cdot A$	16	$\overline{A+\overline{B}}\cdot A$
3	$A\cdot\overline{A}+B$	10	$A+\overline{B}\to B$	17	$(A+B)+\overline{A}$
4	$\overline{B}+A\to\overline{B}$	11	$B\cdot(\overline{A}+\overline{B})$	18	$A\to B+\overline{A}$
5	$\overline{A}\cdot(B+A)$	12	$A\cdot\overline{B}+\overline{A}$		
6	$B\cdot(\overline{A}+B)$	13	$\overline{A\cdot\overline{B}}+A$		

З а д а н и е 2. Упростить логическое выражение (табл. 4).

Т а б л и ц а 4

Исходные данные для задания 2

Вари-ант	Логическое выражение	Вари-ант	Логическое выражение
1	2	3	4
0	$(A+B+C)\cdot\overline{A+\overline{B}+C}$	4	$A\cdot B+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
1	$\overline{A+B}+\overline{A+\overline{B}}$	5	$A\cdot(B\cdot(\overline{A}+\overline{B}))$
2	$A\cdot B\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot B$	6	$\overline{A+\overline{B}}+\overline{A+B}+A\cdot B$
3	$A\cdot B+\overline{A\cdot\overline{B}\cdot C}$	7	$\overline{A}\cdot(\overline{B}+A)+\overline{A}\cdot B$

Окончание табл. 4

1	2	3	4
8	$A+\overline{B\cdot\overline{C}}+\overline{\overline{A}+B+\overline{C}}$	14	$\overline{\overline{A}\cdot A}+B\cdot(A\cdot B+B)$
9	$(A+B)\cdot\overline{A}+\overline{A+B}\cdot A$	15	$A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot B+A\cdot\overline{B}$
10	$(A+\overline{B})\cdot\overline{A+C}$	16	$A\cdot B+\overline{\overline{A}+\overline{B}}+\overline{A}\cdot B$
11	$(A+B)\cdot(\overline{A}+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B})$	17	$\overline{A+\overline{B}+C}\cdot A\cdot B+\overline{C}$
12	$A\cdot\overline{B}+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B$	18	$A\cdot\overline{B}+\overline{A+B}+\overline{B}$
13	$\overline{A}\cdot B+\overline{A+B}+A$		

Задание 3. Построить таблицу истинности и логическую схему, соответствующие логической функции (табл. 5).

Таблица 5

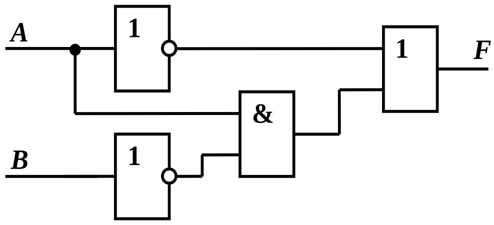
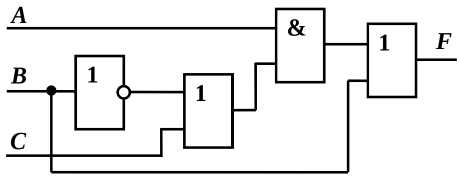
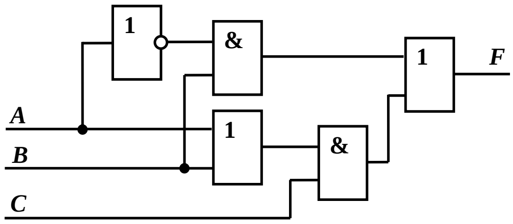
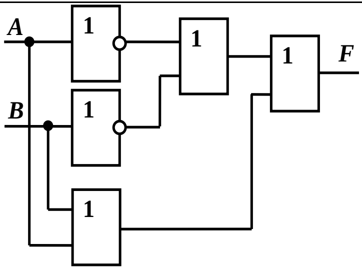
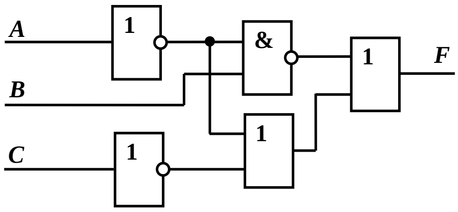
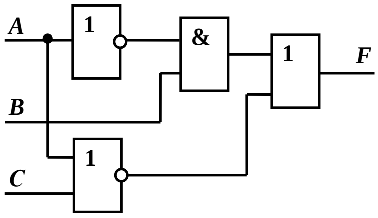
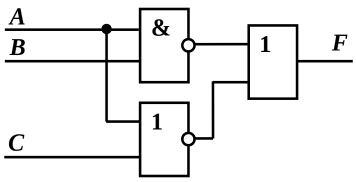
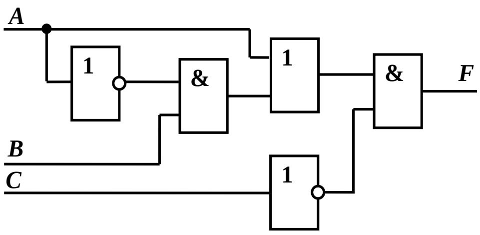
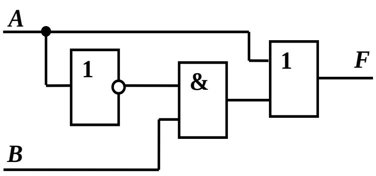
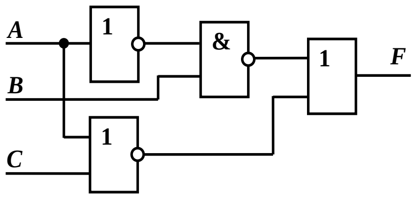
Исходные данные для задания 3

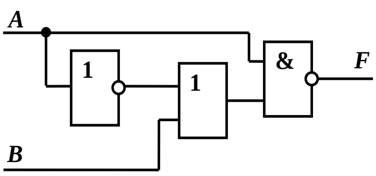
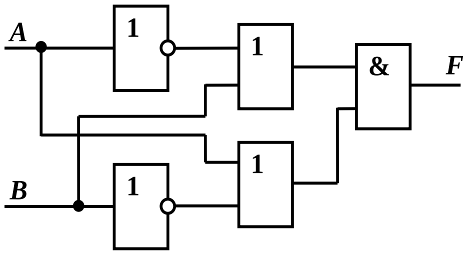
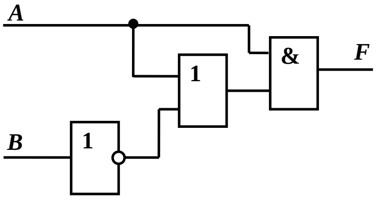
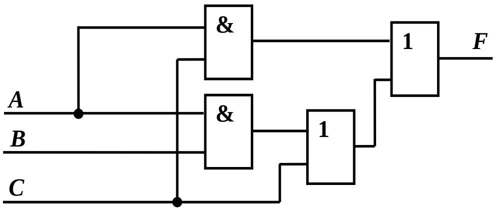
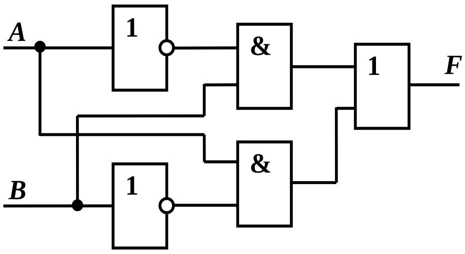
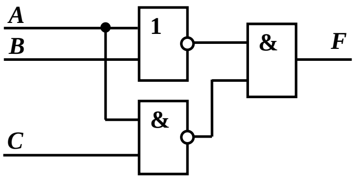
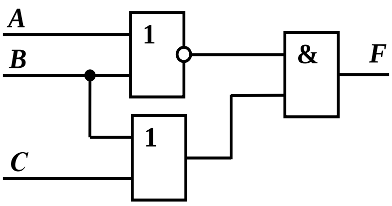
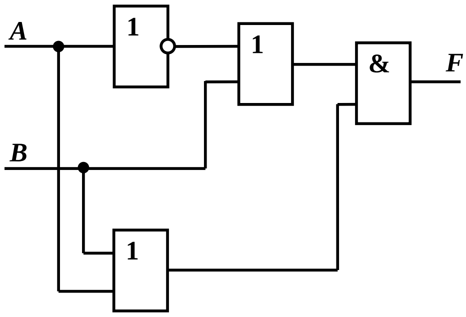
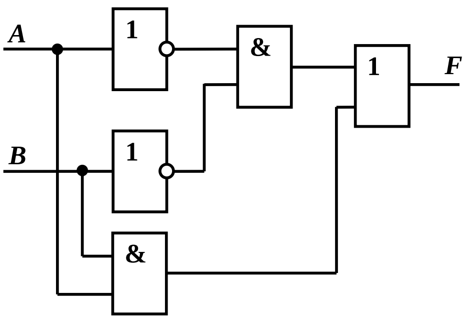
Вариант	Логическая функция	Вариант	Логическая функция
0	$F(A,B,C)=A\cdot B+\overline{A}\cdot C$	10	$F(A,B,C)=(A+B)\cdot C+\overline{A}$
1	$F(A,B,C)=(B\cdot A)+(A+C)$	11	$F(A,B,C)=A\cdot B+\overline{B}\cdot\overline{C}$
2	$F(A,B,C)=A\cdot(\overline{B}+C)$	12	$F(A,B,C)=\overline{C}+\overline{A}\cdot B$
3	$F(A,B,C)=(A+B)\cdot(C+B)$	13	$F(A,B,C)=A\cdot(\overline{B}+C)+B$
4	$F(A,B,C)=\overline{A+B}\cdot(C+B)$	14	$F(A,B,C)=\overline{A}\cdot(\overline{B+C})$
5	$F(A,B,C)=\overline{A\cdot B\cdot C}$	15	$F(A,B,C)=\overline{A+B\cdot\overline{C}}$
6	$F(A,B,C)=\overline{\overline{A}+B\cdot C}$	16	$F(A,B,C)=(A+B)\cdot C\cdot B$
7	$F(A,B,C)=A\cdot B+(B+C)$	17	$F(A,B,C)=B+C\cdot\overline{A}$
8	$F(A,B,C)=\overline{B\cdot C}+\overline{A}$	18	$F(A,B,C)=\overline{A+B}\cdot(C\cdot B)$
9	$F(A,B,C)=\overline{A+\overline{B}+C}$		

Задание 4. Составить логическую функцию и таблицу истинности, соответствующие логической схеме (табл. 6).

Таблица 6

Исходные данные для задания 4

Вари-ант	Логическая схема	Вари-ант	Логическая схема
1	2	3	4
0		5	
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	

1	2	3	4
10		15	
11		16	
12		17	
13		18	
14			

Библиографический список

1. Ш о л о м о в Л. А. Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств: Учебное пособие / Л. А. Ш о л о м о в. СПб: Лань, 2011. 432 с.

2. Т р о ф и м о в В. В. Информатика: В 2 т.: Учебник / В. В. Т р о ф и м о в, М. И. Б а р а б а н о в а. М.: Юрайт, 2018. Т. 1. 553 с.

3. Г а в р и л о в М. В. Информатика и информационные технологии: Учебник / М. В. Г а в р и л о в, В. А. К л и м о в. М.: Юрайт, 2018. 383 с.

4. ГОСТ 2.743-91. Единая система конструкторской документации. Обозначения условные графические в схемах. Элементы цифровой техники. Введ. 1993-01-01. М.: Изд-во стандартов, 1991. 27 с.

Учебное издание

СИДОРОВА Елена Анатольевна,
ДОЛГОВА Анна Владимировна

ОСНОВЫ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ И
ЛОГИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВ

Учебно-методическое пособие

Редактор Н. А. Майорова

***

Подписано в печать 22.03.2019. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,3. Уч.-изд. л. 2,5.
Тираж 250 экз. Заказ .

**

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35