А. В. ЕРОШЕНКО

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

ЧАСТЬ 2

ОСНОВЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ. РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

ОМСК 2014

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

А. В. Ерошенко

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

Часть 2

ОСНОВЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ. РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний для самостоятельной работы
по дисциплине «Информатика»

Омск 2014

УДК 004. 832
ББК 32.988-5я7
Е76

Теоретические основы информатики. Часть 2. **Основы алгебры логики. Решение логических задач**: Методические указания для самостоятельной работы по дисциплине «Информатика» / А. В. Ерошенко; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2014. 32 с.

Указания содержат основные положения алгебры логики. Рассматриваются различные способы решения логических задач. Приводятся практические рекомендации по составлению таблиц истинности, логических функций, по их упрощению и программированию в среде Visual Basic for Applications.

Предназначены для студентов первого курса всех специальностей и направлений подготовки очной и заочной форм обучения.

Библиогр.: 5 назв. Табл. 14. Рис. 4.

Рецензенты: доктор техн. наук, доцент А. В. Бубнов;
канд. техн. наук, доцент А. В. Малютин.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Для того чтобы ориентироваться в быстро меняющейся обстановке, принимать решения и на их основе совершать действия, все люди нуждаются в достоверной информации о мире, в котором они живут. Получение такой информации – одна из важнейших потребностей человека на протяжении всей его жизни. Причем важно обладать способностью не только приобретать знания, но и использовать их для решения огромного количества чрезвычайно сложных задач.

С древних времен людей интересовали способы правильного построения и обоснования собственных мнений, они стремились к такой форме изложения своих убеждений, которая выглядела бы наиболее убедительно. Человек стремился познать законы мышления, т. е. *логические законы*.

Основателем формальной логики считается древнегреческий философ Аристотель. Название «формальная логика» происходит от основного принципа такой логики, который заключается в утверждении, что правильность рассуждения определяется только его логической формой или структурой и не зависит от конкретного содержания входящих в него высказываний.

Идею о возможности математизации логики высказал еще в XVII в. Г. В. Лейбниц. Однако подлинный прогресс этой науки был достигнут в середине XIX в. прежде всего благодаря труду Дж. Буля «Математический анализ логики», где он рассмотрел законы и правила алгебраических действий в логике, ввёл понятия логических операций, предложил способ записи высказываний в символической форме.

В XIX в. Джордж Буль развил алгебраический подход к логике и сформулировал правила логических вычислений.

Дж. Буль изобрел своеобразную *алгебру логики (исчисление высказываний)* – систему обозначений и правил логических вычислений, применимую к всевозможным объектам, от чисел и букв до предложений. Его именем она так часто и называется: алгебра Буля или *булева алгебра*.

В конце XIX в. над модификацией и расширением булевой алгебры работал американский логик Чарльз Сандерс Пирс.

Современная математизированная формальная логика представляет собой обширную научную область, которая находит широкое применение как внутри математики (исследование оснований математики), так и вне ее (синтез и анализ автоматических устройств, теоретическая кибернетика, в частности, искусственный интеллект).

При изучении курса информатики важность знакомства с булевой алгеброй определяется двумя причинами. Во-первых, она является математической основой построения всех логических схем компьютеров, обрабатывающих информацию в двоичной системе счисления. Во-вторых, она служит математической основой решения сложных логических задач.

Автор выражает глубокую благодарность Соколовской Нине Николаевне за предоставленный материал и научные консультации при выполнении работы.

1. ОСНОВЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

1.1. Логика как наука

Логика – одна из древнейших наук. Аристотель заложил основы формальной логики, впервые отделив логические формы мышления (речи) от его содержания. Логикой называют науку о способах доказательств, о способах рассуждений, которые от истинных суждений (посылок) приводят к истинным суждениям (следствиям).

Мыслить логично – значит мыслить точно и последовательно, не допускать противоречий в своих рассуждениях, уметь определять логические ошибки.

Логика – это наука о формах и способах мышления. Законы логики отражают в сознании человека свойства, связи и отношения объектов окружающего мира. Логика позволяет строить формальные модели окружающего мира, отвлекаясь от содержательной стороны.

Мышление всегда осуществляется в каких-то формах. Основными формами мышления являются понятие, высказывание и умозаключение.

Понятие – это форма мышления, отражающая наиболее существенные признаки предмета, отличающие его от других предметов. Например, понятие «компьютер» объединяет множество электронных устройств, которые предназначены для обработки информации и снабжены монитором и клавиатурой.

В качестве объектов, с которыми обычно оперирует *алгебра логики*, выступают высказывания. *Высказывание* (*суждение, утверждение*) – это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о реальных предметах, их свойствах и отношениях между ними. При этом интересуются не содержанием высказываний, а только их истинностью или ложностью, никакие другие признаки высказываний в алгебре логики не рассматриваются. Одно и то же высказывание не может быть одновременно истинным и ложным или не истинным и не ложным. Таким образом, по своей сути высказывания фактически являются двоичными объектами.

Следует отметить, что высказыванием может быть только повествовательное предложение.

Высказывания обозначаются прописными буквами и рассматриваются как переменные величины, принимающие два значения – И (ИСТИНА или 1) и

Л (ЛОЖЬ или 0). Примеры высказываний и предложений, которые не являются высказываниями:

1) A = *Иртыш – река*. A = 1 (A = ИСТИНА), так как высказывание истинно.

2) B = *Все люди любят молоко*. B = 0, так как есть люди, которые не любят молоко.

3) C = *А ты любишь информатику?* – это не высказывание, так как не является повествовательным предложением.

4) $D = x*x < 0$ – ложное высказывание, так как при любом значении x выражение x*x будет неотрицательным.

5) $E = 2*x - 1 > 0$ – не высказывание, так как для одних значений x это выражение будет истинным, а для других значений – ложным.

6) F = *Дай мне чашку* – не высказывание, так как является побудительным предложением.

Умозаключение – это форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких высказываний (посылок) может быть получено новое высказывание (вывод). Например, из двух суждений: «Все металлы электропроводны» и «Ртуть является металлом» – путем умозаключения можно сделать вывод: «Ртуть электропроводна».

Доказательство есть мыслительный процесс, направленный на подтверждение или опровержение какого-либо положения посредством других, несомненных, ранее обоснованных выводов. Например, если имеем суждение: «Все углы треугольника равны», то путем умозаключения мы можем доказать, что в этом случае справедливо суждение «Этот треугольник равносторонний».

Поскольку алгебра логики отвлекается от смысловой содержательности высказываний, это дает возможность определять истинность или ложность составных высказываний алгебраическими методами.

Высказывания бывают простые и сложные (составные). Высказывание называется *простым*, если никакая часть его сама не является высказыванием. Высказывание, состоящее из простых высказываний, называется *составным* (*сложным*).

Простым называется высказывание, которое не содержит в себе других высказываний. Например, A = *Вы пользуетесь последними версиями антивирусных программ*.

В формальной логике принято, что всякое простое высказывание обязательно имеет одно из двух значений – ИСТИНА или ЛОЖЬ.

В случае простого высказывания всегда допустимо *договориться* о том, считать его истинным или ложным.

Сложное высказывание также бывает истинным или ложным, но это значение *вычисляется*. Вычисление производится по форме сложного высказывания в соответствии с таблицами истинности входящих в него логических операций. Для определения значения истинности сложного высказывания надо уметь определять его форму и знать правила логических операций.

1.2. Основные операции алгебры логики

В применении к высказываниям *логическая операция* – способ построения сложного высказывания из данных высказываний, при котором значение истинности сложного высказывания полностью определяется значениями истинности исходных высказываний. Логические операции реализуются в виде *функций алгебры логики* (*логических функций, булевых функций*).

Над высказываниями можно производить различные логические операции: инверсию, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию, эквивалентность и неравнозначность.

Логические функции можно задавать логическими формулами и таблично. В виде таблицы булевы функции задают значениями 0 и 1 на каждом наборе значений ее аргументов. Такие таблицы называются *таблицами истинности*.

1.2.1. Инверсия

Логическую операцию *инверсия* (*отрицание, операция «НЕ»*) можно применить как к простому, так и к сложному высказыванию. Логическое отрицание образуется из высказывания A с помощью добавления частицы «не» к сказуемому или использования оборота речи «неверно, что A», «A не имеет места».

Логическое отрицание получает из истинного высказывания ложное и, наоборот, из ложного – истинное.

Интересует только истинность высказывания, имеющего форму $\overline{A}$ (вне зависимости от его содержания).

Пример 1.1. A = *Два умножить на два равно четырем*. Это высказывание истинно. Высказывание, образованное с помощью операции логического отрицания, $\overline{A}$ = *Два умножить на два не равно четырем* – ложно.

Пример 1.2. B = *Все люди любят молоко*. Понятно, что B – ложное высказывание. $\overline{B}$ = *Неверно, что все люди любят молоко*, значение $\overline{B} = ИСТИНА$. Следует обратить внимание на то, что высказывание *Все люди не любят молоко* не является отрицанием высказывания B, так как есть люди, которые любят молоко.

Замечание 1.1. В логике при образовании инверсии предпочитают оборот речи «неверно, что», подчеркивая этим отрицание всего высказывания.

Отрицание – это логическая (двоичная) функция одной переменной. Знак операции – черта над аргументом, например, $\overline{a}$ (можно $\neg a$). Такая запись читается: «не а» или «отрицание а». Таблица истинности функции отрицание $f(a) = \overline{a}$ приведена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Таблица истинности функции отрицание

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

1.2.2. Конъюнкция

Если есть два высказывания – A и B, то *конъюнкция* (*логическое умножение, операция «И»*) образуется из них с помощью оборотов речи: «A и B», «как A, так и B», «не только A, но и B», «A вместе с B», «A, несмотря на B», «A, в то время как B».

Конъюнкция двух высказываний истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания – A и B – истинны, и ложна, когда хотя бы одно высказывание ложно. Высказывая конъюнкцию, утверждают, что выполняются оба события, о которых идет речь в составляющих высказываниях.

Пример 1.3. A = *Наступил январь*, B = *студенты сдают экзамены*. Новое высказывание A & B (или $A \wedge B$) истинно только в том случае, когда оба высказывания – A и B – истинны одновременно, т. е. когда истинно, что наступил январь и что студенты сдают экзамены.

Таблица 1.2
Таблица истинности функции конъюнкция

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Конъюнкция – это такая логическая функция, которая равна единице тогда и только тогда, когда все аргументы функции равны единице. Другое определение: конъюнкция – это такая логическая функция, которая равна нулю, если хотя бы один аргумент функции равен нулю. Знак операции: «&» или «$\wedge$». Таблица истинности функции конъюнкция $f(a,b) = a \wedge b$ приведена в табл. 1.2.

1.2.3. Дизъюнкция

Если есть два высказывания – *A* и *B*, то *дизъюнкция* (*логическое сложение, операция «ИЛИ»*) образуется с помощью оборотов «*A* или *B*», «*A*, или *B*, или оба» и т. п.

Таблица 1.3
Таблица истинности функции дизъюнкция

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Пример 1.4. A = Идет дождь, B = Асфальт мокрый. Новое высказывание $A \vee B$ ложно только в том случае, когда оба высказывания – *A* и *B* – ложны одновременно, т. е. когда ложно, что *идет дождь и асфальт мокрый*.

Дизъюнкция – это такая логическая функция, которая равна нулю тогда и только тогда, когда все аргументы функции равны нулю. Другое определение: дизъюнкция – это такая функция, которая равна единице, если хотя бы один аргумент равен единице. Знак операции: «$\vee$». Таблица истинности функции дизъюнкции $f(a,b) = a \vee b$ приведена в табл. 1.3.

1.2.4. Неравнозначность

Если есть два высказывания – *A* и *B*, то *неравнозначность* (*исключающее ИЛИ*, *сложение по модулю 2*, *сумма по модулю 2*) образуется с помощью оборотов «*A* или *B*, но не оба», «*A* либо *B*», «либо *A*, либо *B*», «либо не *A*, либо не *B*», «или *A*, или *B*», «только *A* или только *B*» и т. п.

Пример 1.5. A = Студент получил двойку, B = Студент получил тройку. Новое высказывание $A \oplus B$ истинно тогда и только тогда, когда истинно только одно из высказываний.

Неравнозначность – это такая логическая функция, которая принимает единичное значение тогда, когда равен единице или один ее аргумент, или другой, но не оба вместе. Знак операции: «$\oplus$». Таблица истинности функции неравнозначность $f(a,b) = a \oplus b$ представлена в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Таблица истинности функции неравнозначность

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1.2.5. Эквивалентность

Если есть два высказывания – *A* и *B*, то следующие выражения разговорной речи записываются как *эквивалентность* (*равнозначность*): «*A* эквивалентно *B*», «*A* тогда и только тогда, когда *B*», «*A* необходимо и достаточно для *B*».

Эквивалентность двух высказываний истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны или оба высказывания ложны.

Все законы математики, физики, все определения – эквивалентность высказываний.

Пример 1.6. Даны высказывания: *A = Число делится на 3 без остатка (кратно трем), B = Сумма цифр числа делится нацело на 3*. Новое высказывание «*Число делится на 3 без остатка (кратно трем) эквивалентно Сумма цифр числа делится нацело на 3*» записывается как $A \leftrightarrow B$.

Равнозначность – двоичная функция, принимающая единичное значение тогда, когда оба ее аргумента равны между собой. Знак операции: «$\leftrightarrow$». Таблица истинности функции равнозначность $f(a,b) = a \leftrightarrow b$ представлена в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Таблица истинности функции эквивалентность

a	b	$a \leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1.2.6. Импликация

Если есть два высказывания – *A* и *B*, то следующие выражения разговорной речи записываются как *импликация* (*следование*): «если *A*, то *B*», «*B*, если *A*», «когда *A*, тогда и *B*», «*A* только, если *B*», «*A* достаточно для *B*», «для *A* необходимо *B*», «*A* только тогда, когда *B*», «пусть *A*, тогда *B*». К импликации приводят выражения, содержащие слова «необходимо» и «достаточно».

Пример 1.7. A = Пошел дождь, B = На небе тучи. Новое высказывание «*Чтобы пошел дождь, необходимо на небе наличие туч*» записывается как $A \to B$. Левая часть этого высказывания – посылка (условие), правая – заключение (следствие). Говорят, если *A*, то *B*; *A* имплицирует *B*; *A* влечет *B*; *B* следует из *A*.

Импликация двух высказываний ложна тогда и только тогда, когда из истинного высказывания следует ложное (когда истинная предпосылка ведет к ложному выводу). Истинность импликации при ложной посылке означает, что из неверной посылки может следовать что угодно.

Высказывание «*Чтобы пошел дождь, достаточно на небе туч*» записывается так: $B \to A$. Можно сделать вывод о том, что необходимые условия записываются в качестве заключения, справа, а достаточные условия записываются в формуле слева, в качестве посылки.

Большинство математических теорем являются импликациями.

Замечание 1.2. Некоторые выражения разговорного языка по форме напоминают импликацию, а по содержанию требуют записи в виде конъюнкции. Например: «*Если в планиметрии изучают плоские фигуры, то в стереометрии изучают трехмерные геометрические тела*».

Импликация также функция двух логических переменных, например, a и b. Операцию, соответствующую функции импликации, также называют импликацией и обозначают $f(a,b) = a \to b$ (таблица истинности – табл. 1.6). Функция *запрета* (*отрицание импликации*) является обратной к функции импликации.

Таблица 1.6

Таблица истинности функции импликация

a	b	$a \to b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

1.3. Законы алгебры логики и правила преобразования логических выражений

1.3.1. Логические константы, переменные, выражения и функции

Сложные (составные) логические выражения (формулы) строятся из логических операндов, знаков логических операций и скобок. В качестве логических операндов могут выступать логические константы и переменные, а также отношения (сравнения) между двумя величинами.

В общем случае в качестве логических операндов могут выступать любые объекты, которые могут принимать одно из двух возможных значений.

Буквы, обозначающие высказывания (*A, B, ...*), можно рассматривать как имена логических переменных, так как ими можно заменить любые высказывания (с любым содержанием).

Логическое выражение $(A \vee B) \to C$ при *A = Вы пользуетесь последними версиями антивирусных программ*; *B = Вы регулярно сохраняете свои файлы на флэшке*; *C = Снижается вероятность потери данных* превращается в высказывание *E = Если Вы пользуетесь последними версиями антивирусных программ или регулярно сохраняете свои файлы на флэшке, то снижается вероятность потери данных*.

Результат операции отношения (знаки операций отношения: >, <, ≤, ≥, =, ≠) принимает значение ИСТИНА (TRUE или 1), если условие выполняется, и ЛОЖЬ (FALSE или 0), если условие не выполняется. Отношения можно интерпретировать как простые высказывания, которые могут быть истинными или ложными. В качестве компонентов отношения могут выступать арифметические и символьные выражения.

Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении (*приоритеты операций* приведены в порядке их понижения):

отрицание;
конъюнкция;
дизъюнкция;
импликация;
неравнозначность;
эквивалентность.

В выражении $\overline{a \vee b \wedge c}$ сначала выполняется конъюнкция, потом дизъюнкция, а потом уже отрицание, так как отрицание относится к результату вычисления $a \vee b \wedge c$.

Замечание 1.3. Порядок выполнения логических операций может быть изменен скобками.

Операции отношения заключаются в круглые скобки. При этом до сравнения вычисляются значения арифметических и символьных выражений.

Пример 1.8. Вычислить значение выражения $(a+b<c) \vee (a=c) \wedge (b<10)$ при $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$.

Порядок выполнения действий при вычислении значения данного логического выражения указан цифрами под фигурными скобками:

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{a+b}_{1}<c)}_{2} \vee \underbrace{(\underbrace{a=c}_{3}) \wedge (\underbrace{b<10}_{4})}_{5}}_{6}$$

1) $a+b=3$;

2) $3<4 \Rightarrow$ ИСТИНА ;

3) $a=c \Rightarrow$ ЛОЖЬ;

4) $b<10 \Rightarrow$ ИСТИНА ;

5) ЛОЖЬ $\wedge$ ИСТИНА $\Rightarrow$ ЛОЖЬ;

6) ИСТИНА $\vee$ ЛОЖЬ $\Rightarrow$ ИСТИНА.

Различные логические формулы могут быть эквивалентными. Это можно проверить двумя путями.

Первый путь, достаточно сложный, заключается в последовательном преобразовании одной или обеих формул с использованием законов алгебры логики. Цель преобразований – привести обе формулы к одному и тому же виду.

Второй путь более простой, но при большом количестве входящих в выражение логических переменных громоздкий. Он состоит в построении таблиц истинности для обеих формул вручную или с использованием компьютера (с помощью *MS Excel* или какого-либо языка программирования).

Логические функции могут иметь один, два или более аргументов. Например, функция $f(a,b)=a \vee b$ – логическая функция двух переменных, а $p(a,b,c)=(a \vee b) \rightarrow c$ – логическая функция трех переменных.

Пример 1.9. Составить таблицу истинности функции двух логических переменных $y(a,b)=(a\rightarrow\bar{b})\vee(a\leftrightarrow b)$.

Порядок выполнения действий определяется скобками. Сначала должна выполняться операция отрицания, затем импликация (результат обозначим вспомогательной переменной p), потом эквивалентность (результат – r), а после этого – дизъюнкция.

Заполним таблицу истинности (табл. 1.7). Для этого наборы значений аргументов a и b зададим как двоичные числа в порядке их возрастания.

Таблица 1.7

Таблица истинности функции $y(a,b)=(a\rightarrow\bar{b})\vee(a\leftrightarrow b)$

a	b	$\bar{b}$	$p=a\rightarrow\bar{b}$	$r=a\leftrightarrow b$	$y=p\vee r$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1

Получился интересный результат: значение функции равно константе.

Замечание 1.4. Для таблицы истинности функции трех переменных надо использовать восемь наборов исходных данных (2^3 = 8), для функции четырех переменных – 16 наборов (2^4 = 16). Записывать их надо в порядке возрастания двоичных чисел, которые эти наборы образуют.

Замечание 1.5. Число наборов для k переменных равно 2^k. Наборы входных переменных, во избежание ошибок, рекомендуется вводить так:

1) разделить столбец значений первой переменной пополам и заполнить верхнюю часть колонки ЛОЖЬ, а нижнюю – ИСТИНА;

2) разделить столбец значений второй переменной на четыре части и заполнить четверти чередующимися группами ЛОЖЬ и ИСТИНА, начиная с группы ЛОЖЬ;

3) продолжить деление столбцов значений последующих переменных на 8, 16 и т. д. частей и заполнение их группами ЛОЖЬ и ИСТИНА до тех пор, пока группа ЛОЖЬ (ИСТИНА) не будет состоять из одного символа.

1.3.2. Законы алгебры логики и их применение

Логические выражения называются *равносильными*, если их истинностные значения совпадают при любых значениях входящих в них логических переменных.

В алгебре логики имеется ряд законов, позволяющих производить равносильные преобразования логических выражений (табл. 1.8).

Таблица 1.8

Законы алгебры логики

Законы	Формулировка законов
1	2
Переместительные (коммутативные)	$a \vee b = b \vee a$; $a \wedge b = b \wedge a$
Сочетательные (ассоциативные)	$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
Распределительные (дистрибутивные)	$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$
Де Моргана (закон общей инверсии)	$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$; $\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$
Идемпотентности (равносильности)	$a \vee a = a$; $a \wedge a = a$
Исключения констант	$a \vee 1 = 1$; $a \vee 0 = a$ $a \wedge 1 = a$; $a \wedge 0 = 0$
Противоречия	$a \wedge \overline{a} = 0$
Исключенного третьего	$a \vee \overline{a} = 1$
Поглощения	$a \vee (a \wedge b) = a; a \vee (\overline{a \wedge b}) = a \vee b$ $a \wedge (a \vee b) = a; a \wedge (\overline{a \vee b}) = a \wedge b$
Исключения (склеивания)	$(a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge b) = b$ $(a \vee b) \wedge (\overline{a} \vee b) = b$
Двойного отрицания	$a = \overline{\overline{a}}$

Окончание табл. 1.8

1	2
Контрапозиции (правило перевертывания)	$a \to b = \bar{b} \to \bar{a}$
Правило замены операции импликации	$a \to b = \bar{a} \vee b$
Правило замены операции эквивалентности	$a \leftrightarrow b = \bar{a} \wedge \bar{b} \vee a \wedge b$
Правило замены операции неравнозначности	$a \oplus b = \bar{a} \wedge b \vee a \wedge \bar{b}$

Замечание 1.6. Некоторые скобки в табл. 1.8 не нужны, они поставлены только для повышения наглядности.

Замечание 1.7. Закон дистрибутивности отличается от подобного закона в обычной алгебре: за скобки можно выносить не только общие множители, но и общие слагаемые.

Доказать любой закон алгебры логики или равносильность двух логических выражений можно разными способами. Например, можно построить таблицу истинности для левой и правой частей равенства. Можно выполнить эквивалентные преобразования над левой и правой частями равенства для приведения их к одному виду. Можно составить цепочку правильных логических рассуждений.

Упрощение сложных логических выражений – это замена их на равносильные на основе законов алгебры логики с целью получения выражения более простой формы.

Замечание 1.8. Последовательность шагов применения законов алгебры логики при упрощении выражений может быть не единственная.

Упростим, например, выражение $(a \to \bar{b}) \vee (a \leftrightarrow b)$, определяющее функцию из примера 1.9. Согласно правилам замены импликации и равнозначности имеем:

$$(a \to \bar{b}) \vee (a \leftrightarrow b) = (\bar{a} \vee \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \vee a \wedge b). \qquad (1.1)$$

В выражении (1.1) опустим ненужные скобки (см. п. 1.3.1) и применим к нему (для его части $\bar{b} \vee \bar{a} \wedge \bar{b}$) закон поглощения для дизъюнкции:

$$\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{a} \wedge \bar{b} \vee a \wedge b = \bar{a} \vee \bar{b} \vee a \wedge b. \qquad (1.2)$$

Применим к части $\bar{a} \vee \bar{b}$ выражения (1.2) закон де Моргана:

$$\bar{a} \vee \bar{b} \vee a \wedge b = \overline{a \wedge b} \vee a \wedge b. \qquad (1.3)$$

На основании закона исключения третьего получаем результат:

$$\overline{a \wedge b} \vee a \wedge b = 1. \qquad (1.4)$$

Такой же результат был получен ранее составлением таблицы истинности.

1.3.3. Задания

Задание 1.1. В соответствии с номером варианта вычислить значения логических выражений (табл. 1.9), используя таблицы истинности логических функций и порядок выполнения действий. Использовать порядок выполнения действий, приведенный в п. 1.3.1, а в качестве образца – пример 1.8.

Таблица 1.9

Номер варианта	Значения переменных						Логические выражения	
	логические			числовые			выражение 1	выражение 2
	a	b	c	d	e	f		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	1	1	2	3	$\bar{a} \wedge b \vee c$	$(2d > 3e) \wedge (3e > f + 2)$
2	0	0	1	2	1	3	$a \vee \bar{b} \wedge c$	$(3d > 2e) \vee (3e = f + 1)$
3	0	1	1	5	5	7	$a \vee \bar{b} \wedge \bar{c}$	$(d = e) \wedge (3e < 2f + 1)$
4	1	0	0	6	3	4	$\overline{a \vee b} \wedge c$	$(d + e > f + 1) \vee (3f > 5)$
5	0	1	0	2	2	3	$a \wedge (\bar{b} \vee \bar{c})$	$(d + 3e > 3f) \wedge (f > 2)$
6	1	0	1	1	2	3	$a \wedge (\bar{b} \vee c)$	$(d = e) \vee (d = f) \vee (e = f)$
7	0	0	1	2	1	3	$a \wedge (b \vee \bar{c})$	$(d > e) \vee (d > f) \vee (e > f)$
8	0	1	1	5	5	7	$a \wedge \overline{b \vee c}$	$(d < e) \vee (d < f) \vee (e < f)$
9	1	0	0	6	3	4	$\overline{a \wedge b \vee c}$	$(d > e) \wedge (d > f) \wedge (e > f)$

Окончание табл. 1.9

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0	1	0	2	2	3	$\overline{a \wedge b} \vee \overline{c}$	$(d < e) \wedge (d < f) \wedge (e < f)$
11	1	0	1	1	2	3	$\overline{a} \wedge \overline{b} \vee c$	$(d > e) \vee (d > f) \wedge (e > f)$
12	0	0	1	2	1	3	$a \wedge \overline{b} \vee \overline{c}$	$(d < e) \vee (d > f) \wedge (e > f)$
13	0	1	1	5	5	7	$\overline{a} \wedge \overline{b \vee c}$	$(e > f) \vee (e > d) \vee (d = f)$
14	1	0	0	6	3	4	$\overline{a} \wedge \overline{b} \vee \overline{c}$	$(e > f) \wedge (e > d) \vee (d = f)$
15	0	1	0	2	2	3	$\overline{a} \wedge (b \vee c)$	$(d = 2) \wedge (e = 2) \wedge (3d = 3f)$

Задание 1.2. В соответствии с номером варианта выполнить упрощение логического выражения (табл. 1.10).

Таблица 1.10

Номер варианта	Логические выражения для упрощения
1	2
1	$\overline{x \vee y} \wedge x \wedge \overline{y}$
2	$\overline{x} \wedge y \vee \overline{x \vee y} \vee x$
3	$(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$
4	$x \wedge y \wedge z \vee x \wedge y \wedge \overline{z} \vee x \wedge y$
5	$x \wedge y \vee x \wedge y \wedge z \vee x \wedge z \wedge p$
6	$x \vee \overline{y \wedge \overline{z}} \vee \overline{\overline{x} \vee y \vee \overline{z}}$
7	$x \wedge \overline{y} \vee x \wedge y \wedge z \vee x \wedge \overline{y} \wedge z \vee x \wedge \overline{y \wedge z}$
8	$x \wedge y \wedge (\overline{x} \wedge z \vee \overline{\overline{x \wedge y} \wedge z} \vee z \wedge t)$
9	$\overline{\overline{y \vee z} \vee \overline{x \vee z} \vee x \wedge y}$
10	$\overline{\overline{x} \vee \overline{y} \wedge (x \vee z) \vee y \wedge \overline{x \vee z}}$
11	$x \wedge y \wedge z \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$
12	$x \wedge y \vee x \wedge \overline{y} \wedge z \vee x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$

Окончание табл. 1.10

1	2
13	$x \wedge y \vee x \wedge y \wedge (z \vee p)$
14	$x \vee y \wedge \overline{x \vee y} \wedge z \wedge p$
15	$x \vee y \vee \bar{x} \vee y \vee z \wedge p$
16	$(x \vee y) \wedge (x \vee y \vee z)$

2. ПРИМЕНЕНИЕ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

2.1. Решение текстовых логических задач

2.1.1. Методика решения логических задач

Исходными данными в логических задачах являются не только числа, но и высказывания. Эти высказывания и взаимосвязи между ними бывают так сложны, что разобраться в них без использования алгебры логики достаточно трудно.

Для решения таких задач часто прибегают к помощи таблиц или графов. При этом успешность решения во многом зависит от удачно выбранной структуры таблицы или графа. Решение логической задачи с помощью таблицы или графа может быть простым и наглядным. Аппарат же алгебры логики позволяет построить формальный универсальный (но часто очень громоздкий) способ решения логических задач. Он получил широкое распространение при появлении компьютеров, так как появилась возможность рутинную работу по определению истинности сложных высказываний переложить на них.

Структура логических задач может быть различной. Различными бывают и подходы к решению. Рассмотрим некоторые из приемов, которые приходится использовать, чтобы получить решение задачи.

Формальный способ решения логических задач предполагает несколько шагов.

1. Выделить из условия задачи элементарные (простые) высказывания и обозначить их буквами.

2. Записать условие задачи на языке алгебры логики, соединив простые высказывания в сложные с помощью логических операций.

3. Составить единое логическое выражение для всех требований задачи (иногда единое выражение составлять не требуется).

4. Используя таблицы истинности логических операций, построить таблицу истинности для рассматриваемого выражения (или таблицы для отдельных сложных выражений).

5. Выбрать решение – набор значений простых высказываний, при котором построенное логическое выражение является истинным (или выполняется условие истинности отдельных сложных высказываний).

6. Проверить, удовлетворяет ли полученное решение условию задачи.

Замечание 2.1. Логическая задача может иметь не одно, а несколько решений. При этом построенное логическое выражение является истинным для нескольких наборов значений простых высказываний.

2.1.2. Примеры

Первые три шага формального способа решения логической задачи составляют этап формализации задачи. Этот этап наиболее интересный, но и самый трудный. На этом этапе желательно по возможности не вводить лишних переменных, которые будут увеличивать длину наборов аргументов и усложнять формулы функций. Например, пару высказываний – *тепло* и *холодно* – обозначить одной переменной. Это можно сделать, если не может быть третьего варианта – *прохладно*.

Иногда задано или получено в процессе решения задачи несколько простых или сложных высказываний, истинность которых известна. В этом случае обычно достаточно взять конъюнкцию этих высказываний и определить набор простых высказываний, на котором эта конъюнкция принимает значение ИСТИНА (см. пример 2.1). Этот набор и будет решением задачи. Решение может отсутствовать, и решений может быть несколько.

Пример 2.1. На вопрос, кто из трех студентов изучал логику, был получен ответ: «Если изучал первый, то изучал и второй, но неверно, что если изучал третий, то изучал и второй». Кто из студентов изучал логику?

Для решения этой задачи обозначим *P1, P2, P3* простые высказывания, что соответственно первый, второй, третий студенты изучали логику. Из условия задачи следует истинность высказывания $(P1 \to P2)\,\&\,\overline{(P3 \to P2)}$. Строим таблицу истинности для полученного выражения (табл. 2.1).

Из таблицы истинности видно, что логику изучал только третий студент.

Т а б л и ц а 2.1

Таблица истинности функции $(P1 \to P2)\,\&\,(\overline{P3 \to P2})$

$P1$	$P2$	$P3$	$P1 \to P2$	$\overline{P3 \to P2}$	$(P1 \to P2)\,\&\,(\overline{P3 \to P2})$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

Замечание 2.2. Может быть задано или получено несколько высказываний, о которых сказано, что из них только некоторое количество высказываний истинно. В этом случае организуется перебор вариантов. Например, заданы высказывания A и B, о которых известно, что из них только одно истинно. В этом случае записывают следующую результирующую функцию: $F = A \wedge \overline{B} \vee \overline{A} \wedge B$.

Если заданы высказывания A, B, C, D, из которых только одно истинно, то это соответствует следующей формуле:

$$F = A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge \overline{D} \vee \overline{A} \wedge B \wedge \overline{C} \wedge \overline{D} \vee \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C \wedge \overline{D} \vee \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge D. \quad (2.1)$$

Если сказано, что из этих высказываний истинны лишь какие-то два, то имеем результирующую формулу:

$$\begin{aligned} F = A \wedge B \wedge \overline{C} \wedge \overline{D} \vee A \wedge \overline{B} \wedge C \wedge \overline{D} \vee A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge D \vee \overline{A} \wedge B \wedge C \wedge \overline{D} \vee \\ \vee \overline{A} \wedge B \wedge \overline{C} \wedge D \vee \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C \wedge D. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Пример 2.2. В соревнованиях по гимнастике участвуют Алла, Валя, Сима и Даша. Болельщики высказали предположения о возможных победителях:

1) первой будет Сима, Валя – второй;

2) второй будет Сима, Даша – третьей;

3) Алла будет второй, Даша – четвертой.

По окончании соревнований оказалось, что в каждом из предположений только одно высказывание истинно, а другое ложно.

Какое место на соревнованиях заняла каждая из девушек, если все они оказались на разных местах?

Обозначим простые высказывания буквами соответственно *A* (*первой будет Сима*), *B* (*второй будет Валя*), *C* (*второй будет Сима*), *D* (*третьей будет Даша*), *E* (*второй будет Алла*), *F* (*четвертой будет Даша*).

Так как только одно из высказываний в каждом из предположений истинно, то имеем неравнозначность: $X1 = A \oplus B,\ X2 = C \oplus D,\ X3 = E \oplus F.$

Кроме того, ложными будут высказывания: $X4 = A \wedge C,\ X5 = B \wedge C,$ $X6 = D \wedge F,\ X7 = B \wedge E,\ X8 = C \wedge E,$ а, следовательно, истинными: $Y4 = \overline{A \wedge C},$ $Y5 = \overline{B \wedge C},\ Y6 = \overline{D \wedge F},\ Y7 = \overline{B \wedge E},\ Y8 = \overline{C \wedge E}.$

Соединяя первую группу истинных высказываний в $Z1$, а вторую в $Z2$, получим: $Z1 = X1 \wedge X2 \wedge X3, Z2 = Y4 \wedge Y5 \wedge Y6 \wedge Y7 \wedge Y8.$ Результирующая функция $Z = Z1 \wedge Z2$, остается построить таблицу истинности функции Z.

К задачам, не требующим составления общей результирующей функции, относится пример 2.3.

Пример 2.3. Подразделения *A*, *B*, *C* торговой фирмы стремились получить по итогам года максимальную прибыль. Экономисты высказали следующие предположения:

1) *A* получит максимальную прибыль только тогда, когда получат максимальную прибыль *B* и *C*;

2) либо *A* и *C* получат максимальную прибыль одновременно, либо одновременно не получат;

3) для того чтобы подразделение *C* получило максимальную прибыль, необходимо, чтобы и *B* получило максимальную прибыль.

По завершении года оказалось, что одно из трех предположений ложно, а остальные два истинны. Какие из названных подразделений получили максимальную прибыль?

Для решения задачи обозначим простые высказывания:

A = Подразделение A получит максимальную прибыль;

B = Подразделение B получит максимальную прибыль;

C = Подразделение C получит максимальную прибыль.

Запишем на языке алгебры логики прогнозы, высказанные экономистами:

1) $F1 = A \to B \wedge C$;

2) $F2 = A \wedge C \vee \overline{A} \wedge \overline{C}$;

3) $F3 = C \to B$.

Теперь надо составить таблицу истинности для $F1$, $F2$, $F3$. По условию задачи один из прогнозов оказался ложным, а остальные два – истинными. По таблице истинности следует выбрать строку (или строки), содержащую одно значение ЛОЖЬ и два значения ИСТИНА.

2.1.3. Задания

Задание 2.1. Пусть в некотором конкурсе решается вопрос о допуске того или иного участника к следующему туру тремя членами жюри – *P, Q, R*. Решение положительно тогда и только тогда, когда хотя бы двое членов жюри высказались за допуск, причем среди них обязательно должен быть председатель жюри *Q*. Необходимо разработать устройство для голосования. Каждый член жюри нажимает на одну из двух кнопок («за» или «против»), результат голосования всех трех членов жюри определяется по тому, загорится сигнальная лампочка (решение принято) или нет (решение не принято).

Формально это можно выразить так: требуется составить таблицу работы и логическую формулу устройства, которое на выходе выдавало бы 1, если участник допускается к следующему туру, и 0, если не допускается.

Задание 2.2. Заданы простые высказывания. Из них составлены сложные высказывания. В соответствии с номером варианта записать сложные высказывания формулами алгебры логики и на языке программирования *VBA*.

Простые высказывания: *N = Ветер северный*; *S = Ветер южный*; *D = Идет дождь*; *C = Идет снег*; *M = На улице мороз*; *O = На улице оттепель*; *T = Температура плюсовая*; *I = На деревьях иней*; *U = На улице туман*; *P = Небо пасмурное*; *Z = Налипание снега на провода*; *G = На дорогах гололедица*.

Таблица 2.2

Номер варианта	Сложное высказывание
1	2
1	На улице мороз, небо пасмурное, но снег не идет
2	На улице температура плюсовая и туман или на деревьях иней

Окончание табл. 2.2

1	2
3	Если северный ветер или не идет снег, то на улице мороз
4	На дорогах нет гололедицы, если дует северный ветер при морозе
5	На улице оттепель или на деревьях иней, если температура плюсовая
6	Для того чтобы шел дождь или снег, необходимо пасмурное небо
7	Для появления на деревьях инея или снега на проводах достаточно пасмурного неба и оттепели
8	Для гололедицы на дорогах необходимо и достаточно наличие плюсовой температуры при северном ветре и тумане
9	Чтобы не было ни снега, ни дождя, необходимо, чтобы небо не было пасмурным
10	На улицах туман или на деревьях иней может быть тогда и только тогда, когда на улице оттепель
11	При южном ветре на улице оттепель только тогда, когда пасмурное небо и плюсовая температура
12	Если дует южный ветер и на улице оттепель, то на деревьях иней, на улице туман и на дорогах гололедица
13	На дорогах нет гололедицы, на деревьях нет инея и на улице нет тумана, если дует северный ветер при морозе
14	Если не дует южный ветер, то на улице нет оттепели, на деревьях нет инея, на улице нет тумана, а на дорогах нет гололедицы
15	Если на улице туман, значит, оттепель и гололедица и дует южный ветер

Задание 2.3. Заданы простые высказывания, из них составлены сложные высказывания, которые записаны формулами алгебры логики. В соответствии с номером варианта запишите сложные высказывания на естественном, разговорном языке.

Простые высказывания: О = *студент отличник*; Е = *студент двоечник*; Т = *студент троечник*; Д = *студент получит хотя бы одну двойку в сессии*; П = *студент получит все пятерки на экзаменах*; Л = *студент пропускает лек-*

ции; А = *студент пропускает лабораторные работы*; Ч = *студента необходимо отчислять*; Р = *студента необходимо рекомендовать на получение материального поощрения*; М = *студент является победителем олимпиад*; К = *студент ходит в кино во время сессии*; Ц = *студент станет грамотным специалистом*; Х = *студент желает учиться*; З = *студент много занимается дополнительно*.

Таблица 2.3

Номер варианта	Формулы для сложного высказывания	
1	$\overline{Л} \wedge \overline{А} \wedge О \to Ц$	$\overline{Х} \leftrightarrow Л \wedge А \vee К \vee \overline{З}$
2	$А \vee Л \vee \overline{З} \to \overline{Х} \wedge Ч$	$Ц \leftrightarrow О \vee \overline{О} \wedge \overline{Л} \wedge \overline{А} \wedge Х \wedge З$
3	$П \to \overline{Л} \wedge \overline{А} \wedge Х \wedge З$	$Х \wedge Ц \leftrightarrow \overline{А} \wedge \overline{Л} \wedge З \wedge \overline{К}$
4	$О \wedge М \wedge З \to Р \wedge Ц$	$Р \leftrightarrow О \wedge З \wedge \overline{К} \wedge М$
5	$Ц \to \overline{Л} \wedge \overline{А} \wedge \overline{К} \wedge З$	$Е \wedge Л \wedge А \wedge \overline{Х} \leftrightarrow \overline{Ц} \wedge Ч$
6	$\overline{О} \wedge Х \wedge З \to \overline{Д}$	$(\overline{О} \wedge \overline{Е}) \wedge (Х \wedge З) \to Ц$
7	$Х \to \overline{Л} \wedge \overline{А} \wedge \overline{К} \wedge З$	$Ц \leftrightarrow \overline{Е} \wedge \overline{Т} \wedge Х \wedge З$
8	$\overline{Л} \wedge \overline{А} \wedge З \to \overline{Ч}$	$О \wedge \overline{М} \to \overline{Р} \wedge Х \wedge Ц$
9	$Ц \to \overline{Л} \wedge \overline{А} \wedge Х \wedge З$	$М \wedge Р \leftrightarrow О \wedge \overline{К} \wedge Х \wedge \overline{Л} \wedge \overline{А}$
10	$З \wedge \overline{Л} \wedge \overline{А} \wedge М \to Х$	$Т \wedge Ц \leftrightarrow \overline{К} \wedge З \wedge \overline{Л} \wedge \overline{А}$
11	$П \to \overline{Л} \wedge \overline{А} \wedge Х \wedge З \wedge \overline{К}$	$(\overline{Д} \vee \overline{П}) \wedge Х \wedge З \to Ц$
12	$Е \wedge Л \wedge А \wedge К \wedge \overline{Х} \wedge \overline{З} \to \overline{Ц} \wedge Ч$	$\overline{А} \wedge \overline{Л} \wedge \overline{К} \wedge З \to \overline{Д}$
13	$Х \wedge О \to \overline{Л} \wedge \overline{А} \wedge З$	$Ч \leftrightarrow \overline{Х} \wedge Л \wedge А \wedge \overline{З}$
14	$Ц \to О \vee \overline{О} \wedge \overline{Л} \wedge \overline{А} \wedge Х \wedge З$	$П \leftrightarrow \overline{К} \wedge З \wedge \overline{Л} \wedge \overline{А}$
15	$\overline{А} \wedge \overline{Л} \wedge З \to Х \wedge Ц$	$\overline{П} \wedge \overline{О} \to Л \vee А \vee К \vee \overline{З} \vee \overline{Х}$
16	$\overline{Х} \to (Д \vee Л \vee \overline{А} \vee \overline{З}) \wedge Ч$	$\overline{О} \wedge (\overline{Е} \vee \overline{Т}) \wedge Х \wedge З \leftrightarrow Ц$

Замечание 2.3. Лишние скобки в табл. 2.3 поставлены для улучшения читабельности формул задания.

2.2. Применение логических операций при решении задач на ЭВМ

В *MS Excel* есть встроенные логические константы ЛОЖЬ и ИСТИНА и встроенные булевы функции НЕ, И, ИЛИ. Как любые другие функции, логические функции удобно вводить с помощью Мастера функций.

Обозначения логических операций, принятые в *VBA* (*Visual Basic for application*), приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Обозначения логических операций, принятые в *VBA*

Математическое обозначение	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\oplus$	$\leftrightarrow$	$\rightarrow$
Обозначение в *VBA*	NOT	AND	OR	XOR	EQV	IMP

С помощью логических операций NOT, AND, OR, XOR, EQV и IMP из простых отношений можно строить сложные, составные конструкции и использовать их в качестве сложных условий, например, в операторах *if*. Порядок выполнения действий приведен в п. 1.3.1.

2.2.1. Примеры

Пример 2.4. Составим таблицу истинности для функции из примера 1.9 $y(a,b)=(a\rightarrow\overline{b})\vee(a\leftrightarrow b)$ с помощью *MS Excel*.

Можно сразу задать выражение для функции $y(a,b)$, но удобнее (как сделано в п. 1.3.1) разбить выражение на отдельные части. Выразим значения вспомогательных переменных p и r через булевы функции: $p=a\rightarrow\overline{b}=\overline{a}\vee\overline{b}$, $r=a\leftrightarrow b=\overline{a}\wedge\overline{b}\vee a\wedge b$.

Таблица истинности в *MS Excel* в режиме отображения формул представлена на рис. 2.1, а в режиме отображения значений – на рис. 2.2.

	A	B	C	D	E
1					
2	a	b	$p=\overline{a}\vee\overline{b}$	$r=\overline{a}\wedge\overline{b}\vee a\wedge b$	$y=p\vee r$
3	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	=ИЛИ(НЕ(A3);НЕ(B3))	=ИЛИ(И(НЕ(A3);НЕ(B3));И(A3;B3))	=ИЛИ(C3;D3)
4	ЛОЖЬ	ИСТИНА	=ИЛИ(НЕ(A4);НЕ(B4))	=ИЛИ(И(НЕ(A4);НЕ(B4));И(A4;B4))	=ИЛИ(C4;D4)
5	ИСТИНА	ЛОЖЬ	=ИЛИ(НЕ(A5);НЕ(B5))	=ИЛИ(И(НЕ(A5);НЕ(B5));И(A5;B5))	=ИЛИ(C5;D5)
6	ИСТИНА	ИСТИНА	=ИЛИ(НЕ(A6);НЕ(B6))	=ИЛИ(И(НЕ(A6);НЕ(B6));И(A6;B6))	=ИЛИ(C6;D6)

Рис. 2.1. Таблица истинности в *MS Excel* (в режиме отображения формул)

	A	B	C	D	E
1					
2	a	b	$p = \overline{a} \vee \overline{b}$	$r = \overline{a} \wedge \overline{b} \vee a \wedge b$	$y = p \vee r$
3	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА
4	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА
5	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА
6	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА

Рис. 2.2. Таблица истинности в *MS Excel* (в режиме отображения значений)

Получили тот же результат: константа ИСТИНА.

Пример 2.5. *VBA*-программа решения задачи 2.1 приведена на рис. 2.3. Исходные данные для нее вводятся вручную в ячейки таблицы *MS Excel* до запуска программы на выполнение, результат счета (таблица истинности результирующего выражения) выводится в ячейки этой же таблицы (рис. 2.4).

На рис. 2.3 исходные данные выделены полужирным курсивом, а обычным шрифтом – результат выполнения *VBA*-программы.

```
Sub Primer_8()
   Dim P1 As Boolean, P2 As Boolean, P3 As Boolean, i As Byte
   For i = 2 To 9                     ' Начиная со 2-й строки таблицы MS Excel
      P1 = Cells(i, 1)                ' считываем наборы значений аргументов
      P2 = Cells(i, 2)                ' (столбцы A, B, C), вычисляем значения
      P3 = Cells(i, 3)                ' результирующей функции и записываем
      Cells(i, 4) = (P1 Imp P2) And Not (P3 Imp P2)        ' их в столбец D
   Next i
End Sub
```

Рис. 2.3. *VBA*-программа решения примера 2.3

	A	B	C	D
1	***P1***	***P2***	***P2***	$(P1 \to P2) \wedge \overline{(P3 \to P2)}$
2	***FALSE***	***FALSE***	***FALSE***	ЛОЖЬ
3	***FALSE***	***FALSE***	***TRUE***	ИСТИНА
4	***FALSE***	***TRUE***	***FALSE***	ЛОЖЬ
5	***FALSE***	***TRUE***	***TRUE***	ЛОЖЬ
6	***TRUE***	***FALSE***	***FALSE***	ЛОЖЬ
7	***TRUE***	***FALSE***	***TRUE***	ЛОЖЬ
8	***TRUE***	***TRUE***	***FALSE***	ЛОЖЬ
9	***TRUE***	***TRUE***	***TRUE***	ЛОЖЬ

Рис. 2.4. Результаты счета

Из таблицы истинности функции $(P1 \to P2)\,\&\,\overline{(P3 \to P2)}$ видно, что логику изучал только третий студент. Это совпадает с теоретическими расчетами.

2.2.2. Задания

Задание 2.4. Написать *VBA*-программу для решения примера 1.9.

Задание 2.5. Решить с помощью *MS Excel* задачу из примера 2.1.

Задание 2.6. Решить с помощью *MS Excel*, а также программируя на *VBA*, задачу из примера 2.3. (Ответ: A = ЛОЖЬ, B = ИСТИНА, C = ИСТИНА.)

Задание 2.7. Используя в качестве образца примеры 2.1, 2.2 и 2.3, необходимо решить следующую задачу:

Студент попросил троих друзей угадать характеристики задуманного им целого числа из набора: положительное или отрицательное, четное или нечетное, состоящее из двух цифр или состоящее из другого количества цифр. Первый друг сказал, что если это число четное, то оно положительное. Второй предположил, что задуманное число четное или из двух цифр и положительное. Третий был уверен, что если это число положительное, то оно нечетное. Оказалось, что все три друга правы. Их высказывания истинны. Чем характеризовалось задуманное число?

Указание. Сначала надо ввести обозначения простых высказываний: A = *Число положительное*, $\overline{A}$ = *Число отрицательное*, B = *Число четное*, $\overline{B}$ = *Число нечетное*, C = *Число двузначное*, $\overline{C}$ = *Число не двузначное*.

Далее, используя введенные обозначения, записать сложные высказывания $F1$, $F2$, $F3$ всех трех отгадчиков, итоговую функцию $F = F1 \wedge F2 \wedge F3$, составить *VBA*-программу, выводящую таблицу истинности F. Если задача будет решена верно, то в ответе получится: A = ИСТИНА, B = ЛОЖЬ, C = ИСТИНА.

Задание 2.8. Решить задачу.

Компьютер вышел из строя (нет изображения на экране монитора), однако неизвестно, какое устройство не работает (монитор, видеокарта или оперативная память). Можно предположить следующее:

1) если монитор исправен или видеокарта неисправна, то оперативная память неисправна;

2) если монитор исправен, то оперативная память исправна.

Исправен ли монитор?

Задание 2.9. В одной из аудиторий института находится кабинет физики, а в другой – кабинет информатики. На дверях обеих аудиторий шутники повесили таблички, про которые известно, что либо они обе истинны, либо обе ложны. На первой аудитории повесили табличку «По крайней мере в одной из этих аудиторий размещается кабинет информатики», а на второй аудитории – табличку с надписью «Кабинет физики находится в другой аудитории». Определите, какой кабинет располагается в каждой из аудиторий.

а) Написать *VBA*-программу решения задачи.

б) Сделать устное решение задачи. Для этого следует поочередно выдвинуть две гипотезы и путем умозаключений доказать истинность одной и ложность другой.

Библиографический список

1. Могилев А. В. Информатика. Учебное пособие / А. В. Могилев, Н. И. Пак, Е. К. Хеннер. М.: Академия, 2008. 848 с.

2. Могилев А. В. Практикум по информатике. Учебное пособие / А. В. Могилев, Н. И. Пак, Е. К. Хеннер. М.: Академия, 2008. 608 с.

3. Лихтарников Л. М. Математическая логика: Курс лекций. Задачник-практикум и решения: Учебное пособие / Л. М. Лихтарников, Т. Г. Сукачева. СПб: Лань, 2008. 288 с.

4. Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов. СПб: Лань, 2004. 400 с.

5. Соколовская Н. Н. Системы счисления / Н. Н. Соколовская / Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2008. 32 с.

Учебное издание

ЕРОШЕНКО Александра Викторовна

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

Часть 2

ОСНОВЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ. РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Редактор Н. А. Майорова
Корректор И. А. Сенеджук

***

Подписано в печать .06.2014. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 2,3.
Тираж 1000 экз. Заказ .

**

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35