Л. А. ЛИТНЕВСКИЙ, Ю. М. СОСНОВСКИЙ

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ В ЛАБОРАТОРНОМ ПРАКТИКУМЕ ПО ФИЗИКЕ

ОМСК 2022

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

Л. А. Литневский, Ю. М. Сосновский

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ В ЛАБОРАТОРНОМ ПРАКТИКУМЕ ПО ФИЗИКЕ

Утверждено методическим советом университета
в качестве учебно-методического пособия
к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Физика»

Омск 2022

УДК 53.08(075.8)
ББК 22.31я73
Л64

Обработка экспериментальных результатов в лабораторном практикуме по физике: Учебно-методическое пособие к выполнению лабораторных работ/ Л. А. Литневский, Ю. М. Сосновский; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2022. 31 с.

Рассмотрены основные правила и порядок физических измерений, оценки погрешностей окончательных результатов, даны рекомендации по приближенным вычислениям и графическому представлению результатов измерений, приведены практические задания и конкретные примеры расчета погрешностей.

Предназначено для студентов первого и второго курсов очной и заочной форм обучения.

Библиогр.: 4 назв. Табл. 2. Рис. 1. Прил. 5.

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, профессор Г. И. Косенко;
канд. техн. наук, доцент А. В. Тарасенко.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Одной из форм фундаментальной подготовки студентов технических вузов является лабораторный практикум по физике, цель которого – закрепить знания студентов по курсу физики, познакомить их с основами эксперимента, приобрести навыки практического применения изучаемых физических явлений и законов, а также работы с простейшими наиболее распространенными измерительными приборами.

Всю информацию об изучаемом физическом явлении или процессе экспериментатор извлекает из числовых данных, полученных в результате измерений. Великий русский ученый Д. И. Менделеев так говорил о значении измерений для науки: «Наука начинается с тех пор, как начинают измерять».

Опыт показывает, что ни одно измерение, как бы тщательно оно ни проводилось, не может быть совершенно свободно от ошибок (погрешностей). Именно поэтому важно уметь выявлять причины этих ошибок, рассчитывать и сводить их к минимуму, только в этом случае результат измерения приобретает надежность и достоверность [1].

Другими словами, экспериментальные данные, полученные в процессе измерений и расчетов, приобретают практическую ценность только после их анализа и математической обработки. Анализ данных позволяет подобрать измерительные приборы с необходимой точностью измерений, исключить из дальнейшего рассмотрения грубые ошибки, а математическая обработка – оценить так называемые случайные погрешности, которые с неизбежностью возникают во всех экспериментальных исследованиях.

Правильное представление полученных результатов (прил. 1), включая округление, позволит качественно выполнить последующие расчеты, которые практически всегда дополняют непосредственные измерения, и получить результат, в котором будет отражено не только значение определяемой величины, но и погрешность, с которой это значение получено. В этом заключается цель любого эксперимента.

Цель настоящего учебно-методического пособия – научить студентов обрабатывать результаты измерений, рассчитывать погрешности и анализировать их причины, представлять полученные результаты.

1. ИЗМЕРЕНИЯ И ПОГРЕШНОСТИ

1.1. Виды измерений

Измерение – это экспериментальное определение количественного значения физической величины с помощью специально для этого предназначенных технических средств.

С точки зрения приемов, с помощью которых получается результат измерения, принято различать два основных вида измерений: прямые и косвенные.

При прямых измерениях определяемая величина сравнивается с единицей измерения непосредственно с помощью прибора или инструмента, проградуированного в соответствующих единицах измерения, например, измерение длины линейкой и штангенциркулем, массы на рычажных весах с использованием гирь, интервалов времени с помощью часов и секундомера, температуры термометром и т. д. Очевидно, что не всегда можно определить значение физической величины при помощи прямых измерений.

При косвенных измерениях определяемая величина непосредственно не измеряется, а вычисляется по результатам прямых измерений других величин, которые связаны с измеряемой величиной функциональной зависимостью. Например, скорость равномерного движения можно найти (измерить – в широком смысле этого слова) по результатам измерений длины пройденного пути и времени движения, плотности тела – по данным измерений массы и объема, ускорения свободного падения – по значениям длины математического маятника и времени его колебания и т. д. Таким образом, отличительным признаком косвенных измерений является математическая формула, с помощью которой можно вычислить значение искомой физической величины.

1.2. Типы погрешностей

Произвести измерение физических величин абсолютно точно невозможно, так как вследствие неточности измерительных приборов, неполноты знаний, трудности учета всех побочных явлений и других причин всегда неизбежно возникают погрешности. Итогом обработки результатов измерений является установление пределов, внутри которых заключается точное значение определяемой величины. Теория погрешностей указывает и на то, как следует вести измерения и обработку их результатов, чтобы допущенные ошибки были минимальными.

Погрешности подразделяют на следующие типы (в соответствии с причинами их появления): грубые, систематические, случайные, инструментальные.

Грубые погрешности – это очевидные ошибочные измерения, возникающие в результате небрежности отсчета по прибору, неправильного включения прибора, неверной или неразборчивой записи результатов измерений. Единственный способ выявить грубые ошибки – внимательно проанализировать всю последовательность чисел, полученных в ходе измерений, и те результаты измерений, которые существенно отличаются от остальных, исключить из дальнейшего рассмотрения.

Систематические погрешности при многократном измерении одной и той же величины остаются постоянными или изменяются по определенному закону. Причинами их возникновения могут быть неверная градуировка или смещение шкалы прибора, отличие условий эксперимента от предполагаемых (неучтенное трение, сопротивление соединительных проводов и т. п.), а также недостаточно разработанная теория опыта и приближенность расчетных формул.

Систематические погрешности дают отклонение результата от истинного значения только в одну сторону (в сторону увеличения или уменьшения). Такие погрешности можно учесть и уменьшить путем усовершенствования метода измерения, при введении уточнений или поправок в расчетную формулу, при регулярной проверке измерительных приборов.

Случайные погрешности создаются большим числом причин, действие которых на каждое измерение различно и не может быть заранее учтено. Случайные погрешности зависят от человеческого фактора, непрерывного действия изменяющихся внешних условий (температуры, давления и т. д.). Например, при многократных измерениях слабого тока чувствительным гальванометром получается ряд различных значений измеряемой величины. Это происходит вследствие постоянных сотрясений здания, вызванных движением уличного транспорта, подземными толчками, порывами ветра и т. д. Однако сказать заранее, какой именно причиной вызвано то или иное отклонение, нельзя. Случайные погрешности могут изменять результаты измерений в обе стороны (то увеличивая, то уменьшая их). Полностью избавиться от случайных погрешностей невозможно, однако их можно уменьшить за счет многократного повторения измерений. При этом влияние факторов, приводящих к завышению или к занижению результатов измерений, может частично скомпенсироваться. Оценка случайных погрешностей производится на основе теории вероятностей с помощью среднеквадратичной ошибки.

Инструментальные погрешности обусловлены несовершенством конструкции и неточностью изготовления измерительных приборов и инструментов. Точность прибора – это свойство измерительного прибора, характеризующее степень приближения показаний данного измерительного прибора к истинному значению измеряемой величины.

Инструментальная погрешность, вносимая прибором при каждом отдельном измерении, связана с точностью прибора. Кроме того, приборная погрешность содержит в себе как систематические, так и случайные погрешности. К систематическим погрешностям относят погрешности, связанные со смещением начала отсчета шкалы, с неравномерностью нанесения штрихов шкалы и т. п. В состав инструментальной погрешности входят случайные погрешности, возникшие под действием сил трения в отдельных частях прибора, из-за движения частей прибора в зазорах и т. п. Уменьшение инструментальной погрешности достигается применением более точных приборов и инструментов. Полностью устранить инструментальную погрешность невозможно.

2. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Как показывает опыт, во многих случаях по результатам однократного измерения нельзя с достаточной для практической цели уверенностью судить об истинном значении измеряемой величины. Увеличить надежность результата позволяют многократные измерения. Кроме того, информация, полученная в ходе повторных измерений, позволяет оценить их точность. Поэтому в физике, технике и других областях деятельности проводятся, как правило, серии измерений с последующей их математической обработкой.

Очевидно, что почти все измерения подвержены как случайным, так и систематическим погрешностям. Учет случайных погрешностей совершенно отличен от учета систематических. Благодаря тому, что к случайным погрешностям применимы законы теории вероятностей, можно уменьшить влияние этих погрешностей на окончательный результат измерений. Что касается систематических погрешностей, то порой их трудно даже обнаружить, не говоря об их оценке. В данном учебно-методическом пособии будем рассматривать эксперименты, для которых все источники систематических погрешностей выявлены, а сами погрешности сведены до минимума, т. е. не превышают инструментальной погрешности, вносимой измерительным прибором или инструментом.

2.1. Определение инструментальной погрешности

На шкалах многих измерительных приборов (как правило, электроизмерительных) указывается класс точности. Условным обозначением класса точности является цифра (число), обведенная кружком. Класс точности γ определяет инструментальную погрешность в процентах от наибольшего значения величины, которое может быть измерено данным прибором:

$$\Delta x_{\text{ин}} = \frac{\gamma}{100} \cdot x_{\max}, \tag{2.1}$$

где $x_{\max}$ – верхний предел измерений данной шкалы прибора.

Например, амперметр имеет шкалу от 0 до 5 А, и его класс точности равен 0,5. Инструментальная погрешность измерения силы тока таким амперметром составляет 0,5 % от 5 А, т. е. $\frac{0{,}5\ \%}{100\ \%} \cdot 5\ \text{А} = 0{,}025\ \text{А}$.

Класс точности приборов может иметь следующие значения: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0.

Если класс точности на шкале прибора не указан, то инструментальную погрешность прибора обычно принимают равной половине цены наименьшего деления шкалы прибора, поэтому не следует стремиться снять отсчет с точностью, превышающей половину наименьшего деления шкалы. Например, инструментальная погрешность миллиметровой линейки при измерении длины принимается равной 0,5 мм.

При определении инструментальной погрешности по цене деления необходимо обращать внимание на то, как производится измерение данным прибором, каким образом регистрируются результаты измерения, каково расстояние между соседними штрихами на шкале прибора и т. д. Если, например, измеряется расстояние от пола до подвешенного на нити груза при помощи миллиметровой линейки без каких-либо указателей, визиров и т. п., то инструментальная погрешность измерения не может быть принята меньшей, чем 1 мм. Инструментальная погрешность принимается равной цене деления и в тех случаях, когда деления на шкале прибора нанесены очень часто, когда указателем прибора является не плавно перемещающаяся стрелка, а «скачущая» (как, например, у ручного секундомера) и т. д.

2.2. Расчет погрешности при прямых измерениях

Пусть требуется измерить некоторую величину x.

Проделав измерения многократно, получим ряд из n приближенных значений: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

За наиболее достоверный результат измерения принимают с р е д н е е а р и ф м е т и ч е с к о е з н а ч е н и е:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \tag{2.2}$$

При достаточно большом n (теоретически бесконечном) значение $\langle x \rangle$ совпадает с истинным значением измеряемой величины.

Разности между средним значением $\langle x \rangle$ измеряемой величины и значениями $x_1, x_2, \ldots, x_n$, полученными при отдельных измерениях, т. е.

$$\begin{aligned} &\Delta x_1 = \langle x \rangle - x_1; \\ &\Delta x_2 = \langle x \rangle - x_2; \\ &\ldots \\ &\Delta x_i = \langle x \rangle - x_i; \\ &\ldots \\ &\Delta x_n = \langle x \rangle - x_n, \end{aligned} \tag{2.3}$$

называются а б с о л ю т н ы м и п о г р е ш н о с т я м и о т д е л ь н ы х и з м е р е н и й и могут быть положительными и отрицательными.

Учесть случайные факторы в процессе измерений можно, рассчитав с л у ч а й н у ю п о г р е ш н о с т ь:

$$\Delta x_{\text{сл}} = t_{\alpha,\, n} \cdot S_x = t_{\alpha,\, n} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}{n \cdot (n-1)}} , \tag{2.4}$$

где S_x – среднеквадратичная ошибка в данной серии измерений;

$t_{\alpha,n}$ – коэффициент Стьюдента, определяемый по таблице коэффициентов Стьюдента;

n – количество измерений в серии;

Δx_i – абсолютная погрешность отдельного измерения.

Очевидно, что случайная погрешность зависит от количества измерений n и уменьшается с увеличением числа измерений.

Таблица 2.1

Таблица коэффициентов Стьюдента

Число измерений, *n*	Доверительная вероятность (надежность), α							
	0,5	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,98**	**0,99**
2	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7
3	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9
4	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8
5	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6
6	0,73	0,92	1,2	1,4	2,0	2,6	3,4	4,0
7	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7
8	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5
9	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4
10	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3
11	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
∞	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6

А б с о л ю т н а я п о г р е ш н о с т ь измеряемой величины определяется через случайную и инструментальную погрешность следующим выражением:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\text{сл}}^2 + \Delta x_{\text{ин}}^2}\,. \qquad (2.5)$$

Однако определение одной абсолютной погрешности еще недостаточно для оценки степени точности измерений, так как последняя зависит не только от абсолютной погрешности, но и от значения самой измеряемой величины. Оценить точность измерения можно лишь с помощью относительной погрешности.

О т н о с и т е л ь н а я п о г р е ш н о с т ь показывает, какую долю составляет абсолютная погрешность от истинного значения измеряемой величины:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\ \%. \qquad (2.6)$$

С учетом правил округления и представления результатов (прил. 2) окончательный результат измерений представляется в виде:

$$x = \left(\langle x \rangle \pm \Delta x\right)\ \text{ед. изм.}\quad \text{с}\ \varepsilon_x = \ldots\%\quad \text{при}\quad \alpha = \ldots. \qquad (2.7)$$

Заметим, что обработку результатов прямых измерений и представление результата можно выполнить в тех единицах, в которых производились измерения (например, в граммах, миллиметрах и т. п.).

Зная абсолютную погрешность результата, можно указать д о в е р и т е л ь н ы й и н т е р в а л, в котором находится истинное значение измеряемой величины: $(\langle x\rangle - \Delta x, \langle x\rangle + \Delta x)$. С учетом коэффициента Стьюдента, например, для $t_{0,95,\ 5}$ = 2,8 (α = 0,95, n = 5), выражение (2.7) интерпретируется так: 95 % результатов измерений попадает в пределы указанного д о в е р и т е л ь н г о и н т е р в а л а.

Выполняя лабораторную работу, следует оценивать точность проводимого эксперимента исходя из значений полученных относительных погрешностей. Инженерный расчет (во многих случаях) допускает относительную погрешность до 10 %. Чем выше требования к надежности проектируемого устройства или к достоверности измерений, тем меньше должно быть значение относительной погрешности.

3. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Большинство физических величин обычно нельзя измерить непосредственно, и их определение состоит из двух этапов – прямые измерения одной (x) или нескольких ($x, y, z, \ldots$) величин и последующий расчет искомой величины f по формуле $f = f(x, y, z, \ldots)$.

Следовательно, и оценка погрешностей также включает в себя два этапа. Сначала необходимо оценить погрешность каждой из величин $x, y, z, \ldots$, которые измеряются непосредственно в ходе прямых измерений, а затем определить, как эти погрешности ($\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$) влияют на погрешность конечного результата, т. е. найти Δf.

Отметим, что среди величин $x, y, z, \ldots$ могут содержаться не только непосредственно измеряемые величины, но и т а б л и ч н ы е (значения которых в данном опыте не измеряются, а берутся из таблиц) и так называемые д а н н ы е у с т а н о в к и (некоторые известные ранее характеристики экспериментальной установки, не измеряемые в данном опыте).

Способ оценки погрешностей таких величин изложен в прил. 3.

3.1. Расчет погрешности при косвенных измерениях

Пусть в результате обработки всех непосредственно измеряемых величин $x, y, z, \ldots$ для каждой из них найдены средние значения $\langle x\rangle, \langle y\rangle, \langle z\rangle, \ldots$, погрешности абсолютные $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ и относительные $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \ldots$.

Требуется найти среднее значение $\langle f \rangle$ искомой величины, а также абсолютную Δf и относительную ε_f погрешности.

Среднее значение $\langle f \rangle$ вычисляют при средних значениях величин x, y, z, …, от которых зависит измеряемая величина f, путем их подстановки в расчетную формулу (в «основных» единицах СИ!):

$$\langle f \rangle = f\,(\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle, \ldots). \tag{3.1}$$

Если прямые измерения величин x, y, z, … выполняются независимо и подвержены только случайным погрешностям, то абсолютная погрешность Δf косвенно измеряемой величины f определяется следующим образом:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right)^2 + \ldots}, \tag{3.2}$$

где частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, ... вычисляются при средних значениях $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$, $\langle z \rangle$, …, а количество слагаемых в сумме определяется числом величин, абсолютные погрешности которых найдены (подробнее о частных производных см. в прил. 4).

Из формулы (3.2) следует, что влияние составляющей абсолютной погрешности быстро снижается по мере уменьшения этой составляющей. Поэтому при вычислении абсолютной погрешности косвенного измерения целесообразно сначала вычислить все ее составляющие $\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x,\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y,\ \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z, \ldots\right)$, сравнить их с максимальным значением и затем пренебречь теми, которые меньше максимальной в несколько раз. Кроме того, сравнивая значения составляющих погрешностей, можно выявить значение прямого измерения, которое в наибольшей степени влияет на общую погрешность. При необходимости точность результата этого измерения можно увеличить в целях повышения точности эксперимента в целом.

Относительная погрешность косвенно измеряемой величины f вычисляется известным способом:

$$\varepsilon_f = \frac{\Delta f}{\langle f \rangle} \cdot 100\ \%. \tag{3.3}$$

Затем округляют результаты расчета (см. прил. 2) и записывают окончательный результат измерения в стандартном виде:

$$f = \left(\langle f \rangle \pm \Delta f\right)\cdot 10^{m} \text{ ед. изм. с } \varepsilon_x = \ldots \% \text{ при } \alpha = \ldots. \tag{3.4}$$

Если искомая величина представляет собой выражение вида

$$f(x,y,z) = x^a \cdot y^b \cdot z^c, \tag{3.5}$$

т. е. не содержит операций сложения и вычитания, причем постоянные a, b, c могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, проще сначала найти относительную погрешность ε_f. Действительно, с учетом правила дифференцирования сложной функции, несложно убедиться в том, что

$$\varepsilon_f = \frac{\Delta f}{\langle f \rangle} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\Delta z\right)^2 + \ldots}. \tag{3.6}$$

Чтобы применить выражение (3.6), прологарифмируем формулу (3.5):

$$\ln f = a\ln x + b\ln y + c\ln z. \tag{3.7}$$

Вычисляя частные производные, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln f = \frac{a}{x}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\ln f = \frac{b}{y}; \quad \frac{\partial}{\partial z}\ln f = \frac{c}{z}. \tag{3.8}$$

Окончательно формула для определения относительной погрешности примет вид:

$$\varepsilon_f = \sqrt{\left(\frac{a}{\langle x\rangle}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{b}{\langle y\rangle}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{c}{\langle z\rangle}\Delta z\right)^2} = \sqrt{\left(a\varepsilon_x\right)^2 + \left(b\varepsilon_y\right)^2 + \left(c\varepsilon_z\right)^2}. \tag{3.9}$$

После этого рассчитывают абсолютную погрешность Δf по формуле $\Delta f = \varepsilon_f \cdot \langle f \rangle$ и записывают окончательный результат в стандартном виде (3.4).

3.2. Расчет погрешности при косвенных измерениях, если условия эксперимента невоспроизводимы

Рассмотрим расчет погрешности при косвенных измерениях, если практически невозможно воспроизвести прежние условия проведения эксперимента. В этом случае после проведения многократных прямых измерений величин x, y, z, … для получения окончательного результата, т. е. $\langle f \rangle$, Δf, ε_f, необходимо выполнить действия в следующем порядке:

1) для каждого из значений x_i, y_i, z_i, … вычислить значение f_i косвенно определяемой величины:

$$f_i = f\left(x_i, y_i, z_i, ...\right); \tag{3.10}$$

2) определить среднее значение измеряемой величины:

$$\langle f \rangle = \frac{f_1 + f_2 + ... + f_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i; \tag{3.11}$$

3) вычислить погрешность каждого измерения:

$$\Delta f_i = \langle f \rangle - f_i, \quad i = 1, \ldots, n; \tag{3.12}$$

4) рассчитать случайную погрешность измерений:

$$\Delta f_{\text{сл}} = t_{\alpha,n} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta f_i^2}{n\cdot(n-1)}}; \tag{3.13}$$

5) вычислить погрешность, вносимую различными инструментами в абсолютную погрешность косвенно измеряемой величины (назовем формально эту погрешность инструментальной $\Delta f_{\text{ин}}$):

$$\Delta f_{\text{ин}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x_{\text{ин}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y_{\text{ин}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z_{\text{ин}}\right)^2 + ...}, \tag{3.14}$$

(если расчетная формула имеет вид (3.5), то для расчета «инструментальной» погрешности можно воспользоваться процедурой, описанной в подразд. 3.1 формулами (3.7) – (3.9)).

При этом после нахождения частных производных в полученное выражение (3.14) следует подставить наименьшие из измеренных значений x, y, z, …, приводящие к наибольшей погрешности $\Delta f_{\text{ин}}$;

6) определить абсолютную погрешность:

$$\Delta f = \sqrt{\Delta f_{сл}^2 + \Delta f_{ин}^2}; \tag{3.15}$$

7) рассчитать относительную погрешность:

$$\varepsilon_f = \frac{\Delta f}{\langle f \rangle}\cdot 100\ \%; \tag{3.16}$$

8) произведя округление результатов расчета, записать окончательный результат измерения в виде:

$$f = (\langle f \rangle \pm \Delta f) \cdot 10^m \text{ ед. изм. с } \varepsilon_f = \ldots \text{ \% при } \alpha = \ldots \ . \qquad (3.17)$$

3.3. Расчет погрешности при косвенных измерениях с помощью формул численного дифференцирования

Абсолютную погрешность Δf косвенно измеряемой величины f можно определить без непосредственного вычисления частных производных, используя формулы численного дифференцирования (прил. 5). Полученная на основе выражения (3.2) формула для расчета Δf примет вид:

$$\Delta f = \sqrt{(\Delta f_x)^2 + (\Delta f_y)^2 + (\Delta f_z)^2 + \ldots}, \qquad (3.18)$$

где $\Delta f_x = f(\langle x \rangle + \Delta x, \langle y \rangle, \langle z \rangle, \ldots) - f(\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle, \ldots)$;

$\Delta f_y = f(\langle x \rangle, \langle y \rangle + \Delta y, \langle z \rangle, \ldots) - f(\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle, \ldots)$;

$\Delta f_z = f(\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle + \Delta z, \ldots) - f(\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle, \ldots)$;

$f(\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle, \ldots) = \langle f \rangle$ – среднее значение величины f.

4. ПРИМЕР ИЗМЕРЕНИЯ И РАСЧЕТА ПОГРЕШНОСТИ

Цель измерения: определить объем твердого тела, имеющего форму цилиндра.

Объем V тела можно измерить непосредственно, погружая тело в мензурку с водой. Однако будем считать, что нет возможности прямыми методами измерить объем тела (нет подходящей мензурки). Тогда объем цилиндра вычислим по формуле:

$$V = \frac{\pi d^2 h}{4}, \qquad (4.1)$$

где d и h – диаметр основания и высота цилиндра соответственно, м.

Из формулы (4.1) видно, что необходимы прямые измерения диаметра d основания и высоты h цилиндра.

1) Проведем прямые измерения и их математическую обработку.

При измерении диаметра d основания цилиндра штангенциркулем с ценой деления в 0,1 мм в пяти различных положениях были получены следующие значения (в миллиметрах): 39,6; 39,8; 39,5; 39,6; 39,7.

С учетом цены деления шкалы нониусов штангенциркуля инструментальную погрешность измерения диаметра $\Delta d_{\text{ин}}$ примем равной 0,1 мм.

Проведем математическую обработку результатов прямых измерений диаметра d основания цилиндра:

а) среднее арифметическое значение диаметра

$$\langle d \rangle = \frac{(39,6+39,8+39,5+39,6+39,7)}{5} = 39,64 \text{ мм};$$

б) случайная погрешность измерения диаметра $\Delta d_{\text{сл}}$ с учетом n = 5 и t = 2,8 при α = 0,95

$$\Delta d_{\text{сл}} = 2,8\sqrt{\frac{\left((39,64-39,6)^2+(39,64-39,8)^2+\ldots+(39,64-39,7)^2\right)}{5\cdot(5-1)}} = 0,143 \text{ мм};$$

в) абсолютная погрешность многократных измерений диаметра

$$\Delta d = \sqrt{0,143^2+0,1^2} = 0,174 \approx 0,17 \text{ мм};$$

г) относительная погрешность измерений

$$\varepsilon_d = \frac{0,174}{39,64} = 0,00439 \approx 0,44\%;$$

д) окончательный результат измерения диаметра цилиндра записывается в виде:

d = (39,64 ± 0,17) мм с ε_d = 0,44 % при α = 0,95.

Измерения штангенциркулем высоты цилиндра в пяти различных местах в пределах инструментальной погрешности в 0,1 мм не обнаружили непараллельности оснований цилиндра (это указывает на малые случайные погрешности $\Delta h_{\text{сл}} < \Delta h_{\text{ин}}$).

Результат измерения запишем в виде:

h = (52,9 ± 0,1) мм с ε_h = 0,19 %.

Число π = 3,14 ± 0,005 с ε_π = 0,16 % (в соответствии с прил. 3).

2) Выполним расчет объема цилиндра и математическую обработку результатов косвенных измерений объема цилиндра:

а) действительное значение объема подсчитаем по формуле (4.1), подставив в нее средние значения $\langle\pi\rangle$, $\langle d\rangle$, $\langle h\rangle$:

$$\langle V\rangle = \frac{3{,}14\cdot\left(39{,}64\cdot10^{-3}\right)^2\cdot 52{,}9\cdot10^{-3}}{4} = 6{,}5252\cdot10^{-5}\,\text{м}^3;$$

б) абсолютную погрешность ΔV найдем двумя способами.

Способ 1. Используя формулу (3.2), запишем:

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\Delta\pi\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial d}\Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\Delta h\right)^2}\,. \tag{4.2}$$

Найдем частные производные от V по каждой измеренной величине и подставим их в формулу (4.2):

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\langle d\rangle^2\langle h\rangle}{4}\Delta\pi\right)^2 + \left(\frac{\langle \pi\rangle\langle d\rangle\langle h\rangle}{2}\Delta d\right)^2 + \left(\frac{\langle \pi\rangle\langle d\rangle^2}{4}\Delta h\right)^2}\,. \tag{4.3}$$

Расчет абсолютной погрешности даст следующий результат:

$$\Delta V = \sqrt{\left(2{,}078\cdot10^{-5}\cdot0{,}005\right)^2 + \left(3{,}292\cdot10^{-3}\cdot0{,}174\cdot10^{-3}\right)^2 + \left(1{,}234\cdot10^{-3}\cdot0{,}1\cdot10^{-3}\right)^2} =$$
$$= 5{,}95\cdot10^{-7}\,\text{м}^3.$$

Способ 2. В соответствии с формулой (3.18)

$$\Delta V = \sqrt{\left(\Delta V_\pi\right)^2 + \left(\Delta V_d\right)^2 + \left(\Delta V_h\right)^2}\,, \tag{4.4}$$

где $\Delta V_\pi = \dfrac{\left(\langle\pi\rangle + \Delta\pi\right)\langle d\rangle^2\langle h\rangle}{4} - \langle V\rangle$;

$$\Delta V_d = \frac{\langle\pi\rangle\left(\langle d\rangle + \Delta d\right)^2\langle h\rangle}{4} - \langle V\rangle;$$

$$\Delta V_h = \frac{\langle\pi\rangle\langle d\rangle^2\left(\langle h\rangle + \Delta h\right)}{4} - \langle V\rangle.$$

Подставим в выражение (4.4) числовые значения и получим:

$$\Delta V_{\pi} = \frac{(3{,}14+0{,}005)\cdot\left(39{,}64\cdot10^{-3}\right)^2\cdot52{,}9\cdot10^{-3}}{4} - 6{,}5252\cdot10^{-5} = 1{,}04\cdot10^{-7}\,\text{м}^3;$$

$$\Delta V_{d} = \frac{3{,}14\cdot\left((39{,}64+0{,}174)\cdot10^{-3}\right)^2\cdot52{,}9\cdot10^{-3}}{4} - 6{,}5252\cdot10^{-5} = 5{,}74\cdot10^{-7}\,\text{м}^3;$$

$$\Delta V_{h} = \frac{3{,}14\cdot\left(39{,}64\cdot10^{-3}\right)^2\cdot(52{,}9+0{,}1)\cdot10^{-3}}{4} - 6{,}5252\cdot10^{-5} = 1{,}23\cdot10^{-7}\,\text{м}^3;$$

$$\Delta V = \sqrt{\left(1{,}04\cdot10^{-7}\right)^2+\left(5{,}74\cdot10^{-7}\right)^2+\left(1{,}23\cdot10^{-7}\right)^2} = 5{,}96\cdot10^{-7}\,\text{м}^3.$$

Как видно, вычисленные разными способами значения абсолютной погрешности имеют один и тот же порядок. С учетом правил округления (см. прил. 2) абсолютная погрешность измерения объема

$$\Delta V_{\text{1-й способ}} = 5{,}95\cdot10^{-7}\,\text{м}^3; \qquad \Delta V_{\text{2-й способ}} = 5{,}96\cdot10^{-7}\,\text{м}^3.$$

в) Относительная погрешность результата

$$\varepsilon_V = \frac{5{,}95\cdot10^{-7}}{6{,}525\cdot10^{-5}} = 0{,}00912 \approx 0{,}91\ \%.$$

г) Окончательный результат измерения объема цилиндра с учетом правил округления (см. прил. 2) запишем в виде:

$$V = (6{,}525 \pm 0{,}060)\cdot10^{-5}\ \text{м}^3 \ \text{ с } \ \varepsilon_V = 0{,}91\ \%.$$

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

На итоговом занятии по теории погрешностей необходимо выполнить контрольные задания из табл. 5.1. В каждом задании требуется провести математическую обработку результатов прямых и косвенных измерений (по разрешению преподавателя можно наметить лишь основные этапы расчета, не проводя его).

Таблица 5.1

Примеры контрольных заданий

Номер задания	Измеряемая величина, расчетная формула	Приборы (цена деления, верхний предел, класс точности)	Результат прямых измерений
1	2	3	4
1	Объем цилиндра $V = \dfrac{\pi d^2 h}{4}$	Микрометр (0,01 мм) Штангенциркуль (0,05 мм)	d_i, мм: 1,37; 1,39; 1,38; 1,39; 1,40 h_i, мм: 20,05; 20,10; 20,15; 20,10; 20,20
2	Ускорение падающего груза $a = 2h/t^2$	Масштабная линейка (1 мм) Секундомер (0,2 с)	h_i, см: 87,4; 87,5; 87,3; 87,5; 87,6 t_i, с: 7,7; 7,9; 7,8; 7,6; 7,8
3	Мощность электрического тока $P = I^2R$	Амперметр (10 А; 0,5) Омметр (100 Ом; 0,1)	I_i, А: 7,7; 7,6; 7,8; 7,7; 7,5 R_i, Ом: 56; 54; 56; 57; 55
4	Сопротивление проводника $R = U/I$	Вольтметр (30 В; 0,5) Амперметр (10 А; 0,5)	U_i, В: 10,1; 10,0; 10,2; 10,1; 9,8 I_i, А: 0,21; 0,24; 0,23; 0,21; 0,23
5	Мощность электрического тока $P = U^2/R$	Вольтметр (300 В; 0,2) Омметр (200 Ом; 0,5)	U_i, В: 221; 220; 219; 220; 222 R_i, Ом: 102; 103; 101; 102; 104
6	Напряженность электрического поля $E = U/d$	Вольтметр (150 В; 1,0) Микрометр (0,01 мм)	U_i, В: 137; 135; 136; 138; 136 d_i, мм:1,84; 1,83; 1,84; 1,85; 1,82
7	Действие электрического поля $F = eU/d$	Вольтметр (1000 В; 2,5) Микрометр (0,01 мм)	U_i, В: 976; 975; 976; 977; 974 d_i, мм: 5,02; 5,03; 5,02; 5,01; 5,04
8	Заряд проводника $q = C\varphi$	Измеритель емкости (50 мкФ; 0,5) Вольтметр (300 В; 1,0)	C_i, мкФ: 48; 47; 49; 48; 46 φ_i, В: 125; 124; 126; 125; 123
9	Энергия конденсатора $W_e = \dfrac{1}{2}CU^2$	Измеритель емкости (1000 пФ; 0,1) Вольтметр (150 В; 0,2)	C_i, пФ: 832; 830; 831; 832; 833 U_i, В: 139; 138; 137; 139; 140
10	Количество теплоты $Q = (U^2/R)t$ (R = 5 Ом)	Вольтметр (30 В; 0,05) Секундомер (0,2 с)	U_i, В: 25; 26; 24; 26; 27 t_i, с: 15,9; 15,8; 15,9; 16,0; 15,7
11	Сопротивление медного проводника $R = \dfrac{4\rho_e \ell}{\pi d^2}$	Масштабная линейка (1 мм) Микрометр (0,01 мм)	ℓ_i, мм: 12; 11; 14; 13; 12; d_i, мм: 0,30; 0,29; 0,31; 0,32; 0,30

Окончание табл. 5.1

1	2	3	4
12	Напряженность магнитного поля $H = \dfrac{I}{\pi d}$	Амперметр (1 А; 0,05) Микрометр (0,01)	I_i, А: 0,28; 0,27; 0,28; 0,29; 0,26 d_i, мм: 1,23; 1,22; 1,24; 1,21; 1,23
13	Момент инерции шара $I = \dfrac{md^2}{10}$	Весы (0,1 г) Штангенциркуль (0,1 мм)	m_i, г: 118,4; 117,8; 119,0; 118,3; 118,1 d_i, мм: 44,3; 44,2; 44,3; 44,4; 44,1
14	Магнитный момент $p_m = I \cdot \pi d^2/4$	Амперметр (2 А; 0,02) Штангенциркуль (0,1 мм)	I_i, А: 1,3; 1,2; 1,4; 1,5; 1,3 d_i, мм: 41,45; 41,20; 41,10; 41,25; 41,15
15	Сила Ампера $F_A = BI\ell$ (B = 0,2 Тл)	Амперметр (5 А; 0,2) Штангенциркуль (0,1 мм)	I_i, А: 3,7; 3,6; 3,5; 3,6; 3,4 ℓ_i, мм: 54,4; 54,5; 54,4; 54,3; 54,6

6. ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

В процессе измерений часто приходится иметь дело с физическими величинами, находящимися в некоторой функциональной зависимости друг от друга $\left(y = f(x)\right)$. В качестве примеров приведем линейную зависимость электрического сопротивления R проводника от температуры T: $R(t^\circ) = \alpha\, R_0\, T$, квадратичную зависимость пройденного пути s от времени: $s(t) = \dfrac{at^2}{2} + \upsilon_0 t$ и т. п. Чтобы получить наглядное представление о взаимной связи рассматриваемых величин и их закономерном изменении, результаты измерений следует представлять графически.

В том случае, когда пользуются прямоугольной системой координат, значения независимой переменной x откладывают по оси абсцисс, а значения функции y – по оси ординат. На координатных осях при этом указываются названия откладываемых величин и единицы их измерения; единицы измерения пишут справа от измеряемых параметров через запятую. Масштаб графика следует выбирать таким образом, чтобы график занимал бóльшую часть координатной плоскости, поэтому за начало отсчета координат необязательно принимать нулевые значения измеренных величин. Если измеренные значения величин заключены в интервалах от $x_{\min}$ до $x_{\max}$ и от $y_{\min}$ до $y_{\max}$, то при нанесении шкал можно начало отсчета совместить со значениями, близкими к $x_{\min}$ и $y_{\min}$. Масштабные деления откладывают на координатных осях равномерно через 10 – 20 мм.

Экспериментальные результаты наносятся на координатную плоскость в виде точек. Обычно каждая точка является результатом многократно повторенных измерений. Чтобы отобразить на графике точность, с которой получены результаты, для каждой точки откладываются доверительные интервалы в виде двух взаимно перпендикулярных отрезков, пересекающихся в данной точке. Длина отрезка в выбранном масштабе равна соответствующему доверительному интервалу, например $(\langle x \rangle - \Delta x, \langle x \rangle + \Delta x)$, т. е. удвоенной абсолютной погрешности измерения, а сама точка находится в середине отрезка.

При построении графика рекомендуется провести плавную линию (а не ломаную) так, чтобы она проходила по возможности ближе к экспериментальным точкам в пределах доверительных интервалов. Построить такую плавную линию, которая наилучшим образом выражала бы функциональную зависимость y от x, можно, в частности, при помощи метода наименьших квадратов [2, 3]. Необходимо учесть, что на чертеже, где кривая идет монотонно, можно ограничиться небольшим числом точек, а вблизи точек максимума, минимума или перегиба измерения производятся чаще и соответственно на графике точки наносятся гуще [4]. Пример построения графика зависимости электрического сопротивления R проводника от температуры T представлен на рисунке.

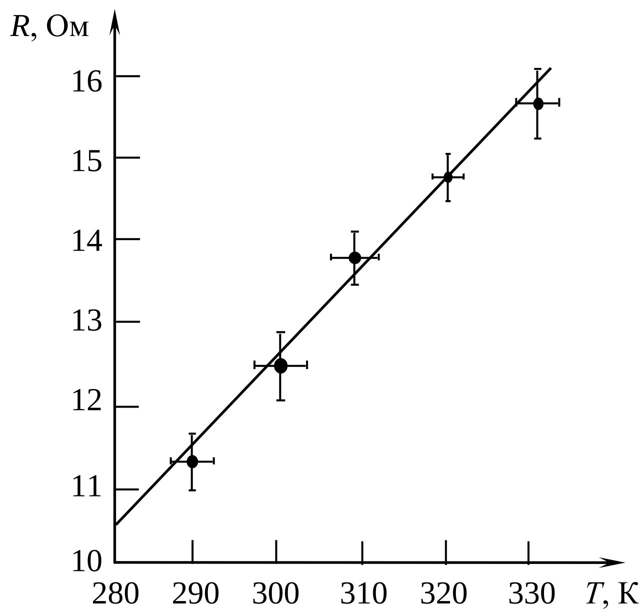

График зависимости электрического сопротивления проводника от температуры

Чертят график на миллиметровой бумаге или на бумаге в клетку.

Для построения графика можно использовать прикладные программы, например, MathCad, Microsoft Office Excel, MicroCal Origin.

Библиографический список

1. Зайдель, А. Н. Ошибки измерений физических величин / А. Н. Зайдель. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 112 с. – Текст : непосредственный.

2. Кравченко, Н. С. Методы обработки результатов измерений и оценки погрешностей в учебном лабораторном практикуме : учебное пособие / Н. С. Кравченко, О. Г. Ревинская. – Томск : Томский политехнический университет, 2011. – 86 с. – Текст : непосредственный.

3. Степанова, Е. А. Основы обработки результатов измерений : учебное пособие / Е. А. Степанова, Н. А. Скулкина, А. С. Волегов. – Екатеринбург : Уральский государственный университет, 2014. – 95 с. – Текст : непосредственный.

4. Мурашкина, Т. И. Теория измерений : учебное пособие / Т. И. Мурашкина, В. А. Мещеряков, Е. А. Бадеева. – Москва : Высшая школа, 2007. – 78 с. – Текст : непосредственный.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ПОДГОТОВКА К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ, ПОРЯДОК ЕЕ ВЫПОЛНЕНИЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Обучающийся должен з а р а н е е подготовиться к выполнению лабораторной работы:

изучить теоретические сведения по теме лабораторной работы по учебнику и конспекту лекций;

ознакомиться с описанием оборудования и методикой проведения эксперимента по соответствующему учебно-методическому пособию;

оформить в специальной тетради основу отчета: записать номер, название и цель лабораторной работы; привести перечень используемых в лабораторной работе приборов и принадлежностей; привести схему или чертеж лабораторной установки; записать необходимые для расчетов формулы с расшифровкой обозначений, в том числе формулу расчета погрешности; начертить таблицы для записи измеренных и вычисленных величин.

К выполнению лабораторной работы допускаются обучающиеся, подготовившиеся к занятию. Перед проведением эксперимента необходимо изучить предназначенные для него приборы и принадлежности, а затем приступать к работе. Результаты, полученные в ходе эксперимента, записываются в таблицы, затем проводится оценочный расчет определяемой величины; результаты измерений и оценочный расчет проверяются и визируются преподавателем.

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующее:

1) расчет искомых величин (в случае необходимости результаты приводятся в виде графиков);

2) расчет погрешностей;

3) вывод, где анализируются полученные результаты и причины их расхождения с табличными значениями.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПРАВИЛА ОКРУГЛЕНИЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ

Числовые значения величин, с которыми приходится иметь дело при решении физических задач, в большинстве своем являются приближенными из-за недостаточной точности измерений или за счет округления более точных значений, поэтому погрешности результата определяются погрешностью не только измерений, но и вычислений. Необходимо помнить о том, что точность результата определяется точностью измерительных приборов и тщательностью исходных измерений и не может быть повышена в дальнейшем путем искусственного набирания знаков в числах при выполнении арифметических действий.

При расчете погрешностей следует пользоваться общими правилами приближенных вычислений:

1) все вычисления необходимо проводить с числом цифр, превышающим на единицу число значащих цифр, полученных при измерении (значащими цифрами не считаются нули, стоящие с левой стороны числа); в некоторых случаях результаты промежуточных вычислений можно округлять так, чтобы число значащих цифр в них было на два больше числа значащих цифр в значениях измеренных величин;

2) значение абсолютной погрешности Δx следует округлять до двух значащих цифр слева;

3) среднее значение $\langle x \rangle$ необходимо округлять до того разряда, в котором находится вторая значащая цифра абсолютной погрешности;

4) относительную погрешность следует округлять до двух значащих цифр.

Примеры представления результатов измерений

Неокруглённый результат	Округлённый результат
$1257{,}2 \pm 42$	1257 ± 42 с $\varepsilon = 3{,}3\%$
$2{,}58 \pm 0{,}93142$	$2{,}58 \pm 0{,}93$ с $\varepsilon = 36\%$
$(7{,}854 \pm 0{,}0476)\cdot 10^{-3}$	$(7{,}854 \pm 0{,}048)\cdot 10^{-3}$ с $\varepsilon = 0{,}61\%$
$2{,}482 \pm 0{,}961$	$2{,}48 \pm 0{,}96$ с $\varepsilon = 39\%$
$7652{,}1 \pm 328{,}3$	$(7{,}65 \pm 0{,}33)\cdot 10^{3}$ с $\varepsilon = 4{,}3\%$

Для правильного представления полученных результатов необходимо обращать внимание на приведенные ниже нюансы, связанные с округлением и использованием кратных и дольных единиц измерения.

На практике используются различные единицы измерения физических величин: метры (м), миллиметры (мм), километры (км), граммы (г), килограммы (кг) и т. д. Необходимо знать, как правильно применять те или иные единицы измерения. Так, например, не вызывает затруднений выбор между единицами измерений «километры» и «миллиметры». Интуитивно понятно, что расстояние между городами измеряется в километрах, а диаметр стальной проволоки – в миллиметрах. А как быть в том случае, если длину, например, стола можно выразить и в метрах, и в сантиметрах, и в миллиметрах? Являются ли эквивалентными следующие записи: ℓ = 1,35 м; ℓ = 135 см; ℓ = 1350 мм? Для ответа на этот вопрос необходимо вспомнить, что физика является экспериментальной наукой и что в процессе экспериментов проводятся измерения, которые всегда имеют погрешности.

Следовательно, в рассматриваемом примере, если экспериментатор пользовался для измерения длины стола линейкой с сантиметровыми делениями, то результат измерения ℓ = 135 см появится в том случае, если «истинная» длина стола была, например, 135,3 см или 134,8 см и т. д., так как миллиметры экспериментатор не измерял. Отсюда ясно, что первые две записи являются эквивалентными, и в какой форме представить результат – не имеет значения, а вот третья форма записи является ошибочной, так как ноль в конце числа не соответствует действительности. Если линейка имела миллиметровые деления и результат измерения оказался равным 1350 мм, то в этом случае первые две записи должны выглядеть так: ℓ = 1,350 м; ℓ = 135,0 см, что несколько необычно, и результат лучше записать в миллиметрах.

Итак, из приведенного примера следует, что в записи результата измерения должны быть указаны все измеренные цифры (подчеркнем, только измеренные), а единицы измерения должны быть выбраны так, чтобы исключить неоднозначную трактовку результата измерения.

ПОГРЕШНОСТЬ ВЕЛИЧИНЫ, НЕ ИЗМЕРЯЕМОЙ В ХОДЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Часто в лабораторных работах используют значения некоторых величин, измеренных заранее (данные установки), а также табличные данные и т. п. без указания погрешности. В таких случаях абсолютную погрешность принимают равной ***половине единицы наименьшего разряда, представленного в числе***.

Примеры определения абсолютной погрешности

1. Масса тела m = 532,8 г (прямое измерение не проводилось), тогда $\Delta m = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 = 0{,}05$ г. Следовательно, $m = (532{,}8 \pm 0{,}05)$ г.

2. Ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2 (табличная величина).

Абсолютная погрешность $\Delta g = \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 = 0{,}005$ м/с^2, тогда $g = (9{,}81 \pm 0{,}005)$ м/с^2.

3. Трансцендентное число $\pi \approx 3{,}1415926\ldots$. Округляя число π, т. е. заменяя π на приближенное значение $\pi_{\text{пр}}$, допускаем погрешность $\Delta\pi = \pi - \pi_{\text{пр}}$, которая в зависимости от требуемой точности принимает следующие значения:

если $\pi_{\text{пр}} = 3{,}14$, то $\Delta\pi = \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 = 0{,}005$, а $\varepsilon_\pi = \frac{0{,}005}{3{,}14} \cdot 100\ \% = 0{,}16\ \%$;

если $\pi_{\text{пр}} = 3{,}142$, то $\Delta\pi = \frac{1}{2} \cdot 0{,}001 = 0{,}0005$, а $\varepsilon_\pi = \frac{0{,}0005}{3{,}142} \cdot 100\ \% = 0{,}016\ \%$.

Если при выполнении расчетов число π принять равным, например, 3,1416 или вызвать число из памяти калькулятора, то в большинстве лабораторных работ погрешностью, связанной с округлением числа π, можно будет пренебречь.

ПОНЯТИЕ О ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть дана функция нескольких переменных $f = f(x, y, z, \ldots)$. Если зафиксировать значение всех независимых переменных кроме одной, то f станет функцией этой одной переменной и по ней можно брать производную по известным правилам. Такие производные называются частными. Другими словами,

$$f'_x = f'_x(x, y, z, \ldots) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)}{\Delta x}$$

есть частная производная функции f по переменной x;

$$f'_y = f'_y(x, y, z, \ldots) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)}{\Delta y}$$

есть частная производная функции f по переменной y;

$$f'_z = f'_z(x, y, z, \ldots) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)}{\Delta z}$$

есть частная производная функции f по переменной z и т. п.

Символы f' или $f'(x, y, z, \ldots)$ для функций нескольких переменных не имеют смысла, так как необходимо обязательно указывать, по какой именно переменной производится дифференцирование.

Весьма удобным является обозначение частной производной с использованием символа обозначения дифференциала ∂, который отличается от символа обозначения дифференциала d, применяющегося при записи производных от функции одной переменной. Например, кроме приведенных выше обозначений частную производную по x можно обозначить так: $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Отметим, что правила вычисления частных производных от конкретных функций совпадают с правилами, применяемыми для функций одной переменной, требуется только каждый раз помнить, по какой переменной берется производная, а к остальным переменным следует относиться как к постоянным. Актуальной при вычислении частных производных остается таблица производных элементарных функций.

Примеры вычисления частных производных

Дана функция нескольких переменных, требуется найти частные производные по всем переменным.

1. $f(x, y) = x^2 \sin y$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin y$ (здесь y рассматривается как постоянная);

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos y$ (здесь x рассматривается как постоянная).

2. $f = x^y$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$ (здесь y рассматривается как постоянная);

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$ (здесь x рассматривается как постоянная).

3. $f = x^2 - z^2 + xz^3 - \dfrac{z}{y^2}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + z^3$ (здесь z и y рассматриваются как постоянные);

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2z}{y^3}$ (здесь x и z рассматриваются как постоянные);

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = -2z + 3xz^2 - \dfrac{1}{y^2}$ (здесь x и y рассматриваются как постоянные).

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Пусть дана функция $f = f(x)$. Производная функции $f'(x)$ в точке x в соответствии с определением задается выражением:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Приближенное значение производной $f'(x)$ в точке x может быть найдено по двум значениям функции, одно из которых вычислено непосредственно в точке x, а другое – в точке $x + \Delta x$, расположенной вблизи x:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

В том случае, когда дана функция нескольких переменных $f = f(x, y, z, \ldots)$, подобным образом вычисляются частные производные:

$\dfrac{\partial f}{\partial x} \approx \dfrac{f(x + \Delta x, y, z, ...) - f(x, y, z, ...)}{\Delta x}$ – частная производная по переменной x от функции f;

$\dfrac{\partial f}{\partial y} \approx \dfrac{f(x, y + \Delta y, z, ...) - f(x, y, z, ...)}{\Delta y}$ – частная производная по переменной y от функции f;

$\dfrac{\partial f}{\partial z} \approx \dfrac{f(x, y, z + \Delta z, ...) - f(x, y, z, ...)}{\Delta z}$ – частная производная по переменной z от функции f и т. п.

Учебное издание

ЛИТНЕВСКИЙ Леонид Аркадьевич,
СОСНОВСКИЙ Юрий Михайлович

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ
В ЛАБОРАТОРНОМ ПРАКТИКУМЕ ПО ФИЗИКЕ

Учебно-методическое пособие

Редактор Н. А. Майорова
Корректор А. В. Маринченко

***

Подписано в печать 15.04.2022. Формат $60 \times 84\ ^{1}/_{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 1,9. Уч.-изд. л. 2,1.
Тираж 30 экз. Заказ .

**

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35