Л Е К Ц И Я № 6

Гл. 3. Законы сохранения

Система взаимодействующих между собой тел, на которую не действуют внешние силы, называется <u>***замкнутой***</u> (<u>***изолированной***</u>).

В замкнутых системах останется постоянным три физические величины: энергия W, импульс $\vec{p}$ и момент импульса $\vec{L}$. Соответственно в таких системах выполняются три закона сохранения.

Математически любой закон сохранения можно записать в виде:

$$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \ldots + \vec{A}_n = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0. \qquad (6\text{-}1)$$

Рассмотрим подробнее каждый из законов.

1. Механическая работа, мощность

Если на тело действует сила, линия действия которой проходит через центр инерции (центр масс) тела, и при этом тело перемещается в пространстве, то говорят, что эта сила совершает механическую работу.

<u>***Элементарной механической работой при поступательном движении***</u> δA называется скалярная физическая величина, равная скалярному произведению вектора силы $\vec{F}$ на вектор элементарного перемещения $d\vec{r}$ центра инерции.

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} \qquad (6\text{-}2)$$

$[\delta A]$ = Дж. $\qquad \delta A = F dr \cdot \cos\alpha, \qquad \alpha = \widehat{\vec{F} d\vec{r}}$

при $\alpha < 90^\circ \quad \delta A > 0$;

при $\alpha > 90^\circ \quad \delta A < 0$ (например, для силы $F_{\text{тр}}$);

при $\alpha = 90^\circ \quad \delta A = 0$ (например, для силы N).

Если линия действия силы не проходит через центр инерции (центр масс) АТТ, то эта сила будет создавать вращающий момент, который заставит тело участвовать во вращательном движении. Тогда говорят, что момент этой силы совершает механическую работу.

Элементарной механической работой при вращательном движении $\delta A_{\text{вр}}$ называется скалярная физическая величина, равная скалярному произведению вектора момента силы $\vec{M}$ на вектор элементарного углового перемещения $d\vec{\varphi}$.

$$\delta A_{\text{вр}} = \vec{M}d\vec{\varphi} \tag{6-3}$$

$\left[\delta A_{\text{вр}}\right]$ = Дж. $\qquad \delta A_{\text{вр}} = Md\varphi \cdot \cos\alpha, \qquad \alpha = \widehat{\vec{M}d\vec{\varphi}}.$

При вращении АТТ вокруг неподвижной оси: $\vec{M}_z \uparrow\uparrow d\vec{\varphi}, \qquad \alpha = 0°$.

$$\delta A_{\text{вр}} = Md\varphi$$

Для вычисления полной работы при конечных перемещениях нужно вычислить интегралы

$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} \qquad A_{\text{вр}} = \int_1^2 \vec{M}d\vec{\varphi} \tag{6-4}$$

Если $\qquad \vec{F} = \text{const} \quad \left(\left|F\right| = \text{const},\ \alpha = \text{const}\right)$

или $\qquad \vec{M} = \text{const} \quad \left(\left|M\right| = \text{const},\ \alpha = \text{const}\right)$,

тогда $\qquad A = F\Delta r\cos\alpha \qquad A_{\text{вр}} = M_z\varphi \qquad$ (6-4а)

Работа, совершаемая силой или моментом силы за единицу времени, называется ***мощностью***:

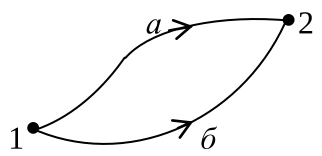
$$P = \frac{\delta A}{dt} = \vec{F}\vec{\upsilon} \qquad P_{\text{вр}} = \frac{\delta A_{\text{вр}}}{dt} = \vec{M}\vec{\omega} \tag{6-5}$$

$\left[P\right]$ = Вт. $\qquad$ скаляр

2. Потенциальная энергия

В общем случае работа зависит от формы перемещения.

Однако существуют силы, работа которых не зависит от формы перемещения, а определяется лишь начальным и конечным положениями тела.



$$A_{1-а-2} = A_{1-б-2}$$

Изменяя направление перемещения на 180°, работа изменяет знак на противоположный:

$$A_{1-а-2} = -A_{2-б-1} \to A_{1-а-2} + A_{2-б-1} = 0$$

Силы, работа которых не зависит от формы перемещения, а определяется только начальным и конечным положениями тела, и при этом работа таких сил на замкнутой траектории равна нулю, называются ***консервативными*** или ***потенциальными***.

$$\oint_\ell \vec{F} d\vec{r} = 0$$

В противном случае – ***неконсервативными*** (***непотенциальными***, ***диссипативными***).

Так как $\oint_\ell \vec{F} d\vec{r} = 0$, то под интегралом стоит полный дифференциал некоторой функции, которая характеризует энергетический запас тела в данном положении в силовом (потенциальном) поле. Такую энергетическую функцию назвали потенциальной энергией.

$$\vec{F} d\vec{r} = -dW_p \tag{6-6}$$

Потенциальная энергия тела W_p – это энергия взаимодействия тела с другими телами консервативными силами (энергия тела в каком-либо силовом потенциальном поле) или энергия взаимодействия отдельных частей тела между собой за счет консервативных сил.

В качестве примера рассмотрим ряд силовых полей: поле силы тяжести, гравитационное поле, поле упругих сил и др. Потенциальны ли они?

$\vec{F} = m\vec{g}$, тогда

$$A = \int_1^2 m\vec{g} d\vec{r} = \int_1^2 mgdy \cos 180° = -mg\Delta y \Big|_1^2 = mgh_1 - mgh_2$$

$\vec{F}_{упр} = -k\vec{x}$,

$$A=\int_1^2 \vec{F}_{\text{упр}}d\vec{x}=\int_1^2 kxdx\cos 180^\circ=-\frac{kx^2}{2}\Big|_1^2=\frac{kx_1{}^2}{2}-\frac{kx_2{}^2}{2}$$

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2},\ \ A=\int_1^2 \vec{F}d\vec{r}=\int_1^2 G\frac{m_1m_2}{r^2}\left|d\vec{r}\right|\cos\alpha=\int_1^2 G\frac{m_1m_2}{r^2}\left(-dr\right)=$$

$$=-G\frac{m_1m_2}{r_1}-\left(-G\frac{m_1m_2}{r_2}\right)$$

Из полученных результатов следует, что работа консервативной силы может быть совершена за счет убыли потенциальной энергии тела.

$$A_{\text{к}}=W_{p1}-W_{p2} \tag{6-7}$$

Т. о. сила тяжести, сила упругости, гравитационная сила - консервативные силы. Значит, при действии этих сил можно вводить потенциальную энергию:

$$F=mg \qquad W_p=mgh \ \ (h=0,\ W_p=0). \tag{6-8}$$

$$F_{\text{упр}}=kx \qquad W_p=\frac{kx^2}{2} \ \ (x=0,\ W_p=0). \tag{6-9}$$

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2} \quad W_p=-G\frac{m_1m_2}{r} \ \ (r=\infty,\ W_p=0). \tag{6-10}$$

Из (6-6) следует связь между консервативной силой и потенциальной энергией:

$$\vec{F}=-\frac{dW_p}{d\vec{r}}=-\text{grad}W_p\,. \tag{6-11}$$

3. Кинетическая энергия

Для отдельной частицы АТТ можно записать:

$$\vec{F}_i=\frac{d\vec{p}_i}{dt}.$$

Домножим это выражение (обе части) скалярно на вектор перемещения $d\vec{r}$:

$$\vec{F}_i d\vec{r} = \frac{d\vec{p}_i}{dt} d\vec{r} = d\vec{p} \cdot \vec{\upsilon} = m\vec{\upsilon} d\vec{\upsilon} = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right). \qquad (*)$$

Но $\vec{F}_i d\vec{r} = \delta A$ – элементарная работа силы.

Тогда, сила, совершающая работу, приводит к изменению энергии тела, связанной с движением.

***<u>Кинетическая энергия тела W</u>**$_k$* – это энергия движущегося тела. Для частицы или АТТ, участвующего в поступательном движении

$$W_k = \frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad \left[W_k\right] = \text{Дж}. \qquad (6\text{-}12)$$

При вращательном движении АТТ

$$\vec{M}_i = \frac{d\vec{L}_i}{dt} \rightarrow \vec{M}_i d\vec{\varphi} = \frac{Id\vec{\omega}}{dt} d\vec{\varphi} = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right). \qquad (**)$$

Но $\vec{M} d\vec{\varphi} = \delta A_{\text{вр}}$ – элементарная работа момента силы.

Тогда, момент силы, совершая работу, приведет к изменению энергии тела, связанной с вращательным движением.

$$W_{k\ \text{вр}} = \frac{I\omega^2}{2}. \qquad \left[W_{k\ \text{вр}}\right] = \text{Дж}. \qquad (6\text{-}13)$$

При плоском движении АТТ можно записать:

$$W_k = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (6\text{-}14)$$

где υ_c – скорость центра инерции (центра масс) АТТ;

I – момент инерции АТТ относительно центра инерции (центра масс).

Из формул со (*) и (**) следует, что если над телом совершается работа, то это приводит к изменению кинетической энергии тела, т. е. можно записать:

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = \Delta W_k = W_{k2} - W_{k1}. \qquad (6\text{-}15)$$

Это утверждение называют ***<u>теоремой об изменении кинетической энергии тела</u>***.

§4. Механическая энергия. Закон сохранения энергии

<u>Механическая энергия тела W</u> – это сумма кинетической и потенциальной энергии тела.

$$W = W_k + W_p. \tag{6-16}$$

Из формулы (6-15) следует, что если система замкнутая и в ней между телами действуют только консервативные силы, работа которых может быть представлена формулой (6-7), тогда

$$A_k = W_{p1} - W_{p2} = \Delta W_k = W_{k2} - W_{k1}.$$

откуда

$$W_{k1} + W_{p1} = W_{k2} + W_{p2}.$$

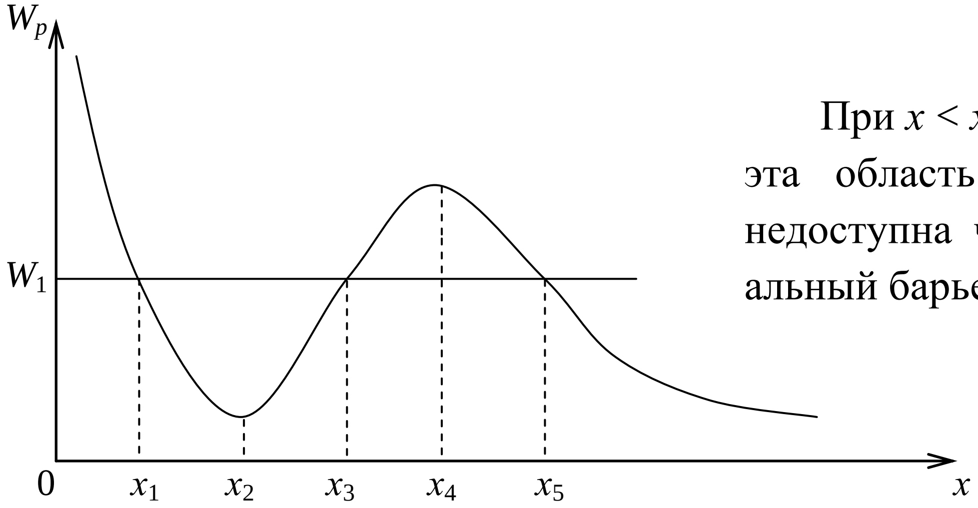
Т.е. механическая энергия сохраняется.

<u>Закон сохранения механической энергии</u>: в ***<u>замкнутой системе</u>*** взаимодействующих тел, между которыми ***<u>действуют</u>*** только ***<u>консервативные силы</u>***, суммарная механическая энергия тел до и после взаимодействия не изменяется (она может только переходить из W_k в W_p и наоборот):

$$W_1 + W_2 + \ldots + W_n = W_1' + W_2' + \ldots + W_n' \tag{6-17}$$

Демонстрация №5 «Маятник Максвелла»

Рассмотрим движение частицы с энергией W_1 в потенциальном поле, имеющем вид:



При $x < x_1$ и $x_3 < x < x_5$ $W_p > W_1$ – эта область потенциального поля недоступна частице – это потенциальный барьер.

При $x_1 < x < x_3$ $W_1 > W_p$ – движение частиц разрешено, но ограничено потенциальным барьером – это потенциальная яма.

($x = x_2$ – точка устойчивого равновесия).

Движение частицы в потенциальной яме называется ***finitным***.

При $x > x_5$ $W_1 > W_p$ – движение частиц не ограничено, такое движение называется ***инфинитным***.

Если в системе действуют неконсервативные (непотенциальные) силы, например, сила трения

$$A_{\text{тр}} = \int \vec{F}_{\text{тр}} d\vec{r} = \mu N \Delta r \cdot \cos 180° = -\mu N \Delta r.$$

$$A_{\text{тр}} = \oint \vec{F}_{\text{тр}} d\vec{r} \neq 0,$$

тогда механическая энергия не сохраняется.

Из (6-15) имеем:

$$A_{\text{к}} + A_{\text{н}} = W_{k2} - W_{k1}.$$

$$W_{p1} - W_{p2} + A_{\text{н}} = W_{k2} - W_{k1} \quad \rightarrow \quad W_{k1} + W_{p1} + A_{\text{н}} = W_{k2} + W_{p2}.$$

$A_{\text{н}} < 0,$ тогда $W_2 < W_1.$

Процесс перехода механической энергии в немеханическую (тепловую, внутреннюю) называется ***диссипацией энергии***.

При этом неконсервативные (непотенциальные) силы часто называют ***диссипативными***.

Общефизический закон сохранения полной энергии: в замкнутой системе взаимодействующих тел суммарная энергия тел до и после взаимодействия остается неизменной (она может переходить из W_k в W_p и наоборот, из механической энергии в немеханическую и наоборот):

$$W_1 + W_2 + \ldots + W_n = W_1' + W_2' + \ldots + W_n' + \Delta W.$$

где ΔW – потеря механической энергии на диссипацию.

Любой механизм, производящий работу, не всю совершенную им работу (затраченную энергию, мощность) переводит в полезные действия, поэтому любой механизм обладает коэффициентом полезного действия (КПД):

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A_{\text{сов}}} \cdot 100\% = \frac{W_{\text{пол}}}{W_{\text{зат}}} \cdot 100\% = \frac{P_{\text{пол}}}{P_{\text{зат}}} \cdot 100\%. \qquad (6\text{-}18)$$

где $A_{\text{пол}}$, $W_{\text{пол}}$, $P_{\text{пол}}$ – полезная работа (энергия, мощность), произведенная механизмом;

$A_{\text{сов}}$ – совершенная (полная) работа, произведенная механизмом;

$W_{\text{зат}}$ ($P_{\text{зат}}$) – энергия (мощность), затраченная для производства полезной работы.