

ЛЕКЦИЯ № 11

4. Распределение Максвелла

При выводе основного уравнения МКТ молекулам задавали различные скорости. В результате многократных соударений скорость каждой молекулы изменяется по модулю и направлению. Однако из-за хаотического движения молекул все направления движения равновероятны, т.е. в любом направлении в среднем движется одинаковое число молекул.

По МКТ, как бы ни изменялись скорости молекул при столкновении, средняя квадратичная скорость молекул массой m_0 в газе, находящемся в термодинамическом равновесии при $T = const$, остается постоянной и равной

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_0}}.$$

Это объясняется тем, что в газе, находящемся в состоянии равновесия, устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоростям, которое подчиняется определенному статистическому закону. Этот закон теоретически вывел Дж. Максвелл.

При выводе закона распределения молекул по скоростям Максвелл предполагал, что газ состоит из очень большого числа N тождественных молекул, находящихся в состоянии беспорядочного теплового движения при одинаковой температуре. Предполагалось также, что силовые поля на газ не действуют.

Закон Максвелла описывается некоторой функцией $f(v)$, называемой функцией распределения молекул по скоростям.

Если разбить диапазон скоростей молекул на малые интервалы, равные dv , то на каждый интервал скорости будет приходиться некоторое число молекул $dN(v)$, имеющих скорость, находящуюся в этом интервале.

Значит, функция распределения молекул по скоростям определяет относительное число (долю) молекул $dN(v)/N$ идеального газа, абсолютные значения скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$, или определяет плотность вероятности того, что данная молекула идеального газа обладает абсолютным значением скорости из интервала от v до $v + dv$:

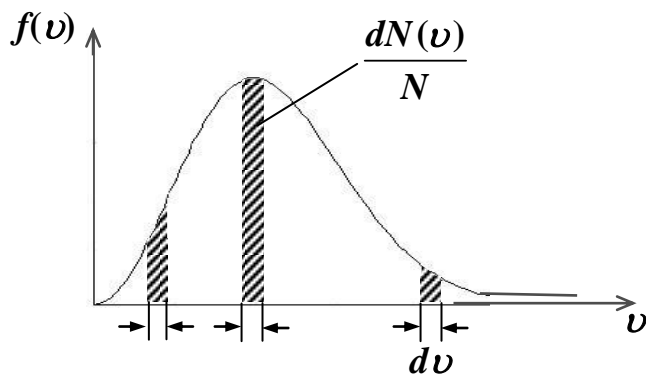
$$f(v) = \frac{dN(v)/N}{dv}. \quad (11-1)$$

Применяя методы теории вероятностей, Максвелл получил функцию $f(v)$ – закон о распределении молекул идеального газа по абсолютным значениям скоростей:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp \left(-\frac{m_0 v^2}{2k_B T} \right) \quad (11-2)$$

Из (11-2) видно, что конкретный вид функции зависит от рода газа (от массы молекулы) и от параметров состояния (от температуры T).

График функции (11-2) представлен на рисунке:



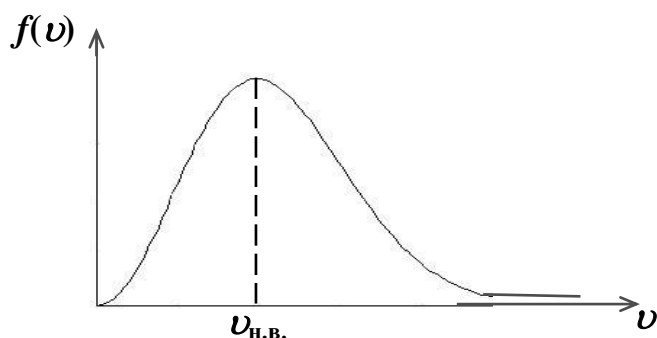
Площадь заштрихованной полосы на рисунке определяет долю молекул $dN(v)/N$, абсолютные значения скоростей которых лежат в интервале от v до $v + dv$,

Площадь под всей кривой, определяющая полное число частиц, равна единице.

Из графика видно, что молекул, имеющих очень маленькие и очень большие скорости, немного.

Небольшая доля молекул имеет скорости ≥ 11 км/с – вторая космическая скорость. Это объясняет медленное рассеяние Земной атмосферы.

Скорость, при которой функция распределения молекул идеального газа по скоростям максимальна, называется наиболее вероятной скоростью $v_{н.в.}$.



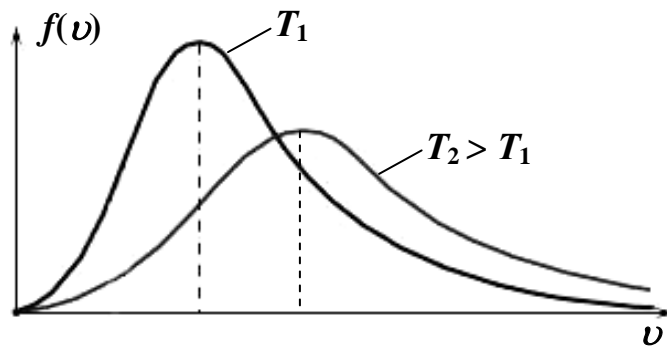
Значение $v_{н.в.}$ можно получить, продифференцировав выражение (11-2) по аргументу v и приравняв к нулю.

$$\frac{d}{d\nu} \left(\nu^2 \exp \left[-\frac{m_0 \nu^2}{2k_B T} \right] \right) = 2\nu \left(1 - \frac{m_0 \nu^2}{2k_B T} \right) \exp \left(-\frac{m_0 \nu^2}{2k_B T} \right) = 0.$$

Значения $\nu = 0$ и $\nu = \infty$ соответствуют минимуму выражения (11-2), а

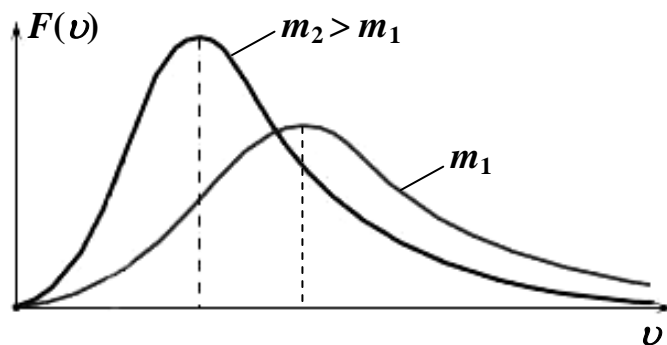
$$\nu_{\text{н.в.}} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \quad (11-3)$$

Из формулы (11-3) следует, что при повышении температуры максимум функции распределения молекул по скоростям сместится вправо. Однако площадь под кривой остается неизменной, поэтому при повышении температуры кривая распределения будет смещаться вправо и вниз.

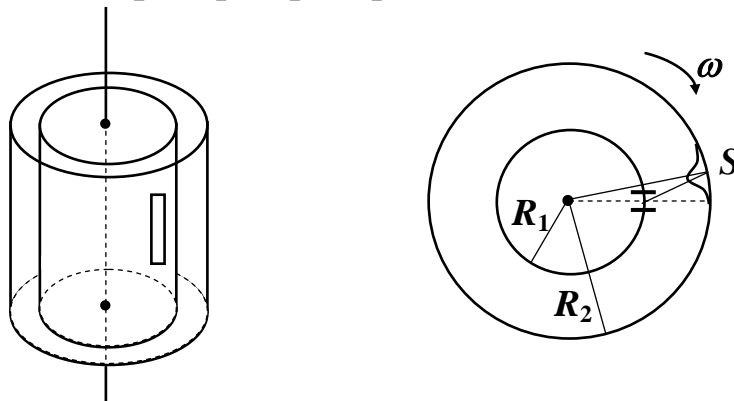


Из формулы (11-3) также следует, что для газа с более тяжелыми молекулами максимум функции распределения молекул по скоростям сместится влево.

И вновь, так как площадь под кривой остается неизменной, то для более тяжелых молекул кривая распределения сместится влево и вверх.



Экспериментальная проверка распределения Максвелла была проведена в опыте Штерна:



$$\Delta R = R_2 - R_1 = v \Delta t$$

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \quad S = R_2 \operatorname{tg} \Delta\varphi \approx R_2 \Delta\varphi$$

$$S = \frac{2\pi\nu R_2 (R_2 - R_1)}{v} \sim \frac{1}{v}$$

Демонстрация №13: Распределение Максвелла.

5. Распределение Больцмана

При выводе основного уравнения МКТ и распределения Максвелла для молекул по скоростям предполагалось, что на молекулы газа внешние силы не действуют, поэтому молекулы равномерно распределены по всему объему.

Однако молекулы любого газа находятся в потенциальном поле силы тяжести Земли. Притяжение к Земле, с одной стороны, и тепловое движение – с другой, приводит к некоторому стационарному состоянию газа, при котором давление газа с высотой убывает.

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{k_B T}\right) = P_0 \exp\left(-\frac{M g h}{R T}\right), \quad (11-4)$$

где h – высота относительно уровня моря;

P_0 – нормальное давление на уровне моря;

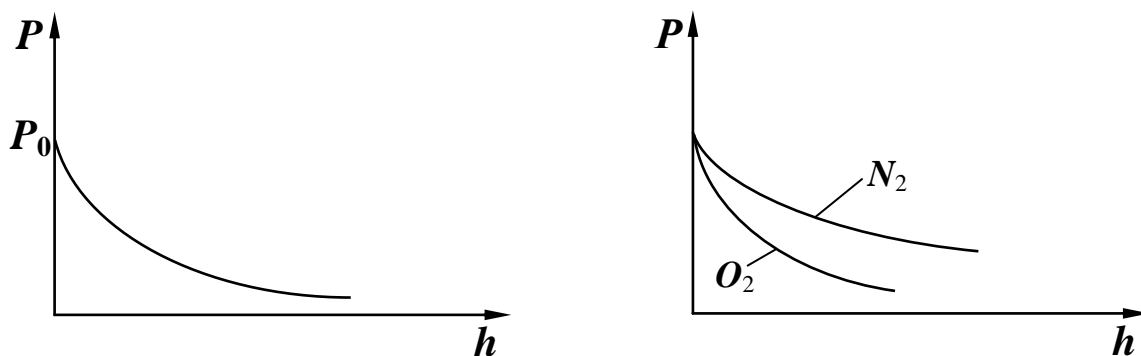
P – давление на высоте h .

Выражение (11-4) называется барометрической формулой. Она позволяет найти атмосферное давление на любой высоте или, измерив давление, найти высоту.

$$h = \frac{k_B T}{m_0 g} \ln \frac{P_0}{P} = \frac{R T}{M g} \ln \frac{P_0}{P} \quad (11-5)$$

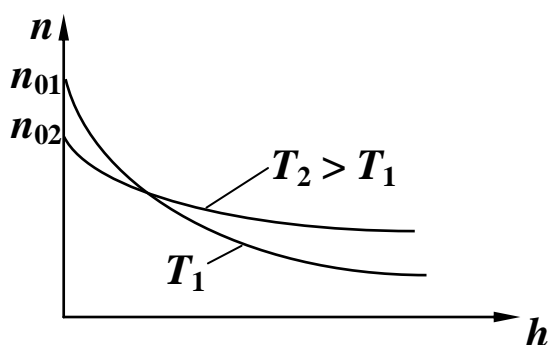
Прибор для определения высоты над земной поверхностью называется высотомером (или альтиметром). Его работа основана на использовании

формулы (10-4). Из этой формулы следует, что давление с высотой убывает тем быстрее, чем тяжелее газ.



Это объясняет кислородное голодание при подъеме над Землей.

При повышении температуры газа молекулы получают дополнительную энергию и поднимаются вверх, несколько уменьшая концентрацию у поверхности (общая площадь под кривой, определяющее общее количество частиц, остается неизменной).



Воспользовавшись выражениями $P = nk_B T$ и $P = \frac{\rho}{M} RT$, можно записать:

$$\begin{aligned} n &= n_0 \exp\left(-\frac{m_0 gh}{k_B T}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right) \\ \rho &= \rho_0 \exp\left(-\frac{m_0 gh}{k_B T}\right) = \rho_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right), \end{aligned} \quad (11-6)$$

где n_0 и ρ_0 – концентрация и плотность газа на высоте $h = 0$.

Так как $m_0 gh = W_p$ – потенциальная энергия молекул в поле силы тяжести, тогда если разбить диапазон высоты на малые интервалы, равные dh , то на каждый интервал высоты будет приходиться некоторое число молекул $dN(h)$ из общего числа N , которое можно вычислить, используя функцию рас-

пределения Больцмана для молекул идеального газа, находящихся в потенциальном поле:

$$f(h) = \frac{dN(h)/N}{dh} = C \exp\left(-\frac{W_p}{k_B T}\right), \quad (11-7)$$

где C – некоторая константа, значение которой определяется из условия нормировки

$$\int_0^H f(h) dh = 1. \quad (11-7a)$$

Из (11-7) следует, что при $T = \text{const}$ плотность газа больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул.

Если частицы имеют одинаковую массу и находятся в состоянии хаотического теплового движения, то распределение Больцмана справедливо в любом внешнем потенциальном поле, а не только в поле силы тяжести.

Демонстрация № 14: Распределение Больцмана.