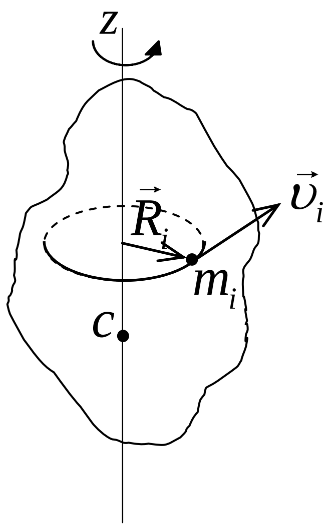
ЛЕКЦИЯ № 5

4. Момент инерции. Основное уравнение динамики вращательного движения АТТ вокруг неподвижной оси



При вращении АТТ вокруг неподвижной оси для отдельной частицы имеем

$$L_{iz} = m_i \upsilon_i R_i \text{, но } \upsilon_i = \omega R_i$$

тогда

$$L_{iz} = m_i R_i^2 \omega .$$

А для всего АТТ

$$L_{\text{АТТ}z} = \sum L_{iz} = \omega \sum m_i R_i^2 .$$

<u>Моментом инерции</u> материальной точки (частицы) относительно данной оси называется скалярная физическая величина, равная произведению массы материальной точки (частицы) на квадрат кратчайшего расстояния от частицы до оси вращения.

$$\boxed{I_{iz} = m_i R_i^2} \tag{5-1}$$

Тогда для АТТ

$$\boxed{I_{\text{АТТ}z} = \sum I_{iz} = \sum m_i R_i^2} \tag{5-2}$$

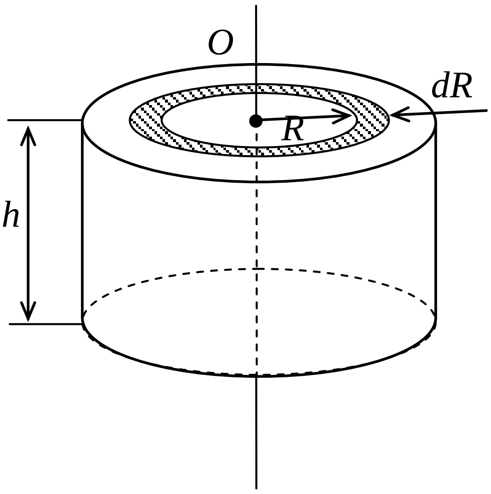
Если масса АТТ является мерой инертности тела при поступательном движении, то **при вращательном движении мерой инертности является момент инерции.**

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу:

$$\boxed{I_{\text{АТТ}z} = \int\limits_V R^2 dm} \tag{5-3}$$

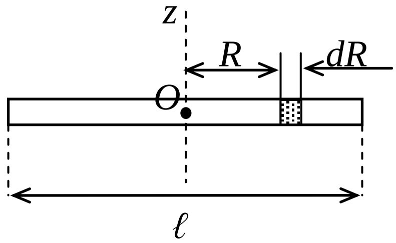
Значения момента инерции для некоторых однородных тел относительно неподвижной оси, проходящей через центр инерции АТТ:

Тело	Момент инерции
Тонкостенный цилиндр (обруч) радиусом *R*	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиусом *R*	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной ℓ	$\frac{1}{12}m\ell^2$
Шар радиусом *R*	$\frac{2}{5}mR^2$



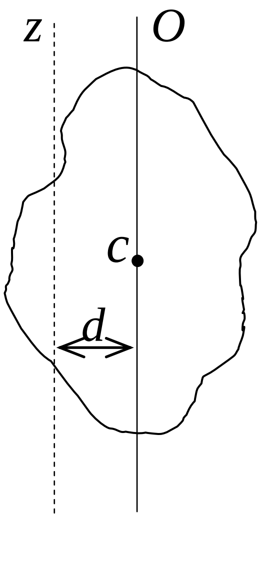
$$I_0 = \int_V R^2 dm = \int_V R^2 \rho dV = \int_0^R R^2 \rho h \cdot 2\pi R dR =$$

$$= \rho h \cdot 2\pi \int_0^R R^3 dR = \frac{m}{h\pi R^2} 2\pi h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} mR^2$$



$$I_0 = \int_V R^2 dm = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} R^2 \frac{m}{\ell} dR = \frac{m}{\ell} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} R^2 dR = \frac{1}{12} m\ell^2$$

Если ось вращения проходит не через центр инерции (центр масс) АТТ, тогда для вычисления момента инерции используют теорему Штейнера:



$$\boxed{I_z = I_O + md^2} \tag{5-4}$$

где I_z – момент инерции АТТ относительно произвольной оси *z*;

I_O – момент инерции АТТ относительно параллельной оси, проходящей через центр инерции (центр масс) тела;

m – масса АТТ;

d – кратчайшее расстояние между осями.

Учитывая введенные обозначения, можно записать связь между моментом импульса частицы или АТТ и их моментом инерции:

$$\boxed{\vec{L}_i = I_i \vec{\omega}} \qquad \boxed{\vec{L}_{\text{АТТ}} = I_{\text{АТТ}} \vec{\omega}} \tag{5-5}$$

Подставляя выражение (5-5) в уравнение моментов (4-12), получим:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\left(I\vec{\omega}\right)}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

Основное уравнение динамики вращательного движения АТТ относительно неподвижной оси:

– в ИСО произведение момента инерции АТТ на его угловое ускорение равно векторной сумме моментов всех внешних сил, действующих на это тело:

$$\boxed{I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n} \tag{5-6}$$

Для записи этого векторного уравнения в скалярной форме выбирают удобную ИСО (ось Oz направляют вдоль неподвижной оси вращения) и находят проекции всех векторов на ось Oz:

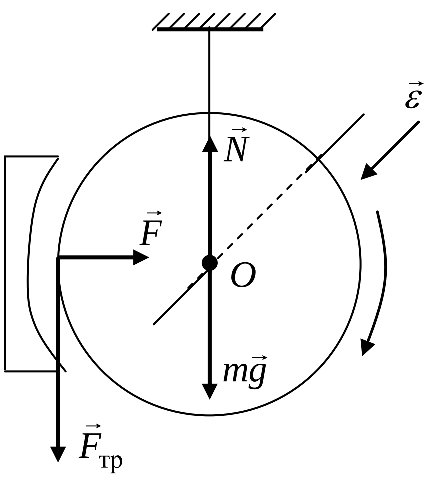
$$Oz: \; I_z \varepsilon_z = M_{1z} + M_{2z} + \ldots + M_{nz}.$$

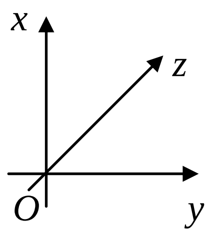
Демонстрации:

№3. Маятник Обербека.

№4. Скатывание двух цилиндров.

<u>Задача</u>. С какой силой следует прижимать тормозную колодку к колесу, имеющему форму сплошного диска массой 10 кг и радиусом 0,1 м и вращающемуся с частотой 30 об/с, чтобы его остановить в течение 20 с, если коэффициент трения между колодкой и ободом колеса равен 0,5?





$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{mg} + \vec{M}_N + \vec{M}_F + \vec{M}_{F_{тр}}$$

$$Oz\!: \; I_z\varepsilon_z = 0 + 0 + 0 - M_{F_{тр}}$$

$$I_z = \frac{1}{2}mR^2,$$

$$\varepsilon_z = \frac{\omega_z - \omega_{Oz}}{t} = \frac{0 - 2\pi\nu_0}{t},$$

$$M_{тр} = F_{тр} \cdot R, \qquad F_{тр} = \mu N = \mu F.$$

$$\frac{1}{2}mR^2\left(-\frac{2\pi\nu_0}{t}\right) = -\mu FR.$$

$$F = \frac{\pi\nu_0 mR}{\mu t} = \frac{\pi \cdot 30 \cdot 10 \cdot 0{,}1}{0{,}5 \cdot 20} = 9{,}4 \text{ (Н).}$$

5. Условия равновесия АТТ

Для того, чтобы АТТ находилось в равновесии (в покое) необходимо:

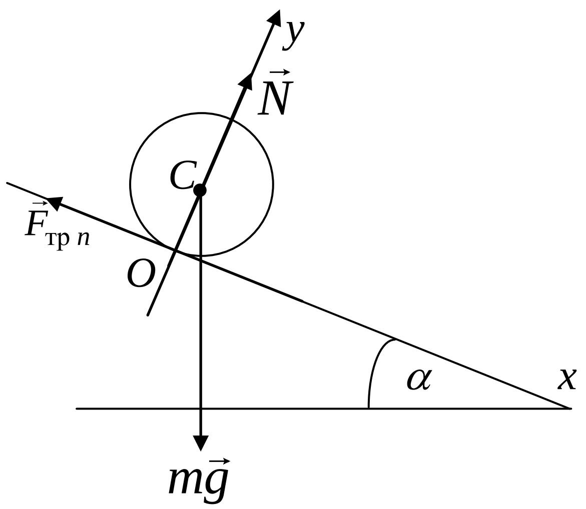
1) чтобы АТТ не перемещалось в пространстве (не участвовало в поступательном движении) нужно, чтобы линии действия всех сил, действующих на тело, проходили через центр инерции (центр масс) АТТ, и равнодействующая всех сил должна быть равна нулю.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0. \qquad \text{(5-7а)}$$

2) если линии действия каких-то сил не проходят через центр инерции (центр масс) АТТ, но равнодействующая равна нулю, тогда, чтобы АТТ не участвовало во вращательном движении нужно, чтобы векторная сумма моментов всех внешних сил была равна нулю.

$$\vec{M}_1 \neq \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n = 0. \qquad \text{(5-7б)}$$

6. Плоское движение АТТ



В случае сложного движения АТТ (например, процесс скатывания (без проскальзывания) обруча, диска, цилиндра, шара и т. п. с наклонной плоскости) необходимо записать основное уравнение динамики центра инерции (центра масс) АТТ и основное уравнение динамики вращательного движения АТТ вокруг оси, проходящей через центр инерции (центр масс) АТТ:

$$\begin{cases} m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}\,n}, \\ I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{mg} + \vec{M}_N + \vec{M}_{\text{тр}} \end{cases}$$

где $\vec{F}_{\text{тр}\,n}$ – сила трения покоя (трением качения пренебречь);

$\vec{M}_{mg}, \vec{M}_N, \vec{M}_{\text{тр}}$ – моменты сил тяжести, реакции опоры и трения покоя.

В проекциях на координатные оси:

$$Ox: ma_{Cx} = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}\,n}$$

$$Oy: 0 = -mg\cos\alpha + N$$

$$Oz: I_z\varepsilon_z = F_{\text{тр}\,n} \cdot R$$

Учитывая, что $I_z = kmR^2$, где k – коэффициент, учитывающий форму скатывающегося тела: k = 1 для обруча, k = 0,5 для диска, цилиндра, k = 0,4 для шара),

$$a_{Cx} = \varepsilon_z R,$$

тогда

$$\begin{cases} ma_{Cx} = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}\,n} \\ kmR^2\dfrac{a_C}{R} = F_{\text{тр}\,n} \cdot R \end{cases} \to \begin{matrix} ma_C = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}\,n} \\ kma_C = F_{\text{тр}\,n} \end{matrix} \to \boxed{a_C = \dfrac{g\sin\alpha}{k+1}}$$

Откуда $F_{\text{тр}\,n} = \dfrac{k}{k+1}mg\sin\alpha$.

Условие, при котором тело не будет проскальзывать, запишется

$$F_{\text{тр покоя}} \le F_{\text{тр скольжения}}$$

$$\frac{k}{k+1} mg\,sin\alpha \le \mu N = \mu mg\,cos\alpha,$$

$$\text{откуда} \quad tg\alpha \le \frac{k+1}{k}\mu,$$

т. е. если $tg\alpha$ превысит значение $\frac{k+1}{k}\mu,$ то скатывание будет проходить с проскальзыванием!

Учитывая, что при равноускоренном движении центра инерции $\vec{a}_C = const$, скорость центра инерции в конце скатывания

$$\ell = \frac{\upsilon_C^2}{2a_C} \to \upsilon_C = \sqrt{\frac{2g\ell}{k+1} sin\alpha}$$

и время скатывания

$$\ell = \frac{a_C t^2}{2} \to t = \sqrt{\frac{2(k+1)\ell}{g\,sin\alpha}},$$

где ℓ – длина наклонной плоскости.

Но основное уравнение динамики вращательного движения АТТ можно записывать относительно неподвижной оси, проходящей через точку O соприкосновения образующей скатывающегося тела и плоскости.

$$I_0\varepsilon = mgR\,sin\alpha,$$

где $I_0 = I_C + mR^2 = (k+1)mR^2$ находим по теории Штейнера;

отсюда, учитывая $\varepsilon = {a_C}/{R}$, получим тот же результат:

$$(k+1)mR^2\frac{a_C}{R} = mgR\,sin\alpha \quad \to \quad \boxed{a_C = \frac{g\,sin\alpha}{k+1}}$$