

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

С. Н. Крохин, Л. А. Литневский

КРАТКИЙ КУРС
ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Допущено научно-методическим советом по физике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов высших
учебных заведений, обучающихся по техническим
направлениям подготовки и специальностям

Омск 2015

УДК 530.1(075.8)
ББК 22.371.я73
К83

Крохин С. Н. **Краткий курс физики твердого тела**: Учебное пособие / С. Н. Крохин, Л. А. Литневский; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2015. 67 с.

Учебное пособие содержит краткие теоретические сведения по основным вопросам физики твердого тела, рекомендации по решению задач по этому разделу курса общей физики, а также большой набор задач различной степени сложности для самостоятельной работы.

Предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов второго курса всех специальностей и направлений подготовки очной и заочной форм обучения.

Библиогр.: 11 назв. Рис. 19. Прил. 1.

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, профессор В. И. Струнин;
доктор техн. наук, профессор В. А. Нехаев.

ISBN 978-5-949-41111-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
1. Программа дисциплины «Физика твердого тела»	6
2. Элементы зонной теории твердых тел	6
2.1. Виды сил связи и типы кристаллов	6
2.2. Энергетические зоны. Распределение Ферми – Дирака.....	9
2.3. Классификация твердых тел по зонной теории	14
2.4. Примеры решения задач	15
2.5. Задачи для самостоятельного решения	18
3. Тепловые свойства твердых тел.....	20
3.1. Тепловое расширение твердых тел.....	20
3.2. Теплоемкость твердых тел	22
3.3. Теплопроводность твердых тел	24
3.4. Примеры решения задач	26
3.5. Задачи для самостоятельного решения	30
4. Тепловое излучение тел.....	33
4.1. Примеры решения задач	35
4.2. Задачи для самостоятельного решения	36
5. Электропроводность металлов и полупроводников	39
5.1. Электропроводность металлов	39
5.2. Собственные полупроводники и их проводимость	41
5.3. Примесные полупроводники и их проводимость	44
5.4. Фотопроводимость полупроводников	47
5.5. Эффект Холла	47
5.6. Примеры решения задач	49
5.7. Задачи для самостоятельного решения	52
6. Контактные явления.....	54
6.1. Контакт электронного и дырочного полупроводников	54
6.2. Термоэлектронная эмиссия	58
6.3. Контакт двух металлов	59
6.4. Задачи для самостоятельного решения	62
Библиографический список.....	63
Приложение. Справочные данные.....	64

ВВЕДЕНИЕ

Физика твердого тела (ФТТ) – это отдельная область знаний, занимающаяся изучением структуры и свойств кристаллических и аморфных твердых тел. Благодаря этой научной дисциплине в нашем распоряжении оказались транзисторы и микросхемы, рубиновый и полупроводниковый лазеры, а в конечном счете и вся полупроводниковая техника и микроэлектроника, постоянно появляются новые конструкционные материалы с новыми свойствами. Только за последние несколько лет в наш быт прочно вошли жидкокристаллические мониторы и телевизоры, флэш-память, светодиодные источники света, цифровые фотоаппараты и многое другое. Появление этих чудес техники было бы невозможно без тех успехов, которых достигла физика твердого тела к концу двадцатого века.

В техническом вузе ФТТ изучается как один из заключительных разделов курса общей физики, в котором рассматриваются лишь самые важные и основополагающие вопросы физики твердого тела, такие как квантовые статистические распределения (Ферми – Дирака и Бозе – Эйнштейна), законы теплового излучения тел, тепловые свойства твердых тел, электропроводность металлов и полупроводников, фотопроводимость, контактные явления.

Ни один из названных выше вопросов невозможно изучать без твердых знаний основ квантовой физики. Поэтому, приступая к изучению физики твердого тела, необходимо повторить основные законы квантовой физики, в первую очередь принцип Паули, гармонический осциллятор, атом водорода и другие, а также необходимо повторить основы статистической физики и прежде всего распределение Гиббса, понятие функции распределения, средние и среднеквадратичные значения случайных величин.

В учебном пособии имеются необходимые для решения задач теоретические сведения по основным вопросам раздела и набор задач по каждой теме, которые помогут глубже понять данный раздел курса, а также необходимые для решения задач справочные данные.

В начале условия каждой задачи в скобках показана ее сложность.

1. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ «ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА»

Зонная теория твердых тел. Виды сил связи и типы кристаллов. Распределение электронов в кристалле по квантовым состояниям (распределение Ферми – Дирака). Металлы, диэлектрики и полупроводники.

Тепловые свойства кристаллов. Тепловое расширение твердых тел. Теплоемкость твердых тел. Закон Дюлонга – Пти. Фононы. Распределение фононов по энергиям (распределение Бозе – Эйнштейна). Квантовая теория теплоемкости кристаллов. Теплопроводность твердых тел.

Тепловое излучение тел и его основные законы. Энергетическая светимость. Поглощательная и излучательная способности. Закон Кирхгофа. Абсолютно черное тело. Закон Стефана – Больцмана. Закон смещения Вина. Формула Рэлея – Джинса. «Ультрафиолетовая катастрофа». Квантовая гипотеза и формула Планка. Пирометры.

Электропроводность металлов. Зависимость сопротивления металла от температуры. Сверхпроводимость. Высокотемпературные сверхпроводники.

Собственные и примесные полупроводники. Проводимость полупроводников и ее температурная зависимость. Терморезисторы.

Фотопроводимость полупроводников. Красная граница фотопроводимости. Полупроводниковые фоторезисторы.

Контакт электронного и дырочного полупроводников. Полупроводниковый диод, транзистор.

Термоэлектронная эмиссия и ее практическое применение. Контакт двух металлов. Эффекты Зеебека, Пельтье и Томсона. Термопара.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ЗОННОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

2.1. Виды сил связи и типы кристаллов

Твердые тела представляют собой совокупность большого числа частиц (атомов, молекул, ионов и т. п.), которые участвуют в электромагнитном взаимодействии друг с другом. Для образования устойчивой системы из взаимодействующих атомов или молекул необходимо, чтобы между ними возникали не только силы притяжения, но и силы отталкивания, препятствующие беспредельному сближению частиц и их полному слиянию.

Источником сил отталкивания является прежде всего взаимодействие ядер, концентрирующих в себе значительные положительные заряды.

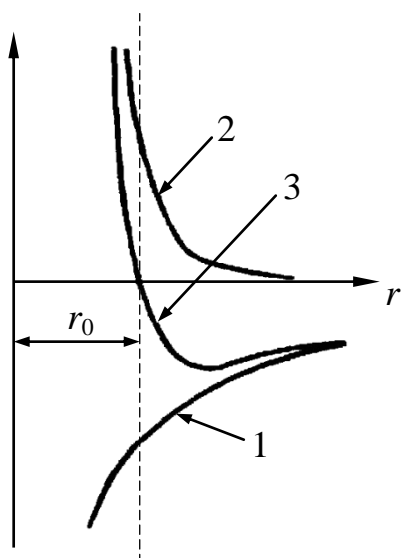


Рис. 1. Силы взаимодействия между частицами твердого тела

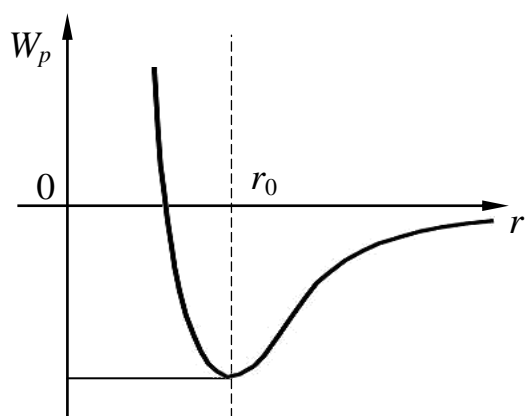


Рис. 2. Потенциальная энергия взаимодействия между частицами твердого тела

Независимо от природы сил, возникающих при сближении частиц, общий характер их поведения остается одинаковым (рис. 1): на относительно больших расстояниях появляются силы притяжения, быстро увеличивающиеся (по модулю) с уменьшением расстояния между частицами (кривая 1); на малых расстояниях возникают силы отталкивания, которые с уменьшением расстояния увеличиваются значительно быстрее, чем силы притяжения (кривая 2).

На расстоянии $r = r_0$ силы отталкивания уравновешивают силы притяжения, и результирующая сила взаимодействия обращается в нуль (кривая 3), а потенциальная энергия взаимодействия принимает минимальное значение (рис. 2).

Поэтому состояние частиц, сближенных до расстояния r_0 , является состоянием устойчивого равновесия, вследствие чего частицы, предоставленные самим себе, должны выстраиваться в строгом порядке на расстоянии r_0 друг от друга, образуя тело с правильной внутренней структурой – кристалл.

Такая структура будет сохраняться до тех пор, пока энергия связи остается выше по абсолютному значению энергии теплового движения частиц. Частицы кристалла не могут свободно покидать свои положения равновесия, так как при удалении от этих положений энергия частиц увеличивается и появляется сила, стремящаяся вернуть их в положения равновесия. Единственной доступной формой движения для таких частиц является их беспорядочное колебание около положения равновесия.

В настоящее время известны тысячи кристаллических веществ, это и сравнительно простые металлы и их сплавы и кристаллы со сложной структурой.

рой, уникальные свойства которых обусловлены особым расположением большого числа атомов. Между тем все эти кристаллы состоят всего из нескольких десятков сортов атомов, но по-разному расположенных относительно друг друга.

Известно, что электромагнитное взаимодействие между атомами заставляет атомы объединяться и формировать разные типы кристаллической решетки. В этом процессе главную роль играет электростатическая энергия взаимодействия зарядов, а в некоторых случаях и энергия магнитного взаимодействия, хотя вклад ее намного меньше.

Как перечисленные взаимодействия, так и атомные оболочки характеризуются определенной «симметричностью», и поэтому атомы объединяются, как правило, в весьма симметричные структуры. По этой же причине разные, но близкие по характеристикам атомы формируют кристаллические решетки, в которых атомы расположены идентично. Знание этих общих закономерностей построения кристаллов позволяет часто предсказывать новые структуры и материалы или улучшать физические свойства уже существующих материалов.

В настоящее время по характеру связи атомов выделяют пять типов кристаллов: 1) ионные кристаллы, 2) ковалентные кристаллы, 3) металлические кристаллы, 4) молекулярные кристаллы с водородными связями, 5) Ван-дер-Ваальсовы кристаллы. Три первых типа кристаллов играют очень большую роль в природе и в современной технике. Остановимся на основных видах связей в кристаллах подробнее.

Ионные кристаллы состоят из чередующихся разноименно заряженных ионов, между которыми действуют силы взаимного кулоновского притяжения. Бесконечному сжатию препятствуют имеющие квантовую природу силы отталкивания, возникающие при перекрытии электронных облаков соседних ионов. Ионные кристаллы, часто довольно хрупкие, как правило, имеют достаточно простые, плотные и симметричные решетки, например, кубические. Ионные кристаллы образуются, как правило, элементами первой и седьмой групп таблицы Менделеева (щелочные металлы в соединении с галогенами). Примером такого типа кристаллов являются кристаллы поваренной соли.

Ковалентные кристаллы существуют благодаря ковалентным связям между атомами. При перекрытии электронных облаков соседних атомов возникает область с более высокой плотностью отрицательного заряда, к которой притягиваются оба атома. У атома может быть несколько ковалентных свя-

зей, расположенных под углом друг к другу. Количество таких связей атома зависит от его валентности. Ковалентные связи образуются, как правило, элементами третьей – пятой групп таблицы Менделеева. Примером ковалентного кристалла является алмаз, каждый атом углерода в котором находится в центре тетраэдра и взаимодействует с четырьмя такими же соседними атомами, расположенными в углах этого тетраэдра.

Металлические кристаллы существуют благодаря наличию в металлах свободных электронов, играющих «цементирующую» роль. В таких кристаллах ионы металла взаимодействуют не только друг с другом силами отталкивания, но и силами взаимного притяжения с обобществленными валентными электронами, заполняющими весь объем металла. Очевидно, что расстояние до ближайших электронов от каждого иона меньше, чем расстояние между ионами, чем и обеспечивается высокая прочность металлов. Наиболее ярким примером металлических кристаллов являются щелочные металлы.

Деление кристаллов на типы весьма условно. Так, существуют кристаллы, которые можно считать переходными между этими типами. Встречаются кристаллы, в которых часть связей ковалентная, а часть – водородная, или кристаллы, в которых ковалентная связь дополнена полярной (ионной).

2.2. Энергетические зоны. Распределение Ферми – Дирака

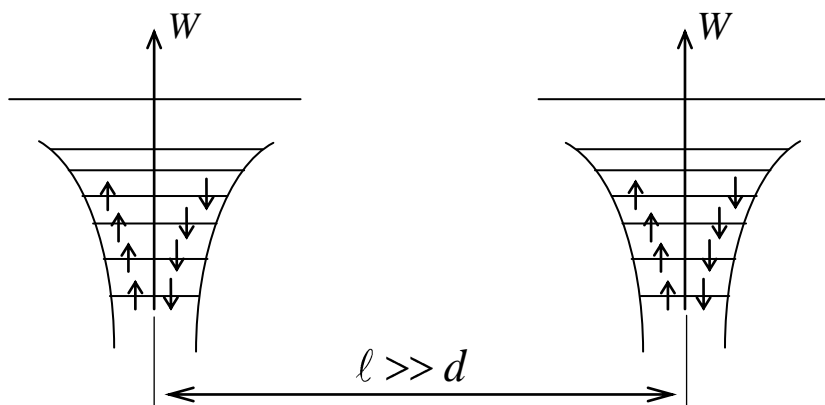


Рис. 3. Заполнение квантовых состояний электронами в отдельных атомах

(здесь и ниже электроны на уровнях изображены стрелками, показывающими направление спина)

полняют квантовые состояния в соответствии с принципом минимума энергии, набором квантовых чисел и принципом запрета Паули.

Электрон в твердом теле (даже в металлах) – несвободная частица, любое твердое тело для электрона является потенциальной ямой. А энергия такой частицы всегда квантуется, т.е. принимает не любые значения, а строго определенные. Электроны в отдельных атомах за-

Между отдельными атомами (рис. 3), когда расстояние между ними намного больше размера атома ($\ell \gg d$), существует довольно широкий и высокий потенциальный барьер, преодолеть который электроны самостоятельно не могут (не хватает энергии, а туннельный эффект для такого барьера маловероятен).

Так как время жизни электрона в любом возбужденном состоянии составляет $\sim 10^{-8}$ с, то из принципа неопределенностей Гейзенберга можно оценить энергетическую ширину уровня: $\Delta W \geq h/\Delta t \sim 10^{-7}$ эВ.

При сближении атомов (рис. 4) до межузельного расстояния ($\sim 10^{-10}$ м) происходит перекрытие электронных облаков, что приводит к существенному уменьшению ширины и высоты потенциального барьера между атомами. Это приводит к тому, что валентные электроны могут свободно переходить к соседним атомам, а вероятность туннелирования электронов, занимающих более низкие состояния, резко увеличивается. Однако такой переход одинаковых электронов мог бы привести к нарушению запрета Паули. Этого не происходит, так как одновременно с уменьшением высоты и ширины потенциального барьера происходит и качественное изменение энергетических уровней – они расщепляются на огромное количество (порядка числа Авогадро на моль вещества) близко расположенных энергетических уровней, превращаясь в энергетические зоны.

Так как скорость движения валентных электронов составляет $\sim 10^5$ м/с, то, двигаясь по кристаллу, отдельный электрон в пределах одного атома ($\ell \sim d \sim 10^{-10}$ м) находится приблизительно время $\Delta t = \ell/v \sim 10^{-15}$ с. Воспользовавшись принципом неопределенностей Гейзенберга, можно оценить неопределенность его энергии: $\Delta W = h/\Delta t \sim$ несколько эВ! Значит, это уже не узкий энергетический уровень, а широкая энергетическая зона.

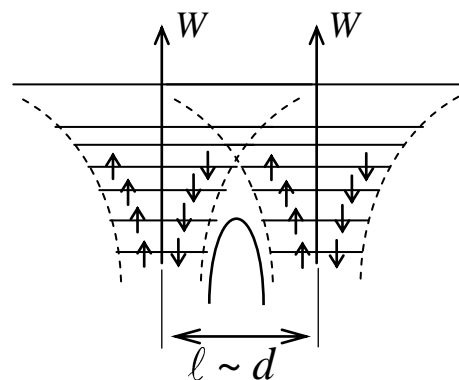


Рис. 4. Уменьшение размеров потенциального барьера

Таким образом, при формировании твердого тела из отдельных атомов энергетические уровни электронов трансформируются в широкие энергетические зоны, энергия в которых тоже квантуется (рис. 5).

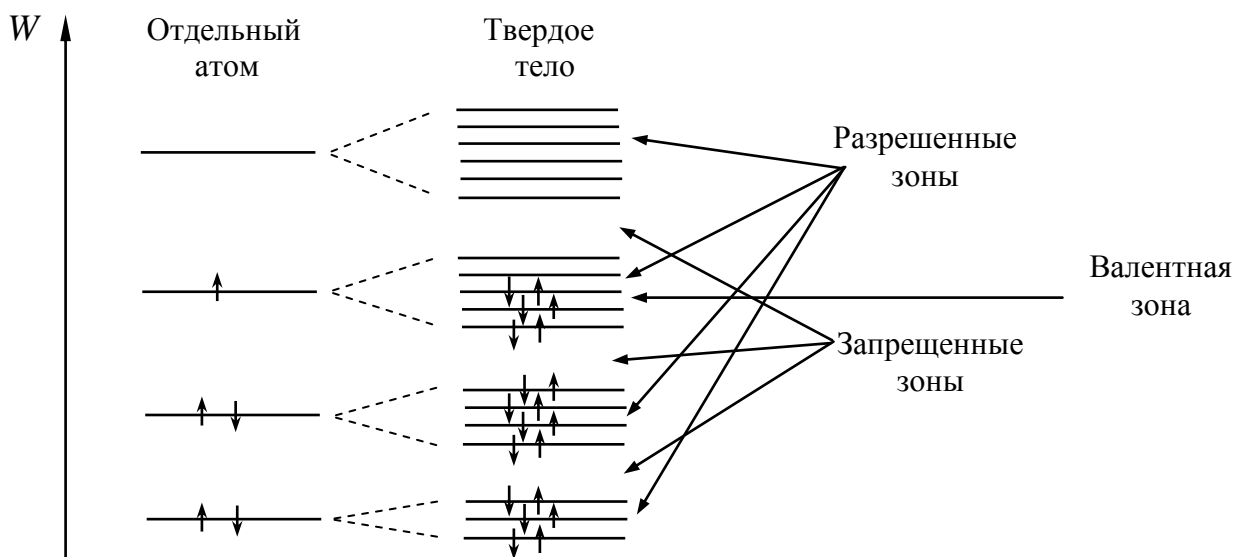


Рис. 5. Разрешенные и запрещенные энергетические зоны в твердом теле

Электроны в твердом теле распределяются по квантовым состояниям в соответствии с распределением Ферми – Дирака

$$\langle N_F \rangle = \left[\exp \left(\frac{W - W_F}{k_B T} \right) + 1 \right]^{-1}, \quad (1)$$

которое позволяет вычислить среднее (по времени) число фермионов (электронов), находящихся в одном квантовом состоянии с энергией W при температуре кристалла T . Можно убедиться в том, что наибольшее значение функции равно 1, а наименьшее – 0, поэтому можно считать, что распределение Ферми – Дирака также позволяет вычислить вероятность, с которой электрон будет обнаруживаться в данном квантовом состоянии.

Смысл распределения Ферми – Дирака состоит в том, что большинство электронов занимают квантовые состояния в валентной зоне с вероятностью, близкой к единице, и лишь самые верхние электроны (электроны с наибольшей энергией) благодаря тепловому движению могут с достаточно большой вероятностью перейти на близлежащие более высокие энергетические уровни.

Уровни энергии в энергетической зоне расположены неравномерно: в нижней части зоны уровни расположены реже, а с ростом энергии уровни сгу-

щаются (как и в атоме водорода, например). Густоту энергетических уровней принято характеризовать так называемой плотностью уровней

$$g(W) = \frac{4\pi V}{h^3} 2m^{3/2} W^{1/2}, \quad (2)$$

которая позволяет вычислить количество уровней, приходящихся на единичный интервал энергий. В формуле (2) h – постоянная Планка; m – масса электрона.

Нет ничего удивительного в том, что густота уровней зависит от размеров кристалла: чем больше кристалл, тем больше электронов и тем больше им требуется уровней, чтобы не нарушить принцип запрета Паули.

Произведение формул (1) и (2) дает функцию распределения электронов в металлах по энергиям:

$$f(W) = \langle N_F \rangle g(W). \quad (3)$$

Условие нормировки для этой функции распределения имеет вид:

$$\int_0^\infty \langle N_F \rangle g(W) dW = N, \quad (4)$$

т. е. функция распределения нормирована на число частиц (электронов).

Из распределения Ферми – Дирака (1) вытекает, что при $T = 0$ все уровни, начиная с самого нижнего, вплоть до уровня энергии $W = W_F$ (этот уровень энергии электронов в твердых телах называют уровнем Ферми) заполнены, а все уровни энергии, расположенные выше энергии Ферми, – свободны. Это обстоятельство позволяет верхний предел интегрирования в формуле (4) при $T = 0$ ограничить энергией Ферми и получить выражение для энергии Ферми:

$$W_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n_e}{8\pi} \right)^{2/3}, \quad (5)$$

где $n_e = zn = z \frac{\rho N_A}{M}$ – концентрация валентных электронов; z – валентность атомов; n – концентрация атомов.

Оценка величины энергии Ферми W_F для электронов в твердых телах ($n_e \sim 10^{29} \text{ м}^{-3}$, $m \sim 10^{-30} \text{ кг}$) дает результат:

$$W_F = \frac{10^{-68}}{10^{-30}} (10^2 \cdot 10^{27})^{2/3} \sim 10^{-38} \cdot 20 \cdot 10^{18} \sim 10^{-19} \sim \text{единицы эВ!}$$

Если условно ввести выражение для кинетической энергии электронов на уровне Ферми

$$W_F = \frac{m v_F^2}{2}, \quad (6)$$

то

$$v_F = \sqrt{\frac{2W_F}{m}}; \quad (6a)$$

$$v_F \sim \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-19}}{10^{-30}}} \sim 10^5 \div 10^6 \text{ м/с.}$$

Из распределения Ферми – Дирака при $T > 0$ для $W = W_F$ получится, что $\langle N_F \rangle = 1/2$. Это позволяет дать еще одно определение уровня Ферми – это уровень энергии электронов в твердом теле, вероятность заполнения которого при любой температуре, отличной от 0 К, равна $1/2$.

Поскольку функция распределения не нормирована на единицу, то, например, для вычисления средней энергии электронов в валентной зоне необходимо использовать формулу:

$$\langle W \rangle = \frac{\int_0^\infty W \langle N_F \rangle g(W) dW}{\int_0^\infty \langle N_F \rangle g(W) dW}. \quad (7)$$

При $T = 0$ К средняя энергия электронов в твердом теле

$$\langle W \rangle = \frac{3}{5} W_F = 0,6 W_F. \quad (8)$$

Такой результат является следствием того, что уровни энергии располагаются не эквидистантно, а сгущаются по мере увеличения энергии.

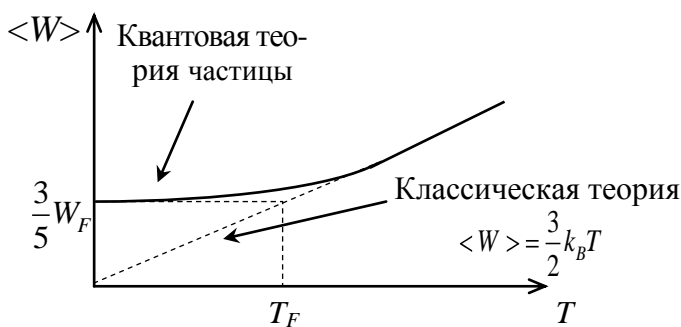


Рис. 6. Средняя энергия электронов в твердом теле (классическая и квантовая теории)

При $T > 0$ К средняя энергия электронов (рис. 6) слабо зависит от температуры, так как тепловому возбуждению подвергаются не все электроны, а лишь небольшое их количество:

$$\frac{\Delta N}{N_0} \approx \frac{k_B T}{W_F} \rightarrow \Delta N = N_0 \frac{k_B T}{W_F} \quad (9)$$

Так, при комнатной температуре $T = 300 \text{ К}$ ($k_B T \sim 0,025 \text{ эВ}$) тепловому возбуждению подвергается лишь несколько процентов ($\Delta N/N_0 \sim 2,5 \%$) электронов.

Если ввести понятие «температура Ферми (температура вырождения)»:

$$k_B T_F = W_F \rightarrow T_F = \frac{W_F}{k_B}, \quad (10)$$

то при такой температуре тепловому возбуждению подвержены уже все электроны ($\Delta N/N_0 \sim 100 \%$)!

А при $T_F \sim 10^4 \div 10^5 \text{ К}$ твердого тела нет, все электроны свободные!

2.3. Классификация твердых тел по зонной теории

Электроны в твердых телах занимают все уровни в разрешенных зонах, начиная с самой нижней и вплоть до последней зоны, образованной из валентного уровня – валентной зоны. По степени заполнения энергетических уровней этой последней зоны все твердые вещества делятся на проводники, полупроводники и диэлектрики.

Если в валентной зоне не все энергетические уровни заняты электронами и при сообщении электронам даже небольшой дополнительной энергии (например, электрическим полем) у них есть возможность перейти на более высокие уровни в этой зоне, то такое твердое вещество является проводником (при этом валентная зона является зоной проводимости).

Если в валентной зоне все энергетические уровни заняты электронами, а до ближайшей свободной зоны (зоны проводимости) лежит широкая запрещенная зона с энергией $\Delta W \sim 5 \text{ эВ}$ (энергия активации), то такие твердые вещества являются диэлектриками.

Если в валентной зоне все энергетические уровни заняты электронами, а до ближайшей свободной зоны (зоны проводимости) лежит неширокая запрещенная зона с энергией $\Delta W \sim 1 \text{ эВ}$ (энергия активации), то такое твердое вещество будет полупроводником (рис. 7).

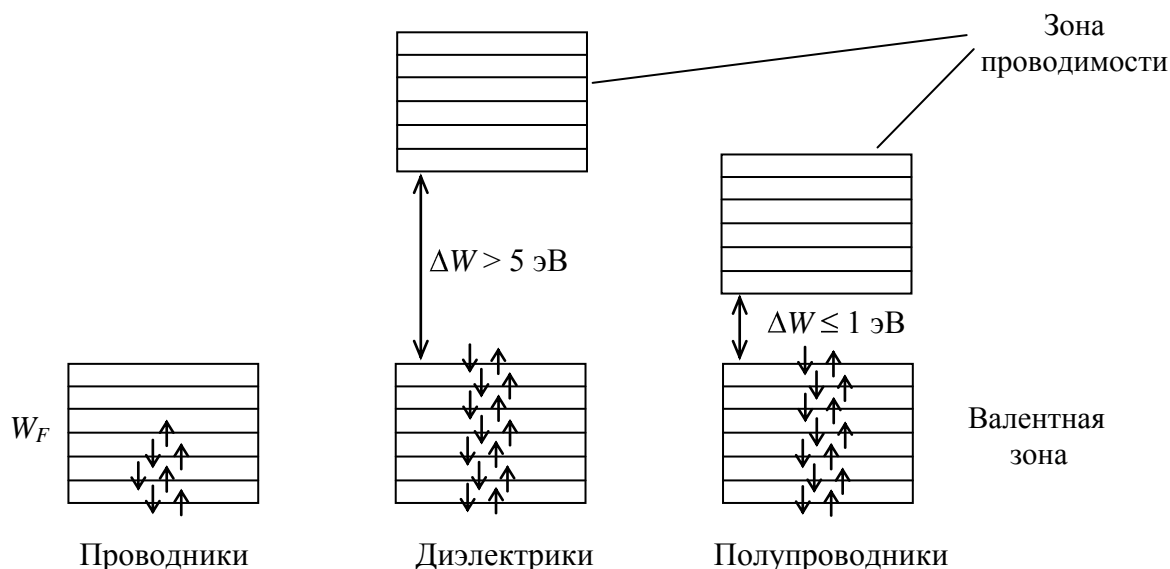


Рис. 7. Классификация твердых тел по зонной теории

2.4. Примеры решения задач

Задача 1. Определить максимальную энергию, которой могут обладать свободные электроны в алюминии при абсолютном нуле, если на каждый атом металла приходится по три электрона. Молярная масса алюминия 27 г/моль, плотность 2700 кг/м³. Ответ представить в электронвольтах.

Дано:

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

$$M = 0,027 \text{ кг/моль}$$

$$\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$$

$$z = 3$$

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

$$W_F = ?$$

Решение:

Максимальная энергия свободных электронов в металле при абсолютном нуле равна энергии Ферми:

$$W_F = \frac{h^2}{2m_e} \left(\frac{3n_e}{8\pi} \right)^{2/3},$$

где n_e – концентрация валентных электронов, которая с учетом условия задачи вычисляется по формуле:

$$n_e = zn = z\rho \frac{N_A}{M}.$$

Здесь z – валентность атомов; n – концентрация атомов.

После подстановки в формулу для W_F выражения для n_e окончательно получим:

$$W_F = \frac{h^2}{2m_e} \left(\frac{3}{8\pi} \cdot z\rho \frac{N_A}{M} \right)^{2/3}.$$

Производим вычисления:

$$W_F = \frac{(6,626 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}} \left(\frac{3}{8 \cdot 3,14} \cdot 3 \cdot 2700 \frac{6,02 \cdot 10^{23}}{27 \cdot 10^{-3}} \right)^{2/3} = 1,867 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} \approx 11,7 \text{ эВ}.$$

Ответ: $W_F \approx 11,7 \text{ эВ}$.

Задача 2. Плотность некоторого металла $8,9 \text{ г/см}^3$, массовое число 59. До какой температуры надо было бы нагреть классический электронный газ, чтобы средняя энергия его электронов оказалась равной средней энергии электронов в этом металле при $T_m = 0$? Принять, что на каждый атом приходится один электрон.

Дано:

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

$$A_r = 59 \text{ а. е. м.}$$

$$\rho = 8900 \text{ кг/м}^3$$

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$$

$$T_m = 0 \text{ К}$$

$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

$$T = ?$$

Решение:

Средняя энергия классических электронов

$$\langle W \rangle = \frac{3}{2} k_B T.$$

С другой стороны, эта энергия равна средней энергии электронов в металле при $T_m = 0 \text{ К}$:

$$\langle W \rangle = \frac{3}{5} W_F.$$

Приравниваем правые части этих формул друг к другу и выражаем температуру:

$$T = \frac{2}{5} \frac{W_F}{k_B}.$$

Энергию Ферми находим по формуле:

$$W_F = \frac{h^2}{2m_e} \left(\frac{3n_e}{8\pi} \right)^{2/3},$$

где с учетом того, что массовое число достаточно точно характеризует молярную массу элемента M ,

$$n_e = \frac{N}{V} = \rho \frac{N_A}{M}, \text{ так как } N = \frac{m}{M} N_A.$$

Окончательно получим:

$$T = \frac{h^2}{5k_B m_e} \left(\frac{3\rho N_A}{8\pi M} \right)^{2/3}.$$

После подстановки числовых значений получим:

$$T = \frac{(6,626 \cdot 10^{-34})^2}{5,1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}} \cdot \left(\frac{3 \cdot 8900 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{8 \cdot 3,14 \cdot 59 \cdot 10^{-3}} \right)^{2/3} = 34221 \text{ К} \approx 34 \text{ 000 К}.$$

Ответ: $T \approx 3,4 \cdot 10^4 \text{ К}$.

Задача 3. Во сколько раз отличаются вероятности заполнения электронами в меди энергетического уровня, расположенного на 1 % ниже и на 1 % выше уровня Ферми при температуре 276 К? Энергия Ферми для меди 7,1 эВ.

Дано:

$$W_F = 7,1 \text{ эВ}$$

$$W_1 = 0,99 \cdot W_F$$

$$W_2 = 1,01 \cdot W_F$$

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$$

$$T = 276 \text{ К}$$

$$\frac{\langle N_F(W_1) \rangle}{\langle N_F(W_2) \rangle} - ?$$

Решение:

Распределение Ферми – Дирака для электронов:

$$\langle N_F(W) \rangle = \left[\exp\left(\frac{W - W_F}{k_B T}\right) + 1 \right]^{-1}$$

Это распределение и будет определять вероятность заполнения электронами определенного энергетического уровня, в нашем случае уровня W_1 и W_2 :

$$\frac{\langle N_F(W_1) \rangle}{\langle N_F(W_2) \rangle} = \frac{\left[\exp\left(\frac{W_1 - W_F}{k_B T}\right) + 1 \right]^{-1}}{\left[\exp\left(\frac{W_2 - W_F}{k_B T}\right) + 1 \right]^{-1}}.$$

После подстановки числовых значений имеем:

$$\frac{\langle N_F(W_1) \rangle}{\langle N_F(W_2) \rangle} = \frac{\left[\exp\left(\frac{-0,01 \cdot 7,1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 276}\right) + 1 \right]^{-1}}{\left[\exp\left(\frac{0,01 \cdot 7,1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 276}\right) + 1 \right]^{-1}} = 19,74 \approx 20 \text{ раз}.$$

Ответ: $\frac{\langle N_F(W_1) \rangle}{\langle N_F(W_2) \rangle} \approx 20 \text{ раз}$.

Задача 4. Металл находится при температуре абсолютного нуля. Определить, во сколько раз число электронов с кинетической энергией от $0,5W_F$ до W_F больше числа электронов с энергией от 0 до $0,5W_F$.

Дано:	Решение:
$W_1 = 0$	Функция распределения электронов в металле по энергиям
$W_2 = 0,5 W_F$	$f(W) = \langle N \rangle g(W)$,
$W_3 = W_F$	где плотность уровней
$T = 0 \text{ К}$	
$\frac{N_{23}}{N_{12}} = ?$	$g(W) = \frac{4\pi V}{h^3} 2m^{3/2} W^{1/2}$,

а среднее число частиц на уровне определяется распределением Ферми – Дирака и равно $\langle N_F \rangle = 1$ для $W < W_F$ и $\langle N_F \rangle = 0$ для $W > W_F$. Тогда после подстановки выражения для $g(W)$ в функцию распределения $f(W)$ и сокращения постоянных и интегрирования имеем:

$$\frac{N_{23}}{N_{12}} = \frac{\int_{0,5W_F}^{W_F} f(W) dW}{\int_0^{0,5W_F} f(W) dW} = \frac{\int_{0,5W_F}^{W_F} W^{1/2} dW}{\int_0^{0,5W_F} W^{1/2} dW} = \frac{1 - 0,5^{3/2}}{0,5^{3/2}} \approx 1,8$$

Ответ: $\frac{N_{23}}{N_{12}} \approx 1,8$ раза.

2.5. Задачи для самостоятельного решения

1. (1) Вычислить энергию Ферми для серебра при температуре 0 К. Считать, что на каждый атом серебра приходится один валентный электрон.
2. (1) Вычислить энергию Ферми для магния при температуре 0 К. Магний считать двухвалентным.
3. (2) Определить концентрацию свободных электронов в металле, для которого уровень Ферми соответствует 6,3 эВ при температуре 0 К.
4. (2) При какой концентрации свободных электронов в кристалле температура Ферми (температура вырождения) электронного газа в нем равна 0°С?
5. (2) Во сколько раз отличается число свободных электронов, приходящихся на один атом металла при температуре абсолютного нуля, в литии и цезии?
6. (2) Оценить температуру вырождения для калия, если принять, что на каждый атом приходится по одному свободному электрону.
7. (1) Найти среднюю энергию электронов в металле при 0 К, если их концентрация равна $3,6 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$.

8. (2) Вычислить среднюю энергию электронов в кристалле натрия при температуре абсолютного нуля.

9. (2) Средняя энергия электронов в некотором металле при абсолютном нуле равна 3,3 эВ. Чему равна концентрация валентных электронов в нем?

10. (2) Средняя энергия электронов в некотором металле при температуре абсолютного нуля равна 7,0 эВ. Считая металл трехвалентным, определить концентрацию атомов в этом металле.

11. (2) Полагая, что на каждый атом меди приходится по одному свободному электрону, определить температуру, при которой средняя кинетическая энергия электронов классического электронного газа равнялась бы средней энергии свободных электронов в меди при 0 К.

12. (3) Давление электронного газа в металлах является одним из основных факторов, определяющих их сжимаемость. Найти давление электронного газа при температуре 0 К в металле, у которого концентрация электронного газа равна $8,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

13. (1) Какова вероятность заполнения электронами в металле энергетического уровня, расположенного на 0,01 эВ ниже уровня Ферми, при температуре 18 °С?

14. (2) Найти разницу энергий (в эВ) между электронами, находящимися при температуре 27 °С на уровнях, вероятность заполнения которых равна 0,20 и 0,80.

15. (2) Как и во сколько раз изменится вероятность заполнения электронами энергетического уровня в металле, если уровень расположен на 0,10 эВ выше уровня Ферми, а температура изменяется от 1000 до 300 К?

16. (2) Как и во сколько раз изменится вероятность заполнения электронами энергетического уровня в металле, если уровень расположен на 0,01 эВ ниже уровня Ферми, а температура изменяется от 200 до 2000 К?

17. (3) Во сколько раз отличается вероятность заполнения в кристалле натрия уровня, энергия которого на 0,5 % меньше энергии Ферми, при температуре 300 и 70 К?

18. (1) Определить, какая часть электронов проводимости в металле при абсолютном нуле температуры имела бы кинетическую энергию, большую $0,50W_F$.

19. (1) Какая доля электронов в металле при 0 К имеет энергию в интервале от $0,50$ до $0,51W_F$?

20. (1) Оценить, какая доля свободных электронов в меди при температуре 0 К имеет энергию, не превышающую среднюю энергию электронов в меди при этих условиях.

21. (1) Полагая, что на каждый атом меди в кристалле приходится по одному свободному электрону, оценить долю электронов, энергия которых при абсолютном нуле лежит в интервале от 0,90 максимальной до максимальной.

22. (2) Электроны в металле находятся при температуре 0 К. Найти относительное число $\Delta N / N$ свободных электронов, кинетическая энергия которых отличается от энергии Ферми не более чем на 2 %.

23. (3) Кусок меди объемом 20 см^3 находится при температуре 0 К. Определить число свободных электронов, импульсы которых отличаются от импульса Ферми не более чем на 10 %.

24. (3) Полагая, что на каждый атом меди в кристалле приходится по одному свободному электрону, найти общее число свободных электронов в объеме 10 см^3 меди и число электронов, энергия которых при температуре 0 К заключена в интервале между 7,010 и 7,011 эВ.

25. (3) Вычислить суммарную кинетическую энергию электронов проводимости в 1 см^3 цезия при температуре 0 К.

3. ТЕПЛОВЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

3.1. Тепловое расширение твердых тел

При нагревании все тела расширяются. Для того чтобы объяснить причину теплового расширения твердых тел, обратимся к графику зависимости энергии взаимодействия частиц от расстояния между ними.

Если бы частицы были совершенно неподвижны, т. е. если бы их $W_k = 0$, то они находились бы друг от друга на расстоянии r_0 , соответствующем дну потенциальной ямы.

В действительности частицы совершают колебания около положения равновесия, т. е. обладают определенной кинетической энергией, возрастающей с повышением температуры (по квантовой теории твердого тела даже при $T = 0 \text{ К}$ частицы совершают колебания и обладают некоторой «нулевой» энергией W_0).

Представление о гармонических колебаниях частиц в кристаллической решетке корректно только при очень малой амплитуде колебаний атомов около положения равновесия и оказывается недостаточным для объяснения теплового расширения тел, поскольку в гармоническом приближении твердое тело вообще не подвержено тепловому расширению.

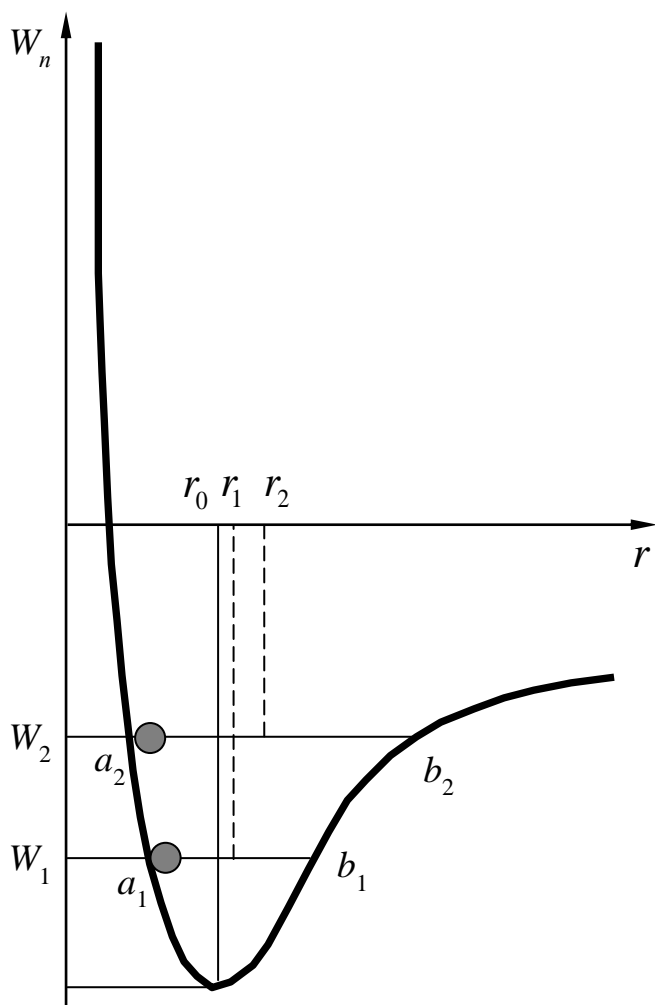


Рис. 8. График теплового расширения твердых тел

При температуре T_1 частица, обладая кинетической энергией W_{k1} , будет отклоняться от положения равновесия влево до точки a_1 и вправо до точки b_1 (рис. 8).

Вследствие асимметрии потенциальной кривой среднее положение колеблющейся частицы не будет совпадать с r_0 , а сдвинется вправо, достигнув значения r_1 .

При повышении температуры до T_2 частица перейдет на более высокий энергетический уровень, соответствующий кинетической энергии W_{k2} . При этом возникают возможные отклонения влево до a_2 и вправо до b_2 , а среднее положение примет значение r_2 .

Таким образом, видно, что при повышении температуры увеличивается расстояние между узлами кристаллической решетки, т. е. происходит тепловое расширение ($r_2 > r_1$).

Тепловым расширением называется эффект изменения размеров тела с изменением температуры при постоянном давлении. Это явление для твердых тел обусловлено несимметричностью потенциала взаимодействия атомов вещества в решетке, что приводит к агармоническим колебаниям атомов относительно среднего положения. Для газов это обусловлено увеличением кинетической энергии молекул и атомов.

Основной закон теплового расширения заключается в утверждении о том, что тело с линейным размером L в соответствующем измерении при увеличении его температуры на ΔT расширяется на величину

$$\Delta L = aL\Delta T, \quad (11)$$

где a – так называемый *коэффициент линейного теплового расширения*.

Аналогичные формулы имеются для расчета изменения площади и объема тела. В приведенном простейшем случае, когда коэффициент теплового расширения не зависит ни от температуры, ни от направления расширения, вещество будет равномерно расширяться по всем направлениям в строгом соответствии с формулой (11).

3.2. Теплоемкость твердых тел

При подведении тепловой энергии к твердым телам они нагреваются, но разные тела нагреваются по-разному, они отличаются теплоемкостью.

В рамках классических представлений был получен закон Дюлонга – Пти, который выполняется для большого количества твердых тел при комнатной температуре (и выше) и который утверждает: молярная теплоемкость всех твердых тел ни от чего не зависит и является постоянной, равной $3R$:

$$c_v = 3R. \quad (12)$$

Однако закон Дюлонга – Пти сталкивается с рядом проблем. Так, для металлов, где кроме ионов, расположенных в узлах решетки, есть еще и свободные электроны, молярная теплоемкость должна быть равна $4,5R$, но эксперимент показывает, что молярная теплоемкость и металлов, и диэлектриков одинакова и равна $3R$. Кроме того, из закона Дюлонга – Пти не следует зависимости теплоемкости от температуры, хотя экспериментально такая зависимость наблюдается в области низких температур. Объяснить эту зависимость классическая физика не смогла. Разрешение проблем оказалось возможным только в рамках квантовой физики.

Атомы, ионы, находящиеся в узлах кристаллической решетки, являются квантовыми осцилляторами, энергия таких частиц квантуется. Внутренняя энергия твердого тела есть суммарная энергия этих осцилляторов. При сообщении атому-осциллятору дополнительной энергии он переходит на более высокие уровни. Поскольку возбужденные состояния короткоживущие, то пробыв в них короткое время, осцилляторы переходят в состояния, лежащие ниже. При этом осциллятор теряет энергию, которая уносится в виде низкочастотной тепловой волны по кристаллу. Порцию (квант) такой тепловой волны по аналогии с порцией (квантом) электромагнитной волны – фотоном – называли фононом.

Таким образом, ф о н о н – это квазичастица (существует только в твердом теле), не имеющая электрического заряда, не существующая в покое, а всегда движущаяся со скоростью звука в твердом теле.

Фононы в твердом теле распределяются по квантовым состояниям в соответствии с распределением Бозе – Эйнштейна

$$\langle N_B \rangle = \left[\exp\left(\frac{W}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1}, \quad (13)$$

которое позволяет вычислить среднее (по времени) число бозонов (фононов), находящихся в одном квантовом состоянии с энергией $W = \hbar\omega$ при температуре кристалла T .

Введя характеристическую температуру Дебая, при которой тепловая энергия $k_B T_D$ равна максимальной энергии фононов для данного твердого тела,

$$T_D = \frac{\hbar\omega_{\max}}{k_B} = \frac{\hbar\nu_{\text{зв}}}{k_B} (6\pi^2 n)^{1/3}, \quad (14)$$

где \hbar – постоянная Планка; $\nu_{\text{зв}}$ – скорость звука в данном теле, Дебай смог получить выражение для определения молярной теплоемкости твердых тел, которая точно соответствовала экспериментальным результатам (рис. 9).

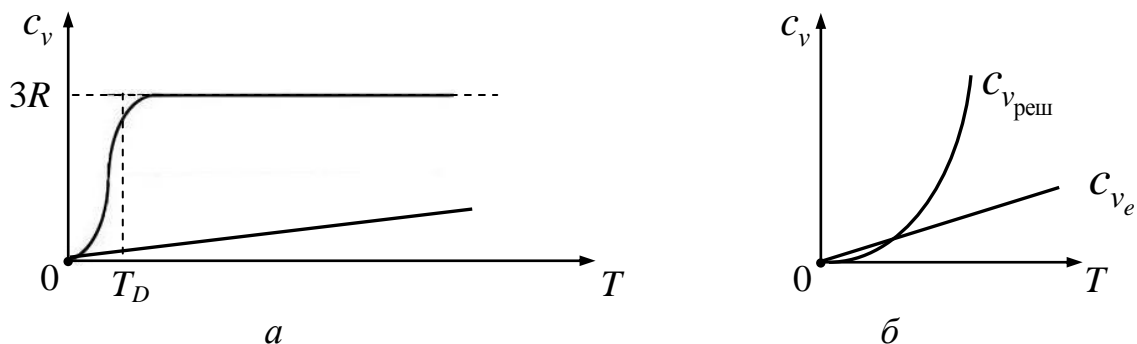


Рис. 9. Зависимость теплоемкости твердых тел от температуры

Из выражения (14) вытекают два предельных случая:

- 1) при $T \gg T_D$ $k_B T \gg \hbar\omega_{\max}$ получается $c_v = 3R$, что точно соответствует классической теории Дюлонга – Пти и экспериментальным результатам;
- 2) при $T \ll T_D$ $k_B T \ll \hbar\omega_{\max}$ получается так называемый закон «кубов Дебая»

$$c_v = \frac{12}{5} \pi^4 R \left(\frac{T}{T_D} \right)^3, \quad (15)$$

точно соответствующий эксперименту (в области низких температур).

Для металлов в общей теплоемкости должна быть учтена еще и электронная теплоемкость

$$c_{v \text{ мет}} = c_{v \text{ реш}} + c_{ve}, \quad (16)$$

которая вычисляется по формуле:

$$c_{ve} = \frac{\pi^2}{2} z R \frac{k_B T}{W_F}. \quad (17)$$

Так как тепловому возбуждению подвергается лишь небольшое число электронов (только те, что находятся на уровне Ферми или вблизи него) при температуре, существенно превышающей абсолютный ноль, вклад электронной теплоемкости в общую теплоемкость металла очень мал. А вот при сверхнизкой температуре (близкой к 0 К) электронная теплоемкость оказывается даже больше теплоемкости кристаллической решетки. Поэтому в данной области температур (рис. 9, б) теплоемкость металлов превышает теплоемкость диэлектриков, что хорошо согласуется с экспериментом.

3.3. Теплопроводность твердых тел

В жидкостях и газах тепловую энергию при теплопроводности переносят молекулы, атомы этих веществ.

В твердых телах атомы находятся в узлах кристаллической решетки и только совершают колебания у положения равновесия. Зная квантовый характер теплового движения в кристаллах, можно утверждать, что *тепловую энергию в твердых телах переносят фононы (тепловые волны)*. Квантовый осциллятор, получив тепловую энергию, возбуждается, и, пробыв в возбужденном состоянии небольшое время, возвращается на более низкие энергетические уровни, излучая при этом фононы.

Фонон, двигаясь по кристаллу, поглощается следующим осциллятором, который вскоре сам излучает новый фонон, и т. д.

Количественно поток тепловой энергии δQ через поперечное сечение стержня площадью dS за время dt при градиенте температуры dT/dx вдоль стержня можно рассчитать по известному закону Фурье:

$$\delta Q = -\kappa \frac{dT}{dx} dS dt. \quad (18)$$

Коэффициент пропорциональности κ в формуле (18) есть коэффициент теплопроводности, он численно равен количеству тепла, прошедшему через единицу площади площадки, расположенной перпендикулярно направлению переноса, за единицу времени при градиенте температуры, равном единице.

По теории Дебая возбужденное состояние решетки можно представить как идеальный газ фононов, свободно движущийся в объеме кристалла. Фононный газ в определенном интервале температур ведет себя подобно идеальному газу, а поскольку фононы являются главными переносчиками тепла в твердом теле (в металлах тепловую энергию переносят еще и свободные электроны), то, очевидно, коэффициент теплопроводности твердого тела можно выразить такой же формулой, что и коэффициент теплопроводности идеального газа:

$$\kappa = \frac{1}{3} \langle \ell \rangle \langle v \rangle c_V \rho. \quad (19)$$

Здесь $\langle \ell \rangle$ – средняя длина свободного пробега фононов; $\langle v \rangle = v_3$ – скорость движения фононов по кристаллу, равная скорости звука в данном веществе ($v_3 = \text{const}$); c_{mV} – удельная теплоемкость твердого тела; ρ – плотность твердого тела.

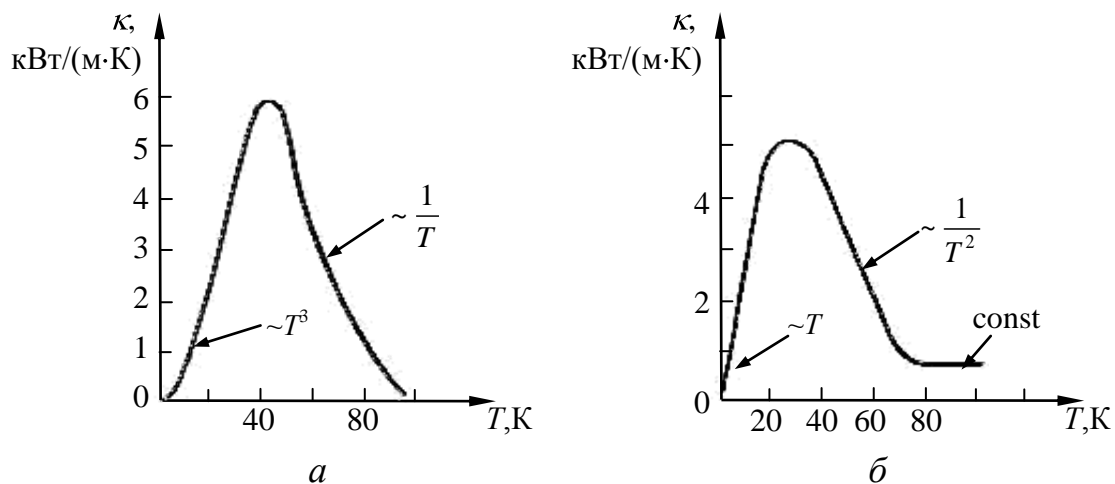


Рис. 10. Температурная зависимость коэффициента теплопроводности монокристалла искусственного сапфира (Al_2O_3) (а) и меди (Cu) (б)

В области крайне низких температур ($T \ll T_D$) концентрация фононов очень мала и длина свободного пробега фононов ограничена размерами кристалла или примесями и не зависит от температуры, а теплоемкость кристалла пропорциональна кубу температуры, что и определяет кубическую зависимость от температуры коэффициента теплопроводности.

В области высоких температур ($T \gg T_D$) теплоемкость кристалла определяется законом Дюлонга – Пти и не зависит от температуры, а длина свободного пробега фононов, ограниченная фонон-фононным взаимодействием, обратно пропорциональна концентрации фононов, которая в этой области температур пропорциональна температуре. Следовательно, при высокой температуре коэффициент теплопроводности обратно пропорционален температуре, как и длина свободного пробега фононов.

В металлах, в отличие от диэлектриков, в переносе тепла участвуют также свободные электроны. В области низких температур температурная зависимость коэффициента теплопроводности обусловлена линейной зависимостью теплоемкости электронного газа от температуры и является линейной. При высокой температуре коэффициент теплопроводности не зависит от температуры, поскольку теплоемкость электронного газа по-прежнему пропорциональна температуре, а длина свободного пробега электронов, обусловленная рассеянием электронов на фононах, обратно пропорциональна концентрации последних и, следовательно, обратно пропорциональна температуре.

Приведенные здесь рассуждения качественно согласуются с экспериментом.

3.4. Примеры решения задач

Задача 1. Маятник часов при температуре 20°C имеет длину 15 см, и при этом часы идут точно. Коэффициент линейного расширения материала, из которого изготовлен маятник, равен $1,85 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. На сколько будут отставать или убегать вперед часы за сутки, если температура в помещении повысится на 10 градусов?

Дано:	Решение:
$t^\circ = 20^\circ\text{C}$	Изменение линейных размеров тел при нагревании определяется законом теплового расширения
$\ell = 0,15 \text{ м}$	
$a = 1,85 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$	$\Delta \ell = a \ell \Delta t^\circ.$
$\Delta t^\circ = 10^\circ\text{C}$	
$t_0 = 86400 \text{ с}$	Тогда периоды колебаний маятника при начальной и при повышенной температуре будут соответственно равны:
$\Delta t - ?$	

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g} \text{ и } T = 2\pi\sqrt{\ell + \Delta\ell / g}.$$

Количество колебаний, которые совершит маятник за сутки при начальной и при повышенной температуре, будет таким:

$$N_0 = \frac{t_0}{T_0} \text{ и } N = \frac{t_0}{T}.$$

Поскольку период колебаний при нагревании маятника возрастает вместе с длиной маятника, а индикация времени маятниковыми часами происходит подсчетом числа совершенных колебаний, то часы будут отставать, и отставание определяется по формуле:

$$\Delta t = T_0 N_0 - N.$$

Подставляя в последнюю формулу поочередно записанные выше формулы, после элементарных алгебраических преобразований получим:

$$\Delta t = t_0 \left(1 - \frac{T_0}{T} \right) = t_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a \Delta t^\circ}} \right) \approx \frac{t_0 a \Delta t^\circ}{2}.$$

Здесь учтено, что длина маятника изменится незначительно.

Подставим данные из условия задачи и выполним расчеты:

$$\Delta t = \frac{86400 \cdot 1,85 \cdot 10^{-5} \cdot 10}{2} = 7,992 \approx 8,0 \text{ с}.$$

Ответ: часы отстанут на $\Delta t = 8 \text{ с}$.

Задача 2. Найти максимальную энергию фонона, который может возбуждаться в кристалле, температура Дебая которого 300 К.

Дано:

$$T_D = 300 \text{ К}$$

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$$

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

$$W_{\max} - ?$$

Решение:

Максимальная энергия фононов, которые могут возбуждаться в кристаллической решетке, связана с температурой Дебая T_D соотношением:

$$W_{\max} = \hbar \omega_{\max} = k_B T_D.$$

Следовательно, W_{\max} можно вычислить:

$$W_{\max} = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 4,14 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} = 26 \text{ мэВ}.$$

Ответ: $W_{\max} = 26 \text{ мэВ}$.

Задача 3. Энергия фонона, который может возбудиться в кристалле, равна 2,6 эВ. Фотон какой длины волны обладал бы такой же энергией?

Дано:	<i>Решение:</i>
$W = 2,6 \text{ эВ}$	Фонон – это «звуковой» квант энергии, который распространяется в кристалле со скоростью звука.
$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$	Фотон – это световой квант энергии (по определению А. Эйнштейна), масса покоя которого равна нулю, распространяющийся в пространстве с максимальной скоростью, равной скорости света.
$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ м/с}$	
$\lambda - ?$	

Энергия фотона W_f , равная энергии фонона, может быть записана так:

$$W_f = W = \frac{hc}{\lambda},$$

где h – постоянная Планка, c – скорость света.

Следовательно,

$$\lambda = \frac{hc}{W}.$$

$$\lambda = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3,0 \cdot 10^8}{2,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 4,78 \cdot 10^{-7} \text{ м} \approx 4,8 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Ответ: $\lambda \approx 4,8 \cdot 10^{-7} \text{ м}$.

Задача 4. При какой температуре теплоемкость одного моля электронного газа будет равна молярной теплоемкости кристаллической решетки серебра? Энергия Ферми для серебра равна 5,5 эВ, характеристическая температура Дебая 225 К.

Дано:	<i>Решение:</i>
$W_F = 5,5 \text{ эВ}$	1. Область низких температур ($T < T_D$):
$T_D = 225 \text{ К}$	По закону Дебая молярная теплоемкость кристаллической решетки определяется по выражению:
$R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$	
$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$	
$T - ?$	

$$c_v = \frac{12 \cdot \pi^4}{5} R \left(\frac{T}{T_D} \right)^3.$$

Молярная теплоемкость электронного газа

$$c_{ve} \approx \pi^2 R \frac{k_B T}{2 \cdot W_F}.$$

Приравнивая c_{ve} к c_v , получаем первый ответ: $T_1 = 0$ К.

Выражаем T :

$$T = \sqrt{\frac{5 \cdot k_B \cdot T_D^3}{24 \cdot \pi^2 \cdot W_F}}.$$

Производим вычисления:

$$T_2 = \sqrt{\frac{5 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 225^3}{24 \cdot \pi^2 \cdot 5,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}} = 1,94 \text{ К} \approx 1,9 \text{ К}.$$

Получаем второй ответ: $T_2 \approx 1,9$ К.

2. В области высоких температур ($T > T_D$):

По закону Дюлонга – Пти молярная теплоемкость кристаллической решетки от температуры не зависит и определяется по соотношению:

$$c_v = 3R.$$

Приравнивая c_{ve} к c_v , получаем:

$$\pi^2 R \frac{k_B T}{2 \cdot W_F} = 3R.$$

Выражаем T :

$$T = \frac{6 \cdot W_F}{\pi^2 \cdot k_B}.$$

Производим вычисления:

$$T_3 = \frac{6 \cdot 5,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{\pi^2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} = 38806 \text{ К} \approx 3,9 \cdot 10^4 \text{ К}.$$

Следует заметить, что приведенное решение при вычислении температуры T_1 и T_3 имеет формальный характер.

Абсолютный ноль температуры – минимальный предел температуры, которую может иметь физическое тело во Вселенной. Абсолютный ноль на практике недостижим.

При температуре $T_3 \approx 39\,000$ К говорить о каком-либо кристаллическом строении серебра также не приходится. Поэтому при решении данной задачи физический смысл имеет только одна температура – T_2 .

Ответ: $T_2 \approx 1,9$ К.

Задача 5. Какое количество тепла потребуется для нагревания кристалла $NaCl$ массой 20 г от температуры 2,0 К до 5,0 К? Характеристическую температуру Дебая для $NaCl$ принять равной 320 К.

Дано:	Решение:
$m = 0,020$ кг	Заданные в условии задачи значения температуры близки к абсолютному нулю и много меньше характеристической температуры Дебая T_D для $NaCl$.
$T_1 = 2,0$ К	При этих значениях температуры молярная теплоемкость кристалла зависит от температуры по закону «кубов Дебая»:
$T_2 = 5,0$ К	
$M = 58,5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	
$R = 8,31$ Дж/(моль·К)	
$T_D = 320$ К	
$Q - ?$	$c_v = \frac{12 \cdot \pi^4}{5} R \left(\frac{T}{T_D} \right)^3.$

Тогда количество теплоты, необходимое для нагрева тела массой m от T_1 до T_2 , может быть вычислено по формуле:

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{M} c_v dT = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{M} \cdot \frac{12 \cdot \pi^4}{5} R \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 dT.$$

После интегрирования получим:

$$Q = \frac{m}{M} \frac{3 \cdot \pi^4}{5} \frac{R}{T_D^3} T_2^4 - T_1^4.$$

Производим вычисления:

$$Q = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 3,14^4 \cdot 8,31}{58,5 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 320^3} (5,0^4 - 2,0^4) \approx 3,1 \cdot 10^{-4} \text{ Дж} = 31 \text{ мДж}.$$

Ответ: $Q = 31$ мДж.

3.5. Задачи для самостоятельного решения

26. (1) При температуре 0 °С длина стального рельса 12,5 м. Какой наименьший воздушный зазор следует оставить на стыке рельсов, если температура нагревания рельса может достигать 40 °С?

27. (1) Длина медной трубки, образующей змеевик, при температуре 20 °С равна 12 м. Какой будет длина трубки при нагревании ее паром до температуры 120 °С?

28. (2) К стальной проволоке радиусом 1 мм подвешен груз. Под действием этого груза проволока получила такое же удлинение, как при нагревании на 20°C . Найти массу груза.

29. (2) Какую силу надо приложить к концам стального стержня с площадью поперечного сечения 10 см^2 , чтобы не дать ему расшириться при нагревании от 0 до 30°C ?

30. (3) Диаметр стального колеса тепловоза при температуре 0°C составляет 2 м. Определить, на сколько оборотов меньше сделает колесо на пути пробега тепловоза в 200 км летом при температуре 35°C , чем зимой при температуре -25°C .

31. (1) Какова максимальная энергия фононов в кристалле свинца, если его характеристическая температура 94 К?

32. (2) Вычислить минимальную длину волны Дебая в кристалле, если его характеристическая температура 5°C , а скорость распространения звука 6,3 км/с.

33. (2) Оценить максимальное значение импульса фонона в серебре. Фотон какой длины волны обладал бы таким же импульсом?

34. (3) Вычислить минимальную длину волны фононов в одновалентном металле, у которого максимальная энергия электронов при температуре 0 К равна 5,2 эВ.

35. (1) Удельная теплоемкость алюминия при 20°C равна 896 Дж/(кг·К). Выполняется ли для него при этой температуре закон Дюлонга – Пти?

36. (1) Вычислить по теории Дебая удельную теплоемкость алмаза при температуре 30 К.

37. (1) Вычислить характеристическую температуру Дебая для железа, если при температуре 20 К молярная теплоемкость железа равна 0,15 Дж/(К·моль). Считать условие $T \ll T_D$ выполненным.

38. (2) Вычислить характеристическую температуру Дебая для одновалентного металла, у которого максимальная энергия электронов при температуре 0 К равна 7,1 эВ, а скорость звука в нем 2,4 км/с.

39. (2) Определить температуру, при которой теплоемкость электронного газа будет равна теплоемкости кристаллической решетки меди.

40. (3) Вычислить относительный вклад электронного газа в общую теплоемкость серебра при температуре 3,0 и 1000 К.

41. (2) На нагревание металлического предмета массой 100 г от 20 до 50 °С затрачено 8,3 кДж тепла. Определить, из какого металла изготовлен предмет, если указанный интервал температур выше температуры Дебая.

42. (2) Кристалл меди массой 100 г первоначально находился при температуре 10 К. До какой температуры нагреется медь, если ей сообщили 500 мДж тепла?

43. (2) Алюминий массой 200 г находится при температуре 20 К. Сколько потребуется энергии, чтобы увеличить его температуру в три раза?

44. (2) Определить количество теплоты, необходимое для нагревания на три градуса кристалла хлористого натрия массой 200 г от температуры 4 К.

45. (3) Вычислить количество теплоты, которое требуется для нагревания бриллианта массой 5,2 карата от 10 до 20 К.

46. (2) Вычислить изменение энтропии 100 г кристаллического хлористого натрия при его нагревании от 10 до 25 К. Характеристическая температура Дебая для хлористого натрия 320 К.

47. (2) Вычислить среднюю длину свободного пробега фонона в кристалле серебра при 27 °С, если коэффициент теплопроводности серебра равен 407 Вт·м⁻¹·К⁻¹, скорость распространения звука 3,7 км/с, а плотность серебра 10,5 г/см³.

48. (2) Стальной стержень длиной 30 см и диаметром 17 мм, нагревается с одного конца до 300 °С, а другой конец упирается в тающий лед. Предполагая, что передача тепла происходит исключительно вдоль стержня (без потерь через стенки), подсчитать массу льда, растаявшего за 10 минут.

49. (2) Медный кофейник нагревается на плите. Вода, доведенная до кипения, каждую минуту выделяет 2,6 г пара. Толщина дна кофейника 3,2 мм, диаметр дна 10 см. Определить разность температур между внутренней и наружной поверхностями дна кофейника, предполагая, что все дно нагревается равномерно.

50. (3) Пластика из меди толщиной 9,4 мм лежит вплотную на железной пластинке толщиной 3,2 мм. Внешняя поверхность медной пластинки поддерживается при температуре 65 °С, а внешняя поверхность железной – при температуре 0 °С. Найти температуру поверхности соприкосновения пластинок, считая, что их поперечные размеры велики по сравнению с толщиной.

4. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ТЕЛ

Любое нагретое тело излучает электромагнитные волны. Свойства теплового излучения (интенсивность, диапазон длин волн, распределение интенсивности излучения по длинам волн) определяются характеристиками поверхности тела и его температурой. Наиболее простой моделью нагретых тел является модель абсолютно черного тела (АЧТ). Свойства излучения АЧТ определяются только его температурой.

Энергетической светимостью R_T $R = \text{Вт}/\text{м}^2$ называется энергия, испускаемая в единицу времени единицей поверхности излучающего тела по всем направлениям в пределах телесного угла 2π , т. е. в пределах полупространства,

$$R_T = \frac{dW}{dS dt}. \quad (20)$$

Излучательной способностью (спектральной плотностью энергетической светимости) $\varepsilon_T \omega$ называется энергетическая светимость нагретого тела в узком интервале частоты $d\omega$, принадлежащем диапазону $(\omega; \omega+d\omega)$, отнесенная к интервалу $d\omega$:

$$\varepsilon_T \omega = \frac{dR_T}{d\omega}. \quad (21)$$

Смысл спектральной плотности энергетической светимости $\varepsilon_T(\omega)$ можно сформулировать следующим образом: произведение $\varepsilon_T(\omega)d\omega$ представляет собой энергию, излучаемую с единицы поверхности в единицу времени в интервале частоты $d\omega$ вблизи частоты ω .

Очевидно, что интегрирование спектральной плотности энергетической светимости (излучательной способности) по всему диапазону частоты излучения дает энергетическую светимость

$$R_T = \int_0^{\infty} \varepsilon_T \omega d\omega. \quad (22)$$

Поглощательной способностью (коэффициентом поглощения) $a_T \omega$ называется безразмерная физическая величина, показывающая, какая часть падающего на тело излучения из узкого интервала частоты $d\omega$, принадлежащего диапазону $(\omega; \omega+d\omega)$, будет поглощена телом.

Для излучения тел справедлив так называемый закон Кирхгофа: отношение излучательной способности тела к его поглощательной способности не зависит от природы тел и является универсальной функцией частоты (длины волны) и температуры – функцией Кирхгофа:

$$\frac{\varepsilon_T \omega, T}{a_T \omega, T} = f_T \omega, T . \quad (23)$$

Поскольку АЧТ поглощает все падающее на него излучение, то, очевидно, что для АЧТ поглощательная способность $a_T = 1$, а излучательная способность совпадает с универсальной функцией Кирхгофа $\varepsilon_T \omega, T = f_T \omega, T$.

Излучательная способность тел, свойства которых близки к свойствам АЧТ (а значит, и универсальная функция Кирхгофа), измеряется экспериментально (рис. 11).

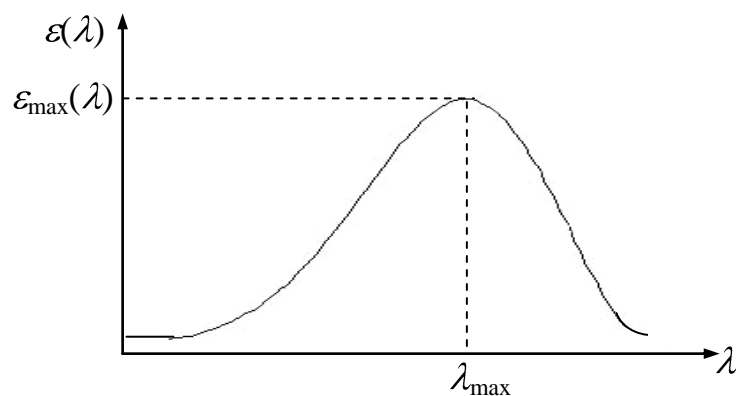


Рис. 11. Зависимость излучательной способности АЧТ от длины волны

Из анализа экспериментальных данных для АЧТ были получены:
закон Стефана – Больцмана –

$$R_T = \sigma T^4; \quad (24)$$

закон смещения Вина –

$$\lambda_{(\max)} T = b; \quad (25)$$

второй закон Вина –

$$\varepsilon_{\lambda \max} = b' T^5. \quad (26)$$

Многочисленные попытки теоретически получить универсальную функцию Кирхгофа заканчивались не просто неудачей, но и приводили к непреодолимым противоречиям (в историю физики эти противоречия вошли под названием ультрафиолетовая катастрофа).

Лишь после того, как Макс Планк сформулировал знаменитую гипотезу (носящую его имя) о дискретном характере излучения энергии нагретыми телами, им была получена формула (формула Планка), идеально соответствующая экспериментальному графику универсальной функции Кирхгофа:

$$f_{\nu, \omega, T} = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} e^{\hbar \omega / kT} - 1^{-1}. \quad (27)$$

4.1. Примеры решения задач

Задача 1. Сколько энергии излучает смотровое окно плавильной печи площадью $1,0 \text{ дм}^2$ за время $5,0 \text{ мин}$? Температура окна 1600°C . Окно считать абсолютно черным телом.

Дано:
 $S = 1,0 \text{ дм}^2 = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$
 $t = 5,0 \text{ мин} = 3,0 \cdot 10^2 \text{ с}$
 $T = 1600^\circ\text{C} = 1873 \text{ К}$
 $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
 $Q = ?$

Решение:

По закону Стефана – Больцмана энергетическая светимость абсолютно черного тела R_T связана с его термодинамической температурой T формулой:

$$R_T = \sigma \cdot T^4.$$

Физический смысл энергетической светимости состоит в том, что она показывает, какая мощность (джоулей в секунду) излучается с площади 1 м^2 , имеющей температуру T .

Поэтому общее количество теплоты излучения можно вычислить по формуле:

$$Q = R_T \cdot S \cdot t = \sigma \cdot T^4 \cdot S \cdot t$$

После подстановки данных в эту формулу получаем ответ задачи:

$$Q = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 1873^4 \cdot 10^{-2} \cdot 300 = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 2,1 \text{ МДж}.$$

Ответ: $Q = 2,1 \text{ МДж}$.

Задача 2. За $20,0 \text{ с}$ из смотрового окна плавильной печи излучается энергия 1000 кДж . Максимум излучения приходится на длину волны $1,8 \text{ мкм}$. Определить площадь смотрового окна, считая его абсолютно черным телом.

Дано:
 $Q = 1000 \text{ кДж} = 10^6 \text{ Дж}$
 $t = 20,0 \text{ с}$
 $\lambda_{\max} = 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}$
 $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$
 $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$

 $S = ?$

Решение:

По закону смещения Вина длина волны, соответствующая максимуму излучательной способности абсолютно черного тела, обратно пропорциональна его термодинамической температуре:

$$\lambda_{\max} = b/T.$$

Отсюда можно найти температуру смотрового окна.

Энергетическую светимость смотрового окна плавильной печи можно определить из соотношения (см. задачу 1):

$$R_T = \frac{Q}{t \cdot S}.$$

Энергетическая светимость, в свою очередь, связана с температурой тела законом Стефана – Больцмана:

$$R_T = \sigma \cdot T^4.$$

Отсюда имеем:

$$S = \frac{Q}{t \cdot \sigma} \left(\frac{\lambda_{\max}}{b} \right)^4.$$

После подстановки числовых значений в эту формулу получаем окончательный ответ:

$$S = \frac{10^6}{20 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}} \left(\frac{1,8 \cdot 10^{-6}}{2,9 \cdot 10^{-3}} \right)^4 = 0,13 \text{ м}^2.$$

Ответ: $S = 0,13 \text{ м}^2$.

4.2. Задачи для самостоятельного решения

51. (1) К вечеру жаркого солнечного дня закопченная стена старинного здания прогрелась до 30°C . Сколько энергии излучает каждый квадратный метр этой стены за 1 с вскоре после захода Солнца, если считать закопченную стену абсолютно черным телом?

52. (1) Вычислить температуру поверхности Сириуса, считая ее абсолютно черным телом, если за сутки 3500 км^2 поверхности Сириуса излучает $2,1 \cdot 10^{23} \text{ Дж}$ энергии.

53. (2) Электрическая лампа мощностью 100 Вт имеет вольфрамовую нить длиной 19 см и диаметром 100 мкм. Эта нить нагревается до 2800 К. Во сколько раз излучательная способность нити отличается от излучательной способности абсолютно черного тела?

54. (2) Из смотрового окна закалочной печи, имеющего диаметр 6,0 см, каждую секунду излучается 81 Дж энергии. Энергетическая светимость этого окна в четыре раза меньше, чем абсолютно черного тела, имеющего такую же температуру. Какова температура печи?

55. (1) Абсолютно черное тело имеет температуру 500 К. Какова будет температура этого тела, если в результате его нагревания поток излучения увеличится в пятьдесят раз?

56. (2) Смотровое окно закалочной печи имеет диаметр 60 мм. Из окна каждую минуту излучается энергия 4,80 кДж. Какова температура в печи, если излучательная способность пламени на 80 % меньше, чем излучательная способность абсолютно черного тела?

57. (2) Из смотрового окна печи излучается поток энергии мощностью 4,2 кДж/мин. Считая, что излучает абсолютно черное тело, определить температуру печи, если площадь окна равна $8,4 \text{ см}^2$.

58. (3) Какую мощность надо подводить к зачерненному металлическому шару радиусом 2,0 см, чтобы поддерживать его температуру на 27 К выше температуры окружающей среды? Температура окружающей среды 20°C . Считать, что тепло теряется только вследствие излучения.

59. (5) Медный шарик диаметром 1,2 см поместили в сосуд, из которого откачан воздух, а температура стенок поддерживается близкой к абсолютному нулю. Начальная температура шарика: а) 10 К, б) 1000 К. Считая поверхность шарика абсолютно черной, найти, через сколько времени его температура уменьшится в два раза?

60. (1) Вычислить длину волны, соответствующую максимуму в спектре излучения электрической лампочки, температура нити которой равна 2800 К. Нить считать абсолютно черным телом.

61. (2) Мощность, излучаемая абсолютно черным телом, составляет 10 кВт, максимум излучения приходится на длину волны 0,80 мкм. Определить площадь излучающей поверхности.

62. (2) Температура абсолютно черного тела составляет 900 К. Определить, как и на сколько она изменится, если длина волны, соответствующая пику спектра излучения, увеличится на 0,40 мкм.

63. (2) Чугунная отливка остывает так, что максимум в спектре ее излучения смещается с 700 до 1200 нм. На сколько градусов остыла отливка, если считать ее абсолютно черным телом?

64. (2) Абсолютно черное тело имеет температуру 2900 К. В результате остывания этого тела длина волны, на которую приходится максимум интенсивности в спектре равновесного излучения, изменилась на 9,2 мкм. До какой температуры охладилось тело ?

65. (2) За 20 с из смотрового окна плавильной печи излучается энергия 1000 кДж. Максимум излучения приходится на длину волны 0,6 мкм. Определить площадь смотрового окна, считая его абсолютно черным телом.

66. (2) При нагревании абсолютно черного тела длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась от 0,69 до 0,50 мкм. Во сколько раз при этом увеличилась энергетическая светимость тела?

67. (2) Поток излучения абсолютно черного тела равен 10 кВт. Максимум энергии излучения приходится на длину волны 0,80 мкм. Определить площадь излучающей поверхности.

68. (2) Как и во сколько раз изменится поток излучения абсолютно черного тела, если максимум энергии излучения переместится с красной границы видимого спектра (780 нм) на фиолетовую (390 нм)?

69. (1) Чему равна величина максимальной излучательной способности абсолютно черного тела, находящегося при температуре 3000 К?

70. (2) Максимальная величина спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела равна 5,8 ГВт/м³. Определить длину волны, отвечающую этому максимуму.

5. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ МЕТАЛЛОВ И ПОЛУПРОВОДНИКОВ

5.1. Электропроводность металлов

Металлы – хорошие проводники электрического тока. Носителями электрического тока в металлах являются свободные электроны.

Друде и Лоренцем была создана классическая электронная теория электропроводности металлов. В ней металлы представляли собой твердые вещества, в узлах кристаллической решетки которых находятся положительные ионы, совершающие непрерывные колебания у положения равновесия. А отрицательные электроны представляют собой практически свободные частицы – отрицательно заряженный электронный газ (в качестве модели использовалась модель идеального газа). В рамках этой модели ими было получено выражение для удельной проводимости металлического проводника:

$$\sigma = \frac{q^2 n_e \langle \ell \rangle}{2m \langle v \rangle}, \quad (28)$$

где q – заряд электрона; $\langle \ell \rangle$ – средняя длина свободного пробега электронов, равная межузельному расстоянию кристаллической решетки; $\langle v \rangle$ – средняя скорость теплового (хаотического) движения электронов.

Вывод формулы (28) нельзя считать строгим, так как при этом рассматривалось движение отдельного «среднего» электрона, а полученные выводы распространялись на все свободные электроны.

Более правильным было бы рассмотрение действия электрического поля на всю совокупность свободных электронов, причем их суммарный импульс изменяется под действием поля и соударений электронов с узлами решетки.

Такое рассмотрение приводит к тому, что средняя дрейфовая скорость электронов оказывается вдвое больше полученной в формуле (28), следовательно, эта формула принимает такой вид:

$$\sigma = \frac{q^2 n_e \langle \ell \rangle}{m \langle v \rangle}. \quad (29)$$

Подставляя в формулу (29) экспериментальные значения удельного электрического сопротивления металла, можно оценить величину средней длины свободного пробега электронов в металле.

Так, например, для серебра, у которого $n_e = 5,8 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ и при комнатной температуре $\rho_e = 16 \text{ нОм} \cdot \text{м}$, получаем из формулы (29) $\langle \ell \rangle \approx 10^{-8} \text{ м}$. Это на два порядка превышает значение межатомного расстояния, равного 10^{-10} м .

Отсюда следует, что при комнатной температуре электроны проводимости сталкиваются примерно с одним из ста атомов серебра. Это хорошо согласуется с представлением о газе свободных электронов.

Полученный Друде и Лоренцом результат объяснял, почему разные металлы обладают разным электрическим сопротивлением (у разных металлов разная концентрация свободных электронов, разное строение кристаллической решетки, средняя скорость теплового (хаотического) движения электронов в разных металлах разная даже при одинаковой температуре).

Классическая теория объяснила наличие температурной зависимости электрического сопротивления металла: при изменении температуры металлического проводника средняя скорость теплового (хаотического) движения электронов меняется $\sim \sqrt{T}$. Значит, электрическое сопротивление R должно зависеть от абсолютной температуры T металла, как $R \sim \sqrt{T}$. Однако экспериментальные исследования зависимости $R = f(T)$ показывали, что эта зависимость в широком интервале температур линейная (рис. 12).

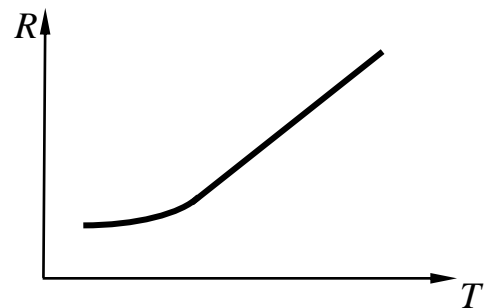


Рис. 12. График зависимости сопротивления металла от температуры

Объяснить эти противоречия с экспериментом классическая электронная теория не смогла.

Все ответы были получены лишь в рамках квантовой физики.

В рамках квантовой физики было получено выражение для расчета удельной проводимости металла:

$$\sigma = \frac{q^2 n_e \langle L \rangle}{m^* v_F}, \quad (30)$$

где $\langle L \rangle$ – средняя транспортная длина свободного пробега электронов (для полного уничтожения скорости в данном направлении требуется не одно, а в среднем Z столкновений с рассеивающими центрами); m^* – эффективная масса

электрона. Только после Z столкновений исчезает всякая корреляция между начальной и конечной скоростями движения электронов.

Время, в течение которого будет происходить «рассасывание» направленного движения электронов, и в этом случае представляет собой время релаксации. Тогда

$$\langle L \rangle = \langle \ell \rangle \cdot Z, \quad (31)$$

где $\langle \ell \rangle$ – средняя длина свободного пробега электрона, которому в металле мешают двигаться фононы,

$$\langle \ell \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi} d_{\text{эф}}^2 n_f}, \quad (32)$$

где n_f – концентрация фононов в кристалле; v_F – скорость электронов в кристаллах.

Полученный результат практически совпадает с классическим (29), но величины, входящие в выражения (29) и (30), имеют принципиальную разницу. Квантовая физика считает, что электроны при своем движении рассеиваются на тепловых флуктуациях кристаллической решетки (фононах), концентрация которых существенно зависит от температуры, при этом средняя скорость теплового движения электронов практически не зависит от температуры, так как тепловому возбуждению подвергается небольшое количество электронов, находящихся вблизи уровня Ферми.

В области высоких температур $T \gg T_D$ все осцилляторы возбуждены вплоть до ω_{max} , тогда с повышением температуры концентрация фононов $\sim T$ и $R \sim T$, что очень хорошо согласуется с экспериментом. В области низких температур $T \ll T_D$ с ростом температуры происходит не только увеличение фононов с данной частотой, но и быстрый рост новых фононов, поэтому $R \sim T^3$, что также хорошо согласуется с экспериментом. В области сверхнизких температур вблизи 0 К концентрация фононов становится столь малой, что основную роль в рассеянии электронов начинают выполнять примеси, концентрация которых не зависит от температуры, и тогда R стремится к $R_0 = \text{const}$.

5.2. Собственные полупроводники и их проводимость

Собственные полупроводники – это твердые вещества, состоящие из элементов IV группы таблицы Менделеева (германий Ge, кремний Si). Так как их валентность равна 4, то на валентном уровне каждого атома находятся по четы-

ре валентных электрона. При образовании из отдельных атомов твердого тела (когда атомы приближаются друг к другу так близко, что происходит перекрытие электронных облаков) валентные электроны обобществляются и образуют прочные атомные (обменные, а в химии – ковалентные) связи. Поскольку свободных электронов нет, то это вещество – диэлектрик.

По зонной теории в собственных полупроводниках все уровни валентной зоны заняты электронами, а до ближайшей свободной зоны (зоны проводимости) лежит неширокая запрещенная зона (с $\Delta W \leq 1$ эВ). Поведение электронов в твердом теле описывается функцией распределения Ферми – Дирака, при этом уровень Ферми должен находиться ровно посередине запрещенной зоны. Но так как значения энергии запрещенной зоны не могут быть реализованы электронами твердого тела, то уровень Ферми для полупроводников вводится условно (он в полупроводниках никогда не бывает занят электронами).

При наложении на такое вещество слабого электрического поля электроны не могут разорвать прочные ковалентные связи (а по зонной теории – не могут преодолеть запрещенную зону) и стать свободными. Но если собственному полупроводнику сообщить дополнительную энергию (~ 1 эВ), достаточную для разрушения ковалентных связей (достаточную для преодоления электроном запрещенной зоны), то электрон становится свободным (оказывается в зоне проводимости).

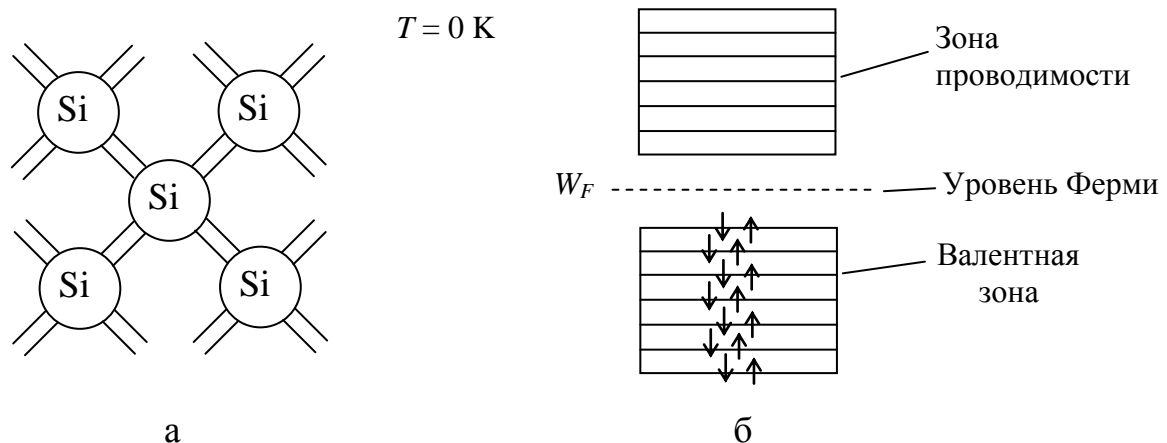


Рис. 13. Пространственная (а) и зонная (б) схемы собственного полупроводника

Для электронов, появившихся на нижних уровнях зоны проводимости, функция распределения Ферми – Дирака будет иметь значение:

$$\langle N_F \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{W - W_F}{k_B T}\right) + 1} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\Delta W}{2k_B T}\right) + 1}. \quad (33)$$

Для комнатной температуры ($T \sim 300$ К) $k_B T \sim 10^{-2}$ эВ, а $\Delta W \sim 1$ эВ. Тогда $\exp\left(\frac{\Delta W}{2k_B T}\right) \gg 1$ и, значит,

$$\langle N_F \rangle \approx \exp\left(-\frac{\Delta W}{2k_B T}\right). \quad (34)$$

Выражение (34) есть функция распределения Максвелла – Больцмана. Поскольку оказалось, что электронный газ в зоне проводимости подчиняется классическому распределению, то говорят, что вырождение газа снимается. Это связано с тем, что число электронов N в зоне проводимости много меньше числа возможных квантовых состояний G в этой зоне ($N \ll G$).

Концентрация свободных электронов в полупроводниках

$$n_e \sim \langle N_F \rangle = \exp\left(-\frac{\Delta W}{2k_B T}\right). \quad (35)$$

На месте разорванной ковалентной связи остается нескомпенсированный положительный заряд (перешедший в зону проводимости электрон освобождает энергетический уровень в валентной зоне). Это освободившееся место (освободившийся уровень) может быть занято другим электроном. Тогда создается ситуация, когда положительный заряд начинает как бы перемещаться по кристаллу подобно частице – это «квазичастица», которую называли «дыркой».

Таким образом, при разрыве ковалентных связей в собственных полупроводниках образуются свободные электроны и дырки, возникает электронно-дырочная (собственная) проводимость.

Удельную проводимость собственных полупроводников можно вычислить через заряд, концентрацию и подвижность носителей заряда (электронов и дырок) по формуле:

$$\sigma = q_e n_e u_e + q_p n_p u_p. \quad (36)$$

Согласно соотношению (29) удельная проводимость собственного полупроводника определяется по выражению:

$$\sigma \sim \frac{n_e \langle \ell \rangle}{\langle v \rangle}, \quad (36a)$$

где n_e – концентрация свободных носителей заряда (электронов, дырок); $\langle \ell \rangle$ – средняя длина свободного пробега электронов (поскольку рассеяние электронов в полупроводниках происходит на фононах, то $\langle \ell \rangle \sim 1/n_f$, а $n_f \sim T^3$ при $T \ll T_D$ и $n_f \sim T$ при $T \gg T_D$); $\langle v \rangle$ – средняя скорость теплового (хаотического) движения электронов (для классических частиц $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$).

Получающаяся в результате степенная зависимость удельной проводимости от температуры ($T^{-7/2}$ или $T^{-3/2}$), связанная с ростом числа фононов, гораздо слабее экспоненциальной, связанной с ростом концентрации носителей, что позволяет записать для удельной проводимости собственного полупроводника:

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2k_B T}\right). \quad (37)$$

Так как $R \sim 1/\sigma$, то сопротивление собственного полупроводника можно вычислить по формуле:

$$R = R_0 \exp\left(\frac{\Delta W}{2k_B T}\right). \quad (38)$$

С повышением температуры сопротивление собственного полупроводника быстро уменьшается несмотря на то, что с ростом температуры увеличивается и количество фононов, которые мешают двигаться электронам. Но этот процесс менее интенсивный по сравнению с лавинообразным нарастанием количества свободных электронов и дырок. Это в итоге приводит к практически экспоненциальному снижению сопротивления полупроводника при увеличении температуры (рис. 14).

Значительная зависимость сопротивления собственных полупроводников от температуры используется в терморезисторах (датчики пожарной сигнализации).

5.3. Примесные полупроводники и их проводимость

Полупроводник, у которого небольшая часть атомов заменена на атомы с валентностью, на единицу отличающуюся от валентности основных атомов, называется примесным. Если примесные атомы имеют валентность, равную 5, такая примесь называется донорной. При формировании твердого тела четыре валентных электрона примесных атомов будут образовывать прочные ко-

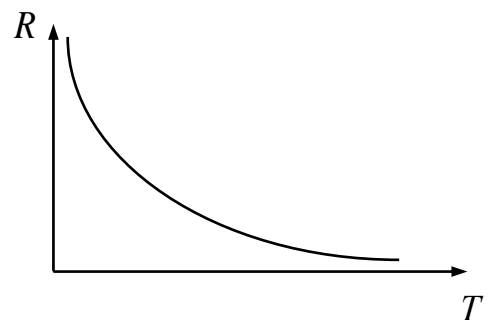


Рис. 14. Зависимость сопротивления собственного полупроводника от температуры

валентные связи с четырьмя электронами основных атомов, а пятый электрон примесного атома оказывается слабосвязанным (но не свободным).

Так как пятый электрон не свободный и он не тратил энергию на образование ковалентной связи, то его энергия выше энергии электронов валентной зоны (поэтому этот уровень лежит в запрещенной зоне вблизи зоны проводимости). Тогда уровень Ферми, вероятность заполнения электронами которого равна $\frac{1}{2}$, прижимается к дну зоны проводимости. При $T = 0$ К свободных носителей заряда нет, полупроводник не проводит электрического тока.

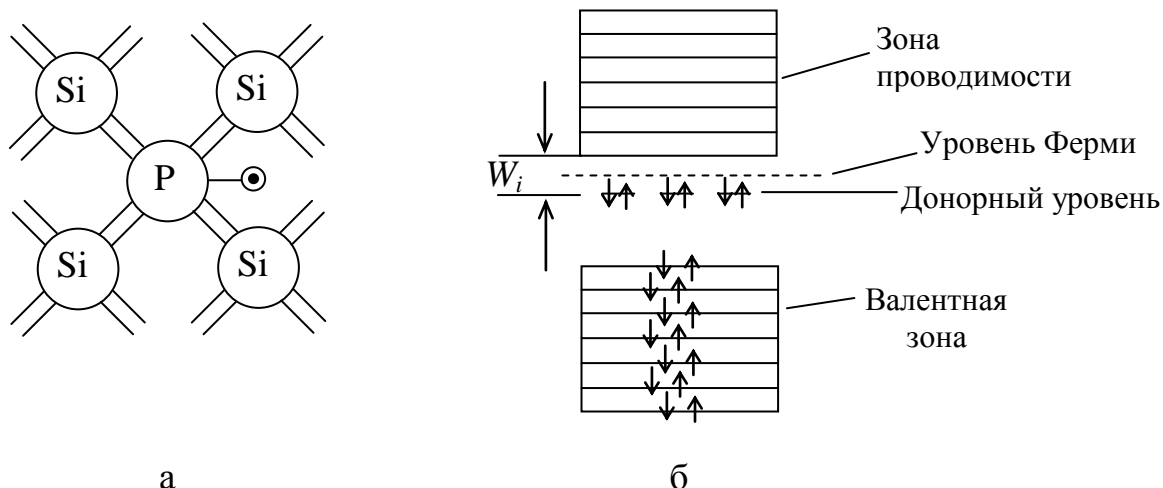


Рис. 15. Пространственная (а) и зонная (б) схемы донорного полупроводника

Если такой слабосвязанный электрон получит энергию (например, от тепловых колебаний решетки), много меньшую ширины запрещенной зоны, но достаточную для его отрыва от атома, то такой электрон становится свободным (переходит в зону проводимости). Дополнительная энергия должна быть порядка энергии ионизации $W_i \sim 0,01$ эВ – энергии, необходимой слабосвязанному электрону для перехода с дополнительного уровня в зону проводимости. Таким образом, в полупроводнике появляются свободные электроны, но так как ковалентные связи не разрываются, то дырок не возникает. Значит, в таком примесном полупроводнике возникает электронная проводимость.

Такие примесные полупроводники называют электронными (донорными) или полупроводниками *n*-типа («negative»), а примесные уровни называют донорными уровнями.

При комнатной температуре все примесные уровни ионизованы (все слабосвязанные электроны свободны), и при дальнейшем повышении температуры за счет рассеяния на фононах сопротивление начнет увеличиваться.

Если примесные атомы имеют валентность, равную 3, такая примесь называется а к ц е п т о р н о й. При формировании твердого тела три валентных электрона примесных атомов будут образовывать прочные ковалентные связи с тремя электронами основных атомов, а для образования четвертой связи у примесного атома нет электрона. Говорят, что в этом месте образуется «дырка». При $T = 0$ К свободных носителей заряда нет и полупроводник не проводит электрического тока.

Если такому примесному полупроводнику сообщить небольшую дополнительную энергию, гораздо меньшую ширины запрещенной зоны, но достаточную для перехода электрона от соседнего атома на вакантное место, то при этом дырка начинает перемещаться по кристаллу – возникает дырочная проводимость.

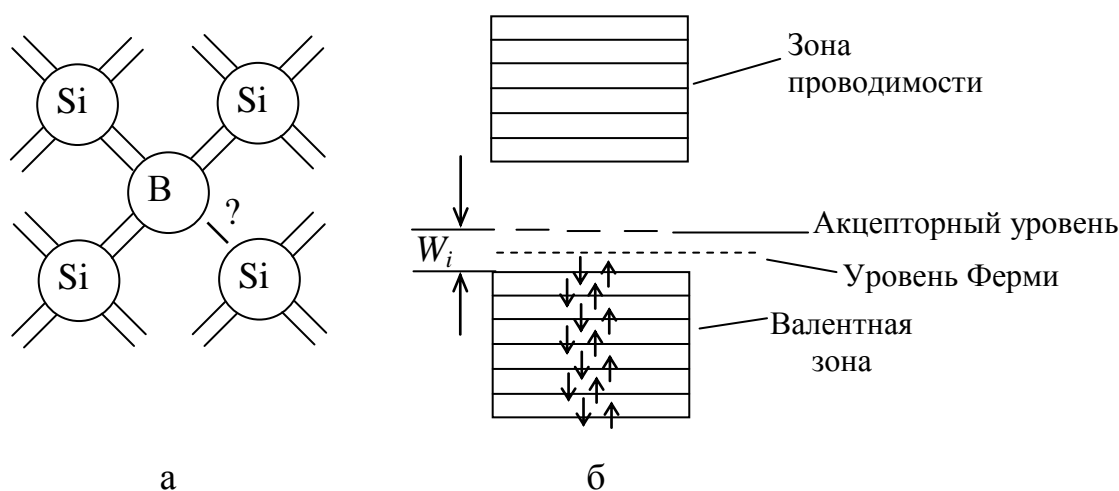


Рис. 1. Пространственная (а) и зонная (б) схемы акцепторного полупроводника

Другими словами, электрон, получив дополнительную энергию (энергию ионизации акцепторного уровня $W_i \sim 0,01$ эВ) переходит из валентной зоны на дополнительные (акцепторные) уровни, находящиеся в запрещенной зоне (акцепторные уровни прижимают уровень Ферми к потолку валентной зоны). В зоне проводимости нет свободных электронов, а в валентной зоне появляются дырки – возникает дырочная проводимость.

Такие примесные полупроводники называют дырочными (а к ц е п т о р н ы м и) или полупроводниками *p*-типа («positive»).

При увеличении дополнительной энергии, поскольку все акцепторные уровни уже заполнены электронами, за счет рассеяния дырок сопротивление на фоне начнет возрастать. Когда дополнительная энергия достигнет значения ~ 1 эВ (т. е. станет достаточной для разрыва ковалентной связи), возникает также собственная (электронно-дырочная) проводимость.

5.4. Фотопроводимость полупроводников

Если облучать полупроводник электромагнитным излучением, то в нем могут появиться свободные заряды (электроны, дырки).

Явление возникновения свободных носителей (электронов, дырок) в полупроводнике при облучении его электромагнитным излучением называется внутренним фотоэффектом или фотопроводимостью полупроводника.

Внутренний фотоэффект возможен при условии, что энергия фотона электромагнитного излучения будет не меньше ширины запрещенной зоны (энергии активации) для собственного полупроводника ($W_{\phi} \geq \Delta W$) или не меньше энергии ионизации для примесного полупроводника ($W_{\phi} \geq W_i$).

Предельное (граничное) значение энергии фотонов (частоты, длины волны соответствующего излучения) называется красной границей внутреннего фотоэффекта:

для собственных полупроводников

$$\begin{cases} \nu_{\text{гр}} = \frac{\Delta W}{h}; \\ \lambda_{\text{гр}} = \frac{hc}{\Delta W}; \end{cases} \quad (39)$$

для примесных полупроводников

$$\begin{cases} \nu_{\text{гр}} = \frac{W_i}{h}; \\ \lambda_{\text{гр}} = \frac{hc}{W_i}. \end{cases} \quad (40)$$

При увеличении освещенности увеличивается количество свободных зарядов (электронов, дырок), что ведет к снижению электрического сопротивления.

Существенная зависимость сопротивления полупроводников от освещенности используется в фоторезисторах.

5.5. Эффект Холла

Американский физик Э. Холл поместил плоскопараллельную золотую пластинку (позже использовалась также пластинка из полупроводника), по ко-

торой протекал электрический ток, в перпендикулярное магнитное поле и обнаружил, что на боковых гранях пластинки возникает разность потенциалов (напряжение Холла), пропорциональная силе тока в пластинке, индукции магнитного поля и обратно пропорциональная толщине пластинки в направлении магнитного поля:

$$\Delta\varphi = U_H = R_H \frac{IB}{d}, \quad (41)$$

где R_H – постоянная Холла.

Объяснить эффект Холла можно с помощью силы Лоренца, которая действует на движущийся в магнитном поле электрический заряд и создает поперечный ток: электроны и дырки будут отклоняться к верхней грани пластинки, и она приобретет отрицательный или положительный заряд, а нижняя зарядится противоположно. Заряженные грани создают поперечное электрическое поле. Грани будут заряжаться до тех пор, пока не наступит равновесия, при котором силу Лоренца, действующую на носитель заряда, компенсирует противоположно направленная электрическая сила $F_L = F_e$ и поперечный ток исчезнет. Из этого условия можно получить выражение для определения напряжения Холла:

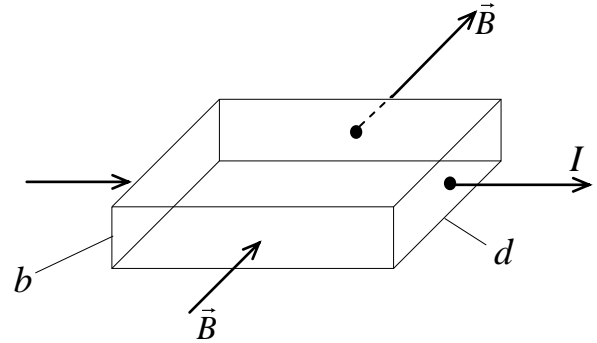


Рис. 17. Схема эксперимента Холла

$$U_H = \frac{1}{qn_e} \frac{IB}{d}. \quad (42)$$

Сравнивая полученный результат с выражением (41), можно записать:

$$R_H = \frac{1}{qn_e}. \quad (43)$$

Расчет, учитывающий распределение электронов по скоростям, приводит к более точному выражению для постоянной Холла:

$$R_H = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{qn_e}. \quad (44)$$

Знак постоянной Холла зависит от знака основных носителей заряда: если их заряд $q > 0$, то $R_H > 0$; если $q < 0$, то $R_H < 0$. Для каждого полупроводникового образца, находящегося при фиксированной температуре, R_H постоянна. Та-

ким образом, при изучении эффекта Холла в металлах и полупроводниках n - или p -типа, измерив R_H , можно найти концентрацию носителей заряда, а по знаку возникающей разности потенциалов Холла – механизм проводимости полупроводников: для дырочного полупроводника $R_H > 0$, а для электронного постоянная Холла $R_H < 0$.

Если полупроводник имеет смешанную или собственную проводимость, то проходящий в полупроводниковой пластинке ток обусловлен движением дырок и электронов в противоположных направлениях. Следовательно, направления отклонения дырок и электронов под действием магнитного поля совпадают: и те и другие отклоняются к одной грани пластинки. Возникающая разность потенциалов Холла, величина и знак R_H в этом случае будут зависеть от соотношения концентрации и подвижности дырок и электронов.

В общем случае с учетом квантово-статистических эффектов константа Холла может быть вычислена по формуле:

$$R_H = \frac{3\pi}{8} \frac{q_e n_e u_e^2 + q_p n_p u_p^2}{(en_e u_e + ep_p u_p)^2}. \quad (45)$$

В случае собственной проводимости $n_n = n_p$, поэтому

$$R_H = \frac{3\pi}{8en} \frac{-u_e + u_p}{u_e + u_p}. \quad (46)$$

5.6. Примеры решения задач

Задача 1. Температура собственного полупроводника повысилась от 300 до 310 К. Во сколько раз при этом изменилось его сопротивление, если ширина запрещенной зоны 0,3 эВ?

Дано:

$$T_1 = 300 \text{ К}$$

$$T_2 = 310 \text{ К}$$

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$$

$$\Delta W = 0,30 \text{ эВ}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = ?$$

Решение:

Зависимость сопротивления собственного полупроводника от температуры определяется выражением:

$$R = R_0 \exp\left(\frac{\Delta W}{2k_B T}\right),$$

где ΔW – ширина запрещенной зоны, имеющая смысл энергии активации собственного полупроводника.

Тогда для искомого отношения можно записать:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_0 \exp\left(\frac{\Delta W}{2k_B T_2}\right)}{R_0 \exp\left(\frac{\Delta W}{2k_B T_1}\right)} = \exp\left[\frac{\Delta W}{2k_B} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)\right].$$

После подстановки числовых значений в эту формулу (не забываем перевести электронвольты в джоули) получим:

$$\frac{R_2}{R_1} = \exp\left[\frac{0,30 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \left(\frac{1}{310} - \frac{1}{300}\right)\right] = 0,829 \approx 0,83.$$

Таким образом, сопротивление собственного полупроводника уменьшилось примерно на 17 %.

Ответ: $R_2 \approx 0,83 \cdot R_1$.

Задача 2. Вычислить удельное сопротивление германия с собственным типом проводимости при температуре 300 К, если известно, что концентрация электронов при этой температуре $2,2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Подвижность электронов $3,8 \cdot 10^3 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$; дырок $1,8 \cdot 10^3 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$.

Дано:	Решение:
$b_p = 0,18 \text{ м}^2 / \text{В} \cdot \text{с}$	Удельное сопротивление полупроводников рассчитывается по формуле:
$b_n = 0,38 \text{ м}^2 / \text{В} \cdot \text{с}$	
$n = 2,2 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$	$\rho = \frac{1}{n \cdot e \cdot b},$
$T = 300 \text{ К}$	где n – концентрация электронов; e – заряд электрона;
$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$	b – подвижность электронов и дырок, для собственного
$\rho - ?$	полупроводника
	$b = b_n + b_p.$

Подставляя выражение для b в формулу для ρ , получаем

$$\rho = \frac{1}{e \cdot n(b_n + b_p)}$$

и выполняем расчеты:

$$\rho = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2,2 \cdot 10^{19} (0,38 + 0,18)} = 0,51 \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

Ответ: $\rho = 0,51 \text{ Ом} \cdot \text{м}.$

З а д а ч а 3. Образец из германия n -типа в виде пластины длиной 10 см и шириной 6 мм помещен в однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл перпендикулярно линиям магнитной индукции. При напряжении 250 В, приложенном к концам пластины, возникает холловская разность потенциалов 8,8 мВ. Определить постоянную Холла и концентрацию носителей тока. Удельную проводимость германия принять равной 80 См/м.

Дано:

$$L = 0,1 \text{ м}$$

$$b = 0,006 \text{ м}$$

$$B = 0,1 \text{ Тл}$$

$$U = 250 \text{ В}$$

$$U_H = 0,0088 \text{ В}$$

$$\sigma = 80 \text{ См/м}$$

$$R_H = ? \quad n_e = ?$$

Решение:

При помещении полупроводника в магнитное поле носители тока (в полупроводнике n -типа это электроны), перемещающиеся под действием приложенной к нему разности потенциалов U , будут отклоняться в поперечном направлении. Возникающая при этом холловская разность потенциалов определяется соотношением

$$U_H = R_H \frac{IB}{d},$$

откуда постоянная Холла

$$R_H = \frac{U_H d}{IB}.$$

Силу тока I найдем по закону Ома с учетом формулы сопротивления проводника постоянного сечения:

$$I = \frac{1}{R} U = \frac{\sigma b d}{L} U.$$

Окончательно для постоянной Холла получим:

$$R_H = \frac{U_H L}{\sigma U B b}.$$

Подставим значения физических величин в эту формулу и произведем вычисления:

$$R_H = \frac{0,0088 \cdot 0,1}{80 \cdot 250 \cdot 0,1 \cdot 0,006} = 7,33 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{Кл}}.$$

Концентрацию носителей тока в полупроводнике найдем по формуле для расчета постоянной Холла:

$$R_H = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{en_e}.$$

Отсюда

$$n_e = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{eR_H}.$$

Подставим значения физических величин в эту формулу и выполним соответствующие расчеты:

$$n_e = \frac{3 \cdot 3,14}{8} \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 7,33 \cdot 10^{-5}} = 1,0 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}.$$

Ответ: $R_H = 7,33 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{Кл}$; $n_e = 1,0 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$.

5.7. Задачи для самостоятельного решения

71. (1) Удельная проводимость у металла равна 10 МСм/м. Оценить по классической теории среднюю длину свободного пробега электронов в металле, если концентрация свободных электронов равна $2,3 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Среднюю скорость хаотического движения электронов принять равной 1,6 Мм/с.

72. (2) Исходя из классической теории электропроводности металлов определить среднюю кинетическую энергию электронов в металле, если отношение коэффициента теплопроводности электронного газа к удельной проводимости металла равно $6,7 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2/\text{К}$.

73. (2) Исходя из модели свободных электронов определить число соударений, которые испытывает электрон за время 1 с, находясь в металле, если концентрация свободных электронов равна $5,3 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$. Удельную проводимость у металла принять равной 10 МСм/м.

74. (2) Оценить среднее время между последовательными соударениями электронов проводимости с ионами кристаллической решетки меди при комнатной температуре, если удельное электрическое сопротивление 17 нОм·м. Считать, что число электронов проводимости и число атомов меди в единице объема одинаково.

75. (2) Каково должно быть время ускорения электрическим полем напряженностью 3,6 В/см электрона проводимости в германии, чтобы изменение его импульса соответствовало волновому вектору продольного акустического фонона с частотой 1,4 ТГц? Скорость продольного звука 4,6 км/с.

76. (3) В тонких металлических проволочках длина свободного пробега электронов при низкой температуре обычно лимитируется диаметром проволоки. Исходя из этого оценить эффективную удельную проводимость тонкой медной проволоки диаметром 0,45 мкм при температуре 10 К. Считать, что на каждый атом меди приходится по одному свободному электрону. Эффективная масса электрона $m^* = 1,2 m_e$.

77. (2) Вычислить и сравнить тепловые скорости электронов проводимости в кристаллах германия (эффективная масса электрона равна $0,56 m_e$) и меди при температуре 300 К.

78. (2) Во сколько раз изменится при повышении температуры от 300 до 360 К электропроводность: а) металла; б) собственного полупроводника, ширина запрещенной зоны которого 0,32 эВ? Каков характер изменения в обоих случаях?

79. (2) Как соотносятся проводимости германия и кремния при комнатной температуре 27 °С? (Используйте оценки соответствующих вероятностей.)

80. (2) Германиевый образец нагревают от 0 до 17 °С. Определить, во сколько раз увеличивается его удельная проводимость.

81. (2) При нагревании некоторого собственного полупроводникового кристалла от температуры 0 °С до температуры 10 °С его удельная проводимость увеличивается в 2,3 раза. Определить ширину запрещенной зоны кристалла и материал полупроводника.

82. (1) Кремниевый образец нагревают от 0 до 10 °С. Во сколько раз увеличивается его удельная проводимость?

83. (1) Полупроводниковый кристалл, ширина запрещенной зоны которого 0,69 эВ, нагревают от температуры 27 °С на 100 градусов. Во сколько раз увеличивается его удельная проводимость?

84. (2) Найти минимальную энергию, необходимую для образования пары «электрон – дырка» в некотором полупроводниковом кристалле, если его удельная проводимость изменяется в 1,7 раза при изменении температуры от 20 до 3 °С.

85. (2) Сопротивление полупроводникового кристалла PbS при температуре 20 °С равно 10 кОм. Определить сопротивление этого кристалла при температуре 50 °С.

86. (2) Электрон из зоны проводимости рекомбинирует с дыркой на донорном уровне атома мышьяка в кремнии. Какова частота излучаемой при этом

электромагнитной волны? Прозрачен или непрозрачен кремний при найденной частоте? Можно ли определить тип легирующего элемента или примеси исходя из наблюдаемого рекомбинационного излучения или из общих оптических характеристик?

87. (2) Красная граница внешнего фотоэффекта сурьмяноцезиевого катода (при очень низкой температуре) соответствует 0,65 мкм, а красная граница фотопроводимости – 2,07 мкм. Определить положение (в электронвольтах) дна зоны проводимости данного полупроводника относительно вакуума.

88. (2) Используя понятие энергетических зон, доказать расчетом следующие свойства: а) металлы непрозрачны во всем диапазоне световых волн; б) полупроводники непрозрачны для видимого света, но прозрачны для инфракрасного; в) многие изоляторы прозрачны для видимого света.

89. (2) Тонкая пластинка из кремния толщиной 0,25 мм помещена в однородное магнитное поле с индукцией 85 мТл перпендикулярно линиям поля. При плотности тока 2 мкА/мм², направленного вдоль пластины, холловская разность потенциалов оказалась равной 28 мВ. Определить концентрацию носителей заряда.

90. (2) Найти холловскую разность потенциалов, возникающую в пластинке длиной 5,2 мм и шириной 1,6 мм, выпиленной из германия, легированного акцепторной примесью со степенью легирования 10^{-6} , помещенной в магнитное поле с индукцией 55 мТл при напряжении 12 В, приложенном к концам пластинки. Удельную проводимость германия принять равной 80 См/м.

6. КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

6.1. Контакт электронного и дырочного полупроводников

В подавляющем большинстве устройств, используемых в настоящее время в микроэлектронике, главной частью является так называемый электронно-дырочный переход (или *p-n*-переход) – контакт двух примесных полупроводников, обладающих различным типом проводимости.

В полупроводнике *n*-типа основными носителями заряда являются электроны, отданные примесями-донорами в зону проводимости. Здесь же есть и небольшое число дырок (неосновных носителей), образованных за счет перехода электронов из валентной зоны непосредственно в зону проводимости.

В полупроводнике p -типа основными носителями заряда являются дырки. Кроме того, здесь имеется небольшое количество электронов (неосновных носителей), которые перешли непосредственно из валентной зоны в зону проводимости в результате теплового движения электронов.

После приведения в контакт двух полупроводников с разным типом проводимости через границу контакта начинается диффузия электронов и дырок в противоположных направлениях из-за их различной концентрации. При переходе через границу раздела электроны встречаются с дырками и рекомбинируют (электроны и дырки уничтожают друг друга), вследствие чего на границе возникает слой, обедненный свободными носителями и накопленными нескомпенсированными отрицательными и положительными зарядами ионов решетки, поле которых препятствует дальнейшей диффузии. Разделение зарядов на границе двух полупроводников приводит к созданию запирающего электрического поля с напряженностью $\vec{E}_{\text{зап}}$, которое не позволяет ни электронам, ни дыркам двигаться через границу раздела – говорят, образовался p - n -переход.

Образование p - n -перехода можно объяснить с помощью зонной теории твердых тел.

В полупроводнике n -типа уровень Ферми расположен выше, чем в полупроводнике p -типа (см. рис.18). Это значит, что средняя энергия $\langle W \rangle$ электронов в полупроводнике n -типа выше, чем в полупроводнике p -типа (электроны полупроводника n -типа «горячее» электронов полупроводника p -типа).

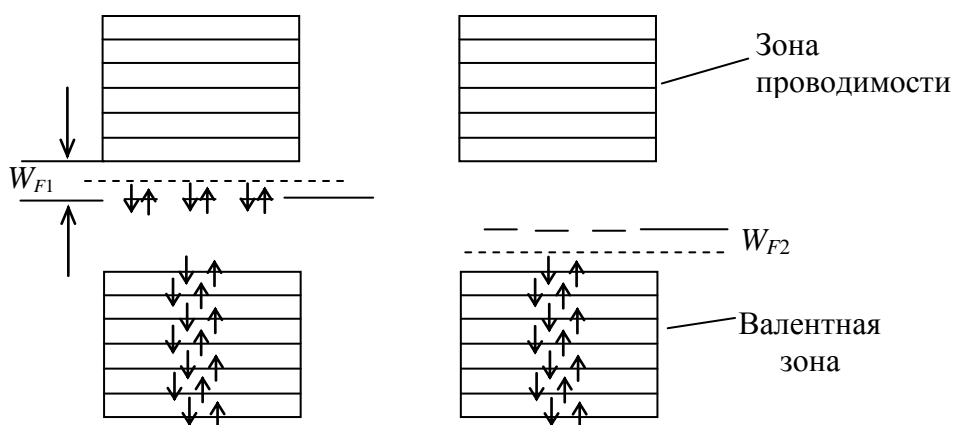


Рис. 18. Расположение уровня Ферми в примесных полупроводниках

После приведения в контакт полупроводников с разным типом проводимости электроны будут стремиться занять состояния с меньшей энергией, это приведет к появлению диффузии электронов. Переход «горячих» электронов из полупроводника n -типа в полупроводник p -типа, где электроны «холодные», приводит к снижению средней энергии электронов в полупроводнике n -типа и к повышению средней энергии в полупроводнике p -типа (это приводит к смещению энергетических зон). Диффузия будет проходить до тех пор, пока уровни Ферми в обоих полупроводниках не сравняются. Смещение зон относительно друг друга приводит к образованию потенциального барьера, который электроны самостоятельно преодолеть не могут (рис. 19).

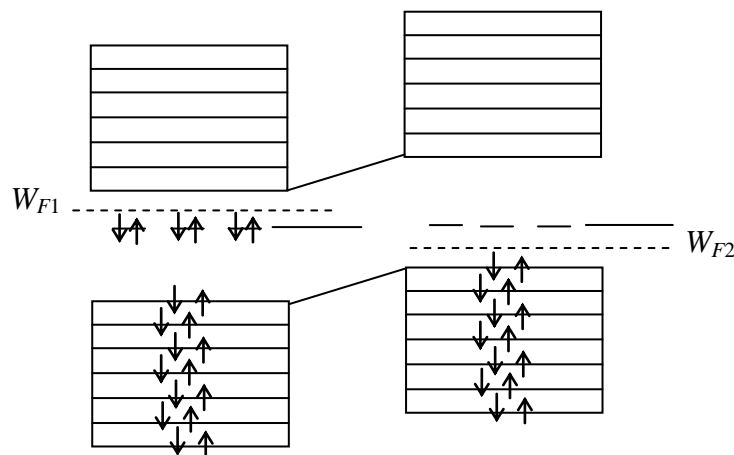


Рис. 19. Образование потенциального барьера на границе полупроводников с разным типом проводимости

Все замечательные свойства p - n -перехода проявляются при включении его в электрическую цепь.

Различают прямое и обратное включение.

При прямом включении напряженность внешнего электрического поля направлена навстречу запирающему и снижает его действие, поэтому при прямом включении через переход течет электрический ток. И чем больше напряженность внешнего поля, тем больше величина силы прямого тока. При таком включении полупроводник n -типа получает от внешнего источника дополнительные «более горячие» электроны и $\langle W \rangle$ электронов в полупроводнике n -типа увеличивается, а из полупроводника p -типа электроны уходят, что снижает $\langle W \rangle$ электронов в нем. Это приводит к смещению энергетических зон относительно друг друга, и уровни Ферми вновь оказываются не на одной высоте.

Работа внешнего электрического поля приводит к тому, что высота потенциального барьера между энергетическими зонами полупроводников с разным типом проводимости уменьшается. И чем больше внешнее напряжение, тем ниже потенциальный барьер, а значит, больше сила тока прямого включения:

$$I_{\text{прям}} = I_0 \left[\exp\left(\frac{qU}{k_B T}\right) - 1 \right]. \quad (47)$$

Сопротивление p - n -перехода вычисляется по формуле

$$R = \frac{dU}{dI} = \left(\frac{dI}{dU} \right)^{-1} \quad (48)$$

и при прямом включении по мере увеличения внешнего напряжения снижается.

При обратном включении напряженность внешнего электрического поля направлена в ту же сторону, что и запирающего, и усиливает его действие. Ток основных носителей через p - n -переход невозможен. Однако через p - n -переход в этом случае протекает небольшой обратный ток (\sim в 10^3 раз меньше прямого тока), обусловленный наличием в полупроводниках неосновных носителей заряда (в полупроводниках n -типа – дырок, а в полупроводниках p -типа – электронов). Так как их небольшое количество, то они все вовлекаются в процесс переноса зарядов, и небольшой обратный ток быстро достигает насыщения.

Согласно зонной теории при обратном включении из полупроводника n -типа уходят электроны и средняя энергия оставшихся электронов снижается, а полупроводник p -типа от внешнего источника получает «более горячие» электроны, и средняя энергия электронов в этом полупроводнике увеличивается. Это приводит к смещению энергетических зон относительно друг друга, и уровни Ферми оказываются вновь не на одной высоте. Тогда работа внешнего электрического поля при обратном включении приводит к тому, что высота потенциального барьера между энергетическими зонами полупроводников с разным типом проводимости еще более увеличивается, препятствуя току основных носителей:

$$I_{\text{обр}} = -I_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{qU}{k_B T}\right) \right]. \quad (49)$$

Так как p - n -переход в прямом направлении хорошо пропускает электрический ток, а в обратном направлении практически не пропускает, то такое

устройство стали называть полупроводниковым диодом. Полупроводниковые диоды нашли широкое применение в технике и радиоэлектронике (например, в выпрямителях электрического тока для преобразования переменного тока в постоянный).

Если привести в контакт три полупроводника с разной проводимостью *n-p-n* или *p-n-p*, то такое устройство будет обладать еще и свойством управления сигналами (полупроводниковый транзистор). Большое количество полупроводниковых элементов в пределах одного полупроводникового кристалла образует интегральную схему, нашедшую широкое применение в микроэлектронике.

6.2. Термоэлектронная эмиссия

Явление вырывания электронов с поверхности металлов при их нагревании называется термоэлектронной эмиссией.

Несмотря на то, что электроны проводимости в металлах являются свободными (в пределах объема металла!), они не могут покинуть металл, поскольку находятся в потенциальной яме, т. е. их энергия меньше энергии свободного электрона в вакууме. «Глубина», на которой находятся самые быстрые электроны в металле (при абсолютном нуле температуры), равна работе выхода электронов из металла. При комнатной температуре в соответствии с распределением Ферми – Дирака лишь малая часть электронов (и то благодаря их огромному количеству) может иметь энергию, превышающую работу выхода. Однако при нагревании металла количество электронов, способных преодолеть потенциальный барьер, становится существенным.

Для наблюдения закономерностей, связанных с термоэлектронной эмиссией, необходима двухэлектродная электронная лампа с подогреваемым катодом (диод), включенная в цепь регулируемого постоянного напряжения.

При постоянной температуре нагретого катода зависимость силы тока через диод от приложенного между катодом и анодом положительного напряжения (для его малых значений) описывается так называемым «законом трех вторых», открытым русским физиком С. А. Богуславским и американцем И. Ленгмюром в начале XX в.:

$$I = BU^{3/2}, \quad (50)$$

где B – коэффициент пропорциональности, который зависит от формы, размеров и взаимного расположения катода и анода.

При дальнейшем увеличении анодного напряжения ток стремится к максимальному значению – току насыщения, при котором практически все электроны, покинувшие катод, достигают анода. С учетом квантовой теории для плотности тока насыщения была получена так называемая формула Ричардсона – Дешмана, имеющая вид:

$$j = 1 - R A T^2 e^{-A_{\text{вых}}/kT}, \quad (51)$$

где R – средний коэффициент отражения электронов от потенциального барьера; $A = 120,4 \text{ А/ К} \cdot \text{м}^2$ – термоэлектрическая постоянная.

Термоэлектронная эмиссия находит широкое применение в различных электронных устройствах (электроракуумные лампы, электронно-лучевые трубки, кинескопы, электронные пушки и т. п.).

6.3. Контакт двух металлов

Если металлы Al, Zn, Sn, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd привести в контакт в указанной последовательности, то каждый предыдущий при соприкосновении с одним из следующих зарядится положительно. Этот ряд называется рядом Вольта. Контактная разность потенциалов для различных металлов составляет от десятых долей вольта до единиц вольт.

Итальянским ученым А. Вольтой экспериментально были установлены следующие законы:

1) при контакте двух проводников из разных металлов между ними возникает контактная разность потенциалов, которая зависит только от химического состава металлов и их температуры;

2) разность потенциалов между концами электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных металлических проводников, находящихся при одинаковой температуре, не зависит от химического состава промежуточных проводников, а определяется лишь разностью потенциалов, возникающей при непосредственном контакте крайних проводников.

Теоретическое объяснение законов Вольта было дано только в рамках квантовой физики.

Разные металлы имеют не только различную работу выхода электронов, но и различное положение уровня Ферми по отношению ко дну валентной зоны (напомним, что у металлов она же является и зоной проводимости) и к энергии

электрона, покинувшего металл. При контакте двух металлов электроны начнут перетекать из металла с более высоким положением уровня Ферми в металл с более низким уровнем Ферми, заряжая первый положительно, а второй отрицательно. Из статистической физики известно, что равновесие наступит при выравнивании положения уровня Ферми в обоих металлах. Смещение энергетических зон, возникающее из-за перетекания электронов, приводит к возникновению так называемой внешней контактной разности потенциалов, обусловленной разностью работ выхода электронов

$$U_K = \frac{A_{\text{вых}2} - A_{\text{вых}1}}{e}, \quad (52)$$

и внутренней контактной разности потенциалов, связанной с разностью положений уровня Ферми по отношению к дну валентной зоны

$$U'_K = \frac{W_{F1} - W_{F2}}{e}. \quad (53)$$

В 1823 г. немецкий физик Т. Зеебек установил, что в цепи, состоящей из двух разнородных проводников, возникает ЭДС, если контакты этих проводников поддерживаются при различных значениях температуры. Эта ЭДС называется термоЭДС. Как показывает опыт, в относительно узком интервале температур она пропорциональна разности температур контактов:

$$\mathcal{E}_{t^{\circ}} = a_{12} T_A - T_B, \quad (54)$$

где a_{12} – коэффициент термоЭДС металла 1 относительно металла 2.

Возникновение термоЭДС обусловлено, во-первых, зависимостью уровня Ферми в металлах от температуры: при различных значениях температуры спаев будут неодинаковы и включенные навстречу друг другу внутренние контактные разности потенциалов, во-вторых, диффузией электронов от горячего спае к холодному в объеме металла, а также увлечением электронов фононами. (При наличии градиента температуры вдоль проводника возникает дрейф фононов, направленных от горячего конца к холодному. Сталкиваясь с электронами, фононы сообщают им направление движения, увлекая за собой.)

Практическое применение эффекта Зеебека весьма проблематично из-за крайне малых значений термоЭДС: для большинства металлов она не превышает нескольких десятков микровольт на один градус разности температур, по-

этому эффект Зеебека применяется лишь в измерительных целях (термопары). Помещая одну термопару в термостат с постоянной температурой, а другую в исследуемую среду, по возникающей \mathcal{E}_T можно определить температуру среды.

Таким образом, удастся весьма просто, надежно и с достаточно большой степенью точности измерять температуру в широком диапазоне.

В 1834 г. французский физик Ж. Пельтье обнаружил эффект поглощения или выделения теплоты (в зависимости от направления тока) при прохождении электрического тока через контакт двух различных проводников.

Это дополнительное тепло (помимо джоулева) стало называться теплом Пельтье. В отличие от джоулева тепла, пропорционального квадрату тока, тепло Пельтье Q пропорционально количеству заряда q , прошедшему через контакт:

$$Q = \Pi q. \quad (55)$$

Коэффициент пропорциональности Π называется коэффициентом Пельтье и определяется контактирующими материалами и их температурой. Для металлов коэффициент Пельтье имеет значение порядка $1 \div 10$ мВ, а для полупроводников $1 \div 300$ мВ.

Эффект Пельтье является обратным эффекту Зеебека и объясняется тем, что средняя энергия носителей тока в различных проводниках имеет разные значения и зависит от энергетического спектра материала и механизмов рассеяния.

При переходе из одного проводника в другой электроны либо передают избыточную энергию атомам твердого тела, либо пополняют недостающую энергию за счет тепловых колебаний решетки. В первом случае будет происходить выделение тепла, а во втором – поглощение.

Эффект Пельтье используется в небольших холодильных установках малой мощности, а также для охлаждения электронных приборов и для уменьшения шумов.

Кроме эффекта Зеебека и эффекта Пельтье с термоэлектричеством связано также явление В. Томсона (Кельвина), наблюдающееся при прохождении тока по неравномерно нагретому проводнику. В менее нагретой части проводника электроны имеют более низкую среднюю энергию, поэтому при движении электронов в направлении возрастания температуры они поглощают энергию решетки, вызывая охлаждение проводника. При обратном протекании тока происходит выделение теплоты Томсона.

6.4. Задачи для самостоятельного решения

91. (2) Сопротивление полупроводникового диода, находящегося при температуре 300 К под прямым напряжением в 1 В, равно 10 Ом. Определить сопротивление диода при таком же обратном напряжении.

92. (2) *p-n*-переход, находящийся при температуре 27 °С под обратным напряжением в 0,1 В, имеет сопротивление 692 Ом. Каково сопротивление перехода при таком же прямом напряжении?

93. (2) Прямое напряжение, приложенное к *p-n*-переходу, равно 2,8 В. Во сколько раз возрастет сила тока через переход, если изменить температуру от 300 до 273 К?

94. (1) Определить внутреннюю и внешнюю контактные разности потенциалов между алюминием и медью; медью и цинком.

95. (2) Имеются два металла с концентрацией свободных электронов 10^{28} и 10^{29} м^{-3} . Определить внутреннюю контактную разность потенциалов, возникающую при приведении этих металлов в соприкосновение.

96. (3) Металлы литий и цинк приводят в соприкосновение друг с другом при температуре 0 К. Насколько изменится концентрация электронов проводимости в цинке? Какой из этих металлов будет иметь более высокий потенциал?

97. (2) Между электродами двухэлектродной лампы (диода) включена батарея с ЭДС 10 В. Материал катода – вольфрам, анода – никель. Какую энергию приобретают электроны на пути от катода к аноду? Начальной скоростью электронов пренебречь.

98. (2) Зазор между пластинами плоского конденсатора 1 мм. Одна из пластин изготовлена из платины, другая – из алюминия. Пластины закорочены медным проводом. Какова будет напряженность электрического поля между пластинами? Как это поле будет направлено?

99. (2) Термопара «медь – константан» с сопротивлением 5 Ом присоединена к гальванометру, сопротивление которого 100 Ом. Один спай термопары погружен в тающий лед, другой – в горячую жидкость. Сила тока в цепи равна 37 мкА. Постоянная термопары 43 мкВ/К. Определить температуру жидкости.

100. (2) Сила тока в цепи, состоящей из термопары с сопротивлением 4 Ом и гальванометра с сопротивлением 80 Ом, равна 26 мкА при разности температур спаев, равной 50 °С. Определить температурный коэффициент термопары.

Библиографический список

1. Епифанов Г. И. Физика твердого тела / Г. И. Епифанов. СПб, 2011. 288 с.
2. Матухин В. Л. Физика твердого тела / В. Л. Матухин, В. Л. Ермаков. СПб, 2010. 224 с.
3. Савельев И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. СПб, 2007. Т. 3. 320 с.
4. Матвеев А. Н. Молекулярная физика / А. Н. Матвеев. М., 2006. 360 с.
5. Трофимова Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. М., 2006. 560 с.
6. Детлаф А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. М., 2003. 607 с.
7. Ландау Л. Д. Статистическая физика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М., 2002. Ч. 1. 616 с.
8. Иродов И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. М., 2002. 448 с.
9. Чертов А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. М., 2001. 640 с.
10. Физика: Большой энциклопедический словарь / Гл. ред. А. М. Прохоров. М., 2003. 944 с.
11. Физические величины / Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. М., 1991. 1232 с.

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ

Т а б л и ц а П. 1

Десятичные приставки

Наименование	Обозначение	Множитель	Наименование	Обозначение	Множитель
милли	м	10^{-3}	кило	к	10^3
микро	мк	10^{-6}	мега	М	10^6
нано	н	10^{-9}	гига	Г	10^9

Т а б л и ц а П. 2

Плотность и молярная масса некоторых химических элементов и соединений

Элемент	ρ , г/см ³	М, г/моль
Алмаз	3,50	12
Алюминий	2,70	27
Железо (сталь)	7,80	56
Калий	0,86	39
Литий	0,53	7,0
Магний	1,74	24
Медь	8,90	64
Натрий	0,97	23
Поваренная соль	2,20	58,5
Серебро	10,5	108
Цезий	1,90	133

Т а б л и ц а П. 3

Механические и тепловые свойства металлов

Металл	Модуль Юнга, ГПа	Удельная теплоемкость, Дж/(кг К)	Коэффициент линейного теплового расширения, 10^{-5} К^{-1}	Коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К)
Железо (сталь)	210	460	1,25	47
Медь	110	400	1,60	384

Т а б л и ц а П. 4

Скорость звука в твердых веществах

Вещество	Алмаз	Алюминий	Медь	Натрий	Поваренная соль	Серебро
Скорость звука, км/с	11,50	3,60	2,40	1,70	3,80	1,95

Т а б л и ц а П. 5

Тепловые свойства воды

Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	Удельная теплота кристаллизации, кДж/кг	Удельная теплота парообразования, МДж/кг
4190	333	2,26

Т а б л и ц а П. 6

Энергия активации полупроводников

Полупроводник	Si	Ge	PbS	As+Si
Энергия активации, эВ	1,12	0,75	0,41	0,05

Т а б л и ц а П. 7

Работа выхода электронов из металлов

Металл	Al	W	Li	Cu	Ni	Pt	Zn
Работа выхода электронов, эВ	4,25	4,54	2,38	4,40	4,50	5,32	4,24

Некоторые физические постоянные

Название	Значение
Электрическая постоянная	$k_e = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$; $k_e = 1 / (4\pi\epsilon_0)$, где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$.
Постоянная Больцмана	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$.
Скорость света в вакууме	$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.
Постоянная Планка	$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$, $\hbar = h / (2\pi) = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$.
Постоянная Стефана – Больцмана	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} / (\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$.
Постоянные Вина	$b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$, $b' = 1,29 \cdot 10^{-5} \text{ Вт} / (\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$.
Универсальная газовая постоянная	$R = 8,31 \text{ Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К})$.
Элементарный заряд	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$.
Масса покоя электрона	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$.

П р и м е ч а н и я.

1. Соотношение эВ и Дж: $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$.
2. Соотношение К и °С: $T = t^\circ\text{C} + 273$.
3. Соотношение карата и килограмма: $1 \text{ кар} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ кг}$.

Учебное издание

КРОХИН Сергей Николаевич,
ЛИТНЕВСКИЙ Леонид Аркадьевич

КРАТКИЙ КУРС
ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Учебное пособие

Редактор Н. А. Майорова
Корректор И. А. Сенеджук

Подписано в печать .06.2015. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 4,2. Уч.-изд. л. 4,7.
Тираж 500 экз. Заказ .

**

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35

С. Н. КРОХИН, Л. А. ЛИТНЕВСКИЙ

**КРАТКИЙ КУРС
ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

ОМСК 2015