УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО РАЗДЕЛАМ «МЕХАНИКА» И «МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА»

ОМСК 2022

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО РАЗДЕЛАМ «МЕХАНИКА» И «МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА»

Утверждено методическим советом университета

Омск 2022

УДК 531(075.8)
ББК 22.2я73
В64

Учебно-методическое пособие для подготовки студентов к решению задач по разделам «Механика» и «Молекулярная физика»: Учебно-методическое пособие / С. В. Вознюк, С. А. Гельвер, Л. А. Литневский, Ю. М. Сосновский, Г. Б. Тодер, Н. А. Хмырова; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2022. 43 с.

В пособии приведены задачи по разделам физики «Механика», «Молекулярная физика» и «Термодинамика», сформулированы общие алгоритмы, показаны примеры решения задач, даны основные формулы и сведения, необходимые для решения задач, представлен библиографический список.

Предназначено для аудиторной и самостоятельной работы студентов первого курса очной формы обучения.

Библиогр.: 9 назв. Табл. 1. Рис. 11.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент В. В. Дмитриев;
канд. физ.-мат. наук, доцент О. В. Гателюк.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие для решения задач по общей физике поможет студентам изучить этот интереснейший предмет. Программа курса «Физика» построена таким образом, чтобы студенты не только приобрели определенные знания, но и научились применять их на практике. Решение задач для реализации этой цели является совершенно необходимым.

Перед решением задач нужно изучить теоретический материал по соответствующей теме, затем внимательно прочитать условие задачи и понять, к какому разделу физики относится рассматриваемая задача, какое явление и какой процесс она описывает. После этого следует кратко записать условие задачи, правильно обозначить используемые величины и рационально расставить индексы. Приведенные в условии значения величин следует перевести в основные единицы СИ (граммы – в килограммы, километры – в метры и т. д.).

Для решения задачи по механике необходимо выполнить рисунок и выбрать удобную для вычислений систему отсчета, построить проекции векторов на выбранные оси координат и выписать подходящие формулы. Для наглядности бывает полезно подчеркнуть известные и неизвестные величины. Если неизвестных больше, чем уравнений, то необходимо найти дополнительные уравнения. Решать задачи следует в общем виде. Численные значения величин рекомендуется подставлять в расчетную формулу после того, как получено алгебраическое выражение для искомой величины.

Полезно систематизировать проведенные при решении задачи математические преобразования, проанализировать их, попробовать найти более рациональное решение после получения ответа в трудной задаче, еще раз вернуться к ее решению.

Теоретический материал по разделам «Механика» и «Молекулярная физика» подробно представлен в книгах [1, 2], кратко описан в работах [3, 4]. Примеры решения задач по данным разделам даны в пособиях [5 – 8]. В пособии [9] имеются задачи для самостоятельной работы.

1. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

1.1. Кинематика движения с переменным ускорением

Основные формулы и обозначения

Основные кинематические характеристики материальной точки: 1) радиус-вектор $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; 2) скорость $\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}$; 3) перемещение $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$; 4) ускорение $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{j}$.

Формулы, связывающие кинематические характеристики точки: $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$; $\vec{r} = \vec{r}_0 + \int\limits_{t_0}^{t}\vec{\upsilon}dt$ и /(или) $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \int\limits_{t_0}^{t}\vec{\upsilon}dt$; $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$; $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \int\limits_{t_0}^{t}\vec{a}dt$, где $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ – радиус-вектор, задающий начальное положение; $\vec{\upsilon}_0$ – начальная скорость.

Модуль скорости: $\upsilon = \dfrac{dl}{dt}$, где l – длина пути. Модули тангенциального и нормального ускорений: $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ и $\vec{a}_n = (\upsilon^2 / R)\vec{n}$. Интегральные формулы: $l = \int\limits_0^t \upsilon dt$, $\upsilon = \upsilon_0 + \int\limits_0^t a_\tau dt$. Полное ускорение: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, $a^2 = a_\tau^2 + a_n^2$ $(\vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n)$.

1.1.1. Вычисление скорости по радиус-вектору

Пример представления решения задачи

З а д а ч а. Зависимость радиус-вектора точки от времени имеет вид: $\vec{r}(t) = At^3\vec{i} + Bt^{5/2}\vec{j}$, где $A = 1$ м/с^3; $B = 3{,}75$ м/с$^{-5/2}$. Найти: 1) зависимость скорости точки от времени; 2) модуль скорости через 4 с от начала движения.

Дано:

$\vec{r}(t) = At^3\vec{i} + Bt^{5/2}\vec{j}$;

$A = 1$ м/с^3;

$B = 3{,}75$ м/с$^{-5/2}$;

$t_1 = 4$ с.

$\vec{\upsilon}(t)$; υ_1 – ?

Алгоритм решения.

1. Записать формулу: $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$.
2. Подставить в эту формулу зависимость $\vec{r}(t)$.
3. Произвести вычисления.

Выполнение операций, входящих в алгоритм.

1. Исходная формула: $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

2. Подстановка зависимости $\vec{r}(t)$ в эту формулу: $\vec{\upsilon}=\dfrac{d}{dt}(At^3\vec{i}+Bt^{5/2}\vec{j})$.

3. Дифференцирование: $\vec{\upsilon}(t)=\dfrac{d}{dt}\left(At^3\vec{i}\right)+\dfrac{d}{dt}\left(Bt^{5/2}\vec{j}\right)=3At^2\vec{i}+(2/5)Bt^{3/2}\vec{j}$.

Численный расчет в момент t_1: $\vec{\upsilon}_1=(12\vec{i}+12\vec{j})$ м/с^2. Отсюда $\upsilon_{1x}=12$ м/с^2; $\upsilon_{1y}=12$ м/с; $\upsilon_{1z}=0$ м/с; $\upsilon_1=\sqrt{\upsilon_{1x}^2+\upsilon_{1y}^2+\upsilon_{1z}^2}\approx 16{,}8$ м/с.

Ответ: $\vec{\upsilon}=3At^2\vec{i}+(B\tau/t)\vec{j}$; $\upsilon_1=16{,}8$ м/с.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти зависимость скорости точки от времени и модуль скорости в момент $t_1=3$ с, если начальная скорость точки $\vec{\upsilon}_0=0$ м/с, ее радиус-вектор с течением времени меняется по закону:

1) $\vec{r}(t)=At^4\vec{i}+Bt^{1/3}\vec{k}$, где $A=2$ м/с^4; $B=5$ м/с$^{1/3}$;

2) $\vec{r}(t)=A\cos(\omega t)\vec{j}+B\vec{k}$, где $A=2$ м; $B=2$ м; $\omega=\pi$ с$^{-1}$;

3) $\vec{r}(t)=A\sin(\omega t)\vec{i}+Bt^2\vec{k}$, где $A=7$ м; $B=5$ м/с^2; $\omega=2\pi$ с$^{-1}$;

4) $x=A+Bt$; $y=C+Dt^6+Et^3$; $z=0$ м, где $A=10$ м; $B=5$ м/с; $C=4$ м; $D=0{,}02$ м/с^6; $E=0{,}3$ м/с^3.

1.1.2. Вычисление радиус-вектора и перемещения по скорости

Пример представления решения задачи

З а д а ч а. Зависимость скорости частицы от времени имеет вид: $\vec{\upsilon}(t)=At^{2/3}\vec{i}+Bt^{1/2}\vec{j}$, где $A=0{,}05$ м/с$^{5/3}$; $B=0{,}06$ м/с$^{3/2}$. Найти: зависимость перемещения от времени; модуль перемещения спустя 64 с от начала движения.

Дано:

$\vec{\upsilon}(t)=At^{2/3}\vec{i}+Bt^{1/2}\vec{j}$;

$A=0{,}05$ м/с$^{5/3}$;

$B=0{,}06$ м/с$^{3/2}$;

$t_1=64$ с.

$\Delta\vec{r}(t)$; $|\Delta\vec{r}_1|$ – ?

Алгоритм решения.

1. Записать формулу: $\Delta\vec{r}=\int\limits_{t_0}^{t}\vec{\upsilon}dt$.

2. Подставить в эту формулу зависимость $\vec{\upsilon}(t)$.

3. Произвести вычисления.

Выполнение операций, входящих в алгоритм.

1. Исходная формула: $\Delta\vec{r}=\int\limits_{0}^{t}\vec{\upsilon}dt$.

2. Подстановка зависимости $\vec{\upsilon}(t)$ в эту формулу: $\Delta\vec{r} = \int\limits_0^t \left(At^{2/3}\vec{i} + Bt^{1/2}\vec{j}\right)dt.$

3. Интегрирование: $\Delta\vec{r}(t) = (3At^{5/3}/5)\vec{i} + (2B/3t^{3/2})\vec{j}$. Численный расчет в момент t_1: $\Delta\vec{r}_1 = (30{,}72\vec{i} + 20{,}48\vec{j})$ м. Отсюда $\Delta r_{1x} = 30{,}72$ м; $\Delta r_{1y} = 20{,}48$ м; $\Delta r_{1z} = 0$ м; $|\Delta\vec{r}_1| = \left(\sqrt{\Delta r_{1x}^2 + \Delta r_{1y}^2 + \Delta r_{1z}^2}\right) = \left(\sqrt{30{,}72^2 + 20{,}48^2}\right) \approx 37{,}0$ м.

Ответ: $\Delta\vec{r} = (3At^{5/3}/5)\vec{i} + (2B/3t^{3/2})\vec{j}$; $|\Delta\vec{r}_1| = 37{,}0$ м.

Задачи для самостоятельного решения

2. Найти зависимость радиус-вектора от времени и модуль радиус-вектора частицы через 8 с после начала движения, если в начальный момент времени частица находилась в точке, радиус-вектор которой $\vec{r}_0 = D\vec{i} + E\vec{j}$, где $E = 3$ м, $D = 2$ м, а зависимость скорости частицы от времени имеет вид:

1) $\vec{\upsilon}(t) = At^{1/3}\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}$, где $A = 8$ м/с$^{4/3}$; $B = 5$ м/с^2; $C = 25$ м/с;

2) $\upsilon_y(t) = Bt^{1/3}$; $\upsilon_z(t) = Ct^3$; $\upsilon_x(t) = 0$ м/с, где $B = 5$ м/с$^{4/3}$; $C = 0{,}25$ м/с^4.

3. Зависимость скорости от времени имеет вид: $\vec{\upsilon}(t) = At^5\vec{i} + Bt^2\vec{j} + C\sqrt{t}\vec{k}$, где $A = 0{,}03$ м/с^6; $B = 1{,}2$ м/с^3; $C = 20$ м/с$^{3/2}$. Найти зависимость перемещения от времени и модуль перемещения точки через 4 с после начала движения.

1.1.3. Вычисление ускорения по скорости

Пример представления решения задачи

З а д а ч а. Найти зависимость ускорения точки от времени и модуль ускорения спустя 0,5 с от начала движения, если зависимость скорости от времени имеет вид: $\vec{\upsilon}(t) = A\sin(\omega t)\vec{i} + B\cos^2(\omega t)\vec{k}$, где $A = 1$ м/с; $B = 1{,}3$ м/с; $\omega = 2\pi$ с$^{-1}$.

Дано:	*Алгоритм решения задачи*:
$\vec{\upsilon}(t) = A\sin(\omega t)\vec{i} + B\cos^2(\omega t)\vec{k}$; $A = 1$ м/с; $B = 1{,}3$ м/с; $\omega = 2\pi$ с$^{-1}$; $t_1 = 0{,}5$ с. ——— $\vec{a}(t)$; a_1 – ?	1. Записать формулу: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$. 2. Подставить в нее зависимость $\vec{\upsilon}(t)$. 3. Произвести вычисления. *Выполнение операций, входящих в алгоритм.*

1. Исходная формула: $\vec{a}=\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$.

2. Подстановка в нее зависимости $\vec{\upsilon}(t)$: $\vec{a}=\dfrac{d}{dt}\left(A\sin(\omega t)\vec{i}+B\cos^2(\omega t)\vec{k}\right)$.

3. Дифференцирование: $\vec{a}(t)=A\omega\cos(\omega t)\vec{i}-2B\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t)\vec{k}$. Численный расчет в момент t_1: $\vec{a}_1=0\vec{i}+0\vec{k}$ м/с^2. Следовательно, $a_{1x}=0$ м/с^2; $a_{1y}=0$ м/с^2; $a_{1z}=0$ м/с^2. Отсюда $a_1=\left(\sqrt{a_{1x}^2+a_{1y}^2+a_{1z}^2}\right)=0$ м/с^2.

Ответ: $\vec{a}(t)=A\omega\cos(\omega t)\vec{i}-2B\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t)\vec{k}$, $a_1=0$ м/с^2.

Задачи для самостоятельного решения

4. Найти зависимость ускорения от времени и модуль ускорения через 1 с от начала движения частицы, если зависимость скорости от времени имеет вид:

1) $\vec{\upsilon}(t)=At^{1/3}\vec{i}+Bt\vec{j}+C\vec{k}$, где $A=8$ м/с$^{4/3}$; $B=5$ м/с^2; $C=25$ м/с;

2) $\upsilon_y(t)=Bt^{1/3}$; $\upsilon_z(t)=Ct^3$; $\upsilon_x(t)=0$ м/с, где $B=5$ м/с$^{4/3}$; $C=0{,}25$ м/с^4;

3) $\vec{\upsilon}(t)=At^5\vec{i}+Bt^2\vec{j}+C\sqrt{t}\vec{k}$, где $A=0{,}03$ м/с^6; $B=1{,}2$ м/с^3; $C=20$ м/с$^{3/2}$.

1.1.4. Вычисление скорости по ускорению

Пример представления решения задачи

З а д а ч а. Найти скорость частицы и ее модуль через 4 с от начала движения, если начальная скорость $\vec{\upsilon}_0=L\vec{j}$, где $L=10$ м/с, ускорение меняется с течением времени по закону: $\vec{a}(t)=At^2\vec{i}+Bt^{1/2}\vec{k}$, где $A=2$ м/с^4 и $B=5$ м/с$^{5/2}$.

Дано:
$\vec{a}(t)=At^2\vec{i}+Bt^{1/2}\vec{k}$;
$A=3$ м/с^4;
$B=5$ м/с$^{5/2}$;
$\vec{\upsilon}_0=L\vec{j}$;
L = 10 м/с;
$t_1=4$ с.

$\vec{a}(t)$; a_1 – ?

Алгоритм решения.

1. Записать формулу: $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_0+\int\limits_0^t\vec{a}dt$.

2. Подставить в нее зависимость $\vec{a}(t)$.

3. Произвести вычисления.

Выполнение операций, входящих в алгоритм.

1. Исходная формула: $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_0+\int\limits_0^t\vec{a}dt$.

2. Подстановка $\vec{a}(t)$: $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_0+\int\limits_0^t(At^2\vec{i}+Bt^{1/2}\vec{k})dt$.

3. Интегрирование и подстановка $\vec{\upsilon}_0(t)$: $\vec{\upsilon}(t) = (At^3/3)\vec{i} + L\vec{j} + (2Bt^{3/2}/3)\vec{k}$. Численный расчет в момент t_1: $\vec{\upsilon}_1 \approx (43\vec{i} + 10\vec{j} + 9\vec{k})$ м/с. Следовательно, $\upsilon_{1x} = 43$ м/с; $\upsilon_{1y} = 10$ м/с; $\upsilon_{1z} = 9$ м/с. Отсюда $\upsilon_1 = \left(\sqrt{\upsilon_{1x}^2 + \upsilon_{1y}^2 + \upsilon_{1z}^2}\right) \approx 45{,}0$ м/с.

Ответ. $\vec{\upsilon} = (At^3/3)\vec{i} + L\vec{j} + (2Bt^{3/2}/3)\vec{k}$, $\upsilon_1 \approx 45{,}0$ м/с.

Задачи для самостоятельного решения

5. Найти зависимость скорости частицы от времени и модуль скорости через 0,5 с после начала движения. Зависимость ускорения от времени и начальная скорость частицы заданы соотношениями:

1) $\vec{a}(t) = At^{1/3}\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}$, где $A = 8$ м/с$^{7/3}$; $B = 5$ м/с^3; $C = 25$ м/с^2; $\vec{\upsilon}_0(t) = M\vec{k}$, где $M = 9$ м/с.

2) $a_x(t) = At^{5/4}$; $a_z(t) = Ct^2$; $a_y(t) = 0$ м/с^2, где $A = 2{,}5$ м/с$^{13/4}$; $C = 0{,}15$ м/с^4; $\vec{\upsilon}_0 = L\vec{j} + M\vec{k}$, где $K = 0$ м/с; $L = 8$ м/с; $M = 6$ м/с.

3) $\vec{a}(t) = B\cos(\omega t)\vec{j} + Ct\vec{k}$, где $B = 2$ м/с^2; $C = 8$ м/с^3; $\omega = \pi$ с$^{-1}$, $\vec{\upsilon}_0 = 0$ м/с.

1.1.5. Прямая и обратная задачи механики

Задачи для самостоятельного решения

6. Частица движется так, что зависимость ее радиус-вектора от времени имеет вид: $\vec{r}(t) = At^3\vec{i} + Bt^2\vec{j} + C\vec{k}$, где $A = 2$ м/с^3; $B = 4$ м/с^2; С = – 2 м – константы. В момент времени 2 с найти: модуль мгновенной скорости частицы; ускорение и его модуль; тангенциальное и нормальное ускорения; радиус кривизны траектории.

7. Ускорение точки меняется с течением времени по закону: $\vec{a}(t) = At\vec{i} + Bt\vec{j} + Ct\vec{k}$, где $A = 8$ м/с^3; $B = 5$ м/с^3; $C = -6$ м/с^3 – константы. Ее начальная скорость $\vec{\upsilon}_0 = D\vec{i} + E\vec{j} + F\vec{k}$, где $D = 4$ м/с^2, $E = 2{,}5$ м/с^2, $F = -3$ м/с^2 – константы. В момент времени 4 с после начала движения найти: мгновенную скорость точки и ее модуль; перемещение; длину пути, пройденного точкой; тангенциальное и нормальное ускорения; радиус кривизны траектории.

1.2. Кинематика движения с постоянным ускорением

Основные формулы и обозначения

Уравнение движения и уравнение для скорости движения точки с постоянным ускорением: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \vec{a}t^2/2$ ($\Delta\vec{r} = \vec{\upsilon}_0 t + \vec{a}t^2/2$) и $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t$.

В частности, при свободном падении точки с ускорением $\vec{g}$ (g = 9,8 м/с^2) $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \vec{g}t^2/2$ ($\Delta\vec{r} = \vec{\upsilon}_0 t + \vec{g}t^2/2$) и $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t$.

Задачи для самостоятельного решения

8. Поезд, шедший со скоростью 36 км/ч, начинает двигаться равноускоренно и разгоняется по прямолинейному горизонтальному участку 600 м до 45 км/ч. Определить ускорение и время ускоренного движения.

9. Тормозной путь поезда перед остановкой на станции 1000 м. Определить ускорение и время торможения, если в начале торможения скорость поезда была 10,8 м/с. Найти скорость поезда в середине тормозного пути.

10. Поезд, двигаясь под уклон, прошел путь 340 м за 20 с и увеличил при этом свою скорость до 19 м/с. С каким ускорением двигался поезд и какой была его скорость в начале уклона? Какой путь прошел поезд за десятую секунду?

11. Баскетболист с высоты 195 см бросает мяч в кольцо со скоростью 8,5 м/с под углом $63°$ к горизонту. С какой скоростью мяч попал в кольцо, если долетел до него за 0,93с? Сопротивлением воздуха пренебречь.

12. Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось на землю через 3,2 с. Найти начальную скорость тела и наибольшую высоту подъема. Сопротивлением воздуха пренебречь.

13. Мяч брошен горизонтально со скоростью 13 м/с. Спустя некоторое время его скорость оказалась равной 18 м/с. Найти перемещение мяча за это время. Сопротивлением воздуха пренебречь.

14. Тело поднимают на веревке с поверхности земли с ускорением 2,7 м/с^2 вертикально вверх из состояния покоя. Через 5,8 с веревка оборвалась. Сколько времени двигалось тело до земли после того, как оборвалась веревка? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

2.1. Динамика прямолинейного движения с постоянным ускорением (с элементами кинематики)

Основные формулы и обозначения

Основной закон динамики материальной точки: $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{р}}$, где m – масса; $\vec{a}$ – ускорение точки; $\vec{F}_{\text{р}}$ – результирующая сила, действующая на точку.

Связь модулей силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и силы реакции опоры $\vec{N}$: $F_{\text{тр}} = \mu N,$ где μ – коэффициент трения скольжения.

Пример представления решения задачи

З а д а ч а. Найти коэффициент трения скольжения тела о плоскость (рис. 2.1), если за первую секунду от начала движения оно прошло путь 2 м. F_1 = 45 Н; F_2 = 10 Н; α = 45°. Масса тела 4 кг.

Дано:	*Алгоритм решения*.
$t = 1$ с;	1. Записать формулу: $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{р}}$.
$l = 2$ м;	2. Подставить в нее все силы, действующие на точку.
$F_1 = 45$ Н;	3. Записать полученное уравнение в проекциях.
$F_2 = 10$ Н;	4. Решить полученную систему уравнений с учетом связей между физическими величинами и формул для равноускоренного (равнопеременного) прямолинейного движения.
$\alpha = 45°$;	
$m = 4$ кг.	
$\mu - ?$	*Выполнение операций, входящих в алгоритм.*

1. Формула: $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{р}}$.

2. Силы, действующие на тело, указаны на рис. 2.2: тяжести $m\vec{g}$; реакции опоры $\vec{N}$; трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ ($\vec{F}_{\text{тр}} \uparrow\downarrow \vec{\upsilon}$, а скорость, как и ускорение, направлена вправо, так как $F_1 > F_2$). Таким образом,

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_2. \tag{2.1}$$

3. Оси X и Y указаны на рис. 2.2. Проекции уравнения (2.1) на оси X и Y:

$$ma = F_1 - F_{\text{тр}} + F_2 \cos\alpha; \tag{2.2}$$

$$0 = -mg + N + F_2 \sin\alpha. \qquad (2.3)$$

4. Движение тела равноускоренное прямолинейное, с нулевой начальной скоростью, поэтому $|\Delta\vec{r}| = l = \upsilon_0 t + at^2/2 = at^2/2$. Отсюда $a = 2l/t^2$. Соотношение (2.3) позволяет найти модуль силы реакции: $N = mg - F_2 \sin\alpha$; соотношение (2.2) – модуль силы трения: $F_{\text{тр}} = F_1 - F_2 \cos\alpha - ma$.

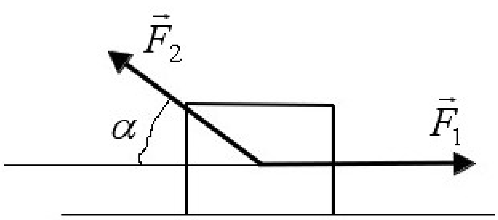

Рис. 2.1

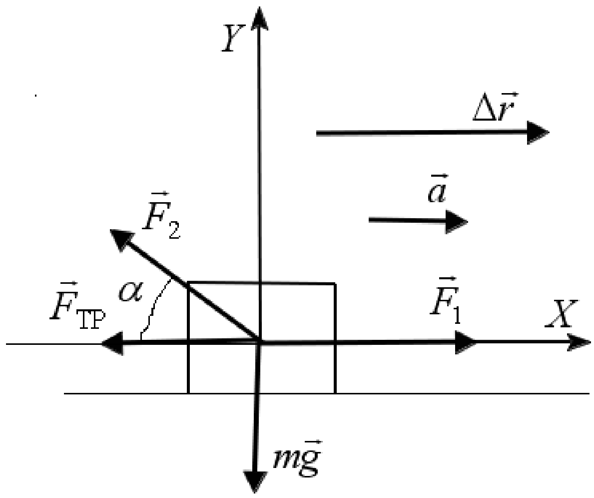

Рис. 2.2

Модули сил трения и реакции опоры связаны формулой $F_{\text{тр}} = \mu N$. Отсюда $\mu = \dfrac{F_{\text{тр}}}{N} = \dfrac{F_1 - F_2 \cos\alpha - m(2l/t^2)}{mg - F_2 \sin\alpha}$. Численный расчет: $\mu = 0{,}77$.

Ответ: $\mu = \dfrac{F_1 - F_2 \cos\alpha - m(2l/t^2)}{mg - F_2 \sin\alpha}$, $\mu = 0{,}77$.

Задачи для самостоятельного решения

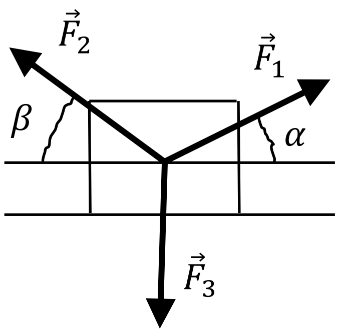

Рис. 2.3

15. Подвешенное к тросу тело массой 10 кг поднимается вертикально. С каким ускорением движется тело, если сила натяжения троса 118 Н? Каким будет натяжение троса при движении вниз с таким же ускорением?

16. Груз массой 150 кг, лежащий на дне кабины опускающегося лифта, давит на дно с силой 1800 Н. Определить модуль и направление ускорения лифта.

17. Найти массу тела, изображенного на рис. 2.3, если под действием указанных сил оно может сдвинуться с места. F_1 = 15 Н; F_2 = 10 Н; F_3 = 5 Н; α = 30 °; β = 45 °. Коэффициент трения скольжения 0,2.

18. Тело массой 2 кг покоилось на горизонтальной поверхности. На него подействовали силой, направленной под углом 30 ° к горизонту. За 5 с тело прошло 25 м. Найти модуль действующей силы, если коэффициент трения скольжения 0,02.

19. Автомобиль массой 2 т поднимается в гору с углом наклона 30°. На участке пути 32 м скорость автомобиля возросла от 21,6 до 36 км/ч. Считая движение автомобиля равноускоренным, определить силу тяги двигателя. Коэффициент сопротивления движению принять равным 0,2.

20. Тело массой 1 кг движется вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью 3 м/с. Коэффициент трения между телом и плоскостью 0,1, угол наклона плоскости 30°. На какую высоту поднимется тело?

2.2. Динамика связанных тел без учета вращения блока

Основные формулы и обозначения

Во всех задачах нить, связывающая тела и, в частности, нить, перекинутая через блок, считается невесомой и нерастяжимой. Это означает, что 1) модули ускорений всех точек нити и ускорений тел на концах нити одинаковы: $a_1 = a_2 = a$; 2) модули сил натяжения, действующих со стороны нити на тела, связанные нитью, одинаковы: $F_{\text{н}1} = F_{\text{н}2} = F_{\text{н}}$.

Пример представления решения задачи

З а д а ч а. Через легкий неподвижный блок, закрепленный на вершине наклонной плоскости, перекинута нить. Плоскость образует с горизонтом угол 30 °. К концам нити привязаны грузы. Первый груз массой 5 кг движется по плоскости, второй – массой 1 кг – вертикально. Найти модуль ускорений грузов, если коэффициент трения первого груза о плоскость 0,1?

Дано:	*Алгоритм решения*.
$m_1 = 5$ кг;	1. Записать основное уравнение: $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{р}}$.
$m_2 = 1$ кг;	2. Подставить в него все силы, действующие на каждое тело, по отдельности для каждого тела.
$\alpha = 30°$;	
$\mu = 0{,}1$.	3. Записать полученное уравнение в проекциях.
a – ?	4. Решить полученную систему уравнений с учетом связей между величинами.

Выполнение операций, входящих в алгоритм.

1. Основное уравнение: $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{р}}$.

2. Так как масса первого груза значительно больше массы второго и сила трения, действующая на первый груз, мала по сравнению с силой тяжести, ускорение первого груза направлено вниз вдоль наклонной плоскости, а ускорение второго груза – вертикально вверх.

Силы, действующие на второй груз (рис. 2.4): тяжести $m_2\vec{g}$; натяжения нити $\vec{F}_{\text{Н}2}$. Подстановка сил в основное уравнение:

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{\text{Н}2} + m_2\vec{g}. \qquad (2.4)$$

Силы, действующие на первый груз: тяжести $m_1\vec{g}$; реакции опоры $\vec{N}$; трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ ($\vec{F}_{\text{тр}} \uparrow\downarrow \vec{\upsilon}_1$; $\vec{\upsilon}_1 \uparrow\uparrow \vec{a}_1$, движение равноускоренное). Подстановка сил:

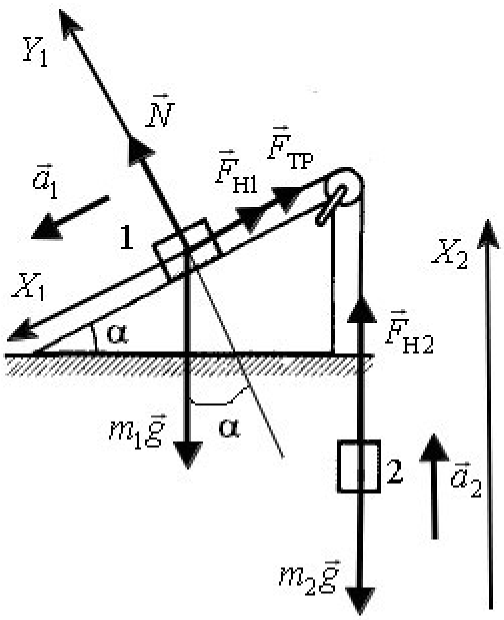

Рис. 2.4

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{\text{Н}1} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + m_1\vec{g}. \qquad (2.5)$$

3. Проекция уравнения (2.4) на ось X_2 (рис. 2.4):

$$m_2 a_2 = F_{\text{Н}2} - m_2 g. \qquad (2.6)$$

Направляем ось X_1 вдоль наклонной плоскости влево вниз (рис 2.4), ось Y_1 – вверх, перпендикулярно оси X_1. Проекции уравнения (2.5) на оси X_1 и Y_1:

$$m_1 a_1 = -F_{\text{Н}1} - F_{\text{тр}} + m_1 g \sin\alpha; \qquad (2.7)$$

$$0 = N - m_1 g \cos\alpha. \qquad (2.8)$$

4. Связи между величинами: модули сил трения и реакции опоры связаны формулой $F_{\text{тр}} = \mu N$, так как нить невесома и нерастяжима, $a_1 = a_2 = a$,

$F_{н1} = F_{н2} = F_н$. Решаем систему уравнений (2.6) – (2.8) с учетом этих связей: $a = \dfrac{-m_2 g - \mu m_1 g \cos\alpha + m_1 g \sin\alpha}{(m_1 + m_2)}$. Численный расчет: $a = 0{,}18$ м/с.

Ответ: $a = \dfrac{-m_2 g - \mu m_1 g \cos\alpha + m_1 g \sin\alpha}{(m_1 + m_2)}$, $a = 0{,}18$ м/с.

Задачи для самостоятельного решения

21. По горизонтальному столу движется брусок массой 5 кг. К бруску привязан шнур, перекинутый через неподвижный невесомый блок. К другому концу шнура привязана гиря массой 2 кг. Найти ускорения тел, если коэффициент трения бруска о поверхность стола 0,2.

22. Через легкий неподвижный блок перекинут шнур. К одному концу шнура привязан груз массой 1 кг, к другому – 4 кг. Найти силу натяжения шнура и силу давления на ось блока во время движения грузов.

23. На неподвижной наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 30 °, лежал груз массой 5 кг, привязанный к шнуру. Другой конец шнура перекинут через легкий неподвижный блок, закрепленный на вершине плоскости. К свободному концу шнура подвесили второй груз массой 1 кг. Найти силу натяжения шнура, если коэффициент трения первого груза о плоскость 0,3.

24. На горизонтальном столе лежат два бруска массой 1 и 2 кг, связанные невесомой нерастяжимой нитью. Ко второму бруску привязана такая же нить, которая перекинута через невесомый неподвижный блок, закрепленный на краю стола. К свободному концу нити привязали груз массой 4 кг. Найти ускорения тел, если коэффициенты трения грузов о поверхность стола равны 0,1.

3. КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

3.1. Кинематика вращения жесткого ротатора (ЖР) с переменным угловым ускорением

Основные формулы и обозначения

Основные кинематические характеристики вращательного движения: $\vec{\varphi}$ – угол поворота; $\vec{\omega}$ – угловая скорость; $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение.

Формулы, связывающие характеристики вращения ЖР: $\vec{\omega} = d\vec{\varphi}/dt$; $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \int_0^t \vec{\omega}\, dt$; $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt$; $\vec{\omega} = \omega + \int_0^t \vec{\varepsilon}\, dt,$ где $\vec{\varphi}_0$ – угол поворота, задающий начальное положение (обычно $\vec{\varphi}_0 = 0$ рад); $\vec{\omega}_0$ – начальная угловая скорость ЖР.

Пример представления решения задачи

З а д а ч а. Угловая скорость эллипсоида, вращающегося вокруг неподвижной оси, меняется с течением времени по закону: $\vec{\omega}(t) = (At^2 - Bt^3)\vec{k},$ где $A = 3$ рад/с^3; $B = 1$ рад/с^4. Найти: зависимость угла поворота эллипсоида от времени; модуль углового ускорения через 2 с от начала движения; момент времени, когда эллипсоид остановился; угол, на который повернулся эллипсоид в момент остановки. Сделать рисунок, на котором указать направления всех векторов, встречающихся в условии и решении задачи.

Дано:

$\vec{\omega}(t) = (At^2 - Bt^3)\vec{k}$;
$A = 3$ рад/с^3;
$B = 1$ рад/с^4;
$t_1 = 2$ с.

$\vec{\varphi}(t),\ \varepsilon_1,\ t_2, \varphi_2$ – ?

Алгоритм решения задачи.

1. Записать формулы, связывающие угловые характеристики движения.

2. Подставить в них известные или найденные зависимости величин от времени.

3. Провести преобразования и вычисления.

4. На рисунке указать направления всех векторов, встречающихся в условии и решении задачи.

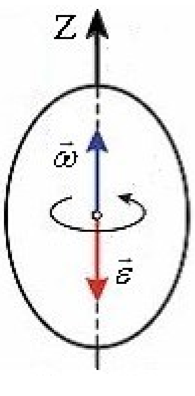

Рис. 3.1

Выполнение операций, входящих в алгоритм.

1. Основные формулы: $\vec{\varphi} = \int_0^t \vec{\omega}\, dt$; $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt$.

2. Подстановка зависимости $\vec{\omega}(t) = (At^2 - Bt^3)\vec{k}$ в эти формулы: $\vec{\varphi}\,(t) = \int_0^t \vec{\omega}\, dt = \int_0^t (At^2 - Bt^3)\vec{k}dt$; $\vec{\varepsilon}(t) = d(At^2 - Bt^3)/dt \cdot \vec{k}$.

3. Интегрирование:

$$\vec{\varphi}\,(t) = (At^3/3 - Bt^4/4)\vec{k}. \qquad (3.1)$$

Дифференцирование: $\vec{\varepsilon}(t) = (2At - 3Bt^2)\vec{k}$; $\vec{\varepsilon}_1 = 0$ рад/с^2.

В момент остановки $\omega_2 = 0$ рад/с. Следовательно, согласно зависимости $\vec{\omega}(t)$: $0 = (At_2{}^2 - Bt_2{}^3)\vec{k}$, откуда $t_2 = A/B$; $t_2 = 3$ с. Подставляем время движения до остановки в формулу (3.1): φ_2 = 6,75 рад/с.

4. Так как до остановки $\omega_z = (At^2 - Bt^3) > 0$, ось вращения $Z \uparrow\uparrow \vec{\omega} \uparrow\uparrow \vec{\varphi}$ (рис. 3.1). Направление $\vec{\omega}$ (как и направление $\vec{\varphi}$) находим по правилу обхвата. До остановки движение эллипсоида замедленное, следовательно, $\vec{\varepsilon}(t) \uparrow\downarrow \vec{\omega}$.

Ответ: а) $\vec{\varphi}(t) = (At^3/3 - Bt^4/4)\vec{k}$; б) $\vec{\varepsilon}_1 = (2At_1 - 3Bt_1{}^2)\vec{k}$, $\vec{\varepsilon}_1 = 0\vec{k}$ рад/с^2; в) $t_2 = A/B$, $t_2 = 3$ с; г) $\vec{\varphi}_2 = (A^4/3B^3 - BA^4/4B^4)\vec{k}$, $\vec{\varphi}_2 = 6{,}75\vec{k}$ рад/с.

Задачи для самостоятельного решения

25. Найти зависимость угловой скорости от времени и модуль углового ускорения в момент времени $t_1 = 3$ с, если зависимость угла поворота ЖР от времени имеет вид: $\vec{\varphi}(t) = (At^4 + Bt^{1/3})\vec{k}$, где $A = 2$ рад/с^4; $B = 5$ рад/с$^{1/3}$. Сделать рисунок, на котором указать направления всех векторов, встречающихся в условии и решении задачи.

26. Найти зависимость угловой скорости от времени и модуль угла поворота через 3 с от начала движения, если зависимость углового ускорения ЖР от времени имеет вид: $\vec{\varepsilon}(t) = (At^2 - Bt)\vec{k}$, где $A = 2$ рад/с^4; $B = 4$ рад/с^3. Начальная угловая скорость $\vec{\omega}_0 = C\vec{k}$, где $C = 7$ рад/с. Сделать рисунок, на котором указать направления всех векторов, встречающихся в условии и решении задачи.

3.2. Кинематика вращения ЖР с постоянным угловым ускорением

Основные формулы и обозначения

Вращение ЖР с постоянным угловым ускорением описывается формулами: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}t$; $\vec{\varphi} = \vec{\omega}_0 t + \vec{\varepsilon}t^2/2$.

Связь технических и угловых величин имеет вид: $\varphi = 2\pi N$; $\nu = 1/T = N/t$, где N – число оборотов; ν – частота; T – период вращения ЖР.

Задачи для самостоятельного решения

27. Тело, вращаясь с постоянным угловым ускорением, за 5 с от начала движения совершило 100 оборотов. Найти угловое ускорение тела.

28. Маховик, вращавшийся с частотой 1,8 с$^{-1}$, остановился через 1,5 с. Считая вращение равнопеременным, найти: а) угловое ускорение маховика; б) количество оборотов, которое сделал маховик до остановки.

29. Колесо машины, вращаясь с постоянным угловым ускорением, за 120 с изменило частоту вращения от 240 до 60 об/мин. Найти: а) угловое ускорение колеса; б) количество оборотов, сделанных колесом до остановки.

3.3. Кинематика точки жесткого ротатора

Основные формулы и обозначения

Формулы, связывающие угловые характеристики движения ЖР и линейные характеристики движения точки ЖР: $l = \varphi R$; $\upsilon = \omega R$; $a_\tau = \varepsilon R$; $a_n = \omega^2 R = \omega\upsilon = \upsilon^2 / R$, где l – длина дуги окружности, описываемой точкой.

Пример представления решения задачи

З а д а ч а. Диск радиусом 50 см вращается вокруг вертикальной оси симметрии (рис. 3.2) так, что зависимость угловой скорости от времени имеет вид: $\omega_z = A + Bt + Ct^2$, где A = 1 рад/с, B = 2 рад/с^2; C = рад/с^3. Найти: модули скорости, нормального, тангенциального и полного ускорений точек диска, максимально удаленных от оси вращения, через 2 с от начала движения. Сделать рисунок, на котором указать направления всех векторов, встречающихся в условии и решении задачи.

Дано:	*Алгоритм решения задачи*.
R = 0,5 м; $\omega_z(t) = A + Bt + Ct^2$; A = 1 рад/с; B = 2 рад/с^2; C = 3 рад/с^3; t_1 = 2 с.	1. Записать формулы, связывающие угловые характеристики движения между собой и /(или) с линейными характеристиками (в зависимости от требования задачи). 2. Подставить в них известные или найденные зависимости величин от времени.
υ_1; a_{1n}; $a_{1\tau}$; a_1 – ?	3. Провести вычисления. 4. На рисунке (см. рис. 3.2) указать направления всех векторов, встречающихся в условии и решении задачи.

Выполнение операций, входящих в алгоритм.

1. Исходные формулы: $\upsilon = \omega R$; $a_\tau = \varepsilon R$; $a_n = \omega^2 R$; $a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2}$.

2. Подстановка зависимости $\omega_z(t)$ в эти формулы: $\upsilon = |A + Bt + Ct^2|R$; $a_n = (A + Bt + Ct^2)^2 R$; $a_\tau = \varepsilon R = \dfrac{d\omega}{dt} \cdot R = (B + 2Ct) \cdot R.$

3. Численный расчет в момент времени t_1: $\upsilon_1 = 8{,}5$ м/с; $a_{1n} = 144{,}5$ м/с^2; $a_{1\tau} = 7$ м/с^2; $a_1 = \sqrt{a_{1\tau}{}^2 + a_{1n}{}^2}$, $a_1 = 144{,}7$ м/с^2.

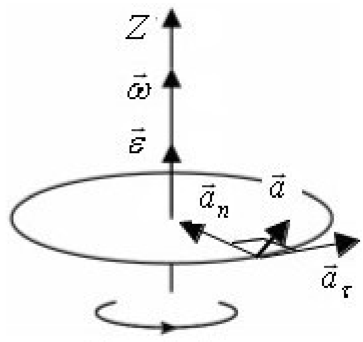

Рис. 3.2

4. Так как $\omega_z > 0$, ось вращения $Z \uparrow\uparrow \vec{\omega} \uparrow\uparrow \vec{\varphi}$ (см. рис. 3.2). Направление $\vec{\omega}$ (как и направление $\vec{\varphi}$)находим по правилу обхвата (буравчика). Так как $\varepsilon_z > 0$, $\vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow Z$, движение ускоренное, тангенциальное ускорение сонаправлено со скоростью (направлено в сторону движения), нормальное ускорение направлено к оси.

Ответ: $\upsilon_1 = 8{,}5$ м/с; $a_{1n} = 144{,}5$ м/с^2; $a_{1\tau} = 7$ м/с^2; $a_1 = 144{,}7$ м/с^2.

Задачи для самостоятельного решения

30. Зависимость угловой скорости диска, вращающегося вокруг оси *Z*, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр масс, от времени задается законом $\omega_z(t) = At^2 + Bt^3$. Вычислить полное ускорение точек, лежащих на краю диска через 1 с от начала вращения. Радиус диска 40 см; A = 2,5 рад/с^3; B = 2,1 рад/с^4. Сделать рисунок, на котором указать направления всех векторов, встречающихся в условии и решении задачи.

31. Колесо радиусом 5 м вращается вокруг оси *Z*, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр так, что зависимость угла поворота от времени задается уравнением $\varphi_z(t) = Ct^3$, где C = 0,04 см/с^3. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти: зависимость длины пути от времени; нормальное и тангенциальное ускорение в момент времени, когда их линейная скорость равна 0,3 м/с. Сделать рисунок, на котором указать направления всех векторов, встречающихся в условии и решении задачи.

32. Диск вращается вокруг оси *Z*, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Угловая скорость диска меняется со временем по закону $\omega_z(t) = C\sqrt{t}$, где C = 2,6 рад/с$^{3/2}$. Найти нормальное и тангенциальное ускорения точек, лежащих на расстоянии 15 см от центра диска в момент времени 4 с от начала движения. Сделать рисунок, на котором указать направления всех векторов, встречающихся в условии и решении задачи.

33. Тангенциальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса, вращающегося вокруг оси Z, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр, меняется со временем по закону $a_\tau(t) = A + Ct$, где A = 2,9 м/с^2; C = 3,7 м/с^3. Вычислить угловое ускорение и угловую скорость колеса в момент времени 2 с. Радиус колеса 1 м. Начальная угловая скорость равна нулю. Сделать рисунок, на котором указать направления всех векторов, встречающихся в условии и решении задачи.

34. Маховик радиусом 240 см приводится во вращение вокруг оси Z, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр. Для точки, находящейся на ободе, зависимость пройденного пути от времени имеет вид: $l(t) = At^2$, где A = 0,2 м/с^2. В некоторый момент времени точки на ободе имеют линейную скорость 5,5 м/с. Для этого момента времени найти: угловые скорость и ускорение обода. Сделать рисунок, на котором указать направления всех векторов, встречающихся в условии и решении задачи.

4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

4.1. Динамика ЖР под действием постоянных моментов сил (с элементами кинематики)

Основные формулы и обозначения

Формулы для моментов инерции однородных тел правильной геометрической формы массой m относительно оси, проходящей через центр инерции C, указаны в таблице. Если ось Z не проходит через центр инерции, то момент инерции тела относительно этой оси определяется по теореме Гюйгенса – Штейнера: $I = I_C + mb^2$, где I_C – момент инерции тела относительно оси Z_C, параллельной оси Z и проходящей через C; b – расстояние между осями.

Момент силы $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки приложения силы $\vec{F}$; модуль момента силы: $M = rF\sin\alpha$, где α – меньший угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Направление момента силы определяется по правилу правой руки.

Основной закон динамики вращательного движения абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси (динамики ЖР): $I\varepsilon_z = M_{\text{pz}}$, а если на тело действуют только касательные силы, то $I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{\text{p}}$.

Моменты инерции I_C однородных тел массой m

Тело	Расположение оси	Формула
Точка	Расположена на расстоянии R от точки	$I_C = mR^2$
Тонкий стержень длиной l	Перпендикулярна стержню и проходит через его центр	$I_C = ml^2/12$
Тонкий стержень	Совпадает со стержнем	$I_C = 0$
Шар радиусом R	Проходит через центр шара	$I_C = 2mR^2/5$
Диск (цилиндр) радиусом R	Перпендикулярна диску (основаниям цилиндра) и проходит через его центр	$I_C = mR^2/2$
Кольцо радиусом R	Перпендикулярна плоскости кольца и проходит через его центр	$I_C = mR^2$

Пример представления решения задачи

З а д а ч а. Маховик, имеющий момент инерции 45 кг·м^2, вращается вокруг оси симметрии, перпендикулярной плоскости колеса, делая 20 об/с. На маховик перестал действовать вращающий момент сил, и он остановился, сделав 1000 об. Найти: момент сил трения; время, прошедшее от начала торможения до остановки маховика.

Дано:

$I = 45$ кг·м^2;

$\nu_0 = 20$ с$^{-1}$;

$\omega_1 = 0$ рад/с;

$N_1 = 10^3$.

$M_{\text{тр}}$, t_1 – ?

Алгоритм решения задачи.

1. Записать основное уравнение: $I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{\text{р}}$.

2. Подставить в него моменты действующих сил.

3. На рисунке указать направления всех векторов, встречающихся в условии и решении задачи.

4. Спроектировать уравнение на ось вращения.

5. Произвести вычисления, используя, если нужно, формулы для момента инерции тела, теоремы Гюйгенса – Штейнера и формулы кинематики.

Выполнение операций, входящих в алгоритм.

1. Основная формула: $I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{\text{р}}$.

2. На маховик действует момент силы трения, следовательно, $I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{\text{тр}}$.

3. Направление вращения маховика – по часовой стрелке – указано на рис. 4.1. По правилу обхвата (буравчика) угловая скорость и угол поворота направлены от нас. Вращение замедленное, поэтому угловое ускорение направ-

лено противоположно угловой скорости – на нас. Момент силы трения – тормозящий, поэтому он направлен противоположно угловой скорости – на нас.

4. Проекция основного уравнения на ось *Z* (см. рис. 4.1, на нас): $I\varepsilon = M_{\text{тр}}$.

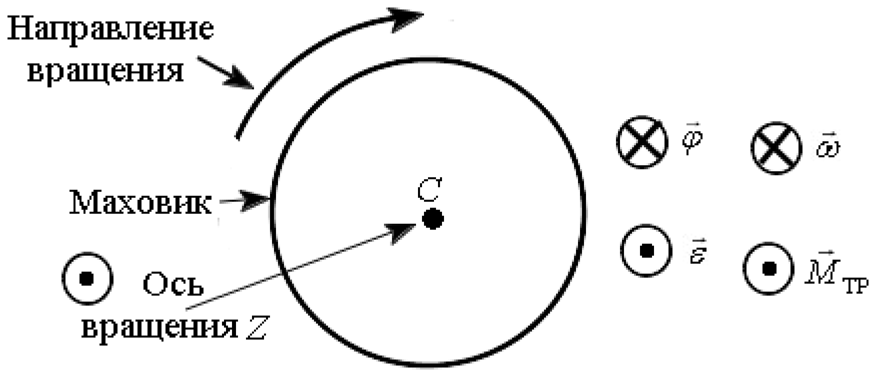

Рис. 4.1

5. Вращение равнозамедленное, поэтому $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}\,t$; $\vec{\varphi} = \vec{\omega}_0 t + \vec{\varepsilon}\,t^2/2$. В проекции на ось *Z*: $-\omega = -\omega_0 + \varepsilon\,t$; $-\varphi = -\omega_0 t + \varepsilon\,t^2/2$. В момент остановки t_1: $\omega_1 = 0$ рад/с; $\varphi_1 = 2\pi N_1$; $\omega_0 = 2\pi\nu_0$. Следовательно, $0 = \omega_0 - \varepsilon t_1$; $2\pi N_1 = \omega_0 t_1 - \varepsilon t_1^{\,2}/2$. Решаем данную систему: $t_1 = \dfrac{4\pi N_1 \cdot \omega_0}{\omega_0^{\,2}} = \dfrac{4\pi N_1}{\omega_0} = \dfrac{4\pi N_1}{2\pi\nu_0} = \dfrac{2N_1}{\nu_0}$;

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^{\,2}}{2\cdot 2\pi N_1} = \frac{\omega_0^{\,2}}{4\pi N_1} = \frac{(2\pi\nu_0)^2}{4\pi N_1} = \frac{\pi\nu_0^{\,2}}{N_1}.$$

Подставив правую часть последнего выражения в равенство $I\varepsilon = M_{\text{тр}}$, получим: $M_{\text{тр}} = I\pi\nu_0^2 / N_1$. Численный расчет: $M_{\text{тр}} \approx 0{,}31$ Н·м; $t_1 = \dfrac{2\cdot 10^3}{20} = 100$ с.

Ответ: $M_{\text{тр}} \approx 0{,}31$ Н·м; $t_1 = 100$ с.

Задачи для самостоятельного решения

35. К ободу колеса массой 50 кг, имеющего форму диска радиусом 0,5 м, приложена касательная сила 98 Н. Под действием этой силы колесо начинает вращаться вокруг оси симметрии, перпендикулярной плоскости колеса. Найти: угловое ускорение колеса; через сколько времени после начала действия силы колесо будет иметь угловую скорость, соответствующую 100 об/с.

36. Сплошной шар массой 1 кг и радиусом 0,5 м вращается вокруг оси, проходящей через его центр. К поверхности шара на расстоянии 0,3 м от оси вращения приложена касательная сила, перпендикулярная оси. Угол поворота

шара меняется по закону $\varphi_z(t) = A + Bt + Ct^2$, A = 2 рад, B = 2 рад/с; C = 1 рад/с^2. Найти приложенную силу.

37. Два обруча массой 0,2 и 0,4 кг и радиусами 10 и 20 см соответственно начали вращаться одновременно. Каждый обруч вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости обруча и расположенной на расстоянии диаметра от центра обруча. Угловое ускорение первого обруча 3,14 рад/с^2. За 20 с от начала вращения первый обруч сделал на 30 оборотов больше второго. На сколько отличаются вращающие моменты, действующие на обручи?

38. Диск массой 2 кг и радиусом 10 см вращается относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и касательной к его краю. Под действием постоянного тормозящего момента диск останавливается за 20 с, сделав 50 об. Найти начальную угловую скорость диска и тормозящий момент.

4.2. Динамика связанных тел с учетом вращения блока

Задачи для самостоятельного решения

39. Через шкив, насаженный на общую ось с маховым колесом, перекинута нить, к концам которой привязаны грузы массой 200 и 400 г. Момент инерции колеса со шкивом равен 0,42 кг·м^2. Радиус шкива 10 см. На какое расстояние должен опуститься второй груз, чтобы колесо со шкивом получило скорость, соответствующую 60 об/мин?

40. На наклонной плоскости, образующей 15° с горизонтом, лежит брусок массой 1 кг. К нему привязан шнур, перекинутый через блок, укрепленный на вершине наклонной плоскости. К свободному концу шнура привязан груз массой 2 кг. Коэффициент трения бруска о плоскость 0,1. Блок имеет форму плоского диска радиусом 0,1 м массой 200 г. Найти угловое ускорение блока и силу натяжения шнура.

41. На горизонтальном столе лежит брусок массой 3 кг. К нему привязан шнур, перекинутый через блок в виде диска массой 1 кг, укрепленный на краю стола. К свободному концу шнура прикреплена гиря массой 2 кг. На блок со стороны оси действует тормозящий момент 1,7 Н·м. Коэффициент трения бруска о поверхность стола 0,2. Найти радиус блока, если спустя 1 с от начала движения гиря опускается на 0,5 м.

42. На наклонной плоскости с углом наклона 10° лежат два бруска массой 1 и 2 кг, связанные между собой нитью. Ко второму бруску привязана нить, перекинутая через неподвижный блок, укрепленный на вершине наклонной плоскости. Блок имеет форму диска массой 0,8 кг и радиусом 10 см. Найти

угловую скорость блока спустя 1 с от начала вращения, если за свободный конец нити потянуть вертикально вниз с силой 2 Н. Коэффициенты трения брусков о плоскость стола одинаковы и равны 0,2.

5. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

5.1. Закон сохранения импульса (ЗСИ)

Основные формулы и обозначения

Импульс материальной точки и механической системы: $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$; $\vec{p}_{\text{c}} = \sum_i \vec{p}_i$, где $\vec{p}_i = m_i\vec{\upsilon}_i$ – импульс i-й точки системы.

ЗСИ: если результирующая внешняя сила $\vec{F}_{\text{р внеш}} = 0$, то $\vec{p}_{\text{c}} = \vec{p}\,'_{\text{c}}$, где $\vec{p}_{\text{c}}$ и $\vec{p}\,'_{\text{c}}$ – импульсы системы до и после взаимодействия тел системы соответственно. Сохранение проекции импульса: если $\vec{F}_{\text{р внеш}} \neq 0$, но проекция $F_{\text{р внеш}\,x} = 0$, то $p_{\text{c}\,x} = p'_{\text{c}\,x}$, (аналогично для проекции на любую ось).

Пример представления решения задачи

З а д а ч а. Из неподвижного орудия вылетает снаряд под углом 60° к горизонту со скоростью 200 м/с относительно орудия. Определить модуль скорости отката орудия относительно Земли сразу после вылета снаряда. Масса орудия равна 1520 кг, масса снаряда 80 кг.

Дано:
$\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_2 = 0$;
$m_1 = 1520$ кг;
$m_2 = 80$ кг;
$\alpha = 60°$;
$\upsilon'_{2,\,1} = 200$ м/с.

υ'_1 – ?

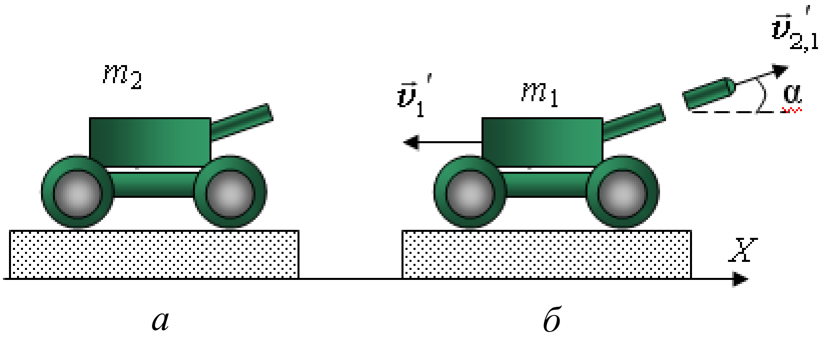

Рис. 5.1

Алгоритм решения задачи.

1. Обосновать и записать условие сохранения импульса ($\vec{F}_{\text{р внеш}} = 0$) или проекции импульса системы (равенство нулю проекции $\vec{F}_{\text{р внеш}}$).

2. Записать равенство, отражающее сохранение импульса (ЗСИ: $\vec{p}_с = \vec{p}'_с$) или проекции импульса системы.

3. Подставить в это равенство выражения для импульса (проекций импульса) системы до и после взаимодействия тел.

4. Если в условии задачи задана относительная скорость (скорость одного тела относительно другого) или если ее требуется найти, то записать закон сложения скоростей и подставить его в указанное в п. 2 равенство.

5. Спроектировать полученное выражение.

6. Произвести вычисления.

Выполнение операций, входящих в алгоритм.

1. Силой нормальной реакции опоры, направленной вертикально, при выстреле пренебречь нельзя, так как она препятствует вертикальному движению орудия. Однако можно считать, что $F_{\text{р внеш}\, x} = 0$ (рис. 5.1).

2. Следовательно, сохраняется проекция импульса системы: $p_{\text{с}\, x} = p'_{\text{с}\, x}$.

3. Подстановка в это равенство выражений для проекций импульса системы до выстрела (рис. 5.1, *а*) $p_{\text{с}\, x} = 0$ (система неподвижна) и после выстрела (рис. 5.1, *б*) $p'_{\text{с}\, x} = m_1 \upsilon'_{1x}$:

$$0 = m_1 \upsilon'_{1x} + m_2 \upsilon'_{2x}. \qquad (5.1)$$

4. Подстановка закона сложения скоростей $\upsilon'_{2x} = \upsilon'_{2,1x} + \upsilon'_{1x}$ в формулу (5.1) и последующее преобразование приводят к формуле $(m_1 + m_2)\upsilon'_{1x} + m_2 \upsilon'_{2,1x} = 0.$

5. Проектируем последнее соотношение: $(m_1 + m_2)\upsilon'_{1x} + m_2 \upsilon'_{2,1} \cos\alpha = 0.$

6. Следовательно, $\upsilon'_{1x} = -\dfrac{m_2 \upsilon'_{2,1} \cos\alpha}{(m_1 + m_2)}$. Модуль скорости отката орудия после вылета снаряда $\upsilon'_1 = |\upsilon'_{1x}| = \dfrac{m_2 \upsilon'_{2,1} \cos\alpha}{(m_1 + m_2)}$. Численный расчет: $\upsilon'_1 = 5$ м/с.

Ответ: $\upsilon'_1 = \dfrac{m_2 \upsilon'_{2;1} \cos\alpha}{(m_1 + m_2)}$, $\upsilon'_1 = 5$ м/с.

Задачи для самостоятельного решения

43. Граната массой 0,6 кг, имевшая скорость 5 м/с, направленную вертикально вверх, разорвалась на два осколка. Первый осколок массой 200 г полетел вертикально вверх со скоростью 10 м/с. Найти импульс второго осколка.

44. Снаряд массой 10 кг, летевший вертикально вверх, разорвался в верхней точке траектории на три осколка. Первый осколок массой 5,3 кг стал двигаться горизонтально со скоростью 94 м/с, второй – массой 2,3 кг – вертикально вверх со скоростью 57 м/с. Найти скорость третьего осколка.

45. Снаряд массой 12 кг, имевший горизонтально направленную скорость 167 м/с, разорвался на две части. Меньшая часть массой 3,4 кг полетела вперед под углом 60° вверх к горизонту со скоростью 192 м/с. Найти модуль и направление скорости бóльшей части снаряда.

46. Юноша массой 60 кг, стоявший на коньках на поверхности льда, бросил в горизонтальном направлении мяч массой 0,8 кг со скоростью 5 м/с относительно Земли. Найти импульс юноши после броска.

47. Тележка массой 100 кг, движущаяся со скоростью 1,2 м/с, сталкивается с тележкой массой 300 кг, движущейся навстречу с такой же по модулю скоростью, и сцепляется с ней. Определить скорость тележек после столкновения.

48. Две бактерии, двигавшиеся навстречу друг другу со скоростью 9 и 11 мм/с соответственно, после абсолютно неупругого удара стали двигаться со скоростью 5 м/с. Найти отношение масс бактерий.

49. Бронированная платформа с пушкой имеет массу 20000 кг и движется по горизонтальной поверхности со скоростью 4,5 км/ч. Угол между поверхностью и стволом пушки равен 30°. Из пушки произведен выстрел в направлении движения платформы. Масса снаряда 26 кг, его скорость относительно пушки 700 м/с. Найти скорость движения платформы с пушкой после выстрела.

50. Лодка массой 212 кг с находящимся в ней человеком массой 83 кг стоит в спокойной воде. Человек переходит с кормы на нос. На какое расстояние сдвинется лодка? Длина лодки 3,4 м. Сопротивлением воды пренебречь.

5.2. Закон сохранения момента импульса (ЗСМИ)

Основные формулы и обозначения

Момент импульса ЖР относительно оси *Z*: $L_{\text{c}\,z} = I\omega_z$ (для симметричного относительно оси вращения ЖР $\vec{L}_\text{c} = I\vec{\varepsilon}$).

ЗСМИ: если $\vec{M}_{\text{р внеш}} = 0$ то $\vec{L}_{\text{с}} = \vec{L}'_{\text{с}}$, где $\vec{L}_{\text{с}}$ и $\vec{L}'_{\text{с}}$ – моменты импульса системы до и после взаимодействия тел системы соответственно. Сохранение проекции момента импульса: если $M_{\text{р внеш }z} = 0$, то $L_{\text{с }z} = L'_{\text{с }z}$.

Пример представления решения задачи

З а д а ч а. На скамейке Жуковского (вращающемся диске) стоит человек и держит в руках тонкий стержень, расположенный горизонтально так, что ось симметрии диска проходит через середину стержня. Скамейка вращается вокруг своей оси симметрии, делая 5 об/с. Суммарный момент инерции человека и скамейки 5 кг·м^2; масса стержня 3 кг, его длина 2 м. С какой частотой станет вращаться скамейка, если человек повернет стержень и расположит его вертикально вдоль оси симметрии скамейки?

Дано:
$\nu = 5$ об/с;
$I_1 = 5$ кг·м^2;
$m_2 = 3$ кг;
$l = 2$ м;

$\nu' - ?$

Алгоритм решения задачи.

1. Обосновать и записать условие сохранения момента импульса системы ($\vec{M}_{\text{р внеш}} = 0$) или его проекции ($M_{\text{р внеш }z} = 0$).

2. Записать равенство, отражающее сохранение момента импульса (ЗСМИ: $\vec{L}_{\text{с}} = \vec{L}'_{\text{с}}$) или его проекции ($L_{\text{с }z} = L'_{\text{с }z}$).

3. Подставить в это равенство выражения для момента импульса системы (или его проекции) до и после взаимодействия тел.

4. Если в условии задачи задана относительная скорость (скорость одного тела относительно другого) или если ее требуется найти, то записать закон сложения для угловых скоростей и подставить его в указанное в п. 2 равенство.

5. Спроектировать полученное выражение.

6. Произвести вычисления, используя, если нужно, соотношение $\omega = 2\pi\nu$, формулы для моментов инерции тел и теорему Гюйгенса – Штейнера.

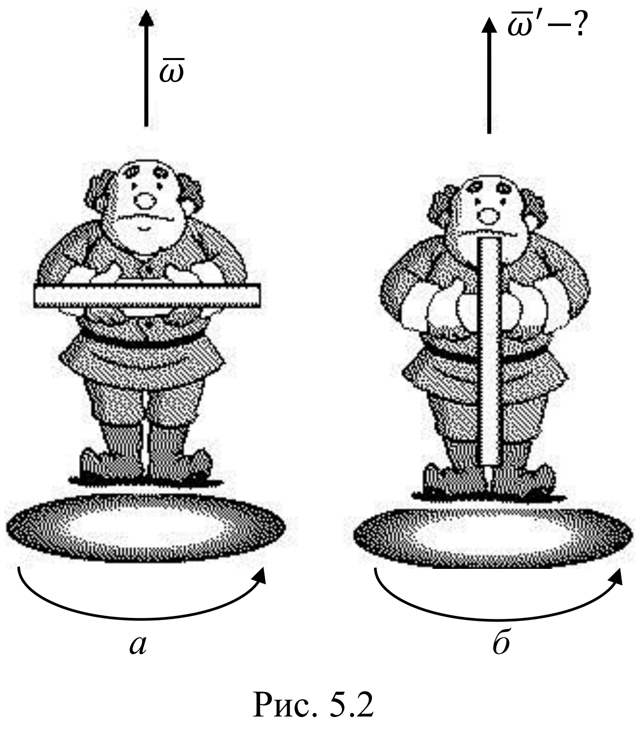

Рис. 5.2

Выполнение операций, входящих в алгоритм.

1. Моменты сил тяжести, действующих на тела, входящие в систему, и силы реакции опоры, действующей на скамейку, в рассматриваемых положениях тел равны нулю, так как линии действия этих сил параллельны оси вращения или совпадают с ней. Силой трения при кратковременном изменении положения стержня можно пренебречь. Таким образом, можно считать, что $\vec{M}_{\text{р внеш}} = 0$.

2. ЗСМИ: $\vec{L}_{\text{с}} = \vec{L}'_{\text{с}}$

3. Подстановка выражений для момента импульса системы до $\vec{L}_{\text{с}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = I_1\vec{\omega} + I_2\vec{\omega} = (I_1 + I_2)\vec{\omega}$ и после изменения положения стержня $\vec{L}'_{\text{с}} = \vec{L}'_1 + \vec{L}'_2 = I_1\vec{\omega}' + I_2{}'\vec{\omega}' = (I_1 + I_2{}')\vec{\omega}'$: $(I_1 + I_2)\vec{\omega} = \left(I_1 + I'_2\right)\vec{\omega}'$, где I_2 и I'_2 – моменты инерции стержня относительно оси вращения при его горизонтальном и вертикальном положениях; $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}'$ – угловые скорости системы в соответствующих состояниях.

4. В условии задачи относительная скорость не упоминается.

5. Следовательно, $\vec{\omega}' = \dfrac{\left(I_1 + I_2\right)}{I_1 + I'_2}\vec{\omega}$. Направление вращения системы «человек – скамейка – стержень» в первом состоянии указано на рис. 5.2, *а*. Угловая скорость $\vec{\omega}$ направлена вдоль оси вращения вверх по правилу обхвата (буравчика) в соответствии с направлением вращения. Направление угловой скорости $\vec{\omega}'$ заранее не известно, поэтому на рис. 5.2, *б* оно отмечено знаком вопроса. Так как моменты инерции – величины положительные, угловая скорость системы во втором состоянии сонаправлена с угловой скоростью в первом состоянии, поэтому: 1) $\omega' = \dfrac{\left(I_1 + I_2\right)}{I_1 + I'_2}\omega$; 2) направление вращения системы не меняется.

6. Тонкий стержень при вертикальном положении совпадает с осью вращения (является нитью), поэтому его момент инерции $I'_2 = 0$. При горизонтальном положении ось вращения совпадает с осью симметрии стержня, поэтому момент инерции определяется по формуле $I_2 = m_2 l^2/12$. $\omega = 2\pi\nu$; $\omega' = 2\pi\nu'$. Подстановка этих формул в соотношение для угловых скоростей и преобразования: $\nu' = \dfrac{I_1 + m_2 l^2/12}{I_1}\nu$. Численный расчет: $\nu' = 6$ об/с.

Ответ: $\nu' = \dfrac{I_1 + m_2 l^2/12}{I_1}\nu$, $\nu' = 6$ об/с.

Задачи для самостоятельного решения

51. Скамья Жуковского представляет собой горизонтально расположенный диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Человек с вытянутыми в стороны руками стоит на скамье Жуковского, которая вращается с частотой 0,8 об/с. С какой частотой станет вращаться скамья с человеком, если человек прижмет руки к груди, уменьшив тем самым суммарный момент инерции системы в 1,2 раза?

52. Горизонтально расположенная платформа в виде диска массой 10 кг и радиусом 60 см вращается с частотой 32 об/мин. На платформе лежит диск массой 3,4 кг и радиусом 14,4 см. Центр диска расположен над центром платформы. С какой частотой станет вращаться система, если диск переместится так, что его центр расположится над краем платформы?

53. Крестовина в виде двух одинаковых взаимно перпендикулярных тонких стержней с соединенными центрами вращается в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр крестовины. Длина каждого стержня 0,7 м, масса – 0,8 кг. На стержнях на равных расстояниях от центра крестовины симметрично относительно него расположены четыре одинаковых шара массой 5 кг и радиусом 0,07 м. Шары могут двигаться без трения вдоль стержней. При угловой скорости системы 14 рад/с центры шаров находились на расстоянии 20 см от концов стержней. Какова будет угловая скорость системы в момент времени, когда поверхности шаров достигнут концов стержней?

54. Человек стоит на скамье Жуковского и держит в руках стержень, расположенный вертикально вдоль оси вращения скамейки. Стержень служит осью вращения колеса, расположенного на верхнем конце стержня, и совпадает с осью симметрии колеса. Скамья неподвижна, колесо вращается с частотой 11 об/с. С какой угловой скоростью будет вращаться скамья, если человек повернет стержень на угол 180 ° и колесо окажется на нижнем конце стержня? Суммарный момент инерции человека и скамьи 5,6 кг·м^2, радиус колеса 20 см. Массу колеса 3,0 кг можно считать равномерно распределенной по ободу.

55. Горизонтальный диск может вращаться вокруг собственной оси. По поверхности диска проложены рельсы игрушечной железной дороги. Рельсы образуют окружность радиусом 50 см, центр которой лежит на оси диска. Масса диска 10 кг, его радиус 60 см. На рельсы неподвижного диска был поставлен заводной паровозик массой 0,8 кг и выпущен из рук. С какой угловой ско-

ростью начнет вращаться диск, если паровозик начнет движение по рельсам со скоростью 0,8 м/с относительно рельсов?

6. ЭНЕРГИЯ. РАБОТА. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Основные формулы и обозначения

Кинетическая энергия: 1) материальной точки $W_{\text{к}} = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$; 2) поступательного движения абсолютно твердого тела (АТТ) $W_{\text{пост}} = \dfrac{m\upsilon_C{}^2}{2}$, где $\vec{\upsilon}_C$ – скорость центра инерции; 3) вращательного движения АТТ $W_{\text{к}} = \dfrac{I_{zC}\omega^2}{2}$; 4) движения АТТ $W_{\text{к АТТ}} = \dfrac{I_{zC}\omega^2}{2} + \dfrac{m\upsilon_C^2}{2}$.

Потенциальная энергия точки в поле силы 1) тяжести Земли на высоте h от произвольно выбранного начала отсчета $W_{\text{п}} = mgh,$ 2) упругости пружины жесткостью k при малой линейной деформации x $W_{\text{п}} = kx^2 / 2.$

Механическая энергия системы: $W_{\text{м}} = W_{\text{к}} + W_{\text{п}}$. В отсутствие диссипативных сил $W_{\text{м}} = \text{const}.$

Общефизический закон сохранения энергии: $\Delta W + \Delta W' = 0,$ где ΔW – изменение энергии системы; $\Delta W'$ – изменение энергии внешней среды.

Мощность при движении точки $P = (\vec{F}, \vec{\upsilon}),$ при вращении $P = (\vec{M}, \vec{\omega}).$

Работа силы $\vec{F}$ при перемещении точки из положения 1 в положение 2: $A = \int\limits_1^2 (\vec{F}, d\vec{r}) = \int\limits_{l_1}^{l_2} F \cdot dl \cdot \cos\alpha,$ где $\alpha = \widehat{\vec{F}, d\vec{r}},$ $dl = |\,d\vec{r}\,|$ – элемент пути. Если сила постоянная, а движение прямолинейное, то $A = (\vec{F}, \Delta\vec{r}) = F|\Delta\vec{r}|\cos\alpha.$

Работа консервативных сил при перемещении точки из положения 1 в положение 2 $A = W_{\text{п}}(\vec{r}_1) - W_{\text{п}}(\vec{r}_2);$ работа силы тяжести $A = mgh_1 - mgh_2 = -mg\Delta h;$ работа силы упругости $A = kx_1{}^2 / 2 - kx_2{}^2 / 2.$

Работа при вращении ЖР $A = \int\limits_1^2 (\vec{M}, d\vec{\varphi}) = \int\limits_{\varphi_{1z}}^{\varphi_{2z}} M_z \cdot d\varphi_z.$ Если сила постоянная, то $A = M_z \varphi_z.$

Работы сил действия $\vec{F}_{1;2}$ и противодействия $\vec{F}_{2;1}$: $A_{\vec{F}_{1;2}} = -A_{\vec{F}\,2;1}$.

Теорема об изменении кинетической энергии: $A_{\text{сум}} = \Delta W_{\text{к}} = W_{\text{к}2} - W_{\text{к}1}$, где $A_{\text{сум}}$ – работа всех сил.

Коэффициент полезного действия (КПД) механизма: $\eta = (A_{\text{п}} / A_{\text{з}}) \cdot 100$ %, где $A_{\text{п}}$ и $A_{\text{з}}$ – соответственно полезная и затраченная работы механизма.

6.1. Механическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии. Работа и мощность силы

Пример представления решения задачи

З а д а ч а. Диск радиусом 17 см с моментом инерции 3 кг·м^2 вращается под действием постоянной касательной силы 50 Н вокруг оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости. Найти работу этой силы в течение трех оборотов диска и мощность силы в момент времени 2 с.

Дано:	*Алгоритм решения задачи*.
R = 0,17 м;	1. Записать формулы для работы и (или) мощности.
I = 3 кг·м^2;	2. Найти выражения для величин, входящих в формулы.
F = 50 Н;	3. Подставить эти выражения в формулы для работы и (или) мощности.
$t_2 = 2$ с;	4. Провести вычисления.
N_1 = 3;	*Выполнение операций, входящих в алгоритм.*
$\omega_0 = 2$ рад/с.	1. Работа постоянной силы при вращении ЖР: $A = M_z \varphi_z$,
A_1, P – ?	где M_z – проекция момента силы $\vec{F}$ на ось вращения Z; φ_z –

проекция угла поворота. Мощность $P = M_z \omega_z$, ω_z – проекция угла поворота.

2. Выбираем направления вращения так, как указано на рис. 6.1, и определяем направление угловой скорости $\vec{\omega}$ и угла поворота по правилу обхвата (буравчика). Так как вращение ускоренное, $\vec{M}$ сонаправлен с $\vec{\omega}$. Ось Z направляем вверх, по направлению угловой скорости. Тогда проекции всех векторов на ось Z положительны и равны модулям $M_z = M$; $\varphi_z = \varphi = 2\pi N$; $\omega_z = \omega = \omega_0 + \varepsilon t$.

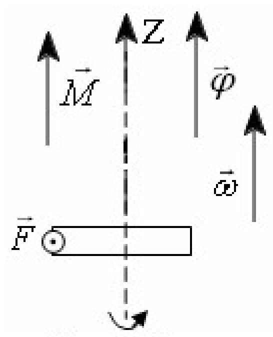

Рис. 6.1

Сила касательная, поэтому модуль момента силы $M = FR\sin\{\pi/2\} = FR$.

По основному закону вращательного движения АТТ вокруг неподвижной оси $M = I\varepsilon$, откуда модуль углового ускорения $\varepsilon = M / I$.

3. Подставляем выражения для модулей угловых величин и момента силы в формулы для работы и мощности: $A_1 = FR \cdot 2\pi N_1$; $P_2 = FR(\omega_0 + FRt_2 / I)$.

4. Численный расчет: $A_1 = 160$ Дж; $P \approx 65{,}45$ Вт.

Ответ: $A_1 = FR \cdot 2\pi N_1$, $A_1 = 160$ Дж; $P_2 = FR(\omega_0 + FRt_2 / I)$, $P \approx 65{,}45$ Вт.

Задачи для самостоятельного решения

56. Сплошной однородный диск массой 800 г, радиусом 15 см катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Скорость оси диска 1,5 м/с. Вычислить кинетическую энергию диска.

57. Игрушечный автомобиль массой 300 г движется без скольжения со скоростью 20 см/с. Часть массы 80 г приходится на четыре колеса – однородные диски радиусом 2 см. Найти кинетическую энергию автомобиля.

58. Найти работу силы тяжести при падении шара массой 0,2 кг с 20 до 12 м.

59. Найти работу силы упругости, если под действием груза массой 1,3 кг вертикально висевшая невесомая нерастянутая пружина удлинилась на 1 см.

60. Мяч бросили вертикально вверх со скоростью 6 м/с. На какую максимальную высоту над точкой бросания поднимется мяч?

61. Обруч скатился с горки из состояния покоя без скольжения. Скорость оси обруча у основания горки 5,6 м/с. С какой высоты скатился обруч?

62. Камень бросили с земли со скоростью 12 м/с вверх под углом к горизонту. Найти модуль скорости камня на высоте 4 м над землей.

63. Машина массой 1,5 т с включенным двигателем останавливается на горной дороге, пройдя путь 5,3 м и поднявшись на высоту 4 м. Начальная скорость машины 36 км/ч. Коэффициент трения равен 0,5. Найти работу силы тяги.

64. Пружины жесткостью 0,5 и 1,0 кН·м$^{-1}$ соединены параллельно. Найти работу внешней силы, растянувшей недеформированные пружины на 4 см.

65. Найти работу внешней силы при растяжении двух последовательно соединенных недеформированных пружин, если первая пружина растянулась на 1,9 см. Коэффициенты упругости пружин: первой – 420, второй – 250 Н/м.

66. Автомобиль массой 1 т движется вверх по наклонному участку дороги с постоянной скоростью 36 км/ч. Длина участка дороги 150 м, угол наклона 15°. Коэффициент трения 0,05. Найти: работу всех сил, действующих на автомобиль; работу каждой силы, считая их постоянными; мощность силы тяги.

67. Тележку массой 250 кг тянут с постоянной скоростью 2 м/с по горизонтальным рельсам. Сила тяги направлена вверх под углом 10° к горизонту. Найти: работу силы тяги за 2,5 мин движения; мощность силы тяги. Коэффициент трения скольжения тележки о рельсы 0,1.

6.2. Задачи на применение нескольких законов сохранения

Задачи для самостоятельного решения

68. В тележке с песком общей массой 50 кг, двигавшейся по инерции горизонтально со скоростью 2 м/с, застревает снаряд массой 20 кг, летевший навстречу тележке со скоростью 16 м/с, направленной вниз под углом 60° к горизонту. Найти скорость тележки после попадания снаряда и количество теплоты, выделившееся при ударе. Какое расстояние проедет тележка со снарядом до остановки? Коэффициент сопротивления 0,02.

69. На конце вертикально висящей нити длиной 1,5 м находится шар массой 1,3 кг. В шар попадает летящая горизонтально со скоростью 68 м/с пластиковая пуля массой 7,5 г и застревает в нем. На какую высоту поднимется шар? Какова кинетическая энергия системы после удара?

70. Два пластилиновых шара висят на параллельных вертикальных нитях одинаковой длины, соприкасаясь друг с другом. Расстояния от точек подвеса нитей до центров шаров одинаковы и равны 0,5 м. Масса первого шара 300 г, второго 200 г. Первую нить отклоняют на некоторый угол и отпускают. После удара шары слипаются, а нити отклоняются так, что образуют с вертикалью угол 30°. Найти импульс первого шара перед ударом и часть начальной энергии первого шара, которая пошла на нагревание шаров.

71. Боек свайного молота массой 0,59 т падает на сваю массой 150 кг. Найти КПД молота, считая удар абсолютно неупругим.

72. Пуля массой 9 г, летящая горизонтально со скоростью 150 м/с, попадает в лежащий на столе брусок массой 250 г и, потеряв половину своей кинетической энергии, вылетает из бруска. Какой импульс приобретает брусок? Какое количество тепла выделяется в нем при взаимодействии с пулей?

73. Частица массой $5{,}0\cdot10^{-24}$ г, обладавшая кинетической энергией 9,0 нДж, после упругого удара с покоившейся частицей массой $4{,}0\cdot10^{-24}$ г отклоняется от первоначального направления движения. В результате удара по-

коившаяся частица получает кинетическую энергию 5,2 нДж. На какой угол от первоначального направления движения отклонилась первая частица?

74. На покоящуюся частицу налетает со скоростью 2,6 м/с другая частица такой же массы. В результате абсолютно упругого удара налетевшая частица изменила направление своего движения на угол 30°. Найти скорости частиц после удара.

7. ПЕРВЫЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ

Основные формулы и обозначения

Уравнения состояния идеального газа (ИГ): $pV = Nk_BT$; $pV = \nu RT$; $pV = \dfrac{m}{M}RT,$ где p – давление; T – температура; V – объем; N – число молекул; ν – количество вещества ИГ, k_B = 1,38·10^{-23} Дж/К – константа Больцмана; R = 8,31 Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная.

Уравнения изопроцессов в ИГ: изотермического: $pV = \mathrm{const}$; изобарного: $V/T = \mathrm{const}$; изохорного: p/T = const; адиабатного: $pV^{\gamma} = \mathrm{const}$, $TV^{\gamma-1} = \mathrm{const}$, $Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = \mathrm{const}$, где $\gamma = (i+2)/i$ – показатель адиабаты; i – число возбужденных степеней свободы молекулы. При температурах, когда колебательные степени свободы еще не активировались, для одноатомной молекулы i = 3; для линейной, в том числе двухатомной – i = 5; для нелинейной (число атомов ≥3) – i = 6.

Внутренняя энергия ИГ: $W_{\text{вн}} = (i/2)Nk_BT = (i/2)\nu RT$.

Работа системы по изменению объема: $A = \int\limits_{V_1}^{V_2} p(V)dV$, в эту формулу подставляется давление p как зависящая от процесса функция объема V.

Работа в изобарном процессе $A_p = p(V_2 - V_1)$, в изохорном – $A_V = 0$.

Связь работ системы и внешней среды над системой A': $A = -A'$.

Первый закон термодинамики: $Q = \Delta W_{\text{вн}} + A$, где Q – количество теплоты, сообщенное системе.

Пример представления решения задачи

З а д а ч а. Одноатомный ИГ, находившийся при температуре 284 К, охлаждается изобарно. При этом его объем уменьшается в два раза. Затем газ изохорно нагревается так, что в конечном состоянии его температура становится вдвое выше начальной. Количество молекул газа $2{,}5\cdot 10^{24}$. Изобразить процесс на диаграмме «давление – температура». Найти количество теплоты, поглощенной газом, произведенную им работу и приращение внутренней энергии газа.

Дано:
$T_1 = 284$ К;
$p_2 = p_1$;
$V_2 = V_1/2$;
$V_3 = V_2$;
$T_3 = 2T_1$;
$N = 2{,}5\cdot 10^{24}$.

Q, $\Delta W_{\text{вн}}$, A – ?

Алгоритм решения задачи.

1. Записать первый закон термодинамики: $Q = \Delta W_{\text{вн}} + A$.

2. Получить формулу для вычисления изменения внутренней энергии, используя данные из условия уравнения состояния ИГ и (или) уравнения изопроцессов.

3. Получить формулы для расчета работы, используя данные из условия уравнения состояния ИГ и (или) уравнения изопроцессов.

4. Подставить полученные выражения в первый закон термодинамики.

5. Провести численные расчеты.

6. Изобразить полный процесс на указанной диаграмме состояния и сделать пояснения к рисунку.

Выполнение операций, входящих в алгоритм.

1. Первый закон термодинамики: $Q_{13} = \Delta W_{\text{вн }13} + A_{13}$.

2. Изменение внутренней энергии с учетом условия $T_3 - T_1 = T_1/2$: $\Delta W_{\text{вн }13} = W_{\text{вн}3} - W_{\text{вн}1} = (i/2)Nk_B(T_3 - T_1) = (i/2)Nk_B T_1/2,$ где i – число степеней свободы молекул газа (для одноатомного газа $i = 3$).

3. Полная работа ИГ: $A_{13} = A_{12} + A_{23}$. Работа газа при изобарном охлаждении с учетом условий $V_2 = V_1/2$ и $p_2 = p_1$ и уравнения состояния: $A_{12} = p_1(V_2 - V_1) = p_1(V_1/2 - V_1) = -Nk_B T_1/2$. В изохорном процессе $A_{23} = 0$. Следовательно, полная работа газа $A_{13} = A_{12} = -Nk_B T_1/2$.

4. Подстановка выражений для изменения внутренней энергии и работы в первый закон термодинамики: $Q_{13} = (i-1)Nk_B T_1/2$.

5. Численный расчет: $\Delta W_{\text{вн }13} = 14697$ Дж; $A_{13} = -4899$ Дж; $Q_{13} = 9798$ Дж.

6. Согласно уравнению $V_2/T_2 = V_1/T_1$ изобарного процесса 1 – 2 $T_2 = V_2 T_1/V_1 = T_1/2$. Согласно уравнению $p_2/T_2 = p_3/T_3$ изохорного процесса 2 – 3 $p_3 = p_2 T_3/T_2 = 3p_2$. Учитывая это, изображаем процесс 1 – 2 – 3 на P-T-диаграмме (рис. 7.1).

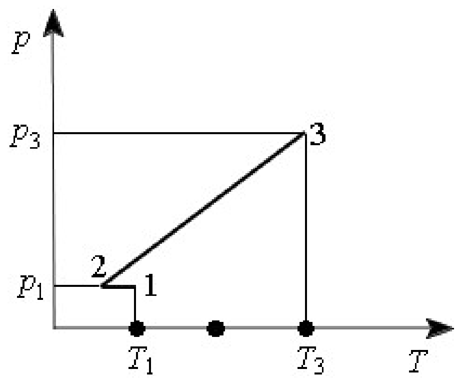

Рис. 7.1

Ответ: $\Delta W_{\text{вн } 13} = (i/2)Nk_BT_1/2$, $\Delta W_{\text{вн } 13} = 14697$ Дж; $A_{13} = -Nk_BT_1/2$, $A_{13} = -4899$ Дж; $Q_{13} = (i-1)Nk_BT_1/2$, $Q_{13} = 9798$ Дж.

Задачи для самостоятельного решения

75. 2,3 кмоля углекислого газа переводят из одного состояния в другое при постоянной температуре 18 °С. При этом давление газа уменьшается вдвое. Найти изменение внутренней энергии, работу, совершенную газом, и количество теплоты, сообщенное газу при этом переходе. Изобразить процесс на диаграмме «давление – температура».

76. В баллоне находилось 3,7 моля гелия при температуре 20 °С. После нагревания баллона давление газа выросло на 60 %. Найти изменение внутренней энергии, работу газа и количество теплоты, сообщенное газу в этом процессе. Изобразить процесс на диаграмме «объем – температура».

77. При изобарном нагревании азота в количестве $4{,}8 \cdot 10^{26}$ молекул его температура выросла от 286 до 312 К. Найти изменение внутренней энергии, работу газа и количество теплоты, сообщенное газу в этом процессе. Изобразить процесс на диаграмме «объем – температура».

78. В адиабатном процессе объем 14 молей водяного пара вырос в 1,2 раза. Начальная температура пара 440 К. Найти изменение внутренней энергии, работу, совершенную газом, и количество теплоты, сообщенное газу в этом процессе. Изобразить процесс на диаграмме «давление – температура».

79. Один киломоль одноатомного газа, находящегося при 27 °С, охлаждается изохорно с уменьшением давления вдвое. Затем газ изобарно расширяется так, что в конечном состоянии его температура равна первоначальной. Найти количество теплоты, поглощенной газом, работу и приращение внутренней энергии газа. Изобразить процесс на диаграмме «температура – объем».

80. Идеальный газ, занимающий объем 0,39 м^3 при давлении 155 кПа, изотермически расширяется до десятикратного объема, затем изохорно нагревается так, что в конечном состоянии его давление равно первоначальному. В результате этих процессов газу сообщается 1,5 МДж тепла. Найти число степеней свободы молекул газа. Изобразить процесс на диаграмме «давление – объем».

81. В цилиндре под поршнем находится водород массой 20 г при температуре 300 К. Газ сначала расширили адиабатически, увеличив объем в пять раз, а затем сжали изотермически, уменьшив объем в пять раз. Найти измене-

ние внутренней энергии, работу газа и количество теплоты, сообщенное газу в этом процессе. Изобразить процесс на диаграмме «давление – температура».

82. Углекислый газ массой 500 г, находившийся под давлением 0,5 МПа при температуре 127 °C, изотермически расширили. В результате давление уменьшилось втрое. Затем газ изобарно сжали до первоначального объема, потом давление газа изохорно увеличили до первоначального значения. Найти изменение внутренней энергии, работу газа и количество теплоты, полученной газом за цикл. Изобразить цикл на диаграмме «давление – объем».

8. ВТОРОЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ

8.1. Изменение энтропии

Основные формулы и обозначения

Изменение энтропии в термодинамике: $\Delta S = \int\limits_1^2 \frac{\delta Q}{T}$, где δQ – элементарное количество теплоты, сообщенное системе на бесконечно малом участке какого-либо процесса 1 – 2 при температуре T.

По первому закону термодинамики $\delta Q = dW_{\text{вн}} + \delta A.$

Теплота нагревания и охлаждения $\delta Q_{\text{нагр, охл}} = dW_{\text{вн}} + \delta A.$

Теплота плавления (+) и отвердевания (–): $\delta Q_{\text{пл, отв}} = \pm \lambda dm,$ процессы происходят при постоянной температуре – температуре плавления $T_{\text{пл}}$.

Теплота парообразования (+) и конденсации (–): $\delta Q_{\text{пар, конд}} = \pm r dm,$ процессы происходят при постоянной температуре – температуре кипения $T_{\text{кип}}$.

Теплота, выделяющаяся при сгорании топлива: $\delta Q_{\text{сг}} = -q dm,$ сгорание происходит при постоянной температуре – температуре горения $T_{\text{г}}$.

Пример представления решения задачи

З а д а ч а. Энтропия одного моля ИГ при температуре 298 К и давлении 100 кПа равна 204,8 Дж/К. В результате изотермического расширения объем, занимаемый газом, увеличился до 50 л. Определить энтропию газа в конечном состоянии.

Дано:	*Алгоритм решения задачи*.
ν = 1 моль; T_1 = 298 K; $T_2 = T_1 = T$; $p_1 = 10^5$ Па; S_1 = 204,8 Дж/К. $V_2 = 50\cdot10^{-3}$ м^3.	1. Записать формулу: $\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$. 2. Подставить в нее выражение для δQ. 3. Провести интегрирование (для ИГ – с учетом уравнений состояния и (или) изопроцессов). 4. Провести вычисления.
S_2 – ?	*Выполнение операций, входящих в алгоритм.*

1. Изменение энтропии $\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$.

2. Элементарное количество теплоты $\delta Q = dW_{\text{вн}} + \delta A$. В изотермическом процессе $dW_{\text{вн}} = 0$, поэтому $\delta Q = \delta A = pdV$. Отсюда $\Delta S = \int_1^2 \frac{pdV}{T}$.

3. Учитывая уравнение состояния ИГ, $p(V) = \nu RT/V$. Таким образом, $\Delta S = \int_1^2 \frac{\nu RTdV}{TV} = \nu R\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu R\ln(V_2/V_1)$.

4. С учетом уравнения состояния ИГ $V_1 = \nu RT/p_1$ последняя формула примет вид: $\Delta S = \nu R\ln(V_2 p_1/\nu RT)$. Отсюда $S_2 = S_1 + \Delta S = S_1 + \nu R\ln(V_2 p_1/\nu RT)$. Численный расчет: $S_2 = 210{,}64$ Дж/К.

Ответ: $S_2 = S_1 + \nu R\ln(V_2 p_1/\nu RT)$, $S_2 = 210{,}64$ Дж/К.

Задачи для самостоятельного решения

83. В одном сосуде, объем которого равен 1,6 л, находится 14 мг азота, в другом сосуде объемом 3,4 л – 16 мг кислорода. Температура газов одинаковая. Сосуды соединяют, и газы перемешиваются без изменения температуры. Найти приращение энтропии в этом процессе.

84. 1000 моль двухатомного идеального газа, находящегося при некоторой температуре, охлаждается изохорически, вследствие чего его давление уменьшается в два раза. Затем газ изобарически расширяется так, что в конечном состоянии его температура равна первоначальной. Найти приращение энтропии.

85. Найти приращение энтропии при конденсации 800 г водяного пара, находившегося при температуре 100 °C и последующем охлаждении воды до температуры 20 °C. Конденсация происходит при давлении 760 мм рт. ст. Счи-

тать, что удельная теплоемкость воды не зависит от температуры и равна 4,20 кДж/(кг · К). Удельная теплота парообразования воды 2,25 МДж/кг.

86. Найти изменение энтропии при отвердевании 50 г олова. Удельная теплота плавления олова 60,7 кДж/кг.

87. Найти изменение энтропии при охлаждении 2 кг алюминия от 320 до 300 К. Удельная теплоемкость алюминия 920 Дж/(кг · К).

8.2. Теплоемкость

Основные формулы и обозначения

Теплоемкость тела $C = \dfrac{\delta Q}{dT}$. Удельная и молярная теплоемкости однородного вещества: $c_m = \dfrac{1}{m}\dfrac{\delta Q}{dT}$ и $c_\nu = \dfrac{1}{\nu}\dfrac{\delta Q}{dT}$ соответственно. Молярная теплоемкость ИГ при постоянном давлении: $c_\nu = \dfrac{i+2}{2}R$; при постоянном объеме: $c_\nu = \dfrac{i}{2}R$. Их отношение $\gamma = \dfrac{c_{\nu p}}{c_{\nu V}} = \dfrac{i+2}{i}$ – показатель адиабаты.

Задачи для самостоятельного решения

88. При температуре 480 К идеальный газ массой 2,5 кг занимает объем 800 л. Найти давление этого газа, если его удельная теплоемкость при постоянном давлении равна 519 Дж/(кг·К), а отношение теплоемкостей равно 1,67.

89. Плотность идеального газа при нормальных условиях 0,089 кг/м^3. Найти его удельную теплоемкость газа при постоянном объеме. Какой это газ?

90. Плотность идеального газа при давлении 1,0 МПа и температуре 400 К 9,615 кг/м^3. Найти отношение удельной теплоемкости этого газа при постоянном давлении к удельной теплоемкости при постоянном объеме, если большая из них равна 910 Дж/(кг · К).

8.3. Идеальный тепловой двигатель

Основные формулы и обозначения

КПД теплового двигателя: $\eta = \frac{A_п}{A_з} = \frac{Q_н - |Q_х|}{Q_н}$, где $Q_н > 0$ – количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя; $Q_х < 0$ – количество теплоты, отданное рабочим телом холодильнику; $A_п = Q_н - |Q_х|$ – полезная работа, совершенная рабочим телом за цикл.

Мощность: полезная – $P_п = A_п / t$; передачи тепла при нагревании – $P_н = Q_н / t$; передачи тепла при охлаждении – $P_х = Q_х / t$.

Цикл Карно состоит из двух изотермических и двух адиабатных процессов. Идеальный тепловой двигатель работает по циклу Карно. КПД идеального теплового двигателя максимален при данных значениях температуры нагревателя $T_н$ и холодильника $T_х$: $\eta = \frac{T_н - T_х}{T_н}$.

Задачи для самостоятельного решения

91. Газ, совершающий цикл Карно, отдает холодильнику 2/3 количества теплоты, полученной от нагревателя. Температура холодильника равна 0 °С. Определить температуру нагревателя.

92. Газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя в три раза выше температуры холодильника. Нагреватель передает газу количество теплоты 41,9 кДж. Какую работу совершил газ? Найти КПД машины.

93. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя равна 188 °С, температура холодильника равна 10 °С. При изотермическом расширении газ совершает работу 79 Дж. Определить количество теплоты, которое газ отдает холодильнику при изотермическом сжатии.

Библиографический список

1. Д е т л а ф, А. А. Курс физики / А. А. Д е т л а ф, Б. М. Я в о р с к и й. – Москва : Академия, 2014. – Текст : непосредственный.

2. С а в е л ь е в, И. В. Курс общей физики. В 5 томах. Т. 2. Электричество и магнетизм / И. В. С а в е л ь е в. – Санкт-Петербург : Лань, 2011. – Текст : непосредственный.

3. Т р о ф и м о в а, Т. И. Краткий курс физики / Т. И. Т р о ф и м о в а. – Москва : Абрис, 2012. – Текст : непосредственный.

4. К р о х и н, С. Н. Краткий курс физики / С. Н. К р о х и н, Л. А. Л и т н е в с к и й. – Омск : Омский гос. ун-т путей сообщения, 2012. – Часть 1. – Текст : непосредственный.

5. Л и т н е в с к и й, Л. А. Кинематика и динамика частиц в примерах решения задач / Л. А. Л и т н е в с к и й, Ю. М. С о с н о в с к и й. – Омск : Омский гос. ун-т путей сообщения, 2015. – Текст : непосредственный.

6. Г е л ь в е р, С. А. Кинематика и динамика вращательного движения абсолютно твердого тела (примеры решения задач) / С. А. Г е л ь в е р, С. Н. С м е р д и н. – Омск : Омский гос. ун-т путей сообщения, 2016. – Текст : непосредственный.

7. А р о н о в а, Т. А. Законы сохранения. СТО. Примеры решения задач / Т. А. А р о н о в а, И. А. Д р о з д о в а. – Омск : Омский гос. ун-т путей сообщения, 2016. – Текст : непосредственный.

8. В о з н ю к, С. В. Молекулярная физика и термодинамика. Примеры решения задач / С. В. В о з н ю к, С. А. М и н а б у д и н о в а, Н. А. Х м ы р о в а. – Омск : Омский гос. ун-т путей сообщения, 2016. – Текст : непосредственный.

9. Практикум для самостоятельной подготовки студентов к решению задач по разделам «Механика» и «Молекулярная физика / С. В. В о з н ю к, С. А. Г е л ь в е р [и др.]. – Омск : Омский гос. ун-т путей сообщения, 2022. – Текст : непосредственный.

Учебное издание

ВОЗНЮК Сергей Викторович, ГЕЛЬВЕР Сергей Александрович,
ЛИТНЕВСКИЙ Леонид Аркадьевич, СОСНОВСКИЙ Юрий Михайлович,
ТОДЕР Георгий Борисович, ХМЫРОВА Наталья Анатольевна

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО РАЗДЕЛАМ «МЕХАНИКА» И «МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА»

Редактор Н. А. Майорова

***

Подписано в печать 08.12.2022. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,7. Уч.-изд. л. 3,0.
Тираж 30 экз. Заказ .

**

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35