Л. А. ЛИТНЕВСКИЙ, С. А. МИНАБУДИНОВА

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В ЛАБОРАТОРНОМ ПРАКТИКУМЕ ПО ФИЗИКЕ

ОМСК 2004

Министерство путей сообщения Российской Федерации
Омский государственный университет путей сообщения

Л. А. Литневский, С. А. Минабудинова

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В ЛАБОРАТОРНОМ ПРАКТИКУМЕ ПО ФИЗИКЕ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний к лабораторным работам по физике
для студентов 1-го, 2-го курсов дневного обучения

Омск 2004

УДК 530.1 (076.5)
ББК 22.3я73
Л64

Метод наименьших квадратов в лабораторном практикуме по физике: Методические указания к выполнению лабораторных работ; Л. А. Литневский, С. А. Минабудинова / Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2004. 32 с.

В методических указаниях подробно рассмотрен метод наименьших квадратов, приведены примеры его применения и расчет погрешности при обработке результатов измерений функциональных зависимостей между физическими величинами.

Методические указания по физике предназначены для студентов 1-го и 2-го курсов всех факультетов, могут быть использованы при выполнении лабораторных работ и дополнительных заданий к лабораторным работам.

Библиогр.: 3 назв. Табл. 7. Рис. 2.
Рецензенты: доктор техн. наук, профессор В. Н. Зажирко;
канд. физ.-мат. наук Г. И. Косенко.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

При проведении экспериментов часто возникает необходимость измерения физических величин, находящихся в функциональной зависимости. Как правило, после измерений информация о физическом явлении извлекается из графиков, построенных по данным, полученным экспериментальным путем, а зависимость между двумя физическими величинами – X и Y – представляется в виде табл. 1.

Таблица 1

Зависимость физических величин X и Y

X	x_1	x_2	x_3	...	x_N
Y	y_1	y_2	y_3	...	y_N

Обработка результатов таких измерений не может быть выполнена по известным правилам обработки результатов *прямых* и *косвенных* измерений, поскольку наборы чисел (x_1, x_2, …, x_N) и (y_1, y_2, …, y_N) *не являются значениями многократного измерения одной и той же величины*. В связи с тем, что значения величин X и Y измеряются с погрешностью, нанесенные на координатную плоскость точки будут разбросаны относительно предполагаемой кривой. Как тогда построить кривую, чтобы она наилучшим образом соответствовала проведенным измерениям?

Если график $y = f(x)$ строить, непосредственно соединяя экспериментально полученные точки, то он будет иметь вид ломаной. Однако в большинстве случаев функции, описывающие процессы в природе, являются гладкими. Значит, необходимо подобрать такую функцию $y = f(x)$, которая наилучшим образом выражала бы экспериментальную зависимость Y от X. Другими словами, требуется сгладить построенную по точкам ломаную линию. Эту задачу называют *задачей о сглаживании* экспериментальных зависимостей. Она решается при помощи *метода наименьших квадратов*.

Подбор формул по экспериментальным данным называют *подбором эмпирических формул*. На самом деле, формула тем точнее, чем больше теоретических представлений вложено в нее и чем в меньшей степени она является эмпирической. В действительности необходимо сначала задаться видом функции, а затем, пользуясь результатами эксперимента, определить значения различных параметров (постоянных величин), входящих в нее.

Перед тем как приступить к подбору формулы, полезно нанести экспериментальные данные на график и от руки провести через полученные точки наиболее правдоподобную гладкую кривую. При этом сразу выявляются те данные, в которых можно предполагать существенные ошибки. Очень важно при проведении кривой по экспериментальным точкам знать, как должна вести себя кривая при значениях аргумента, весьма близких к нулю, при больших значениях аргумента, проходит ли кривая через начало координат, пересекает ли координатные оси и т. п.

Итак, допустим, что эта предварительная работа выполнена, подобрана формула, и требуется определить значения входящих в формулу постоянных величин. Как это сделать?

1. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

1.1. Метод наименьших квадратов

Поставим задачу: найти такие значения неизвестных параметров a, b, … функции $y = f_{a,\,b,\,\ldots}(x)$ (например, коэффициента k для функции $y = k\,x$), при которых эта функция наилучшим образом соответствует экспериментальным данным. Определим величину S, которая называется *общим отклонением*, как сумму квадратов отклонений δ_i «теоретических» значений $f_{a,\,b,\,\ldots}(x_i)$, найденных по эмпирической формуле $y = f_{a,\,b,\,\ldots}(x)$, от соответствующих экспериментальных значений y_i:

$$S = \sum_{i=1}^{N} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(f_{a,b,\ldots}(x_i) - y_i \right)^2 . \tag{1}$$

В качестве критерия наилучшего соответствия формулы $y = f_{a,\,b,\,\ldots}(x)$ экспериментальной зависимости между x и y потребуем, чтобы общее отклонение S было наименьшим.

Метод отыскания параметров, входящих в формулу $y = f_{a,\,b,\,\ldots}(x)$, из требования, чтобы общее отклонение S было наименьшим, называется *методом наименьших квадратов*.

Для выбранного *вида* функции $f_{a,\,b,\,\ldots}(x)$ общее отклонение S зависит лишь от параметров a, b, … Тогда условие минимума S можно записать следующим (известным) образом:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0; \quad \ldots \tag{2}$$

Очевидно, что число полученных уравнений равно числу неизвестных параметров функции $f_{a,\,b,\,\ldots}(x)$. Решая систему уравнений (2), можно найти значения параметров a, b, …, при которых выбранная функция наилучшим образом расположится среди экспериментальных точек.

Следует отметить, что в качестве величины S можно было бы взять обычную сумму отклонений $\sum_{i=1}^{N}\left(f_{a,\,b,\,\ldots}(x_i) - y_i\right)$ или сумму их абсолютных величин $\sum_{i=1}^{N}\left|f_{a,\,b,\,\ldots}(x_i) - y_i\right|$. Но делать это нецелесообразно, так как в первом случае сумма может быть малой или даже равной нулю при значительном разбросе экспериментальных точек, когда положительные отклонения компенсируются отрицательными. Во втором случае функция $\sum_{i=1}^{N}\left|f_{a,b,\ldots}(x_i) - y_i\right|$ лишена этого недостатка, но имеет другой – она не является дифференцируемой, что существенно затрудняет дальнейшее решение задачи.

1.2. Погрешность параметров *a, b, ...*

Полученные из решения системы уравнений (2) формулы для расчета параметров a, b, … представляют собой выражения, зависящие только от измеренных значений $x_1, x_2, \ldots, x_N$ и $y_1, y_2, \ldots, y_N$,

$$a = a(x_1, x_2, \ldots, x_N, y_1, y_2, \ldots, y_N); \quad b = b(x_1, x_2, \ldots, x_N, y_1, y_2, \ldots, y_N); \ \ldots \tag{3}$$

Полагая погрешность измерения значений $x_1, x_2, \ldots, x_N$ пренебрежимо малой, можно считать, что разброс точек относительно выбранной функции в основном вызван погрешностью измерения y_i. Тогда погрешность параметров a, b, … определяется погрешностью измерения каждой из N величин $y_1, y_2, \ldots, y_N$.

Переписывая выражения (3) как функции переменных y_i:

$$a = a(y_1, y_2, ..., y_N); \quad b = b(y_1, y_2, ..., y_N); \ ..., \tag{4}$$

замечаем, что погрешность параметров a, b, … можно вычислить по хорошо известным правилам расчета погрешности в косвенных измерениях:

$$\Delta a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial y_1}\Delta y_1\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y_2}\Delta y_2\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial a}{\partial y_N}\Delta y_N\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\Delta y_i\right)^2}. \tag{5}$$

Погрешность параметра b и других параметров вычисляется по аналогичным формулам. Формулы вида (5) позволяют рассчитать погрешность определения параметров a, b, …, если известны погрешности Δy_1, Δy_2, …, Δy_N, с которыми измерены значения y_i. (Например, каждое из значений y_i измерялось многократно, и эти измерения обработаны как прямые измерения.)

Если значения y_i измерены однократно и их погрешности неизвестны, то заметим, что погрешности отдельных измерений Δy_1, Δy_2, …, Δy_N – это погрешности измерения одной и той же величины y, так что в этом случае можно положить их равными:

$$\Delta y_1 = \Delta y_2 = … = \Delta y_N = \Delta y. \tag{6}$$

Тогда погрешность Δy можно найти из следующих соображений. Значения y_i разбросаны относительно *своих* наиболее вероятных значений $\bar{y}_i = f_{a,b,...}(x_i)$. Полагая, что абсолютная погрешность близка стандартному отклонению, по аналогии с обычным расчетом погрешности прямых измерений для погрешности Δy можно написать:

$$\Delta y \approx \sigma_y^{(N-2)} = \sqrt{\frac{S}{N-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(f_{a,b,...}(x_i) - y_i\right)^2}{N-2}}. \tag{7}$$

Знаменатель $N - 2$ приводит к неопределенности при $N = 2$ и отражает тот факт, что по двум точкам можно провести точно любую кривую. Если погрешность Δy, вычисленная по формуле (7), сравнима с инструментальной погрешностью измерения значений y_i, то последнюю нужно добавить к Δy.

Вынося в формуле (5) из-под квадратного корня Δy, можно записать формулы:

$$\Delta a = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\right)^2}\Delta y; \quad \Delta b = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial b}{\partial y_i}\right)^2}\Delta y; \quad ..., \tag{8}$$

позволяющие оценить погрешности, с которыми вычислены параметры сглаживающей функции.

1.3. Критерий качества аппроксимации

Если в имеется набор результатов измерений (x_1, y_1), …, (x_N, y_N) для двух физических величин X и Y, то о наличии или отсутствии зависимости между ними в первом приближении можно судить по графику, на котором изображены все полученные из опыта точки (x_i, y_i).

Предположим, что исходя из физических соображений, ожидается наличие линейной зависимости между величинами X и Y следующего вида:

$$y = px + q. \tag{9}$$

С помощью метода наименьших квадратов можно найти значения коэффициентов p и q для прямой, которая наилучшим образом аппроксимирует экспериментальные точки (x_i, y_i). Оценив погрешность измерений, можно увидеть, насколько близко экспериментальные точки лежат около прямой (9), т. е. насколько предположение о линейной зависимости между величинами X и Y справедливо.

Однако в некоторых случаях не удается получить оценки погрешности заранее. Тогда определить, насколько хорошо линейная зависимость вида (9) аппроксимирует набор экспериментальных точек, можно с помощью *коэффициента линейной корреляции:*

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \langle x\rangle\right)\left(y_i - \langle y\rangle\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \langle x\rangle\right)^2 \sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \langle y\rangle\right)^2}} \quad \text{или} \quad r = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - N\langle x\rangle\langle y\rangle}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\langle x\rangle^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - N\langle y\rangle^2\right)}}, \tag{10}$$

где

$$\langle x\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \quad \langle y\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i. \tag{11}$$

Рассмотрим возможные значения коэффициента корреляции.

1) Величины X и Y связаны *точной* линейной функциональной зависимостью вида (9). Коэффициент линейной корреляции $r = \pm 1$, причем знак «плюс» или «минус» зависит от того, положителен или отрицателен коэффициент p. Сколь тщательным ни был бы эксперимент, получить $r = \pm 1$ не удастся.

2) $r > 0$. Между величинами X и Y существует положительная корреляция, т. е. при возрастании одной из них другая имеет тенденцию также возрастать.

3) $r < 0$. Между величинами X и Y существует отрицательная корреляция, т. е. при возрастании одной из них другая имеет тенденцию убывать.

4) $r = 0$. Величины X и Y не коррелированны, т. е. между ними не существует линейной зависимости, а точки (x_i, y_i) на графике не группируются около какой-либо прямой линии.

Таким образом, если есть основания считать, что физические величины X и Y связаны линейной зависимостью, то можно ожидать близкое к ± 1 значение коэффициента линейной корреляции r, поэтому прежде чем использовать метод наименьших квадратов для нахождения коэффициентов p и q, полезно вычислить коэффициент линейной корреляции по формулам (10) и (11).

2. АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ ВИДА $y = k\,x$

2.1. Вычисление параметра *k*

Наиболее простым видом функциональной зависимости является прямо пропорциональная зависимость между физическими величинами вида

$$y = kx. \tag{12}$$

В связи с тем, что значения величин x и y измеряются с погрешностью, нанесенные на координатную плоскость точки будут «разбросаны» относительно предполагаемой прямой. Необходимо отыскать такой коэффициент k (а значит, прямую, наилучшим образом согласованную с экспериментальными точками, нанесенными на плоскость (x, y)), при котором общее отклонение

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left(k\,x_i - y_i\right)^2 \tag{13}$$

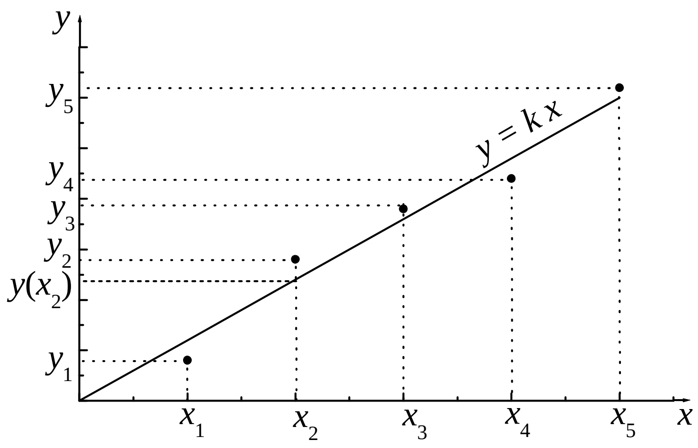

Рис. 1

минимально (рис. 1). Для этого необходимо решить уравнение:

$$\frac{dS}{dk} = 0 \qquad (14)$$

или

$$\frac{d}{dk}\sum_{i=1}^{N}(kx_i - y_i)^2 = 0, \qquad (15)$$

где x_i, y_i – измеренные значения величин; N – количество пар значений измеренных величин.

Естественно, что для отыскания экстремума дифференцирование ведется по параметру, от которого зависит, как пройдет график. Воспользовавшись правилами дифференцирования суммы и сложной функции, получим

$$\sum_{i=1}^{N}\left[2(kx_i - y_i)x_i\right] = 0 \qquad (16)$$

с учетом того, что x_i, y_i – постоянные. Раскрывая скобки и вынося параметр k за знак суммы, приходим к уравнению:

$$2k\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N}y_i x_i = 0, \qquad (17)$$

из которого находим этот параметр:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{N}y_i x_i}{\Delta_k}. \qquad (18)$$

Здесь для сокращения записи и упрощения последующих расчетов введено обозначение для знаменателя

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{N}x_i^2, \qquad (19)$$

который входит во многие последующие формулы. Полученное значение параметра k позволяет наиболее близко к экспериментальным точкам провести прямую, выходящую из начала координат.

2.2. Вычисление погрешности параметра *k*

Часто задачей эксперимента является определение коэффициента пропорциональности между двумя последовательностями чисел (например, нахождение скорости равномерного движения по измерению перемещения за разные промежутки времени). В этом случае экспериментатора интересует не только значение параметра k, но и погрешность в его определении.

В соответствии с формулой (5) запишем:

$$\Delta k = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial k}{\partial y_i} \Delta y_i \right)^2} \, . \tag{20}$$

Поскольку k вычисляется по формуле (18), то производная

$$\frac{\partial k}{\partial y_i} = \frac{x_i}{\Delta_k} \, . \tag{21}$$

Подставляя производную (21) в выражение (20), получим формулу для расчета погрешности параметра k:

$$\Delta k = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i \Delta y_i)^2}}{\Delta_k} \, . \tag{22}$$

Если погрешности Δy_i не известны, положим их равными, и на основании формулы (7) с учетом зависимости (12) запишем:

$$\Delta y \approx \sigma_y^{(N-2)} = \sqrt{\frac{S}{N-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (k\,x_i - y_i)^2}{N-2}} \, . \tag{23}$$

Тогда, вынося в формуле (22) Δy за знак суммы и из-под квадратного корня, получим:

$$\Delta k = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial k}{\partial y_i}\right)^2}\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i}{\Delta_k}\right)^2}\Delta y = \sqrt{\frac{1}{\Delta_k^2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2}\Delta y = \sqrt{\frac{1}{\Delta_k}}\Delta y\,. \qquad (24)$$

Окончательно запишем:

$$\Delta k = \sqrt{\frac{1}{\Delta_k}\quad\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(k x_i - y_i\right)^2}{\left(N-2\right)}}\,. \qquad (25)$$

Несмотря на кажущуюся громоздкость формул (18), (19), (22) и (25), трудность вычисления можно свести к минимуму при использовании режима статистических расчетов обычных инженерных микрокалькуляторов.

2.3. Пример: зависимость силы тока от напряжения на резисторе

Пусть в результате измерения силы тока и напряжения на резисторе получены значения, приведенные в табл. 2.

Таблица 2

Результаты измерений силы тока и напряжения

I, A	1	2	3	4	5
U, B	2,9	6,1	9,2	11,8	16,0

Необходимо подобрать такую формулу $U = f\,(I)$, чтобы она наиболее удачно отражала зависимость между силой тока I и напряжением U. Закон Ома устанавливает эту зависимость в виде $U = R\,I$. Это линейная зависимость. Какова же при этом величина сопротивления R?

В принципе, можно определить значение R для каждого из N измерений, а именно:

$$R_i = U_i / I_i\,, \qquad (26)$$

а затем найти среднее значение сопротивления по формуле:

$$\langle R\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} R_i = 3{,}033 \approx 3{,}03 \text{ (Ом)}. \qquad (27)$$

Погрешность такого *косвенного* измерения сопротивления можно найти по правилам обработки результатов *прямых* измерений, рассматривая набор значений R_i как статистический набор данных. Пренебрегая инструментальной погрешностью, получим:

$$\Delta R \approx \left(\sigma_{N-1}\right)_R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\langle R\rangle - R_i\right)^2}{N-1}} = 0{,}116 \approx 0{,}12 \text{ (Ом)}. \tag{28}$$

Итак,

$$R = (3{,}03 \pm 0{,}12) \text{ Ом} \quad (\varepsilon_R = 3{,}8\ \%). \tag{29}$$

Это самый простой, но не лучший способ выбора коэффициента k в случае, когда сглаживающая зависимость между величинами X и Y линейная и имеет вид: $y = k\,x$.

Применяя метод наименьших квадратов, получим

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{N} U_i \cdot I_i}{\sum_{i=1}^{N} I_i^2} = 3{,}089 \text{ (Ом)}. \tag{30}$$

Погрешность вычислим по формуле (25) с учетом обозначения (19):

$$\Delta R = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} I_i^2} \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(RI_i - U_i\right)^2}{(N-2)}} = 0{,}063 \text{ (Ом)}. \tag{31}$$

В результате получим:

$$R = (3{,}089 \pm 0{,}063) \text{ (Ом)} \quad (\varepsilon_R = 1{,}6\ \%). \tag{32}$$

Видно, что наиболее вероятные значения сопротивлений, вычисленные двумя рассмотренными способами, попадают в доверительные интервалы друг друга и, следовательно, оба имеют право на существование. Однако погрешность расчета сопротивления при использовании метода наименьших квадратов оказалась вдвое меньше по сравнению с первым способом. Таким образом, результат, полученный методом наименьших квадратов, более точен.

3. АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ ВИДА $y = p\,x + q$

3.1. Вычисление параметров *p* и *q*

Пусть в качестве сглаживающей функции $y = f(x)$ взята линейная функция вида $y = p\,x + q$. В этом случае также можно применить метод наименьших квадратов для отыскания параметров p и q. Величина S для этого случая определяется формулой:

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left(p x_i + q - y_i \right)^2 . \qquad (33)$$

Необходимо выбрать числа p и q так, чтобы общее отклонение S было наименьшим. Заметим, что функция $S = S(p, q)$ есть функция двух переменных p и q, тогда как x_i, y_i – постоянные величины, найденные экспериментально.

Тогда для нахождения прямой, наилучшим образом согласованной с экспериментальными точками, достаточно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial p} = 0; \\ \dfrac{\partial S}{\partial q} = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} 2\left(p x_i + q - y_i \right) x_i = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{N} 2\left(p x_i + q - y_i \right) = 0. \end{cases} \qquad (34)$$

После алгебраических преобразований эта система принимает вид:

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2 \right) p + \left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i \right) q = \sum\limits_{i=1}^{N} y_i x_i ; \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i \right) p + N\,q = \sum\limits_{i=1}^{N} y_i . \end{cases} \qquad (35)$$

Решая ее, получим искомые параметры p и q:

$$p = \frac{N \sum\limits_{i=1}^{N} y_i\, x_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i \right)\left(\sum\limits_{i=1}^{N} y_i \right)}{\Delta_{pq}}; \quad q = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2 \right)\left(\sum\limits_{i=1}^{N} y_i \right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i \right)\left(\sum\limits_{i=1}^{N} y_i\, x_i \right)}{\Delta_{pq}}. \qquad (36)$$

Здесь для сокращения записи и упрощения последующих расчетов введено обозначение для знаменателя:

$$\Delta_{pq} = N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2, \qquad (37)$$

который входит во все последующие формулы. Для облегчения вычислений заметим, что формулы для расчета обоих параметров содержат одни и те же суммы, а их знаменатели вообще равны. Более того, некоторые микрокалькуляторы (например, Citizen SRP-320G) имеют встроенные программы для расчета параметров p и q, что еще более облегчает процесс вычислений.

3.2. Вычисление погрешности параметров *p* и *q*

Вычислим теперь погрешность параметров p и q. Полагая, что погрешностью измерения значений величины X можно пренебречь, с учетом формулы (5) запишем:

$$\Delta p = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial y_1}\Delta y_1\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y_2}\Delta y_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial p}{\partial y_N}\Delta y_N\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial p}{\partial y_i}\Delta y_i\right)^2}; \qquad (38)$$

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial y_1}\Delta y_1\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y_2}\Delta y_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial q}{\partial y_N}\Delta y_N\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial q}{\partial y_i}\Delta y_i\right)^2}, \qquad (39)$$

где частные производные p и q определяются следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial y_i} = \frac{N x_i - \sum_{i=1}^{N} x_i}{\Delta_{pq}}; \qquad \frac{\partial q}{\partial y_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - x_i \sum_{i=1}^{N} x_i}{\Delta_{pq}}. \qquad (40)$$

Подставляя производные (40) в выражения (38) и (39), получим формулы для расчета погрешности параметров p и q:

$$\Delta p = \frac{1}{\Delta_{pq}}\sqrt{\sum_{j=1}^{N}\left[\left(N x_j - \sum_{i=1}^{N} x_i\right)\Delta y_j\right]^2}; \quad \Delta q = \frac{1}{\Delta_{pq}}\sqrt{\sum_{j=1}^{N}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - x_j \sum_{i=1}^{N} x_i\right)\Delta y_j\right]^2}. \qquad (41)$$

Полагая справедливым равенство (6), после алгебраических преобразований получим:

$$\Delta p = \Delta y \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial p}{\partial y_i} \right)^2} = \Delta y \sqrt{\frac{N}{\Delta_{pq}}}\ ; \tag{42}$$

$$\Delta q = \Delta y \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial q}{\partial y_i} \right)^2} = \Delta y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{\Delta_{pq}}}\ . \tag{43}$$

Обе формулы – (42) и (43) – содержат одни и те же суммы и тот же знаменатель, что и выражения (36).

В соответствии с определением (7) погрешность Δy может быть рассчитана по формуле, аналогичной формуле (23):

$$\Delta y \approx \sigma_y^{(N-2)} = \sqrt{\frac{S}{N-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (p\,x_i + q - y_i)^2}{N-2}}\ . \tag{44}$$

Если погрешности Δy_i известны, то расчет погрешностей Δp и Δq можно выполнить по формулам (41), аналогичным формуле (22).

3.3. Пример: зависимость сопротивления проводника от температуры

Рассмотрим пример, где в качестве сглаживающей зависимости используется линейная функция вида $y = p\,x + q$.

Пусть измеряется сопротивление некоторого металлического образца при различных значениях температуры. Результаты измерений отражены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты измерений температуры и сопротивления

t, °С	–20	20	40	60	70	80
R, Ом	110	129	137	146	150	155

Нужно подобрать формулу $R = f\,(t)$, наилучшим образом сглаживающую экспериментальную зависимость между R и t.

Исходя из физических представлений зависимости сопротивления металла от температуры, можно представить искомую функцию в виде: $R(t) = \alpha t + R_0$.

Используя метод наименьших квадратов, найдем значения параметров:

$$\alpha = \frac{N\sum_{i=1}^{N} R_i t_i - \left(\sum_{i=1}^{N} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} R_i\right)}{N\sum_{i=1}^{N} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} t_i\right)^2} = 0{,}44479\left(\frac{\text{Ом}}{^{\text{o}}\text{C}}\right); \qquad (45)$$

$$R_0 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} t_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N} R_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} R_i t_i\right)}{N\sum_{i=1}^{N} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} t_i\right)^2} = 119{,}300\ (\text{Ом}), \qquad (46)$$

где $N = 6$.

Физический смысл найденных параметров очевиден: α – это изменение сопротивления при нагревании образца на 1$^{\text{o}}$С; R_0 – сопротивление при температуре $t = 0^{\text{o}}$С.

Теперь вычислим погрешность, с которой определены параметры α и R_0. Применяя выражения (44), (42) и (43), соответственно получим:

$$\Delta R \approx \sigma_R^{(N-2)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\alpha t_i + R_0 - R_i)^2}{N-2}} = 0{,}505\ (\text{Ом}); \qquad (47)$$

$$\Delta\alpha = \Delta R\sqrt{\frac{N}{N\sum_{i=1}^{N} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} t_i\right)^2}} = 0{,}0061\left(\frac{\text{Ом}}{^{\text{o}}\text{C}}\right); \qquad (48)$$

$$\Delta R_0 = \Delta R\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} t_i^2}{N\sum_{i=1}^{N} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} t_i\right)^2}} = 0{,}33\ (\text{Ом}). \qquad (49)$$

В вычислениях формулы (47) сохранено более двух значащих цифр, так как погрешность ΔR не является окончательным результатом, а используется в последующих расчетах.

Полученная экспериментальная зависимость сопротивления R от температуры t наилучшим образом описывается формулой $R(t)=\alpha t+R_0$ при $\alpha=(0{,}4448\pm0{,}0061)\ \text{Ом}/{}^\circ\text{C}$ $(\varepsilon_\alpha=1{,}4\ \%)$; $R_0=(119{,}30\pm0{,}33)$ Ом $\left(\varepsilon_{R_0}=0{,}3\ \%\right)$. Вычисленные погрешности позволяют правильно округлить найденные значения параметров α и R_0.

4. АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ

4.1. Вычисление параметров *a* и *b* функции $y = a\,x^2 + bx$

Часто встречается такая зависимость между x и y, когда заведомо известно, что при $x = 0$ функция $y = 0$, но экспериментальные точки на графике «не ложатся на прямую» $y = k\,x$. В этом случае может оказаться справедливой формула $y = a\,x^2 + b\,x$ или $y = a\,x^2$.

Если сглаживающая функция имеет вид $y = a\,x^2 + b\,x$, то, применяя метод наименьших квадратов, найдем общее отклонение:

$$S=\sum_{i=1}^{N}\left(ax_i^2+bx_i-y_i\right)^2 . \tag{50}$$

Задача сводится к отысканию таких значений a и b, при которых функция $S = S\,(a, b)$ минимальна, для чего необходимо решить систему:

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{da}=0;\\[2mm] \dfrac{dS}{db}=0\end{cases}\qquad \text{или}\qquad \begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{N}2\left(ax_i^2+bx_i-y_i\right)x_i^2=0;\\ \sum\limits_{i=1}^{N}2\left(ax_i^2+bx_i-y_i\right)x_i=0.\end{cases} \tag{51}$$

Для упрощения записи и последующих вычислений введем обозначение:

$$\Delta_{ab}=\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^4\right)-\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^3\right)^2 . \tag{52}$$

Затем, опуская промежуточные вычисления, запишем окончательный результат:

$$a = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right)}{\Delta_{ab}}; \tag{53}$$

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^4\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 y_i\right)}{\Delta_{ab}}. \tag{54}$$

Парабола, параметры a и b которой заданы формулами (53) и (54), наилучшим образом расположится среди экспериментальных значений.

4.2. Вычисление погрешности параметров *a* и *b* функции $y = a\,x^2 + bx$

Подставив производные

$$\frac{\partial a}{\partial y_i} = \frac{1}{\Delta_{ab}}\left(x_i^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - x_i \sum_{i=1}^{N} x_i^3\right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial b}{\partial y_i} = \frac{1}{\Delta_{ab}}\left(x_i \sum_{i=1}^{N} x_i^4 - x_i^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^3\right) \tag{55}$$

в формулу (5), получим формулы для расчета погрешности параметров a и b при известных Δy_i:

$$\Delta a = \frac{1}{\Delta_{ab}} \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(x_i^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - x_i \sum_{i=1}^{N} x_i^3\right)\Delta y_i\right]^2}; \tag{56}$$

$$\Delta b = \frac{1}{\Delta_{ab}} \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(x_i \sum_{i=1}^{N} x_i^4 - x_i^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^3\right)\Delta y_i\right]^2}. \tag{57}$$

Если значения y_i измерялись однократно и их погрешности неизвестны, то, принимая во внимание формулы (6) и (7), имеем:

$$\Delta y \approx \sigma_y^{(N-2)} = \sqrt{\frac{S}{N-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(a\,x_i^2 + bx_i - y_i\right)^2}{N-2}}. \tag{58}$$

Теперь в формулах (56) и (57) можно вынести погрешность Δy за знак суммы. Проведя суммирование, после алгебраических преобразований получим:

$$\Delta a = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2}{\Delta_{ab}}}\,\Delta y\,; \quad \Delta b = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^4}{\Delta_{ab}}}\,\Delta y\,. \tag{59}$$

4.3. Вычисление параметра *c* функции $y = c\,x^2$ и его погрешности

В качестве упражнения рекомендуется самостоятельно рассчитать значения параметра c по методу наименьших квадратов для сглаживающей функции $y = c\,x^2$, а также получить формулу для оценки погрешности Δc этого параметра. Проверить правильность полученных формул можно на следующем примере.

Пусть измеряются координаты x_i автомобиля, который движется равноускоренно из состояния покоя из начала координат, в моменты времени t_i, отсчитанные от начала движения. Требуется найти ускорение, с которым двигался автомобиль.

Результаты проведенных измерений приведены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты измерений времени и координаты

t_i, с	5	10	15	20	25	30	35
x_i, м	11	43	95	173	270	380	525

Полагая погрешность измерения времени пренебрежимо малой и сглаживая измеренные значения функцией

$$x = \frac{at^2}{2}\,, \tag{60}$$

должен получиться следующий результат:

$$a = (0{,}8547 \pm 0{,}0032)\ \text{м/с} \quad (\varepsilon_a = 0{,}37\ \%). \tag{61}$$

5. ДРУГИЕ ВИДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

5.1. Общий подход

Не представляет особого труда обобщить метод наименьших квадратов для случая более сложных зависимостей между величинами x и y. Однако следует отметить, что метод наименьших квадратов часто приводит к довольно громоздким вычислениям. В случаях, когда искомые параметры входят в выбранные для аппроксимации формулы нелинейно, метод приводит к системе нелинейных уравнений, решение которой может оказаться очень трудоемким. В такой ситуации возможны два пути решения проблемы. Первый – это использование численных методов с привлечением персональных компьютеров. Второй путь заключается в следующем: необходимо ввести новые переменные так, чтобы в этих переменных интересующая нас зависимость становилась линейной.

Приведем некоторые примеры.

5.2. Экспоненциальная зависимость между величинами вида $y = \alpha\, e^{\beta x}$

Закон радиоактивного распада описывается формулой: $N = N_0 e^{-\lambda t}$, где N – число атомов, еще не распавшихся к моменту времени t; N_0 – общее число атомов; λ – постоянная распада.

Логарифмируя обе части формулы, получим:

$$\ln N = \ln N_0 - \lambda t\,. \qquad (62)$$

Положив $\ln N = y$, получим линейную зависимость y от t:

$$y = -\lambda t + \ln N_0\,. \qquad (63)$$

5.3. Экспоненциальная зависимость между величинами вида $y = \alpha\, e^{\beta/x}$

При исследовании зависимости некоторых физических величин от температуры T часто получается формула вида:

$$z = A e^{-W/kT}\,, \qquad (64)$$

где W – некоторая характерная для рассматриваемого явления энергия; k – постоянная Больцмана.

Логарифмируя формулу (64), получим:

$$\ln z = \ln A - \frac{W}{kT}. \qquad (65)$$

Если ввести новые переменные: $y = \ln z$ и $x = \frac{1}{T}$, то зависимость между ними становится линейной, а именно:

$$y = -\frac{W}{k} x + \ln A. \qquad (66)$$

Очевидно, что применяя метод наименьших квадратов к полученным линейным функциям (63) и (66), наилучшим образом будут аппроксимированы не исходные функции, а их линейные представления.

5.4. Использование прикладных программ

Современное программное обеспечение персональных электронно-вычислительных машин открывает широкие возможности для компьютерной обработки разнообразных функциональных зависимостей, в том числе и рассмотренных выше. Однако работа на ПК будет полноценной лишь при условии полного понимания алгоритма обработки результатов измерений и при получении необходимых вычислительных навыков, чему и способствует приведенный выше материал. В дальнейшем необходимо освоить какую-либо программу с расширенными возможностями обработки результатов проведенных экспериментов или расчетов (например MathCad или Microcal Origin), которая предназначены и для выполнения стандартных вычислительных действий, и для творчества.

6. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В РАБОТЕ «ЗАТУХАЮЩИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ»

6.1. Постановка задачи

Рассмотрим применение метода наименьших квадратов при выполнении лабораторной работы по электромагнитным колебаниям «Затухающие электрические колебания» [2]. (Напомним, что в этой работе помимо непосредственного изучения затухающих колебаний требуется по результатам эксперимента найти сопротивление контура.)

Пусть в результате серии измерений, выполненных для различных сопротивлений $R_д$, получен ряд значений амплитуды затухающих колебаний A_i (в делениях шкалы осциллографа) через k_i периодов, прошедших после начала колебаний.

Таблица 5

Результаты измерений амплитуды затухающих колебаний *A*

$R_д$, Ом									
0		50		100		150		200	
k	*A*, дел.	*k*	*A*, дел.	*k*	*A*, дел.	*k*	*A*, дел.	*k*	*A*, дел.
0	40	0	38	0	35	0	32	0	30
5	26	5	24	4	21	3	21	3	18
10	20	10	13	8	14	6	13	6	11
15	12	15	9	12	8	9	9	8	8
20	9	20	5	15	5	12	6	10	5

Согласно теоретическим представлениям амплитуда затухающих колебаний уменьшается со временем по известному закону:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \tag{67}$$

где β – коэффициент затухания; t – время.

Эту зависимость амплитуды колебаний от времени легко преобразовать к зависимости от номера колебания *k*, подставив $t = kT$:

$$A(k) = A_0 e^{-\lambda k}, \tag{68}$$

где T – период затухающих колебаний; $\lambda = \beta\, T$ – логарифмический декремент затухания.

Применение метода наименьших квадратов к полученной формуле приводит к громоздким показательным уравнениям, аналитическое решение которых в общем виде затруднительно. В этом случае возможны два пути решения задачи, которые рассмотрены ниже.

6.2. Вычисление логарифмического декремента затухания и его погрешности с помощью прикладных программ

Воспользовавшись одной из названных выше или аналогичных им прикладных программ, можно получить значения параметров A_0 и λ, при которых соответствующие кривые наилучшим образом пройдут вблизи экспериментальных значений (k_i, A_i), а также их погрешности $\Delta\, A_{0\ сл}$ и $\Delta\, \lambda_{\ сл}$. Результаты расчетов приведены в табл. 6.

Таблица 6

Результаты расчета параметров

$R_д$, Ом	0	50	100	150	200
A_0, дел.	39,7	38,22	34,96	31,99	30,02
$\Delta\, A_{0\ сл}$, дел.	1,1	0,79	0,61	0,35	0,33
λ	0,0756	0,1002	0,1223	0,1432	0,1699
$\Delta\, \lambda_{\ сл}$	0,0042	0,0040	0,0042	0,0032	0,0035
S, дел.	4,042	2,093	1,270	0,436	0,353
$\Delta\, A_{\ сл}$, дел.	1,2	0,84	0,65	0,38	0,34
$\Delta\, A$, дел.	1,5	1,3	1,2	1,1	1,1
$\Delta\, \lambda$	0,0055	0,0063	0,0076	0,0089	0,011
ε_λ, %	7	6	6	6	6

Кроме уже названных, в табл. 6 включены также еще несколько величин, необходимых для учета инструментальной погрешности измерения амплитуды колебаний, а также абсолютная погрешность измерения амплитуды ΔA и абсолютная и относительная погрешности декремента затухания. Вычисленная по формуле (7) случайная погрешность $\Delta A_{\text{сл}}$ сравнима с инструментальной погрешностью $\Delta A_{\text{ин}}$ = 1 дел., следовательно, последняя должна быть учтена при расчете погрешности логарифмического декремента затухания. Для этого применим формулы (8) к рассматриваемому случаю и получим:

$$\Delta\lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial A_i}\right)^2}\Delta A. \tag{69}$$

Замечая прямо пропорциональную зависимость между величинами ΔA и $\Delta\lambda$ в формуле (69), абсолютную погрешность логарифмического декремента можно оценить, воспользовавшись очевидной пропорцией:

$$\Delta\lambda = \frac{\sqrt{(\Delta A_{\text{сл}})^2 + (\Delta A_{\text{ин}})^2}}{\Delta A_{\text{сл}}}\Delta\lambda_{\text{сл}}. \tag{70}$$

6.3. Вычисление логарифмического декремента затухания и его погрешности аппроксимацией линейной функцией

Рассмотрим второй способ вычисления логарифмического декремента затухания, менее точный по сравнению с рассмотренным выше, основным преимуществом которого является возможность выполнения расчетов на обычном инженерном калькуляторе.

Логарифмируя формулу (68), получим:

$$\ln A = \ln A_0 - \lambda k, \tag{71}$$

что представляет собой линейную функцию $\ln A$ от номера колебания k, т. е. функцию вида

$$y = px + q, \tag{72}$$

где $y = \ln A$; $p = -\lambda$; $q = \ln A_0$.

Перепишем формулы (36), (37), (42) – (44) в обозначениях, принятых в данной лабораторной работе:

$$\lambda = -\frac{N\sum_{i=1}^{N} k_i \ln A_i - \left(\sum_{i=1}^{N} k_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} \ln A_i\right)}{\Delta}; \qquad (73)$$

$$q = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} k_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N} \ln A_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} k_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} k_i \ln A_i\right)}{\Delta}, \qquad (74)$$

где

$$\Delta = N\sum_{i=1}^{N} k_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} k_i\right)^2. \qquad (75)$$

Вычислим погрешность величины ln*A*:

$$\Delta y = \Delta(\ln A) \approx \sigma_y^{(N-2)} = \sqrt{\frac{S}{N-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(-\lambda k_i + q - \ln A_i\right)^2}{N-2}}, \qquad (76)$$

что позволит найти абсолютную погрешность логарифмического декремента затухания

$$\Delta\lambda = \Delta y \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y_i}\right)^2} = \Delta y \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \qquad (77)$$

и погрешность логарифма начальной амплитуды A_0

$$\Delta q = \Delta y \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial q}{\partial y_i}\right)^2} = \Delta y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} k_i^2}{\Delta}}. \qquad (78)$$

Формулы (73) – (78) содержат в правой части величины, значения которых получены в результате измерений (см. табл. 5). Применяя их для пяти серий измерений, найдем значения логарифмического декремента затухания и погрешность его косвенного измерения для каждого сопротивления. Результаты расчетов приведены в табл. 7.

Таблица 7

Результаты расчетов

$R_д$, Ом	0	50	100	150	200
λ	0,07513	0,10074	0,12743	0,1619	0,17492
$\Delta\lambda$	0,00395	0,00385	0,0052	0,00386	0,00664
ε_λ, %	5	4	4	2	4

Примечание. Учесть инструментальную погрешность при таком способе обработки результатов измерений сложно.

6.4. Вычисление сопротивления контура и его погрешности

Теоретическая зависимость декремента затухания от сопротивления контура хорошо известна и определяется формулой:

$$\lambda = \beta T = \frac{R_к + R_д}{2L}\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R_к + R_д}{2L}\right)^2}}, \tag{79}$$

где $R_к$ – сопротивление контура; $R_д$ – внешнее добавочное сопротивление; L – индуктивность контура; ω_0 – собственная частота колебаний контура.

Для анализа перепишем формулу (79) в следующем виде:

$$\lambda = 2\pi\frac{R_к + R_д}{2L\omega_0}\left[1 - \left(\frac{R_к + R_д}{2L\omega_0}\right)^2\right]^{-1/2}. \tag{80}$$

Решая это уравнение относительно $\left(\frac{R_к + R_д}{2L\omega_0}\right)^2$ при наибольших значениях декремента (в этой работе λ не превышал 0,2), получим: $\left(\frac{R_к + R_д}{2L\omega_0}\right)^2 \approx 0{,}001.$

Поскольку это значение много меньше единицы, вполне приемлемо оставить линейную зависимость декремента затухания от сопротивления:

$$\lambda = \frac{\pi}{L\omega_0}\left(R_к + R_д\right). \tag{81}$$

При использовании компьютерных программ со встроенным методом наименьших квадратов эту формулу можно рассматривать как $\lambda(R_д)$ при двух неизвестных параметрах, одним из которых является сопротивление контура. Если в распоряжении имеется лишь калькулятор, то удобнее привести эту зависимость к обычной линейной функции.

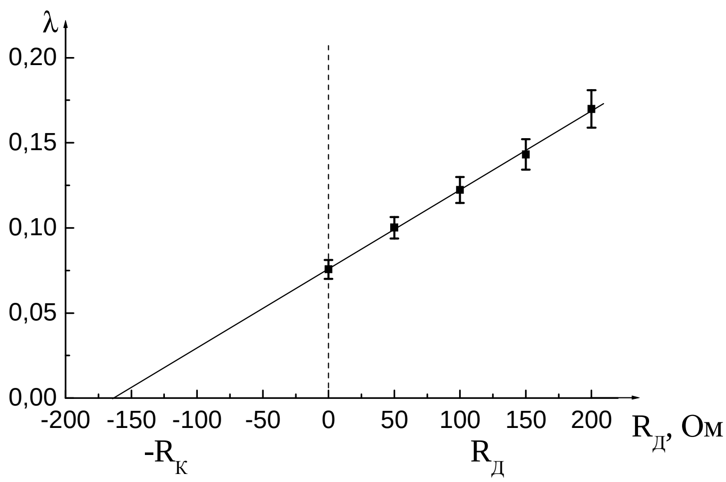

Рис. 2

Полученная экспериментальная зависимость *λ(R)* показана пятью точками с «усами», характеризующими погрешность косвенного измерения логарифмического декремента затухания. Эта зависимость может быть аппроксимирована прямой вида $y = px + q$ или (в обозначениях лабораторной работы) $\lambda = pR_д + q$, где p и q – постоянные, которые можно найти методом наименьших квадратов. Применяя формулы (36) и (37), переписанные в обозначениях лабораторной работы:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{N}\lambda_i \sum_{i=1}^{N} R_{д_i} - N\sum_{i=1}^{N}\lambda_i R_{д_i}}{\Delta_{pq}}; \quad q = \frac{\sum_{i=1}^{N}\lambda_i R_{д_i} \sum_{i=1}^{N} R_{д_i} - \sum_{i=1}^{N}\lambda_i \sum_{i=1}^{N} R_{д_i}^2}{\Delta_{pq}}, \tag{82}$$

где в данном случае

$$\Delta_{pq} = \left(\sum_{i=1}^{N} R_{д_i}\right)^2 - N\sum_{i=1}^{N} R_{д_i}^2, \tag{83}$$

найдем, что p = 0,0004632 Ом$^{-1}$ и q = 0,07592. Здесь и ниже в расчетах использованы результаты обработки измерений, приведенные в табл. 6.

По формулам (41) найдем погрешность постоянных:

$$\Delta p = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N}\left[\left(N\,R_{\text{д}\,j} - \sum_{i=1}^{N} R_{\text{д}\,i}\right)\Delta\lambda_j\right]^2}}{\Delta_{pq}}; \quad \Delta q = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} R_{\text{д}\,i}^2 - R_{\text{д}\,j}\sum_{i=1}^{N} R_{\text{д}\,i}\right)\Delta\lambda_j\right]^2}}{\Delta_{pq}}. \quad (84)$$

Подставив численные значения, получим: Δp = 0,00005278 Ом$^{-1}$; Δq = 0,00491.

Сопротивление контура теперь можно найти, приравняв λ к нулю.

Итак,

$$R_{\text{к}} = -R_{\text{д},\lambda=0} = -\left(-\frac{q}{p}\right) = \frac{q}{p} = \frac{0{,}07592}{0{,}0004632} = 163{,}90 \text{ (Ом)}. \quad (85)$$

Погрешность $R_{\text{к}}$ находится по обычным правилам обработки результатов косвенных измерений:

$$\Delta R_{\text{к}} = \sqrt{\left(\frac{1}{p}\Delta q\right)^2 + \left(\frac{q}{p^2}\Delta p\right)^2} = 21 \text{ (Ом)}. \quad (86)$$

Итак, сопротивление контура

$$R_{\text{к}} = (164 \pm 21) \text{ Ом} \quad (\varepsilon_R = 13\ \%). \quad (87)$$

Несмотря на довольно громоздкий вычислительный процесс удалось аналитически получить значение сопротивления контура и оценить его погрешность. Анализ результата показывает, что значительная часть погрешности связана с инструментальной погрешностью измерения амплитуды колебаний при помощи осциллографа.

Библиографический список

1. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок / Дж. Тейлор; Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 272 с.

2. Исаков В. А. Физика колебаний. Лабораторный практикум: Методические указания к лабораторным работам по физике / В. А. Исаков, В. П. Нестеров / Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2001. 22 с.

3. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений / Ю. В. Линник. Л.: Физматгиз, 1962. 352 с.

Учебное издание

ЛИТНЕВСКИЙ Леонид Аркадьевич,
МИНАБУДИНОВА Сания Анасовна

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ
В ЛАБОРАТОРНОМ ПРАКТИКУМЕ ПО ФИЗИКЕ

Редактор Т. С. Паршикова

* * *

Лицензия ИД № 01094 от 28.02.2000.
Подписано в печать .11 .2004. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Плоская печать.
Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 2,2. Тираж 150 экз.
Заказ .

* *

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35