Т. А. АРОНОВА, И. А. ДРОЗДОВА

ЭЛЕКТРОСТАТИКА.
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ОМСК 2018

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

Т. А. Аронова, И. А. Дроздова

ЭЛЕКТРОСТАТИКА.
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Утверждено методическим советом университета
в качестве учебно-методического пособия
для самостоятельной работы студентов
при решении задач по физике

Омск 2018

УДК 537.2(075.8)
ББК 22.331я73
А84

Электростатика. Примеры решения задач: Учебно-методическое пособие / Т. А. Аронова, И. А. Дроздова; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2018. 26 с.

Учебно-методическое пособие содержит краткие теоретические сведения и примеры решения типовых задач по разделу «Электростатика» курса общей физики. Цель данного пособия – оказать помощь студентам в самостоятельном освоении методики решения типовых задач по разделу «Электростатика».

Предназначено для студентов первого и второго курсов технических вузов при самостоятельной подготовке к коллоквиумам и экзамену по общей физике, раздел «Электричество и магнетизм».

Библиогр.: 5 назв. Рис. 13.

Рецензенты: канд. техн. наук, доцент В. К. Волкова;
канд. техн. наук, доцент А. Ю. Тэттэр.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

При изучении курса физики большое значение имеет решение задач. Задачи позволяют лучше понять и запомнить основные законы физики, развивают навыки в применении теоретических знаний для решения конкретных практических вопросов. Цель настоящего учебно-методического пособия – оказать помощь студентам в освоении методики решения типовых задач по разделу «Электростатика».

Краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач, даны в пособии в начале каждого раздела. Теоретические сведения в полном объеме содержатся в учебниках [1 – 4] и кратко изложены в пособии [5].

Все задачи следует по возможности решать в общем виде. Это означает, что сначала выводится формула для расчета искомой величины, а затем в нее подставляются численные данные. Такой подход позволяет при анализе полученных формул увидеть общие закономерности. Прежде чем приступить к решению, следует внимательно прочитать, обдумать и записать условия задачи, перевести единицы измерения всех величин в основные единицы СИ, сделать схематический рисунок, отражающий условия задачи.

1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА. ЗАКОН КУЛОНА

Электрический заряд q – неотъемлемое свойство элементарных частиц, определяющее их электромагнитное взаимодействие.

Величина заряда является дискретной (кратна элементарному заряду):

$$q = \pm Ne, \tag{1.1}$$

где N – целое число, $N = 0, 1, 2, \dots$;

e – элементарный заряд, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл (например, заряд электрона $q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, заряд протона $q_p = +1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл).

Для системы электрических зарядов справедлив закон сохранения: в электрически замкнутой системе взаимодействующих электрических зарядов алгебраическая сумма зарядов до и после взаимодействия остается неизменной:

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = q_1' + q_2' + \dots + q_n'. \tag{1.2}$$

Электрические заряды взаимодействуют между собой: разноименно заряженные тела притягиваются друг к другу, одноименно заряженные – отталкиваются друг от друга.

Величина силы взаимодействия между двумя точечными неподвижными зарядами вычисляется по закону Кулона:

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{\varepsilon r^2}, \tag{1.3}$$

где k_e – постоянная, $k_e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\ \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$ ($\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная);

$|q_1|, |q_2|$ – модули взаимодействующих точечных неподвижных электрических зарядов;

ε – диэлектрическая проницаемость среды между зарядами – скалярная величина, показывающая, во сколько раз ослабляется электростатическое взаимодействие в данной среде по сравнению с вакуумом (в рассматриваемых задачах для воздуха будем полагать $\varepsilon \approx 1$);

r – расстояние между взаимодействующими точечными зарядами.

Задача 1.1. Металлический шарик, заряд которого −64 пКл, соприкоснулся с незаряженным проводящим шариком того же размера. Сколько электронов перешло с заряженного шарика на незаряженный?

Дано:	СИ:	Решение: Систему из двух шариков можно считать электрически замкнутой, поэтому согласно закону сохранения заряда, с учетом того, что шарики одинаковые, после соприкосновения заряд второго шарика q станет равным 0,5 q.
q =– 64 пКл	$-64\cdot10^{-12}$ Кл	
N – ?		

Количество электронов, перешедших с заряженного шарика на незаряженный, согласно формуле (1.1) $q' = -Ne$. Следовательно,

$$N = \frac{q'}{-e} = \frac{0{,}5q}{-e} = \frac{-0{,}5\cdot 64\cdot 10^{-12}}{-1{,}6\cdot 10^{-19}} = 2\cdot 10^{8}.$$

Ответ: $N = 2\cdot10^8$.

Задача 1.2. Во сколько раз изменится сила кулоновского отталкивания двух одинаковых маленьких шариков с одинаковыми зарядами, если перенести половину заряда с первого шарика на второй и увеличить расстояние между ними в 1,5 раза?

Дано:	Решение: Сначала сила взаимодействия между шариками была такой:
$q_1 = q_2 = q$	
$q_1' = 0{,}5q$	
$r' = 1{,}5r$	
F'/F – ?	

$$F = k_e\frac{|q_1||q_2|}{\varepsilon r^2} = k_e\frac{q^2}{\varepsilon r^2}.$$

После переноса заряда и изменения расстояния сила взаимодействия между шариками

$$F' = k_e\frac{|q_1'||q_2'|}{\varepsilon r'^2} = k_e\frac{0{,}5q\cdot 1{,}5q}{\varepsilon(1{,}5r)^2} = \frac{1}{3}k_e\frac{q^2}{\varepsilon r^2}.$$

Следовательно, $F'/F = 1/3$.

Ответ: сила кулоновского отталкивания уменьшится в три раза.

Задача 1.3. Пылинка, имеющая положительный заряд $+2e$, потеряла три электрона. Каким стал заряд пылинки?

Решение: Так как заряд электрона равен –е, заряд пылинки q после потери трех электронов стал равен $+2e - (-3e) = +5e$.

Ответ: заряд пылинки стал равен $+5e$.

Задача 1.4. В вакууме в вершинах квадрата со стороной 1,0 м расположены точечные заряды q_1 = 1 мкКл, q_2 = 2 мкКл, q_3 = 3 мкКл, q_4 = 4 мкКл. Найти силу, действующую на заряд q_4, в том числе ее модуль.

Дано:	СИ:
q_1 = 1 мкКл	$1\cdot10^{-6}$ Кл
q_2 = 2 мкКл	$2\cdot10^{-6}$ Кл
q_3 = 3 мкКл	$3\cdot10^{-6}$ Кл
q_4 = 4 мкКл	$4\cdot10^{-6}$ Кл
$\varepsilon = 1$	
a = 1,0 м	
$\vec{F}$ – ?	
$\lvert\vec{F}\rvert$ – ?	

Решение:

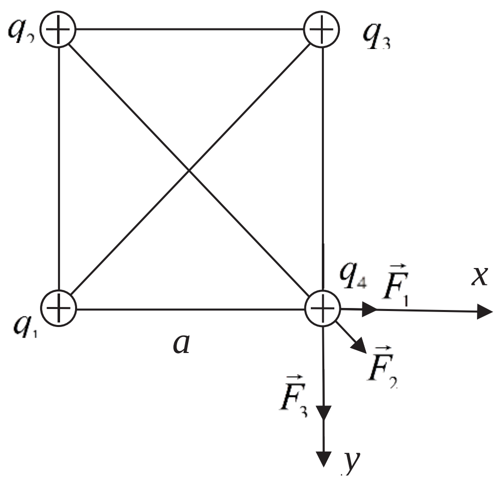

Рис. 1.1

Согласно принципу суперпозиции сила, с которой заряды q_1, q_2, q_3 действуют на заряд q_4,

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3, \tag{1.4}$$

где $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ – силы, с которыми заряды q_1, q_2, q_3 действуют на заряд q_4, соответственно (рис.1.1).

Запишем выражение (1.4) в проекциях на оси OX и OY:

$$F_x = F_1 + F_2\cos45°; \tag{1.5}$$

$$F_y = F_3 + F_2\sin45°. \tag{1.6}$$

Согласно уравнению (1.3)

$$F_1 = k_e\frac{|q_1||q_4|}{\varepsilon a^2}, F_2 = k_e\frac{|q_2||q_4|}{\varepsilon\left(a\sqrt{2}\right)^2}, F_3 = k_e\frac{|q_3||q_4|}{\varepsilon a^2}. \tag{1.7}$$

Подставив формулы (1.7) в (1.5) и (1.6), получим:

$$F_x = k_e\frac{|q_1||q_4|}{\varepsilon a^2} + k_e\frac{|q_2||q_4|}{\varepsilon\left(a\sqrt{2}\right)^2}\cos45 =$$

$$= 9\cdot10^9\frac{|1\cdot10^{-6}||4\cdot10^{-6}|}{1\cdot(1{,}0)^2} + 9\cdot10^9\frac{|2\cdot10^{-6}||4\cdot10^{-6}|}{1\cdot\left(1{,}0\cdot\sqrt{2}\right)^2}\cos45 = 61\cdot10^{-3}\ \text{Н};$$

$$F_y = k_e \frac{|q_3||q_4|}{\varepsilon a^2} + k_e \frac{|q_2||q_4|}{\varepsilon\left(a\sqrt{2}\right)^2} \sin 45 =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \frac{|3{\cdot}10^{-6}||4{\cdot}10^{-6}|}{1 \cdot (1{,}0)^2} + 9 \cdot 10^9 \frac{|2{\cdot}10^{-6}||4{\cdot}10^{-6}|}{1 \cdot \left(1{,}0 \cdot \sqrt{2}\right)^2} \sin 45 = 133 \cdot 10^{-3}\ \text{Н}.$$

Таким образом, $\vec{F} = (61; 133; 0)$ мН.

Модуль силы

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(140 \cdot 10^{-3}\ )^2 + (210 \cdot 10^{-3})^2} = 146 \cdot 10^{-3}\ \text{Н}.$$

Ответ: $\vec{F} = (61; 133; 0)$ мН; $\left|\vec{F}\right| = 146$ мН.

2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Электрический заряд изменяет свойства окружающего пространства – создает электрическое поле. Основной силовой характеристикой электрического поля является напряженность.

Напряженность электрического поля $\vec{E}$ в данной точке – векторная физическая величина, равная отношению силы $\vec{F}_e$, действующей со стороны поля на пробный заряд q, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q}. \tag{2.1}$$

Вектор $\vec{E}$ направлен в сторону силы, действующей со стороны поля на положительный пробный заряд, помещенный в данную точку поля ($\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{F}_e$, $q > 0$) (рис. 2.1).

Величина напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом q на расстоянии r от него, вычисляется по формуле:

$$E = k_e \frac{|q|}{\varepsilon r^2}. \tag{2.2}$$

Если электрический заряд нельзя считать точечным и он непрерывно распределен по линейно протяженному телу (заряженная нить, стержень, цилиндр и т. п.), то используется понятие линейной плотности электрического заряда τ,

$$\tau = \frac{dq}{d\ell}, \tag{2.3}$$

где dq – электрический заряд бесконечно малого участка длиной $d\ell$ линейно протяженного тела.

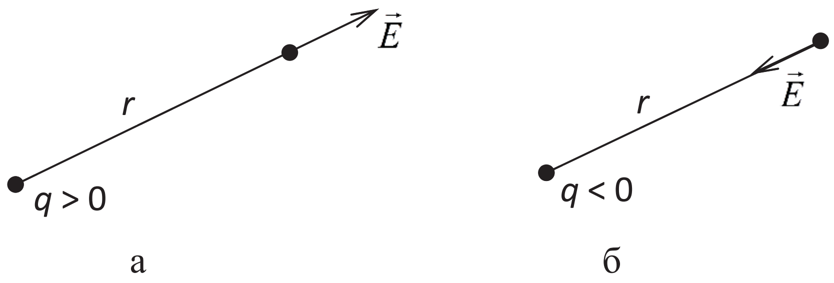

Рис. 2.1. Напряженность электрического поля, созданного точечным зарядом

Величина напряженности электрического поля, созданного бесконечно длинным заряженным телом (нитью, стержнем и т. п.) с τ = const (рис. 2.2) на расстоянии r (кратчайшем) от нити (от оси стержня), вычисляется по формуле:

$$E = k_e \frac{2|\tau|}{\varepsilon r}. \tag{2.4}$$

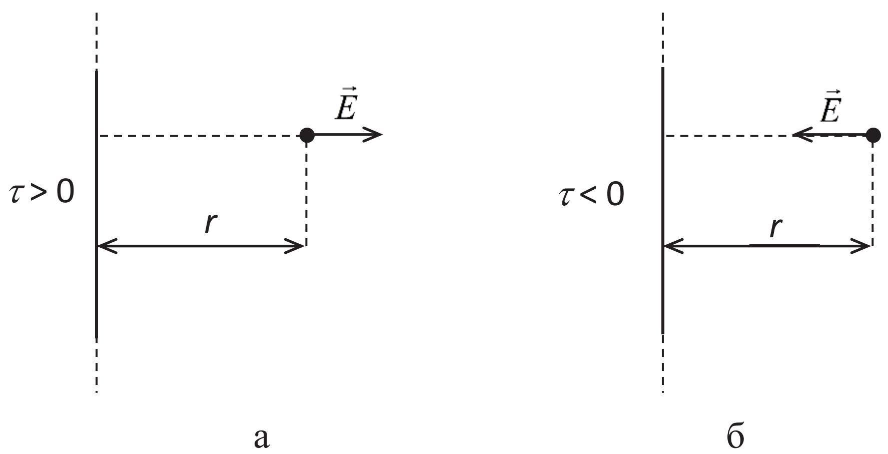

Рис. 2.2. Напряженность электрического поля, созданного бесконечно длинным линейно протяженным заряженным телом

При непрерывном распределении электрического заряда по некоторой поверхности используется понятие поверхностной плотности электрического заряда σ:

$$\sigma = \frac{dq}{ds}, \tag{2.5}$$

где dq – электрический заряд на бесконечно малом участке поверхности площадью ds.

Величина напряженности электрического поля, созданного бесконечно большой заряженной плоскостью с σ = const, рассчитывается по формуле:

$$E = 2\pi k_e \frac{|\sigma|}{\varepsilon} = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (2.6)$$

Если электрическое поле создается не одним, а несколькими электрическими зарядами, то справедлив принцип суперпозиции: напряженность результирующего поля равна векторной сумме напряженностей полей отдельных источников:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n. \qquad (2.7)$$

Задача 2.1. С каким ускорением движется протон в однородном электростатическом поле с напряженностью 10^3 В/м?

Дано:	Решение:
$E = 10^3$ В/м $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг	Согласно уравнению (2.1) сила, действующая на протон в электрическом поле, $\vec{F} = q\vec{E}$. Ускорение, приобретаемое протоном, согласно второму закону Ньютона,
$\vec{a}$ – ?	$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m}$.

Так как $q > 0$, ускорение направлено по направлению вектора напряженности. Модуль ускорения

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} = 9{,}6 \cdot 10^{10} \text{ м/с}^2.$$

Ответ: ускорение протона направлено по направлению вектора напряженности и равно по модулю $9{,}6 \cdot 10^{10}$ м/с^2.

Задача 2.2. Как изменится модуль напряженности электрического поля точечного заряда в точке, если увеличить расстояние от заряда до точки в два раза и уменьшить значение модуля заряда в два раза?

Дано:	Решение:
$r' = 2r$ $q' = 0{,}5q$	Модуль напряженности электрического поля точечного заряда q на расстоянии r от него
E'/E – ?	$E = k_e \frac{\lvert q \rvert}{\varepsilon r^2}$.

Модуль напряженности электрического поля точечного заряда q' на расстоянии r' от него

$$E' = k_e \frac{|q'|}{\varepsilon r'^2} = k_e \frac{|0{,}5q|}{\varepsilon (2r)^2} = \frac{1}{8} k_e \frac{|q|}{\varepsilon r^2}.$$

Следовательно, E'/E=1/8.

Ответ: модуль напряженности электрического поля уменьшится в восемь раз.

Задача 2.3. В вакууме в двух противоположных вершинах квадрата со стороной 1,0 м расположены точечные заряды 3,0 мкКл и –4,0 мкКл. Найти напряженность электростатического поля в третьей вершине.

Дано:	СИ:	Решение:
q_1 = 3,0 мкКл	$3 \cdot 10^{-6}$ Кл	
q_2 = –4,0 мкКл	$-4 \cdot 10^{-6}$ Кл	
a = 1,0 м		
ε = 1		
$\vec{E}$ – ?		
$\lvert\vec{E}\rvert$ – ?		

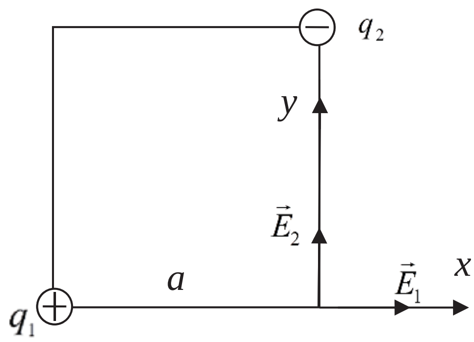

Рис. 2.3

Согласно принципу суперпозиции полей (2.7) напряженность поля в третьей вершине

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \tag{2.8}$$

где $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ – напряженности полей, создаваемых в данной точке зарядами q_1 и q_2 соответственно (рис. 2.3, см. также рис. 2.1, а, б).

Запишем формулу (2.8) в проекциях на оси OX и OY и вычислим их:

$$E_x = E_1 = k_e \frac{|q_1|}{\varepsilon a^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot (1{,}0)^2} = 27 \cdot 10^3 \,\frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E_y = E_2 = k_e \frac{|q_2|}{\varepsilon a^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot (1{,}0)^2} = 36 \cdot 10^3 \,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Таким образом, $\vec{E} = (27; 36; 0)$ кВ/м.

Модуль напряженности результирующего поля в данной точке

$$\left|\vec{E}\right| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(27 \cdot 10^3)^2 + (36 \cdot 10^3)^2} = 45 \cdot 10^3\,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Ответ: $\vec{E} = (27; 36; 0)$ кВ/м; $\left|\vec{E}\right|$ = 45 кВ/м.

Задача 2.4. Напряженность электрического поля бесконечной равномерно заряженной нити в вакууме в точке А, находящейся на расстоянии 90 см от нее, направлена перпендикулярно нити по направлению к нити и равна по модулю 900 В/м. Найти линейную плотность заряда на нити. Как изменится модуль напряженности, если линейную плотность заряда увеличить в два раза, а расстояние от нити до точки А уменьшить в два раза?

Дано:
r = 90 см
E=900 В/м
r = 90 см
$\tau_1 = 2\tau$
$r_1 = 0{,}5r$
ε = 1

τ – ?
E_1/E – ?

СИ:
0,9 м

Решение: Так как напряженность направлена к нити, нить заряжена отрицательно (рис. 2.2, б), следовательно, τ < 0. Из формулы (2.4) модуль линейной плотности заряда

$$|\tau| = \frac{Er\varepsilon}{2k_e} = \frac{900 \cdot 0{,}9 \cdot 1}{2 \cdot 9 \cdot 10^9} = 45 \cdot 10^{-9}\ \text{Кл/м}.$$

Найдем, как изменится модуль напряженности в результате изменения линейной плотности заряда и расстояния от нити. Для этого найдем отношение

$$\frac{E_1}{E} = \frac{2k_e|\tau_1|}{\varepsilon r_1} \cdot \frac{\varepsilon r}{2k_e|\tau|} = \frac{2|\tau| \cdot r}{0.5r \cdot |\tau|} = 4.$$

Ответ: линейная плотность заряда на нити равна –45 нКл/м; если линейную плотность заряда увеличить в два раза, а расстояние от нити до точки А уменьшить в два раза, модуль напряженности увеличится в четыре раза.

Задача 2.5. Две пылинки с зарядами q_1 и q_2 находятся в вакууме на расстоянии 100 см друг от друга. Найти напряженность электрического поля в точке А, лежащей справа от второй пылинки на расстоянии 20 см от нее. Рассмотреть случаи: а) q_1 = –40 нКл и q_2 = –20 нКл; б) q_1 = 40 нКл и q_2 = –20 нКл; в) q_1 = 40 нКл и q_2 = 20 нКл.

Дано:	СИ:
a = 100 см	1,00 м
а) q_1 = –40 нКл	$-40 \cdot 10^{-9}$ Кл
q_2 = –20 нКл	$-20 \cdot 10^{-9}$ Кл
б) q_1 = 40 нКл	$40 \cdot 10^{-9}$ Кл
q_2 = –20 нКл	$-20 \cdot 10^{-9}$ Кл
в) q_1 = 40 нКл	$40 \cdot 10^{-9}$ Кл
q_2 = 20 нКл	$-20 \cdot 10^{-9}$ Кл
ε = 1	
$\vec{E}_A$– ?	

Решение: а) Согласно принципу суперпозиции полей (2.7) напряженность электрического поля в точке *A*

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \,, \qquad (2.9)$$

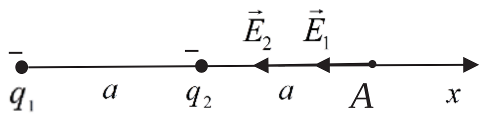

Рис. 2.4

где $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ – напряженности полей, создаваемых в данной точке зарядами q_1 и q_2 соответственно (рис. 2.4, см. также рис. 2.1,б). Их модули в соответствии с формулой (2.2) вычисляются так:

$$E_1 = k_e \frac{|q_1|}{\varepsilon (2a)^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot |-40 \cdot 10^{-9}|}{1 \cdot (2 \cdot 1{,}00)^2} = 90 \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E_2 = k_e \frac{|q_2|}{\varepsilon (a)^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot |-20 \cdot 10^{-9}|}{1 \cdot (1{,}00)^2} = 180 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Запишем принцип суперпозиции (2.9) в проекции на ось OX (см. рис. 2.4) и вычислим проекцию вектора напряженности электрического поля в точке *A* на ось OX:

$$E_{Ax} = -E_1 - E_2 = -90 - 180 = -270 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Поскольку $E_{Ay} = 0, E_{Az} = 0$, вектор напряженности электрического поля в точке *A* $\vec{E}_A = (-270; 0; 0)$ В/м.

б) Запишем принцип суперпозиции (2.9) в проекции на ось OX (рис. 2.5) и вычислим проекцию вектора напряженности электрического поля в точке *A* на ось OX:

$$E_{Ax} = E_1 - E_2 = 90 - 180 = -90 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

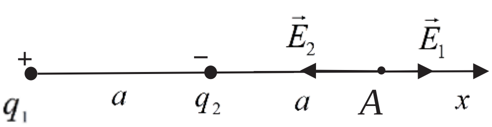

Рис. 2.5

Поскольку $E_{Ay} = 0, E_{Az} = 0,$ вектор напряженности электрического поля в точке A $\vec{E}_A = (-90; 0; 0)$ В/м.

в) Запишем принцип суперпозиции (2.9) в проекции на ось OX (рис. 2.6) и вычислим проекцию вектора напряженности электрического поля в точке A на ось OX:

$$E_{Ax} = E_1 + E_2 = 90 + 180 = 270\,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

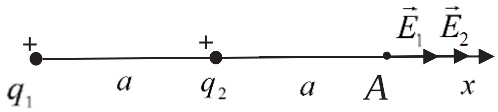

Рис. 2.6

Поскольку $E_{Ay} = 0, E_{Az} = 0,$ вектор напряженности электрического поля в точке A $\vec{E}_A = (270; 0; 0)$ В/м.

Ответ: а) $\vec{E}_A = (-270; 0; 0)$ В/м; б) $\vec{E}_A = (-90; 0; 0)$ В/м; в) $\vec{E}_A =$ $= (270; 0; 0)$ В/м.

Задача 2.6. Бесконечно длинная нить, заряженная с линейной плотностью –6 нКл/м, расположена вертикально в вакууме на расстоянии 20 см от центра сферы радиусом 1 см, заряженной с поверхностной плотностью 0,5 мкКл/м^2. Под сферой перпендикулярно нити расположена бесконечная плоскость, заряженная с поверхностной плотностью 18 пКл/м^2. Найти напряженность создаваемого ими электрического поля в точке А, расположенной на расстоянии 25 см от нити и 10 см от центра сферы, в том числе ее модуль. Центр сферы, нить и точка А лежат в одной плоскости (рис. 2.7).

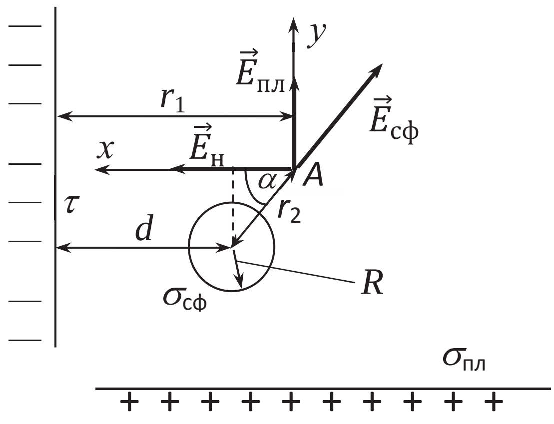

Рис. 2.7

Дано:	СИ:
d = 20 см	0,2 м
τ = –6 нКл/м	$-6\cdot10^{-9}$ Кл/м
R = 1,0 см	$1,0\cdot10^{-2}$ м
$\sigma_{сф}$ = 0,5 мкКл/м^2	$0,5\cdot10^{-6}$ Кл/м^2
$\sigma_{пл}$ = 18 пКл/м^2	$18\cdot10^{-12}$ Кл/м^2
r_1 = 25 см	0,25 м
r_2 = 10 см	0,10 м
ε = 1	
$\vec{E}_A$– ?	
$\lvert\vec{E}_A\rvert$– ?	

Решение: Укажем направление векторов напряженностей электрических полей, создаваемых каждым заряженным телом, в точке A. Согласно принципу суперпозиции напряженность результирующего поля

$$\vec{E}_{\text{А}} = \vec{E}_{\text{сф}} + \vec{E}_{\text{н}} + \vec{E}_{\text{пл}}, \qquad (2.10)$$

где $\vec{E}_{\text{сф}}$ – напряженность поля заряженной сферы в точке A; $\vec{E}_{\text{н}}$ – напряженность поля заряженной нити в точке A; $\vec{E}_{\text{пл}}$– напряженность поля заряженной плоскости A.

Запишем уравнение (2.10) в проекциях на оси координат OX и OY (см. рис. 2.7):

$$E_{Ax} = -E_{\text{сф}}\cos\alpha + E_{\text{н}}; \qquad (2.11)$$

$$E_{Ay} = E_{\text{сф}}\sin\alpha + E_{\text{пл}}. \qquad (2.12)$$

Модули напряженности поля $E_{н}$, $E_{пл}$ и $E_{сф}$ равны соответственно:

$$E_{\text{н}} = 2k_e\frac{|\tau|}{\varepsilon r_1}; \qquad (2.13)$$

$$E_{\text{пл}} = \frac{|\sigma_{\text{пл}}|}{2\varepsilon_0\varepsilon} \text{ (по формуле (2.6))};$$

$$E_{\text{сф}} = k_e\frac{|q_{\text{сф}}|}{\varepsilon r_2^2}. \qquad (2.14)$$

Заряд сферы можно найти через поверхностную плотность заряда на сфере $\sigma_{сф}$ и площадь поверхности сферы S:

$$q = \sigma_{\text{сф}}S = \sigma_{\text{сф}}4\pi R^2. \qquad (2.15)$$

Подставим выражение (2.15) для заряда в формулу (2.14):

$$E_{\text{сф}} = k_e\frac{|\sigma_{\text{сф}}|4\pi R^2}{\varepsilon r_2^2}. \qquad (2.16)$$

Как видно из рис. 2.7,

$$\cos\alpha = \frac{r_1 - d}{r_2};$$

$$\cos\alpha = \frac{0,25 - 0,2}{0,1} = 0,5;$$

$$\alpha = 60°. \qquad (2.17)$$

Подставив формулы (2.13), (2.6), (2.14) в уравнения (2.11) и (2.12), получим:

$$E_{Ax} = -k_e \frac{|\sigma_{\text{сф}}| 4\pi R^2}{\varepsilon r_2^2} \cos\alpha + 2k_e \frac{|\tau|}{\varepsilon r_1}; \tag{2.18}$$

$$E_{Ay} = k_e \frac{|\sigma_{\text{сф}}| 4\pi R^2}{\varepsilon r_2^2} \sin\alpha + \frac{|\sigma_{\text{пл}}|}{2\varepsilon_0 \varepsilon}. \tag{2.19}$$

Подставив данные задачи в формулы (2.18) и (2.19), и с учетом условия (2.17) рассчитаем численные значения проекций:

$$E_{Ax} = -9{\cdot}10^9 \ \frac{|0{,}5{\cdot}10^{-6}\ | \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}0{\cdot}10^{-2})^2}{1 \cdot (0{,}10)^2} \cos60^\circ + 2{\cdot}9{\cdot}10^9 \frac{|-6{\cdot}10^{-9}|}{1 \cdot 0{,}25} = 150\,\frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E_{Ay} = 9{\cdot}10^9 \ \frac{|0{,}5{\cdot}10^{-6}\ | \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}0{\cdot}10^{-2})^2}{1 \cdot (0{,}10)^2} \sin60^\circ + \frac{|18{\cdot}10^{-12}|}{2 \cdot 8{,}85{\cdot}10^{-12} \cdot 1} = 490\,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Таким образом, $\vec{E}_A = (150; 490; 0)$ В/м.

Модуль напряженности поля в точке *A*

$$\left|\vec{E}_A\right| = \sqrt{E_{Ax}^2 + E_{Ay}^2} = \sqrt{150^2 + 490^2} = 510\,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Ответ: $\vec{E}_A = (150; 490; 0)$ В/м; $\left|\vec{E}_A\right| = 510\,\frac{\text{В}}{\text{м}}$.

3. ПОТЕНЦИАЛ. РАБОТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Энергетической характеристикой электрического поля является потенциал. Потенциал электрического поля φ в данной точке – физическая величина, равная отношению потенциальной энергии W_p, которой обладает пробный заряд q, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда:

$$\varphi = \frac{W_p}{q}. \tag{3.1}$$

Потенциал электрического поля, созданного точечным зарядом q на расстоянии r от него, вычисляется по формуле:

$$\varphi = k_e \frac{q}{\varepsilon r}. \tag{3.2}$$

Потенциал – алгебраическая величина, которая может быть положительной и отрицательной в зависимости от знака заряда, создающего поле ($\varphi > 0$ для $q > 0$; $\varphi < 0$ для $q < 0$). Если электрическое поле создается не одним, а несколькими электрическими зарядами, то справедлив принцип суперпозиции: потенциал результирующего поля равен сумме потенциалов полей отдельных источников:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_N. \quad (3.3)$$

Потенциал электростатического поля заряженной сферы радиусом R вне сферы

$$\varphi = k_e \frac{q}{\varepsilon r} \quad (r > R), \quad (3.4)$$

внутри и на поверхности сферы –

$$\varphi = k_e \frac{q}{\varepsilon R} \quad (r \leq R). \quad (3.5)$$

Разность потенциалов для двух точек электрического поля – скалярная физическая величина, равная отношению работы A_e, совершаемой электрическим полем по перемещению пробного электрического заряда q между этими точками, к величине этого заряда:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{W_{p_1} - W_{p_2}}{q} = \frac{A_e}{q} \quad (3.6)$$

(при действии на заряд только электрических сил разность потенциалов часто называют напряжением: $U = \varphi_1 - \varphi_2$).

Между двумя основными характеристиками электрического поля существует связь:

$$\vec{E} = -grad\varphi; \quad (3.7)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (3.8)$$

Для однородного электростатического поля связь между напряженностью и разностью потенциалов выражается формулой:

$$U = Ed, \quad (3.9)$$

где d – расстояние между точками, измеренное вдоль силовой линии.

Задача 3.1. В двух противоположных вершинах квадрата со стороной 1,0 м расположены точечные заряды 4,0 мкКл и –6,0 мкКл. Найти потенциал электростатического поля в третьей вершине.

Дано:	СИ:	Решение:
q_1 = 4,0 мкКл	$2 \cdot 10^{-6}$ Кл	
q_2 = – 6,0 мкКл		
a = 1,0 м		
φ_A – ?		

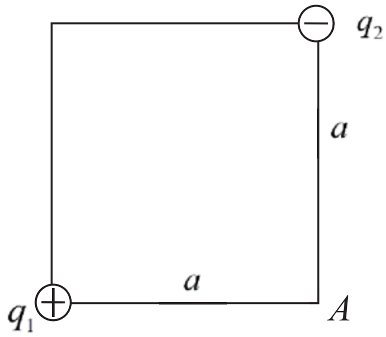

Рис. 3.1

Согласно принципу суперпозиции полей (3.3) потенциал поля в точке A

$$\varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2,$$

где $\varphi_1 = k_e \frac{q_1}{a}$ и $\varphi_2 = k_e \frac{q_2}{a}$ – потенциалы полей, создаваемых в данной точке зарядами q_1 и q_2 соответственно (рис.3.1).

$$\varphi_A = k_e \frac{q_1}{a} + k_e \frac{q_2}{a};$$

$$\varphi_A = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (4 - 6) \cdot 10^{-6}}{1{,}0^2} = -180 \cdot 10^3 \text{ В}.$$

Ответ: φ_A = –180 кВ.

Задача 3.2. Длинная нить заряжена с линейной плотностью 2 нКл/м. Определить разность потенциалов между точками A и B, расположенными на расстоянии 10 см друг от друга. Точки A и B находятся на расстояниях 3 и 6 см от нити соответственно и лежат в одной плоскости с нитью (рис. 3.2).

Дано:	СИ:	Решение:
ℓ = 10 см	0,1 м	
τ = 2 нКл/м	$2 \cdot 10^{-9}$ Кл/м	
r_1 = 3 см	0,03 м	
r_2 = 6 см	0,06 м	
$\Delta\varphi$ – ?		

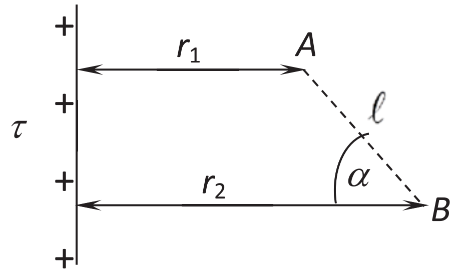

Рис. 3.2

Поле неподвижной заряженной нити является потенциальным, и криволинейный интеграл (3.8) не зависит от пути интегрирования и определяется только начальной и конечной точками. Подставив уравнение (2.4) в (3.8), получим:

$$\varphi_A - \varphi_B = \int_1^2 \vec{E}\, d\vec{r} = \int E_l \cos\alpha dl = \int_{r_1}^{r_2} 2\, k_e \frac{|\tau|}{r} dr = 2k_e|\tau|\ln\left({}^{r_2}/_{r_1}\right);$$

$$\varphi_A - \varphi_B = 2\cdot 9\cdot 10^9\cdot 2\cdot 10^{-9}\cdot \ln(0{,}06/0{,}03) = 25 \text{ В}.$$

Ответ: $\Delta\varphi$ =25 В.

Задача 3.3. Какую работу совершает электростатическое поле, перемещая протон из точки с потенциалом 200 В в точку с потенциалом 100 В?

Дано:	Решение:
q =1,6 ·10^{-19} Кл φ_1 =200 В φ_2 =100 В	Из формулы (3.6) работа по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2 $A_e = q(\varphi_1 - \varphi_2) = 1{,}6\cdot 10^{-19}(200 - 100) = 1{,}6\cdot 10^{-17}$ Дж.
A_e – ?	

Ответ: $A_e = 1{,}6\cdot 10^{-17}$ Дж.

Задача 3.4. Равномерно заряженная сфера с поверхностной плотностью заряда –2,0 пКл/м^2 расположена в вакууме. Найти заряд сферы и потенциал электростатического поля, создаваемого сферой в ее центре и в точке, находящейся на расстоянии 8,0 см от поверхности сферы. Радиус сферы 2,0 см.

Дано:	СИ:
σ = –2,0 пКл/м^2	–2,0·10^{-12} Кл/м^2
ε = 1	
h = 8,0 см	0,08 м
R = 2,0 см	0,02 м
q – ? φ_O – ? φ_A – ?	

Решение: Из формулы (2.5) с учетом того, что сфера равномерно заряжена, ее заряд

$$q = \sigma\cdot S_{\text{сф}} = \sigma\cdot 4\pi R^2 =$$
$$= -2\cdot 10^{-12}\cdot 4\cdot 3{,}14\cdot (0{,}02)^2 =$$
$$= -1{,}0\cdot 10^{-14} \text{ Кл}.$$

Потенциал в центре сферы в соответствии с формулой (3.5)

$$\varphi_O = k_e \frac{q}{\varepsilon R} = \frac{9\cdot 10^9\cdot(-1{,}0\cdot 10^{-14})}{1\cdot 0{,}02} = -4{,}5\cdot 10^{-3} \text{ В}.$$

Потенциал электростатического поля в точке, находящейся на расстоянии h от поверхности сферы (на расстоянии $r = h + R$ от центра сферы), в соответствии с формулой (3.4)

$$\varphi_{\text{А}} = k_e \frac{q}{\varepsilon(h+R)} = \frac{9\cdot 10^9\cdot(-1{,}0\cdot 10^{-14})}{1\cdot(0{,}08+0{,}02)} = -9{,}0\cdot 10^{-4} \text{ В}.$$

Ответ: $q = -1{,}0\cdot 10^{-14}$ Кл; $\varphi_O = -4{,}5\cdot 10^{-3}$ В; $\varphi_A = -9{,}0\cdot 10^{-4}$ В.

4. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. КОНДЕНСАТОРЫ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Электроемкость – физическая величина, характеризующая способность тела накапливать электрический заряд. Электроемкость не зависит от заряда и потенциала, определяется размерами, формой проводника и диэлектрическими свойствами среды. Электроемкость уединенного проводника

$$C = \frac{q}{\varphi}. \tag{4.1}$$

Энергия электростатического поля заряженного проводника

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2}. \tag{4.2}$$

Наибольшую электроемкость имеют конденсаторы, состоящие из двух проводников (обкладок), разделенных слоем диэлектрика.

Электроемкость конденсатора C – скалярная физическая величина, равная отношению заряда q на одном из проводников к разности потенциалов (напряжению) U между проводниками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}. \tag{4.3}$$

Для плоского конденсатора электроемкость вычисляется по формуле:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \tag{4.4}$$

где S – площадь одной из пластин конденсатора;

d – расстояние между пластинами.

Если конденсатор зарядить от источника напряжения и, отключив его от источника, изменить расстояние d или величину ε, то будут меняться электроемкость C и напряжение U, а заряд q будет постоянным (q = const). Если, зарядив конденсатор, не отключать его от источника, то при изменении ε или d будут меняться C и q, а напряжение будет постоянным (U = const).

При последовательном соединении конденсаторов (рис. 4.1) их общая электроемкость вычисляется по формуле:

$$\frac{1}{C_{\text{об}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}, \tag{4.5}$$

при параллельном (рис. 4.2) –

$$C_{\text{об}} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n. \tag{4.6}$$

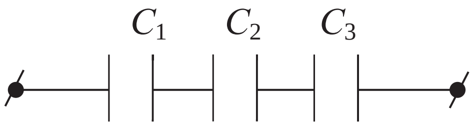

Рис. 4.1. Последовательное соединение конденсаторов

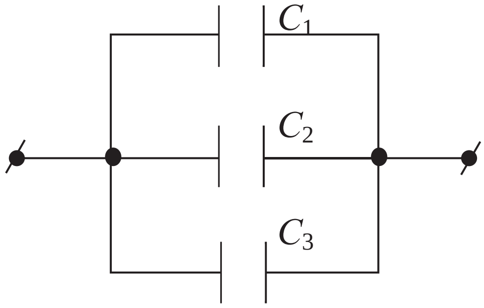

Рис. 4.2. Параллельное соединение конденсаторов

Между пластинами заряженного конденсатора создается электрическое поле, которое является носителем электрической энергии. Величину электрической энергии поля можно найти через характеристики конденсатора или характеристики электрического поля:

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}, \tag{4.7}$$

где V – объем пространства между обкладками конденсатора.

Задача 4.1. Металлический шарик радиусом 2 см с зарядом 8 пКл соединяют длинной тонкой проволокой с незаряженным металлическим шариком радиусом 6 см. Найти заряды шариков и энергию электростатического поля первого шарика после соединения. Электроемкостью проволоки пренебречь.

Дано:	СИ:
q_1 = 8 пКл	$8 \cdot 10^{-12}$ Кл
q_2 = 0	
R_1 = 2 см	0,02 м
R_2 = 6 см	0,06 м
$q_1{'}$ – ?	
$q_2{'}$ – ?	
$W_1{'}$ – ?	

Решение: Систему из двух шариков можно считать электрически замкнутой, поэтому согласно закону сохранения заряда

$$q_1 + q_2 = q_1{'} + q_2{'}. \tag{4.8}$$

Заряд будет переходить с одного шарика на другой до тех пор, пока потенциалы шариков не станут равными: $\varphi_1{'} = \varphi_2{'}$. С учетом выражения (3.5)

$$k_e \frac{q_1{'}}{\varepsilon R_1} = k_e \frac{q_2{'}}{\varepsilon R_2}. \tag{4.9}$$

Решая совместно уравнения (4.8) и (4.9), получим:

$$q_2{'} = q_1{'} R_2 / R_1;$$

$$q_1{'} = q_1/(1 + R_2/R_1) = 8 \cdot 10^{-12}/(1 + 0{,}06/0{,}02) = 2 \cdot 10^{-12} \text{ Кл};$$

$$q_2{'} = 2 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}06/0{,}02 = 6 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}.$$

Энергия электростатического поля первого шарика после соединения согласно формуле (4.2) с учетом (3.5)

$$W_1{}' = \frac{q_1{}'\varphi_1{}'}{2} = k_e \frac{(q_1{}')^2}{2R_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(2 \cdot 10^{-12})^2}{2 \cdot 0{,}02} = 0{,}9 \cdot 10^{-12} \text{ Дж.}$$

Ответ: $q_1{}'$ = 4пКл; $q_2{}'$ = 6 пКл; $W_1{}' = 0{,}9$ пДж.

Задача 4.2. Вычислить электроемкость батареи конденсаторов (рис. 4.3). Электроемкость каждого конденсатора равна 2 пФ.

Дано:	СИ:	Решение:
C = 2,0 пФ	$2{,}0 \cdot 10^{-12}$ Ф	
$C_{бат}$ – ?		

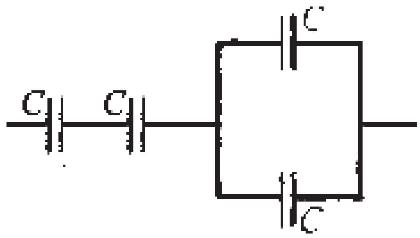

Рис. 4.3

С учетом формул (4.5) и (4.6)

$$C_{бат} = 1/(1/C + 1/C + 1/(C + C)) = 2{,}5C = 2{,}5 \cdot 2 \cdot 10^{-12} = 5 \cdot 10^{-12} \text{ Ф.}$$

Ответ: Электроемкость батареи конденсаторов $C_{бат}$ = 5 пФ.

Задача 4.3. Три конденсатора одинаковой емкости соединяют сначала последовательно, затем параллельно. В каком случае их общая емкость больше и во сколько раз?

Решение: При последовательном соединении трех конденсаторов (см. рис. 4.1), емкость каждого из которых равна С, в соответствии с формулой (4.5)

$$\frac{1}{C_{посл}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{3}{C},$$

где $C_{посл} = \frac{C}{3}$.

При параллельном соединении трех конденсаторов (см. рис. 4.2), емкость каждого из которых равна С, в соответствии с уравнением (4.6)

$$C_{пар} = C + C + C = 3C.$$

Следовательно,

$$\frac{C_{пар}}{C_{посл}} = \frac{3C}{C/3} = 9.$$

Ответ: общая емкость батареи из трех параллельно соединенных конденсаторов больше общей емкости батареи из трех последовательно соединенных конденсаторов в девять раз.

Задача 4.4. Плоский воздушный конденсатор а) зарядили и отключили от источника напряжения; б) оставили подключенным к источнику напряжения. Затем пространство между пластинами конденсатора заполнили диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 6$. Найти электроемкость конденсатора до и после заполнения диэлектриком. Площадь пластин конденсатора 20 мм^3, расстояние между ними 1,6 мм. Во сколько раз изменилась энергия электрического поля конденсатора?

Дано:	СИ:
$\varepsilon_1 = 1$	
$\varepsilon_2 = 6$	
S = 20 мм^3	$20 \cdot 10^{-4}$ м^2
d = 1,6 мм	$1{,}6 \cdot 10^{-3}$ м
C_1 – ?	
C_2 – ?	
$\dfrac{W_2}{W_1}$ –?	

Решение: Поскольку электроемкость конденсатора не зависит от заряда и напряжения, согласно формуле (4.4) электроемкость конденсатора до заполнения диэлектриком

$$\mathrm{C}_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d}; \tag{4.10}$$

$$\mathrm{C}_1 = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 20 \cdot 10^{-4}}{1{,}6 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= 1{,}1 \cdot 10^{-11} \Phi;$$

после заполнения диэлектриком

$$\mathrm{C}_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d}; \tag{4.11}$$

$$\mathrm{C}_2 = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 20 \cdot 10^{-4}}{1{,}6 \cdot 10^{-3}} = 6{,}6 \cdot 10^{-11} \Phi.$$

Рассмотрим случай а). Так как перед заполнением диэлектриком конденсатор был отключен от источника напряжения, то в результате заполнения заряд конденсатора q не изменился, поэтому воспользуемся формулой, выражающей энергию электрического поля конденсатора через заряд (4.7):

$$W = \frac{q^2}{2C}. \tag{4.12}$$

Подставив уравнение (4.10) в (4.12), получим энергию электрического поля воздушного конденсатора

$$W_1 = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}. \tag{4.13}$$

Подставив уравнение (4.11) в (4.12), получим энергию электрического поля конденсатора, заполненного диэлектриком,

$$W_2 = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}. \quad (4.14)$$

Поделив выражение (4.14) на (4.13), получим: $\frac{W_2}{W_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{1}{6}$.

Рассмотрим случай б). Так как перед заполнением диэлектриком конденсатор остался подключенным к источнику напряжения, то в результате заполнения напряжение на конденсаторе U не изменилось, поэтому воспользуемся формулой, выражающей энергию электрического поля конденсатора через напряжение (4.7):

$$W = \frac{CU^2}{2}. \quad (4.15)$$

Подставив уравнение (4.10) в (4.15), получим энергию электрического поля воздушного конденсатора

$$W_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S U^2}{2}. \quad (4.16)$$

Подставив уравнение (4.11) в (4.15), получим энергию электрического поля конденсатора, заполненного диэлектриком,

$$W_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S U^2}{2}. \quad (4.17)$$

Поделив соотношение (4.17) на (4.16), получим: $\frac{W_2}{W_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 6$.

Ответ: $C_1 = 1{,}1 \cdot 10^{-11}$Ф; $C_2 = 6{,}6 \cdot 10^{-11}$Ф; а) $\frac{W_2}{W_1} = \frac{1}{6}$; б) $\frac{W_2}{W_1} = 6$.

Библиографический список

1. Т р о ф и м о в а Т. И. Курс физики / Т. И. Т р о ф и м о в а. М., 2006. 560 с.

2. Д е т л а ф А. А. Курс физики / А. А. Д е т л а ф, Б. М. Я в о р с к и й. М., 2003. 607 с.

3. С а в е л ь е в И. В. Курс общей физики. Механика. Молекулярная физика / И. В. С а в е л ь е в. М., 2007. Т. 1. 432 с.

4. Физический энциклопедический словарь / Под ред. А. М. П р о х о р о в а. М., 1984. 940 с.

5. К р о х и н С. Н. Краткий курс физики / С. Н. К р о х и н, Л. А. Л и т н е в с к и й / Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2012. Ч. 2. 43 с.

Учебное издание

АРОНОВА Тамара Алексеевна, ДРОЗДОВА Илга Анатольевна

ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учебно-методическое пособие

Редактор Н. А. Майорова

***

Подписано в печать 22.05.2018. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 1,6. Уч.-изд. л. 1,7.
Тираж 400 экз. Заказ .

**

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35