Л Е К Ц И Я № 11

Раздел 4. Колебания и волны

Колебания – это процесс, в котором какая-либо физическая величина повторяется с течением времени.

Если повторяемость осуществляется через равные промежутки времени, то колебания называются периодическими.

Минимальный промежуток времени, в течение которого совершается одно полное колебание, называется ***периодом***.

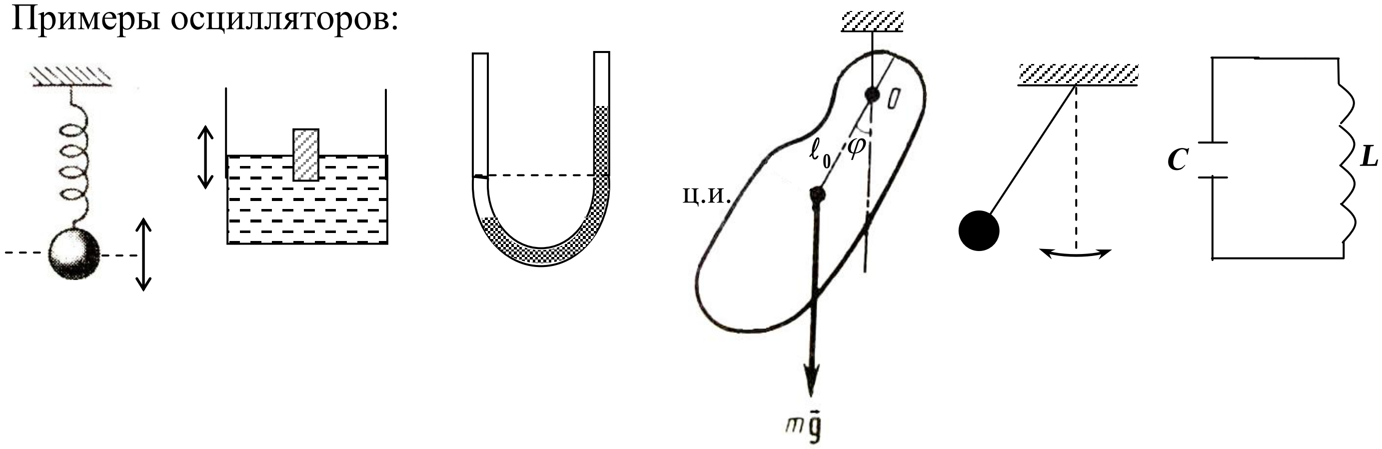
$$T = \frac{t}{N} = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad (11\text{-}1)$$

где ν – линейная частота колебаний – количество колебаний за единицу времени, Гц;

ω – циклическая (круговая) частота колебаний – количество колебаний за 2π сек, $с^{-1}$.

Система, совершающая периодические колебания у положения равновесия, называется ***осциллятором***.

Примеры осцилляторов:

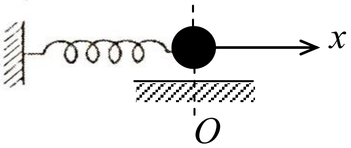


Гл. 1. Колебания

1. Свободные (незатухающие) колебания осциллятора

Колебания осциллятора, происходящие в бездиссипативной среде ($F_{тр} = 0$, $R = 0$), называются ***свободными (незатухающими) колебаниями***.

– пружинный маятник



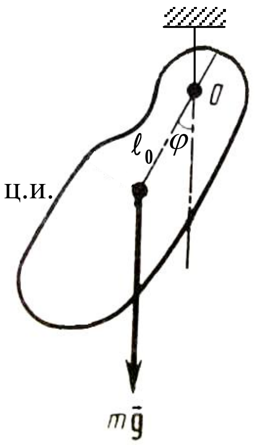
$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{упр},$$

$$F_{упр\,x} = -kx$$

$$Ox: m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (11\text{-}2)$$

– физический маятник

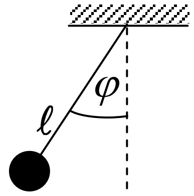


$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{mg} + \vec{M}_N$$

$$I\ddot{\varphi} = -mg\ell_0 \cdot \sin\varphi \qquad \sin\varphi \approx \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{mg\ell_0}{I}\varphi = 0 \tag{11-3}$$

– математический маятник



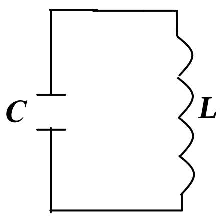
$$I = m\ell^2$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0 \tag{11-4}$$

– электрический колебательный контур

Заряженный конденсатор создает электрическое поле, которое обладает энергией. После подключения конденсатора к катушке начинается разряд конденсатора, в цепи появляется электрический ток, в катушке возникает магнитное поле. Т. к. сила тока в цепи будет изменяться, то изменяющееся магнитное поле согласно явлению самоиндукции приведет к возникновению электрических колебаний.

В таком осцилляторе (электрический колебательный контур) возникнут колебания заряда и напряжения на конденсаторе, силы тока в цепи, энергии электрического и магнитного полей.



$$U_c = \mathcal{E}_s$$

$$\frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt}, \qquad I = \frac{dq}{dt}$$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \tag{11-5}$$

Если обозначить коэффициент перед вторым слагаемым в уравнениях (11-2) – (11-5) через $\boldsymbol{\omega_0^2}$ и ввести обобщенную координату $\tilde{\boldsymbol{x}}$, тогда дифференциальное уравнение любого осциллятора, совершающего свободные (незатухающие) колебания, примет вид:

$$\ddot{\tilde{x}} + \omega_0^2\tilde{x} = 0 \tag{11-6}$$

Решением такого дифференциального уравнения является функция:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_m \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad \text{или} \qquad \tilde{x}(t) = \tilde{x}_m \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{11-7}$$

где $\tilde{x}_m = A$ – обобщенная амплитуда колебания – максимальное отклонение колеблющейся величины от положения равновесия;

$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ – фаза колебания (φ_0 – начальная фаза колебания).

$$F_{упр} \sim x \qquad M_{mg} \sim \varphi \qquad U_c \sim q$$

$$W_p \sim x^2 \qquad W_p \sim \varphi^2 \qquad W_e \sim q^2$$

Колебания, происходящие по закону косинуса или синуса с постоянной амплитудой (у которых квазиупругая сила пропорциональна смещению в первой степени, а потенциальная энергия пропорциональна квадрату смещения), называются ***гармоническими***.

Осциллятор – гармонический осциллятор.

Линейные гармонические колебания – колебания, у которых период колебания T_0 не зависит от начальной амплитуды колебания.

Циклическая (круговая) частота и период свободных (незатухающих) линейных колебаний соответствующих гармонических осцилляторов вычисляют по формулам:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell_0}{I}}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \tag{11-8}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell_0}}; \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}; \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{11-9}$$

2. Кинематические, динамические и энергетические характеристики колебания гармонического осциллятора

механические колебания	**электрические колебания**
$x(t) = x_m \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$	$q(t) = q_m \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$
$\upsilon(t) = \dot{x} = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$	$i(t) = \dot{q} = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$
$\upsilon_m = x_m \omega_0$	$i_m = q_m \omega_0$ (11-10)
$a(t) = \dot{\upsilon} = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$	

$$F(t) = ma = -kx = -m\omega_0^2 x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$F_m = m\omega_0^2 x_m = kx_m$$

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$U_m = \frac{q_m}{C} \qquad (11\text{-}11)$$

$$W_p(t) = \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

$$W_k(t) = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{kx_m^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$W = W_p + W_k = \frac{kx_m^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{2}$$

$$W_e(t) = \frac{q_m^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{L\omega_0^2 q_m^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

$$W_m(t) = \frac{Li^2}{2} = \frac{L\omega_0^2 q_m^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{q_m^2}{2C}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$W_{em} = W_e + W_m = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{L\omega_0^2 q_m^2}{2} \qquad (11\text{-}12)$$

Самостоятельно графики:

$$x(t),\ \upsilon(t),\ a(t),\ F(t),\ W_p(t),\ W_k(t),\ W(t)$$

$$q(t),\ i(t),\ U_c(t),\ W_e(t),\ W_m(t),\ W_{em}(t)$$

В бездиссипативной среде $W = \mathrm{const}$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(W_p + W_k) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{kx^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2}\right) = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$