ЛЕКЦИЯ № 13

5. Вынужденные колебания осциллятора

Реальные колебания – затухающие колебания. Чтобы амплитуда колебаний не уменьшалась (чтобы энергия не исчезала), нужен подвод энергии извне.

Чтобы колебания были гармоническими (с постоянной амплитудой), энергию осциллятору нужно сообщать периодически (по гармоническому закону):

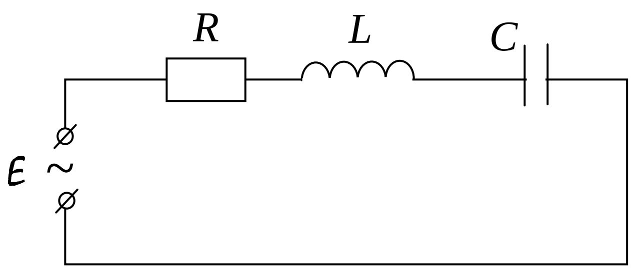
$$F_m \cdot \cos(\omega t + \alpha) \qquad \text{или} \qquad \mathcal{E}_m \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

Такие колебания называют ***вынужденными***.

Для механического осциллятора:

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} + F_m \cdot \cos(\omega t + \alpha) \tag{13-1}$$

Для электрических колебаний в последовательном колебательном контуре



$$U_R + U_c = \mathcal{E}_s + \mathcal{E}$$

$$R\dot{q} + \frac{1}{C}q = -L\ddot{q} + \mathcal{E}_m \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{\mathcal{E}_m}{L}\cos(\omega t + \alpha) \tag{13-2}$$

Если обозначить

$$2\beta = \frac{\mu}{m} \qquad \text{или} \qquad 2\beta = \frac{R}{L}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \text{или} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

тогда можно записать

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\mathcal{E}_m}{L}\cos(\omega t + \alpha) \tag{13-3}$$

– дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (линейное, второго порядка, неоднородное).

Решением неоднородного дифференциального уравнения будет сумма двух слагаемых:

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t)$$

где $q_1(t)$ – это решение однородного уравнения (дифференциального уравнения затухающих колебаний)

$$q_1(t) = q_m e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi),$$

которое довольно быстро убывает до нуля;

$q_2(t)$ – это частное решение уравнения (13-3) – уравнения гармонического колебания

$$q_2(t) = q_m \cos(\omega t + \psi) \qquad (13\text{-}4)$$

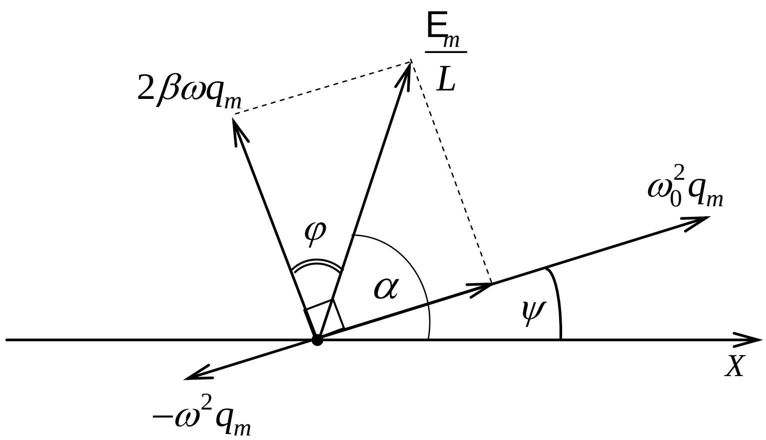
$$q_m - ? \qquad \psi - ?$$

Подставим (13-4) в (13-3) и воспользуемся методом векторных диаграмм:

$$-\omega^2 q_m \cos(\omega t + \psi) - 2\beta\omega q_m \sin(\omega t + \psi) + \omega_0^2 q_m \cos(\omega t + \psi) = \frac{\mathcal{E}_m}{L}\cos(\omega t + \alpha)$$

так как $\sin\alpha = -\cos\left(\alpha + \pi/2\right)$,

тогда



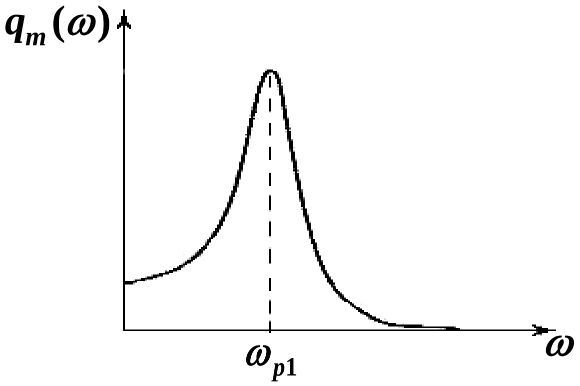
$$\left.\begin{aligned} q_m(\omega) &= \frac{\mathcal{E}_m/L}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}} \\ tg\varphi &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta\omega} = \frac{\dfrac{1}{\omega C} - \omega L}{R} \end{aligned}\right\} \qquad (13\text{-}5)$$

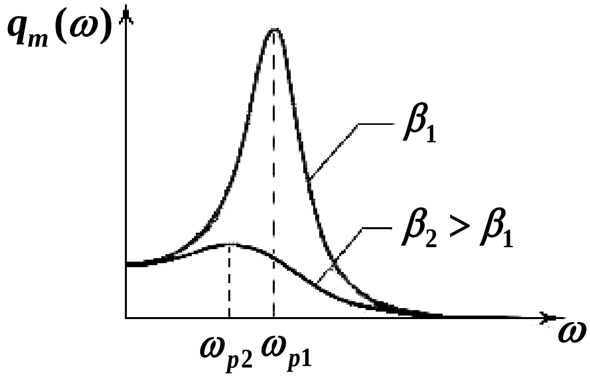
$$\psi = \alpha + \varphi - \pi/2$$

6. Явление резонанса

Из (13-5) видно, что амплитуда заряда q_m, а, следовательно, и амплитуды тока и напряжения зависят от частоты внешнего воздействия ω, а точнее, от соотношения между ω_0 и ω.

График зависимости $q_m = f(\omega)$ имеет колоколообразный вид и называется ***резонансной кривой***:





Зависимость q_m от ω вынуждающего напряжения приводит к тому, что при некоторой (определенной для данного осциллятора) частоте q_m достигает **max**.

Явление, при котором амплитуда вынужденных колебаний достигает **max** значения, называется ***резонансом***, а соответствующая частота – ***резонансной частотой***.

$q_m = q_{m\max}$ при значении знаменателя в (13-5) $\to$ 0.

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right] = 0$$

$$\omega = \omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \qquad (13\text{-}6)$$

Пусть $\psi = 0$, тогда

$$q = q_m \cos\omega t,$$

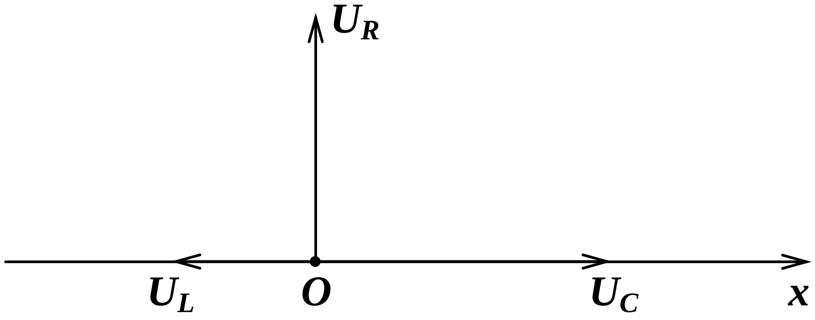
$$i = \dot{q} = -\omega q_m \sin\omega t = \omega q_m \cos\left(\omega t + \pi/2\right),$$

$$U_R = iR = \omega q_m R\cos\left(\omega t + \pi/2\right), \qquad (13\text{-}7)$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos\omega t,$$

$$U_L = -\mathcal{E}_S = +L\ddot{q} = -L\omega^2 q_m\cos\omega t = L\omega^2 q_m\cos(\omega t + \pi)$$

Изобразим полученный результат на векторной диаграмме:



Колебания силы тока в последовательном колебательном контуре ***опережают*** колебания напряжения на конденсаторе на $\pi/2$ и ***отстают*** от колебаний напряжения на катушке на $\pi/2$.

Амплитуда напряжения на конденсаторе:

$$U_{Cm}(\omega) = \frac{q_m}{C} = \frac{\mathcal{E}_m/CL}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega C\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}$$

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

при $\omega = 0$ $\quad U_{Cm}(0) = \mathcal{E}_m$

при $\omega \to \infty$ $\quad U_{Cm}(\infty) \to 0$

при $\omega = \omega_0$ $\quad U_{Cm} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\mathcal{E}_m$

Амплитуда напряжения на катушке:

$$U_{Lm}(\omega) = L\omega^2 q_m = \frac{\omega^2\mathcal{E}_m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{\omega L\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}$$

при $\omega = 0 \quad U_{Lm}(0) = 0$

при $\omega \to \infty \quad U_{Lm}(\infty) \to E_m$

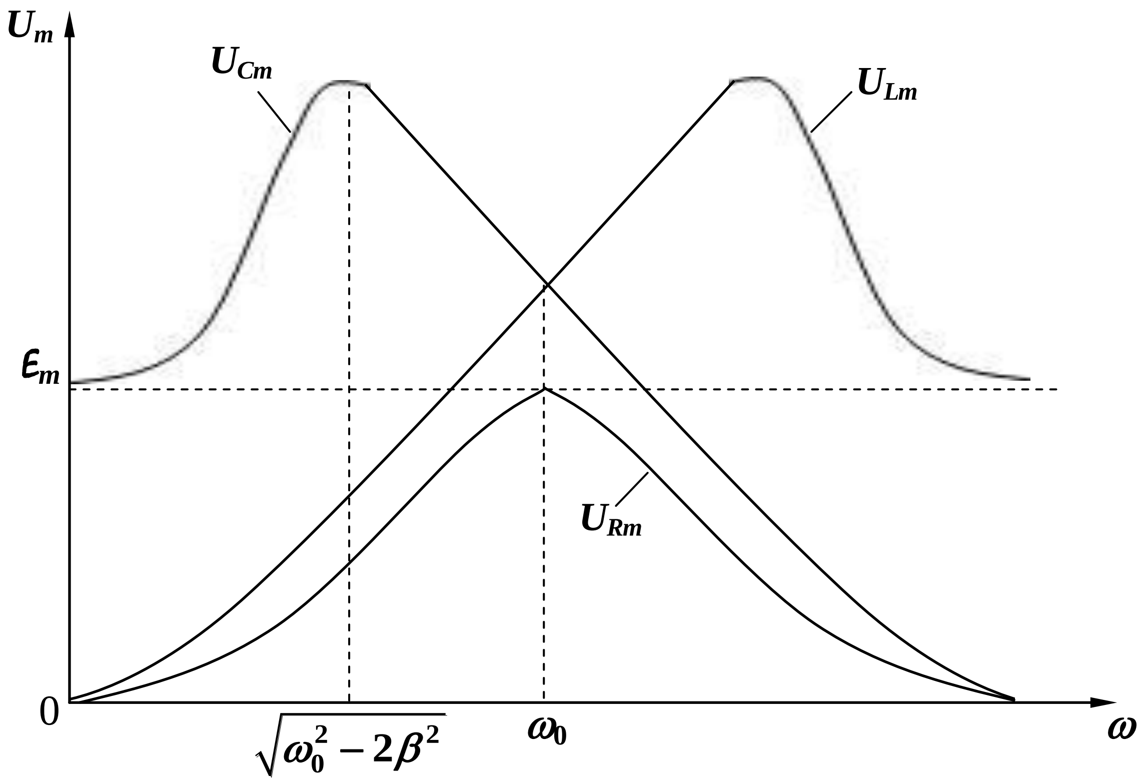
при $\omega = \omega_0 \quad U_{Lm} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}E_m$

$$U_{Rm}(\omega) = R\omega q_m = \frac{RE_m}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}$$

при $\omega = 0 \quad U_{Rm}(0) = 0$

при $\omega \to \infty \quad U_{Rm}(\infty) \to 0$

при $\omega_{\text{рез}} = \omega_0 \quad U_{Rm} = E_m$



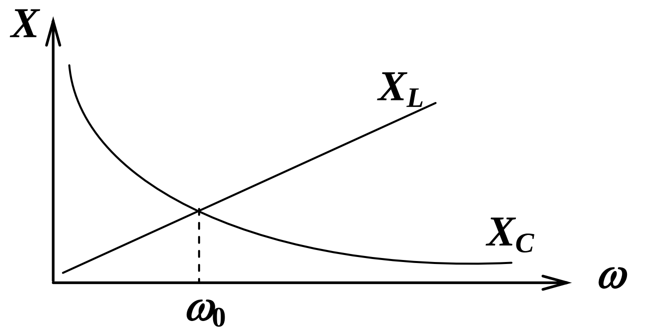
$$Q = \frac{U_{Cm}(\omega_0)}{E_m} = \frac{U_{Lm}(\omega_0)}{E_m} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{13-8}$$

Амплитуда силы тока и напряжения на сопротивлении:

$$I_m(\omega) = \omega q_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}} \tag{13-9}$$

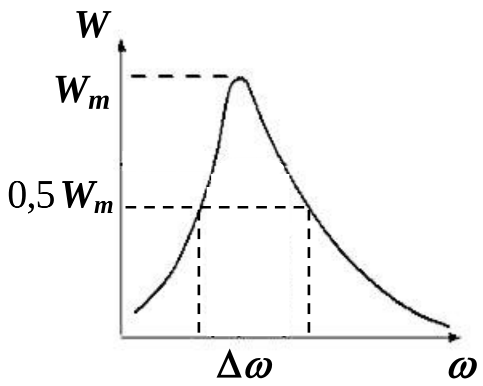
$$\begin{gathered} Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \;\; X = X_C - X_L \\ X_C = \frac{1}{\omega C}, \;\; X_L = \omega L \end{gathered} \tag{13-10}$$

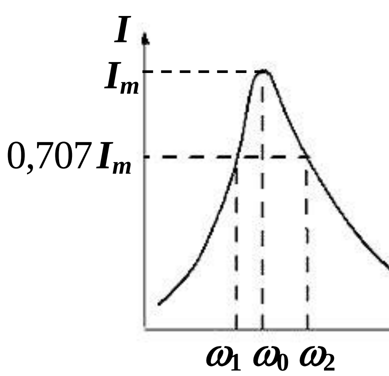
Z – полное сопротивление цепи (импеданс)
R – активное сопротивление
X – реактивное сопротивление



при $\omega = \omega_0$

$\underline{\underline{Z = R}}$





$W \sim A^2$

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ – полоса пропускания.

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \tag{13-11}$$