Т. А. АРОНОВА, И. А. ДРОЗДОВА

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ. СТО.
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ОМСК 2016

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

Т. А. Аронова, И. А. Дроздова

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ. СТО. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Утверждено методическим советом университета
в качестве учебно-методического пособия
для самостоятельной работы студентов
при решении задач по физике

Омск 2016

УДК 530.1(075.8)
ББК 22.3я73
А84

Законы сохранения. СТО. Примеры решения задач: Учебно-методическое пособие / Т. А. Аронова, И. А. Дроздова; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2016. 34 с.

Приведены краткие теоретические сведения по темам «Законы сохранения в механике» и «Элементы специальной теории относительности», примеры решения типовых задач на применение законов сохранения импульса, момента импульса и энергии в механике материальной точки и абсолютно твердого тела и основ специальной теории относительности, которые должны уметь решать студенты согласно требованиям учебной программы.

Предназначено для студентов первого курса очной и заочной форм обучения.

Библиогр.: 4 назв. Рис. 11.

Рецензенты: канд. техн. наук, доцент В. К. Волкова;
канд. техн. наук, доцент А. Ю. Тэттэр.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Решение задач позволяет лучше понять и запомнить основные законы физики, развивает навыки в применении теоретических знаний.

Цель предлагаемого учебно-методического пособия – оказать помощь в освоении методики решения типовых задач по темам «Законы сохранения в механике» и «Элементы специальной теории относительности».

Движение частиц можно изучать в рамках трех законов Ньютона, опираясь на такую величину, как сила. Альтернативное описание движения возможно с применением таких величин, как работа, энергия, импульс и момент импульса. В задачах, решения которых представлены в данном издании, эти величины определяются, а законы сохранения энергии, импульса и момента импульса применяются при вычислениях в рамках механики материальной точки и абсолютно твердого тела. Теоретические сведения, необходимые для решения задач, приведены в полном объеме в книгах [1 – 4].

При решении задач с применением законов сохранения рекомендуется следующий порядок действий: 1) определить, какие состояния механической системы необходимо рассмотреть в данной задаче, и для каждого состояния сделать рисунок; 2) определить, какие законы сохранения являются существенными при переходе системы из одного состояния в другое по условиям задачи, и записать эти законы; 3) решить полученную систему уравнений, используя данные задачи.

Все задачи следует (по возможности) решать в общем виде. Это означает, что сначала выводится формула для расчета искомой величины, а затем в нее подставляются численные данные. Такой подход позволяет при анализе полученных формул увидеть общие закономерности. Прежде чем приступить к решению, следует внимательно прочитать, обдумать и записать условия задачи, перевести единицы измерения всех величин в основные единицы системы СИ, оформить схематический рисунок, отражающий условия задачи, выбрать подходящую систему отсчета. При вычислениях рекомендуется применять формулы приближения, позволяющие упростить расчеты.

1. РАБОТА. ЭНЕРГИЯ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Работа совершается силой, когда, действуя на тело, сила перемещает его на некоторое расстояние. Работу силы можно найти также, применяя теорему об изменении кинетической энергии. Работу консервативной силы можно рассчитать через убыль потенциальной энергии.

Коэффициент полезного действия (КПД) механизмов определяется через отношение полезной работы к совершенной работе, он всегда меньше 100 %.

Полная механическая энергия системы равна сумме потенциальной и кинетической энергии. Если в системе не действуют силы трения, то механическая энергия сохраняется.

Задача 1.1.

Груз массой 0,5 кг равномерно тянут по горизонтальной поверхности с постоянной горизонтальной силой $F_{\text{Т}}$ = 2 Н. Найти работу этой силы, силы тяжести, силы реакции опоры, силы трения на перемещении 3 м.

Дано:
m = 0,5 кг;
$l = 3$ м;
$F_{\text{Т}}$ = 2 Н;
$g = 9{,}8$ м/с^2.

$A_{mg}, A_N, A_{\text{тр}}$ – ?

Решение: Работа постоянной силы определяется как произведение проекции (на ось в направлении движения) силы F_S на перемещение (рис.1.1, а).

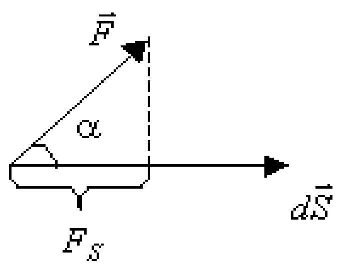
Работа силы $F_{\text{Т}}$ $\quad A_F = F_{\text{Т}} \cdot \cos 0° \cdot l = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$ Дж.

Проекция силы тяжести, как и проекция силы реакции опоры, на направление перемещения равна нулю (см. рис. 1.1, б), поэтому работа силы тяжести и работа силы реакции опоры равны нулю.

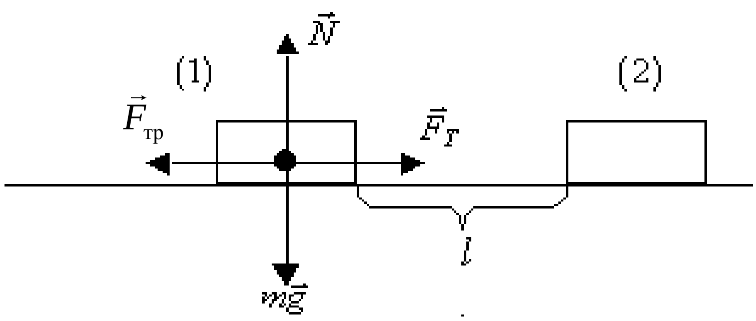
Так как груз движется равномерно, $\vec{F}_T = -\vec{F}_{\text{тр}}$. Сила трения направлена против перемещения. Угол между вектором силы трения и вектором перемещением составляет 180 °.

$$A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} \cdot \cos 180° \cdot l; \tag{1.1}$$

$$A_{\text{тр}} = -6 \text{ Дж}.$$



а



б

Рис.1.1

Ответ: $A_F = 6$ Дж; $A_{mg} = 0; A_N = 0; A_{тр} = -6$ Дж.

Задача 1.2. Для растяжения пружины на 4 мм была совершена работа силы 20 мДж. Чему равен коэффициент жесткости пружины?

Дано:	СИ	*Решение:*
$A = 20$ мДж;	$2 \cdot 10^{-2}$ Дж	
$x_1 = 0$;	$4 \cdot 10^{-3}$ м	
$x_2 = 4$ мм;		
$g = 9{,}8$ м/с^2.		
$k - ?$		

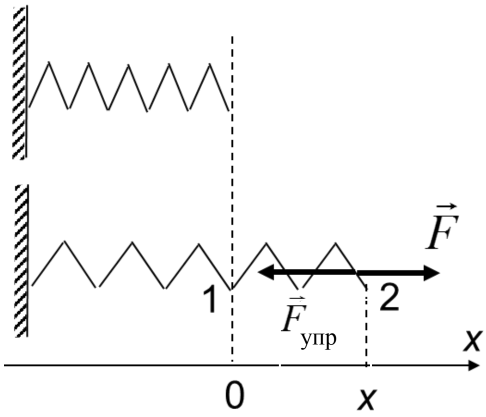


Рис. 1.2

Внешняя сила, растягивающая пружину, направлена против силы упругости, стремящейся вернуть пружину в исходное состояние. Значит, работа внешней силы будет положительной, так как угол между вектором внешней силы и перемещением частей пружины равен нулю, а работа силы упругости отрицательна: $A_{упр} = -A_{внеш}$. Работа консервативных сил, в данном случае сил упругости, равна убыли потенциальной энергии:

$$A_{упр} = \frac{kx_1^{\ 2}}{2} - \frac{kx_2^{\ 2}}{2} = \frac{k}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right). \tag{1.2}$$

Тогда работа внешней силы

$$A_{внеш} = \frac{kx_2^{\ 2}}{2} - \frac{kx_1^{\ 2}}{2} = \frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right). \tag{1.3}$$

Выразим коэффициент упругости из формулы (1.3):

$$k = \frac{2A_{внеш}}{\left(x_2^2 - x_1^2\right)}; \tag{1.4}$$

$$k = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{16 \cdot 10^{-6}} = 2{,}5 \cdot 10^3\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Ответ: $k = 2{,}5 \cdot 10^3\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$.

Задача 1.3. Покоившийся шар раскрутили вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр, до угловой скорости 5 рад/с, совершив при этом работу 50 Дж. Чему равен момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр шара?

Дано:	*Решение:* Шар находился в покое и в результате работы внешней силы приобрел скорость вращения вокруг оси, проходящей через его центр. Так как скорость шара изменилась, то изменилась и его кинетическая энергия. Применим теорему об изменении кинетической энергии:
$\omega_0 = 0$;	
$\omega = 5$ рад/с;	
$A = 50$ Дж.	
I – ?	

$$\frac{I\omega^2}{2} - \frac{I{\omega_0}^2}{2} = A. \tag{1.5}$$

Преобразуем выражение (1.5):

$$\frac{I\left(\omega^2 - {\omega_0}^2\right)}{2} = A. \tag{1.6}$$

Найдем момент инерции шара:

$$I = \frac{2A}{\left(\omega^2 - {\omega_0}^2\right)}; \tag{1.7}$$

$$I = \frac{2 \cdot 50}{5^2} = 4 \text{ кг·м}^2.$$

Ответ: $I = 4$ кг·м^2.

Задача 1.4. Механизм, затратив 2000 Дж, совершил полезную работу 1500 Дж. Каков КПД механизма?

Дано:	*Решение:*
$A_{\text{полезная}} = 1500$ Дж;	
$A_{\text{совершенная}} = 2000$ Дж.	
КПД – ?	

$$\eta = \frac{A_{\text{полезная}}}{A_{\text{совершенная}}} \cdot 100~\%; \tag{1.8}$$

$$\eta = \frac{1500}{2000} \cdot 100~\% = 75~\%.$$

Ответ: КПД = 75 %.

Задача 1.5. Шарик массой 20 г вылетает из детского пружинного пистолета со скоростью 2 м/с. Какова была потенциальная энергия сжатой пружины? Какова была деформация пружины перед выстрелом, если ее жесткость равна 50 Н/м? Трением пренебречь.

Дано:
m = 0,02 кг;
υ = 4 м/с;
$k = 50$ Н/м.
$W_п$ – ? x – ?

Решение: Система «пружина – пуля» является замкнутой, так как нет сил трения, то выполняется закон сохранения механической энергии. В начальный момент, когда пружина сжата, а пуля покоится, механическая энергия равна потенциальной энергии пружины. Когда происходит выстрел, потенциальная энергия пружины становится равной нулю, а пуля приобретает кинетическую энергию $\frac{kx^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2}$. Потенциальную энергию пружины можно сразу найти по этой формуле, так как $W_п = W_к$.

Найдем деформацию пружины:

$$x = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \upsilon; \tag{1.9}$$

$$x = \sqrt{\frac{0,02}{50}} \cdot 4 = 0,08 \text{ м.}$$

Зная деформацию пружины, найдем ее потенциальную энергию:

$$W_п = \frac{kx^2}{2}; \tag{1.10}$$

$$W_п = \frac{50 \cdot 64 \cdot 10^{-4}}{2} = 16 \cdot 10^{-2} \text{ Дж.}$$

Ответ: $W_п = 16 \cdot 10^{-2}$ Дж; x = 0,08 м.

Задача 1.6. Тело бросили с поверхности Земли вертикально вверх со скоростью 980 см/с. Пренебрегая силой сопротивления воздуха, найти, на какой высоте кинетическая энергия тела будет в четыре раза больше потенциальной. Потенциальную энергию тела в точке бросания принять равной нулю.

Дано:	СИ	*Решение:*
υ_0 = 980 см/с;	9,8 м/с	
$F_{\text{сопр}} = 0$;		
$W_{\text{п}} = \dfrac{1}{4} W_{\text{к}}$;		
$W_{\text{п}\,0} = 0$.		
h_1 – ?		

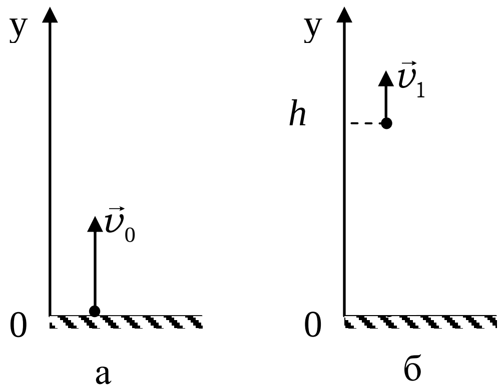


Рис. 1.3

По условию задачи силой сопротивления воздуха можно пренебречь, следовательно, на тело действует только сила тяжести, являющаяся консервативной, и выполняется закон сохранения механической энергии:

$$W_0 = W_1, \tag{1.11}$$

где W_0 – полная механическая энергия тела в начальном состоянии (в момент броска) (рис. 1.3, а),

$$W_0 = W_{\text{п}\,0} + W_{\text{к}\,0}; \tag{1.12}$$

W_1 – полная механическая энергия тела в момент положения центра тяжести на искомой высоте (рис. 1.3, б),

$$W_1 = W_{\text{п}\,1} + W_{\text{к}\,1}. \tag{1.13}$$

Подставив в формулу (1.11) равенства (1.12) и (1.13), получим:

$$W_{\text{п}\,0} + W_{\text{к}\,0} = W_{\text{п}\,1} + W_{\text{к}\,1}. \tag{1.14}$$

По условию задачи в момент броска кинетическая энергия $W_{\text{к}\,0} = \dfrac{m\upsilon_0^{\,2}}{2}$, $W_{\text{п}\,0} = 0$, на искомой высоте $W_{\text{к}\,1} = 4\, W_{\text{п}\,1}$, потенциальная энергия $W_{\text{п}\,1} = mgh_1$, где m – масса тела. Подставив эти соотношения в формулу (1.14), получим:

$$\frac{m\upsilon_0^{\,2}}{2} = W_{\text{п}\,1} + 4W_{\text{п}\,1} = 5W_{\text{п}\,1} = 5mgh_1. \tag{1.15}$$

Отсюда

$$h_1 = \frac{\upsilon_0^{\,2}}{10g}. \tag{1.16}$$

Подставим в формулу (1.16) данные задачи: $h_1 = 0{,}98$ м.

Ответ: $h_1 = 0{,}98$ м.

Задача 1.7. Диск радиусом 17 см вращается под действием постоянной касательной силы 50 Н вокруг оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости. Найти работу этой силы, совершенную в течение трех оборотов диска.

Дано:	СИ
$R = 17$ см;	0,17 м
F = 50 Н;	
N = 3.	
A – ?	

Решение: Работа постоянной силы при вращательном движении определяется по выражению:

$$A = \varphi M_{\omega}, \tag{1.17}$$

где φ – угол поворота (за один оборот абсолютно твердое тело поворачивается на угол 2π),

$$\varphi = 2\pi N; \tag{1.18}$$

M_{ω} – проекция момента силы на направление угловой скорости $\vec{\omega}$. Так как по условию задачи вращение диска происходит под действием силы F, момент силы $\vec{M} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$ (рис. 1.4), следовательно, $M_{\omega} = M$. Так как сила касательная, модуль момента силы $M = FR\sin\{\pi/2\} = FR$, поэтому

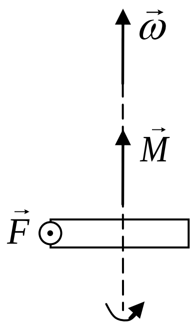


Рис. 1.4

$$M_{\omega} = M = FR. \tag{1.19}$$

Подставив выражения (1.18) и (1.19) в формулу (1.17), получим:

$$A = FRN \cdot 2\pi. \tag{1.20}$$

Выполним численный расчет по формуле (1.20): $A = 160$ Дж.

Ответ: $A = FRN \cdot 2\pi$, $A = 160$ Дж.

Задача 1.8. Однородный цилиндр скатывается без скольжения с наклонной плоскости высотой 30 см. При скатывании ось цилиндра все время сохраняет свое горизонтальное положение. В начальном состоянии цилиндр покоился. Найти скорость центра инерции цилиндра у основания плоскости. Потерями энергии за счет тормозящих сил пренебречь.

Дано:	СИ	*Решение:*
$h = 30$ см;	0,30 м	
$\upsilon_0 = 0$.		
υ'_C – ?		

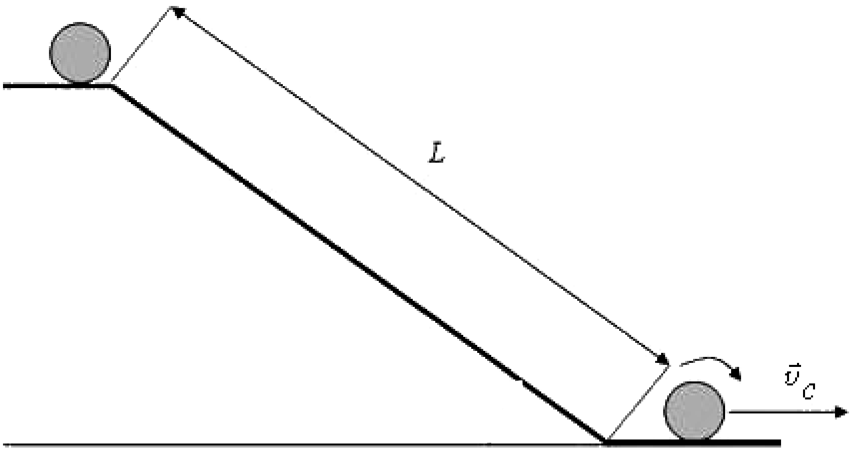


Рис. 1.5

Будем отсчитывать потенциальную энергию цилиндра в поле тяжести Земли от основания наклонной плоскости (рис. 1.5). Тогда механическая энергия цилиндра в начальном состоянии (в состоянии покоя) и у основания плоскости в конце скатывания определяются по формулам соответственно:

$$W_{\text{м}} = mgh; \tag{1.21}$$

$$W'_{\text{м}} = \frac{m}{2}\upsilon'^{2}_{C} + \frac{I}{2}\omega'^{2}, \tag{1.22}$$

где m, $\vec{\omega}'$, I – масса, угловая скорость и момент инерции цилиндра относительно оси симметрии, проходящей через его центр инерции,

$$I = \frac{mR^2}{2}, \tag{1.23}$$

где $\vec{\upsilon}'_C$ – скорость поступательного движения цилиндра, равная скорости его центра инерции относительно плоскости;

R – радиус цилиндра.

По условию задачи потерями механической энергии при качении цилиндра можно пренебречь, поэтому механическая энергия цилиндра в начальном состоянии и у основания наклонной плоскости одинакова:

$$W_{\text{м}} = W'_{\text{м}}. \tag{1.24}$$

Так как скатывание цилиндра происходит без скольжения, скорость точек касания цилиндра относительно плоскости равна нулю: $\vec{\upsilon}' = 0$, а все другие точки цилиндра поворачиваются вокруг мгновенной оси, проходящей через покоящуюся точку касания. По закону сложения скоростей скорость точки касания равна сумме двух противоположно направленных слагаемых: скорости поступательного движения вместе с центром инерции и скорости движения по окружности при вращении вокруг оси, проходящей через центр инерции: $\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon}'_{\text{C}} + \vec{\upsilon}'_{\text{вр}} = 0,$ отсюда $\upsilon'_{\text{C}} = \upsilon'_{\text{вр}}$. Линейная скорость точки при вращательном движении абсолютно твердого тела (в рассматриваемом случае – цилиндра) связана с угловой скоростью соотношением: $\upsilon'_{\text{вр}} = \omega' R.$ Следовательно, модуль угловой скорости выражается через модуль скорости $\vec{\upsilon}'_{\text{C}}$ и радиус цилиндра R:

$$\omega' = \upsilon'_{\text{C}} / R. \tag{1.25}$$

Направление угловой скорости $\vec{\omega}'$ (от «нас») определяется по правилу буравчика в соответствии с направлением вращения цилиндра, показанным на рис. 1.5.

После подстановки соотношений (1.21) – (1.23) и (1.25) в равенство (1.24) получим:

$$mgh = \frac{m}{2}\upsilon_{\text{C}}'^{\,2} + \frac{mR^2}{4}\left(\frac{\upsilon_{\text{C}}'^{\,2}}{R^2}\right). \tag{1.26}$$

Отсюда

$$\upsilon'_{\text{C}} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}\,. \tag{1.27}$$

Подставив в формулу (1.27) численные значения, получим: $\upsilon'_{\text{C}} = 2{,}0$ м/с.

Ответ: $\upsilon'_{\text{C}} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$, $\upsilon'_{\text{C}} = 2{,}0$ м/с.

2. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Импульс замкнутой системы сохраняется. Систему можно считать замкнутой, если внутренние силы значительно больше сил внешних, как, например, при взрыве. Если проекция внешних сил на выбранную координатную ось равна нулю, то проекция импульса на эту ось также не изменяется.

Задача 2.1. Мальчик массой 50 кг, стоящий на коньках на поверхности льда, бросает в горизонтальном направлении мяч массой 1 кг со скоростью 5 м/с относительно земли. Чему равен модуль импульса, полученного мальчиком в момент броска?

Дано:
$m_1 = 50$ кг;
$\upsilon_0 = 0$;
$m_2 = 1$ кг;
$\upsilon_2 = 5$ м/с.
$p_1 - ?$

Решение: Систему «мальчик – мяч» можно считать замкнутой, так как проекции сил тяжести и реакции опоры на горизонтальную ось, вдоль которой происходит движение, равны нулю. В первом состоянии мальчик с мячом покоятся, их скорость равна нулю, импульс также равен нулю. В момент броска мяч получает скорость υ_2.

Запишем закон сохранения импульса относительно Земли:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0. \qquad (2.1)$$

Выберем горизонтальную ось в направлении движения мяча.

В проекциях на горизонтальную ось закон сохранения импульса запишем в виде:

$$-m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2 = 0, \qquad (2.2)$$

тогда $p_1 = m_1 \cdot \upsilon_1 = m_2 \cdot \upsilon_2$, $p_1 = 1\text{ кг} \cdot 5\text{ м/с} = 5\text{ кг} \cdot \text{м/с}$.

Ответ: $p_1 = 5\text{ кг} \cdot \text{м/с}$.

Задача 2.2. Снаряд массой 30 кг, летящий горизонтально со скоростью 300 м/с, попадает в стоящую на рельсах вагонетку с песком массой 1770 кг и застревает в песке. С какой скоростью будет двигаться вагонетка, если до попадания снаряда она покоилась?

Дано:
$m_1 = 30$ кг;
$\upsilon_1 = 300$ м/с;
$m_2 = 1770$ кг;
$\upsilon_2 = 0$.
$\upsilon - ?$

Решение: Систему «снаряд – вагонетка» можно считать замкнутой, так как проекции сил тяжести и реакции опоры на горизонтальную ось движения равны нулю. В первом состоянии вагонетка покоится, ее импульс равен нулю. Снаряд движется, его импульс

$$\vec{p}_1 = m_1 \cdot \vec{\upsilon}_1. \qquad (2.3)$$

Так как снаряд после выстрела застревает в песке, то дальше вагонетка и снаряд движутся с одинаковой скоростью, которую обозначим υ.

Импульс вагонетки со снарядом

$$\vec{p} = \left(m_1 + m_2\right) \cdot \vec{\upsilon}. \qquad (2.4)$$

Запишем закон сохранения импульса относительно Земли:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}; \qquad (2.5)$$

$$m_1 \cdot \vec{\upsilon}_1 = \left(m_1 + m_2\right) \cdot \vec{\upsilon}. \qquad (2.6)$$

В проекциях на горизонтальную ось в направлении движения снаряда

$$m_1 \cdot \upsilon_1 = \left(m_1 + m_2\right) \cdot \upsilon; \qquad (2.7)$$

$$\upsilon = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1}{m_1 + m_2}; \qquad (2.8)$$

$$\upsilon = \frac{30 \cdot 300}{30 + 1770} = 5 \text{ м/с}.$$

Ответ: υ = 5 м/с.

Задача 2.3. Снаряд массой 12 кг, выпущенный из пушки под некоторым углом к горизонту, в верхней точке траектории имел скорость 30 м/с и разорвался на два осколка. Первый осколок массой 10 кг полетел в направлении движения снаряда со скоростью 40 м/с. Найти скорость второго осколка.

Дано:
m = 12 кг;
m_1 = 10 кг;
υ = 30 м/с;
υ_1' = 40 м/с.
$\vec{\upsilon}_2'$ – ?

Решение: Внутренние силы, действующие на снаряд и осколки в момент взрыва, значительно больше внешних сил – тяжести и сопротивления воздуха, поэтому силами тяжести и сопротивления воздуха в момент взрыва можно пренебречь и считать систему замкнутой. Следовательно, к системе можно применить закон сохранения импульса:

$$\vec{p}_{\text{сист}} = \vec{p}\,'_{\text{сист}}, \qquad (2.9)$$

где $\vec{p}_{\text{сист}}$ – импульс снаряда до его разрыва,

$$\vec{p}_{\text{сист}} = m\vec{\upsilon}; \qquad (2.10)$$

$\vec{p}\,'_{\text{сист}}$ – импульс системы после разрыва снаряда,

$$\vec{p}\,'_{\text{сист}} = m_1\vec{\upsilon}\,'_1 + m_2\vec{\upsilon}\,'_2; \qquad (2.11)$$

$\vec{\upsilon}\,'_1$, $\vec{\upsilon}\,'_2$ – скорость первого и второго осколков после разрыва снаряда.

Выберем для расчетов инерциальную систему отсчета, связанную с Землей. Мгновенная скорость материальной точки направлена по касательной к траектории в любой точке траектории. В частности, скорость снаряда в верхней точке его траектории направлена горизонтально, поэтому удобно направить горизонтальную ось OX в сторону движения снаряда непосредственно перед его разрывом.

Схематически состояние системы до разрыва снаряда показано на рис. 2.1, а, после него – на рис. 2.1, б.

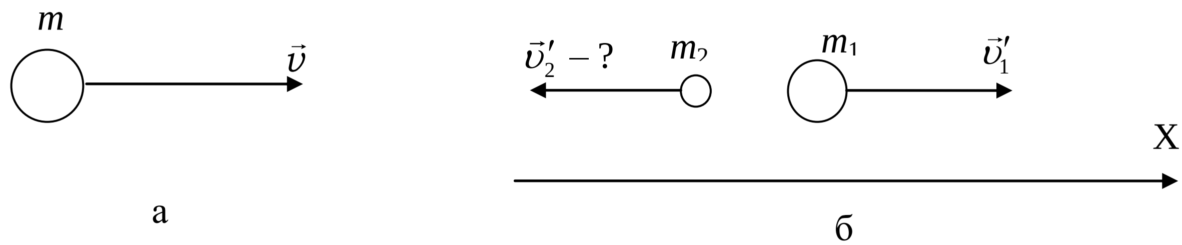


Рис. 2.1

Отметим, что направление скорости второго осколка заранее не известно, оно определяется в результате решения задачи и может быть указано на рисунке только после решения.

Подставив формулы (2.10) и (2.11) в выражение (2.9), получим:

$$m\vec{\upsilon} = m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2'. \qquad (2.12)$$

Выразим из формулы (2.12) скорость второго осколка после разрыва снаряда:

$$\vec{\upsilon}_2' = \frac{m\vec{\upsilon} - m_1\vec{\upsilon}_1'}{m_2}. \qquad (2.13)$$

Проекции скорости $\vec{\upsilon}_2'$ на координатные оси имеют вид:

$$\upsilon_{2x}' = \frac{m\upsilon - m_1\upsilon_1'}{m_2}; \qquad (2.14)$$

$$\upsilon_{2y}' = \upsilon_{2z}' = 0. \qquad (2.15)$$

Определим модуль скорости второго осколка после разрыва снаряда с учетом выражений (2.14) и (2.15):

$$\upsilon_2' = \sqrt{\upsilon_{2x}'^2 + \upsilon_{2y}'^2 + \upsilon_{2z}'^2} = \sqrt{\upsilon_{2x}'^2} = \left|\upsilon_{2x}'\right| = \left|\frac{m\upsilon - m_1\upsilon_1'}{m_2}\right|. \qquad (2.16)$$

Подставим в уравнения (2.14), (2.16) численные значения и получим:

$$\upsilon'_{2x} = \frac{12 \cdot 30 - 10 \cdot 40}{12 - 10} = -20 \text{ м/с};$$

$$\upsilon'_2 = 20 \text{ м/с}.$$

Отрицательное значение проекции означает, что скорость второго осколка направлена в сторону, противоположную направлению оси *OX*.

Ответ: $\vec{\upsilon}'_2 = \left(\dfrac{m\upsilon - m_1\upsilon'_1}{m_2}; 0; 0 \right)$; $\upsilon'_2 = 20$ м/с; $\vec{\upsilon}'_2 \uparrow\downarrow OX$.

Задача 2.4. Два маленьких шара подвешены на нитях одинаковой длины так, что поверхности шаров соприкасаются. Расстояние от точек подвеса до центров масс шаров одинаково и равно 0,3 м. Масса первого шара – 400, второго – 200 г. Нить, на которой подвешен первый шар, отклоняют на некоторый угол и отпускают. Найти этот угол, если известно, что при абсолютно неупругом ударе шаров выделилась тепловая энергия 98 мДж. Радиусы шаров считать много меньшими длины нитей.

Дано:	СИ
$m_1 = 400$ г;	0,4 кг
$m_2 = 200$ г;	0,2 кг
l = 0,3 м;	
Q = 98 мДж.	0,098 Дж
α – ?	

Решение: Так как расстояние от точки подвеса до центра масс каждого шара много больше радиусов шаров, шары можно считать материальными точками, массы которых сконцентрированы в центрах масс шаров. Будем отсчитывать высоту и потенциальную энергию в поле тяжести от уровня, на котором расположены центры масс шаров, висящих на вертикальных нитях и находящихся в равновесии.

Рассматриваемые при решении состояния системы шаров изображены на рис. 2.2. *Начальному состоянию*, представленному на рис. 2.2, а, соответствует положение первого (левого) шара массой m_1 на высоте h при отклонении держащей его нити на угол α. Второй (правый) шар массой m_2 покоится в положении равновесия на вертикально висящей нити. Скорость, а значит, и кинетическая энергия шаров, равна нулю, следовательно, полная механическая энергия системы равна потенциальной энергии первого шара.

Непосредственно перед ударом (рис. 2.2, б) потенциальная энергия шаров равна нулю. Первый шар движется со скоростью $\vec{\upsilon}_1$, второй покоится. Следовательно, механическая энергия системы до удара равна кинетической энергии первого шара:

$$W^{\text{II}}_{\text{м сист}} = W^{\text{II}}_{\text{к 1}} = \frac{m_1 (\upsilon_1)^2}{2}, \tag{2.17}$$

а импульс системы равен импульсу первого шара:

$$\vec{p}^{\,\text{II}}_{\text{сист}} = m_1 \vec{\upsilon}_1; \tag{2.18}$$

$$W^{\text{I}}_{\text{м сист}} = W^{\text{I}}_{1\,\text{п}} = m_1 g h. \tag{2.19}$$

Сразу после удара (рис. 2.2, в) шары движутся как одно целое со скоростью $\vec{\upsilon}'$ (по условию задачи удар абсолютно неупругий), поэтому импульс системы равен векторной сумме импульсов обоих шаров:

$$\vec{p}'^{\,\text{III}}_{\text{сист}} = m_1 \vec{\upsilon}' + m_2 \vec{\upsilon}' = (m_1 + m_2) \vec{\upsilon}'. \tag{2.20}$$

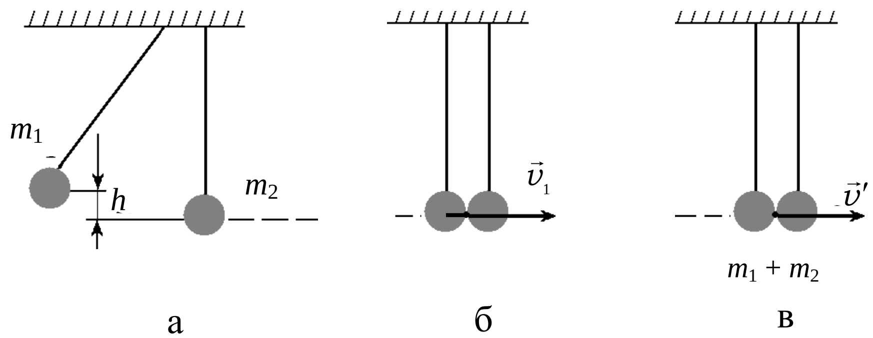


Рис. 2.2

Потенциальная энергия шаров остается равной нулю, поэтому механическая энергия системы равна кинетической энергии шаров:

$$W^{\text{III}}_{\text{м сист}} = W^{\text{III}}_{\text{к 1}} + W^{\text{III}}_{\text{к 2}} = \frac{m_1 (\upsilon')^2}{2} + \frac{m_2 (\upsilon')^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)(\upsilon')^2}{2}. \tag{2.21}$$

При переходе системы из первого состояния во второе (при *падении первого шара* в поле силы тяжести Земли) сила натяжения нити работы не совершает, так как в любой момент времени движения она перпендикулярна перемещению, а диссипативные силы трения и сопротивления воздуха пренебрежимо малы, поэтому полная механическая энергия шара остается постоянной:

$$W^{\mathrm{I}}_{\text{м сист}} = W^{\mathrm{II}}_{\text{м сист}}. \tag{2.22}$$

При движении шара его потенциальная энергия убывает и переходит в кинетическую. Подставим правые части равенств (2.17) и (2.18) в формулу (2.22) и получим:

$$m_1 gh = \frac{m_1 \upsilon_1^{\,2}}{2}. \tag{2.23}$$

При переходе системы из второго состояния в третье (при *абсолютно неупругом ударе*) в течение кратковременного взаимодействия шаров на них действуют внешние силы: тяжести и натяжения нитей. Векторная сумма этих сил равна нулю, поэтому выполняются закон сохранения импульса

$$\vec{p}^{\;\mathrm{II}}_{\text{сист}} = \vec{p}^{\;\mathrm{III}}_{\text{сист}} \tag{2.24}$$

и закон сохранения энергии (часть механической энергии системы переходит в тепловую Q):

$$W^{\mathrm{II}}_{\text{м сист}} = W^{\mathrm{III}}_{\text{м сист}} + Q. \tag{2.25}$$

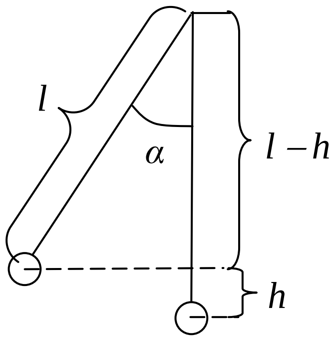


Рис. 2.3

С учетом равенств (2.19) и (2.20) формула закона сохранения импульса (2.24) примет вид:

$$m_1 \vec{\upsilon}_1 = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon}\,'. \tag{2.26}$$

Векторы в левой и правой частях формулы (2.26) одинаковы, поэтому одинаковы и их модули:

$$m_1 \upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon'. \tag{2.27}$$

С учетом выражений (2.18) и (2.21) уравнение (2.25) примет вид:

$$\frac{m_1 \upsilon_1^{\,2}}{2} = \frac{(m_1 + m_2)\upsilon'^2}{2} + Q. \tag{2.28}$$

Из рис. 2.3 видно, что $l - h = l\cos\ \alpha,$ отсюда

$$h = l(1 - \cos\alpha). \tag{2.29}$$

Решая совместно уравнения (2.23), (2.27) – (2.29), найдем угол α:

$$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{Q(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 g l}\right). \tag{2.30}$$

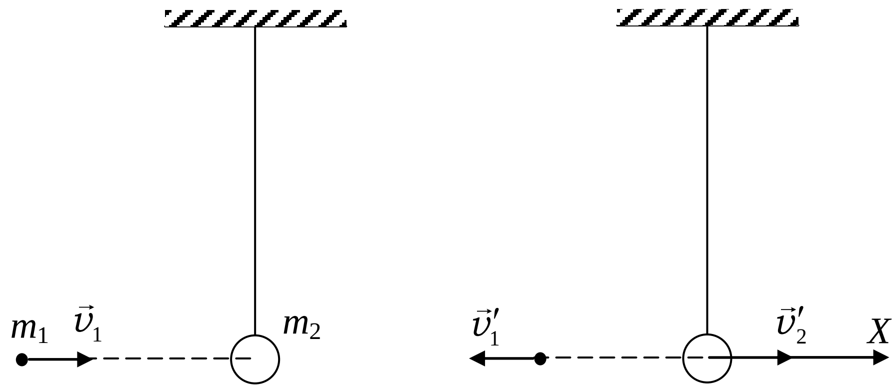
Подставив в уравнение (2.30) данные задачи, получим: $\alpha = \arccos 0{,}75 = 41°$.

Ответ: $\alpha = \arccos\left(1 - \dfrac{Q(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 g l}\right)$; $\alpha = 41°$.

Задача 2.5. Пуля массой 20 г летит горизонтально со скоростью 100 м/с и сталкивается с шаром массой 2 кг, подвешенным на нити. Найти импульс шара после удара и долю энергии пули, переданной шару при ударе, если удар лобовой и абсолютно упругий.

Дано:	СИ
$m_1 = 20$ г;	0,02 кг
$m_2 = 2$ кг;	
$\upsilon_1 = 100$ м/с.	
$\vec{p}\,'_2$, η – ?	

Решение:



а б

Рис. 2.4

Выберем начало отсчета потенциальной энергии системы в поле тяжести Земли на высоте, на которой находятся пуля и центр шара в момент удара. Тогда до удара (рис. 2.4, а) и сразу после него (рис. 2.4, б) потенциальная энергия равна нулю.

В течение кратковременного взаимодействия при ударе на шар действуют силы тяжести и натяжения нити, которые уравновешивают друг друга. Сила взаимодействия пули с шаром является внутренней и не меняет полный импульс системы.

Если пренебречь силой тяжести, действующей на пулю, малой по сравнению с силой взаимодействия, то можно считать, что результирующая сила, действующая на систему, равна нулю. Следовательно, выполняется закон сохранения импульса:

$$\vec{p}_{\text{сист}} = \vec{p}\,'_{\text{сист}}, \tag{2.31}$$

где $\vec{p}_{\text{сист}}$, $\vec{p}\,'_{\text{сист}}$ – импульсы системы до и после удара.

При абсолютно упругом ударе (согласно его определению) диссипации механической энергии не происходит и наряду с импульсом при ударе сохраняется механическая энергия:

$$W_{\text{м сист}} = W'_{\text{м сист}}, \tag{2.32}$$

где $W_{\text{м сист}}$, $W'_{\text{М сист}}$ – механическая энергия системы до и после удара.

Так как до удара шар покоился, импульс и механическая энергия системы равны импульсу и кинетической энергии пули соответственно:

$$\vec{p}_{\text{сист}} = m_1\vec{\upsilon}_1; \tag{2.33}$$

$$W_{\text{м сист}} = \frac{m_1{\upsilon_1}^2}{2}. \tag{2.34}$$

Импульс и механическая энергия системы после удара рассчитываются по формулам:

$$\vec{p}'_{\text{сист}} = m_1\vec{\upsilon}'_1 + m_2\vec{\upsilon}'_2; \tag{2.35}$$

$$W'_{\text{м сист}} = \frac{m_1{\upsilon'_1}^2}{2} + \frac{m_2{\upsilon'_2}^2}{2}. \tag{2.36}$$

После подстановки формул (2.33) и (2.35) в уравнение (2.31) оно примет вид:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 = m_1\vec{\upsilon}'_1 + m_2\vec{\upsilon}'_2. \tag{2.37}$$

Запишем равенство (2.37) в проекциях. Будем рассматривать движение пули и шара относительно системы отсчета, в которой ось $OX \uparrow\uparrow \vec{\upsilon}_1$ (см. рис. 2.4). Столкновение тел лобовое, поэтому ненулевыми будут проекции скорости тел только на ось OX:

$$m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_{1x} + m_2\upsilon'_{2x}. \tag{2.38}$$

Следовательно,

$${\upsilon'_1}^2 = {\upsilon'_{1x}}^2; \tag{2.39}$$

$${\upsilon'_2}^2 = {\upsilon'_{2x}}^2. \tag{2.40}$$

Преобразовав формулу (2.37) с учетом выражений (2.34), (2.36), (2.39) и (2.40), получим:

$$\frac{m_1{\upsilon_1}^2}{2} = \frac{m_1{\upsilon'_{1\text{x}}}^2}{2} + \frac{m_2{\upsilon'_{2x}}^2}{2}. \tag{2.41}$$

Решение системы уравнений (2.38), (2.41) имеет вид (см. [2, 3]):

$$\upsilon_2' = \upsilon_{2x}' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1. \tag{2.42}$$

С учетом равенства (2.41) выражение для импульса шара после удара примет вид:

$$\vec{p}_2' = m_2\vec{\upsilon}_2' = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{\upsilon}_1. \tag{2.43}$$

Таким образом, направление импульса $\vec{p}_2'$ совпадает с направлением скорости $\vec{\upsilon}_1$: $\vec{p}_2' \uparrow\uparrow \vec{\upsilon}_1$.

Для расчета значения модуля импульса используем данные задачи: $p_2' = \frac{2 \cdot 0{,}02 \cdot 2}{0{,}02 + 2} \cdot 100 = 4$ кг·м/с.

Энергия, которую передает пуля шару, равна кинетической энергии шара после удара: $W_{\text{к}\,2}' = \frac{m_2\upsilon_2'^2}{2}$. Энергия пули до удара описывается формулой (2.34). Доля энергии, которую пуля передает шару,

$$\eta = \frac{W_{\text{к}\,2}'}{W_{\text{к}\,1}} = \frac{m_2\upsilon_2'^2}{m_1\upsilon_1^2} = \frac{m_2\left(2m_1\upsilon_1\right)^2}{\left(m_1 + m_2\right)^2 m_1\upsilon_1^2} = \frac{4m_2 m_1}{\left(m_1 + m_2\right)^2}. \tag{2.44}$$

Подставим данные задачи в формулу (2.44):

$$\eta = \frac{4 \cdot 2 \cdot 0{,}02}{\left(2 + 0{,}02\right)^2} = 0{,}04.$$

Ответ: $\vec{p}_2' = m_2\vec{\upsilon}_2' = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{\upsilon}_1$, $\vec{p}_2' \uparrow\uparrow \vec{\upsilon}_1$, $p_2' = 4$ кг·м/с;

$\eta = \frac{W_{\text{к}\,2}'}{W_{\text{к}\,1}} = \frac{4m_2 m_1}{\left(m_1 + m_2\right)^2}$, $\eta = 0{,}04$.

3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

В замкнутой системе момент импульса сохраняется. Если момент силы относительно оси равен нулю, то момент импульса относительно этой оси остается с течением времени постоянным.

Задача 3.1. В центре круглой платформы стоит человек, раскинув руки в стороны. Платформа вращается вокруг вертикальной оси симметрии. Во сколько раз изменится угловая скорость вращения платформы с человеком, если человек прижмет руки к груди, тем самым изменив момент инерции системы в 1,2 раза. Трением пренебречь.

Решение: Для системы «человек – платформа» сохраняется момент импульса относительно оси вращения, так как моменты сил тяжести и реакции опоры относительно оси вращения равны нулю, а трением пренебрегают.

Обозначим I_1 момент инерции платформы относительно оси вращения; I_2 – момент инерции человека, когда он раскинул руки; I_2' – момент инерции человека, когда он прижал руки к груди. Тогда по закону сохранения момента импульса относительно оси вращения можно записать:

$$\vec{L}_{\text{сист}} = \vec{L}'_{\text{сист}}; \tag{3.1}$$

$$\left(I_1 + I_2\right)\vec{\omega} = \left(I_1 + I_2'\right)\vec{\omega}', \tag{3.2}$$

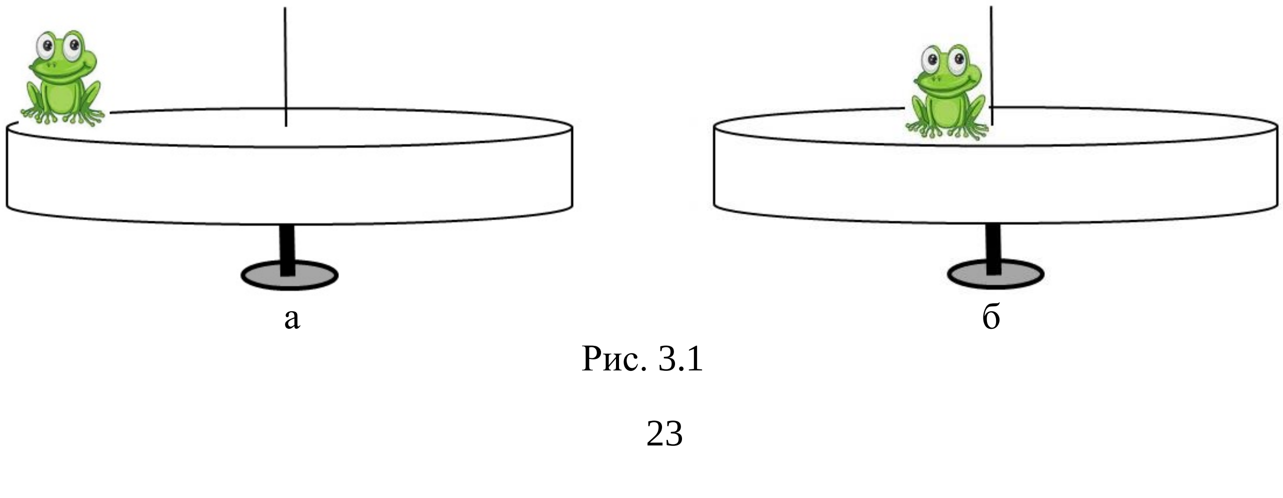
где $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}'$ – угловые скорости системы в соответствующих состояниях.

Когда человек прижимает руки к груди, то его момент инерции уменьшается, соответственно уменьшается и момент инерции всей системы. Чтобы момент импульса системы оставался неизменным, угловая скорость возрастает в 1,2 раза.

Ответ: угловая скорость увеличивается в 1,2 раза.

Задача 3.2. На краю карусели в виде вращающейся платформы сидит лягушка (рис. 3.1, а). Как изменится угловая скорость вращения карусели, если лягушка перепрыгнет в центр карусели (рис. 3.1, б), изменив тем самым момент инерции всей системы относительно оси вращения в *n* раз?

Решение: Когда лягушка перепрыгнет в центр карусели, момент инерции системы уменьшится. Для системы «лягушка – платформа» сохраняется момент импульса относительно оси вращения (см. задачу 3.1). Во сколько раз уменьшится момент инерции системы, во столько же раз увеличатся ее угловая скорость вращения и частота.



а б

Рис. 3.1

Это условие необходимо для выполнения равенств $\vec{L}_{\text{сист}} = \vec{L}'_{\text{сист}}$; $I\vec{\omega} = I'\vec{\omega}'$ и $I\vec{\omega} = \dfrac{I}{n}\vec{\omega}'$.

Сокращая одинаковые множители в правой и левой частях уравнения, получим: $\vec{\omega} = \dfrac{1}{n}\vec{\omega}'$; $\vec{\omega}' = \vec{\omega}\cdot n$.

Ответ: угловая скорость увеличится в n раз.

Задача 3.3. На скамейке Жуковского (вращающемся диске) стоит человек и держит в руках тонкий стержень, расположенный горизонтально так, что ось симметрии диска проходит через середину стержня. Скамейка вращается вокруг своей оси симметрии, делая 5 об/с. Суммарный момент инерции человека и скамейки – 5 кг·м^2, масса стержня – 3 кг, его длина – 2 м. С какой частотой станет вращаться скамейка, если человек повернет стержень и расположит его вертикально вдоль оси симметрии скамейки? Какая работа будет совершена при этом? Трением пренебречь.

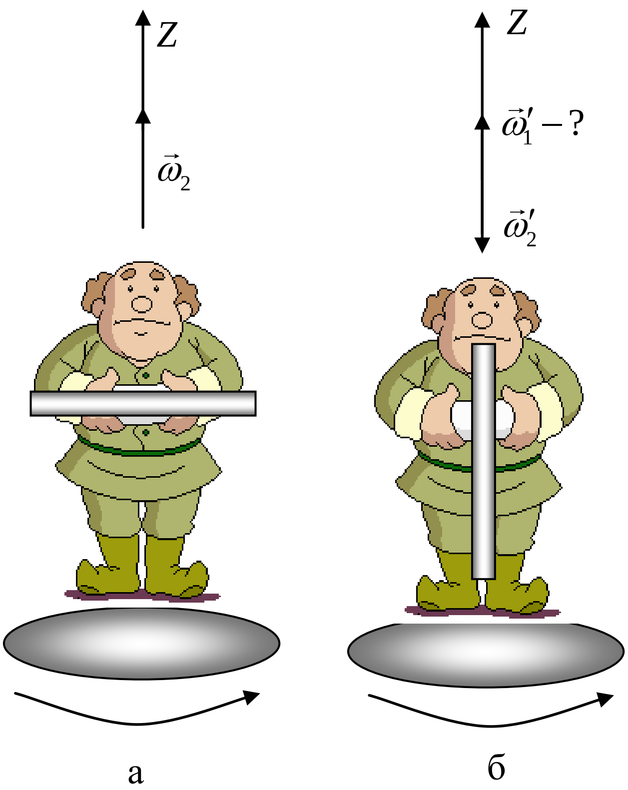


Рис. 3.2

Дано:
n = 5 об/с;
I_1 = 5 кг·м^2;
m_2 = 12 кг;
l = 1 м.
n', $A_{\text{чел}}$ – ?

Решение: Так как ось вращения системы «человек – скамейка – стержень» закреплена, будем рассматривать движение относительно системы отсчета, ось OZ которой совпадает с осью вращения системы и направлена вертикально вверх (рис. 3.2).

Моменты сил тяжести, действующих на все тела, входящие в систему, и силы реакции опоры, действующей на скамейку, в рассматриваемых положениях тел равны нулю, так как линии действия этих сил совпадают с осью вращения системы (система симметрична относительно оси вращения), у сил нет плеч, поэтому они не могут изменять вращательного движения системы.

Силой трения между осью и вращающимся диском при кратковременном изменении положения стержня можно пренебречь. Таким образом, результирующий момент внешних сил можно считать равным нулю и для решения задачи можно применять закон сохранения момента импульса:

$$\vec{L}_{\text{сист}} = \vec{L}'_{\text{сист}}, \tag{3.3}$$

где $\vec{L}_{\text{сист}}$ и $\vec{L}'_{\text{сист}}$ – моменты импульса системы при горизонтальном и вертикальном положениях стержня соответственно.

Момент импульса системы равен векторной сумме моментов импульсов тел, входящих в систему, поэтому

$$\vec{L}_{\text{сист}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = I_1\vec{\omega} + I_2\vec{\omega} = (I_1 + I_2)\vec{\omega}; \tag{3.4}$$

$$\vec{L}'_{\text{сист}} = \vec{L}'_1 + \vec{L}'_2 = I_1\vec{\omega}' + I'_2\vec{\omega}' = (I_1 + I'_2)\vec{\omega}', \tag{3.5}$$

где I_2 и I'_2 – моменты инерции стержня относительно оси вращения при его горизонтальном и вертикальном положениях;

$\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}'$ – угловые скорости системы в соответствующих состояниях.

Направление угловой скорости $\vec{\omega}$ (рис. 3.2, а) вдоль оси вращения вверх определяется по правилу буравчика в соответствии с направлением вращения системы. Направление угловой скорости $\vec{\omega}'$ заранее не известно (определяется при решении задачи), поэтому на рис. 3.2, б оно отмечено знаком вопроса.

Подставив формулы (3.4) и (3.5) в уравнение (3.3), получим соотношение:

$$(I_1 + I_2)\vec{\omega} = (I_1 + I'_2)\vec{\omega}'. \tag{3.6}$$

Отсюда выразим угловую скорость:

$$\vec{\omega}' = \frac{(I_1 + I_2)}{(I_1 + I'_2)}\vec{\omega}. \tag{3.7}$$

Выражение (3.7) позволяет сделать два вывода:

1) угловая скорость системы при вертикальном положении стержня сонаправлена с угловой скоростью системы при его горизонтальном положении: $\vec{\omega}' \uparrow\uparrow \vec{\omega}$, следовательно, и направление вращения системы не меняется;

2) так как моменты инерции величины положительные, модуль угловой скорости системы при вертикальном положении стержня определяется по формуле:

$$\omega' = \frac{(I_1 + I_2)}{(I_1 + I_2')}\omega. \tag{3.8}$$

Связь модулей угловых скоростей $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}'$ с соответствующими частотами вращения n и n' описываются уравнениями:

$$\omega = 2\pi n; \tag{3.9}$$

$$\omega' = 2\pi n'. \tag{3.10}$$

Стержень считается тонким и при вертикальном положении совпадает с осью вращения, поэтому его момент инерции относительно оси вращения можно принять равным нулю:

$$I_2' = 0. \tag{3.11}$$

При горизонтальном положении стержня его момент инерции относительно оси вращения, которая в рассматриваемом случае совпадает с осью симметрии стержня, определяется по формуле:

$$I_2 = \frac{m_2 l^2}{12}. \tag{3.12}$$

Подставив формулы (3.9) – (3.12) в выражение (3.8) и сократив обе части полученного соотношения на 2π, получим формулу для определения частоты вращения системы:

$$n' = \frac{\left(I_1 + m_2 l^2/12\right)}{I_1} n. \tag{3.13}$$

Подставив данные задачи в уравнение (3.13), получим: $n' = 6$ об/с.

Для определения работы, совершаемой человеком при изменении положения стержня, применим теорему об изменении кинетической энергии:

$$W'_{\text{сист}} - W_{\text{сист}} = A_{\text{тр}} + A_{\text{тяж}} + A_{\text{N}} + A_{\text{чел}}, \tag{3.14}$$

где $W_{\text{сист}}$, $W'_{\text{сист}}$ – кинетическая энергия системы при горизонтальном и вертикальном положениях стержня соответственно,

$$W_{\text{сист}} = W_1 + W_2 = \frac{(I_1 + I_2)}{2}\omega^2; \tag{3.15}$$

$$W'_{\text{сист}} = W'_1 + W'_2 = \frac{\left(I_1 + I'_2\right)}{2}\omega'^2. \tag{3.16}$$

Работа сил реакции опоры A_{N}, тяжести $A_{\text{тяж}}$, приложенных к каждому телу, равна нулю. Так как моменты этих сил относительно оси вращения равны нулю, работа сил трения в оси $A_{\text{тр}}$ пренебрежимо мала по условию, поэтому

$$A_{\text{тр}} = A_{\text{тяж}} = A_{\text{N}} = 0. \tag{3.17}$$

Подставив выражения (3.15) – (3.17) в равенство (3.14) и выполнив преобразования полученной формулы с учетом уравнений (3.8) – (3.12), получим формулу для определения работы, совершаемой человеком:

$$A_{\text{чел}} = \frac{\left(I_1 + I'_2\right)}{2}\left(\frac{\left(I_1 + I_2\right)}{\left(I_1 + I'_2\right)}\right)^2 \omega^2 - \frac{\left(I_1 + I_2\right)}{2}\omega^2 = \frac{\left(I_1 + m_2 l^2/12\right)\left(m_2 l^2/12\right)}{2I_1} \cdot 4\pi^2 n^2. \tag{3.18}$$

Подставив численные значения в формулу (3.18), получим: $A_{\text{чел}} = 592$ Дж.

Ответ: $n' = 6$ об/с; $A_{\text{чел}} = 592$ Дж.

4. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Для описания движения макроскопических тел со скоростями, близкими к скорости света, применима релятивистская механика, т. е. механика учитывающая требования специальной теории относительности (СТО). СТО представляет собой физическую теорию пространства и времени для случая пренебрежимо малых гравитационных полей.

В релятивистской механике рассматриваются только инерциальные системы отсчета.

А. Эйнштейн показал, что в СТО классические преобразования Галилея при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой заменяются преобразованиями Лоренца.

Из преобразований Лоренца вытекают следствия.

1. **Относительность одновременности.**

2. **Замедление времени: часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета, идут медленнее покоящихся часов:**

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{4.1}$$

3. **Лоренцево сокращение длины**: размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движения

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}\,. \tag{4.2}$$

4. **Релятивистский закон сложения скоростей**. Пусть материальная точка движется в системе K' вдоль оси x', а система K' движется относительно K со скоростью υ (оси x и x' совпадают). Тогда, произведя вычисления, получим релятивистский закон сложения скоростей:

$$K' \to K \qquad\qquad\qquad K \to K'$$

$$u_x = \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \upsilon u'_x / c^2}; \qquad\qquad u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \upsilon u_x / c^2}. \tag{4.3}$$

Если скорости υ, u'_x, u_x малы по сравнению со скоростью света, то эти формулы переходят в классический закон сложения скоростей. Релятивистский закон сложения скоростей не противоречит второму постулату Эйнштейна: если $u'_x = c$, то $u_x = c$, т. е. скорость c – предельная скорость, которую невозможно превысить.

Согласно представлениям классической механики масса тела есть величина постоянная. Однако опытным путем было установлено, что масса тела зависит от скорости его движения, а именно возрастает с увеличением υ по закону

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \tag{4.4}$$

где m_0 – **масса покоя**, т. е. масса материальной точки, измеренная в той инерциальной системе отсчета, относительно которой точка покоится; m – масса точки в системе отсчета, относительно которой она движется со скоростью υ.

Изменение скорости тела в релятивистской механике влечет за собой изменение массы, а следовательно, и полной энергии, т.е. между массой и энергией существует взаимосвязь. Эту универсальную зависимость – **закон взаимосвязи массы и энергии** – установил А. Эйнштейн:

$$W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{4.5}$$

Любой массе (движущейся m или покоящейся m_0) соответствует определенное значение энергии. Если тело находится в состоянии покоя, то его энергия покоя

$$W_0 = m_0 c^2. \qquad (4.6)$$

В СТО выполняется **закон сохранения релятивистской массы и энергии**: изменение полной энергии тела (или системы) сопровождается эквивалентным изменением его массы:

$$\Delta m = \Delta W / c^2; \quad \Delta W = \Delta m c^2. \qquad (4.7)$$

В релятивистской динамике значение кинетической энергии $W_к$ определяется как разность энергий движущегося W и покоящегося W_0 тел:

$$W_k = W - W_0 = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1 \right). \qquad (4.8)$$

Задача 4.1. Релятивистское сокращение длины ракеты составляет 10 %. Определить скорость движения ракеты.

Дано:
$\frac{l_0 - l}{l_0} \cdot 100\ \% = 10\ \%.$
$\upsilon - ?$

Решение: По условию задачи релятивистское сокращение длины задано в процентах. Это означает, что относительное сокращение длины равно 0,10. Относительным изменением длины называют отношение модуля изменения длины к ее первоначальному значению:

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}; \qquad (4.9)$$

$$l_0 - l = l_0 (1 - \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}); \qquad (4.10)$$

$$1 - \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} = 0{,}10. \qquad (4.11)$$

Отношение $\frac{\upsilon}{c} = 0{,}44$.

Принято определять скорость в долях скорости света в вакууме, поэтому записывают, что скорость ракеты составляет $0{,}44 \cdot c$.

Ответ: $\upsilon = 0{,}44 \cdot c$.

Задача 4.2. По часам на ракете, движущейся со скоростью $0{,}8\cdot c$ относительно планеты (c – скорость света в вакууме), прошел 1 год. Какое время измерили часы на планете?

Дано:	
$\upsilon = 0{,}8\cdot c$;	
$\tau_0 = 1$ год.	
τ – ?	

Решение: Согласно эффекту замедления времени часы в движущейся ракете идут медленнее. Время, измеряемое в ракете, обозначим τ_0. Тогда время, измеряемое часами на планете, будет равно τ,

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \tag{4.12}$$

Подставим численные значения:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0{,}8\cdot c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{0.6} = 1{,}7\,.$$

Ответ: τ = 1,7 года.

Задача 4.3. Частица движется со скоростью $0{,}6\cdot c$ (c – скорость света в вакууме). На сколько процентов отличается масса покоя частицы от ее массы?

Дано:	
$\upsilon = 0{,}6\cdot c$.	
$\frac{m-m_0}{m}$ – ?	

Решение: С увеличением скорости движения масса частицы возрастает:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \tag{4.13}$$

$$\frac{m-m_0}{m} = 1-\frac{m_0}{m} = 1-\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\,. \tag{4.14}$$

Подставим численные значения:

$$\frac{m-m_0}{m} = 1-\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = 1-0{,}8 = 0{,}2. \tag{4.15}$$

Ответ: масса покоя частицы на 20 % меньше ее массы.

Задача 4.4. Тело движется со скоростью, при которой его масса в два раза больше массы покоя. Как изменилась при этом длина тела в направлении движения?

Дано:	
$m = 2m_0$.	
$\dfrac{l_0 - l}{l_0}$ – ?	

Решение: Найдем, какую часть от скорости света составляет скорость движения тела. По условию задачи масса увеличилась в два раза, поэтому

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} = 2m_0; \tag{4.16}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} = 2. \tag{4.17}$$

Тогда отношение $\dfrac{\upsilon^2}{c^2}$ = 0,75.

В задаче 4.1 мы уже определяли относительное изменение длины как

$$l_0 - l = l_0(1-\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}). \tag{4.18}$$

Подставим отношение $\dfrac{\upsilon^2}{c^2}$ = 0,75, полученное выше, в формулу (4.18):

$$\frac{l_0 - l}{l_0} = 1-\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}; \tag{4.19}$$

$$\frac{l_0 - l}{l_0} = 1-\sqrt{1-0,75} = 0,5.$$

Ответ: длина тела уменьшилась в 2 раза.

Задача 4.5. Ускоритель сообщил радиоактивному ядру скорость 0,40·с (*c* – скорость света в вакууме). В момент вылета из ускорителя ядро выбрасывает в направлении своего движения β-частицу со скоростью 0,60с относительно ядра. Какова скорость β-частицы относительно ускорителя?

Дано:	
$u = 0{,}4 \cdot c$;	
$\upsilon_1 = 0{,}6 \cdot c$.	
υ_2 – ?	

Решение: В соответствии с релятивистским законом сложения скоростей (4.3)

$$\upsilon_2 = \frac{u+\upsilon_1}{1+\dfrac{u \cdot \upsilon_1}{c^2}}; \tag{4.20}$$

$$\upsilon_2 = \frac{u+\upsilon_1}{1+\dfrac{u\cdot\upsilon_1}{c^2}} = \frac{0,4c+0,6c}{1+\dfrac{0,4c\cdot 0,6c}{c^2}} = \frac{c}{1,24} = 0,806\ c. \qquad (4.21)$$

Ответ: $\upsilon_2 = 0{,}8\ c$.

Задача 4.6. Скорость релятивистской частицы в 2 раза меньше скорости света в вакууме. Найти отношение кинетической энергии частицы к ее энергии покоя.

Дано:

$\dfrac{c}{\upsilon} = 0,5.$

$\dfrac{W_k}{W_0}$ – ?

Решение: Так как движение происходит со скоростью, близкой к скорости света, то кинетическая энергия частицы вычисляется по формуле;

$$W_k = W - W_0 = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1\right). \qquad (4.22)$$

Тогда отношение кинетической энергии к энергии покоя будет таким:

$$\frac{W_k}{W_0} = \frac{m_0c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1\right)}{m_0c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1. \qquad (4.23)$$

Подставим численные значения в формулу (4.23) и получим:

$$\frac{W_k}{W_0} = \frac{1}{\sqrt{1-0,25}} - 1 = 1{,}15 - 1 = 0{,}15.$$

Кинетическая энергия составляет 15 % от энергии покоя частицы.

Ответ: $\dfrac{W_k}{W_0} = 0{,}15.$

Библиографический список

1. С а в е л ь е в И. В. Курс общей физики. Механика. Молекулярная физика / И. В. С а в е л ь е в. М., 2007. Т. 1. 432 с.

2. Ф и р г а н г Е. В. Руководство к решению задач по курсу общей физики / Е. В. Ф и р г а н г. СПб, 2009. 352 с.

3. Т р о ф и м о в а Т. И. Курс физики / Т. И. Т р о ф и м о в а. М., 2006. 560 с.

4. К у з н е ц о в С. И. Справочник по физике / С. И. К у з н е ц о в, К. И. Р о г о з и н. Томск, 2014. 220 с.

Учебное издание

АРОНОВА Тамара Алексеевна, ДРОЗДОВА Илга Анатольевна

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ. СТО.
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учебно-методическое пособие

Редактор Н. А. Майорова

***

Подписано в печать 27.12.2016. Формат $60 \times 84\ ^{1}/_{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,2. Уч.-изд. л. 2,4.
Тираж 800 экз. Заказ .

**

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35