С. А. ГЕЛЬВЕР, С. Н. СМЕРДИН

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ
(ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ)

ОМСК 2017

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

С. А. Гельвер, С. Н. Смердин

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ
(примеры решения задач)

Утверждено методическим советом университета
в качестве учебно-методического пособия
к решению задач по физике

Омск 2017

УДК 537.8 (075.8)
ББК 22.334я73
С32

Электромагнетизм (примеры решения задач): Учебно-методическое пособие / С. А. Гельвер, С. Н. Смердин; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2017. 32 с.

Разобраны примеры решения типовых задач из раздела физики «Электромагнетизм», которые должны уметь решать студенты в соответствии с программой курса общей физики для технических вузов. В начале каждого раздела содержатся краткие теоретические сведения по разделу физики «Электромагнетизм» с приведением основных формул и законов.

Предназначено для самостоятельной работы студентов первого курса очной формы обучения.

Библиогр.: 4 назв. Рис. 22.

Рецензенты: канд. техн. наук, доцент А. В. Колунин;
канд. техн. наук, доцент Т. В. Ковалева.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Для формирования у студентов естественно-научного мировоззрения и получения обширного объема фундаментальных знаний по физике в новом ФГОСЗ ВПО предполагается, что студенты должны часто самостоятельно получать новые знания неуспешно применять их на практике. Целью данного учебно-методического пособия является оказание помощи студентам в самостоятельном усвоении основных физических величин и законов, а также методики решения типовых задач по разделу «Электромагнетизм».

Изучение физики формирует и углубляет у студентов основные представления о важнейших физических закономерностях, лежащих в основе работы приборов и устройств, эксплуатируемых на железнодорожном транспорте.

Успешное изучение общего курса физики в вузе невозможно без умения применять физические законы на практике, однако именно решение задач вызывает наибольшие затруднения у студентов. Это связано с тем, что решение конкретных задач требует не только знания физических законов, но и владения определенными методами и приемами решения задач по курсу общей физики.

В настоящем учебно-методическом пособии представлен краткий теоретический материал по разделу физики «Электромагнетизм» [1 – 3]. Даны рекомендации по построению схематических чертежей, поясняющих условия задач, и приведены примеры решения задач и тестов по основным темам электромагнетизма. Такой подход делает изложение материала достаточно полным и логически завершенным. Примеры решения типовых задач дают возможность студенту ознакомиться с методами их решения, лучше понять физические законы и усвоить основные положения и законы электромагнетизма, получить навыки применения изученных положений в практической инженерной деятельности. Приведенные примеры решения задач помогут студентам, не усвоившим какую-либо тему по разделу «Электромагнетизм», самим разобраться в методике решения задач определенного типа. В пособии [4] приведены задачи для аудиторных занятий и самостоятельной работы студентов.

Большинство задач иллюстрируется рисунками, использование которых значительно упрощает решение, наглядно показывает объективность выбранного пути решения и помогает лучше понять и усвоить рассматриваемое физическое явление или процесс, что способствует глубокому усвоению знаний.

1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Магнитное поле создается движущимися зарядами или электрическими токами. Посредством магнитного поля осуществляется взаимодействие между токами или движущимися зарядами. Для количественной характеристики магнитного поля служит физическая величина – вектор магнитной индукция $\vec{B}$, которая является силовой характеристикой поля. В системе СИ магнитная индукция измеряется в теслах (Тл).

Магнитное поле в отличие от электростатического носит вихревой характер. Графически магнитное поле изображают при помощи замкнутых линий магнитной индукции. Линией магнитной индукции называют линию, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора магнитной индукции. Изображая магнитные линии, можно наглядно представить, как меняется в пространстве вектор магнитной индукции поля по величине и направлению.

Линии индукции магнитного поля прямого проводника с током имеют вид окружностей, охватывающих провод (рис. 1).

Направление вектора магнитной индукции $\vec{B}$ определяется с помощью правила буравчика: если буравчик с правой резьбой ввинчивать по направлению тока (рис. 2), то направление вращения рукоятки буравчика совпадает с направлением индукции магнитного поля, создаваемого этим током.

Касательная в любой точке линии позволяет определить направление вектора магнитной индукции (рис. 3).

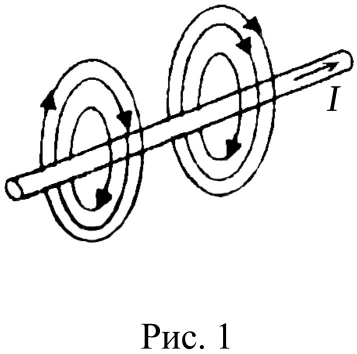


Рис. 1

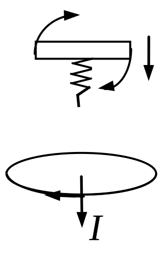


Рис. 2

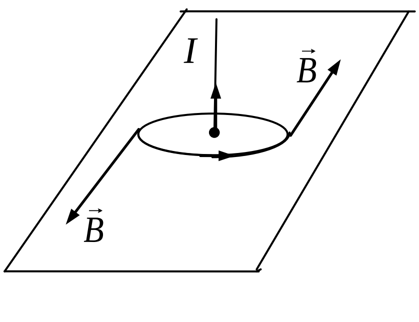


Рис. 3

Магнитное поле кругового витка с током показано на рис. 4. Линии индукции поля изображены в плоскости, перпендикулярной витку и проходящей через ось симметрии.

Направление вектора магнитной индукции на оси OO', в частности в центре витка с током (рис. 5), можно определить также по правилу буравчика: если буравчик с правой резьбой вращать по направлению тока, то поступательное движение буравчика покажет направление $\vec{B}$.

Магнитное поле соленоида изображено на рис. 6. Направление вектора магнитной индукции на оси соленоида определяется так же, как и в случае кругового тока.

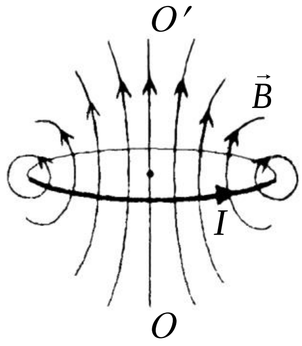


Рис. 4

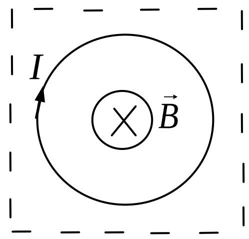


Рис. 5

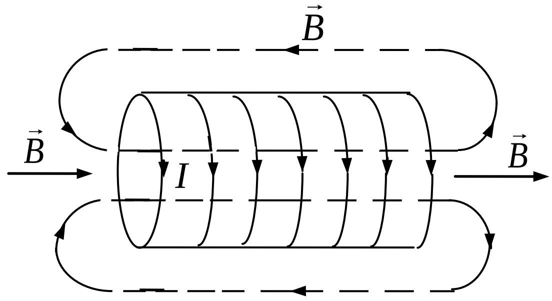


Рис. 6

При решении задач по электромагнетизму надо иметь в виду, что для магнитного поля в вакууме и воздухе, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции полей: если имеется несколько токов, каждый из которых создает магнитное поле, то магнитные поля не искажают друг друга, а вектор магнитной индукции результирующего поля равен векторной сумме магнитных индукций полей, созданных каждым током в отдельности:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i. \tag{1}$$

Для записи векторного уравнения (1) в скалярной форме выбирают координатные оси x, y, z и находят проекции вектора $\vec{B}$ на эти оси:

$$B_x = B_{1x} + B_{2x} + \ldots + B_{nx}; \tag{2}$$

$$B_y = B_{1y} + B_{2y} + \ldots + B_{ny}; \tag{3}$$

$$B_z = B_{1z} + B_{2z} + \ldots + B_{nz}. \tag{4}$$

При решении задач на принцип суперпозиции следует отметить, что круговые витки с током, перпендикулярные плоскости рисунка, принято изображать следующим образом: сторона витка, на которой ставится стрелка, указывающая направление тока, должна быть ближайшей «к нам» (см. рис. 3).

З а д а ч а 1. На рис. 7 изображены две линии магнитной индукции бесконечно длинного проводника с током, расположенного перпендикулярно плоскости рисунка. В какой точке вектор индукции магнитного поля направлен вверх и имеет наименьшую величину?

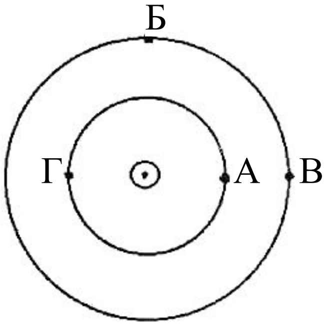


Рис. 7

Решение. При данном направлении тока линии магнитной индукции представляют собой окружности, касательные к которым направлены против вращения часовой стрелки. Это выполняется в точках А и В. Еще мы должны учесть, что величина вектора магнитной индукции обратно пропорциональна расстоянию от проводника до точки наблюдения. Тогда меньшая величина магнитного поля будет в точке В.

О т в е т: точка В.

З а д а ч а 2. Два бесконечно длинных параллельных проводника с токами I_1 и I_2 расположены так, как показано на рис. 8. Найти величину магнитной индукции поля в точке А, расположенной посередине между проводами, если I_1 = 4 А, I_2 = 2 А, a = 10 см.

Дано:	СИ
I_1 = 4 А;	
I_2 = 2 А;	
a = 10 см	0,1 м
B – ?	

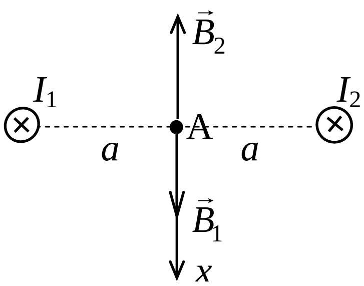


Рис. 7

Решение. Применив правило буравчика, определим направление векторов индукции $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ в точке А, создаваемых каждым током в отдельности.

Для нахождения магнитной индукции $\vec{B}$ в точке А воспользуемся принципом суперпозиции магнитных полей.

Запишем принцип суперпозиции в векторном виде:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2. \quad (5)$$

Выбрав координатную ось *x,* направленную вниз, запишем выражение (5) в проекциях на ось *x*:

$$B = B_1 - B_2. \quad (6)$$

Магнитные индукции B_1 и B_2 бесконечно длинных проводников с током определим по формулам:

$$B_1 = k_m \frac{2I_1}{a}; \tag{7}$$

$$B_2 = k_m \frac{2I_2}{a}, \tag{8}$$

где k_m – коэффициент пропорциональности, $k_m = 10^{-7}$ Н/А^2.

Подставив формулы (7) и (8) в выражение (6), получим:

$$B = \frac{2k_m}{a}\left(I_1 - I_2\right). \tag{9}$$

Вычислим значение магнитной индукции, подставив данные задачи в уравнение (9):

$$B = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{0{,}1}(4 - 2) = 4 \cdot 10^{-6} \text{ (Тл)}.$$

О т в е т: B = 4 мкТл.

З а д а ч а 3. Два бесконечно длинных проводника с токами I_1 и I_2 и круговой контур с током I_3 расположены так, как показано на рис. 9. Найти магнитную индукцию поля в точке А, если a = 10 см, радиус витка R = 5 см, I_1 = 2 А, I_2 = 4А, I_3 = 3 А.

Дано:	СИ
I_1 = 2 А;	
I_2 = 4 А;	
I_3 = 3 А;	
R = 5 см;	0,05 м
a = 10 см	0,1 м
B – ?	

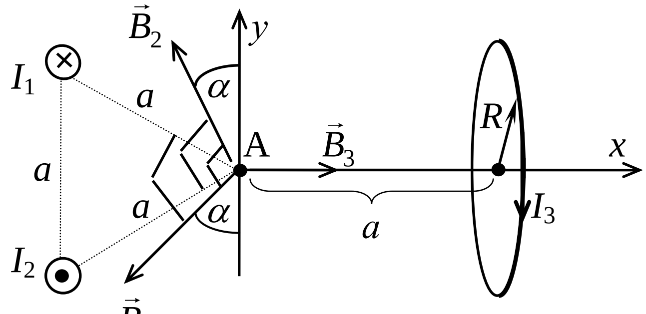


Рис. 9

Решение. Применив правило буравчика, определим направление векторов индукции $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ и $\vec{B}_3$, создаваемых каждым током в отдельности. Для нахождения магнитной индукции $\vec{B}$ в точке А воспользуемся принципом суперпозиции магнитных полей.

Запишем принцип суперпозиции в векторном виде:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3. \quad (10)$$

Все векторы $\left(\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3\right)$ лежат в одной плоскости.

Запишем выражение (10) в проекциях на оси x и y:

$$B_x = B_3 - B_2\sin\alpha - B_1\sin\alpha; \quad (11)$$

$$B_y = B_2\cos\alpha - B_1\cos\alpha; \quad (12)$$

$$B_z = 0, \quad (13)$$

где $\alpha = 30°$.

Значения магнитных индукций B_1, B_2 и B_3 определим по формулам:

$$B_1 = k_m \frac{2I_1}{a}; \quad (14)$$

$$B_2 = k_m \frac{2I_2}{a}; \quad (15)$$

$$B_3 = k_m \frac{2\pi I_3 R^2}{\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}}. \quad (16)$$

Подставив формулы (14) – (16) в выражения (11) и (12), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} B_x = 2k_m \left[\dfrac{\pi I_3 R^2}{(R^2 + a^2)^{3/2}} - \dfrac{\sin\alpha}{a}(I_2 + I_1) \right]; \\ B_y = \dfrac{2k_m \cos\alpha}{a}(I_2 - I_1). \end{cases} \quad (17)$$

Рассчитаем проекции магнитной индукции, подставив данные задачи в выражения (17):

$$B_x = 2 \cdot 10^{-7} \left[\frac{3{,}14 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \pi I_3 R^2}{(25 \cdot 10^{-4} + 10^{-2})^{3/2}} - \frac{\sin 30°}{0{,}1}(4 + 2) \right] = -26 \cdot 10^{-6} \text{ (Тл)};$$

$$B_y = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot \cos 30°}{0{,}1}(4 - 2) = 3{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ (Тл)}.$$

Величина магнитной индукции в точке А может быть определена через ее проекции:

$$B = \sqrt{B_x{}^2 + B_y{}^2 + B_z{}^2}; \quad (18)$$

$$B = 4{,}4 \cdot 10^{-6} \text{ (Тл)}.$$

О т в е т: 1) проекции вектора магнитной индукции имеют следующие значения: $\vec{B}$ = {–2,6 мкТл; 3,5 мкТл; 0}; 2) величина вектора магнитной индукции B составляет 4,4 мкТл.

2. СИЛА АМПЕРА. СИЛА ЛОРЕНЦА

В магнитном поле на движущийся заряд действует сила Лоренца:

$$\vec{F}_{\text{Л}} = q\left[\vec{\upsilon} \times \vec{B}\right], \tag{28}$$

где q – электрический заряд;

$\vec{\upsilon}$ – его скорость;

$\vec{B}$ – магнитная индукция внешнего поля.

Направление силы Лоренца определяется исходя из определения векторного произведения или по правилу «левой руки» (при этом надо учитывать знак заряда). Правило «левой руки» заключается в следующем: четыре пальца левой руки располагают по направлению скорости частицы, при этом линии магнитной индукции должны входить в ладонь, а отогнутый на 90° большой палец укажет направление силы Лоренца, действующей на положительно заряженную частицу. Если частица имеет отрицательный заряд q, то сила Лоренца будет направлена в противоположную сторону (рис. 10).

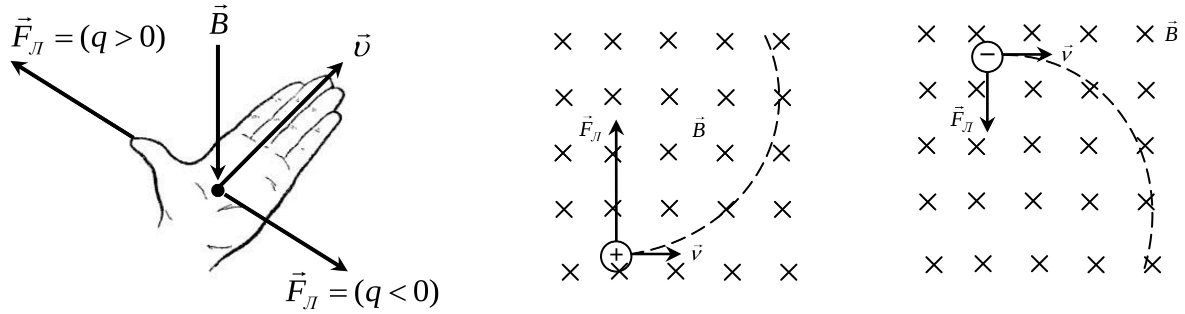


Рис. 10

Сила Лоренца всегда направлена перпендикулярно скорости заряженной частицы, поэтому работы над частицей не совершает.

На проводник с током, находящийся в магнитном поле, действуют сила, называемая силой Ампера. Сила Ампера, приложенная к элементу проводника с током $Id\vec{\ell}$, определяется по формуле:

$$d\vec{F}_A = \left[Id\vec{\ell} \times \vec{B} \right]. \tag{20}$$

В частности, если поле однородно, то на прямолинейный проводник с током длиной ℓ действует сила

$$F_A = IB\ell\sin\alpha, \tag{21}$$

где α – угол между направлением тока и вектором магнитной индукции.

Направление силы Ампера также определяется по правилу «левой руки»: четыре пальца левой руки располагают по направлению тока в проводнике, при этом линии магнитной индукции должны входить в ладонь, а отогнутый на 90° большой палец укажет направление силы Ампера, действующей на проводник с током (рис. 11).

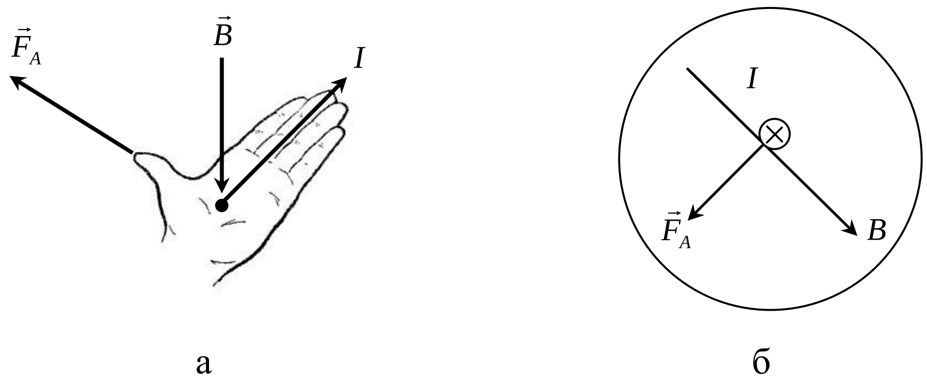


Рис. 11

Примеры решения задач

Задача 4. В магнитном поле находится проводник с током. Различные варианты направления тока в проводнике и вектора магнитной индукции показаны на рис. 12. В каком случае сила Ампера будет направлена вверх?

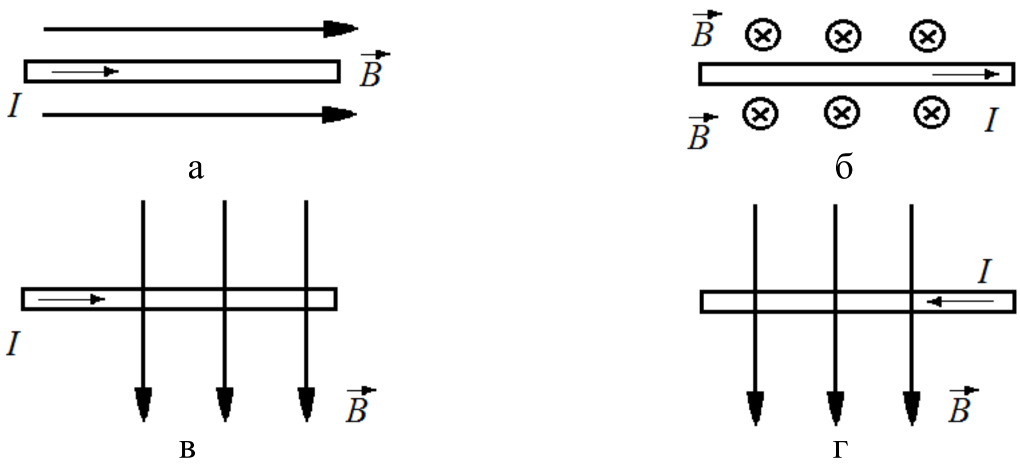


Рис. 12

Решение. Со стороны магнитного поля на проводник будет действовать сила Ампера. Направление силы Ампера определяется по правилу «левой руки». Расположите четыре пальца своей левой руки по направлению тока, при этом линии магнитной индукции должны входить в ладонь, а отогнутый на 90° большой палец будет указывать вверх для второго случая.

Ответ: случай 2.

Задача 5. В магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ поместили две разноименно заряженные пластины, расстояние между которыми равно d. Между пластинами движется поток электронов со скоростью $\vec{\upsilon}$. Отклонения пучка электронов в электрическом и магнитном поле не происходит, а векторы $\vec{\upsilon}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны. Каково напряжение U между пластинами?

Решение. Со стороны электрического поля, созданного двумя разноименно заряженными пластинами, на электрон будет действовать сила

$$F = qE = qU/d. \tag{22}$$

Со стороны магнитного поля на движущийся электрон будет действовать сила Лоренца

$$F = q\upsilon B. \tag{23}$$

Так как траектория пучка электронов не искажается, то действие электрического и магнитного поля будет взаимно скомпенсированным, поэтому равны и величины сил:

$$qU/d = q\upsilon B. \tag{24}$$

Отсюда $U = d\upsilon B$.

Ответ: $U = d\upsilon B$.

Задача 6. Протон и альфа-частица ускоряются из состояния покоя в одинаковом электрическом поле и, попадая в однородное магнитное поле, движутся по окружностям. Протон движется по окружности радиусом R. По какой окружности движется альфа-частица?

Решение. Для электрического поля можно записать закон сохранения энергии

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = qU. \tag{25}$$

Выразим отсюда скорость для протона:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2qU}{m}}\,. \tag{26}$$

Так как альфа-частица – это ядро гелия, состоящее из двух протонов и двух нейтронов, то для альфа-частицы будет справедливо соотношение:

$$\upsilon_\alpha = \sqrt{\frac{qU}{m}}\,. \tag{27}$$

В магнитном поле заряженные частицы движутся по окружностям радиусом *R*. Радиусы орбит *R* протона и альфа-частицы можно найти из следующих соотношений:

$$m\frac{\upsilon^2}{R} = q\upsilon B\sin\alpha; \tag{28}$$

$$m_\alpha \frac{\upsilon_\alpha^2}{R_\alpha} = q_\alpha \upsilon_\alpha B\sin\alpha \tag{29}$$

(более подробное решение приведено в задаче 8). Выражаем отсюда радиусы орбит $R = \frac{m\upsilon}{2qB}$, $R_\alpha = \frac{m\upsilon}{qB}$ и подставляем в эти выражения формулы (26) и (27) для расчета скоростей. Тогда радиусы орбит заряженных частиц будут связаны соотношением

$$\frac{R}{R_\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{30}$$

а радиус орбиты альфа-частицы $R_\alpha = \sqrt{2}R$.

Ответ: $R_\alpha = \sqrt{2}R$.

Задача 7. Прямолинейный проводник с током 1 А находится в однородном магнитном поле и поле тяжести. Проводник расположен горизонтально и перпендикулярно линиям индукции магнитного поля и находится в равновесии.

С каким ускорением начнет двигаться проводник, если по нему будет течь ток 0,5 А в прежнем направлении?

Дано:
I_1 = 1 А;
I_2 = 0,5 А

a – ?

Решение. Чтобы горизонтально расположенный проводник не падал в магнитном поле под действием силы тяжести $m\vec{g}$, индукция магнитного поля $\vec{B}$ должна быть направлена горизонтально и перпендикулярно проводнику (рис. 13). В этом случае силу тяжести уравновесит сила Ампера $\vec{F}_{A1}$, направление которой определяем по правилу «левой руки».

Запишем условие равновесия проводника с током I_1 в векторном виде и в проекциях на ось Oy:

$$\vec{F}_{A1} + m\vec{g} = 0; \tag{31}$$

$$-F_{A1} + mg = 0; \tag{32}$$

$$mg = F_{A1}. \tag{33}$$

Силу Ампера найдем через характеристики проводника и поля:

$$F_{A1} = I_1 B\ell \sin\alpha, \tag{34}$$

где $\alpha = 90°$, $\sin 90° = 1$;

ℓ – длина проводника.

Подставим формулу (34) в уравнение (33):

$$mg = I_1 B\ell. \tag{35}$$

Если силу тока в проводнике уменьшить, то сила Ампера F_{A2} будет меньше силы тяжести и проводник начнет падать с ускорением (рис. 14).

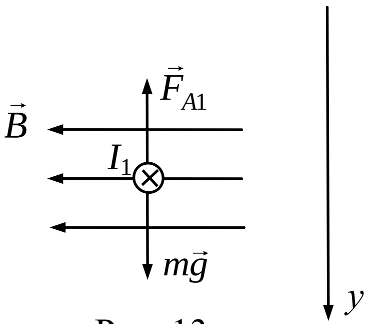


Рис. 13

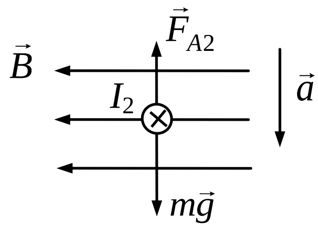


Рис. 14

Запишем уравнение движения проводника в векторном виде:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{A2}. \tag{36}$$

Перепишем уравнение (36) в проекциях на ось y:

$$ma_y = mg - F_{A2}. \tag{37}$$

Силу Ампера найдем через характеристики проводника и поля:

$$F_{A2} = I_2 B\ell \sin\alpha;\ \alpha = 90°;\ \sin\alpha = 1. \tag{38}$$

Подставим формулу (38) в выражение (37):

$$ma_y = mg - I_2 B\ell. \tag{39}$$

В уравнении (39) неизвестны магнитная индукция, масса и длина проводника. От этих неизвестных можно избавиться, если воспользоваться условием равновесия проводника, когда по нему течет ток I_1 (см. рис. 13).

Подставим формулу (35) в уравнение (39):

$$ma_y = I_1 B\ell - I_2 B\ell = I_1 B\ell\left(1 - \frac{I_2}{I_1}\right); \tag{40}$$

$$ma_y = mg\left(1 - \frac{I_2}{I_1}\right). \tag{41}$$

Исходя из уравнения (41) получим расчетную формулу:

$$a_y = g\left(1 - \frac{I_2}{I_1}\right). \tag{42}$$

Введем данные задачи в формулу (42) и получим значение проекции ускорения:

$$a_y = 9{,}8(-1/1 + 0{,}5) = 4{,}8\ (\text{м/с}^2).$$

Ответ: проводник будет двигаться вертикально вниз с ускорением 4,8 м/с^2.

Задача 8. Альфа-частица влетела в однородное магнитное поле с индукцией 300 мТл перпендикулярно к направлению линий индукции, после этого она стала двигаться по окружности радиусом 0,2 мм. Определить величину скорости и период обращения частицы по окружности.

Дано:	СИ	
B = 300 мТл;	0,3 Тл	*Решение*. На движущийся заряд в магнитном поле действует сила Лоренца:
R = 0,2 мм;	$2\cdot10^{-4}$ м	$$F = q_\alpha \upsilon B \sin\alpha. \tag{43}$$
$m_\alpha = 6{,}64\cdot10^{-27}$ кг;		
$q_\alpha = 3{,}2\cdot10^{-19}$ Кл;		Направление силы Лоренца определяется по правилу «левой руки». Как видно из рис. 15, сила Лоренца перпендикулярна скорости, поэтому она вызывает движение альфа-частицы по окружности радиусом R.
$\alpha = 90°$		
υ – ?		
T – ?		

На альфа-частицу также действует сила тяжести $m_\alpha \vec{g}$, но она значительно меньше силы Лоренца, поэтому силой тяжести можно пренебречь.

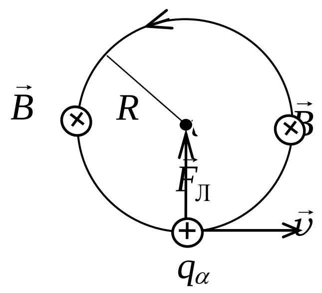


Рис. 15

При таком движении альфа-частицы сила Лоренца является центростремительной.

Скорость, с которой альфа-частица влетела в магнитное поле, найдем из уравнения движения:

$$m\vec{a}_{ц} = \vec{F}_{Л}. \qquad (44)$$

Если векторы равны, то равны и их модули:

$$m\frac{\upsilon^2}{R} = q_\alpha \upsilon B \sin\alpha, \qquad (45)$$

здесь учтено, что центростремительное ускорение

$$a_{ц} = \frac{\upsilon^2}{R}. \qquad (46)$$

Из формулы (46) выразим скорость:

$$\upsilon = \frac{q_\alpha BR\sin\alpha}{m_\alpha}. \qquad (47)$$

Подставив в формулу (47) данные задачи, получим:

$$\upsilon = \frac{3,2\cdot 10^{-19}\cdot 0,3\cdot 2\cdot 10^{-4}\sin 90^\circ}{6,64\cdot 10^{-27}} = 2,9\cdot 10^3\,(\text{м/с}) = 2,9\,(\text{км/с}).$$

Период обращения частицы

$$T = \frac{2\pi R}{\upsilon}. \qquad (48)$$

Подставим численные значения R и υ в формулу (48) и рассчитаем период:

$$T = \frac{2\pi\cdot 2\cdot 10^{-4}}{2,9\cdot 10^3} = 0,43\,(\text{с}).$$

Ответ: $\upsilon = 2,9$ км/с; $T = 0,43$ с.

3. ПОТОК ВЕКТОРА МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ. РАБОТА ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ПРОВОДНИКА И КОНТУРА С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Поток вектора магнитной индукции $\Phi_{В}$ равен числу линий вектора магнитной индукции, пронизывающих единичную площадку, расположенную перпендикулярно линиям индукции. В системе СИ магнитный поток измеряется в веберах (Вб).

При расчете потока вектора магнитной индукции следует обращать внимание на то, какое магнитное поле – однородное или неоднородное. Для однородного поля

$$\Phi_{\text{В}} = BS\cos\alpha, \tag{49}$$

где S – площадь поверхности;

α – угол между нормалью к площадке и магнитной индукцией поля.

Для неоднородного поля поток $\Phi_{\text{В}}$ вычисляется через интеграл по поверхности:

$$\Phi_{\text{В}} = \int_S BdS\cos\alpha. \tag{50}$$

При перемещении проводника или контура с током в магнитном поле совершается работа, которая зависит от изменения магнитного потока через плоскость, ограниченную проводником:

$$A = I\Delta\Phi_{\text{В}} = I(\Phi_{\text{В}2} - \Phi_{\text{В}1}). \tag{51}$$

Примеры решения задач

Задача 9. Круглая рамка находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого направлен перпендикулярно плоскости рамки. Поток вектора магнитной индукции через рамку равен Φ. Рамку повернули вокруг оси, проходящей по диаметру рамки, на угол 180°. Чему равно приращение потока магнитной индукции?

Решение. В начальном положении поток вектора индукции магнитного поля равен Φ. В конечном положении поток будет $-\Phi$, а приращение потока будет $\Delta\Phi = \Phi - (-\Phi) = 2\Phi$.

Ответ: $\Delta\Phi = 2\Phi$.

Задача 10. В однородном магнитном поле с индукцией 0,06 Тл находится прямоугольная рамка площадью 40 см^2. Рамка содержит 200 витков и может свободно вращаться вокруг оси, перпендикулярной линиям индукции магнитного поля. По виткам течет ток 0,5 А и рамка располагается перпендикулярно линиям индукции. Какую работу надо совершить, чтобы повернуть рамку из этого положения на 0,25 оборота?

Дано:	СИ
S = 40 см^2;	$40 \cdot 10^{-4}$ м^2
I = 0,5 А;	
B = 0,06 Тл;	
N = 200;	
α_1 = 0;	
α_2 = 90°	
A – ?	

Решение. В начальном положении поток через рамку будет максимальным: $\Phi_1 = NBS\cos\alpha = NBS$, так как $\alpha = 0°$.

При повороте рамки на 0,25 оборота поток станет минимальным: $\Phi_2 = NBS\cos\alpha = 0$, так как $\alpha = 90°$. Тогда приращение потока магнитной индукции будет

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = NBS. \tag{52}$$

При перемещении рамки с током в магнитном поле совершается работа

$$A = I\Delta\Phi_{\text{B}} = INBS. \tag{53}$$

Подсчитаем работу, подставив данные теста:

$$\text{А} = 0{,}5 \cdot 200 \cdot 0{,}06 \cdot 40 \cdot 10^{-4} = 24 \cdot 10^{-3} = 24 \text{ мДж}.$$

О т в е т: А = 24 мДж.

З а д а ч а 11. Круговой контур радиусом 30 см находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,3 Тл так, что его плоскость составляет угол 60° с линиями магнитной индукции. Найти значение магнитного потока, пронизывающего контур.

Дано:	СИ
R = 30 см;	0,3 м
B = 0,3 Тл;	
φ = 60°	
Φ_B – ?	

Решение. В случае однородного магнитного поля ($\vec{B}$ = const) поток вектора магнитной индукции

$$\Phi_{\text{B}} = BS\cos\alpha. \tag{54}$$

Площадь кругового витка определим по формуле:

$$S = \pi R^2. \tag{55}$$

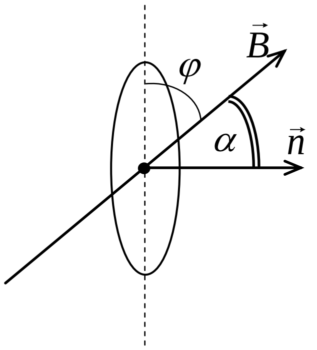


Рис. 16

Величину угла α между нормалью $\vec{n}$ и вектором магнитной индукции найдем из рис. 16:

$$\alpha = 90° - \varphi = 90° - 60° = 30°.$$

Подставим формулу (55) в выражение (54), получим расчетное уравнение:

$$\Phi_{\text{B}} = B\pi R^2\cos\alpha. \tag{56}$$

Рассчитаем поток вектора магнитной индукции, подставив данные задачи в формулу (56):

$$\Phi_\text{В} = 0{,}3\pi \cdot 0{,}3^2 \cos 30° = 0{,}24 \text{ (Вб)}.$$

О т в е т: $\Phi_\text{В} = 0{,}24$ Вб.

З а д а ч а 12. Квадратный контур с током 5 А свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией 50 мТл. Сторона квадрата равна 10 см. Поддерживая ток неизменным, контур повернули относительно оси, лежащей в плоскости контура и перпендикулярной линиям индукции, на угол 90°. Определить совершенную при этом работу.

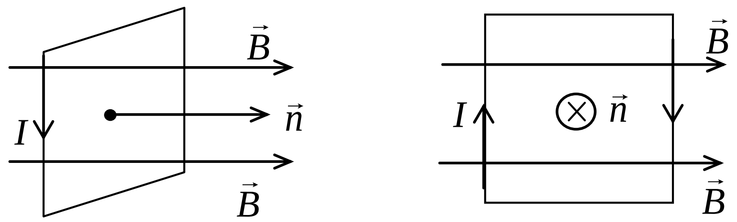
Дано:	СИ
$I = 5$ А;	
$B = 50$ мТл;	0,05 Тл
$a = 10$ см;	0,1 м
$\alpha_1 = 0$;	
$\alpha_2 = 90°$	
A – ?	

Решение. Квадратная рамка с током I свободно установилась в магнитном поле $\vec{B}$ (рис. 17, а). Вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости рамки и совпадает по направлению с вектором нормали $\vec{n}$ ($\alpha_1 = 0$).

Работа внешних сил при повороте рамки на 90° (рис. 17, б) равна работе сил поля, взятой с противоположным знаком:

$$A = -A_\text{м.п} = -I\left(\Phi_{\text{В}2} - \Phi_{\text{В}1}\right), \qquad (57)$$

где $\Phi_{\text{В}1}$ и $\Phi_{\text{В}2}$ – магнитные потоки, пронизывающие рамку до и после поворота.



а б

Рис. 17

В случае однородного магнитного поля магнитный поток

$$\Phi_\text{В} = BS\cos\alpha. \qquad (58)$$

Площадь квадратного контура определим по формуле:

$$S = a^2. \qquad (59)$$

Подставим выражения (58), (59) в уравнение (57) и получим расчетную формулу:

$$A = -IBa^2\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right). \qquad (60)$$

Рассчитаем работу внешних сил, подставив данные задачи в формулу (60):

$$A = -5\cdot 0{,}05\cdot 0{,}1^2(\cos 90° - \cos°0°) = 2{,}5\cdot 10^{-3} \text{ (Дж)}.$$

Ответ: A = 2,5 мДж.

Задача 13. В одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом, по которому идет ток 5 А, расположена квадратная рамка со стороной a, равной 5 см, обтекаемая током 0,5 А. Ближайшая сторона рамки параллельна прямому току и находится от него на расстоянии b, равном 8 см. Определить работу, которую надо совершить, чтобы повернуть рамку на 180° вокруг дальней стороны рамки. Токи в проводнике и ближней стороне рамки в начальный момент времени направлены в одну сторону.

Дано:	СИ
I_1 = 5 А;	
I_2 = 0,5 А;	
a = 5 см;	0,05 м
b = 8 см;	0,08 м
φ = 180°	
A – ?	

Решение. Квадратная рамка с током I_2 находится в неоднородном магнитном поле прямого тока. Индукцию магнитного поля бесконечно длинного проводника с током определяем по формуле:

$$B_1 = k_m \frac{2I_1}{r}, \tag{61}$$

где r – расстояние от прямого тока до рассматриваемой точки.

Вектор $\vec{B}_1$ во всех точках рамки перпендикулярен плоскости рамки.

Работа внешних сил при повороте рамки равна работе сил поля, взятой с обратным знаком:

$$A = -A_{\text{м.п}} = -I_2\left(\Phi_{\text{B2}} - \Phi_{\text{B1}}\right), \tag{62}$$

где Φ_{B1} и Φ_{B2} – магнитные потоки, пронизывающие рамку до и после поворота.

Вследствие неоднородности поля прямого тока магнитный поток рассчитываем по формуле:

$$\Phi_{\text{B1,2}} = \int_S B dS \cos\alpha, \tag{63}$$

где α – угол между направлением магнитной индукции и правовинтовой нормалью к рамке.

Для расчета потока выберем элементарную площадку dS (изображена на рис. 18 в виде заштрихованного прямоугольника), в пределах которой величину индукции B_1 можно считать постоянной:

$$dS = adr; \tag{64}$$

$$\Phi_{B1} = \int\limits_{b}^{b+a} B_1 a dr \cos\alpha_1, \qquad (65)$$

где $\alpha_1 = (\widehat{\vec{B}, \vec{n}}) = 0°$;

$$\Phi_{B1} = \int\limits_{b}^{b+a} k_m \frac{2I_1}{r} a dr \cos 0° = 2k_m I_1 a \ln r \Big|_{b}^{b+a} = 2k_m I_1 a \ln\frac{b+a}{b}. \qquad (66)$$

При повороте рамки изменяется угол между нормалью к рамке и направлением магнитной индукции, а также расстояние от провода до рамки. Тогда магнитный поток вычисляется по формуле:

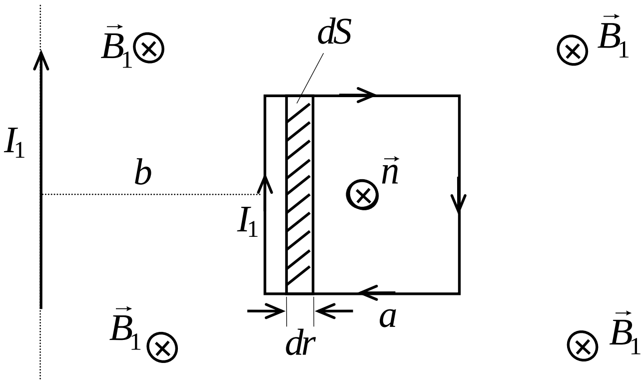


Рис. 18

$$\Phi_{B1} = \int\limits_{b+a}^{b+2a} B_1 a dr \cos\alpha_2, \qquad (67)$$

где $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi = \pi$;

$$\Phi_{B1} = \int\limits_{b+a}^{b+2a} k_m \frac{2I_1}{r} a dr \cos\pi = -2k_m I_1 a \ln r \Big|_{b+a}^{b+2a} = -2k_m I_1 a \ln\frac{b+2a}{b+a} =$$

$$= 2k_m I_1 a \ln\frac{b+a}{b+2a}. \qquad (68)$$

Подставив выражения (66) и (68) для расчета потоков Φ_{B1} и Φ_{B2} в формулу (62), получим:

$$A = -I_2\left(2k_m I_1 a \ln\frac{b+a}{b+2a} - 2k_m I_1 a \ln\frac{b+a}{b}\right) =$$

$$= -I_2 2k_m I_1 a \ln\frac{b}{b+2a} = I_2 2k_m I_1 \ln\frac{b+2a}{b}. \qquad (69)$$

Подставив данные задачи в формулу (69), рассчитаем работу, которую нужно выполнить при повороте рамки:

$$A = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \ln\frac{8 \cdot 10^{-2} + 10 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10^{-2}} = 2{,}0 \cdot 10^{-8} \text{ (Дж)}.$$

О т в е т: $A = 20$ нДж.

4. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ. ЗАКОН ФАРАДЕЯ – ЛЕНЦА

Явление электромагнитной индукции заключается в том, что во всяком проводящем замкнутом контуре при изменении магнитного потока, проходящего через поверхность, ограниченную этим контуром, возникает электрический ток, называемый индукционным. Это свидетельствует о возникновении в контуре электродвижущей силы $\mathcal{E}$, которая определяется по закону Фарадея – Ленца:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\text{В}}}{dt}. \tag{70}$$

Если имеется несколько витков, то электродвижущую силу можно найти по формуле:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi_{\text{В}}}{dt} = -N\frac{d\Phi_{\text{В}}}{dt}, \tag{71}$$

где Ψ – потокосцепление, $\Psi = N\Phi_{\text{В}}$;

N – число витков.

При решении задач этого раздела следует обратить внимание на то, что значение электродвижущей силы не зависит от причины изменения магнитного потока. Величина магнитного потока $\Phi_{\text{В}}$ может меняться по разным причинам, например, если изменяются магнитная индукция, площадь контура и угол между нормалью к контуру и вектором магнитной индукции (при повороте контура в магнитном поле).

ЭДС индукции может возникать в проводнике, который двигается или вращается в магнитном поле, пересекая его силовые линии.

Примеры решения задач

Задача 14. Какой магнитный поток пронизывает каждый виток катушки, имеющей 10 витков, если при равномерном исчезновении магнитного поля в течение 1 с в катушке индуцируется ЭДС 10 В?

Решение. Если катушка имеет N витков, то электродвижущую силу можно вычислить по формуле:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi_{\text{В}}}{dt} = -N\frac{d\Phi_{\text{В}}}{dt}. \tag{72}$$

Отсюда $\Delta\Phi = \Phi - 0 = \frac{\mathcal{E}t}{N} = \frac{10\cdot 1}{10} = 1$ (Вб).

Ответ: $\Delta\Phi = 1$Вб.

З а д а ч а 15. Проводящий плоский контур площадью 75 см^2, расположен в магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Если магнитная индукция изменяется по закону В = (5 – 2t^3) мТл, чему равна ЭДС индукции, возникающая в контуре в момент времени t = 2 с (в милливольтах)?

Решение. В соответствии с законом Фарадея электродвижущая сила индукции в замкнутом проводящем контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\text{B}}}{dt}. \qquad (73)$$

Поскольку плоскость контура перпендикулярна линиям магнитной индукции то $\Phi = BS,$ где S – площадь контура. Таким образом, $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi_{\text{B}}}{dt} = -S\dfrac{dB}{dt} = S6t^2$,

$\mathcal{E}$= 0,75$\cdot$ 6 $\cdot$ 4 $\cdot$ 10^{-5} = 0,18 мВ.

О т в е т: $\mathcal{E}$ = 0,18 мВ.

З а д а ч а 16. Квадратная рамка со стороной 5 см равномерно вращается с частотой 5 об/с в однородном магнитном поле с индукцией 30 мТл. Определить закон изменения ЭДС индукции и максимальное значение ЭДС. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции.

Дано:	СИ
a = 5 см;	0,05 м
B = 30 мТл;	0,03 Тл
ν = 5 об/с	
$\mathcal{E}$ – ?	
$\mathcal{E}_{\max}$ – ?	

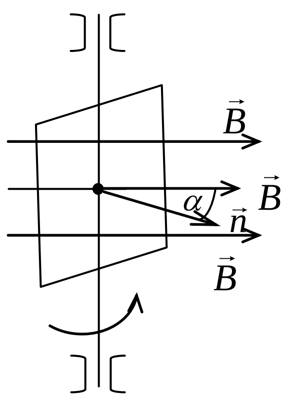


Рис. 19

Решение. При вращении рамки будет изменяться угол α между нормалью к контуру и вектором магнитной индукции, следовательно, будет меняться и магнитный поток, пронизывающий рамку (рис.19). Вследствие этого по рамке потечет индукционный ток и возникнет ЭДС индукции, которую можно найти по закону Фарадея – Ленца:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\text{B}}}{dt}. \qquad (74)$$

При равномерном вращении угол α будет изменяться по закону

$$\alpha = 2\pi\nu t. \qquad (75)$$

Тогда, так как поле однородное, закон изменения магнитного потока через рамку имеет вид:

$$\Phi_{\text{в}} = BS\cos\alpha = BS\cos(2\pi\nu t), \qquad (76)$$

где $S = a^2$ – площадь рамки.

Подставим уравнение (76) в формулу (74) и найдем закон изменения ЭДС с течением времени:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d}{dt}\left(Ba^2\cos(2\pi\nu t)\right) = Ba^2 2\pi\nu \sin(2\pi\nu t). \qquad (77)$$

Подставим данные задачи в выражение (77):

$$\mathcal{E}(t) = 0{,}03\cdot 0{,}05^2\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 5\cos(2\cdot 3{,}14\cdot 5t) = 2{,}4\cdot 10^{-3}\cos(31{,}4t)\ (\text{В}).$$

Максимальное значение ЭДС найдем из закона ее изменения (при $\cos(2\pi\nu t) = 1$):

$$\mathcal{E}_{\max} = Ba^2 2\pi\nu; \qquad (78)$$

$$\mathcal{E}_{\max} = 2{,}4\cdot 10^{-3}\ \text{В}.$$

О т в е т: $\mathcal{E}(t) = 2{,}4\cdot 10^{-3}\cos(31{,}4t)$ В; $\varepsilon_{\max} = 2{,}4\cdot 10^{-3}$ В.

З а д а ч а 17. Круглая рамка из 100 витков алюминиевой проволоки сечением 3 мм^2 помещена в магнитное поле, индукция которого меняется по закону $B = B_0\sin\omega t$, где $B_0 = 0{,}1$ Тл, $\omega = 6$ рад/с. Радиус витка рамки равен 10 см. Найти законы изменения ЭДС индукции и силы тока в рамке с течением времени, а также их максимальные значения. Линии магнитной индукции совпадают с нормалью к рамке (рис. 20).

Дано:	СИ
$N = 100$;	
$S_{\text{сеч}} = 3$ мм^2;	$3\cdot 10^{-6}$ м^2
$B = B_0\sin\omega t$;	
$B_0 = 0{,}1$ Тл;	
$\omega = 6$ рад/с;	
$r = 10$ см;	0,1 м
$\alpha = 0$;	
$\rho_{\text{Al}} = 2{,}8\cdot 10^{-8}$ Ом·м	
$\mathcal{E}(t)$ – ? $i(t)$ – ?	
$\mathcal{E}_{\max}$ – ? $i_{\max}$ – ?	

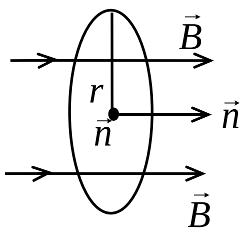


Рис. 20

Решение. При изменении магнитного поля будет меняться магнитный поток, пронизывающий рамку. Вследствие этого в рамке возникает ЭДС индукции, которую можно найти по закону Фарадея – Ленца:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi_{\text{в}}}{dt} = -N\frac{d\Phi_{\text{в}}}{dt}. \qquad (79)$$

Закон изменения потокосцепления от времени в рамке имеет вид:

$$\Psi_{\text{в}} = NBS_{\text{р}}\cos\alpha = NS_{\text{р}}B_{\text{о}}\sin\omega t, \tag{80}$$

где $S_{\text{р}}$ – площадь рамки, $S_{\text{р}} = \pi r^2$.

Подставим формулу (80) в уравнение (79) и найдем закон изменения ЭДС с течением времени:

$$\mathcal{E}\ (t) = -\frac{d}{dt}(NSB_0\sin\omega t) = -NSB_0\omega\cos\omega t = -N\pi r^2 B_0\omega\cos\omega t. \tag{81}$$

Знак «–» в формуле (81) означает то, что действие сторонних сил направлено против положительного направления обхода контура, которое связано с вектором магнитной индукции $\vec{B}$ правилом буравчика. Подставим данные задачи в формулу (81):

$$\mathcal{E}\ (t) = -100\cdot 3{,}14\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}1\cdot 6\ \cos 6t = -1{,}9\cos 6t\ (\text{В}).$$

Максимальное значение ЭДС найдем из закона ее изменения:

$$\mathcal{E}_{\max} = N\pi r^2 B_0\omega; \tag{82}$$

$$\mathcal{E}_{\max} = 1{,}9\ \text{В}.$$

Для нахождения закона изменения индукционного тока воспользуемся законом Ома для замкнутой цепи:

$$i(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R}, \tag{83}$$

где R – сопротивление рамки,

$$R = \rho\frac{\ell}{S_{\text{сеч}}}; \tag{84}$$

$$\ell = 2\pi r N, \tag{85}$$

здесь ℓ – длина проводника.

В результате преобразований формула (84) примет вид:

$$R = \rho\frac{2\pi r N}{S_{\text{сеч}}}. \tag{86}$$

Подставим формулы (81) и (86) в уравнение (83):

$$i(t) = -\frac{S_{\text{сеч}} N\pi r^2 B_0\omega}{\rho 2\pi r N}\cos\omega t = -\frac{S_{\text{сеч}} r B_0\omega}{2\rho}\cos\omega t. \tag{87}$$

Подставим в уравнение (87) данные задачи:

$$i(t) = -\frac{3\cdot 10^{-6}\cdot 10^{-1}\cdot 0{,}1\cdot 6}{2\cdot 2{,}8\cdot 10^{-8}}\cos 6t = -3{,}2\cos 6t \text{ (мкА)}.$$

Максимальное значение силы индукционного тока найдем из закона его изменения: i_{max} = 3,2 А.

Ответ: $\mathcal{E}(t) = -1{,}9\cos 6t$ В; $i(t) = -3{,}2\cos 6t$ А; $\mathcal{E}_{max}$ = 1,9 В; i_{max} = 3,2 мкА.

Задача 18. Квадратная рамка, состоящая из одного витка, со стороной 5 см и сопротивлением 0,03 Ом находится в однородном магнитном поле с индукцией 30 мТл. Плоскость рамки перпендикулярна линиям индукции (рис. 21). Какой заряд протечет по рамке, если ее повернуть так, чтобы угол между нормалью к рамке и линиями индукции стал равен 60°?

Дано:	СИ
a = 5 см;	$5\cdot 10^{-2}$ м
R = 0,03 Ом;	
α_1 = 0°;	
α_2 = 60°	
q – ?	

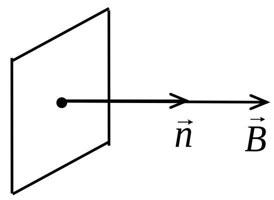


Рис. 21

Решение. При повороте рамки меняется магнитный поток, который ее пронизывает. По рамке потечет индукционный ток i, который можно найти по закону Ома:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}, \tag{88}$$

где R – сопротивление рамки.

Для замкнутой цепи ЭДС индукции $\mathcal{E}$ вычисляется по закону Фарадея – Ленца:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\text{в}}}{dt}; \tag{89}$$

$$i = \frac{dq}{dt}. \tag{90}$$

Заряд q, который протечет по контуру, определим через силу тока:

$$\frac{dq}{dt} = i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_{\text{в}}}{dt}; \tag{91}$$

$$\int_0^q dq = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_{B1}}^{\Phi_{B2}} d\Phi_B\ ; \qquad (92)$$

$$q = -\frac{1}{R}\left(\Phi_{B2} - \Phi_{B1}\right). \qquad (93)$$

Магнитные потоки, пронизывающие рамку в начальном и конечном положениях (см. рис. 21), определяются по формуле:

$$\Phi_{B1} = BS\cos\,\alpha_1, \qquad (94)$$

где S – площадь рамки, $S = a^2$.

$$\Phi_{B1} = BS\cos 0 = Ba^2; \qquad (95)$$

$$\Phi_{B2} = BS\cos\alpha_2; \qquad (96)$$

$$\Phi_{B2} = BS\cos 60° = Ba^2\,\frac{1}{2}. \qquad (97)$$

Подставим выражения (95) и (97) для магнитных потоков в формулу (93):

$$q = -\frac{\dfrac{Ba^2}{2} - Ba^2}{R} = \frac{Ba^2}{2R}. \qquad (98)$$

Рассчитаем заряд, подставив данные задачи в расчетную формулу (98):

$$q = \frac{3\cdot 10^{-5}\cdot 25\cdot 10^{-4}}{2\cdot 0{,}03} = 1{,}25\cdot 10^{-3}\ \text{(Кл)}.$$

Ответ: q = 1,25 мКл.

5. ИНДУКТИВНОСТЬ СОЛЕНОИДА. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Индуктивность соленоида в электромагнетизме играет такую же роль, как и электроемкость конденсатора в электростатике; она зависит от размеров и количества витков соленоида, а также от магнитных свойств сердечника соленоида и определяет способность проводника создавать магнитный поток при протекании тока по проводнику. В системе СИ индуктивность измеряется в генри (Гн).

Индуктивность L бесконечно длинного соленоида зависит от количества витков, приходящихся на единицу длины $n = N/L$, и от объема V соленоида:

$$L = \mu_0 \mu n^2 V, \qquad (99)$$

где μ_0 – магнитная постоянная; $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м;

μ – магнитная проницаемость сердечника соленоида.

Внутри соленоида с током существует магнитное поле, энергия которого может быть рассчитана через характеристики соленоида или характеристики самого поля (в случае однородного поля):

$$W_m = \frac{LI^2}{2}; \tag{100}$$

$$W_m = \frac{BHV}{2} = \frac{B^2V}{2\mu\mu_o} = \frac{\mu\mu_o H^2}{2}V, \tag{101}$$

где H – напряженность магнитного поля.

Примеры решения задач

Задача 19. Обмотка электромагнита имеет индуктивность 0,5 Гн, сопротивление 15 Ом и находится под постоянным напряжением. Определите время, в течение которого в обмотке выделится количество теплоты, равное энергии магнитного поля в сердечнике электромагнита.

Решение. Энергия магнитного поля

$$W_m = \frac{LI^2}{2}. \tag{102}$$

Количество теплоты, выделяемое в обмотке, определяется законом Джоуля – Ленца:

$$Q = I^2 Rt. \tag{103}$$

По условию задачи можно записать:

$$\frac{LI^2}{2} = I^2 Rt. \tag{104}$$

Отсюда найдем время:

$$t = \frac{L}{2R} = \frac{0,5}{2\cdot 15} = 1,7\cdot 10^{-2} \text{ с.}$$

Ответ: t = 1,7·10^{-2} с.

Задача 20. Катушка без сердечника длиной 50 см содержит 200 витков. По катушке течет ток 1 А. Определите объемную плотность энергии магнитного поля внутри катушки.

Решение. Энергия магнитного поля

$$W_m = \frac{LI^2}{2}, \tag{105}$$

а индуктивность катушки

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2}{l^2} V, \qquad (106)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, $\mu = 1$.

Подставим уравнение (106) в формулу (105). Тогда

$$W_m = \frac{\mu_0 N^2 I^2 V}{2l^2}, \qquad (107)$$

а объемная плотность энергии магнитного поля внутри катушки

$$\omega_m = \frac{W_m}{V} = \frac{\mu_0 N^2 I^2 V}{2l^2 V} = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2l^2}. \qquad (108)$$

Подставим данные задачи в формулу (108) и рассчитаем объемную плотность энергии магнитного поля:

$$\omega_m = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 1}{2 \cdot 0{,}25} = 0{,}1 \text{ Дж/м}^3.$$

О т в е т: $\omega_m = 0{,}1$ Дж/м^3.

З а д а ч а 21. На картонный каркас длиной 2 м и диаметром 2 см в один слой намотан провод диаметром 0,4 мм так, что витки плотно прилегают друг к другу. Вычислить индуктивность катушки и энергию магнитного поля, если по нему пустить ток в 2 А (рис. 22).

Дано:	СИ
$l = 2$ м;	
$D = 2$ см;	$2 \cdot 10^{-2}$ м
$d = 0{,}4$ мм;	$4 \cdot 10^{-4}$ м
$I = 2$ А;	
$\mu = 1$	
L – ?	
W_m – ?	

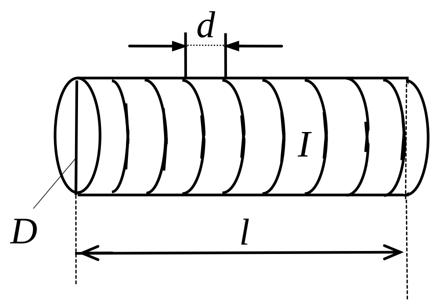


Рис. 22

Решение. Индуктивность катушки зависит только от геометрических характеристик каркаса и магнитной проницаемости среды. Будем считать катушку бесконечно длинной ($D << \ell$), в этом случае ее индуктивность определяется по формуле:

$$L = \mu \mu_0 n^2 V, \qquad (109)$$

где n – число витков на единицу длины;

V – объем катушки.

Число витков на единицу длины можно выразить через диаметр провода:

$$n = \frac{N}{l} = \frac{N}{dN} = \frac{1}{d}, \tag{110}$$

а объем катушки – через геометрические параметры каркаса:

$$V = Sl = \frac{\pi D^2}{4} l; \tag{111}$$

тогда индуктивность катушки

$$L = \mu_0 \left(\frac{1}{d}\right)^2 \frac{\pi D^2}{4} \cdot l. \tag{112}$$

Подставив данные задачи в расчетную формулу (112), вычислим индуктивность катушки:

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \left(\frac{1}{4 \cdot 10^{-4}}\right)^2 \frac{\pi \left(2 \cdot 10^{-2}\right)^2}{4} \cdot 2 = 5{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ (Гн)}.$$

Энергия магнитного поля в катушке определяется ее индуктивностью и силой тока, протекающего по ее виткам:

$$W_m = \frac{LI^2}{2}; \tag{113}$$

$$W_m = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 2^2}{2} = 10{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ (Дж)}.$$

Ответ: $L = 5{,}0$ мГн; $W_m = 10{,}0$ мДж.

Библиографический список

1. Трофимова Т. И. Краткий курс физики / Т. И. Трофимова. М., КноРус, 2016. 272 с.

2. Иродов И. Е. Электромагнетизм. Основные законы / И. Е. Иродов. М., Бином, 2014. 320 с.

3. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 2. Электричество и магнетизм / И. В. Савельев. СПб, Лань, 2011. 348 с.

4. Аронова Т. А. Практикум по физике. Ч. 2. Электричество и магнетизм / Т. А. Аронова, И. И. Гончар, С. Н. Крохин / Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2014. 40 с.

Учебное издание

ГЕЛЬВЕР Сергей Александрович,
СМЕРДИН Сергей Николаевич

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ
(ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ)

Учебно-методическое пособие

Редактор Н. А. Майорова

***

Подписано в печать 10.11.2017. Формат $60 \times 84\,{}^{1}/_{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 2,3.
Тираж 800 экз. Заказ .

**

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35