Л Е К Ц И Я № 2

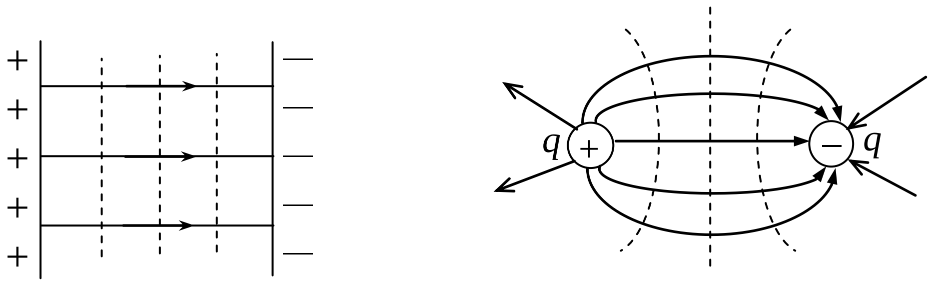
4. Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Гаусса для электростатического поля

Электрическое поле можно графически изобразить с помощью линий вектора $\vec{E}$ (линий напряженности электрического поля, силовых линий электрического поля).

Силовые линии электрического поля – это линии, проводимые в электрическом поле так, чтобы касательные к ним в любой точке совпадали с направлением $\vec{E}$ в этой точке, а количество (густота) линий, проходящих через площадку единичных размеров, расположенную перпендикулярно силовым линиям, равно $|\vec{E}|$ в месте расположения площадки. Силовые линии электростатического поля начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных.

По густоте и направлению силовых линий можно судить о величине и направлении электрического поля.

Если $\vec{E}$ = *const* – электрическое поле ***однородное*** (рис. а), если $\vec{E} \neq const$ – ***неоднородное*** (рис. б).



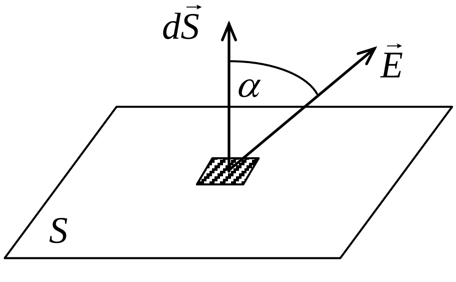
а б

Количество линий $\vec{E}$ (силовых линий) электрического поля, проходящих через произвольную поверхность *S*, определяет поток Φ_e вектора $\vec{E}$ через эту поверхность:

$$\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S EdS \cdot \cos\alpha, \qquad (2\text{-}1)$$

где dS – бесконечно малый элемент площади поверхности (рис.);

α – угол между векторами $\vec{E}$ и $d\vec{S}$ ($d\vec{S}$ направлен перпендикулярно элементу поверхности dS).



$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$$
$$|\vec{n}| = 1$$

В СИ электрический поток (поток вектора $\vec{E}$) Φ_e измеряется в В·м.

Поток Φ_e вектора $\vec{E}$ электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность определяется теоремой Гаусса:

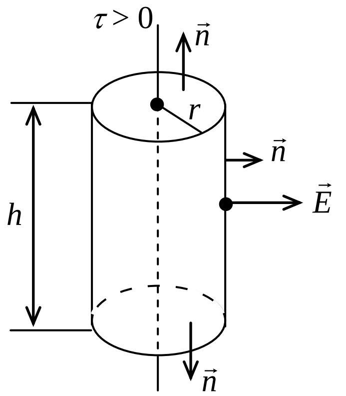
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi k_e \sum_{i=1}^{N} q_i , \qquad (2\text{-}2)$$

где $\sum_{i=1}^{N} q_i$ – алгебраическая сумма электрических зарядов, находящихся внутри замкнутой поверхности S.

Теорема Гаусса для электростатического поля ***отражает*** тот ***факт***, ***что источником электрического поля являются электрические заряды***.

Теорема Гаусса наряду с принципом суперпозиции электрических полей позволяет рассчитывать электрические поля, созданные не точечными зарядами.

Например, для линейного протяженного бесконечно длинного заряженного тела:

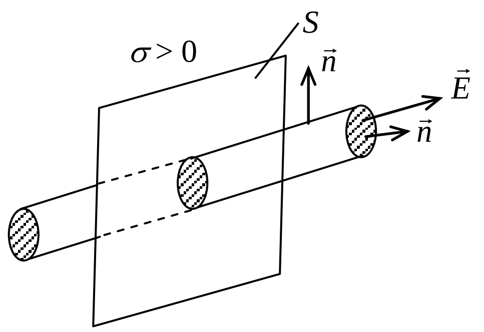


$$\oint_S \vec{E} dS = \int_{S_{\text{осн}1}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_{\text{осн}2}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_{\text{бок}}} \vec{E} d\vec{S} = 0 + 0 + E \cdot S_{\text{бок}} =$$

$$= E \cdot 2\pi r h = 4\pi k_e \sum q_i = 4\pi k_e |\tau| h$$

$$E = k_e \frac{2|\tau|}{r}. \qquad (2\text{-}3)$$

Для бесконечно большой заряженной плоскости:

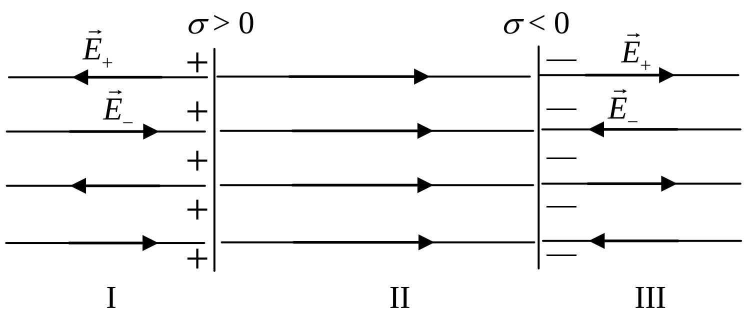


$$\oint_S \vec{E} dS = \int_{S_{\text{осн}1}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_{\text{осн}2}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_{\text{бок}}} \vec{E} d\vec{S} = E \cdot S + E \cdot S + 0 =$$

$$= 2E \cdot S = 4\pi k_e \sum q_i = 4\pi k_e |\sigma| S$$

$$E = 2\pi k_e |\sigma|. \qquad (2\text{-}4)$$

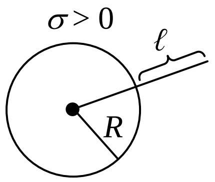
Для двух бесконечно больших параллельных разноименно заряженных плоскостей:



$$E_{\text{I}} = 0 \qquad E_{\text{III}} = 0$$

$$E_{\text{II}} = E_+ + E_- = 4\pi k_e |\sigma|. \qquad (2\text{-}5)$$

Для заряженной шаровой оболочки:



$$r \geq R \qquad E = k_e \frac{|q|}{r^2} = k_e \frac{|\sigma| \cdot 4\pi R^2}{(R+\ell)^2} \tag{2-6}$$

$$r < R \qquad E = 0.$$

Для объемно заряженного шара:

$$r \geq R \qquad E = k_e \frac{|q|}{r^2} = k_e \frac{|\rho_q| \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{(R+\ell)^2}$$

$$r \leq R \qquad E = k_e \frac{|q|}{R^3} r = k_e |\rho_q| \frac{4}{3}\pi r \tag{2-7}$$

5. Работа электрического поля. Потенциал электростатического поля

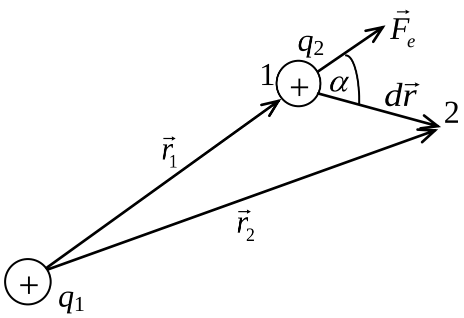
На любой электрический заряд, оказавшийся в электрическом поле, будет оказываться со стороны поля силовое действие (см. формулу (1-8)):

$$\vec{F}_e = q\vec{E}; \tag{2-8}$$

Под действием этой силы свободный электрический заряд может перемещаться в поле. При перемещении заряда из точки 1 в точку 2 электрическое поле совершает механическую работу:

$$A_e = \int_1^2 \delta A_e = \int_1^2 \vec{F}_e d\vec{r}\,. \tag{2-9}$$

Покажем на примере взаимодействия двух точечных зарядов, что электрические силы – консервативные (потенциальные) силы, для них $\oint_e \vec{F} d\vec{r} = 0$:



$$A_e = \int_1^2 F dr \cos\alpha = \int_1^2 k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2} |d\vec{r}| \cos\alpha =$$

$$= k_e \frac{|q_1||q_2|}{r_1} - k_e \frac{|q_1||q_2|}{r_2}.$$

$$\oint_e \vec{F} d\vec{r} = 0 \qquad\qquad A_e = W_{p_1} - W_{p_2}$$

$$W_p = k_e \frac{q_1 q_2}{r} \; - \tag{2-10}$$

потенциальная энергия взаимодействия двух точечных электрических зарядов.

Циркуляцией вектора $\vec{E}$ вдоль произвольного замкнутого контура ℓ называют интеграл:

$$Г_e = \oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell}\,. \tag{2-11}$$

Теорема о циркуляции напряженности электростатического поля вдоль произвольного замкнутого контура ℓ утверждает, что электростатическое поле является потенциальным (безвихревым) и его силовые линии не замкнутые:

$$\oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = 0\,. \tag{2-12}$$

Работа электростатических сил по замкнутому контуру согласно теореме (2-12) и формуле (2-9) равна нулю. Это значит, что электростатические силы потенциальные (консервативные).

Второй основной характеристикой электрического поля является потенциал – энергетическая характеристика поля.

Потенциал электрического поля φ в данной точке – физическая величина, равная отношению потенциальной энергии W_p, которой обладает пробный заряд q, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда:

$$\varphi = \frac{W_p}{q}\,. \tag{2-13}$$

В СИ потенциал φ измеряется в вольтах (В).

Потенциал электрического поля, созданного точечным зарядом q на расстоянии r от него, вычисляется по формуле:

$$\varphi = k_e \frac{q}{r}\,. \tag{2-14}$$

Потенциал – алгебраическая величина, которая может быть положительной и отрицательной в зависимости от знака заряда, создающего поле ($\varphi > 0$ для $q > 0$; $\varphi < 0$ для $q < 0$).

Разность потенциалов для двух точек электрического поля – скалярная физическая величина, равная отношению работы A_e, совершаемой электрическим полем по перемещению пробного электрического заряда q между этими точками, к величине этого заряда:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{W_{p_1} - W_{p_2}}{q} = \frac{A_e}{q} \tag{2-15}$$

(при действии на заряд только электрических сил разность потенциалов часто называют напряжением $\varphi_1 - \varphi_2 = U$).

В СИ разность потенциалов (напряжение) измеряется в вольтах (В).

Если электрическое поле создается несколькими зарядами, то в соответствии с принципом суперпозиции электрических полей можно записать:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n,$$
$$\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)_1 + (\varphi_2 - \varphi_1)_2 + \ldots + (\varphi_2 - \varphi_1)_n. \tag{2-16}$$

Потенциал (разность потенциалов) электростатического поля, созданного нескольким зарядами, равен (равна) ***алгебраической сумме*** потенциалов (разности потенциалов) полей отдельных зарядов.

Между двумя основными характеристиками электрического поля существует связь:

$$\delta A_e = q\vec{E}d\vec{r} = -dW_p = -qd\varphi,$$

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{d\vec{r}} = -grad\varphi; \qquad (2\text{-}17)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{r}\ . \qquad (2\text{-}18)$$

Например, для электрического поля точечного заряда:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{r}\cos\alpha = \int_1^2 k_e\frac{q}{r^2}\cdot dr = k_e\frac{q}{r_1} - k_e\frac{q}{r_2};. \qquad (2\text{-}18а)$$

для электрического поля бесконечно длинной заряженной нити:

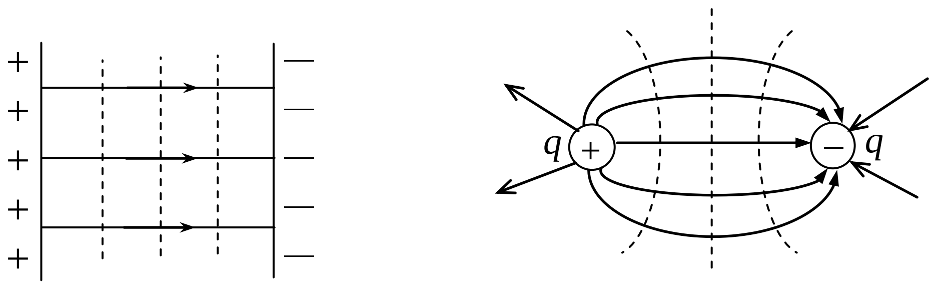
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{r}\cos\alpha = \int_1^2 k_e\frac{2\tau}{r}\cdot dr = 2\tau k_e\ln\frac{r_2}{r_1};. \qquad (2\text{-}18б)$$

для электрического поля бесконечно большой заряженной плоскости:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{r}\cos\alpha = \int_1^2 2\pi k_e\sigma dr = 2\pi k_e\sigma\left(r_2 - r_1\right).. \qquad (2\text{-}18в)$$

Электрическое поле можно графически изобразить с помощью эквипотенциальных поверхностей.

<u>Эквипотенциальные поверхности</u> – это геометрическое место точек с одинаковым потенциалом (φ = const). Силовые линии проходят перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям в сторону уменьшения потенциала.



а б

В соответствии с (2-8), (2-9) и (2-17) в случае однородного электрического поля можно записать:

$$A_e = qE\Delta r\cos\alpha = qU, \qquad (2\text{-}19)$$

где α – угол между вектором $\vec{E}$ и перемещением $\Delta\vec{r}$ заряда q между двумя точками поля с разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = U$.

Возможность влиять на движение заряженных частиц с помощью электрического поля широко используется в электронно-лучевых трубках, линейных ускорителях заряженных частиц и т. п.

6. Устройство и принцип работы электронно-лучевой трубки и линейного ускорителя заряженных частиц

(самостоятельно)