ЛЕКЦИЯ № 12

3. Сложение гармонических колебаний

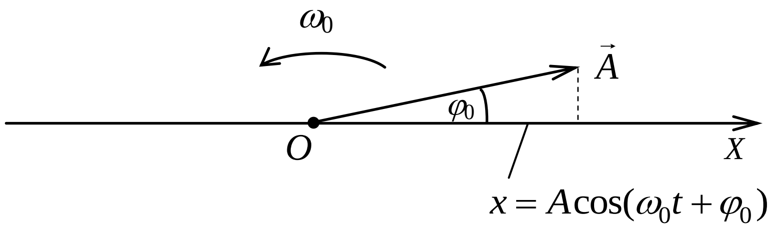
Реальные колебания чаще всего негармонические, носят более сложный характер. Но многие негармонические колебания можно представить в виде суммы гармонических колебаний.

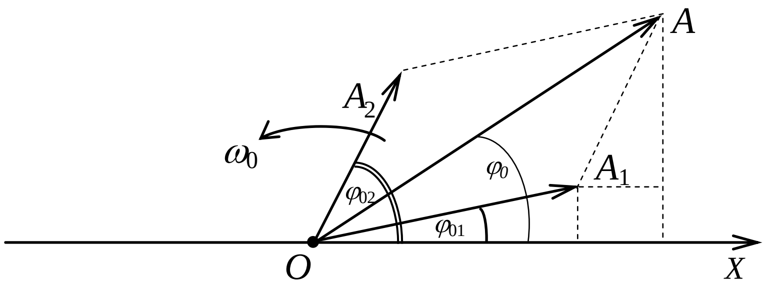
а) сложение ***однонаправленных*** гармонических колебаний ***одинаковой частоты***:

$$x_1(t) = A_1 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_{01}) \qquad \text{и} \qquad x_2(t) = A_2 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_{02})$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) - ?$$

Для получения результата воспользуемся ***методом векторных диаграмм***: любое гармоническое колебание графически можно изобразить в виде вращающегося против часовой стрелки вектора длиной, равной амплитуде колебания и имеющего в момент времени $t = 0$ угол наклона к некоторой оси OX, равный начальной фазе этого колебания.





Результирующее колебание будет гармоническим:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

с той же частотой ω_0, но с новой амплитудой A и новой начальной фазой φ_0, которые можно определить.

$$\left.\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})} \\ tg\varphi_0 &= \frac{A_1 \sin\varphi_{01} + A_2 \sin\varphi_{02}}{A_1 \cos\varphi_{01} + A_2 \cos\varphi_{02}} \end{aligned}\right\} \qquad (12\text{-}1)$$

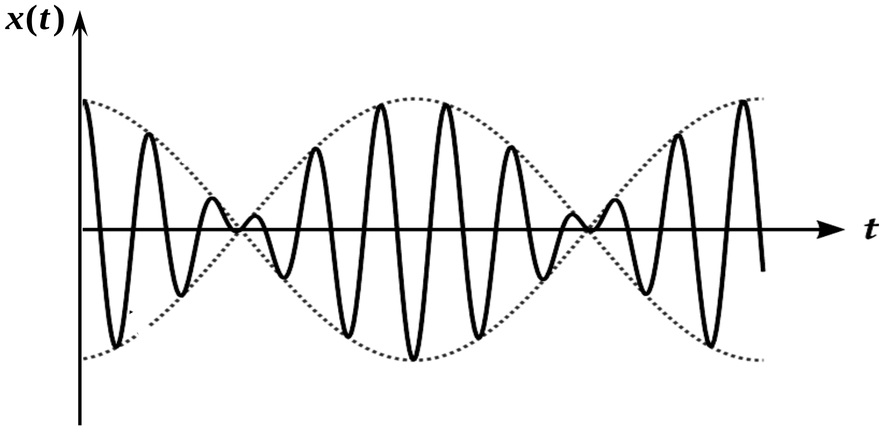
б) сложение ***однонаправленных*** колебаний ***с разными частотами***:

– пусть $A_1 = A_2 = A,\ \varphi_{01} = \varphi_{02} = 0,\ \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t = A\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

– если ω_1 и ω_2 ***близкие*** ($\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 << \omega_1, \omega_2$), тогда

$$x(t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega t \qquad (12\text{-}2)$$



Биения!

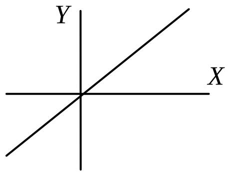
– если $\Delta\omega \sim \omega_1, \omega_2 \quad \to$ результирующее колебание сложное!

в) сложение ***взаимноперпендикулярных*** гармонических колебаний ***одинаковой частоты***:

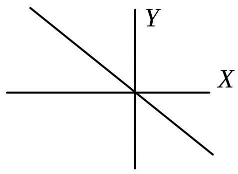
$$x(t) = A\cos\omega t; \qquad y(t) = B\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{x^2}{A^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi_0 + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi_0 \qquad (12\text{-}3)$$

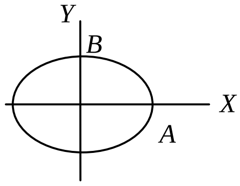
– $\varphi_0 = 0$ $\quad \frac{x}{A} - \frac{y}{B} = 0 \quad y = \frac{B}{A}x$

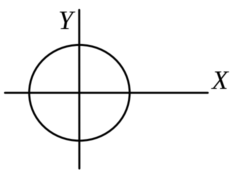


– $\varphi_0 = \pi$ $\quad \frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 0 \quad y = -\frac{B}{A}x$



– $\varphi_0 = \pi/2$ $\quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$





A = *B* = *R*.

г) сложение ***взаимноперпендикулярных*** гармонических колебаний с ***разными частотами***:

– если частоты кратные друг другу $\omega_2 : \omega_1 = 2, 3, 4, ...$

– фигуры Лиссажу !

– если частоты не кратные $\rightarrow$ сложный негармонический процесс.

4. Затухающие колебания осциллятора

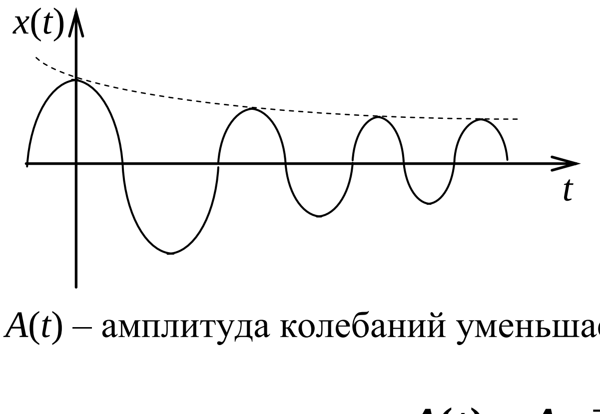
В реальных условиях присутствует диссипация энергии ($F_{тр} \neq 0$, $R \neq 0$)

механические колебания	**электрические колебания**
$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x}$	$U_c + iR = \mathcal{E}_s$
$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0$	$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$
$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$	$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$
$2\beta = \frac{\mu}{m}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$	$2\beta = \frac{R}{L}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (12\text{-}4)$$

Решением уравнения (12-4) является функция:

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (12\text{-}5)$$



$A(t)$ – амплитуда колебаний уменьшается с течением времени по закону:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} = A_0 \exp(-\beta t) \qquad (12\text{-}6)$$

Такие колебания называются ***затухающими***.

β – коэффициент затухания.

$$\beta = \frac{1}{t}\ln\frac{A_0}{A(t)} \tag{2-9a}$$

если $t = \tau,$ когда $\frac{A_0}{A} = e$ $\rightarrow$ $\beta = \frac{1}{\tau}.$ $[\beta] = \text{с}^{-1}.$

Коэффициент затухания обратен времени релаксации, т. е. времени, за которое амплитуда колебания уменьшается в «*e*» раз.

Циклическая (круговая) частота и период затухающих колебаний осциллятора:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \tag{12-7}$$

при $\beta^2 \geq \omega_0^2 -$ апериодический процесс.

Второй характеристикой затухающих колебаний является ***<u>логарифмический декремент затухания</u>*** – эта скалярная физическая величина, равная натуральному логарифму отношение двух соседних амплитуд, отличающихся по времени на период (предыдущей к последующей):

$$\Lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} \tag{12-8}$$

$$\text{для } t = T, \quad \beta = \frac{1}{T}\ln\frac{A_0}{A_1} \quad \rightarrow \quad \beta \cdot T = \Lambda \tag{12-9}$$

Если $t = NT,$ тогда

$$\Lambda = \frac{1}{NT}\ln\frac{A_0}{A}\cdot T = \frac{1}{N}\ln\frac{A_0}{A} \tag{12-10}$$

если $N = N_e,$ $\frac{A_0}{A} = e$ $\rightarrow$ $\Lambda = \frac{1}{N_e}.$

Логарифмический декремент затухания обратен количеству полных колебаний, за которые амплитуда уменьшается в «*e*» раз.

Кроме амплитуды при затухании уменьшается и энергия.

Так как $W \sim A^2$, то при затухании

$$A^2 = {A_0}^2 e^{-2\beta t}$$

тогда

$$W(t) = W_0 \exp(-2\beta t) \tag{12-11}$$

при этом потеря энергии

$$\Delta W = W_0\left[1-\exp(-2\beta t)\right] \tag{12-12}$$

С потерями энергии связана третья характеристика затухающих колебаний – ***добротность*** – скалярная физическая величина, равная увеличенному в 2π раз отношению энергии, первоначально запасенной осциллятором, к потерям энергии за один период:

$$Q = 2\pi\frac{W_0}{\Delta W(t=T)}, \tag{12-13}$$

при малых затуханиях $\beta^2 << \omega_0^2$

$$e^{-2\beta t} \approx 1-2\beta T$$

$$Q \approx \frac{\pi}{\Lambda} = \frac{\pi}{\beta T} \approx \frac{\pi\omega_0}{\beta 2\pi} = \frac{\omega_0}{2\beta}. \tag{12-14}$$