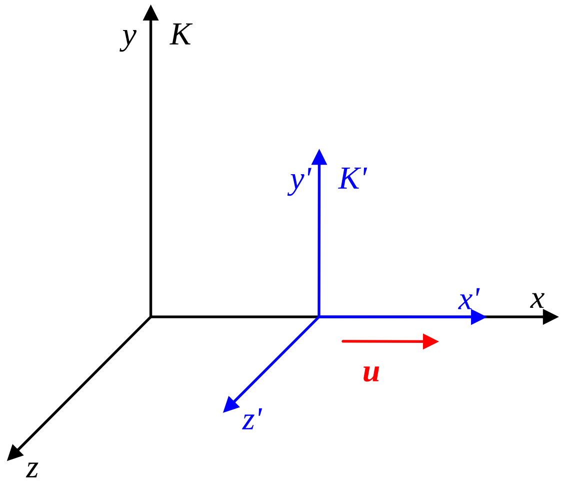
Лекция 1-09. Специальная теория относительности

§1. Преобразование координат Галилея.

В ньютоновской механике при переходе от одной инерциальной системы отсчета $K(x,y,z,t)$ к другой $K'(x',y',z',t')$, движущейся относительно K поступательно с постоянной скоростью ***u***, пользуются преобразованиями координат, которые называют преобразованиями Галилея.



Обычно оси координат проводят так, чтобы система K' двигалась вдоль положительного направления оси Ox (см. рисунок). В этом случае преобразования Галилея имеют вид (ход времени не зависит от относительного движения систем отсчета):

$$\begin{aligned} x &= x' + ut \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

Эти формулы называются *преобразованиями координат Галилея*. Они позволяют переходить от одной инерциальной системы отсчета к другой в классической механике. Продифференцируем эти выражения по времени:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + u \quad \Rightarrow v_x = v'_x + u\,,$$

$$\text{аналогично,} \quad \begin{aligned} v_y &= v'_y \\ v_z &= v'_z \end{aligned}\,.$$

Объединяя проекции в вектор, можно записать уравнение, которое называется *законом сложения скоростей в классической механике*:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}$$

Продифференцировав скорость, получим

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}\,' + \vec{u})}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} = \vec{a}\,',$$

так как $\vec{u} = const$, $\dfrac{d\vec{u}}{dt} = 0$.

Таким образом, уравнения динамики оказываются справедливыми во всех системах отсчета:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}$$

$$m\vec{a}\,' = \sum \vec{F}\,'$$

Принцип относительности Галилея: *Законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета*, или *уравнения механики инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея*.

§2. Постулаты теории относительности.

В связи с принципом относительности естественно возникает вопрос: равноправны ли все инерциальные системы отсчета только в механике или также и в отношении других физических явлений и процессов? Нельзя ли выделить из множества инерциальных систем отсчета «главную», основываясь, например, на законах распространения электромагнитных волн? Именно в этом контексте был поставлен опыт Майкельсона – Морли с попыткой «сложить» скорость света с орбитальным движением Земли, который дал отрицательный результат: скорость света «не сложилась» со скоростью Земли. Разрешить проблему удалось в 1905 г. А. Эйнштейну в его работе «К электродинамике движущихся тел», в которой были изложены основные положения специальной теории относительности (СТО). В СТО, так же как и в ньютоновской механике, предполагается, что время однородно, а пространство однородно и изотропно. Специальная теория относительности часто называется также релятивистской механикой, а специфические явления, описываемые этой теорией, - релятивистскими эффектами. В основе СТО лежат постулаты Эйнштейна:

Первый постулат: *Все законы природы одинаково формулируются для всех инерциальных систем отсчета.*

Второй постулат: *Скорость света в вакууме не зависит от движения источников и приемников света, и, следовательно, одинакова во всех инерциальных систем отсчета.*

§3. Преобразования Лоренца.

Задача преобразований: получить формулы, позволяющие переходить от одной системы отсчета к другой с учетом постоянства скорости света во всех инерциальных системах отсчета.

Полагая преобразования линейными и учитывая, что координаты должны одновременно обращаться в ноль, получим (см. рисунок в §1):

$$y = \alpha \cdot y',$$

где α – коэффициент преобразования.

Поскольку системы отсчета равноправны, то

$$\begin{aligned} &y' = \alpha \cdot y \\ &yy' = \alpha^2 yy' \\ &\alpha^2 = 1 \\ &\alpha = \pm 1. \end{aligned}$$

Знак «+» отвечает за одинаковое направление осей, «–» – за противоположно направленные оси. То есть

$$\begin{aligned} &y = y' \\ &z = z'. \end{aligned}$$

Теперь для координаты x:

$$x = \gamma(x' + ut')$$

но так как проекция ***u*** направлена в обратную сторону, то

$$x' = \gamma(x - ut)$$

Пусть в начальный момент времени $t = t' = 0$, начала координат совпадали, и в это время происходит вспышка света в начале координат, то через некоторое время свет достигнет экрана, координаты которого в своих СО равны

$$x = ct \quad \text{(для системы } K\text{)}$$

$$x' = ct' \quad \text{(для системы } K'\text{)}$$

Подставляя с эти два равенства два предыдущих (соответственно), получим:

$$ct = \gamma(x' + ut') = \gamma(ct' + ut') = \gamma(c+u)t'$$
$$c't' = \gamma(x - ut) = \gamma(ct + ut) = \gamma(c+u)t$$

Перемножив эти выражения и, сокращая произведение времен, выразим γ:

$$c^2tt' = \gamma^2(c^2 - u^2)tt'$$
$$c^2 = \gamma^2(c^2 - u^2)$$
$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - u^2} = \left(\frac{c^2 - u^2}{c^2}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

где $\beta = \frac{u}{c}$ – относительная скорость в системе координат по отношению к скорости света. Тогда

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1) \qquad x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2)$$
$$y = y' \quad (3) \qquad y' = y \quad (4)$$
$$z = z' \quad (5) \qquad z' = z \quad (6)$$

Из (1) и (2) можно получить связь t и t':

$$t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (7) \qquad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (8)$$

Полученные формулы (1) – (8) называются *преобразованиями Лоренца*, они позволяют переходить из одной системы отсчета в другую, в том числе и при скоростях, близких к скорости света.

Заметим, что эти уравнения, как того требует научная методология, удовлетворяют так называемому *принципу соответствия*: они переходят в преобразования Галилея для скоростей, много меньших скорости света. (Суть принципа соответствия в том, что любая новая, более общая теория должна включать в себя предыдущую, старую теорию как частный случай.)

§4. Следствия из преобразований Лоренца.

4.1 Сокращение длины.

Пусть в собственной системе отсчета длина стержня $\ell_0 = x_2' - x_1'$. Найдем, какой будет длина этого стержня в неподвижной СО, если стержень расположен вдоль оси Ox и движется в этом направлении со скоростью $\boldsymbol{u}$:

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \ell = \ell_0\sqrt{1-\beta^2}$$

Длина стержня, измеренная в системе, относительно которой он движется, оказывается меньше длины, измеренной в системе, относительно которой он покоится.

4.2 Собственное время частицы.

Собственное время – это время, отсчитанное по часам, движущимся вместе с частицей, то есть частица неподвижна по отношению к часам:

$$\Delta\tau = t_2' - t_1'.$$

Промежуток времени в другой СО, относительно которой «часы» движутся:

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна.

Уменьшение длины стержня и замедление хода часов становится заметным лишь при скоростях, близких к скорости света.

4.3 Интервал

В 3[х] – мерном пространстве расстояние между двумя точками (*интервал*) определяется выражением:

$$\Delta\ell = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\ .$$

Можно было ожидать, что в 4[х] – мерном *пространстве-времени* для интервала будет справедлива формула:

$$\Delta S = \sqrt{(c\cdot\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

(из соображений размерности временная координата должна быть умножена на скорость света). Однако оказалось, что записанный по такой формуле интервал не является инвариантом по отношению к выбору СО.

Инвариантом будет интервал виде:

$$\Delta S = \sqrt{(c\cdot\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2}\ .$$

Проверим:

$$\Delta S = \sqrt{(c\cdot\Delta t)^2 - \Delta\ell^2} = c\cdot\Delta t\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\Delta\ell}{c\cdot\Delta t}\right)^2} = c\cdot\Delta t\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = c\cdot\Delta\tau\,,$$

где $\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$ - собственное время частицы (является одинаковым во всех СО), а скорость света – инвариант по второму постулату СТО.

Здесь $\Delta\ell$ – расстояние, которое проходит частица за время Δt с постоянной скоростью.

4.4 Сложение скоростей

В системе K и K' скорости определяются производными:

$\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$; $\upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}$; $\upsilon_z = \dfrac{dz}{dt}$; $\upsilon'_x = \dfrac{dx'}{dt'}$;

Используя преобразования Лоренца (продифференцируем их) можно получить связь между этими скоростями:

$$dx = \frac{dx' + u\cdot dt'}{\sqrt{1-\beta^2}};\qquad dy = dy';\qquad dz = dz';\qquad dt = \frac{dt' + \frac{u}{c^2}\cdot dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

Разделив 1, 2 и 3-е выражения на 4-е, получим формулы преобразования скоростей при переходе из одной системы отсчета в другую:

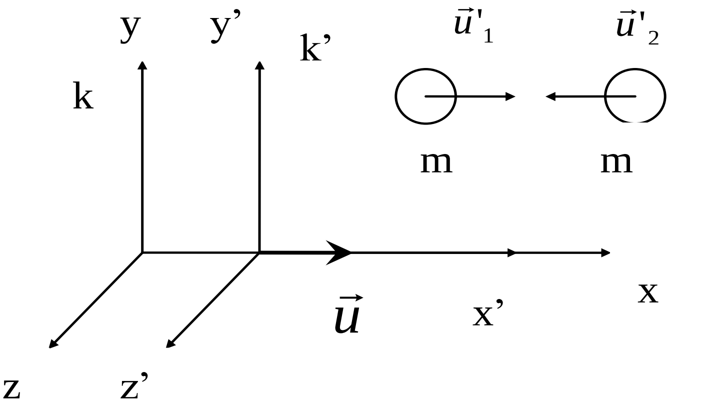
$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \ldots = \frac{\upsilon'_x + u}{1 + \frac{u \cdot \upsilon'_x}{c^2}}; \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \ldots = \frac{\upsilon'_y \cdot \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{u \cdot \upsilon'_x}{c^2}}; \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \ldots = \frac{\upsilon'_z \cdot \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{u \cdot \upsilon'_x}{c^2}}.$$

Эти формулы в релятивистской механике (СТО) заменяют закон сложения скоростей в классической механике ($\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{u}$).

Можно проверить, что c в любой СО окажется равной c вне зависимости от скорости самой системы отсчета ($\upsilon' = c$)

§5. Релятивистский импульс

Рассмотрим две СО, одна из которых k’ движется по отношению к системе k, и два тела, движущиеся навстречу друг другу со скоростями:



$$\vec{u}'_1 = \vec{u}$$
$$\vec{u}'_2 = -\vec{u}$$

Суммарный импульс этих частиц в системе k’ равен 0, и в результате абсолютно неупругого удара частицы остановятся в системе k’ и соответственно по отношению к системе k будут двигаться вместе с системой k’.

Применив закон сохранения импульса к этому взаимодействию обычным образом, мы обнаружим, что импульс не сохраняется. Однако, если формулы для расчета импульса записать в виде:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \cdot \vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

то закон сохранения импульса будет выполняться. Следовательно, это выражение представляет собой релятивистский импульс частицы.
Здесь m_0 - масса покоя, а релятивистская масса m определяется формулой:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

С релятивистской массой формула импульса приобретает привычный вид ($\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}$).
Проверим, что это выражение является инвариантом:

$$\upsilon_{1x} = \frac{\upsilon'_{1x} + u}{1 + \frac{u \cdot \upsilon'_{1x}}{c^2}} = \frac{2 \cdot u}{1 + \frac{u^2}{c^2}},$$

так как $\upsilon'_{1x} = u$ и $\upsilon_{2x} = 0$, поскольку вторая частица в системе k покоится.

Тогда суммарный импульс $\boldsymbol{p}$ частиц в системе k до соударения равен импульсу первой частицы.

$$\frac{m\cdot\upsilon_{1x}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{2\cdot m\cdot u}{\left(1+\frac{u^2}{c^2}\right)\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{2\cdot m\cdot u}{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

Если считать, что в результате соударения образовалась частица массой $2m$, то кажется, что закон сохранения импульса не выполняется. На самом деле масса образовавшейся частицы окажется больше, чем сумма масс столкнувшихся частиц на величину, эквивалентную диссипировавшей энергии (см. следующий параграф).

§6 Энергия частицы в релятивистском случае.

Получим релятивистское выражение для кинетической энергии.

Второй закон Ньютона в релятивистском случае имеет привычный вид, но $\boldsymbol{p}$ - релятивистский импульс:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum\vec{F}\,.$$

По теореме о кинетической энергии:

$$dW_k=\delta A$$

Умножим обе стороны Второго закона Ньютона на $d\vec{s}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\cdot\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=\vec{F}\,\Big|\cdot d\vec{s}$$

С учетом $d\vec{s}=\vec{\upsilon}\cdot dt$ в результате алгебраических преобразований получим:

$$dW_k=d\left(\frac{m_0\cdot c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=d\left(\frac{m_0\cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)$$

Отсюда видно, что дробь

$$\left(\frac{m_0\cdot c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

есть определенное с точностью до константы выражение для W_k . Эта константа должна быть выбрана из условия обращения в ноль W_k при нулевой скорости:

$$W_k=\frac{m_0\cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-m_0\cdot c^2=m_0\cdot c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-1\right)$$

Итак, искомое выражение для кинетической энергии:

$$W_k=m_0\cdot c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-1\right).$$

Покажем, что при малых скоростях полученное выражение перейдет в привычную классическую формулу для кинетической энергии.

Применим разложение в ряд Тейлора, оставив первые два слагаемых, справедливое для $x << 1$:

$$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm n \cdot x;$$

Получим:

$$W_k = m \cdot c^2 \left(\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} \right)^{-1/2} - 1 \right) \approx m \cdot c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\upsilon^2}{c^2} - 1 \right] = \frac{m \cdot \upsilon^2}{2} \quad (\upsilon << c)$$

Таким образом, оказалось, что $\frac{m \cdot \upsilon^2}{2}$ - приближенная формула W_k, справедливая для малых скоростей.

Для того, чтобы энергия была *инвариантом* по отношению к преобразованию Лоренца, т.е. чтобы выполнялся закон сохранения энергии во всех инерциальных системах отсчета (ИСО), необходимо к кинетической энергии добавить $m_0 \cdot c^2$. Получится:

$$W = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

есть полная энергия тела (частицы).

Тогда кинетическую энергию можно представить как разность между полной энергией и *энергией покоя*:

$$W_k = W - W_0,$$

где $W_0 = m_0 \cdot c^2$ есть энергия покоя – знаменитая формула Эйнштейна, отражающая связь массы и энергии.

Для более глубокого понимания этой формулы ее полезно записать в виде

$$m_0 = \frac{W_0}{c^2}.$$