Добротность.

Добротность является одной из характеристик гармонического осциллятора (грузика на пружине, математического маятника, стрелки компаса, колебательного контура и др.), зависящая от набора его параметров (жесткости пружинки, массы грузика и коэффициента сопротивления; …; емкости конденсатора, индуктивности катушки и активного сопротивления соответственно). Однако ее физический смысл проявляется при вынужденных колебаниях осциллятора, причем определить добротность можно тремя способами: из потерь энергии при вынужденных колебаниях, из остроты (ширины) резонансной кривой, из высоты резонансного пика. Все определения добротности являются эквивалентными.

1. *Добротностью* называется безразмерная скалярная физическая величина, характеризующая *качество* осциллятора и равная умноженному на 2π отношению энергии, запасенной в осцилляторе, к ее диссипации за один период колебаний при частоте колебаний, равной собственной, то есть

$$Q = 2\pi \frac{W}{-\Delta W}.$$

Рассмотрим смысл этого определения на примере колебательного контура. Энергия, запасенная в контуре, есть энергия заряженного конденсатора, то есть $W = \frac{q_m^2}{2C}$, а потери энергии за период есть джоулево тепло, выделившееся в активном сопротивлении за этот промежуток времени $-\Delta W = \int_0^T i^2 R dt = q_m^2 \omega_0^2 R \frac{T}{2}$, так как $i = q_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Подставляя полученные выражения в определение добротности, с учетом формул для частоты собственных колебаний и коэффициента затухания получим $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$.

2. *Добротностью* также называется безразмерная скалярная физическая величина, характеризующая высоту резонансного пика и равная отношению амплитуды вынужденных колебаний при собственной частоте к амплитуде колебаний при частоте внешней вынуждающей силы, стремящейся к нулю, то есть

$$Q = \frac{\hat{x}_m(\omega = \omega_0)}{\hat{x}_m(\omega = 0)}.$$

Заметим, что стоящая в числителе амплитуда лишь для контура с большой добротностью (малым коэффициентом затухания) будет близка к резонансной.

Рассмотрим смысл этого определения на примере грузика на пружине. Подставляя в это определение добротности выражения для амплитуды вынужденных колебаний $x_m = \frac{F_m}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$, записанные для частоты колебаний, равной собственной, и для частоты колебаний, стремящейся к нулю, после элементарных алгебраических преобразований получим $Q = \dfrac{\omega_0}{2\beta}$. Для электромагнитных колебаний это определение наглядно показывает, во сколько раз возрастает амплитуда колебаний напряжения в контуре по отношению к внешней ЭДС (убедитесь в этом самостоятельно).

3. *Добротностью* также называется скалярная физическая величина, характеризующая остроту (ширину) резонансной кривой, нарисованной для обобщенной скорости, и равная отношению частоты собственных колебаний осциллятора к так называемой полосе пропускания, то есть

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

Полосой пропускания $\Delta\omega = \omega_в - \omega_н$ называется ширина резонансной кривой, построенной для обобщенной скорости, взятая на уровне $0{,}707\left(=1/\sqrt{2}\right)$ от наибольшего значения.

После чуть более громоздких преобразований и в этом случае для добротности осциллятора получается выражение $Q = \dfrac{\omega_0}{2\beta}$.

Таким образом, во всех трех случаях для добротности получается одинаковое выражение $Q = \dfrac{\omega_0}{2\beta}$, которое для механических колебаний грузика на пружине и для колебательного контура соответственно принимает вид

$$Q = \frac{\sqrt{km}}{\mu}, \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Если $\beta << \omega_0$, то есть $Q >> 1$, для добротности можно получить $Q = \dfrac{\pi}{\Lambda}$. Если же добротность сравнительно мала, то точное выражение логарифмического декремента через добротность имеет вид $\Lambda = \dfrac{\pi}{Q\left(1 - \dfrac{1}{4Q^2}\right)}$.

При выполнении всех преобразований, упомянутых выше, необходимо использовать формулы:

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}, \omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}, \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ – частота собственных колебаний осцилляторов;

$\beta = \dfrac{\mu}{2m}, ..., \beta = \dfrac{R}{2L}$ – коэффициент затухания;

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ для любой частоты, в том числе и для частоты собственных колебаний;

$\omega_{зат} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний;

$\Lambda = \beta T_{зат}$ – выражение логарифмического декремента через коэффициент затухания.