Р. С. КУРМАНОВ, Л. А. ЛИТНЕВСКИЙ

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ЧАСТИЦ В ЗАДАЧАХ

ОМСК 2009

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

Р. С. Курманов, Л. А. Литневский

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ЧАСТИЦ В ЗАДАЧАХ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний к решению задач
для студентов первого курса дневного обучения

Омск 2009

УДК 530.1(075.8)
ББК 22.234я7
К93

Кинематика и динамика частиц в задачах: Методические указания к решению задач / Р. С. Курманов, Л. А. Литневский; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2009. 36 с.

Содержатся методические рекомендации по изучению курса физики и решению задач по кинематике и динамике материальной точки, краткое математическое введение к курсу. Представлен набор задач различного уровня сложности для аудиторной и самостоятельной работы студентов и для проведения контрольных работ. В приложениях приведены необходимые математические сведения и справочный материал.

Предназначены для студентов первого курса всех факультетов университета.

Библиогр.: 3 назв. Табл. 2. Рис. 10. Прил. 5.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент Г. А. Вершинин;
канд. техн. наук, профессор Р. А. Ахмеджанов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания к решению задач по курсу общей физики помогут студентам изучить этот интереснейший предмет. Программа курса построена таким образом, чтобы студенты не только приобрели определенные знания, но и научились применять их на практике. Решение задач для реализации этой цели является совершенно необходимым.

Как научиться решать задачи?

Перед решением задач сначала необходимо изучить теоретический материал по соответствующей теме, затем внимательно прочитать условие задачи и понять, к какому разделу физики относится рассматриваемая задача, какое явление она описывает и какое движение изучает. После этого следует переписать в тетрадь условие задачи полностью и кратко (столбиком), правильно обозначить используемые величины и рационально расставить индексы (это рекомендуется сделать после того, как выполнен рисунок). Значения величин, данных в задаче, следует перевести в “основные” единицы СИ (например, граммы – в килограммы, километры – в метры и т. д.).

Для решения задачи по механике необходимо выполнить рисунок и удачно выбрать систему отсчета (векторы на рисунке следует изображать длинными стрелками), построить проекции векторов на выбранные оси координат и выписать подходящие формулы. Иногда для наглядности полезно подчеркнуть известные и неизвестные величины, при необходимости найти дополнительные уравнения, если неизвестных больше, чем уравнений. При выполнении математических действий необходимо постоянно контролировать полученные результаты (это позволит вовремя обнаружить ошибки). Решать задачи следует только в общем виде. Численные значения величин рекомендуется подставлять в расчетную формулу после того, как получено алгебраическое выражение для искомой величины. Для выполнения расчетов необходимо научиться работать на микрокалькуляторах, освоить операции со скобками, ячейками памяти и т. д.

Иногда бывает полезно систематизировать проведенные математические преобразования, поискать более рациональное решение после получения ответа в трудной задаче, еще раз вернуться к ее решению. Repetitio est mater studiorum (Повторение – мать учения) – гласит пословица.

В задачах для самостоятельного решения цифра, стоящая в скобках после номера задачи, обозначает степень трудности задачи.

1. ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

1.1. Векторы

Физические величины можно разделить на два типа: *скалярные* и *векторные*. Скалярные величины (масса, длина, работа, энергия, электрический заряд и др.) полностью характеризуются одним числовым значением. Скалярные величины в свою очередь тоже подразделяют на два вида: *истинные скаляры*, которые всегда являются положительными величинами (например, масса, длина, кинетическая энергия и др.), и *алгебраические* величины, которые могут принимать положительные и отрицательные значения (например, заряд, потенциальная энергия, работа). Векторные величины (перемещение, скорость, ускорение, сила, импульс, момент силы, напряженность электрического поля, магнитная индукция и др.) характеризуются не только *числовым значением*, но и *направлением* в пространстве. Числовое значение вектора называется *модулем* и характеризует *длину* вектора. Геометрический образ вектора – это направленный отрезок прямой.

Существование такого разделения объективно обусловлено. Так, заданная масса тела (скаляр!) полностью характеризует его инерционные и гравитационные свойства, в то время как известный модуль перемещения (вектора!) позволяет найти лишь расстояние, на котором будет находиться тело от точки начала движения, но не позволяет найти точку, где это тело будет находиться.

Векторы характеризуются *модулем* и *ортом* вектора. Важнейшим понятием векторной алгебры является понятие *проекции вектора на ось*.

Над векторами можно выполнить *пять* алгебраических действий: *сложение*, *вычитание*, *умножение вектора на число*, *скалярное произведение*, *векторное произведение* (обратите внимание на отличие этих действий от четырех арифметических действий). Определения, основные характеристики векторов и действия над векторами подробно изложены в прил. 1 и 2.

Вопросы для самопроверки и задачи

1) Для чего нужны векторные величины?
2) Сформулируйте определение векторной величины.
3) Какие алгебраические действия можно выполнять с векторами?
4) Что такое орт вектора, модуль вектора, как их вычислить?
5) Что такое проекция вектора на ось, от чего зависит ее знак?

Задача 1. (1) Выбрать правильные и ошибочные записи: 1) $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$; 2) $a+b=c$; 3) $\vec{c}=2$; 4) $\vec{2}+\vec{3}=\vec{5}$; 5) $\vec{a}=3\vec{i}$; 6) $\vec{c}=-2{,}4\vec{k}$; 7) $\vec{c}=a\vec{b}$; 8) $\vec{c}=\vec{a}\vec{b}$; 9) $c=\vec{a}\vec{b}$; 10) $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$; 11) $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$; 12) $\vec{r}=x\vec{i}-y\vec{j}$; 13) $\vec{\upsilon}=5$ м/с; 14) $\upsilon=-5$ м/с; 15) $\vec{a}\vec{b}=-3$.

Задача 2. (1) Небольшой камень падает вниз, двигаясь с ускорением свободного падения, и достигает в некоторый момент времени скорость, равную 13 м/с. Чему равны в этот момент времени проекции *ускорения* и *скорости* на ось: 1) Ox_1, направленную горизонтально вправо; 2) Ox_2, направленную горизонтально влево; 3) Oy_1, направленную вертикально вверх; 4) Oy_2, направленную вертикально вниз.

Задача 3. (1) Автомобиль движется по прямому горизонтальному участку шоссе с ускорением, равным 1,2 м/с^2, и развивает к некоторому моменту времени скорость, равную 28 м/с.Чему равны в этот момент времени проекции *ускорения* и *скорости* на ось: 1) Ox_1, направленную вдоль дороги *по ходу* автомобиля; 2) Ox_2, направленную вдоль дороги *против хода* автомобиля; 3) Oy_1, направленную вертикально вверх; 4) Oy_2, направленную вертикально вниз.

Задача 4. (1) Турист движется со скоростью 1,6 м/с на северо-восток, ориентируясь по компасу. Угол между направлением его скорости и направлением на восток равен 30°. Найти проекции скорости движения туриста на координатные оси, направленные с запада на восток и с юга на север.

Задача 5. (1) Самолет, подлетая к взлетно-посадочной полосе, движется по глиссаде, имея скорость 400 км/ч, направленную, очевидно, «вперед и вниз» под углом 10° к горизонту. Ось Ox направлена вдоль полосы по ходу самолета, а ось Oy – вертикально вверх. Выполнить рисунок и найти проекции скорости самолета на эти оси. Как необходимо направить оси координат, чтобы в некоторый момент времени лишь одна из проекций была отлична от нуля?

Задача 6. (2) На сани, которые тянет мальчик за веревку, образующую с горизонтом угол 30°, действуют четыре силы: сила натяжения нити, направленная вдоль нити; сила тяжести, направленная вниз; сила реакции опоры, направленная вверх; сила трения, направленная против движения. Найти проекции этих сил на горизонтальную и вертикальную координатные оси.

Задача 7. (2) На лыжника, спускающегося с горы, наклон которой к горизонту составляет 30°, действуют три силы: сила тяжести, направленная *вертикально* вниз; сила реакции опоры, направленная *перпендикулярно поверхности горы* вверх; сила трения, направленная против направления движения лыжника. Найти проекции этих векторов на ось *Ox*, направленную *вдоль наклонной плоскости* вниз, и на ось *Oy*, направленную *перпендикулярно поверхности горы* вверх.

Задача 8. (1 – 3) Для векторов $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$; $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, заданных проекциями на декартовы оси, записать их разложение по осям координат, найти их модуль, сумму, разность, скалярное и векторное произведение:

а) $\vec{a}$ = (3,5; 5,2; –7,4), $\vec{b}$ = (–1,7; 2,3; 4,3);

б) $\vec{a}$ = (8,2; 5,6; 4,9), $\vec{b}$ = (3,4; 2,8; –2,5);

в) $\vec{a}$ = (0; 4,8; 4,3), $\vec{b}$ = (2,4; 3,1; 0);

г) $\vec{a}$ = (2,5; 0; –4,2), $\vec{b}$ = (–3,6; 0; 2,8).

Задача 9. (2) Найти проекцию вектора $\vec{a}$ = (1,7; 2,3; 4,4) на ось, орт которой равен орту вектора $\vec{b}$ = (4,1; 1,3; 2,2).

Задача 10. (2) Найти орт нормали к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ = (6,3; 5,2; 4,8) и $\vec{b}$ = (3,1; 4,3; 5,2).

Задача 11. (1) Чему равен угол между векторами $\vec{a}$ = (3,3; 4,2; 4,6) и $\vec{b}$ = (6,1; 2,3; 1,2).

Задача 12. (2) Найти проекцию орта вектора $\vec{a}$ = (1,4; 4,7; 3,2) на ось *Ox*.

Задача 13. (2) Найти орт вектора $\vec{a}$ = (2,7; 3,8; –1,3) и убедиться в том, что его длина равна единице.

Задача 14. (2) Получить выражение для вычисления *скалярного* произведения векторов, представленных в виде разложения по осям декартовой системы координат.

Задача 15. (3) Получить выражения для вычисления *векторного* произведения векторов, представленных в виде разложения по осям декартовой системы координат.

Задача 16. (2) Доказать, что скалярное произведение не изменится при перемене мест сомножителей, т. е. что $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

Задача 17. (3) Доказать, что векторное произведение меняет знак при перемене мест сомножителей, т. е. что $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

1.2. Производные и интегралы

Курс физики в высших учебных заведениях предусматривает широкое использование дифференциального и интегрального исчисления. Так, при вычислении погрешности измерений при выполнении лабораторных работ необходимо вычислять частные производные функций многих переменных. В курсе механики решаются задачи не только с равномерным и равноускоренным движением тел (как в курсе средней школы), но и задачи с произвольной зависимостью ускорения тела от времени, решение которых также основано на вычислении производных и интегралов функций. Аналогичные задачи встречаются и в других разделах физики.

Основные правила дифференцирования и интегрирования, а также таблицы производных и интегралов некоторых элементарных функций приведены в прил. 3 и 4 соответственно.

Вопросы для самопроверки и задачи

1) Сформулируйте основные свойства производных.
2) Что такое сложная функция? Приведите примеры.
3) Как найти частную производную функции многих переменных?
4) Сформулируйте основные свойства интегралов.
5) Что является решением дифференциальных уравнений?

Задача 18. (1 – 3) Для функций *f(x)* найти производную, интеграл и вычислить значение определенного интеграла на интервале от 0 до 1:

а) $f(x) = x^2 + 3$; б) $f(x) = 2x^3$;

в) $f(x) = \sin 2x$; г) $f(x) = \cos 3x$;

д) $f(x) = \ln(2x + b)$; е) $f(x) = \sqrt{1 - \sin 2x}$;

ж) $f(x) = e^{2x+1}$; з) $f(x) = x \ln x^2$.

Задача 19. (2, 3) Найти частные производные функций нескольких переменных по каждому аргументу функции:

а) $u(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2 y^2$; б) $u(x, y) = \ln(xy)$;

в) $u(x, y, z) = \ln\left(x^2 y^3 \big/ \sqrt{z}\right)$; г) $u(x, y) = x \big/ \sqrt{x^2 + y^2}$;

д) $u(x, y) = x \sin(x + y)$; е) $u(x, y) = \ln(x + y^2)$.

Задача 20. (3) Решить дифференциальные уравнения:

а) $y' + 5x = 0$; б) $xydx + (x+1)dy = 0$;

в) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1$; г) $xy' + y = y^2, \quad y(1) = 0{,}5$.

Задача 21. (4) За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака диаметром 1,8 м и высотой 2,45 м через отверстие в дне диаметром 6,2 см? Ось цилиндра вертикальна. Принять, что жидкость из сосуда вытекает со скоростью, равной $0{,}6\sqrt{2gh}$, где g – ускорение свободного падения; h – высота уровня воды над отверстием.

2. КИНЕМАТИКА

2.1. Движение с постоянным ускорением

Положение тел относительно выбранной системы координат принято характеризовать радиусом-вектором $\vec{r}(t)$, зависящим от времени. Тогда положение тела в пространстве в любой момент времени можно найти по формуле:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{s}\,. \tag{2.1}$$

(Напомним, что в этом и заключается основная задача механики.)

Среди множества различных видов движения самым простым является *равномерное* – движение с постоянной скоростью (нулевым ускорением), причем неизменным должен оставаться вектор скорости ($\vec{\upsilon} = \text{const}$). Очевидно, что такое движение может быть только прямолинейным. Именно при *равномерном движении* перемещение вычисляется по формуле:

$$\vec{s} = \vec{\upsilon}\, t\,. \tag{2.2}$$

Иногда тело движется по криволинейной траектории так, что модуль скорости остается постоянным ($\upsilon = \text{const}$) (такое движение нельзя назвать равномерным и к нему нельзя применить формулу (2.2)). В этом случае *пройденный путь* может быть вычислен по простой формуле:

$$l = \upsilon t\,. \tag{2.3}$$

Примером такого движения является *движение по окружности с постоянной по модулю скоростью*.

Более сложным является *равноускоренное движение* – движение с постоянным ускорением ($\vec{a} = \text{const}$). Для такого движения справедливы две формулы кинематики:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t\,; \tag{2.4}$$

$$\vec{s} = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \tag{2.5}$$

из которых можно получить две дополнительные формулы, которые часто могут быть полезны при решении задач:

$$\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2\vec{a}\vec{s}\,; \tag{2.6}$$

$$\vec{s} = \frac{\vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_0}{2}t\,. \tag{2.7}$$

Равноускоренное движение не обязательно должно быть прямолинейным. Необходимо лишь, чтобы *вектор* ускорения оставался постоянным. Примером равноускоренного, но не всегда прямолинейного движения, является движение с ускорением свободного падения (g = 9,81 м/с^2), направленным вертикально вниз.

Из школьного курса физики знакомо и более сложное движение – гармонические колебания маятника, для которого формулы (2.4) – (2.7) не справедливы.

При *движении тела по окружности с постоянной по модулю скоростью* оно движется с так называемым *нормальным* (*центростремительным*) ускорением

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}, \tag{2.8}$$

направленным к центру окружности и перпендикулярным скорости движения.

В более общем случае движения по криволинейной траектории с меняющейся скоростью ускорение тела можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие и представить в виде суммы тангенциального (касательного) $\vec{a}_\tau$ и нормального (перпендикулярного, центростремительного) $\vec{a}_n$ ускорения:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{e}_\upsilon + \frac{\upsilon^2}{R}\vec{e}_n, \tag{2.9}$$

где $\vec{e}_\upsilon$, $\vec{e}_n$ – орт вектора скорости и орт нормали к траектории; R – радиус кривизны траектории.

Движение тел всегда описывается относительно какой-либо системы отсчета (СО). При решении задач необходимо выбрать наиболее удобную СО. Для поступательно движущихся СО формула

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{u} \qquad (2.10)$$

позволяет легко переходить от одной СО к другой. В формуле (2.10) $\vec{\upsilon}$ – скорость тела относительно одной СО; $\vec{\upsilon}'$ – скорость тела относительно второй СО; $\vec{u}$ – скорость второй СО относительно первой.

Вопросы для самопроверки и задачи

1) Модель материальной точки: в чем ее суть и смысл?

2) Сформулируйте определение равномерного, равноускоренного движения.

3) Сформулируйте определения основных кинематических величин (радиуса-вектора, перемещения, скорости, ускорения, тангенциального и нормального ускорения).

4) Напишите формулы кинематики равноускоренного движения, выведите их.

5) Сформулируйте принцип относительности Галилея.

2.1.1. Прямолинейное движение

Задача 22. (1) Автомобиль движется по прямолинейному участку дороги с постоянной скоростью 90 км/ч. Найти перемещение автомобиля за 3,3 мин и его положение в этот же момент времени, если в начальный момент времени автомобиль находился в точке, координата которой равна 12,23 км, а ось *Ox* направлена 1) вдоль движения автомобиля; 2) против движения автомобиля.

Задача 23. (1) Велосипедист движется по загородной дороге на север со скоростью 12 м/с в течение 8,5 мин, затем он, свернув направо на перекрестке, проехал еще 4,5 км. Найти перемещение велосипедиста за время его движения.

Задача 24. (1) Конькобежец движется прямолинейно с ускорением 2,6 $м/с^2$, и за 5,3 с его скорость увеличилась до 18 м/с. Найти начальное значение скорости конькобежца. Какое расстояние пробежит спортсмен за это время?

Задача 25. (1) Автомобиль движется прямолинейно, притормаживая перед знаком ограничения скорости 40 км/ч с ускорением 2,3 $м/с^2$. Сколько времени длилось такое движение, если перед началом торможения скорость автомобиля была равна 70 км/ч? На каком расстоянии от знака водитель начал тормозить?

Задача 26. (1) С каким ускорением движется поезд, если на пути 1200 м его скорость возросла от 10 до 20 м/с? Сколько времени затратил поезд на этот путь?

Задача 27. (1) Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось на землю через 3 с. Какова была начальная скорость тела? На какой максимальной высоте оно побывало?

Задача 28. (2) Тело на веревке поднимают с поверхности земли с ускорением 2,7 м/с^2 вертикально вверх из состояния покоя. Через 5,8 с веревка оборвалась. Сколько времени двигалось тело до земли после того, как оборвалась веревка? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 29. (2) Тело начинает двигаться без начальной скорости с ускорением 2,4 м/с^2. Определить путь, пройденный телом за первые 16 с от начала движения, и путь, пройденный за последующие 16 с. С какой средней скоростью двигалось тело эти 32 с?

2.1.2. Равноускоренное движение в плоскости

Задача 30. (1) Баскетболист бросает мяч в кольцо со скоростью 8,5 м/с под углом 63° к горизонту. С какой скоростью мяч попал в кольцо, если долетел до него за 0,93 с?

Задача 31. (1) Баскетболист бросает мяч в кольцо. В момент броска мяч находится на высоте 2,05 м, а через 0,88 с падает в кольцо, расположенное на высоте 3,05 м. С какого расстояния от кольца (по горизонтали) произведен бросок, если мяч был брошен под углом 56° к горизонту?

Задача 32. (2) Мяч брошен горизонтально со скоростью 13 м/с, спустя некоторое время его скорость оказалась равной 18 м/с. Найти перемещение мяча за это время. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 33. (2) Тело брошено под некоторым углом к горизонту с начальной скоростью 17 м/с. Найти величину этого угла, если дальность полета тела в 4,3 раза больше максимальной высоты подъема.

Задача 34. (2) Бомбардировщик, пикирующий со скоростью 360 км/ч, сбрасывает бомбу с высоты 430 м, находясь по горизонтали на расстоянии 250 м от цели. Под каким углом должен пикировать бомбардировщик? На какой высоте окажется бомба спустя 2 с от начала падения? Какую скорость она будет иметь в этой точке?

Задача 35. (2) Самолет, летевший на высоте 2940 м со скоростью 410 км/ч, сбросил бомбу. За какое время до прохождения над целью и на каком расстоянии от нее самолет должен сбросить бомбу, чтобы попасть в цель? Найти модуль и направление скорости бомбы спустя 8,5 с от начала ее падения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 36. (2) Снаряд, выпущенный под углом $36{,}6^{\circ}$ к горизонту, дважды был на одной и той же высоте: спустя 13 и 66 с после вылета. Определить начальную скорость, максимальную высоту подъема и дальность полета снаряда. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.1.3. Движение по окружности

Задача 37. (2) Грузило, движущееся на леске по окружности с постоянным тангенциальным ускорением, к концу восьмого оборота имело скорость 6,4 м/с, а после 30 с движения его нормальное ускорение стало 92 м/с^2. Найти радиус этой окружности.

Задача 38. (2) Мальчик, катающийся на карусели, движется при остановке карусели по окружности радиусом 9,5 м и проходит путь 8,8 м, имея в начале этой дуги скорость 3,6 м/с, а в конце – 1,4 м/с. Определить полное ускорение мальчика в начале и конце дуги, а также время его движения по этой дуге.

Задача 39. (2) Муха, сидящая на краю лопасти вентилятора, при его включении движется по окружности радиусом 32 см с постоянным тангенциальным ускорением 4,6 см/с^2. Через сколько времени после начала движения нормальное ускорение будет вдвое больше тангенциального и чему будет равна линейная скорость мухи в этот момент времени? Сколько оборотов муха сделает за это время?

Задача 40. (2) При открывании двери ручка из состояния покоя движется по окружности радиусом 68 см с постоянным тангенциальным ускорением, равным 0,32 м/с^2. Найти зависимость полного ускорения ручки от времени.

Задача 41. (3) Для экономии места въезд на один из высочайших в Японии мостов устроен в виде винтовой линии, обвивающей цилиндр радиусом 65 м. Полотно дороги составляет с горизонтальной плоскостью угол $4{,}8^{\circ}$. Найти ускорение автомобиля, движущегося по этой дороге с постоянной по модулю скоростью, равной 85 км/ч?

2.1.4. Относительность движения

Задача 42. (2) Два корабля движутся относительно берегов со скоростью 9,00 и 12,0 узлов (1 узел = 0,514 м/с), направленной под углом 30 и 60° к меридиану соответственно. С какой скоростью второй корабль движется относительно первого?

Задача 43. (3) Мальчик, который может плавать со скоростью, в 2,5 раза меньшей скорости течения реки, хочет переплыть эту реку так, чтобы его как можно меньше снесло вниз по течению. Под каким углом к берегу мальчик должен плыть? На какое расстояние его снесет, если ширина реки равна 190 м.

Задача 44. (3) Два тела одновременно начинают двигаться из одной точки в поле силы тяжести с одинаковой скоростью, равной 2,6 м/с. Скорость одного тела направлена под углом $\pi/4$, а другого – под углом $-\pi/4$ к горизонту. Определить относительную скорость этих тел через 2,9 с после начала их движения.

2.2. Движение с переменным ускорением

Рассматривая формулу определения ускорения в общем случае

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} \qquad (2.11)$$

как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, скорость тела можно найти после интегрирования:

$$\vec{\upsilon}(t)=\vec{\upsilon}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\vec{a}(t)dt\ . \qquad (2.12)$$

Аналогично, рассматривая формулу определения скорости в общем случае

$$\vec{\upsilon}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \qquad (2.13)$$

как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, положение тела в пространстве можно найти после интегрирования:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\vec{\upsilon}(t)dt\ . \qquad (2.14)$$

Путь, пройденный телом за промежуток времени ($\Delta t = t - t_0$), можно вычислить как интеграл от модуля скорости:

$$l=\int_{t_0}^{t}\upsilon(t)\,dt\ . \qquad (2.15)$$

Радиус-вектор, как и любой другой вектор, можно выразить через проекции и орты выбранной системы координат. Формула

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{e}_x+y(t)\vec{e}_y+z(t)\vec{e}_z\,; \qquad (2.16)$$

представляет радиус-вектор в декартовой системе координат.

Система функций

$$\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t) \end{cases} \qquad (2.17)$$

является *уравнением траектории в параметрической форме*, где параметром является время *t*. Если движение происходит в одной плоскости, например *xOy*, то можно получить уравнение траектории в явном виде: $y=y(x)$, для чего нужно из первых двух функций системы (2.17) исключить время.

Вопросы для самопроверки и задачи

1) Выведите формулы зависимости скорости и перемещения от времени, если известна зависимость ускорения от времени.

2) Выведите уравнение траектории движения тела, брошенного под углом к горизонту.

3) Запишите радиус-вектор в виде разложения по базису декартовой системы координат.

4) Выведите формулы для нахождения скорости и ускорения тела в декартовой системе координат.

2.2.1. Обратная задача механики

Задача 45. (1, 2) Найти размерность постоянных *A*, *B* и *C*; радиус-вектор в момент времени, равный 2,6 с, и изобразить его на рисунке; перемещение за промежуток времени от t_1 = 0,73 с до t_2 = 2,3 с; его модуль; написать уравнение траектории, если частица движется таким образом, что ее радиус-вектор меняется с течением времени по закону:

а) $\vec{r}(t)=At^2\vec{i}+B\sin(\pi t)\vec{j}$; б) $\vec{r}(t)=Be^{Ct}\vec{i}+At^3\vec{j}$;

в) $\vec{r}(t) = At^3\vec{i} + B\sqrt{t}\,\vec{j}$; г) $\vec{r}(t) = Ae^{-Ct}\vec{j} + Bt^2\vec{k}$;

д) $\vec{r}(t) = At^{2/3}\vec{j} + B\sqrt{t}\vec{k}$; е) $\vec{r}(t) = A\cos(\pi t)\,\vec{i} + B\,t^4\,\vec{j}$,

где A = 1,8; B = 4,3; C = 1,7 – постоянные коэффициенты.

Задача 46. (2) Реактивный снаряд движется в плоскости yOz так, что его координаты меняются с течением времени по закону: $y(t) = (2{,}3t^2 - 4{,}5)$ м; $z(t) = (3{,}7t - 1{,}6)$ м. Найти уравнение траектории и тангенциальное ускорение снаряда $\vec{a}_\tau$ в момент времени, равный 86 с.

Задача 47. (2) Движение бегуна на стадионе задано формулами: $x = \alpha + \beta t^2$; $y = \gamma + \sigma t$, где α = 4,3 м; β = 2,4 м/с^2; γ = 3,1 м; σ = 5,2 м/с. Найти: 1) скорость спортсмена в тот момент, когда его координата x равна 4,7 м; 2) зависимость ускорения спортсмена от времени.

Задача 48. (3) Голубь перемещается в пространстве так, что его радиус-вектор меняется с течением времени по закону: $\vec{r}(t) = At^2\,\vec{i} + Bt^2\,\vec{j} + C\,\vec{k}$, где A = 0,53 м/с^2; B = 0,32 м/с^2; C = 2,8 м. Найти: 1) путь, который пролетела птица за 16 с от начала полета; 2) модуль мгновенного ускорения в момент времени, равный 0,85 с.

Задача 49. (3) Зависимость координат модели гоночного автомобиля от времени имеет вид: $x(t) = A\cos\omega t$; $y(t) = A\sin\omega t$; $z = 0$, где A = 5,6 м; ω = 2,1 рад/с. Определить зависимость модуля нормального и тангенциального ускорения от времени, а также путь, пройденный моделью за 73 с.

Задача 50. (3) Снаряды вылетают с начальной скоростью 550 м/с под углом 30, 45 и 60° к горизонту. Определить радиус кривизны траектории снарядов в их наивысшей и начальной точках.

Задача 51. (3) С вышки высотой 14,7 м в горизонтальном направлении брошен камень с начальной скоростью 12 м/с. Определить скорость, тангенциальное и нормальное ускорение камня спустя 0,83 с после начала его движения. Чему равны радиус кривизны и расстояние до земли в этой точке траектории? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.2.2. Прямая задача механики

Задача 52. (2, 3) Найти размерность постоянных A, B, C, D и зависимость вектора перемещения материальной точки от времени, если материальная точка движется таким образом, что вектор ее скорости меняется с течением времени по закону:

а) $\vec{\upsilon}(t) = At^2\vec{j} + B\sqrt{t}\,\vec{k}$; б) $\vec{\upsilon}(t) = Ae^{Dt}\vec{i} + Bt^3\vec{j} + Ct\vec{k}$;

в) $\vec{\upsilon}(t) = At\vec{i} + C\sqrt[5]{t}\,\vec{k}$; г) $\vec{\upsilon}(t) = Ate^{-Dt^2}\,\vec{i} + Bt^2\vec{j} + Ct^3\vec{k}$;

д) $\vec{\upsilon}(t) = A\sqrt[3]{t}\,\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}$; е) $\vec{\upsilon}(t) = At^4\vec{i} + B\sqrt{t}\,\vec{j} + Ct\vec{k}$.

Задача 53. (3) Частица движется с зависящим от времени ускорением: $\vec{a}(t) = At\vec{i} + B\vec{j}$, где A = 2,4 м/с^3; B = 7,1 м/с^2. Найти в момент времени, равный 2,7 с модуль скорости, модуль радиуса-вектора, а также путь и перемещение частицы за промежуток времени от t_1 = 1,4 с до t_2 = 3,8 с. В начальный момент времени частица покоилась в начале координат.

Задача 54. (2) Скорость стартующего на вираже автомобиля меняется с течением времени по закону: $\vec{\upsilon} = At^3\,\vec{i} + Bt^2\,\vec{j}$, где A = 2,4 м/с^4; B = 1,6 м/с^3. Найти: 1) модуль приращения ускорения за время от t_1 = 1,3 с до t_2 = 3,2 с; 2) приращение радиуса-вектора за это время. В начальный момент времени автомобиль находился в начале координат.

Задача 55. (2) Скорость зайца меняется с течением времени по закону: $\vec{\upsilon} = (\alpha t + \beta)\vec{i} + \gamma t^2\,\vec{j}$, где α = 2,4 м/с^2; β = 5,3 м/с; γ = 3,7 м/с^3. Вычислить скорость зайца в момент времени, равный нулю, найти зависимость ускорения и радиуса-вектора зайца от времени.

Задача 56. (3) Ускорение взлетающего вертолета меняется по закону: $\vec{a} = At\,\vec{i} + B\sqrt{t}\,\vec{j}$, где A = 3,2 м/с^3; B = 4,8 м/с$^{5/2}$. Вычислить: 1) модуль вектора скорости в момент времени, равный 2,3 с; 2) приращение радиуса-вектора за промежуток времени от t_1 = 1,2 с до t_2 = 3,6 с. В начальный момент времени вертолет покоился в начале координат.

Задача 57. (2) Шарик, запрессованный в обод маховика, движется по окружности радиусом 23 см так, что зависимость пути от времени описывается уравнением: $l = A + Ct^3$, где C = 0,52 м/с^3. Найти момент времени, когда угол между тангенциальным и полным ускорением шарика будет равен 30°.

Задача 58. (3) Гайка на ободе центрифуги движется по окружности радиусом R. Модуль скорости гайки зависит от пройденного пути по закону: $\upsilon = B\sqrt{l}$, где B – постоянная. Найти угол между вектором полного ускорения и вектором скорости в зависимости от l.

3. ДИНАМИКА

3.1. Движение тел под действием постоянных сил

Порядок решения всех динамических задач принципиально прост: необходимо обозначить неизвестные величины, составить уравнения движения:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \,, \tag{3.1}$$

пользуясь вторым и третьим законами Ньютона, и учесть при этом условия, налагаемые на траекторию движения. Таким путем всегда можно получить дифференциальные уравнения для определения неизвестных величин.

Если использование таких сил как сила тяжести, сила реакции опоры, сила натяжения как правило не вызывает трудностей, то применение силы трения связано с определенными проблемами. Следует иметь в виду, что сила трения не всегда является помехой движению. Вспомните, как трудно ходить по льду, выполнить маневр на автомобиле на обледенелой дороге. Поэтому сила трения часто является “источником” движения, например, при разгоне автомобиля или при движении по закруглению дороги.

В задачах координатные оси СО необходимо выбирать так, чтобы задача решалась наиболее простым и удобным способом.

При описании движения связанных тел следует записать уравнения движения для каждого тела, а взаимодействие между телами учесть с помощью сил реакции, сил натяжения нитей и т. д. Тогда формально тела можно рассматривать как независимые. Сущность такого метода составляет содержание так называемого принципа д’Аламбера, что позволяет решать уравнения при ограничениях на движение. Как правило, сначала необходимо вывести формулу для ускорения тел, а затем следует применить формулы кинематики.

Вопросы для самопроверки и задачи

1) Сформулируйте первый, второй, третий законы Ньютона.
2) Какое движение тела называется несвободным?
3) Какие силы действуют на тело, находящееся на наклонной плоскости?
4) Как направлена сила трения скольжения?
5) Как удобнее выбрать координатные оси?

6) Какая сила описывает взаимодействие связанных тел?

7) Сформулируйте принцип суперпозиции сил.

8) Сколько векторных уравнений движения необходимо записать для описания движения связанных тел?

3.1.1. Движение вдоль вертикальной прямой

Задача 59. (1) Подвешенное к тросу ведро массой 11 кг поднимают вертикально. С каким ускорением оно движется, если сила натяжения троса 118 Н? Каким будет натяжение троса при движении этого ведра вниз с таким же ускорением?

Задача 60. (1) Подвешенное к динамометру тело массой 2,3 кг поднимают вертикально. Что покажет динамометр а) при подъеме с ускорением 2,8 м/с^2; б) при равномерном подъеме?

Задача 61. (2) Камень массой 0,14 кг, брошенный вертикально вверх со скоростью 34 м/с, достиг высшей точки подъема через 2,5 с. Определить среднее значение силы сопротивления воздуха.

Задача 62. (2) В лифте на пружинных весах стоит человек массой 68 кг. Лифт движется с ускорением 2,75 м/с^2. Определить показание весов в двух случаях, когда ускорение лифта направлено: 1) вертикально вверх; 2) вертикально вниз.

Задача 63. (2) За какое минимальное время можно поднять груз массой 12 кг на высоту 25 м с помощью веревки, прочность которой на разрыв равна 250 Н?

Задача 64. (2) Воздушный шар объемом 660 м^3 находится в равновесии. Какое количество балласта надо выбросить за борт, чтобы шар начал подниматься с ускорением 0,078 м/с^2? Плотность воздуха равна 1,29 кг/м^3.

Задача 65. (3) К потолку лифта, масса которого 108 кг, подвешен груз. Сила 1520 Н заставляет лифт двигаться вверх. Груз находится на расстоянии 1,65 м от пола лифта. Нить внезапно обрывается. Сколько времени пройдет от момента разрыва нити до удара груза об пол?

3.1.2. Движение по горизонтальной прямой

Задача 66. (1) На покоившийся на горизонтальной поверхности камень массой 23 кг подействовали постоянной силой, направленной под углом 30° к горизонту. После начала движения камень за 5,4 с прошел 25 м. Найти значение действующей силы, если коэффициент трения скольжения равен 0,022.

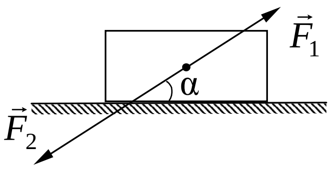


Рис. 1

Задача 67. (2) В какую сторону и с каким ускорением начнет двигаться брусок, изображенный на рис. 1, если к нему приложить две силы: F_1 = 82 Н и F_2 = 150 Н? Масса тела равна 15 кг, угол α равен 32°, коэффициент трения скольжения бруска о плоскость – 0,23.

Задача 68. (2) В каком случае кирпич будет двигаться с большим ускорением: когда к нему приложена сила в 26 Н, параллельная горизонтальной поверхности, или когда эта же сила приложена под углом 45° к горизонту? Масса кирпича равна 3,2 кг, коэффициент трения скольжения о поверхность равен 0,22.

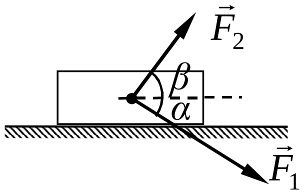


Рис. 2

Задача 69. (2) К первоначально покоящемуся бруску приложили две силы: F_1 = 15,2 Н; F_2 = 9,3 Н (рис. 2). Определить путь, пройденный бруском за 5,4 с от начала действия сил, если его масса равна 2,7 кг, а коэффициент трения о плоскость равен 0,32. Угол α составляет 30°, угол β – 45°.

Задача 70. (2) В гонке на прямой заснеженной дороге участвуют три автомобиля ВАЗ моделей 2106, 2110 и 2121. В какой последовательности автомобили пройдут промежуточный финиш (120 м от старта), если мощность двигателей достаточна для пробуксовки колес при разгоне на любой передаче, а коэффициент трения скольжения между шинами и дорогой равен 0,18. Учесть, что на переднюю ось приходится 65 % от массы автомобиля.

Задача 71. (3) Пусть лебедь, рак и щука в известной басне Крылова действуют на воз с поклажей массой 108 кг с силой, равной 112, 62 и 31 Н соответственно. Сила, с которой лебедь действует на воз, направлена вертикально вверх, силы действия рака и щуки направлены горизонтально по продольной оси воза в противоположные стороны. Определить ускорение, с которым будет двигаться воз, если коэффициент трения равен 0,052.

3.1.3. Движение по наклонной плоскости

Задача 72. (1) Автомобиль массой 1,95 т поднимается в гору с углом наклона, равным 35°. На участке пути длиной 32 м скорость автомобиля увеличилась от 25 до 38 км/ч. Считая движение равноускоренным, определить силу тяги двигателя. Коэффициент сопротивления движению принять равным 0,23.

Задача 73. (1) Коэффициент трения ботинок о камень равен 0,68. На склоне какой наибольшей крутизны еще можно удержаться в этих ботинках?

Задача 74. (2) Какую горизонтальную силу необходимо приложить к ящику массой 13 кг, находящемуся на наклонной плоскости длиной 5,5 м и высотой 3,4 м, чтобы ящик равномерно двигался по ней? Трением пренебречь.

Задача 75. (2) Контейнер массой 207 кг равномерно поднимают по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 28^o, прикладывая силу 1500 Н вдоль линии движения. С каким ускорением контейнер будет соскальзывать вдоль наклонной плоскости, если его отпустить?

Задача 76. (3) Ледяная гора составляет с горизонтом угол 35^o. Из некоторой точки по ней снизу вверх движется шайба с начальной скоростью 24 м/с. Коэффициент трения скольжения равен 0,078. Определить скорость шайбы при ее возвращении в ту же точку и высоту, на которую поднималась шайба.

Задача 77. (2) Мальчик тянет сани массой 52 кг в гору с силой 212 Н. Веревка, за которую он тянет, составляет с горизонтом угол 43^o. Угол наклона горы равен 18^o. Коэффициент трения санок о поверхность горки равен 0,22. Определить ускорение, с которым движутся санки, и силу давления санок на горку.

Задача 78. (2) Автомобиль массой 6,8 т подъехал к подъему дороги с углом наклона, равным $5{,}4^o$, имея скорость 24 м/с. Сила тяги автомобиля равна 8,3 кН, коэффициент трения равен 0,062, длина подъема составляет 96 м. Найти: 1) ускорение автомобиля; 2) скорость в конце подъема; 3) время движения.

Задача 79. (3) Небольшой камень пустили снизу вверх по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 15^o. Найти коэффициент трения, если время подъема камня оказалось в два раза меньше времени спуска.

Задача 80. (4) По деревянным сходням, образующим с горизонтом угол 36^o, втаскивают ящик за привязанную к нему веревку. Коэффициент трения ящика о сходни равен 0,28. Под каким углом к горизонту следует тянуть веревку, чтобы с наименьшим усилием втянуть ящик?

3.1.4. Движение по окружности

Задача 81. (1) Какова первая космическая скорость для Луны, Марса?

Задача 82. (2) Найти массу Солнца, зная период обращения Земли вокруг Солнца. Расстояние от Земли до Солнца равно $1{,}5 \cdot 10^{11}$ м.

Задача 83. (2) Спутник движется по круговой орбите вокруг Земли на расстоянии 280 км от ее поверхности. Определить скорость движения спутника.

Задача 84. (3) Какую скорость относительно поверхности Земли должен иметь искусственный спутник, чтобы лететь по круговой орбите, расположенной в плоскости экватора на высоте 1600 км над Землей?

Задача 85. (2) Какими должны быть радиус круговой орбиты искусственного спутника Земли и его линейная скорость, чтобы период обращения спутника был равен одним суткам?

Задача 86. (2) Ускорение Луны можно найти исходя из кинематических соображений, зная средний радиус ее орбиты и период обращения вокруг Земли. Сравнить полученное значение ускорения со значением ускорения, создаваемого на лунной орбите земным тяготением.

Задача 87. (3) Чтобы избежать вращения спутника массой 18 т вокруг собственной оси, к его поверхности прикрепляют канат, направленный в сторону Земли, длиной 150 м с гирей массой 32 кг на другом конце. Найти натяжение каната, если орбита спутника проходит на высоте 360 км над поверхностью Земли.

3.1.5. Движение связанных тел

Задача 88. (1) Через легкий неподвижный блок перекинут шнур. К одному концу шнура привязан груз массой 1,6 кг, к другому – 4,2 кг. Чему будут равны сила натяжения шнура и сила давления на ось блока во время движения грузов? Массой блока и шнура пренебречь.

Задача 89. (1) На столе лежит брусок массой 5,3 кг. К бруску привязан шнур, перекинутый через неподвижный невесомый блок. К другому концу шнура привязана гиря массой 2,4 кг. С каким ускорением будут двигаться брусок и гиря, если коэффициент трения бруска о поверхность стола равен 0,25? Какова будет сила натяжения шнура при движении?

Задача 90. (2) На столе лежит горизонтальный брусок, к которому привязаны нити, перекинутые через невесомые блоки, укрепленные на краях стола. К свободным концам нитей подвешены грузы массой 0,85 и 0,26 кг, вследствие чего брусок приходит в движение и за 2,3 с проходит путь, равный 1,4 м. Зная, что масса бруска равна 2,2 кг, определить коэффициент трения скольжения.

Задача 91. (2) Тела m_2 и m_3, связанные нитью, скользят по горизонтальному столу с ускорением 2,8 м/с^2 под действием тела m_1, прикрепленного к концу нити, которая привязана к телу m_2 и перекинута через неподвижный блок, укрепленный на краю стола. Определить массу тела m_3 и силы натяжения нитей, если известно, что $m_2 = m_1 = 2$ кг. Коэффициенты трения второго и третьего тел о плоскость одинаковы и равны 0,2.

Задача 92. (2) Два бруска массой 0,88 и 4,1 кг, соединенные шнуром, лежат на столе. С каким ускорением будут двигаться бруски, если к одному из них приложить силу F, равную 12 Н, направленную горизонтально? Какова будет сила натяжения шнура, соединяющего бруски, если силу F приложить 1) к первому бруску, 2) ко второму бруску? Коэффициент трения брусков о стол равен 0,19.

Задача 93. (2) На неподвижной наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 32°, лежит груз массой 5,2 кг, привязанный к шнуру. Другой конец шнура перекинут через легкий неподвижный блок, закрепленный на вершине наклонной плоскости. К свободному концу шнура подвешен груз массой 1,1 кг. С каким ускорением будут двигаться грузы, если коэффициент трения груза о плоскость равен 0,18? Какова сила натяжения нитей?

Задача 94. (2) Две боковые грани трехгранной призмы, лежащей на третьей грани, образуют с горизонтом угол α, равный 30° и угол β, равный 45°. Два бруска массой 1,2 кг каждый, связаны нитью, перекинутой через блок, закрепленный над верхним ребром призмы. Коэффициент трения первого бруска о стол равен 0,2, второго – 0,1. Нить невесомая, массой блока пренебречь. Найти ускорение, с которым движутся грузы.

Задача 95. (3) На горизонтальном столе лежат два бруска массой 1,3 и 2,3 кг, связанные невесомой нерастяжимой нитью. Ко второму бруску привязана такая же нить, которая перекинута через невесомый неподвижный блок, закрепленный на краю стола. К свободному концу нити привязан груз массой 4,2 кг. С каким ускорением будут двигаться грузы, если коэффициент трения грузов о поверхность стола равен 0,12? Какова сила натяжения нитей?

Задача 96. (3) На горизонтальном столе лежат два тела массой 1,6 кг каждое. Тела связаны между собой невесомой нерастяжимой нитью. Такая же нить связывает второе тело с грузом массой 0,57 кг. Эта нить перекинута через невесомый блок, укрепленный на краю стола. Коэффициент трения первого тела о стол равен 0,11, второго – 0,15. Найти: 1) ускорение, с которым движутся тела; 2) натяжение нити, связывающей тела, лежащие на столе.

3.2. Движение тел под действием переменной силы

Задача 97. (3) Катер массой 525 кг движется по озеру со скоростью 15 м/с. В момент времени, равный нулю, выключили двигатель. Считая силу сопротивления движению катера пропорциональной скорости катера $\vec{F} = -\mu\vec{v}$, где μ = 330 кг/с – коэффициент сопротивления, найти полный путь катера до остановки.

Задача 98. (3) Катер массой 2,4 т с двигателем мощностью 55 кВт развивает максимальную скорость 22 м/с. Определить время, в течение которого катер после выключения двигателя потеряет половину своей скорости. Принять, что сила сопротивления движению катера изменяется пропорционально квадрату скорости катера.

Задача 99. (3) При падении тела с большой высоты его скорость при установившемся движении достигает значения 82 м/с. Определить время, в течение которого скорость становится равной 48 м/с. Силу сопротивления воздуха принять пропорциональной скорости тела.

Задача 100. (3) Парашютист массой 85 кг падает при открытом парашюте с установившейся скоростью, равной 5,3 м/с. Какой будет установившаяся скорость, если на том же парашюте будет спускаться мальчик массой 38 кг? Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости парашютиста.

Задача 101. (3) Парашютист, масса которого 78 кг, совершает затяжной прыжок. Считая, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости парашютиста, определить, через какой промежуток времени скорость парашютиста будет равна 0,92 от скорости установившегося движения. Коэффициент сопротивления движению равен 12 кг/с. Начальную скорость парашютиста считать равной нулю.

Задача 102. (3) Автомобиль массой 2,3 т движется со скоростью 95 км/ч. В момент времени, равном нулю, на автомобиль начинает действовать тормозящая горизонтальная сила, которая нарастает со временем по закону: $F = \beta t$, где β = 1,2 кН/с. Через какое время автомобиль остановится?

Задача 103. (3) Моторная лодка массой 480 кг начинает двигаться по озеру. Сила тяги мотора равна 0,24 кН. Считая силу сопротивления движению пропорциональной скорости лодки, определить скорость лодки через 27 с после начала ее движения. Коэффициент сопротивления равен 18 кг/с.

Задача 104. (4) При скоростном спуске лыжник спускался вниз по склону с углом наклона, равным 45°, не отталкиваясь палками. Коэффициент трения лыж о снег равен 0,12. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости лыжника, коэффициент пропорциональности равен 0,64 кг/м. Какую максимальную скорость мог достичь лыжник, если его масса 89 кг?

Задача 105. (4) По оси вращения земного шара пробуравлена шахта. В ней свободно падает тело. Определить максимальную скорость тела.

Задача 106. (4) Два богатыря на полюсе Земли бросают вертикально вверх булавы. Первая упала через неделю, вторая – через 30 дней. Оценить, на сколько различалась начальная скорость булав.

Задача 107. (4) Определить время падения Земли на Солнце, если ее внезапно остановить.

Задача 108. (4) Наибольшее расстояние от Солнца до кометы Галлея составляет 35,4 радиуса земной орбиты, а наименьшее – 0,6. Прохождение кометы вблизи Солнца наблюдалось в 1986 г. В каком году комета вновь окажется вблизи Солнца?

Библиографический список

1. Трофимова Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. М., 1997. 542 с.

2. Детлаф А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. М., 2000. 718 с.

3. Савельев И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. М., 1989. Т. 1. 352 с.

Проекция вектора на ось

При работе с векторами удобно придерживаться следующих обозначений:

$\vec{a}$ – вектор (в учебниках обозначается жирной буквой без стрелочки);

a, $|\vec{a}|$ – модуль вектора (длина вектора, числовое значение вектора);

a_x – проекция вектора $\vec{a}$ на ось Ox (компонента вектора);

$\vec{a}_x$ – составляющая вектора $\vec{a}$ по оси Ox.

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось Ox называется *алгебраическая* величина, определяемая выражением:

$$a_x = a\cos\alpha,$$

где a – модуль вектора; α – угол между вектором и осью (рис. П.1.1).

Составляющая $\vec{a}_x$ вектора $\vec{a}$ направлена *вдоль оси Ox* в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}$, а проекции вектора $\vec{a}$ и его составляющей $\vec{a}_x$ на эту ось равны (см. рис. П.1.1).

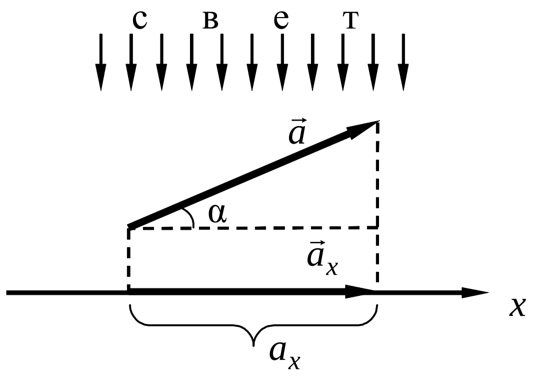


Рис. П.1.1

П р и м е р. Пусть в некоторый момент времени угол между вектором скорости тела и осью Ox равен 30°, а длина вектора скорости равна 2,8 м/с. Найти проекции вектора скорости на координатные оси Ox и Oy.

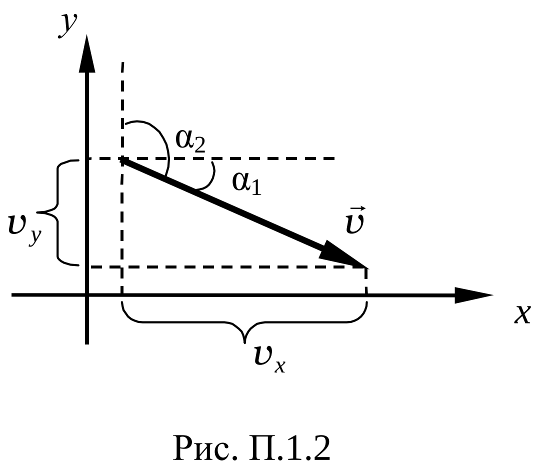


Рис. П.1.2

Д а н о:

$\upsilon = 2{,}8$ м/с, $\alpha_1 = 30^{\circ}$.

υ_x, υ_y – ?

Р е ш е н и е:

$\upsilon_x = \upsilon\cos\alpha_1$;

$\upsilon_x = 2{,}8\cos 30^{\circ} = 2{,}4$ (м/с);

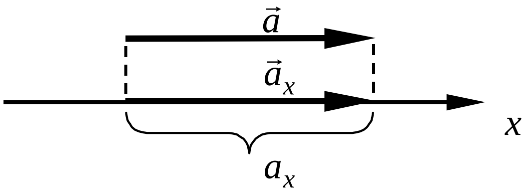
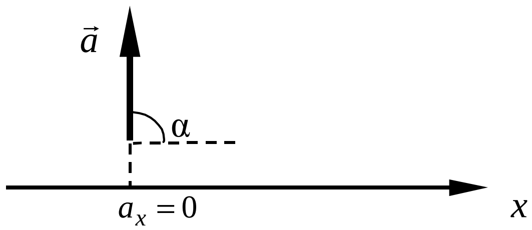
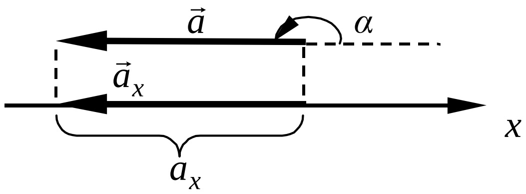
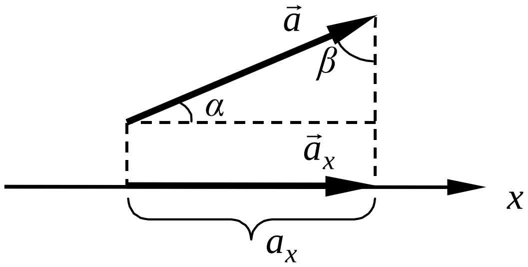
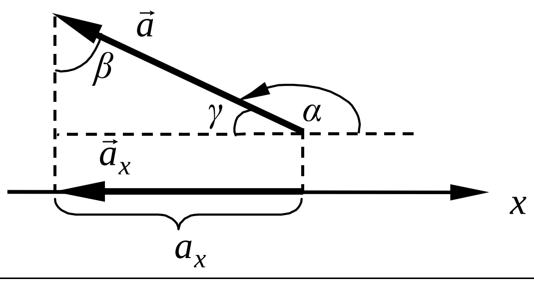
$\upsilon_y = \upsilon\cos\alpha_2$;

$\upsilon_y = 2{,}8\cos(90^{\circ} + 30^{\circ}) = -1{,}4$ (м/с).

Обратите внимание: проекции вектора на разные оси могут быть разными, а модуль вектора не зависит от выбора осей.

Т а б л и ц а П.1.1

Пять частных случаев вычисления проекции

1. Вектор направлен вдоль оси. 	$\alpha = 0°, \quad \cos 0° = 1,$ $a_x = a$ *Проекция вектора равна модулю.*
2. Вектор перпендикулярен оси. 	$\alpha = 90°, \quad \cos 90° = 0,$ $a_x = 0$ *Проекция вектора равна нулю.*
3. Вектор направлен против оси. 	$\alpha = 180°, \quad \cos 180° = -1,$ $a_x = -a$ *Проекция вектора равна «минус модуль».*
4. Острый угол между вектором и осью. 	$0° < \alpha < 90°, \quad \cos\alpha > 0,$ $a_x = a\cos\alpha,$ $a_x = a\sin\beta$ *Проекция вектора положительна.*
5. Тупой угол между вектором и осью. 	$90° < \alpha < 180°, \quad \cos\alpha < 0,$ $a_x = a\cos\alpha,$ $a_x = -a\sin\beta,$ $a_x = -a\cos\gamma$ *Проекция вектора отрицательна.*

Обратите внимание: если составляющая вектора направлена в ту же сторону, что и ось, то проекция такого вектора положительна; если составляющая направлена против оси, то проекция вектора отрицательна.

Действия над векторами

Сложение векторов:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \qquad (\text{П.2.1})$$

выполняется по правилу треугольника или параллелограмма.

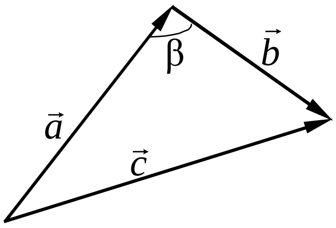


Рис. П.2.1

При сложении векторов по правилу треугольника (рис. П.2.1) длина результирующего вектора $\vec{c}$ может быть рассчитана по теореме косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta . \qquad (\text{П.2.2})$$

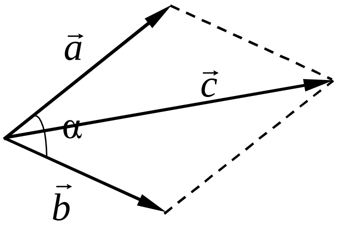


Рис. П.2.2

При сложении векторов по правилу параллелограмма (рис. П.2.2) из теоремы косинусов легко получить выражение для вычисления длины результирующего вектора:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha . \qquad (\text{П.2.3})$$

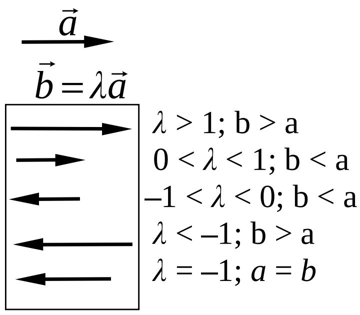


Рис. П.2.3

Умножение вектора на число (рис. П.2.3) изменяет только длину вектора, если число положительное, а при отрицательном числе изменяет еще и направление вектора на противоположное:

$$\vec{b} = \lambda\vec{a} . \qquad (\text{П.2.4})$$

Вычитание векторов с учетом действия (П.2.4) сводится к сложению вектора $\vec{a}$ с вектором, противоположным вектору $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) . \qquad (\text{П.2.5})$$

Скалярное произведение векторов определяется выражением:

$$\lambda = \vec{a}\,\vec{b} = ab\cos\alpha , \qquad (\text{П.2.6})$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Векторное произведение векторов можно записать так:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = ab\sin\alpha\,\vec{e}_n , \qquad (\text{П.2.7})$$

где $\vec{e}_n$ – орт нормали к плоскости (часто $\vec{n}$), в которой лежат векторы $\vec{a}, \vec{b}$, направленный так, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}_n$ образуют правовинтовую тройку векторов, т. е. при вращении правого винта в направлении от первого вектора ко второму (от $\vec{a}$ к $\vec{b}$) винт должен двигаться поступательно в сторону третьего ($\vec{e}_n$) вектора (рис. П.2.4).

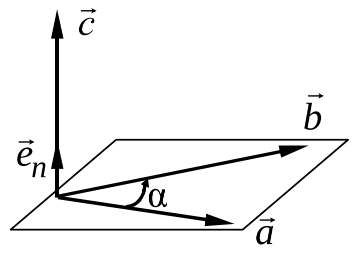


Рис. П.2.4

Рассмотрим *характеристики* вектора.

Используя правило умножения вектора на число, произвольный вектор $\vec{a}$ (рис. П.2.5) можно представить в виде:

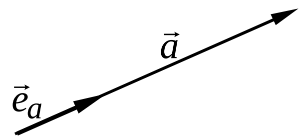


Рис. П.2.5

$$\vec{a} = a\vec{e}_a, \tag{П.2.8}$$

где a – длина (*модуль*); $\vec{e}_a$ – *орт вектора* $\vec{a}$.

Проекция вектора на ось (рис. П.2.6) определяется формулой:

$$a_x = a\cos\alpha, \tag{П.2.9}$$

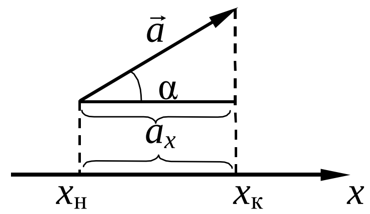


Рис. П.2.6

где α – угол между вектором и осью x ($0 \le \alpha \le \pi$).

Вектор можно *разложить по трем взаимно перпендикулярным направлениям* в пространстве, например по трем декартовым осям координат. Выбрав единичные векторы (орты) $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ (иногда обозначаются как $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) вдоль осей Ox, Oy и Oz, любой вектор можно представить в виде:

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z, \tag{П.2.10}$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора $\vec{a}$ на оси декартовой системы координат.

Тогда *модуль* вектора рассчитывается по формуле:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{П.2.11}$$

Формула (П.2.10) позволяет выполнять действия над векторами аналитически, без геометрического сложения на рисунке, что особенно удобно в том случае, если векторы изменяются с течением времени.

Правила дифференцирования и таблица производных

Из определения *производной* вытекают несколько *правил дифференцирования*, использование которых позволяет свести дифференцирование функций к вычислению производных элементарных функций:

производная постоянной величины (константы) равна нулю:

$$C' = 0\,; \tag{П.3.1}$$

постоянная величина (константа), *являющаяся сомножителем* функции, при дифференцировании выносится за знак производной:

$$(c\,f(x))' = c\,f'(x)\,; \tag{П.3.2}$$

производная суммы (*разности*) функций равна сумме (разности) производных функций:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)\,; \tag{П.3.3}$$

производная произведения двух функций равна производной первой функции, умноженной на вторую, плюс произведение первой функции на производную второй:

$$(f(x) \times g(x))' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)\,; \tag{П.3.4}$$

производная частного при делении двух функций преобразовывается по формуле:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{g^2(x)}\,; \tag{П.3.5}$$

производная сложной функции (т. е. функции от функции) равна произведению производной внешней функции по всему ее аргументу (т. е. по вложенной функции g) и производной вложенной функции по ее аргументу:

$$f'_x(g(x)) = f'_g(g)\;g'_x(x) \tag{П.3.6}$$

или

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\,\frac{dg(x)}{dx}\,. \tag{П.3.7}$$

(Производная сложной функции – наиболее сложное для практического применения правило дифференцирования, поэтому приведены две формы записи этого правила.)

Расчет погрешности косвенных измерений при выполнении лабораторных работ требует умения вычислять *частные производные функции многих переменных*. Чтобы вычислить такую производную по одному из аргументов, необходимо все остальные переменные объявить константами и руководствоваться далее обычными правилами дифференцирования:

$$\frac{\partial f(x, y, z...)}{\partial x} = \left.\frac{df(x, y, z...)}{dx}\right|_{y,\, z,\, ... = \mathrm{const}}; \qquad \frac{\partial f(x, y, z...)}{\partial y} = \left.\frac{df(x, y, z...)}{dy}\right|_{x,\, z,\, ... = \mathrm{const}}; \quad ... \qquad (\text{П.3.8})$$

Производные некоторых наиболее часто встречающихся элементарных функций:

гармонических функций синуса и косинуса:

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x; \qquad (\text{П.3.9а}) \qquad\qquad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x; \qquad (\text{П.3.9б})$$

экспоненциальной и логарифмической функций:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x; \qquad (\text{П.3.10а}) \qquad\qquad \frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}; \qquad (\text{П.3.10б})$$

степенной функции и два ее частных случая для $n = -1$ и $n = 1/2$ соответственно:

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}; \quad (\text{П.3.11а}) \qquad \frac{d\frac{1}{x}}{dx} = -\frac{1}{x^2}; \quad (\text{П.3.11б}) \qquad \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad (\text{П.3.11с})$$

(Более полную таблицу производных можно найти в учебниках по высшей математике, либо в специальных справочниках.)

Правила интегрирования и таблица интегралов

Неопределенный интеграл функции *f(x)* равен сумме *первообразной F(x)* этой функции и произвольной постоянной (константы):

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad (П.4.1)$$

Напомним, что первообразная *F(x)* функции *f(x)* это такая функция, производная от которой равна *f(x)*, т. е. $F'(x) = f(x)$. Операции дифференцирования и интегрирования – две противоположные операции (напоминают противоположные друг другу алгебраические действия возведения в степень и извлечения корня).

Из определения *интеграла* вытекают несколько *правил интегрирования*, которые позволяют значительно упростить вычисление интегралов:

интеграл от дифференциала переменной (или функции) равен сумме самой переменной (или функции) и постоянной величины (константы):

$$\int dx = x + C; \qquad (П.4.2)$$

интеграл суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx; \qquad (П.4.3)$$

постоянный сомножитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int c\,f(x)dx = c\int f(x)dx; \qquad (П.4.4)$$

правило *интегрирования по частям*:

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (П.4.5)$$

Кроме неопределенного интеграла, который представляет собой функцию, по формуле Ньютона-Лейбница можно вычислить *определенный интеграл*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (П.4.6)$$

Интегралы некоторых, наиболее часто встречающихся элементарных функций:

от тригонометрических функций синуса и косинуса –

$$\int \sin x dx = -\cos x + C\,; \qquad \text{(П.4.7а)} \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C\,; \qquad \text{(П.4.7б)}$$

от экспоненциальной и логарифмической функций –

$$\int e^x dx = e^x + C\,; \qquad \text{(П.4.8а)} \qquad \int \ln x dx = x \ln x + x + C\,; \qquad \text{(П.4.8б)}$$

от степенной функции –

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ \text{(при } n \neq -1); \qquad \text{(П.4.9а)} \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C\,. \qquad \text{(П.4.9б)}$$

(Более полную таблицу интегралов можно найти в учебниках по высшей математике, либо в специальных справочниках.)

Некоторые физические задачи приводят к *дифференциальным уравнениям*. Решить дифференциальное уравнение – значит найти функцию (или функции), которая бы обращала уравнение в тождество. Наиболее простой вид дифференциальных уравнений – это уравнения с разделяющимися переменными:

$$y' = f(x)g(y) \qquad \text{(П.4.10)}$$

или

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0\,. \qquad \text{(П.4.11)}$$

Для решения уравнения с разделяющимися переменными необходимо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входили только x, в другую – только y, и затем проинтегрировать обе части. Появившуюся в решении постоянную интегрирования можно определить из начальных или граничных условий.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Справочные сведения

Некоторые физические постоянные

Физическая постоянная	Значение
Гравитационная постоянная, $Н \cdot м^2/кг^2$	$6{,}672 \cdot 10^{-11}$
Скорость света, м/с	$2{,}9979 \cdot 10^{8}$
Масса покоя электрона, кг	$9{,}1095 \cdot 10^{-31}$
Масса покоя протона, кг	$1{,}6726 \cdot 10^{-27}$
Элементарный заряд, Кл	$1{,}60219 \cdot 10^{-19}$
Радиус Солнца, м	$6{,}96 \cdot 10^{8}$
Масса Солнца, кг	$1{,}99 \cdot 10^{30}$
Средний радиус Земли, м	$6{,}371 \cdot 10^{6}$
Масса Земли, кг	$5{,}976 \cdot 10^{24}$
Время полного оборота Земли вокруг своей оси	23 ч 56 мин 4,09 с
Ускорение свободного падения (на широте Парижа, на уровне моря), $м/с^2$	9,80665
Среднее расстояние от Земли до Солнца, м	$1{,}496 \cdot 10^{11}$
Радиус Луны, м	$1{,}737 \cdot 10^{6}$
Масса Луны, кг	$7{,}35 \cdot 10^{22}$
Период обращения Луны вокруг Земли	27 сут 7 ч 43 мин
Ускорение свободного падения на поверхности Луны, $м/с^2$	1,623
Среднее расстояние от Луны до Земли, м	$3{,}844 \cdot 10^{8}$

Учебное издание

КУРМАНОВ Рамиль Султангареевич,
ЛИТНЕВСКИЙ Леонид Аркадьевич

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ЧАСТИЦ В ЗАДАЧАХ

Редактор Т. С. Паршикова

***

Подписано в печать .02.2009. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$.
Плоская печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,2. Уч.-изд. л. 2,4.
Тираж 1000 экз. Заказ .

**

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35