С. А. МИНАБУДИНОВА, Н. А. ХМЫРОВА, С. В. ВОЗНЮК

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ОМСК 2016

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

С. А. Минабудинова, Н. А. Хмырова, С. В. Featureнюк

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Утверждено методическим советом университета
в качестве учебно-методического пособия для самостоятельной работы
студентов при решении задач по физике

Омск 2016

УДК 534(075.8)
ББК 22.236.35я73
М61

Колебания и волны. Примеры решения задач: Учебно-методическое пособие / С. А. Минабудинова, Н. А. Хмырова, С. В. Вознюк; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2016. 36 с.

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с действующей программой по курсу общей физики для вузов, содержит методические рекомендации по изучению физики, примеры решения задач по теме «Колебания и волны». Для решения предлагаемых задач необходимо применить теорию колебаний и волн к гармоническим, затухающим и вынужденным колебаниям механических систем, к электрическому колебательному контуру, механическим и электромагнитным волнам.

Предназначено для студентов 2-го курса очной и заочной форм обучения.

Библиогр.: 8 назв. Рис. 6. Прил. 1.

Рецензенты: канд. филос. наук, доцент Т. В. Добровольская;
канд. техн. наук, доцент Т. В. Ковалева.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Колебательные и волновые процессы наблюдаются в самых разных физических, химических, биологических и других системах. Несмотря на различную природу все они обладают общим признаком – повторяемостью во времени, поэтому и исследуются с единой точки зрения. В теории колебаний общий подход реализуется следующим образом. Независимые характеристики осциллятора (системы, совершающей колебания), описывающие его смещение от положения равновесия, называются обобщенными координатами (число обобщенных координат равно числу колебательных степеней свободы системы). Физические величины – характеристики взаимодействия, приводящего к изменению обобщенных координат системы, рассматриваются как обобщенные силы, действующие на систему, а первые и вторые производные обобщенных координат по времени – соответственно как обобщенные скорости и обобщенные ускорения. Уравнения, описывающие колебания, записываются через обобщенные величины, поэтому вид уравнений определяется только типом колебаний и не зависит от природы осциллятора. Таким образом, осциллятор любой природы описывается моделью материальной точки (частицы), совершающей механические колебания под действием обобщенных сил, а основным математическим аппаратом теории колебаний служат дифференциальные уравнения, структура которых в каждом конкретном случае аналогична структуре основного закона динамики исследуемой (вместо реальной системы) материальной точки.

Так как одной из основных целей издания настоящего учебно-методического пособия является выработка общего подхода к изучению всевозможных колебательных и волновых явлений, пособие содержит большой набор примеров решения разнообразных задач по теме «Колебания и волны». Для успешного решения приведенных задач требуются теоретические знания и навыки решения задач из других разделов физики. Необходимые теоретические сведения, позволяющие тщательно изучить соответствующую теорию, приведены в литературе [1 – 7]. Структура настоящего издания полностью повторяет структуру пособия [8], в котором приведены задачи для самостоятельной работы студентов.

1. СВОБОДНЫЕ НЕЗАТУХАЮЩИЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Как известно, малые свободные незатухающие колебания систем любой природы являются гармоническими. Система, совершающая такие колебания, называется линейным гармоническим осциллятором.

Закон гармонических колебаний имеет вид:

$$x(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) \quad \text{или} \quad x(t) = A\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right).$$

Проекции скорости $\upsilon_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$ и ускорения $a_x(t) = \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = \dot{\upsilon}_x(t)$ на ось X меняются также по гармоническому закону.

Потенциальная и кинетическая энергия механических колебаний вычисляются по формулам:

$$W_{\text{пот}}(t) = \frac{\tilde{k}\, x^2(t)}{2} \quad \text{и} \quad W_{\text{кин}}(t) = \frac{\tilde{m}\upsilon_x^{\,2}(t)}{2}.$$

Полная энергия колебаний не зависит от времени.

П р и м е р 1. Движение материальной точки описывается законом движения: $x = 0{,}5\cos\left(0{,}4\pi t + 0{,}5\pi\right)$м. Определить число колебаний, совершенных точкой за 10 с.

Дано:

$x = 0{,}5\cos\left(0{,}4\pi t + 0{,}5\pi\right)$ м;

t = 10 с.

Найти: N.

Р е ш е н и е.

Число колебаний, совершенных точкой за время t, определяется по формуле:

$$N = \frac{t}{T}, \tag{1.1}$$

где T – период колебаний (время одного колебания).

Закон движения при гармонических колебаниях точки в общем случае имеет вид:

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right), \tag{1.2}$$

где ω – циклическая частота колебаний, она связана с периодом соотношением:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \qquad (1.3)$$

Из сравнения закона движения (1.2) с законом движения, который дан в условии, видно, что $\omega_0 = 0{,}4\pi$ (с$^{-1}$). Следовательно, число колебаний за время t

$$N = \frac{t}{T} = \frac{t\omega_0}{2\pi} = \frac{t \cdot 0{,}4\pi}{2\pi}; \qquad (1.4)$$

$$N = 0{,}2t = 0{,}2 \cdot 10 = 2.$$

Ответ: точка совершит два колебания.

Пример 2. Во сколько раз изменится частота колебаний математического маятника, если его длину увеличить в четыре раза?

Дано:

$\ell_2 = 4\ell_1$.

Найти: $\frac{\nu_2}{\nu_1}$.

Решение.

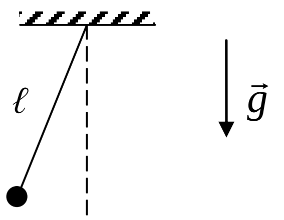

Рис. 1

Частота колебаний математического маятника (рис. 1)

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}},$$

где ℓ – длина математического маятника;

g – ускорение свободного падения

Поэтому

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell_2}} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}} = \sqrt{\frac{\ell_1}{4\ell_1}};$$

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: частота колебаний уменьшится в два раза.

Пример 3. Частица массой 14 г совершает свободные незатухающие колебания по закону синуса с периодом 3,7 с и с начальной фазой, равной нулю. Полная энергия колеблющейся частицы – 0,016 мДж. Найти наибольшее значение модуля возвращающей силы, действующей на частицу.

Дано:
$m = 14 \cdot 10^{-3}$ кг;
$T_0 = 3$ с;
$x(t) = A\sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$;
$\varphi_0 = 0$;
$W = 1{,}6 \cdot 10^{-5}$ Дж.

Найти: $F_{\max}$.

Р е ш е н и е.

По условию задачи зависимость координаты частицы от времени имеет вид:

$$x(t) = A\sin(\omega_0\, t + \varphi_0), \tag{1.5}$$

где A – амплитуда;

t – время;

$$\omega_0 = 2\pi / T_0 - \tag{1.6}$$

собственная частота колебаний.

Согласно закону Гука проекция возвращающей силы, действующей на частицу, на ось X вычисляется по формуле:

$$F_x(t) = -\tilde{k}x(t) = -\tilde{k}A\sin(\omega_0\, t + \varphi_0). \tag{1.7}$$

Так как движение одномерное, модуль силы

$$F(t) = |F_x(t)| = \tilde{k}A|\sin(\omega_0\, t + \varphi_0)|. \tag{1.8}$$

Следовательно, модуль возвращающей силы будет максимален при

$$|\sin(\omega_0\, t + \varphi_0)| = 1. \tag{1.9}$$

Амплитуда колебаний может быть найдена из выражения для полной энергии

$$W = \frac{\tilde{k}A^2}{2}. \tag{1.10}$$

по формуле:

$$A = \sqrt{\frac{2W}{\tilde{k}}}. \tag{1.11}$$

Объединив соотношение $\tilde{k} = m\omega_0^2$ и формулу (1.6), получим выражение для расчета обобщенного коэффициента жесткости:

$$\tilde{k} = m\omega_0^{\ 2} = \frac{(2\pi)^2 m}{T_0^{\ 2}}. \qquad (1.12)$$

Подставив равенства (1.9), (1.10) и (1.12) в выражение (1.8), получим максимальное значение модуля возвращающей силы: $F_m = \tilde{k}A = \tilde{k}\sqrt{2W / \tilde{k}} = \sqrt{2\tilde{k}W} = (2\pi / T_0)\sqrt{2mW}$. Отсюда после подстановки данных получим: $F_m = (6,28 / 3)\sqrt{1,4 \cdot 10^{-2} \cdot 1,6 \cdot 10^{-5}} = 9,9 \cdot 10^{-4}$ Н $= 0,99$ мН.

О т в е т:, $F_m = (2\pi / T_0)\sqrt{2mW}$ $F_m = 0,99$ мН.

П р и м е р 4. Математический маятник массой 250 г и длиной 1,2 м совершает гармонические колебания с амплитудой 72 мм. Определить: 1) полную энергию колебаний; 2) модуль скорости колебаний в момент времени, когда смещение маятника от положения равновесия равно 36 мм.

Дано:
$l = 1,2$ м;
$m = 0,25$ кг;
$A = 0,072$ м;
$x_1 = 0,036$ м.
Найти: υ_1; W.

Р е ш е н и е.

1) Полную энергию колебаний маятника вычислим по формуле:

$$W = \frac{\tilde{k}A^2}{2}, \qquad (1.13)$$

подставив в нее соотношение для обобщенного коэффициента жесткости

$$\tilde{k} = m\omega_0^{\ 2}, \qquad (1.14)$$

а затем – выражение

$$\omega_0 = \sqrt{g / l} \qquad (1.15)$$

для собственной частоты колебаний математического маятника:

$$W = \frac{m\omega_0^{\ 2} A^2}{2} = \frac{mgA^2}{2l}. \qquad (1.16)$$

Подставив в формулу (1.16) численные данные, получим: $W = \dfrac{0,25 \cdot 9,8 \cdot 0,072^2}{2 \cdot 1,2} = 0,0053$ Дж $= 5,3$ мДж.

2) Колебания гармонические, поэтому выполняется закон сохранения энергии:

$$W = W_{\text{пот}} + W_{\text{кин}} = \text{const}. \tag{1.17}$$

Полная энергия определяется как сумма потенциальной и кинетической энергий:

$$\frac{mgA^2}{2l} = \frac{\tilde{k}x^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mgx^2}{2l} + \frac{m\upsilon^2}{2}. \tag{1.18}$$

Отсюда в момент времени t_1

$$\upsilon_1 = A\sqrt{(g/l)\left[1-(x_1/A)^2\right]}. \tag{1.19}$$

Подставив в формулу (1.19) численные значения всех величин, получим:

$$\upsilon_1 = 0,072\sqrt{\frac{9,8}{1,2}\left[1-(0,036/0,072)^2\right]} = 0,18 \text{ м/с}.$$

О т в е т: $W = \dfrac{mgA^2}{2l}$, $W = 5,3$ мДж; $\upsilon_1 = A\sqrt{(g/l)\left[1-(x_1/A)^2\right]}$, $\upsilon_1 = 0,18$ м/с.

П р и м е р 5. Материальная точка совершает свободные гармонические колебания вдоль оси X так, что проекция ее скорости на ось X меняется с течением времени по закону: $\upsilon_x(t) = \upsilon_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где $\upsilon_m = 2,4$ м/с, $\omega_0 = 1,8\pi$ рад/с, $\varphi_0 = 5\pi/6$. Найти момент времени, ближайший к началу колебаний, когда проекция ускорения на ось колебаний $\upsilon_x(t)$ равна $-9,6$ м/с^2.

Дано:	Р е ш е н и е.
$\upsilon_x(t) = \upsilon_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$; $\upsilon_m = 2,4$ м/с;	Ускорение можно найти как производную по времени от скорости:

$\omega_0 = 1{,}8\pi$ рад/с;
$\varphi_0 = 5\pi/6$;
$a_{1x} = -9{,}6$ м/с^2.
Найти: $t_{1\min} \ge 0$.

$$a_x(t) = \dot{\upsilon}_x(t) = -\upsilon_m \omega_0 \sin(\omega_0\, t + \varphi_0). \qquad (1.20)$$

Выразим фазу колебаний из соотношения (1.20):

$\omega_0\, t + \varphi_0 = \arcsin\left(-\dfrac{a_x}{\upsilon_m \omega_0}\right) + 2\pi\, n$, найдем время:

$$t = \frac{1}{\omega_0}\left[\arcsin\left(-\frac{a_x}{\upsilon_m \omega_0}\right) - \frac{5\pi}{6} + 2\pi\, n\right] \ge 0, \qquad (1.21)$$

где n – целое число.

Подстановка численных данных в правую часть формулы (1.21) приводит к ряду значений времени: $t_{1;\,n} = \dfrac{1}{1{,}8\pi}\left[\arcsin\left(-\dfrac{-9{,}6}{2{,}4\cdot 1{,}8\pi}\right) - \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi\, n\right] \ge 0$, распадающемуся на две последовательности, соответствующие двум значениям – $(\pi/4)$ и $(3\pi/4)$ – функции $\arcsin\left(-\dfrac{-9{,}6}{2{,}4\cdot 1{,}8\pi}\right)$:

$$0 \le t_{1;\,n} \approx \frac{1}{1{,}8\pi}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} + 2\pi\, n\right] \approx (-0{,}324 + 1{,}111n) \text{ с}; \qquad (1.22)$$

$$0 \le t_{1;\,n} \approx \frac{1}{1{,}8\pi}\left[\frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} + 2\pi\, n\right] \approx (-0{,}046 + 1{,}111n) \text{ с}. \qquad (1.23)$$

Выбираем из всех возможных решений, представленных последовательностями (1.22) и (1.23), минимальное (ближайшее к нулю) положительное значение времени $t_{1\min} \approx 0{,}787$ с, которое получается при подстановке значения $n = 1$ в ряд.

О т в е т: $t = \dfrac{1}{\omega_0}\left[\arcsin\left(-\dfrac{a_x}{\upsilon_m \omega_0}\right) - \varphi_0 + 2\pi\, n\right] \ge 0$, $t_{1\min} \approx 0{,}787$ с.

П р и м е р 6. Горизонтальный пружинный маятник массой 170 г выводят из положения равновесия горизонтальным ударом по грузу, после которого маятник начинает совершать гармонические колебания с амплитудой 2 см. Записать закон колебаний и зависимость скорости колебаний от времени, если коэффициент упругости пружины равен 80 Н/м.

Дано:
$m = 0{,}77$ кг;
$A = 0{,}02$ м;
$k = 80$ Н/м;
$x_0 = 0$ м.
Найти: $x(t)$; $\upsilon_x(t)$.

Р е ш е н и е.

Так как маятник совершает гармонические колебания, зависимость его смещения от положения равновесия от времени в общем случае имеет вид:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{1.24}$$

где φ_0 – начальная фаза;

Собственная частота колебаний маятника

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{80/0{,}77} = 10{,}2 \text{ с}. \tag{1.25}$$

Чтобы записать закон движения для рассматриваемого в задаче пружинного маятника в явном виде, необходимо найти начальную фазу колебаний. Для этого подставим в указанный закон начальное условие: $x_0 = A\cos\varphi_0$ (начальное условие $x_0 = 0$ м означает, что в момент начала колебаний $t_0 = 0$ с маятник находился в положении равновесия), откуда

$$\varphi_0 = \arccos(x_0/A) = \arccos 0 = \pm\pi/2. \tag{1.26}$$

Подставив соотношение (1.25) и значение начальной фазы (1.26) в закон (1.24), получим зависимость:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 \cdot t \pm \pi/2) = \mp A\sin(\sqrt{k/m}\, t). \tag{1.27}$$

Знак в правой части формулы (1.27) определяется выбором направления оси X, вдоль которой происходят колебания маятника. Если, например, направить ось X в сторону смещения груза сразу после удара, то сразу после начала колебаний координата груза будет положительной, т. е. зависимость (1.27) примет вид:

$$x(t) = A\sin(\sqrt{k/m}\ t), \tag{1.28}$$

где $A = 0{,}02$ м; $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 10{,}2$ с.

Скорость колебаний можно найти как производную по времени от координаты:

$$\upsilon_x(t) = \dot{x}(t) = A\sqrt{k/m}\cos(\sqrt{k/m}\ t). \tag{1.29}$$

О т в е т: $x(t) = A\sin(\sqrt{k/m}\,t)$, где $A = 0{,}02$ м, $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 10{,}2$ с;
$\upsilon_x(t) = A\sqrt{k/m}\cos(\sqrt{k/m}\,t)$, где $\upsilon_m = A\sqrt{k/m} = 0{,}204$ м/с.

2. СВОБОДНЫЕ НЕЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ В ИДЕАЛЬНОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Собственная частота колебаний заряда q, силы тока i и напряжения в идеальном колебательном контуре определяется выражением: $\omega_0 = \left(LC\right)^{-1/2}$. Заряд совершает гармонические колебания: $q(t) = q_m\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

Сила тока и напряжение связаны с зарядом соотношениями: $i(t) = \dot{q}(t)$ и $u(t) = q(t)/C$. Энергия электрического и магнитного полей вычисляется по формулам: $W_{эл}(t) = \dfrac{q^2(t)}{2C} = \dfrac{Cu^2(t)}{2} = \dfrac{q(t)u(t)}{2}$; $W_{маг}(t) = \dfrac{Li^2(t)}{2}$.

П р и м е р 7**.** На какую длину волны настроен идеальный колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и конденсатора электроемкостью 6,0 пФ, если максимальный ток в цепи равен 0,1 А, а максимальное напряжение на конденсаторе 2,0 В?

Дано:	СИ
$I_m = 0{,}1$ А;	0,1 А
$U_m = 2{,}0$ В;	2,0 В
$C = 6{,}0$ пФ.	$6{,}0 \cdot 10^{-12}$ Ф
Найти: λ.	

Р е ш е н и е.

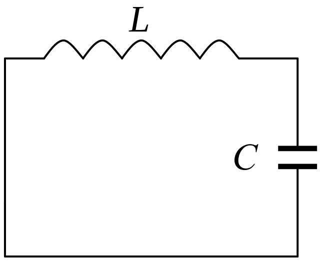

Рис. 2

Длина волны, на которую настроен идеальный колебательный контур (рис. 2), соответствует собственной частоте контура ν и связана с ней соотношением:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \tag{2.1}$$

где c – скорость света.

Собственная частота колебаний в колебательном контуре

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \tag{2.2}$$

где L и C – индуктивность и электроемкость контура.

Подставив формулу (2.2) в уравнение (2.1), получим:

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}. \tag{2.3}$$

Энергия колебаний

$$W = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}. \tag{2.4}$$

Найдем из уравнения (2.4) индуктивность:

$$L = \frac{CU_m^2}{I_m^2} \tag{2.5}$$

и, подставив выражение (2.5) в формулу (2.3), получим:

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{\frac{C^2U_{\text{m}}^2}{I_{\text{m}}^2}} = \frac{2\pi cCU_{\text{m}}}{I_{\text{m}}}; \tag{2.6}$$

$$\lambda = \frac{2\cdot\pi\cdot 3\cdot 10^8\cdot 6,0\cdot 10^{-12}\cdot 2,0}{0,1} = 22,6 \text{ (м).}$$

О т в е т: контур настроен на длину волны 22,6 м.

П р и м е р 8. Идеальный колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 200 мкФ и катушки индуктивностью 3 мГн. Конденсатор зарядили количеством электричества 70 мкКл и замкнули на катушку. Найти зависимости от времени энергии электрического и магнитного полей.

Дано:
$C = 2\cdot 10^{-4}$ Ф;
$L = 3$ мГн;
$q_0 = 7\cdot 10^{-5}$ Кл.
Найти:
$W_{\text{эл}}(t)$ и $W_{\text{маг}}(t)$.

Р е ш е н и е.

Энергия электрического и магнитного полей определяется по формулам:

$$W_{\text{эл}}(t) = \frac{q^2(t)}{2C}; \tag{2.7}$$

$$W_{\text{маг}}(t) = \frac{Li^2(t)}{2}, \tag{2.8}$$

где q – заряд на пластинах конденсатора;

i – сила тока, протекающего через катушку.

Так как контур идеальный, заряд совершает гармонические колебания:

$$q(t) = q_m\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{2.9}$$

где

$$\omega_0 = (LC)^{-1/2} - \tag{2.10}$$

собственная частота колебаний в контуре;

φ_0 – начальная фаза, определяемая из закона (2.9) при $t_0 = 0$ с: $q_0 = q_m\cos\varphi_0$, откуда

$$\varphi_0 = \arccos(q_0 / q_m). \tag{2.11}$$

Согласно условию задачи в момент начала колебаний заряженный конденсатор замкнули на катушку, поэтому заряд на пластинах не может быть больше начального. Таким образом, амплитуда колебаний заряда равна начальному заряду:

$$q_m = q_0. \tag{2.12}$$

Подставив начальное условие (2.12) в формулу (2.11), получим:

$$\varphi_0 = \arccos(q_0 / q_0) = 0. \tag{2.13}$$

Таким образом, законы (2.9) и (2.7) колебаний заряда и энергии электрического поля в контуре с учетом равенств (2.13) и (2.10) принимают вид:

$$q(t) = q_m \cos\omega_0 t; \tag{2.14}$$

$$W_{\text{эл}}(t) = \frac{q_0{}^2 \cos^2 \omega_0 t}{2C} = \frac{q_0{}^2 \cos^2\left(t/LC\right)}{2C}. \tag{2.15}$$

Закон колебаний силы тока найдем, взяв производную по времени от правой части формулы (2.9):

$$i(t) = \dot{q}(t) = -\omega_0 q_0 \sin\omega_0 t, \tag{2.16}$$

поэтому зависимость энергии магнитного поля от времени (2.8) с учетом равенств (2.16) и (2.10) принимает вид:

$$W_{\text{маг}}(t) = \frac{Lq_0{}^2\omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t}{2} = \frac{Lq_0{}^2\omega_0^2 \sin^2 \left(t/LC\right)}{2} = \frac{q_0{}^2 \sin^2 \left(t/LC\right)}{2C}. \tag{2.17}$$

Зависимости энергии от времени (2.7) и (2.8) представляются в виде: $W_{эл}(t)=W\cos^2\left(2\pi\ t/T\right)$; $W_{маг}(t)=W\sin^2\left(2\pi\ t/T\right)$ через полную энергию $W=q_0{}^2/2C=12{,}25$ мкДж и период колебаний $T=2\pi/\omega_0=2\pi\sqrt{LC}\approx 4{,}86$ мс.

О т в е т: $W_{эл}(t)=W\cos^2\left(2\pi\ t/T\right)$, $W_{маг}(t)=W\sin^2\left(2\pi\ t/T\right)$,
где $W=q_0{}^2/2C=12{,}25$ мкДж; $T=2\pi\sqrt{LC}\approx 4{,}86$ мс.

П р и м е р 9. В идеальном колебательном контуре с емкостью 6 мкФ заряд на обкладках конденсатора меняется по закону: $q(t)=q_m\cos\ (\omega_0\ t+\varphi_0)$, где $q_m=7{,}2$ мкКл; $\varphi_0=\pi/2$. Найти разность потенциалов (напряжение) на обкладках конденсатора спустя четверть периода колебаний.

Дано:
$C=6\cdot 10^{-6}$ Ф;
$q(t)=q_m\cos\ (\omega_0\ t+\varphi_0)$;
$q_m=7{,}2\cdot 10^{-6}$ Кл;
$\varphi_0=\pi/2$;
$t_1=T_0/4$.

Найти: u_1.

Р е ш е н и е.

Напряжение связано с зарядом соотношением: $u=q/C$. Подставляя в него закон колебаний заряда $q(t)=q_m\cos\ (\omega_0\ t+\varphi_0)$, получим зависимость напряжения от времени:

$$u(t)=(q_m/C)\cos\ (\omega_0\ t+\varphi_0). \qquad (2.18)$$

Выразив в формуле (2.18) собственную частоту колебаний через период $\omega_0=2\pi/T_0$, получим:

$$u(t)=\frac{q_m}{C}\cos\ \left(\frac{2\pi}{T_0}\ t+\varphi_0\right). \qquad (2.19)$$

Подставив в формулу (2.19) численные данные при $t=t_1=T_0/4$, найдем:

$$u_1=\frac{q_m}{C}\cos\ \left(\frac{2\pi}{T_0}\ \cdot\frac{T_0}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{q_m}{C}\cos\ \pi=-\frac{q_m}{C};$$

$$u_1=7{,}2\cdot 10^{-6}\ /\ 6\cdot 10^{-6}=1{,}2\ \text{В}.$$

О т в е т: $u_1 = \frac{q_m}{C}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t_1 + \varphi_0\right)$, $u_1 = 1{,}2$ В.

П р и м е р 10. В идеальном колебательном контуре с индуктивностью 100 мГн совершаются гармонические колебания с частотой 400 Гц. Найти емкость конденсатора и закон изменения силы тока в контуре, если в начальный момент времени сила тока была максимальной и равной 16 мА.

Дано:
$L = 0{,}1$ Гн;
$\nu = 400$ Гц;
$i_m = 1{,}6\cdot 10^{-2}$ А;
$i_0 = i_m$.

Найти: C; $i(t)$.

Р е ш е н и е.

Закон колебаний силы тока в идеальном колебательном контуре имеет вид:

$$i(t) = i_m \cos\left(\omega_0\,t + \varphi_0\right), \tag{2.20}$$

где $\omega_0 = 2\pi\nu$ – собственная частота;

φ_0 – начальная фаза колебаний, которая определяется из закона (2.20) при $t_0 = 0$ с в соответствии с начальным условием $i_0 = i_m$:

$$\varphi_0 = \arccos(i_0 / i_m) = \arccos(i_m / i_m) = \arccos 1 = 0. \tag{2.21}$$

Подставив выражения (2.21) в закон (2.20), получим зависимость силы тока в рассматриваемом контуре от времени:

$$i(t) = i_m \cos(2\pi\,\nu\,t). \tag{2.22}$$

Емкость конденсатора найдем из выражения $\left(LC\right)^{-1/2} = 2\pi\,\nu$:

$$C = \left(4\pi^2\nu^2 L\right)^{-1}. \tag{2.23}$$

Отсюда $C = \left(4\cdot 3{,}14^2\cdot 400^2\cdot 0{,}1\right)^{-1} = 1{,}6\cdot 10^{-6}$ Ф.

О т в е т: $i(t) = 16\cos(800\pi\,t)$ мА; $C = \left(4\pi^2\nu^2 L\right)^{-1}$, $C = 1{,}6$ мкФ.

3. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

При сложении гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты удобно использовать метод векторных диаграмм (рис. 3).

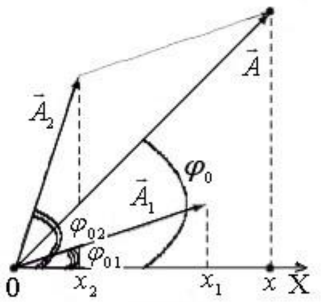

Рис. 3

Вектор $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$, описывающий результирующее колебание, строится по правилам сложения векторов.

Амплитуда и начальная фаза результирующего колебания определяются по диаграмме для начального момента времени (см. рис. 3), их значения вычисляются соответственно по формулам:

$$A = \sqrt{A_1^{\,2} + A_2^{\,2} + 2A_1A_2\cos\{(\varphi_{02} - \varphi_{01})\}}; \qquad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}}.$$

При сложении гармонических взаимно перпендикулярных колебаний, совершаемых точкой в плоскости XOY, необходимо найти уравнение траектории, исключив из закона колебания время, например, выразить t через x или y.

Если при этом отношение частот (периодов) $\omega_1/\omega_2 = T_2/T_1$ является рациональной дробью (отношением целых чисел), то траектория оказывается замкнутой, а движение – периодическим.

П р и м е р 11. Построить векторную диаграмму в начальный момент времени при сложении двух гармонических колебаний одинаковой частоты и одного направления. Найти графически и аналитически амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Записать закон результирующего колебания. Законы складываемых колебаний имеют вид: $x_1(t) = A_1\cos\left(\omega_0 t + \varphi_{01}\right)$; $x_2(t) = A_2\sin\left(\omega_0 t + \varphi_{02}\right)$, где $A_1 = 8$ см; $A_2 = 4$ см; $\omega_0 = \pi$ с$^{-1}$; $\varphi_{01} = \pi/2$; $\varphi_{02} = \pi/2$.

Дано:

$x_1(t) = A_1\cos\left(\omega_0 t + \varphi_{01}\right)$;

$x_2(t) = A_2\sin\left(\omega_0 t + \varphi_{02}\right)$;

$\omega_0 = \pi$ с$^{-1}$;

Р е ш е н и е.

Чтобы найти амплитуду и начальную фазу результирующего колебания, можно воспользоваться формулами для амплитуды и начальной фазы результирующего колебания, предварительно заменив

$A_1 = 8$ см; $A_2 = 4$ см;
$\varphi_{01} = \pi/2$; $\varphi_{02} = \pi/2$.

Найти: A; φ_0; $x(t)$.

по формуле приведения $\sin\alpha = \cos(\alpha - \pi/2)$ синусоидальную зависимость $x_2(t)$ косинусоидальной:

$$x_2(t) = A_2 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_{02}\right) = A_2 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_{02}\right), \quad (3.1)$$

где

$$\varphi'_{02} = \varphi_{02} - \pi/2 = 0. \quad (3.2)$$

Тогда

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\{(\varphi'_{02} - \varphi_{01})\}}; \\ \mathrm{tg}\varphi_0 = \dfrac{A_1 \sin\varphi_{01} + A_2 \sin\varphi'_{02}}{A_1 \cos\varphi_{01} + A_2 \cos\varphi'_{02}}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Подставляя в равенства (3.3) численные данные и учитывая формулу (3.2), получим: $A = \sqrt{64 + 16 + 2\cdot 8\cdot 4\cos(-\pi/2)} = 8{,}9$ см; $\mathrm{tg}\,\varphi_0 = \dfrac{8\sin\pi/2 + 4\sin 0}{8\cos\pi/2 + 4\cos 0} = 2.$

Отсюда $\varphi_0 = 63° = 1{,}1$ рад. Следовательно, закон результирующего колебания имеет вид: $x(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$, где $A = 8{,}9$ см; $\omega_0 = \pi$ с$^{-1}$; $\varphi_0 = 1{,}1$ рад.

Начертим векторную диаграмму сложения колебаний в начальный момент времени (рис. 4). Для этого в соответствии с правилами построения сопоставим колебанию $x_1(t)$ вектор $\vec{A}_1$ длиной A_1, который направим под углом $\varphi_{01} = \pi/2$ к горизонтальной оси X, т. е. вертикально вверх; колебанию $x_2(t)$ сопоставим вектор $\vec{A}_2$ длиной A_2, который направим под углом $\varphi'_{02} = 0$ к горизонтальной оси X, т. е. отложим его в направлении оси (см. рис. 4). Результирующее колебание будет описываться вектором $\vec{A}$ длиной A, полученным по правилу параллелограмма сложением векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$.

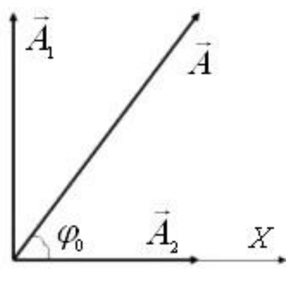

Рис.4

Угол, образованный вектором $\vec{A}$ и осью X, равен начальной фазе результирующего колебания φ_0.

О т в е т: $x(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$, где $A = 8{,}9$ см; $\omega_0 = \pi$ с$^{-1}$ $\varphi_0 = 1{,}1$ рад.

П р и м е р 12. Получить уравнение траектории частицы и построить траекторию в плоскости XOY, если частица одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях: $x(t) = A\cos\left(\omega t\right)$; $y(t) = B\cos\left(2\omega t - \pi/2\right)$, где $A = 3$ см, $B = 2$ см.

Дано:

$x(t) = A\cos\left(\omega t\right)$

$y(t) = B\cos\left(2\omega t - \pi/2\right)$.

Найти: $f(x; y)$.

Р е ш е н и е.

Чтобы найти уравнение траектории точки $f(x; y) = 0$ на плоскости XOY, необходимо из системы уравнений

$$x(t) = A\cos\left(\omega t\right); \tag{3.4}$$

$$y(t) = B\cos\left(2\omega t - \pi/2\right) \tag{3.5}$$

исключить время. Для этого из уравнения (3.4) выразим $\cos(\omega t)$:

$$\cos\left(\omega t\right) = \frac{x}{A}. \tag{3.6}$$

Отсюда

$$\sin^2(\omega t) = 1 - \cos^2(\omega t) = 1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2. \tag{3.7}$$

Преобразовав и возведя в квадрат уравнение (3.5) и последовательно применив формулы приведения и двойного аргумента к тригонометрическим функциям, получим:

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2 = \cos^2(2\omega t - \pi/2) = \sin^2\left(2\omega t\right) = \left(2\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right)^2. \tag{3.8}$$

Используя соотношения (3.6) и (3.7), из выражения (3.8) можно исключить время и получить уравнение траектории:

$$\left(y/B\right)^2-4\left\{1-\left(x/A\right)^2\right\}\left(x/A\right)^2=0. \qquad (3.9)$$

Для построения траектории в плоскости XOY выберем наиболее удобные точки.

Это точки, имеющие равную нулю, наибольшую и наименьшую из возможных ординату ($y=0, \pm B$) или абсциссу ($x=0, \pm A$).

Используя уравнение траектории (3.9), найдем вторые координаты этих точек (таблица).

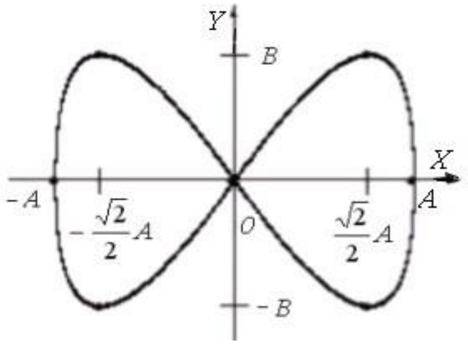

Рис. 5

Траектория, построенная по этим точкам, показана на рис. 5. Координата y достигает максимума по модулю четырежды, а x – дважды. Это объясняется соответствующим отношением частот: за время одного колебания вдоль оси X точка совершает два колебания вдоль оси Y.

$x=0, \pm A$	$y=0$
$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$	$y=B$
$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$	$y=-B$

О т в е т: $\left(y/B\right)^2-4\left\{1-\left(x/A\right)^2\right\}\left(x/A\right)^2=0.$

4. СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Закон затухающих колебаний имеет вид: $x(t)=A_0 e^{-\beta t}\cos\,(\omega t+\varphi_0)$.

Основными характеристиками затухающих колебаний являются коэффициент затухания, логарифмический декремент затухания, добротность колебательной системы.

Потенциальная и кинетическая энергия затухающих колебаний с течением времени уменьшается, переходя в тепловую энергию.

П р и м е р 13. Гиря массой 680 г подвешена на пружине жесткостью 16,3 Н/м. За 24 полных колебания их амплитуда уменьшилась в 1,44 раза. Определить коэффициент затухания, циклическую частоту затухающих колебаний и добротность маятника.

Дано:
$m=0{,}68$ кг;

Р е ш е н и е.

Амплитуда затухающих колебаний с течением

$k = 16{,}3$ Н/м;
$N_1 = 24$;
$n_1 = A_0 / A_1 = 1{,}44$.
Найти: β; ω; Q.

времени t убывает по закону:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \tag{4.1}$$

Время N_1 полных колебаний

$$t_1 = N_1 T, \tag{4.2}$$

где T – время одного колебания, т. е. период затухающих колебаний, связанный с их циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \beta^2} \tag{4.3}$$

соотношением:

$$T = 2\pi / \omega; \tag{4.4}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{16{,}3/0{,}68} = 4{,}9 \text{ с}^{-1} \text{ –} \tag{4.5}$$

собственная частота колебаний пружинного маятника.

Следовательно, согласно закону (4.1) и равенству (4.2) в момент времени t_1 амплитуда колебаний $A_1 = A_0 e^{-\beta t_1} = A_0 e^{-\beta N_1 T}$. Отсюда

$$\ln n_1 = \ln(A_0 / A_1) = \beta N_1 T. \tag{4.6}$$

Соотношения (4.3), (4.5) и (4.6) представляют собой систему трех уравнений с тремя неизвестными: β, ω, T. Возводя обе части выражения (4.6) в квадрат и подставляя в полученное равенство формулы (4.3) и (4.4), получим:

$$(\ln n_1)^2 = \beta^2 N_1^{\ 2} \left[2\pi / \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \beta^2} \right]^2 = \beta^2 N_1^{\ 2} \cdot 4\pi^2 \big/ (\omega_0^{\ 2} - \beta^2). \tag{4.7}$$

Отсюда выразим β:

$$\beta = \frac{\omega_0 \ln n_1}{\sqrt{4\pi^2 N_1^2 + (\ln n_1)^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{4\pi^2 N_1^2 / (\ln n_1)^2 + 1}}; \tag{4.8}$$

$$\beta = \frac{\omega_0}{\sqrt{4 \cdot 3{,}14^2 24^2 / (\ln 1{,}44)^2 + 1}} \approx \frac{\omega_0}{408} << \omega_0. \tag{4.9}$$

Следовательно, выполнено условие малости затухания $\beta << \omega_0$, и добротность системы можно найти по формуле $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$ с учетом выражения (4.7):

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\omega_0 \sqrt{4\pi^2 N_1^2 / (\ln n_1)^2 + 1}}{2\omega_0} = \frac{\sqrt{4\pi^2 N_1^2 / (\ln n_1)^2 + 1}}{2} = 204. \tag{4.10}$$

Подстановка значения ω_0 (4.5) в формулы (4.3) и (4.9) позволяет с учетом малости β найти соответственно численные значения ω и β:

$$\omega = \sqrt{4{,}9^2 - 0{,}012^2} \approx 4{,}9 \text{ с}^{-1}; \ \beta = \frac{4{,}9}{408} = 0{,}012 \text{ с}^{-1}.$$

О т в е т: $\beta = \frac{\sqrt{k/m}}{\sqrt{4\pi^2 N_1^2 / (\ln n_1)^2 + 1}}$, $\beta = 0{,}012$ с$^{-1}$;

$\omega = \sqrt{(k/m) - \beta^2}$, $\omega = 4{,}9$ с$^{-1}$; $Q = \frac{\sqrt{4\pi^2 N_1^2 / (\ln n_1)^2 + 1}}{2}$, $Q = 204.$

П р и м е р 14. Энергия затухающих колебаний осциллятора, происходящих в вязкой среде с малым затуханием, за 5 мин уменьшилась в 37 раз. Определить коэффициент сопротивления среды, если масса осциллятора равна 120 г.

Дано:
$t_1 = 300$ с;
$n_1 = W_0 / W_1 = 37$;
$m = 0{,}12$ кг.
Найти: r.

Р е ш е н и е.

Коэффициент сопротивления среды связан с коэффициентом затухания колебаний β и массой осциллятора:

$$r = \beta \cdot 2m. \tag{4.11}$$

Для определения β воспользуемся выражением для расчета средней за период полной энергии затухающих колебаний:

$$W = W_0 e^{-2\beta t}. \qquad (4.12)$$

Отсюда для интересующего момента времени t_1 получим: $\ln n_1 = \ln(W_0 / W_1) = 2\beta\, t_1$ и выразим β:

$$\beta = \ln n_1 / (2t_1). \qquad (4.13)$$

Объединив формулы (4.11) и (4.13), получим:

$$r = (2m \ln n_1)/(2t_1) = (m / t_1) \ln n_1. \qquad (4.14)$$

Подстановка численных данных в выражение (4.14) приводит к следующему результату: $r = (0{,}12 / 300) \ln 37 = 0{,}00144$ кг/с $= 1{,}44$ г/с.

О т в е т: $r = (2m \ln n_1)/(2t_1) = (m / t_1) \ln n_1$, $r = 1{,}44$ г/с.

5. СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ В РЕАЛЬНОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

В реальном колебательном контуре с активным сопротивлением колебания заряда являются затухающими: $q(t) = q_{m\,0} e^{-\beta\, t} \cos\,(\omega\, t + \varphi_0)$, где $\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2}$ – частота свободных затухающих колебаний; $\beta = R/2L$ – коэффициент затухания.

П р и м е р 15. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 0,8 мкФ, катушки индуктивностью 1,25 мГн и сопротивления. Найти: 1) сопротивление контура, при котором за 14 мс амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора уменьшается в 1,7 раза; 2) логарифмический декремент затухания.

Дано:	Р е ш е н и е.
$C = 8 \cdot 10^{-7}$ Ф; $L = 1{,}25 \cdot 10^{-6}$ Гн; $t_1 = 1{,}4 \cdot 10^{-5}$ с; $n_1 = q_{mm0} / q_{mm1} = 1{,}7.$ Найти: R; Λ.	Сопротивление связано с коэффициентом затухания колебаний β и индуктивностью контура: $$R = \beta \cdot 2L. \qquad (5.1)$$

Для определения β воспользуемся выражением

$$q_m(t) = q_{m0} e^{-\beta t} \qquad (5.2)$$

для расчета амплитуды затухающих колебаний. Отсюда для интересующего момента времени t_1 получим: $\ln n_1 = \ln(q_{m0} / q_{m1}) = \beta t_1$ и выразим β:

$$\beta = (1/t_1) \ln n_1. \qquad (5.3)$$

Объединив формулы (5.1) и (5.3), получим:

$$R = (2L / t_1) \ln n_1. \qquad (5.4)$$

Подстановка численных данных приводит к следующему результату: $R = (2 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-6} / 1{,}4 \cdot 10^{-5}) \cdot \ln 1{,}7 = 0{,}094$ Ом $= 94$ мОм.

Логарифмический декремент затухания

$$\Lambda = \beta T, \qquad (5.5)$$

где T – период затухающих колебаний, связанный с их циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2} \qquad (5.6)$$

соотношением:

$$T = 2\pi / \omega; \qquad (5.7)$$

$$\omega_0 = (LC)^{-1/2} \; - \tag{5.8}$$

собственная частота колебаний в контуре.

Для того чтобы найти Λ, приравняем друг к другу квадраты периода $T^2 = \Lambda^2 / \beta^2$ и $T^2 = 4\pi^2 / \omega^2$, полученные из формул (5.5) и (5.7):

$$\Lambda^2 / \beta^2 = 4\pi^2 / \omega^2, \tag{5.9}$$

а затем в выражение (5.9) подставим формулы для частот (5.6) и (5.8): $\Lambda^2 / \beta^2 = 4\pi^2 / (\omega_0^{\;2} - \beta^2) = 4\pi^2 / \left((LC)^{-1} - \beta^2\right)$. Отсюда, учитывая равенство (5.3), выразим Λ:

$$\Lambda = \sqrt{\frac{4\pi^2\beta^2}{(LC)^{-1} - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(LC\beta^2)^{-1} - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(LC(\ln n_1)^2 / t_1^{\;2})^{-1} - 1}}. \tag{5.10}$$

Подставив в формулу (5.10) данные задачи, получим:

$$\Lambda = \frac{2 \cdot 3{,}14}{\sqrt{(1{,}25 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^{-7} (\ln 1{,}7)^2 \big/ \left(1{,}4 \cdot 10^{-5}\right)^2)^{-1} - 1}} = 0{,}24.$$

О т в е т: $R = (2L/t_1)\ln n_1$, $R = 94$ мОм; $\Lambda = \dfrac{2\pi}{\sqrt{(LC(\ln n_1)^2 / t_1^{\;2})^{-1} - 1}}$; $\Lambda = 0{,}24$.

П р и м е р 16. В реальном колебательном контуре напряжение на обкладках конденсатора меняется по закону: $u(t) = u_{m\,0} e^{-\beta\, t} \cos(\omega\, t + \varphi_0)$, где $u_{m\,0} = 12$ В; $\omega = 120$ с$^{-1}$; $\beta = 2{,}5$ с$^{-1}$; $\varphi_0 = \pi/6$. Найти: 1) период собственных колебаний в контуре, если его индуктивность равна 0,85 Гн; 2) энергию электрического поля спустя время, равное 1/6 периода от начала затухающих колебаний.

Дано:	Р е ш е н и е.
$u(t) = u_{m0} e^{-\beta t} \cos\{\omega\, t + \varphi_0\}$;	Период собственных колебаний

$\omega = 120$ с$^{-1}$; $\beta = 2{,}5$ с$^{-1}$;
$\varphi_0 = \pi/6$; $L = 0{,}85$ Гн;
$t_1 = T/6$.
Найти: T_0; $W_{эл1}$.

$$T_0 = 2\pi/\omega_0. \qquad (5.11)$$

Собственная частота ω_0 связана с циклической частотой затухающих колебаний соотношением: $\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2}$, из которого следует, что

$$\omega_0 = \sqrt{\beta^2 + \omega^2}, \qquad (5.12)$$

следовательно, $T = 2\pi/\sqrt{\beta^2 + \omega^2}$. Подставив в полученное выражение данные задачи, получим: $T = 2 \cdot 3{,}14/\sqrt{2{,}5^2 + 39^2} = 245$ с.

Электрическая емкость контура C выражается из равенства $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$ для собственной частоты колебаний в контуре:

$$C = \left(L\omega_0{}^2\right)^{-1} = \left(L(\beta^2 + \omega^2)\right)^{-1}, \qquad (5.13)$$

где при переходе к правой части использовано соотношение (5.12).

Подставив в зависимость энергии электрического поля от времени

$$W_{эл}(t) = \frac{Cu^2(t)}{2} \qquad (5.14)$$

выражение (5.13) и закон колебаний напряжения, заданный в условии задачи, получим:

$$W_{эл}(t) = \frac{u_{m\,0}{}^2 e^{-2\beta\, t} \cos^2(\omega\, t + \varphi_0)}{2L(\beta^2 + \omega^2)}. \qquad (5.15)$$

Так как $\omega = 2\pi/T$, $\pi/3 + \pi/6 = \pi/2$, а $\cos(\pi/2) = 0$, в момент времени $t_1 = T/6$ энергия электрического поля

$$W_{\text{эл }1}=\frac{{u_{m\,0}}^2 e^{-2\beta\,T/6}\cos^2(\omega\cdot\ T/6+\varphi_0)}{2L(\beta^2+\omega^2)}=\frac{{u_{m\,0}}^2 e^{-2\beta\,T/6}\cos^2\ (\pi/3+\pi/6)}{2L(\beta^2+\omega^2)}=0.$$

О т в е т: $T=2\pi/\sqrt{\beta^2+\omega^2}$, $T=245\,\text{с}$; $W_{\text{эл}}(t)=\dfrac{{u_{m\,0}}^2 e^{-2\beta\,t}\cos^2\ (\omega\,t+\varphi_0)}{2L(\beta^2+\omega^2)}$; $W_{\text{эл }1}=0.$

6. ПЛОСКИЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ УПРУГИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Пусть плоская монохроматическая (гармоническая) волна с длиной λ и периодом T распространяется в направлении оси X с (фазовой) скоростью $\upsilon=\lambda/T$. Тогда уравнение, описывающее колебания точек такой волны (уравнение бегущей волны), имеет вид: $\xi=\xi_m\cos\ (\omega\,t-k\,x+\varphi_0)$.

Разность фаз гармонической волны в двух точках с координатами x_1 и x_2 $\varphi_2-\varphi_1=k\,x_2-k\,x_1=k(x_2-x_1)$.

В плоской монохроматической электромагнитной волне, распространяющейся вдоль оси X в однородной изотропной среде, направления колебаний векторов напряженностей электрического $\vec{E}(0;E_y;0)$ и магнитного $\vec{H}(0;0;H_z)$ полей в любой момент времени перпендикулярны направлению распространения волны (рис. 6). Законы колебаний проекций векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ во всех точках с координатой x имеют вид:

$$E_y=E_m\cos\ (\omega\,t-kx+\varphi_0);$$

$$H_z=H_m\cos(\omega\,t-kx+\varphi_0)$$

и связаны между собой соотношением: $\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0}E_y=\sqrt{\mu\,\mu_0}H_z$. Частоты и фазы колебаний напряженности электрического и магнитного полей плоской монохроматической электромагнитной волны одинаковы в любой момент времени. Максимальная скорость распространения электромагнитных волн – их скорость в вакууме, равная скорости света в вакууме: $c=3\cdot10^8$ м/с.

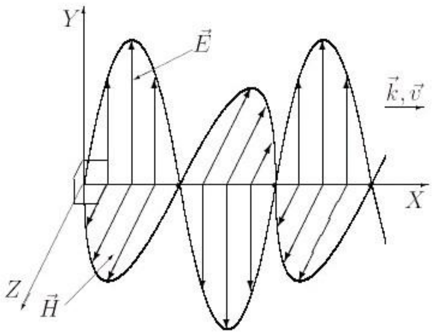

Рис. 6

П р и м е р 17. В упругой среде вдоль оси X распространяется плоская гармоническая волна от источника, совершающего колебания по закону: $\xi = \xi_m \cos\,(\omega\, t + \varphi_0)$, где $\xi_m = 7$ мкм; $\omega = 30\pi$ с$^{-1}$; $\varphi_0 = -\pi/2$. Скорость распространения волны 75 м/с. В начальный момент времени смещение источника колебаний от положения равновесия имело максимальное по модулю отрицательно значение. Найти: 1) волновое число; 2) длину волны; 3) скорость колебаний частиц, расположенных на расстоянии 1125 м от источника спустя 15 с от начала колебаний; 4) разность фаз колебаний двух точек, лежащих на одном луче, до которых волна доходит соответственно через 24 и 33 с от начала колебаний источника.

Дано:
$\xi = \xi_m \cos(\omega_0\ t + \varphi_0)$;
$\xi_m = 7 \cdot 10^{-6}$ м;
$\omega = 30\pi$ с$^{-1}$;
$\varphi_0 = -\pi/2$;
$\upsilon = 75$ м/с;
$x_1 = 1225$ м;
$t_1 = 15$ с;
$t_2 = 24$ с;
$t_3 = 33$ с.
Найти: k; λ; $\dot{\xi}_1(t_1; x_1)$; $\Delta\varphi$.

Р е ш е н и е.

Волновое число связано с циклической частотой колебаний, скоростью и длиной волны соотношением:

$$k = 2\pi/\lambda = \omega/\upsilon. \tag{6.1}$$

Отсюда длина волны

$$\lambda = 2\pi\upsilon/\omega. \tag{6.2}$$

Уравнение плоской бегущей в направлении оси X волны с учетом выражения (6.1) имеет вид:

$$\xi = \xi_m \cos\,(\omega\, t - k\, x + \varphi_0) = \xi_m \cos\,(\omega\, t - \omega \cdot x/\upsilon + \varphi_0). \tag{6.3}$$

Скорость колебаний частиц в любой точке волны можно найти, продифференцировав закон (6.3):

$$\dot{\xi} = -\xi_m \omega\, \sin\,(\omega\, t - \omega \cdot x/\upsilon + \varphi_0). \tag{6.4}$$

Следовательно, скорость колебаний частиц в точке волны с координатой x_1 в момент времени t_1 определяется равенством:

$$\dot{\xi}_1 = -\xi_m \omega \, \sin\,(\omega\, t_1 - \omega \cdot x_1/\upsilon + \varphi_0)\,. \qquad (6.5)$$

За время t волна, движущаяся с постоянной скоростью, достигает точки с координатой

$$x = \upsilon\, t. \qquad (6.6)$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_2 = \upsilon\ t_2; \\ x_3 = \upsilon\ t_3. \end{cases} \qquad (6.7)$$

Фаза волны в рассматриваемом случае $\varphi = \omega t - kx + \varphi_0 = \omega t - \omega \cdot x/\upsilon + \varphi_0$. Следовательно, в любой фиксированный момент времени t разность фаз колебаний в точках с координатами x_2 и x_3 можно вычислить по формуле:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_3 = (\omega t - \omega \cdot x_2/\upsilon + \varphi_0) - (\omega t - \omega \cdot x_3/\upsilon + \varphi_0) = \omega \cdot (x_3 - x_2)/\upsilon. \quad (6.8)$$

Если подставить в формулу (6.1) значения координат колеблющихся точек (6.3), то получим расчетную формулу для разности фаз:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_3 = \omega(\upsilon\, t_3 - \upsilon\, t_2)/\upsilon = \omega(t_3 - t_2). \qquad (6.9)$$

Подставляем в выражения (6.1), (6.2), (6.5) и (6.9) численные данные:

$k = 30/75 = 1{,}26$ м$^{-1}$;

$\lambda = 2\pi \cdot 75/30\pi = 5$ м;

$\dot{\xi}_1 = -7 \cdot 10^{-6} \cdot 30\pi\ \sin\ (30\pi \cdot 15 - 30\pi \cdot 1125/75 - \pi/2) = 6{,}6 \cdot 10^{-4}$ м;

$\Delta\varphi = 30\pi \cdot (33 - 24) = 270\pi = 0$ рад, следовательно, эти точки колеблются в одной фазе.

О т в е т: $k = \omega/\upsilon$, $k = 1{,}26$ м$^{-1}$;

$\lambda = 2\pi\upsilon/\omega$, $\lambda = 5$ м;

$\dot{\xi}_1 = -\xi_m \omega\ \sin\ (\omega\, t_1 - \omega \cdot x_1/\upsilon + \varphi_0)$, $\dot{\xi}_1 = 6{,}6 \cdot 10^{-4}$ м;

$\Delta\varphi = \omega \cdot (t_3 - t_2)$, $\Delta\varphi = 0$, т. е. точки колеблются в одной фазе.

П р и м е р 18. Плоская электромагнитная волна распространяется вдоль оси X в однородной изотропной непроводящей немагнитной среде с диэлектрической проницаемостью, равной 2,3. Частота, амплитуда и начальная фаза колебаний напряженности магнитного поля соответственно равны $4{,}1\cdot10^7$ Гц, $7{,}8\cdot10^3$ А/м и π. Найти: 1) длину волны в вакууме и в данной среде; 2) напряженность электрического поля в точках, расположенных на расстоянии 3,2 м от источника, в момент времени, равный половине периода.

Дано:
$\varepsilon = 2{,}3$; $\mu = 1$;
$\nu = 4{,}1\cdot10^7$ Гц;
$H_m = 7{,}8\cdot10^3$ А/м;
$\varphi_0 = \pi$;
$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м;
$\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м;
$c = 3\cdot10^8$ м/с;
$x_1 = 3{,}2$ м; $t_1 = T/2$.
Найти: λ_0; λ; E_{1y}.

Р е ш е н и е.

Длина волны связана с частотой и скоростью распространения соотношением:

$$\lambda = \upsilon T = \upsilon/\nu . \tag{6.10}$$

Скорость распространения электромагнитной волны в вакууме c, в среде –

$$\upsilon = c/\sqrt{\varepsilon\,\mu}\,, \tag{6.11}$$

поэтому значения длины волны в вакууме и в среде вычисляются по формулам:

$$\lambda_0 = c/\nu\,; \qquad \lambda = \frac{\upsilon}{\nu} = \frac{c}{\nu\sqrt{\varepsilon\mu}}\,. \tag{6.12}$$

Подставив в соотношения (6.12) численные данные, получим:

$$\lambda_0 = 3\cdot10^8/4{,}1\cdot10^7 = 7{,}32 \text{ м};\quad \lambda = 3\cdot10^8/\left(4{,}1\cdot10^7\cdot\sqrt{2{,}3}\right) = 4{,}83 \text{ м}.$$

Напряженность электрического поля $\vec{E}(0;E_y;0)$ (см. рис. 6), где

$$E_y = E_m \cos\,(\omega\, t - k\, x + \varphi_0)\,. \tag{6.13}$$

Амплитуду колебаний напряженности электрического поля найдем, пользуясь соотношением $\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0}E_m = \sqrt{\mu\,\mu_0}H_m$:

$$E_m = \sqrt{\frac{\mu\,\mu_0}{\varepsilon\,\varepsilon_0}}H_m. \tag{6.14}$$

Циклическую частоту и волновое число найдем, пользуясь соответствующими определениями и формулой (6.11):

$$\omega = 2\pi\nu\,; \tag{6.15}$$

$$k = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{2\pi\nu\sqrt{\varepsilon\,\mu}}{c}. \tag{6.16}$$

С учетом выражений (6.14) – (6.16) формула (6.13) принимает вид:

$$E_y = \sqrt{\frac{\mu\,\mu_0}{\varepsilon\,\varepsilon_0}}H_m \cos\left\{2\pi\nu\,t - \frac{2\pi\nu\sqrt{\varepsilon\,\mu}\cdot x}{c} + \varphi_0\right\}. \tag{6.17}$$

Подставив в соотношение (6.17) численные данные, получим при $t_1 = T/2 = 1/(2\nu)$ (с учетом равенства $\nu = 1/T$) и x_1:

$$E_{1y} = \sqrt{\frac{4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}}{2{,}3\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}}\cdot 7{,}8\cdot 10^3 \cos\left\{\frac{2\pi}{2} - \frac{2\pi\cdot 4{,}1\cdot 10^7\sqrt{2{,}3}\cdot 3{,}2}{3\cdot 10^8} + \pi\right\} = 1{,}94\ \text{МВ/м}.$$

О т в е т: $\lambda_0 = c/\nu$, $\lambda_0 = 7{,}32$ м;

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu} = \frac{c}{\nu\sqrt{\varepsilon\mu}},\ \lambda = 4{,}83\ \text{м};$$

$$E_{1y} = \sqrt{\frac{\mu\,\mu_0}{\varepsilon\,\varepsilon_0}}H_m \cos\left\{2\pi\nu\,t_1 - \frac{2\pi\nu\sqrt{\varepsilon\,\mu}\cdot x_1}{c} + \varphi_0\right\},\ E_{1y} = 1{,}94\ \text{МВ/м}.$$

Библиографический список

1. С а в е л ь е в И. В. Курс общей физики: В 5 т. Кн. 1. Механика / И. В. С а в е л ь е в. М.: Лань, 2011. 448 с.

2. С а в е л ь е в И. В. Курс общей физики: В 5 т. Кн. 2. Электричество и магнетизм / И. В. С а в е л ь е в. М.: Лань, 2011. 348 с.

3. С а в е л ь е в И. В. Курс общей физики: В 5 т. Кн. 4. Волны. Оптика / И. В. С а в е л ь е в. М.: АСТ, 2011. 256 с.

4. О с е л е д ч и к Ю. С. Физика. Модульный курс для технических вузов / Ю. С. О с е л е д ч и к, П. И. С а м о й л е н к о, Т. Н. Т о ч и л и н а. М.: Юрайт, 2012. 525 с.

5. Т р о ф и м о в а Т. И. 500 основных законов и формул: Справочник для вузов, обучающихся по техническим направлениям подготовки / Т. И. Т р о ф и м о в а. М.: Академия, 2014. 112 с.

6. Т р о ф и м о в а Т. И. Курс физики / Т. И. Т р о ф и м о в а. М.: Академия, 2011. 560 с.

7. Ч е р т о в А. Г. Задачник по физике / А. Г. Ч е р т о в, А. А. В о р о б ь е в. М.: Интеграл-Пресс; Физматлит, 2009. 640 с.

8. Практикум по физике / Т. А. А р о н о в а, С. В. В о з н ю к и др. / Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2014. Ч. 2. 40 с.

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Т а б л и ц а П.1

Десятичные приставки

Наименование	Обозначение	Множитель	Наименование	Обозначение	Множитель
милли	м	10^{-3}	кило	к	10^{3}
микро	мк	10^{-6}	мега	М	10^{6}
нано	Н	10^{-9}	гига	Г	10^{9}

Т а б л и ц а П.2

Физические постоянные

Наименование	Обозначение	Значение
Электрические постоянные	k_e	$9{,}0\cdot10^{9}$ Н·м²/кг²
	ε_0	$8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м
Магнитные постоянные	k_m	$1{,}0\cdot10^{-7}$ Тл·м/А
	μ_0	$4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м

Учебное издание

МИНАБУДИНОВА Сания Анасовна, ХМЫРОВА Наталья Анатольевна,
ВОЗНЮК Сергей Викторович

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учебно-методическое пособие

Редактор Н. А. Майорова

***

Подписано в печать 02.02.2017. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,3. Уч.-изд. л. 2,5.
Тираж 800 экз. Заказ .

**

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35