Л Е К Ц И Я № 4

Модель механики:

Абсолютно твердое тело (АТТ) - любое физическое тело, у которого расстояние между любыми двумя точками остается неизменным при движении.

Любое сложное движение твердого тела можно представить в виде суммы двух движений: поступательного и вращательного.

Поступательное движение АТТ – это такое движение, при котором любая прямая, проведенная через две произвольные точки тела, остается при движении параллельной самой себе. При таком движении все точки тела движутся одинаково, поэтому достаточно описать движение лишь одной точки тела, например центра инерции (центра масс) тела. Для этого можно воспользоваться законами движения материальной точки (частицы).

Вращательное движение АТТ вокруг неподвижной оси – это такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям с центрами, лежащими на оси вращения.

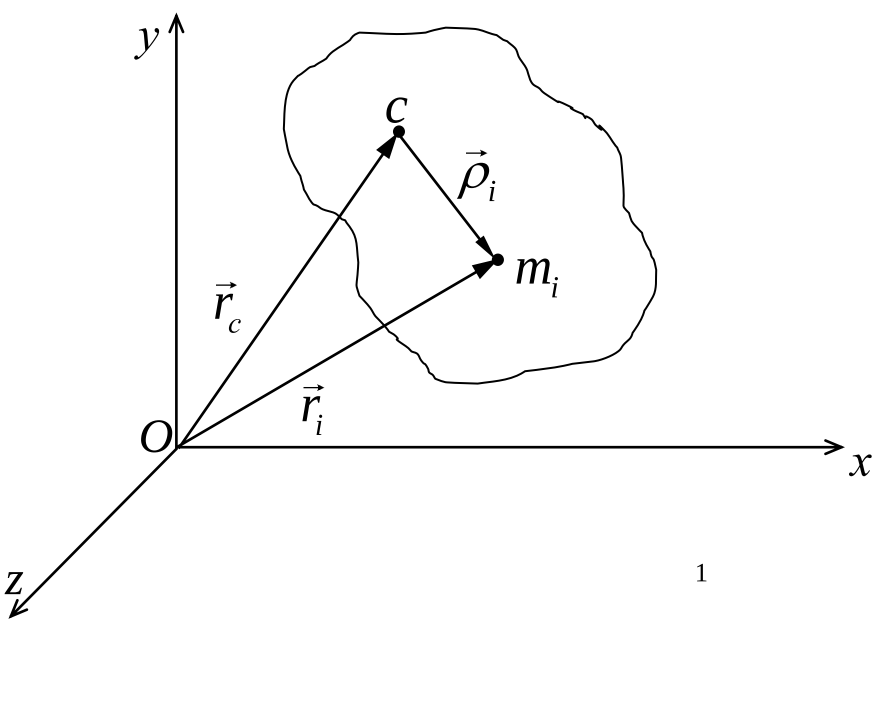
Число независимых величин, которые необходимо задать для определения положения тела в пространстве, называется ***числом степеней свободы*** i.

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}.$$

$$\text{АТТ} \qquad i = 3 + 3 = 6$$

Гл. 2. Кинематика и динамика вращательного движения АТТ

1. Центр инерции (центр масс) механической системы частиц



<u>Центр инерции (центр масс)</u> АТТ – это такая точка, радиус-вектор которой определяется соотношением:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \tag{4-1}$$

$m = \sum m_i$ – общая масса АТТ (аддитивность массы).

В проекциях на координатные оси:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{m}\ ; \qquad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{m}\ ; \qquad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{m}\ . \tag{4-1а}$$

Продифференцировав (4-1) по времени, получим:

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \vec{\upsilon}_c = \frac{\sum m_i \vec{\upsilon}_i}{m} = \frac{\sum \vec{p}_i}{m} \tag{4-2}$$

– ***<u>скорость центра инерции</u>*** (центра масс) АТТ.
Продифференцировав еще раз по времени, получим:

$$\boxed{m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \frac{d\vec{p}_c}{dt} = \vec{F}} \tag{4-3}$$

$$m\vec{a}_c = \vec{F}$$

– ***<u>закон движения центра инерции</u>*** (центра масс) АТТ.

Для отдельной частицы АТТ имеем:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{\rho}_i .$$

Продифференцировав это выражение по времени, получим:

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_c + \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} .$$

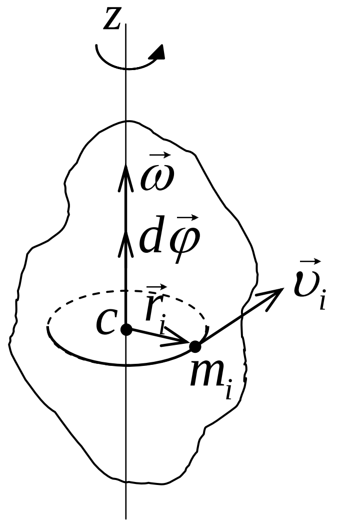
Если $\dfrac{d\vec{\rho}_i}{dt} = 0$, то $\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_c$ – т. е. каждая точка АТТ движется со скоростью центра инерции (центра масс) АТТ – это поступательное движение АТТ.

Если $\vec{\upsilon}_c = 0$, то $\vec{\upsilon}_i = \dfrac{d\vec{\rho}_i}{dt}$, но $\left|\vec{\rho}_i\right| = const$ (АТТ), тогда $\vec{\rho}_i$ меняется только по направлению (а это связано с поворотом АТТ) – это вращательное движение АТТ.

Связав ИСО с центром инерции (центром масс) АТТ, будем рассматривать только вращательное движение АТТ.

2. Кинематические характеристики

Кинематические характеристики частицы (поступательного движения АТТ) – перемещение $d\vec{r}$, скорость $\vec{\upsilon}$ и ускорение $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ не могут служить характеристиками АТТ, участвующего во вращательном движении (для разных точек АТТ они разные). Нужны другие характеристики.



Угол поворота $d\varphi$ $\qquad [d\varphi]$ = рад.

$d\vec{\varphi}$ – ***<u>элементарное угловое перемещение</u>*** – псевдовектор, направленный вдоль оси вращения тела по правилу «правого винта» или «буравчика» (при вращении тела вокруг неподвижной оси *Oz*) и численно равный малому углу поворота, совершенному телом за время *dt*.

Быстроту вращательного движения тела характеризует ***<u>угловая скорость</u>*** – это векторная физическая величина, равная угловому перемещению тела за единицу времени (или первая производная от углового перемещения тела по времени):

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \omega_z \vec{k}. \; [\omega] = \text{рад/с} = \text{с}^{-1}. \qquad (4\text{-}4)$$

Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения в сторону углового перемещения ($\vec{\omega} \parallel d\vec{\varphi}$).

Для нахождения углового перемещения (угла поворота) тела по известной угловой скорости необходимо вычислить интеграл:

$$\varphi = 2\pi N = \int_0^t \omega_z dt, \qquad (4\text{-}5)$$

где N – количество оборотов, совершенных телом за время t.

Если $\omega_z = const$, то формула (4-5) будет описывать равномерное вращение тела вокруг неподвижной оси Oz. Тогда

$$\varphi = 2\pi N = \omega_z \Delta t\,, \qquad (4\text{-}5а)$$

т. е. тело за равные промежутки времени поворачивается на одинаковый угол.

Часто для описания вращательного движения тела используют понятия «частота вращения» и «период вращения».

Частотой вращения n называется физическая величина, равная количеству оборотов, которое совершило тело за единицу времени. $[n]$ = об/с.

Периодом вращения T называется время одного оборота тела. $[T]$ = с.

Угловая скорость, частота и период вращения связаны между собой соотношением:

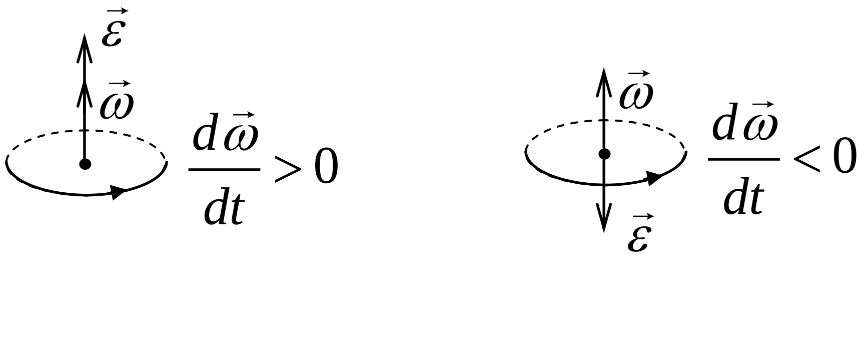
$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T}. \qquad (4\text{-}6)$$

Если $\omega_z \neq const$, то тело вращается с угловым ускорением

Угловое ускорение – это векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости и равная изменению угловой скорости за единицу времени (или первая производная от угловой скорости по времени):

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \varepsilon_z \vec{e}_z, \qquad [\varepsilon] = \text{рад/с}^2 = \text{с}^{-2} \qquad (4\text{-}7)$$

Вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен в сторону изменения угловой скорости ($\vec{\varepsilon} \parallel d\vec{\omega}$).



Для нахождения угловой скорости вращения тела по известному угловому ускорению следует вычислить интеграл:

$$\Delta\omega_z = \omega_z - \omega_{0z} = \int_0^t \varepsilon_z dt. \quad (4\text{-}8)$$

Если ε_z = *const*, то формула (4-8) будет описывать равнопеременное вращательное движение тела вокруг неподвижной оси. Тогда из уравнений (4-8) и (4-5) получим:

$$\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z t;$$

$$\varphi = \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2};$$

$$\varphi = \frac{\omega_{0z} + \omega_z}{2} t;$$

$$\varphi = \frac{\omega_z^2 - \omega_{0z}^2}{2\varepsilon_z}.$$

При равнопеременном вращательном движении модуль угловой скорости тела за равные промежутки времени изменяется на одинаковую величину.

Если ось *Oz* направлена вдоль угловой скорости, то при $\varepsilon_z > 0$ вращение будет равноускоренным, при $\varepsilon_z < 0$ – равнозамедленным.

Если $\varepsilon_z \neq$ const, то для вычисления угловых скорости тела и перемещения тела необходимо пользоваться общими формулами (4-5) и (4-8):

$$\omega_z = \omega_{0z} + \int_0^t \varepsilon_z dt \qquad \varphi = \int_0^e \omega_z dt$$

Между кинематическими характеристиками поступательного и вращательного движений существует связь:

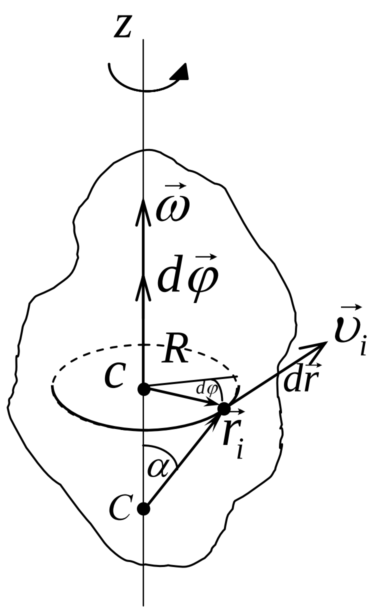
$$dr = d\varphi \cdot R \qquad \upsilon = \omega R$$

$$a_\tau = \varepsilon R \qquad a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R \quad (4\text{-}9)$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

где *R* – кратчайшее расстояние от неподвижной оси вращения тела до отдельной частицы данного тела.

Связь между кинематическими характеристиками поступательного и вращательного движений при вращении АТТ вокруг неподвижной оси:



$$d\vec{r} = \left[d\vec{\varphi} \cdot \vec{r}\right] \qquad dr = d\varphi \cdot r\sin\alpha = d\varphi \cdot R$$

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega} \cdot \vec{r}\right] \qquad \upsilon = \omega r\sin\alpha = \omega R$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \left[\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega} \cdot \vec{\upsilon}\right]$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}\right] \qquad a_\tau = \varepsilon r\sin\alpha = \varepsilon R$$

$$\vec{a}_n = \left[\vec{\omega} \cdot \vec{\upsilon}\right] \qquad a_n = \omega\upsilon\sin\alpha = \omega\upsilon = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

3. Момент силы. Момент импульса

Для каждой частицы АТТ, участвующей во вращательном движении относительно неподвижной оси, проходящей через центр инерции (центр масс) тела, можно записать основное уравнение динамики в виде:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i,$$

где $\vec{F}_i$ − равнодействующая всех внешних и внутренних сил, действующих на частицу.

Домножим обе части этого уравнения ***векторно слева*** на радиус-вектор частицы относительно точки О:

$$\left[\vec{r}_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right] = \left[\vec{r}_i \vec{F}_i\right]. \qquad (*)$$

В уравнении со (*)

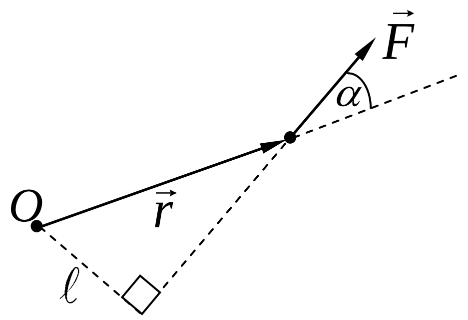
$$\vec{M}_i = \left[\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i\right] \qquad (4\text{-}10)$$

– ***момент силы относительно точки*** *O* – векторное произведение радиус-вектора, проведенного в точку приложения силы на вектор силы.

$[M] =$ Н·м. Направление $\vec{M}$ определяется правилом векторного произведения или правилом «буравчика».

Численное значение M

$$M = F \cdot r \cdot \sin\alpha\,, \qquad \alpha = \widehat{\vec{r}_i \vec{F}_i}\,.$$

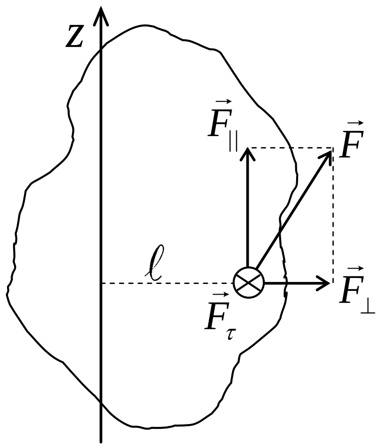


$r \cdot \sin\alpha = \ell$ – ***плечо силы*** – ***кратчайшее*** расстояние от точки O до линии действия силы.

$$M = F \cdot \ell\,. \qquad (4\text{-}10a)$$

В системе центра инерции при вращении АТТ вокруг неподвижной оси пользуются понятием ***момента сил относительно неподвижной оси*** M_z – это скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора момента силы $\vec{M}$, определенного относительно произвольной точки O.

Значение M_z не зависит от выбора положения точки O на оси z.



Вектор силы $\vec{F}$ можно представить в виде суммы трех взаимно перпендикулярных составляющих

$$\vec{F} = \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{||} + \vec{F}_{\tau}\,,$$

где $\vec{F}_{\perp}$ – составляющая силы $\vec{F}$, направленная перпендикулярно оси Oz;

$\vec{F}_{||}$ – составляющая силы $\vec{F}$, направленная параллельно оси Oz;

$\vec{F}_{\tau}$ – составляющая силы $\vec{F}$, направленная перпендикулярно плоскости чертежа, по касательной к траектории частицы, на которую действует сила $\vec{F}$.

$$M_{zF_{\perp}} = 0\,, \quad M_{zF_{||}} = 0\,, \quad M_{zF_{\tau}} = F_{\tau} \cdot \ell\,,$$

где ℓ – плечо силы F_{τ} – кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия тангенциальной составляющей силы F_{τ}.

– если $\omega_2 > \omega_1$, то $\cdot M_z > 0$ – вращательный момент силы;

– если $\omega_2 < \omega_1$, то $\cdot M_z < 0 -$ тормозящий момент силы.

В левой части уравнения со (*) производную можно вынести за знак векторного произведения

$$\left[\vec{r}_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i \cdot \vec{p}_i\right] = \underbrace{\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}\vec{p}_i\right]}_{=0} + \left[\vec{r}_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right]$$

Тогда

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i \cdot \vec{p}_i\right] \tag{4-11}$$

– ***<u>момент импульса</u>*** (момент количества движения, кинетический момент) ***<u>частицы</u>*** относительно точки *O* – векторное произведение радиус-вектора, частицы на вектор ее импульса.

$\left[L_i\right] =$ кг·м^2/с Направление $\vec{L}_i$ определяют правилом векторного произведения или правилом «буравчика».

Численное значение $\vec{L}_i$

$$L_i = m_i \upsilon_i r_i \sin\alpha, \qquad \alpha = \widehat{\vec{r}_i \vec{p}_i}$$

$$r \cdot \sin\alpha = \ell$$ – ***<u>плечо импульса</u>***

В системе центра инерции при вращении АТТ вокруг неподвижной оси пользуются понятием ***<u>момента ипульса относительно неподвижной оси</u>*** L_z – это скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора момента импульса $\vec{L}$, определенного относительно произвольной точки *O*.

При вращении АТТ вокруг неподвижной оси каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса R_i с некоторой скоростью υ_i. Скорость υ_i и импульс $m_i\vec{\upsilon}_i$ перпендикулярны этому радиусу, т.е. радиус является плечом вектора $m_i\vec{\upsilon}_i$.

Тогда для отдельной частицы можно записать

$$L_{iz} = m_i \upsilon_i R_i.$$

А для АТТ, вращающегося вокруг неподвижной оси

$$L_{\text{АТТ}z} = \sum m_i \upsilon_i R_i \,.$$

Подставив введенные обозначения $\vec{M}$ и $\vec{L}$ в уравнение со (*), получим:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i \qquad (**)$$

– ***<u>теорема об изменении момента импульса частицы</u>***.

Просуммировав (**) по всем частицам, получим:

$$\sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum \vec{M}_i \;\rightarrow\; \boxed{\frac{d\vec{L}_{\text{АТТ}}}{dt} = \vec{M}_{\text{АТТ}}} \qquad (4\text{-}12)$$

$\vec{L}_{\text{АТТ}} = \sum \vec{L}_i$ – момент импульса АТТ,

$\vec{M}_{\text{АТТ}} = \sum \vec{M}_i$ – суммарный момент всех ***<u>внешних</u>*** сил, действующих на АТТ (по третьему закону Ньютона $\sum \vec{M}_{\text{внутренних}} = 0$).

(4-12) – ***<u>теорема об изменении момента импульса АТТ</u>***.