

ЛЕКЦИЯ № 7

5. Импульс (количество движения). Закон сохранения импульса

Импульсом (количеством движения) частицы или импульсом АТТ при поступательном движении называется векторная физическая величина, равная произведению массы частицы (массы АТТ) m на вектор ее скорости \vec{v} (скорость центра инерции АТТ \vec{v}_c):

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (7-1)$$

Вектор \vec{p} направлен в сторону скорости ($\vec{p} \parallel \vec{v}$).

В системе СИ импульс измеряется в кг·м/с.

Импульсом системы взаимодействующих частиц называется векторная сумма импульсов отдельных частиц, входящих в систему:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n. \quad (7-1a)$$

Для системы взаимодействующих частиц (для системы АТТ, участвующих в поступательном движении) основное уравнение динамики можно записать:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n.$$

Если система взаимодействующих частиц замкнутая (изолированная), то в ней выполняется закон сохранения импульса: в замкнутой системе взаимодействующих частиц или взаимодействующих тел, участвующих в поступательном движении, векторная сумма импульсов частиц (тел) до и после взаимодействия остается неизменной:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 + \dots + m_n\vec{v}'_n. \quad (7-2)$$

Для записи этого векторного уравнения в скалярной форме выбирают удобную ИСО (ось Ox направляют по движению одного из тел) и находят проекции всех векторов на координатные оси:

$$\begin{aligned} Ox: \quad m_1v_{1x} + m_2v_{2x} + \dots + m_nv_{nx} &= m_1v'_{1x} + m_2v'_{2x} + \dots + m_nv'_{nx}; \\ Oy: \quad m_1v_{1y} + m_2v_{2y} + \dots + m_nv_{ny} &= m_1v'_{1y} + m_2v'_{2y} + \dots + m_nv'_{ny}. \end{aligned} \quad (7-2a)$$

Если система взаимодействующих частиц (тел) не замкнутая, но $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$, тогда суммарный импульс системы также сохраняется.

И, наконец, если система не замкнутая и $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \neq 0$, но равна нулю проекция равнодействующей всех сил на какое-либо направление, например, на ось Ox

$$F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0,$$

тогда выполняется **закон сохранения проекции импульса** на эту ось Ox .

При поступательном движении системы взаимодействующих частиц (тел) для центра инерции (центра масс) основной закон движения имеет вид:

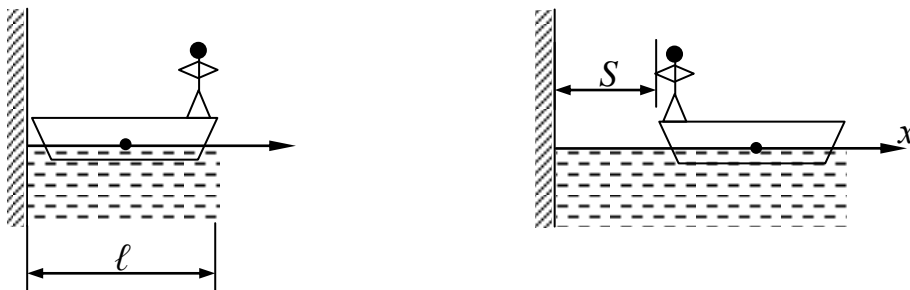
$$m\vec{a}_c = m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n.$$

Если система замкнутая ($\vec{F}_1 = 0, \vec{F}_2 = 0 \dots$) или $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$, тогда

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \vec{v}_c = \text{const.} \quad (7-3)$$

– в замкнутой системе взаимодействующих частиц (тел) или если $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$, центр инерции (центр масс) системы движется с постоянной скоростью, т. е. по инерции (в частности, если $v_{c_0} = 0$, тогда и $v_{c_1} = v_{c_2} = 0!$)

Формулы (7-3) и словесную формулировку (являющуюся частным случаем закона сохранения импульса) называют **законом сохранения центра инерции** (центра масс).



I. Закон сохранения импульса:

$$Ox: 0 = M_{\text{л}} v_{\text{л}} - m_{\text{ч}} v_{\text{ч}},$$

$$0 = M_{\text{л}} \frac{S}{t} - m_{\text{ч}} \frac{\ell - S}{t},$$

$$S = \frac{m_{\text{ч}}}{m_{\text{ч}} + M_{\text{л}}} \ell.$$

II. Закон сохранения центра инерции (центра масс):

$$x_{c_1} = \frac{m_{\text{ч}} \ell + M_{\text{л}} \frac{\ell}{2}}{m_{\text{ч}} + M_{\text{л}}}; \quad x_{c_2} = \frac{m_{\text{ч}} S + M_{\text{л}} \left(S + \frac{\ell}{2} \right)}{m_{\text{ч}} + M_{\text{л}}},$$

$$x_{c_1} = x_{c_2} \rightarrow m_{\text{ч}} \ell + M_{\text{л}} \frac{\ell}{2} = m_{\text{ч}} S + M_{\text{л}} S + M_{\text{л}} \frac{\ell}{2},$$

$$S = \frac{m_{\text{ч}}}{m_{\text{ч}} + M_{\text{л}}} \ell.$$

6. Столкновение частиц

Под столкновением понимают всякое изменение импульса взаимодействующих тел.

Два предельных случая: абсолютно упругое столкновение и абсолютно неупругое столкновение.

Абсолютно упругое столкновение частиц – это такое столкновение, после которого тела движутся с разными скоростями, возникающие в телах деформации полностью восстанавливаются, потери механической энергии не происходит.

При таком столкновении выполняются законы сохранения импульса и механической энергии:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2; \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} &= \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2}. \end{aligned} \tag{7-4}$$

Решая (7-4) относительно \vec{v}'_1 и \vec{v}'_2 , получим:

$$\begin{aligned}\vec{v}'_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_2; \\ \vec{v}'_2 &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1.\end{aligned}\tag{7-5}$$

Частные случаи:

$$\begin{aligned}1) \ m_1 &= m_2 & \vec{v}'_1 &= \vec{v}_2, \ \vec{v}'_2 = \vec{v}_1; \\ 2) \ m_1 &\gg m_2 & \vec{v}'_1 &\approx \vec{v}_1, \ \vec{v}'_2 \approx -\vec{v}_2; \\ 3) \ m_1 &\ll m_2 & \vec{v}'_1 &= -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2, \ \vec{v}'_2 \approx \vec{v}_2.\end{aligned}$$

Вывод формул для вычисления \vec{v}'_1 и \vec{v}'_2 при абсолютно упругом ударе. Из уравнений (7-4) запишем:

$$\begin{aligned}m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1) &= m_2(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2); \\ m_1(v_1^2 - v_1'^2) &= m_2(v_2'^2 - v_2^2).\end{aligned}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}'_1 = \vec{v}'_2 - \vec{v}_2.\tag{*}$$

Домножим уравнение (*) на m_2 и решим совместно с первым уравнением (7-4):

$$\begin{cases} m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}'_1 = m_2\vec{v}'_2 - m_2\vec{v}_2; \\ m_2\vec{v}_1 + m_2\vec{v}'_1 = m_2\vec{v}'_2 + m_2\vec{v}_2. \end{cases}$$

Откуда

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_2.$$

Домножив уравнение (*) на m_1 , получим:

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1.$$

Абсолютно неупругое столкновение частиц – это такое столкновение, после которого тела движутся с одной скоростью, вместе, возникающие в телах деформации не исчезают (остаются) и при этом большая часть механической энергии переходит во внутреннюю (тепловую) – диссипация энергии.

При таком столкновении выполняются законы сохранения импульса и полной энергии:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= (m_1 + m_2) \vec{v}' ; \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} &= \frac{(m_1 + m_2) v'^2}{2} + \Delta W. \end{aligned} \quad (7-6)$$

ΔW – потеря механической энергии на диссипацию.

Из решения (7-6) получим:

$$\vec{v}' = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad (7-7)$$

Демонстрации:

№6. АУУ

№7. АНУ