Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno - matematički fakultet
Matematički odsjek

Matematičko modeliranje

Fotografija i projektivna geometrija

Roberto Grabovac

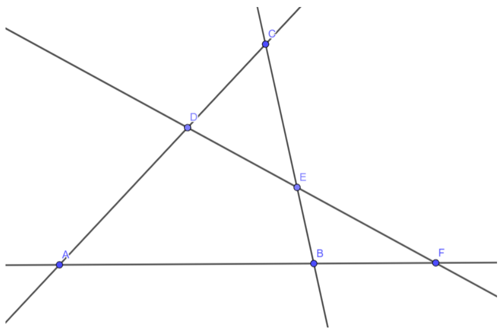
Zagreb, svibanj 2022.

Sadržaj

1 Uvod i motivacija

Projektivna geometrija predstavlja jednu od najkorisnijih grana geometrije koja se prije svega odlikuje svojom jednostavnošću, a poticaj za njezin razvitak došao je iz umjetnosti kada je talijanski arhitekt Brunellsechi počeo razmatrati geometrijsku teoriju perspektive. Ipak, ona nije popularna kao euklidska geometrija, barem u osnovnom i srednjoškolskom obrazovanju. Zbog toga ju je prirodno s njom i usporediti. Glavna razlika leži u tome što je projektivna geometrija zapravo neeuklidska geometrija zbog izbora svojih aksioma:

1. postoje najmanje dvije različite točke,
2. postoji točno jedan pravac incidentan s dvije različite točke A i B,
3. ako su A i B dvije različite točke, tada postoji barem jedna točka C, različita od A i B, koja je incidentna s pravcem AB,
4. ako su A i B dvije različite točke, tada postoji barem jedna točka koja nije incidentna s pravcem AB,
5. ako su A, B, C tri nekolinearne točke, D točka na spojnici BC različita od B i od C, a E točka na spojnici CA različita i od C i od A, tada postoji točka F na spojnici AB takva da su točke D, E, F kolinearne.



Slika 1: Peti aksiom

Uočavamo kako se u aksiomima upotrebljavaju tri primitivna pojma koja ne definiramo: *točka, pravac i incidencija (pripadnost).* Na prvi pogled, aksiomi projektivne geometrije nisu bitno različiti od aksioma euklidske, no to je samo prividno jer ćemo ubrzo dokazati ključan teorem zbog čijeg će nam rezultata biti jasno zašto projektivnu geometriju svrstavamo u neeuklidsku.

Ukratko, dokazat ćemo da se svaka dva pravca sijeku, a u euklidskoj geometriji znamo da to ne vrijedi za paralelne pravce. Sljedeća ključna razlika ovih dviju geometrija leži u konstrukcijama. Naime, u euklidskoj geometriji se konstrukcije izvode ravnalom i šestarom, a objekte uspoređujemo mjerenjem. Po tom pitanju, projektivna geometrija je dosta jednostavnija jer je potrebno samo ravnalo te ne možemo mjeriti, ali umjesto toga jedan skup točaka pridružujemo drugom pomoću *projektiviteta*.
Geometričari Georg Mohr (1640.-1697.) i Lorenzo Mascheroni (1750.-1800.) dokazali su da su sve konstrukcije ravnalom i šestarom moguće ako upotrebljavamo isključivo šestar. Sasvim je bilo prirodno zapitati se da li je ishod jednak i u slučaju korištenja samo ravnala. Odgovor na to daje upravo projektivna geometrija.
Ignoriranje elemenata mjerenja (kut, duljina itd.) omogućava jasnije razumijevanje generičkih svojstava geometrijskih objekata (samim time dobivamo novi pristup euklidskoj geometriji), a to se koristi u brojnim područjima znanosti poput teorije kodiranja, kriptografije, arhitekture itd. Štoviše, na osnovu toga razvila se zasebna znanost - *fotogrametrija*[1]. Ipak, glavna tema ovog seminara je korištenje rezultata projektivne geometrije i istoimenih preslikavanja u svrhu otkrivanja stvarnih udaljenosti samo na osnovi dane fotografije i nekolicine podataka. U skladu s tim, doći ćemo do točne udaljenosti s koje je slavni brazilski nogometaš Roberto Carlos postigao nevjerojatan pogodak iz slobodnog udarca 1997. godine protiv Francuske, ali i otkriti detalje prometne nesreće, tj. brzinu pri kojoj se osumnjičeni automobil sudario na osnovu traga njegovih guma prilikom kočenja.

2 Opća teorija

Prije navođenja i dokazivanja niza teorema, propozicija i korolara relevantnih za rješavanje gore navedenih problema, potrebno je definirati okruženje u kojem će se izvoditi glavni rezultati. Odaberimo neke tri prozivoljne nekolinearne točke A, B, C. Egzistenciju tih točaka osigurava 4. aksiom projektivne geometrije. Označimo s P^2 skup svih točaka koje leže na spojnicama točke C sa svim točkama pravca AB, a s G^2 skup svih mogućih spojnica između točaka koje se nalaze u P^2. Pretpostavimo li da uz sve navedene aksiome vrijedi i da su sve točke sadržane u P^2 (samim time su i svi pravci sadržani u G^2), onda ima smisla sljedeća definicija.

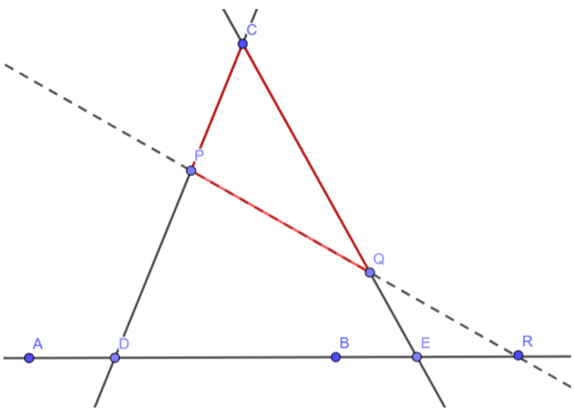
[1]Cilj fotogrametrije je konstruirati realno okruženje stvaranjem 3D modela iz fotografije na osnovu precizno dobivenih podataka sofisticiranim metodama

Definicija 1. *Skupovi primitivnih elemenata P^2 i G^2 zajedno s relacijom incidencije i aksiomima projektivne geometrije definiraju projektivnu ravninu.*

Kao i u euklidskoj geometriji, ravnina je jednoznačno određena trima nekolinearnim točkama, a za točke incidentne s jednom ravninom kažemo da su *komplanarne*. Sada možemo iskazati i dokazati već najavljivan teorem.

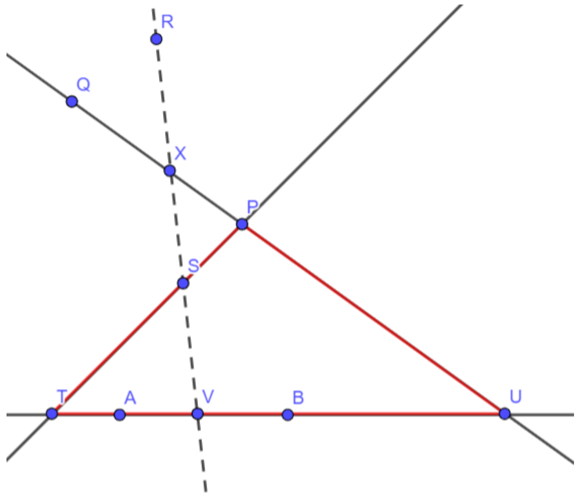
Teorem 1. *Dva različita pravca projektivne ravnine sijeku se točno u jednoj točki.*

Dokaz. Provodimo ga u dva dijela: prvo ćemo dokazati da bilo koji pravac različit od AB u presjeku s njim ima točno jednu točku, a potom i da isti rezultat vrijedi za bilo koja dva pravca različita od AB. Uočimo najprije da iz drugog aksioma slijedi da svaka dva različita pravca u presjeku imaju najviše jednu točku. Dakle, u oba slučaja dovoljno je dokazati da odgovarajući pravci imaju najmanje jednu točku presjeka čime će slijediti tvrdnja teorema.
Pretpostavimo da se nalazimo u projektivnoj ravnini određenoj točkama A, B i C te neka je pravac p zadan kao spojnica točaka P i Q. Ako je točka C incidentna s pravcem p, onda tvrdnja slijedi iz definicije projektivne ravnine. Neka stoga pravac p ne prolazi kroz C. Po definiciji znamo da točke P i Q leže na pravcima CD, odnosno CE pri čemu se točke D i E nalaze na pravcu AB (nisu nužno različite od A i B). Iskoristimo li peti aksiom na trokut CPQ, dobivamo postojanje točke R na pravcu PQ. No, po drugom aksiomu vrijedi $PQ = AB$ pa $R \in AB$. Time smo završili prvi dio dokaza.



Slika 2: Skica prvog dijela dokaza

Neka su sada PQ i RS pravci različiti od AB. Ako je $P = S$, sjecište tih pravaca je upravo P. Neka je stoga $P \neq S$. Prema prvom dijelu dokaza, znamo da pravci PQ i RS imaju po jednu točku u presjeku s pravcem AB. Označimo ih s U, odnosno V. Pretpostavimo da P, Q, R i S ne leže na AB. Ukoliko je $U = V$, onda se sijeku upravo u toj točki. Ako je pak $U = T$, onda je $S \in PQ$, tj. $S = PQ \cap RS$. Istu točku presjeka dobivamo i u slučaju $V = T$. Neka su stoga U, V i T različite točke na AB. Primijenimo li sada peti aksiom na trokut UTP, dobivamo točku $X \in PQ$ kolinearnu s točkama S i V. Konačno, po drugom aksiomu vrijedi $SV = RS$ pa je upravo X tražena točka presjeka pravaca PQ i RS.



Slika 3: Skica drugog dijela dokaza

Iskustvo u radu s euklidskom ravninom navodi nas na sasvim prirodno pitanje: postoji li točka presjeka dvaju paralelnih pravaca u projektivnoj ravnini? Kada odgovor ne bi bio potvrdan, peti aksiom ne bi vrijedio, kao ni prethodno dokazani teorem. Pitanje presjeka dvaju paralelnih pravaca se u projektivnoj ravnini rješava uvođenjem beskonačno dalekih točaka. Točnije, svakom pravcu ravnine pridružujemo jednu beskonačno daleku točku. Dakle, paralelni pravci će imati jednaku točku u beskonačnosti te upravo nju definiramo kao njihovu točku presjeka.
Nakon dokaza prethodnog teorema i uvođenja beskonačno dalekih točaka, usmjerit ćemo se na specifično područje projektivne geometrije koje se bavi istoimenim preslikavanjima. **Dvoomjer** je upravo jedno takvo preslikavanje čiji će rezultati biti ključni u rješavanju problema navedenih u uvodu. No, prije toga potrebno je uvesti sljedeću definiciju.

Definicija 2. *Neka su dane tri kolinearne točke A, B i C. Omjer duljina*

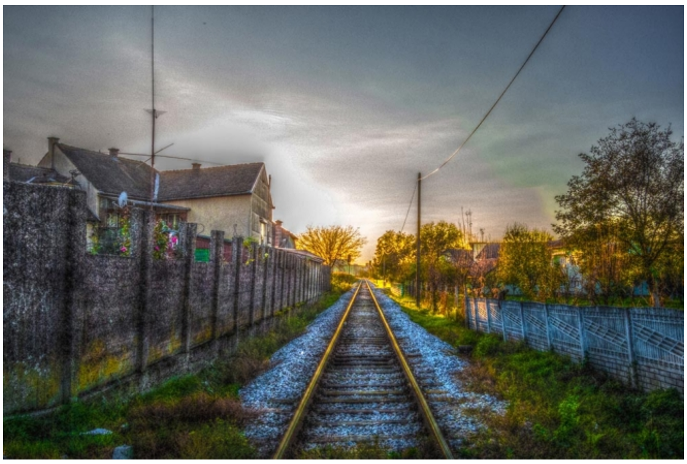
$|AC|$ i $|BC|$ u oznaci (ABC) predstavlja djelišni omjer, tj.

$$(ABC) = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Uočavamo dva *problematična* slučaja u definiciji djelišnog omjera. Ako vrijedi $C = B$, onda zbog $|BC| = 0$ imamo nedefiniran (ACC) u $\mathbb{R}$. No, smatrat ćemo da je taj omjer beskonačan, tj. $(ACC) = \infty$. Nadalje, ako $(ABC) = 1$, tada nužno $|AC| = |BC|$. Ovo ne vrijedi ni za koju konačnu točku pravca, ali vrijedi za beskonačno daleku točku koju smo, prisjetimo se, pridružili svakom pravcu. Zbog *nadopunjavanja* ova dva rubna slučaja, djelišni omjer je zapravo bijekcija između skupa svih točaka pravca i proširenog skupa realnih brojeva, tj. $\mathbb{R} \cup \infty$. Konačno, sada možemo dosta jednostavno definirati dvoomjer.

Definicija 3. *Neka su dane četiri kolinearne točke A, B, C i D. Dvoomjer $(ABCD)$ je omjer djelišnih omjera (ABC) i (ABD), tj.*

$$(ABCD) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|BC| \cdot |AD|}.$$



Slika 4: *Beskonačno daleka točka* tračnica (dvaju paralelnih pravaca) (slika je preuzeta iz [6])

Točke i pravci u projektivnoj ravnini su dualni. Točnije, ako u iskazu i dokazu određenog teorema (ili u bilo kojoj drugoj matematičkoj tvrdnji) zamijenimo riječi *točka* i *pravac*, a relaciju incidencije ostavimo istom, dobit ćemo iskaz i dokaz novog teorema. To je tzv. *princip dualnosti* projektivne ravnine, a lako ga uočavamo između drugog aksioma projektivne geometrije i teorema 1. Zbog toga se potpuno analogno definiraju djelišni omjer i dvoomjer za tri, odnosno četiri pravca koja pripadaju istom pramenu[2].

Definicija 4. *Neka su a, b i c tri kopunktalna pravca. Djelišni omjer (abc) u kojem pravac c dijeli pravce a i b je broj*

$$(abc) = \frac{\sin \measuredangle(a,c)}{\sin \measuredangle(b,c)}.$$

Definicija 5. *Neka su a, b, c i d četiri kopunktalna pravca. Dvoomjer $(abcd)$ je omjer djelišnih omjera (abc) i (abd), tj.*

$$(abcd) = \frac{\sin \measuredangle(a,c)}{\sin \measuredangle(b,c)} : \frac{\sin \measuredangle(a,d)}{\sin \measuredangle(b,d)}.$$

Dualni pojam pramena pravaca (P) jest niz kolinearnih točaka (p)[3], a između ta dva pojma možemo definirati vrlo važno bijektivno preslikavanje tako da za pridružene elemente $Q \in (p)$ i $q \in (P)$ vrijedi $Q \in q$. Uočimo kako je beskonačno dalekoj točki pravca p pridužen pravac kroz P paralelan s p. Ako je bijekcija uspostavljena na taj način, kažemo da su niz točaka (p) i pramen pravaca (P) *perspektivni*. Slično možemo definirati obostrano jednoznačno preslikavanje između dvaju nizova točaka (p) i (p') s istaknutom točkom P tako da za pridružene točke $Q \in (p)$ i $Q' \in (p')$ vrijedi $P \in QQ'$. Tada za ta dva niza kažemo da su *perspektivni*, a točku P nazivamo *centrom perspektiviteta*. Sada ćemo konačno iskazati i dokazati *Papusov teorem* te njegov korolar čime ćemo imati sve potrebno za opsivanje odnosa geometrijskih objekata unutar jedne ravnine.

Teorem 2. *Neka su E, F, G i H četiri točke niza (p), a e, f, g i h pridruženi pravci njemu perspektivnog pramena (P). Tada vrijedi $(ABCD) = (abcd)$.*

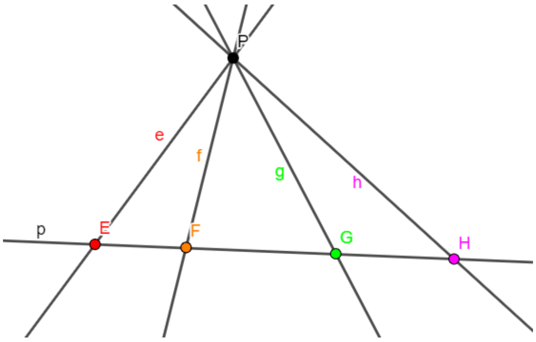
Dokaz. Primijenimo li sinusov poučak redom na trokute PEG, PFG, PEH i PFH dobivamo

$$\frac{|EG|}{|PE|} = \frac{\sin \measuredangle(e,g)}{\sin \measuredangle(p,g)}, \qquad \frac{|FG|}{|PF|} = \frac{\sin \measuredangle(f,g)}{\sin \measuredangle(p,g)},$$

$$\frac{|EH|}{|PE|} = \frac{\sin \measuredangle(e,h)}{\sin \measuredangle(p,h)}, \qquad \frac{|FH|}{|PF|} = \frac{\sin \measuredangle(f,h)}{\sin \measuredangle(p,h)}.$$

[2]pramen pravaca (P) je skup svih pravaca kojima je točka P (vrh pramena) zajednička. Kažemo i da su takvi pravci *kopunktalni*.

[3]niz točaka (p) je skup svih točaka pravca p nadopunjen njegovom beskonačno dalekom točkom.



Slika 5: Skica teorema

Iz gornjih jednakosti slijedi

$$\frac{|PF|}{|PE|} \cdot (EFG) = (efg), \qquad \frac{|PF|}{|PE|} \cdot (EFH) = (efh),$$

a dijeljenjem ta dva izraza dobivamo traženu tvrdnju.

Korolar 1. *Neka su E, E'; F, F'; G, G'; D, D' pridružene točke dvaju perspektivnih nizova (p) i (p'). Tada vrijedi (EFGH) = (E'F'G'H').*

Dokaz. Označimo s P centar perspektiviteta nizova (p) i (p'). Ako su e, f, g i h pravci redom pridruženi točkama E, F, G i H takvi da su pramen (P) i niz (p) perspektivni, onda iz definicije perspektiviteta dvaju nizova slijedi da su također (P) i (p') perspektivni. Štoviše, točkama E', F', G' i H' redom su pridruženi pravci e, f, g i h. Sada po Papusovom teoremu slijedi $(EFGH) = (efgh)$ i $(E'F'G'H') = (efgh)$, odnosno $(EFGH) = (E'F'G'H')$.

Kao što je već naglašeno, u projektivnoj geometriji se sve svodi na relaciju incidencije pa se stoga promatraju preslikavanja koja ju *čuvaju*. Poželjno je imati preslikavanje između dviju ravnina (važnost toga će se vrlo brzo vidjeti u nadolazećim primjerima), a jedno takvo je (trodimenzionalni) **perspektivitet**. Naime, ako pretpostavimo da imamo dvije ravnine π_1 i π_2 i točku P izvan njih, onda za svaku točku $T \in \pi_1$ definiramo njezinu sliku T' tako da $T' \in PT \cap \pi_2$. U nastavku ćemo koristiti termin **projektivitet** što naprosto predstavlja kompoziciju konačno mnogo perspektiviteta. Uočimo kako smo invarijantnost dvoomjera dokazali samo za komplanarne pravce. Ipak, to nam je dovoljno kako bismo istu tvrdnju proširili i na nekomplanarne pravce. Ako su π_1 i π_2 ravnine, $p_1 \in \pi_1$ i $p_2 \in \pi_2$ pravci, a f projektivitet takav da $f(\pi_1) = \pi_2, f(p_1) = p_2$, onda možemo definirati ravninu $\pi^{'}$ razapetu pravcima p_1 i p_2. Po konstrukciji, vrijedi da su pravci p_1 i p_2 komplanarni (leže u ravnini $\pi^{'}$) te je jedan slika drugog, i obratno. Sada iskoristimo dokazanu invarijantnost dvoomjera projektivitetom pridruženih komplanarnih pravaca te dobivamo traženu općenitiju tvrdnju.

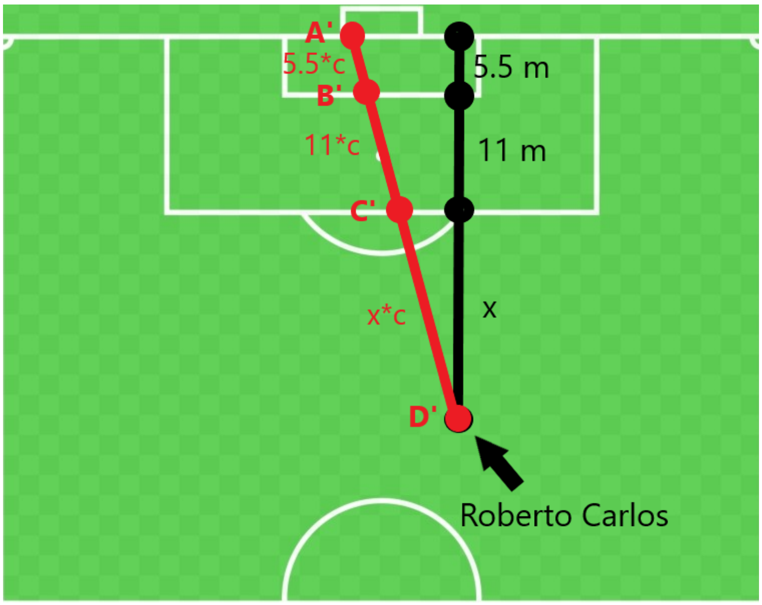
3 Roberto Carlos

U kvalifikacijama za Svjetsko prvenstvo koje se održalo 1998. godine, Roberto Carlos postigao je protiv Francuske jedan od najboljih golova u povijesti nogometa. Pogodak je postignut iz slobodnog udarca na dotad neviđen način pa je zbog toga bio glavna tema brojnih novina, časopisa itd. No, u tim brojnim člancima mogla se uočiti diskrepancija vezana uz udaljenost s koje je postignut pogodak. Kako bismo došli do točnog podatka, koristit ćemo upravo dokazanu invarijantnost dvoomjera pod djelovanjem projektiviteta. Zapravo, u pozadini svega leži kompozicija dvaju perspektiviteta (projektivitet) između ravnina. Naime, sve na utakmici događa se u nekoj ravnini koju predstavlja nogometni teren. Iako lopta u određenim situacijama izlazi izvan ravnine terena, to nam nije važno jer se podaci koje koristimo i do kojih želimo doći nalaze u njoj. U uvodu smo spomenuli da nam je uz znanje projektivne geometrije potrebna i nekolicina podataka (zajedno s fotografijom) kako bismo došli do rezultata. Te podatke upravo predstavljaju fiksne dimenzije određenih komponenti nogometnog terena. Općenito, tereni su različitih dimenzija, no sve sastavnice golmanskog prostora (tzv. *šesnaesterca*) imaju fiksnu duljinu i širinu. Upravo su to podaci koji će nam biti potrebni, a njihove vrijednosti prikazane su na slici 6.

U nastavku razrade koristit ćemo oznake prikazane na fotografijama 6 i 7. Očito do točne udaljenosti s koje je postignut pogodak dolazimo ako pronađemo egzaktnu vrijednost varijable x. Kako bismo iskoristili očuvanje dvoomjera, potrebno je odabrati četiri kolinearne točke iz kojih možemo dobiti korisne informacije. To su upravo A', B', C' i D'. Koristimo Talesov teorem o proporcionalnosti te dobivamo $|A'B'| = 5.5 \cdot c, |B'C'| = 11 \cdot c, |C'D'| = x \cdot c$ gdje je $c \in \mathbb{R}$ koeficijent proporcionalnosti. Sada računamo dvoomjer $(A'B'C'D')$ te dobivamo

$$(A'B'C'D') = \frac{16.5c \cdot (11+x)c}{11c \cdot (16.5+x)c} = \frac{181.5 + 16.5x}{181.5 + 11x}. \tag{1}$$

To je sve što u ovom trenutku možemo *"izvući"* iz prve fotografije pa je potrebno uspostaviti određeni projektivitet. Kamera iz zraka koja slika teren zapravo uspostavlja perspektivitet f između terena i prve fotografije. Analogno, kamera iza leđa igrača uspostavlja perspektivitet g između terena i druge fotografije 7. Sada je kompozicija $g \circ f^{-1}$ traženi projektivitet između dviju fotografija koje su u matematičkom kontekstu ravnine.



Slika 6: Prva fotografija, tzv. *ptičja* perspektiva sa stvarnim udaljenostima (slika je preuzeta iz [7])

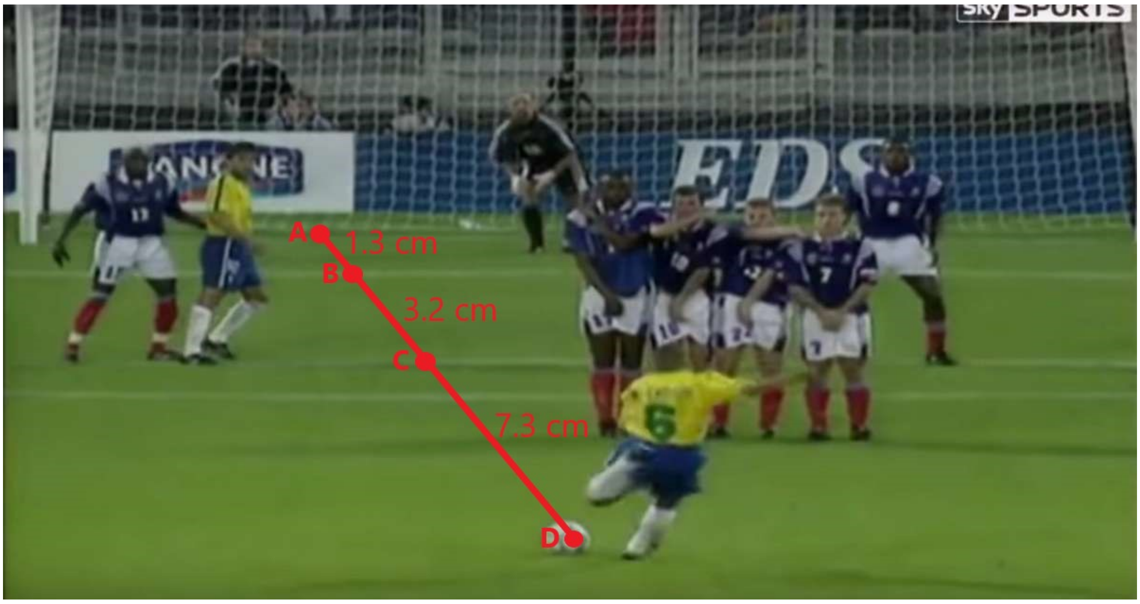
U praksi, gornju fotografiju smo isprintali, označili točke A, B, C i D te potom izmjerili ravnalom prikazane udaljenosti. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je pravac AB slika pravca $A'B'$ pri djelovanju definiranog projektiviteta. Uočimo i da su onda točke A, B, C, D redom slike točaka A', B', C', D'. Naime, postoje neke četiri točke A'', B'', C'', D'' koje odgovaraju pozicijama stvarnih fizičkih objekata te se nalaze na linijama golmanovog prostora i mjestu na kojem je postavljena lopta. U skladu s fotografijama, točka A'' će se nalaziti na liniji gola te po definiciji vrijedi $f(A'') = A$ i $g(A'') = A'$. Primijenimo li naše definirano preslikavanje, doista dobivamo $(g \circ f^{-1})(A) = A'$. Potpuno analogno zaključujemo za slike preostalih točaka. Sada, očekivano, računamo dvoomjer $(ABCD)$, tj.

$$(ABCD) = \frac{4.5 \cdot 10.5}{3.2 \cdot 11.8} = \frac{47.25}{37.76} = 1.251. \tag{2}$$

Zbog invarijantnosti dvoomjera, iz (1) i (2) dobivamo jednadžbu

$$\frac{181.5 + 16.5x}{181.5 + 11x} = 1.251.$$

čijim rješavanjem dolazimo do $x = 16.63$. Konačno, približna udaljenost s koje je postignut pogodak iznosi 33.13 m.



Slika 7: Druga fotografija i pripadne udaljenosti
(slika je preuzeta iz [8])

4 Zaključak

U prethodnom primjeru vidjeli smo korist projektivne geometrije u punom smislu, no on predstavlja samo jednu od njezinih brojnih primjena. Rezultati te veoma popularne grane geometrije, prvobitno nastale iz potreba umjetnosti, imaju široku primjenu u području visoke tehnologije. Jedna od najvažnijih nalazi se u području kalibracije kamere, točnije u poboljšanju njezine resekcije. Ukratko, cilj je pronaći optimalnu transformaciju iz 3D prostora u 2D sliku. Osnove takvih transformacija smo upravo upoznali u razrađenom primjeru, a dublje zalaženje u to područje ipak zahtjeva naprednije teorijske rezultate. Fascinantno je kako se do svih tih rezultata, odnosno čitave grane geometrije, došlo naizgled malo različitim odabirom aksioma u odnosu na euklidsku geometriju. No, pokazali smo da se, koliko god one bile slične u aksiomima, potpuno razlikuju. Glavna razlika je u tome što se u projektivnoj geometriji svaka dva pravca sijeku, uključujući i paralelne pravce. Ipak, to specifično svojstvo bi trebalo biti prirodno jer naprosto dolazi iz načina kako ljudsko oko stvara i oblikuje sliku prostora, a koji odgovara centralnoj projekciji, odnosno perspektivitetu. Prethodno napisano upravo realizira slika željezničkih tračnica za koje se čini da se sijeku, no itekako smo svjesni da točka sjecišta nije u realnom svijetu. Za kraj, napomenimo kako dosta korisnika rezultata projektivne geometrije nema teorijsko znanje o njihovoj pozadini, ali ih to ne sprječava u uspješnom provođenju i primjeni. Prethodno dovoljno govori o jednostavnosti i elegantnosti pristupa projektivne geometrije.

Literatura

[1] H. S. M. Coxeter, Projective Geometry, Blaisdell publishing company, New York, 1964

[2] B. Haran, The Cross Ratio, https://www.youtube.com/watch?v=ffvojZONF_A&ab_channel=Numberphile, 25.03.2022.

[3] D. Palman, Projektivna geometrija, Školska knjiga, Zagreb, 1984.

[4] T. Pejković, Konstruktivne metode u geometriji (skripta), https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kmg/kmg_predavanja.pdf, Zagreb

[5] Projektivna geometrija, https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=50580, 15.03.2022.

[6] Željezničke tračnice, https://www.zvono.eu/brajkovic-na-izlozbi–susret-u-zavicaju-3–imponira-snagom-svojih-uradak, 24.03.2022.

[7] Nogometni teren, https://www.pngfind.com/mpng/hRTR_football-field-lines-png-soccer-field-birds-eye/, 25.03.2022.

[8] Udarac Roberta Carlosa, https://sportska.revija.hr/povijest/video-roberto-carlos-obrambeni-igrac-ciji-udarci-iz-daljine-ubijaju-golmane/, 25.03.2022.

[9] Slike 6 i 7 uređene su pomoću aplikacije *Bojanje 3D*

[10] Preostale slike izrađene su u alatu Geogebra, https://www.geogebra.org/geometry?lang=en