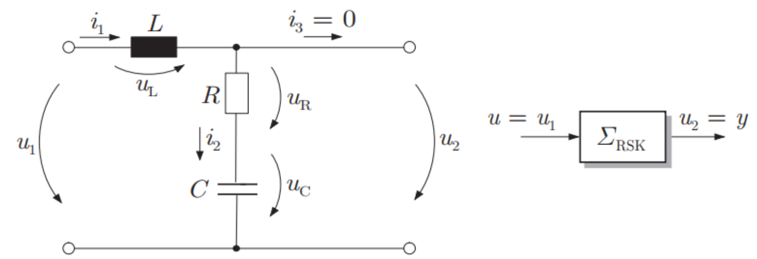
Die Übertragungsfunktion

Bald können wir Dinge in Python machen ....

... noch aber nicht ...

Einführungsbeispiel Reihenschwingkreis 1/



Strom-Spannungsbeziehungen für R, L, C:

$$C\,L\frac{d^2}{dt^2}y(t) + C\,R\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = C\,R\frac{d}{dt}u(t) + u(t)$$

MEGA WICHTIG: Das Modell gilt nur für $i_3 = 0$! - (Rückwirkungsfreiheit!!!)

Aufgabe: Berechne die Ausgangsspannung nach einem:

1. Spannungsimpuls zur Zeit t_0
2. Spannungssprung der Höhe 1 zur Zeit t_0

Einführungsbeispiel Reihenschwingkreis 2/

Transformation des Systems in den Bildbereich

Differentialgleichung im Zeitbereich:

$$C\,L\frac{d^2}{dt^2}y(t) + C\,R\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = C\,R\frac{d}{dt}u(t) + u(t)$$

Nötige Korrespondenzen und Eigenschaften:

	Originalfunktion	Bildfunktion
1. Ableitung im OB	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
2. Ableitung im OB	$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

Zugehörige algebraische Gleichung im Bildbereich (Wir nehmen an die Anfangsbedingungen sind null):

$$C\,L\,s^2\,Y(s) + C\,R\,s\,Y(s) + Y(s) = C\,R\,s\,U(s) + U(s)$$

Einführungsbeispiel Reihenschwingkreis 3/

Transformation des Systems in den Bildbereich

Umformen

$$C\,L\,s^2\,Y(s) + C\,R\,s\,Y(s) + Y(s) = C\,R\,s\,U(s) + U(s)$$
$$\big(C\,L\,s^2 + C\,R\,s + 1\big)Y(s) = \big(C\,R\,s + 1\big)\,U(s)$$
$$Y(s) = \underbrace{\frac{C\,R\,s + 1}{C\,L\,s^2 + C\,R\,s + 1}}_{G(s)}\,U(s)$$

$G(s)$ wird als Übertragungsfunktion bezeichnet.

Einführungsbeispiel Reihenschwingkreis 4/

Eingangssignal im Bildbereich

Aufgabe: Berechne die Ausgangsspannung nach einem:

1. Spannungsimpuls zur Zeit t_0
2. Spannungssprung der Höhe 1 zur Zeit t_0

→ Kurze Zwischenaufgabe: Benenne die Laplacetransformierten von Dirac-Impuls und Einheitssprung!

Einführungsbeispiel Reihenschwingkreis 5/

Eingangssignal im Bildbereich

Eingangssignal festlegen

1. Impuls zut Zeit t_0: $\quad u(t) = \delta(t - t_0)$

2. Sprung der Höhe 1 zur Zeit t_0: $\quad u(t) = \Theta(t - t_0)$

Nötige Korrespondenzen und Eigenschaften

Diracsche Deltadistribution Einheitsimpuls	$\delta(t)$	1
Heavisidesche Sprungfunktion Einheitssprung	$\Theta(t)$	$\frac{1}{s}$
Verschiebung im Originalbereich (bei einse...)	$f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
Linearität	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$

1. Impuls zut Zeit t_0: $\quad U(s) = e^{-t_0 s}$

2. Sprung der Höhe 1 zur Zeit t_0: $\quad U(s) = \frac{1}{s} e^{-t_0 s}$

Einführungsbeispiel Reihenschwingkreis 6/

Ausgangssignal

$$Y(s) = \frac{C\,R\,s + 1}{C\,L\,s^2 + C\,R\,s + 1}\,U(s)$$

1. Impuls zut Zeit t_0: $\quad U(s) = e^{-t_0 s}$

$$Y(s) = \frac{C\,R\,s + 1}{C\,L\,s^2 + C\,R\,s + 1}\,e^{-t_0 s}$$

Rücktransformiert in den Zeitbereich ergibt:

$$y(t) = \frac{\theta(t-\mathrm{t0})e^{-\frac{\left(\sqrt{\mathrm{CR}^2-4\mathrm{CL}}+\mathrm{CR}\right)(t-\mathrm{t0})}{2\mathrm{CL}}}\left(\mathrm{CR}\left(\sqrt{\mathrm{CR}^2-4\mathrm{CL}}-\mathrm{CR}\right)e^{\frac{\sqrt{\mathrm{CR}^2-4\mathrm{CL}}(t-\mathrm{t0})}{\mathrm{CL}}}+2\mathrm{CL}\left(e^{\frac{\sqrt{\mathrm{CR}^2-4\mathrm{CL}}(t-\mathrm{t0})}{\mathrm{CL}}}-1\right)+\mathrm{CR}\left(\sqrt{\mathrm{CR}^2-4\mathrm{CL}}+\mathrm{CR}\right)\right)}{2\mathrm{CL}\sqrt{\mathrm{CR}^2-4\mathrm{CL}}}$$

Einführungsbeispiel Reihenschwingkreis 7/

Ausgangssignal

$$Y(s) = \frac{C\,R\,s+1}{C\,L\,s^2+C\,R\,s+1}U(s)$$

2. Sprung der Höhe 1 zur Zeit t_0: $U(s) = \frac{1}{s}e^{-t_0 s}$

$$Y(s) = \frac{C\,R\,s+1}{C\,L\,s^2+C\,R\,s+1}\,\frac{1}{s}e^{-t_0 s}$$

Rücktransformiert in den Zeitbereich ergibt:

$$y(t) = -\frac{\theta(t-\mathrm{t0})e^{-\frac{\left(\sqrt{\mathrm{CR}^2-4\mathrm{CL}}+\mathrm{CR}\right)(t-\mathrm{t0})}{2\mathrm{CL}}}\left(\mathrm{CR}\left(-e^{\frac{\sqrt{\mathrm{CR}^2-4\mathrm{CL}}(t-\mathrm{t0})}{\mathrm{CL}}}\right)+\sqrt{\mathrm{CR}^2-4\mathrm{CL}}\left(e^{\frac{\sqrt{\mathrm{CR}^2-4\mathrm{CL}}(t-\mathrm{t0})}{\mathrm{CL}}}-2e^{\frac{\left(\sqrt{\mathrm{CR}^2-4\mathrm{CL}}+\mathrm{CR}\right)(t-\mathrm{t0})}{2\mathrm{CL}}}+1\right)+\mathrm{CR}\right)}{2\sqrt{\mathrm{CR}^2-4\mathrm{CL}}}$$

Einführungsbeispiel Reihenschwingkreis 8/

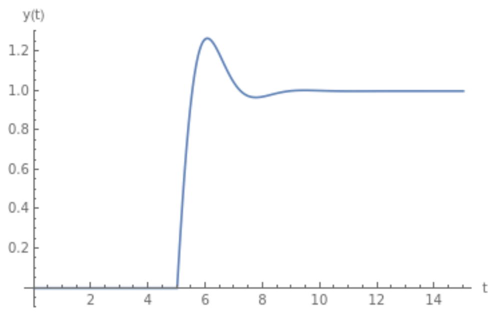
Ausgangssignal

mit $CR = 0.5$ und $CL = 0.2$ sieht so die Sprungantwort aus:

$$y(t) = \theta(t-\mathrm{t0})\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}(t-t0)}\left(\frac{\sqrt{55}}{11}\sin\left(\frac{\sqrt{55}}{4}(t-t0)\right)-\cos\left(\frac{\sqrt{55}}{4}(t-t0)\right)\right)\right)$$

bzw. gerundet und zusammengefasst:

$$y(t) = \theta(t-\mathrm{t0})\left(1-\mathrm{e}^{-1.25\,t+1.25\,t0}(\cos(1.86\,(t-t0))-0.674\,\sin(1.86\,(t-t0)))\right)$$



Wolfram Cloud Notebook:
https://www.wolframcloud.com/obj/robert.beckmann/Published/basic_responses.nb

---

Die Übertragungsfunktion

Im Beispiel wurde die Übertragungsfunktion $G(s)$ benannt:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{C\,R\,s+1}{C\,L\,s^2+C\,R\,s+1}}_{G(s)}U(s)$$

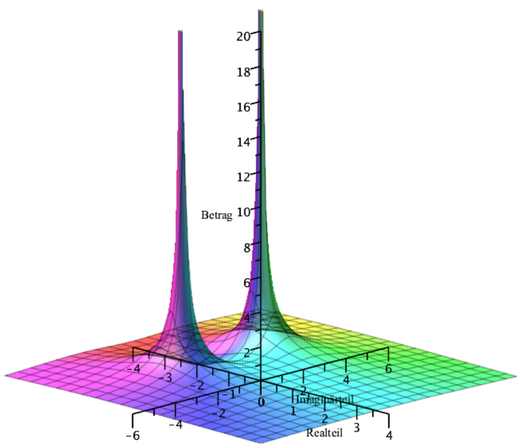
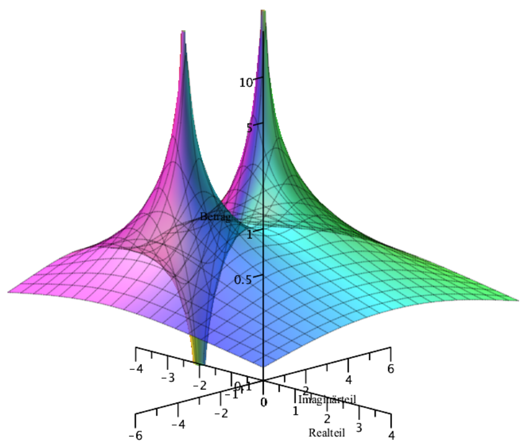
Allgemein ist Sie in Lunze2016 so definiert:

Die Übertragungsfunktion wird definiert als Quotient der Laplacetransformierten der Ausgangsgröße und der Eingangsgröße des Systems:

$$\boxed{\text{Übertragungsfunktion:} \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}.} \tag{6.63}$$

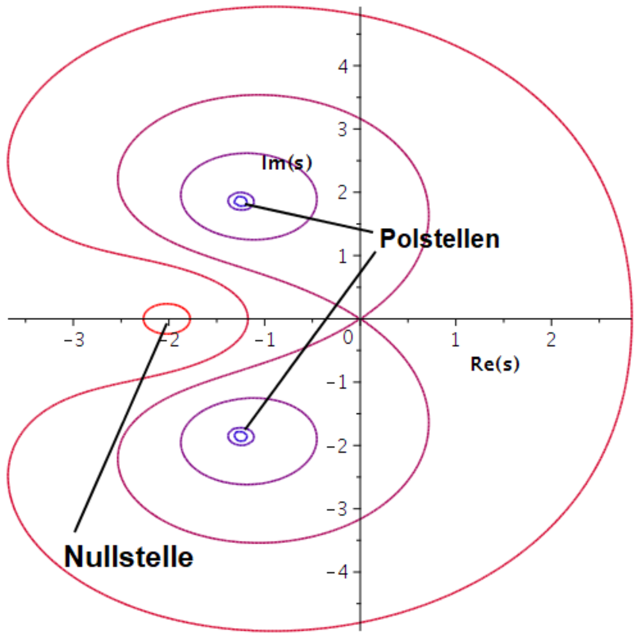
Die Übertragungsfunktion

- ist eine komplexe gebrochen rationale Funktion, sie bildet aus dem komplexen Raum in den komplexen Raum ab.
- G(s) wird selten dargestellt - man kann es aber tun
- In dem Bild unten wird der Betrag der $|G(s)|$ dargestellt.
- Typischerweise sieht man mit der logaritmischen z-Achse mehr

lineare z-Achse	logarithmische z-Achse
	

Die Übertragungsfunktion

- Draufsicht (Kontourplot)



→ Die Kontourlinien zeigen [0.15, 0.6, 1, 2, 10, 20] von $|G(s)|$. Wie ist die Zuordnung zwischen Linien und Werten?

- Übertragungsfunktionen sind immer spiegelsymmetrisch zur reellen Achse.

Übertragungsfunktion

Darstellungen

Darstellungsform	Notation im Frequenzbereich
Polynom	$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$
Pol-Nullstellen	$G(s) = k \cdot \frac{(s-s_{0,1})(s-s_{0,2})\cdots(s-s_{0,m})}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$
Zeitkonstanten	$G(s) = \frac{k}{s^l} \frac{(T_{0i}\,s+1)\dots\left(T_{0j}^2\,s^2+2\,d_{0j}\,T_{0j}\,s+1\right)}{(T_k\,s+1)\dots(T_l^2\,s^2+2\,d_l\,T_l\,s+1)}$
Partialbruch	$G(s) = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_n}{s-s_n}$

Die Darstellung in Partialbrüchen ist vor allem für die Rücktransformation in den Zeitbereich geeignet.

Pol-Nullstellen-Form

$$G(s) = k \cdot \frac{(s-s_{0,1})(s-s_{0,2})\cdots(s-s_{0,m})}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$$

Polstellen	Nullstellen	Konstante
$s_1, \dots, s_m$	$s_{0,1}, \dots, s_{0,m}$	k

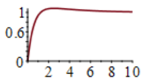
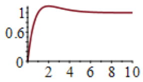
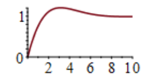
- Pol- und Nullstellen können abgelesen werden
- Pol- und Nullstellen haben die Einheit Frequenz ($\frac{1}{\text{s}}$, $\frac{1}{\text{min}}$, ...)
- "Polüberschuss" bzw "relativer Grad": $d = n - m$
- für reale, technische, realisierbare Systeme gilt immer $d > 0$
- Implementierung in Matlab, Octave, Python, ...

$$\texttt{G = zpk}([s_{0,1}, s_{0,2}, \dots, s_{0,m}], [s_1, s_2, \dots, s_n], k)$$

Pol-Nullstellen-Form

Beispiel: Reihenschwingkreis

$$G(s) = \frac{C\,R\,s+1}{C\,L\,s^2+C\,R\,s+1}$$

C	L	R	F1	F2	Sprungantwort
1	2	4	$\frac{4\,s+1}{2\,s^2+4\,s+1}$	$2\,\frac{s+\frac{1}{4}}{\left(s+\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(s+\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)}$	
1	1	2	$\frac{2\,s+1}{s^2+2\,s+1}$	$2\,\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+1)(s+1)}$	
1	2	2	$\frac{2\,s+1}{2\,s^2+2\,s+1}$	$\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j\right)\left(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j\right)}$	

Eigenschaften von Polstellen

Pole und Nullstellen sind also keine spezifischen Kenngrößen der Übertragungsfunktion G(s), sondern beschreiben Eigenschaften des betrachteten Systems Σ.

Die Pole bestimmen die Exponenten der Modi $e^{-s_i\,t}$ und damit die Eigenbewegung und das Übergangsverhalten des Systems.

Haben sämtliche Pole negativen Realteil, so klingt die Eigenbewegung ab; das System ist stabil.

Die Pole eines Systems werden ausschließlich durch die physikalischen Wirkprinzipien bestimmt. Sie sind unabhängig von den Angriffspunkten der Aktoren und Sensoren.

Die Nullstellen hängen von den Eingriffspunkten des Stellgliedes und des Messgliedes. Dies gilt sowohl für die Anzahl der Nullstellen als auch für deren Wert.

Zitiert aus Lunze2016

Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Chrakteristische Gleichung:

$$\overbrace{\underbrace{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}_{\text{charakteristisches Polynom}} = 0}^{\text{chrakteristische Gleichung}}$$

Implementierung in Matlab, Octave, Python, ...

$$\mathtt{G = tf([b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0], [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0])}$$

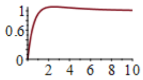
- "Polüberschuss" bzw "relativer Grad": $d = n - m$
- für reale, technische, realisierbare Systeme gilt immer $d > 0$

Übertragungsfunktion

Zeitkonstanten - Form

- i.d.R nur für stabile Systeme angewandt
- reele negative Pol- und Nullstellen werden in Zeitkonstanten überführt: $T_i = \frac{1}{|s_i|}$, $T_{0i} = \frac{1}{|s_{0i}|}$
- Für Eigenvorgänge gilt damit: $e^{-s_i\, t} = e^{-t/T_i}$
- In der Zeit $t = T_i$ ist der Eigenvorgang auf $\frac{1}{e} = 0.368$ abgeklungen.

$$G(s) = \frac{k}{s^l}\,\frac{(T_{0i}\, s + 1)\ldots\left(T_{0j}^2\, s^2 + 2\, d_{0j}\, T_{0j}\, s + 1\right)}{(T_k\, s + 1)\ldots\left(T_l^2\, s^2 + 2\, d_l\, T_l\, s + 1\right)}$$

C	L	R	F1	F2	Sprungantwort	Zeitkonstantenform
1	2	4	$\frac{4\, s+1}{2\, s^2+4\, s+1}$	$2\,\frac{s+\frac{1}{4}}{\left(s+\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(s+\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)}$		$\frac{4\, s+1}{\left(\frac{2}{s-\sqrt{2}}\, s+1\right)\left(\frac{2}{s+\sqrt{2}}\, s+1\right)}$

Summenzeitkonstante: $T_\Sigma = \frac{2}{s-\sqrt{2}} + \frac{2}{s+\sqrt{2}} - 4 = 0$ **schlechtes Beispiel** 🙄