Systemantworten

The What

- Wichtige Signale in der Regelungstechnik
- Linearität von Systemen
- Überleitung zur Faltung

The Why

- Hinführung zur Laplace-Transformation
    - ⟶ Viele Viele Methoden der linearen Regelungstechnik

Wichtige Signale

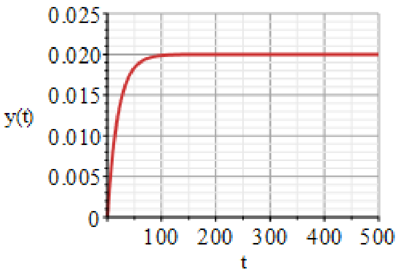
Einheitssprung 1(t), θ(t) "theta"

$$u(t) = 1(t)$$
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ undefined & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Sprungantwort h(t)

Systemantwort aus der Ruhelage in $y(t) = 0 \quad \forall\, t < 0$ auf einen Einheitssprung
Beispiel Fahrzeuggeschwindigkeit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) = -\frac{b}{m} \cdot v(t) + \frac{1(t)}{m} \quad \rightarrow \quad y(t) = h(t) = \frac{1}{b}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{bt}{m}} + 1\right)$$



Wichtige Signale

Dirac-Impuls δ(t)

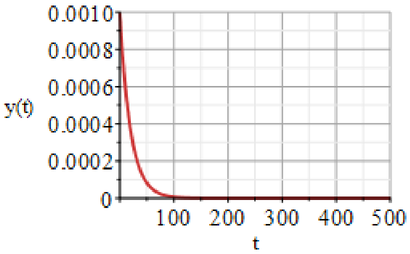
Impuls mit unendlichem Augenblickswert in verschwindend geringer Zeit und der Fläche 1

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \mathrm{d}t = 1$$

Impulsantwort g(t)

Systemantwort aus der Ruhelage in $y(t) = 0 \quad \text{für } t < 0$ auf einen Dirac-Impuls
Beispiel Fahrzeuggeschwindigkeit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) = -\frac{b}{m} \cdot v(t) + \frac{\delta(t)}{m} \quad \rightarrow \quad y(t) = g(t) = \frac{1}{m}\mathrm{e}^{-\frac{tb}{m}}$$



Superposition

Superposition lt. Wikipedia:
A function $F(x)$ that satisfies the superposition principle is called a linear function. Superposition can be defined by two simpler properties; additivity and homogeneity

$F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$ **Additivity**

$F(ax) = aF(x)$ **Homogeneity**

Lineare Systeme –

Ein System ist linear, wenn das Superpositionsprinzip erfüllt ist.

$$\alpha_1\, u_1(t) \longrightarrow \boxed{\text{lin. Sys}} \longrightarrow \alpha_1\, y_1(t)$$
$$\alpha_2\, u_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{lin. Sys}} \longrightarrow \alpha_1\, y_2(t)$$

$$\alpha_1\, u_1(t) + \alpha_2\, u_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{lin. Sys}} \longrightarrow \alpha_1\, y_1(t) + \alpha_2\, y_2(t)$$

Beispiel Superposition

System beschrieben durch lineare DGL 1. Ordnung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + k\,y(t) = u(t)$

System 1	System 2
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_1(t) + k\,y_1(t) = u_1(t)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_2(t) + k\,y_2(t) = u_2(t)$

Überlagerung:

- Eingang: $u(t) = \alpha_1\, u_1(t) + \alpha_2\, u_2(t)$
- Ausgang: $y(t) = \alpha_1\, y_1(t) + \alpha_2\, y_2(t)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = \alpha_1\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_1(t) + \alpha_2\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_2(t)$

Beispiel Superposition

I. Ausgang ableiten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = \alpha_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_1(t) + \alpha_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_2(t)$$

II. Einzelantworten einsetzen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = \alpha_1 \left(-k\, y_1(t) + u_1(t)\right) + \alpha_2 \left(-k\, y_2(t) + u_2(t)\right)$$

III. Erwartbare Gesamtantwort einsetzen

$$-k\, y(t) + u(t) = \alpha_1 \left(-k\, y_1(t) + u_1(t)\right) + \alpha_2 \left(-k\, y_2(t) + u_2(t)\right)$$

IV. Überlagerung der Eingänge einsetzen

$$-k \left(\alpha_1\, y_1(t) + \alpha_2\, y_2(t)\right) + \alpha_1\, u_1(t) + \alpha_2\, u_2(t) = \alpha_1 \left(-k\, y_1(t) + u_1(t)\right) + \alpha_2 \left(-k\, y_2(t) + u_2(t)\right)$$

fertig! ⟶ Warum ist die Linearität so eine wichtige Eigenschaft?

Übergang zur Faltung

Einführung Schreibweise nach: Girod 2003

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\text{lin. Sys } \mathcal{S}} \longrightarrow y(t) \qquad \text{wird zu} \qquad y(t) = \mathcal{S}\{u(t)\}$$

Für den Spezialfall Gewichtsfunktion: $g(t) = \mathcal{S}\{\delta(t)\}$
Mit der Ausblendeigenschaft des Dirc-Impulses:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot \delta(t-\tau) \mathrm{d}\tau \quad \text{kann man schreiben:} \quad y(t) = \mathcal{S}\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot \delta(t-\tau) \mathrm{d}\tau \right\}$$

Im Integral hängt nur $\delta(t-\tau)$ von t ab; die Werte $u(\tau)$ sind bezüglich t nur Gewichtsfaktoren. Wegen der Linearität des Systems gilt daher

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot \mathcal{S}\{\delta(t-\tau)\} \mathrm{d}\tau \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot g(t-\tau) \mathrm{d}\tau}$$

Beispiel für die Überlagerung

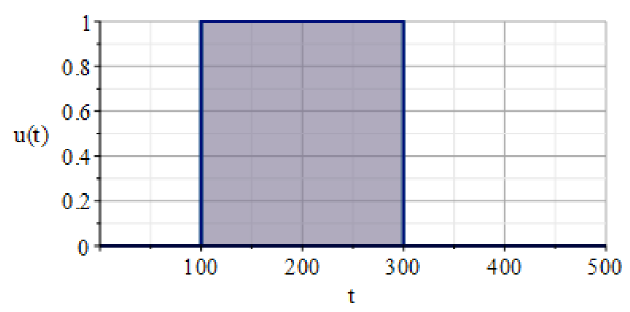
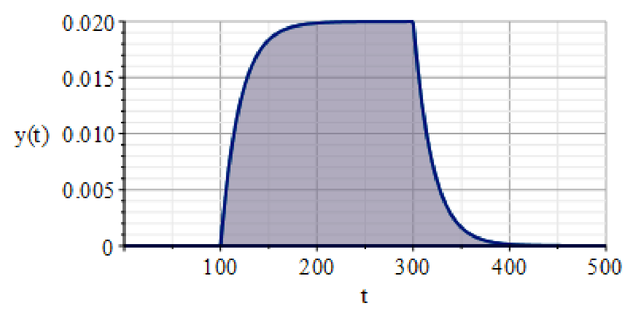
Fahrzeugbeispiel Schnell mal die Impulsantwort berechnen

- Eingang: $u(t) = \alpha \cdot \delta(t-\tau)$
- Systemausgang entspricht der um τ verschobenen Impulsantwort/Gewichtsfunktion

$$y(t) = \theta(t-\tau)\, \frac{\alpha}{1000}\, e^{-\frac{1}{20}(t-\tau)}$$

Beispiel für die Überlagerung

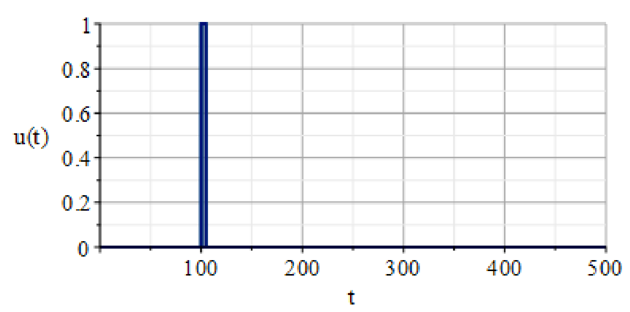
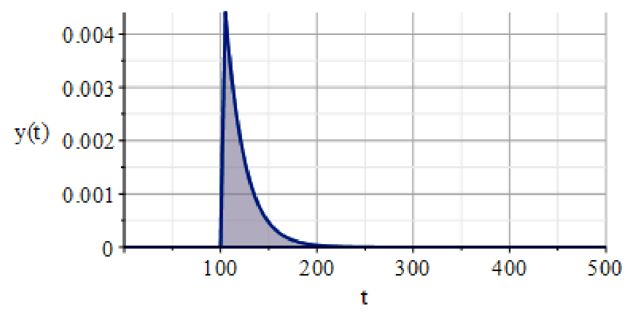
Zwei Impulse

Eingang	Ausgang
	

$$y(t) = \frac{\theta(t-100)}{50}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{t-100}{20}}\right) - \frac{\theta(t-300)}{50}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{t-300}{20}}\right)$$

Beispiel für die Überlagerung

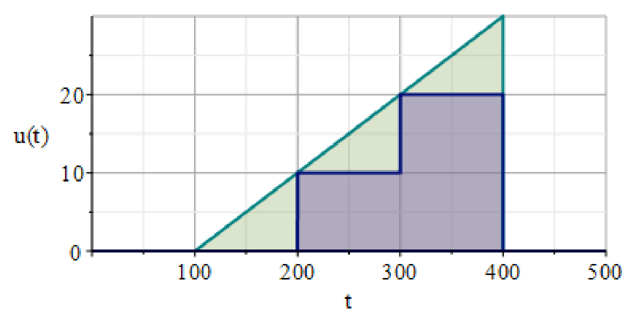
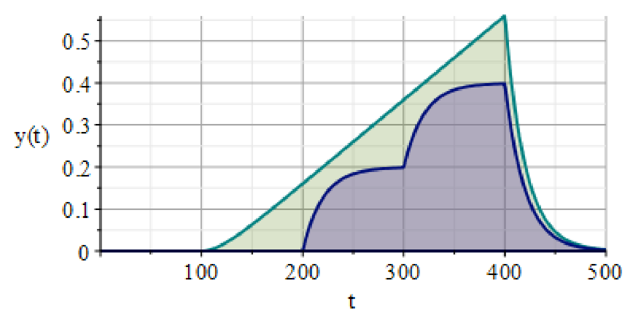
Zwei Impulse

Eingang	Ausgang
	

$$y(t) = \frac{\theta(t-100)}{50}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{t-100}{20}}\right) - \frac{\theta(t-105)}{50}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{t-105}{20}}\right)$$

Beispiel für die Überlagerung

Zwei Impulse

Eingang	Ausgang
	

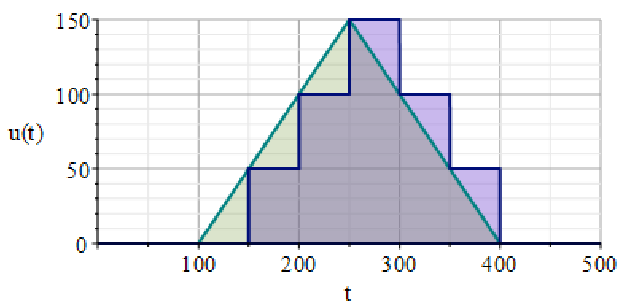
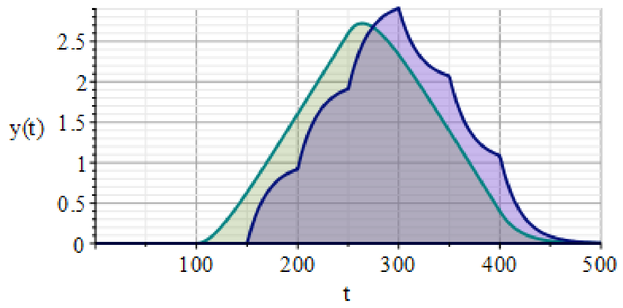
$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{\theta(t-200)}{5}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{t-200}{20}}\right) - \frac{\theta(t-300)}{5}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{t-300}{20}}\right) \\ & + \frac{\theta(t-300)}{2.5}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{t-300}{20}}\right) - \frac{\theta(t-400)}{2.5}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{t-400}{20}}\right) \end{aligned}$$

zusammengefasst:

$$y(t) = \frac{\theta(t-200)}{5}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t-200}{20}}\right) + \frac{\theta(t-300)}{5}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t-300}{20}}\right) - \frac{\theta(t-400)}{2.5}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t-400}{20}}\right)$$

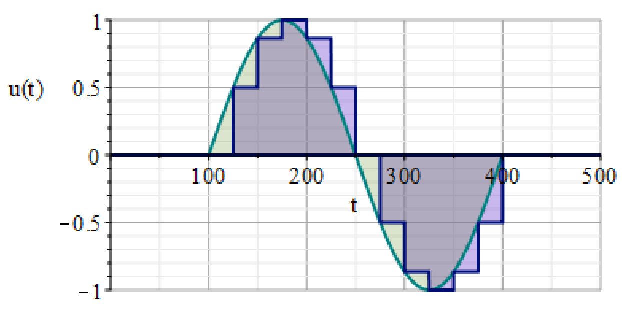
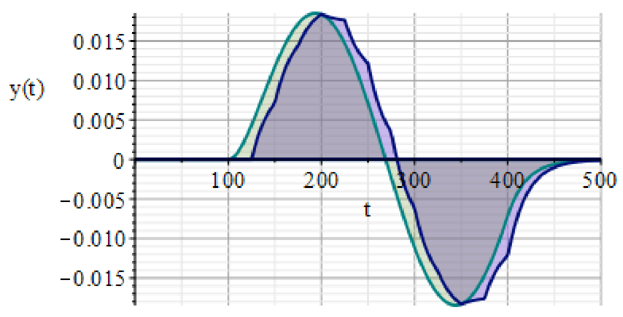
Beispiel für die Überlagerung

Zwei Impulse

Eingang	Ausgang
	

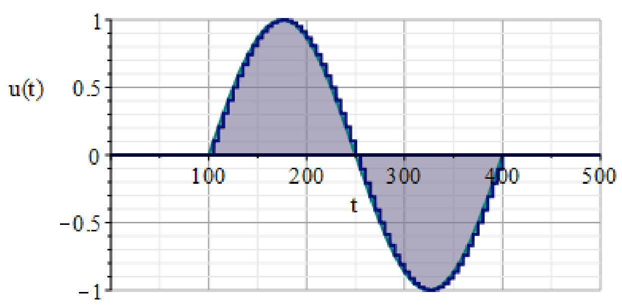
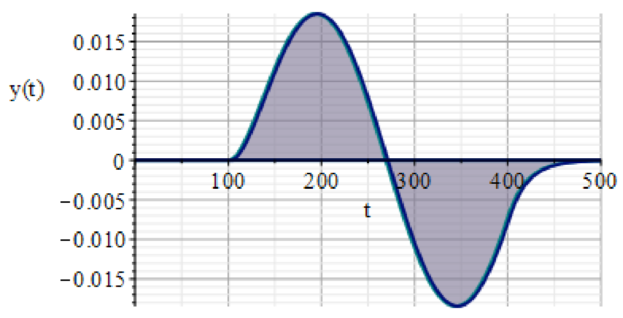
Beispiel für die Überlagerung

Zwei Impulse

Eingang	Ausgang
	

Beispiel für die Überlagerung

Zwei Impulse

Eingang	Ausgang
	

Übergang zur Faltung

Über Faltungsintegral kann der Ausgang y(t) für beliebige Eingangssignale u(t) und der Impulsantwort/Gewichtsfunktion berechnet werden.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) \cdot u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Wenn $u(t) < 0$ für $t < 0$:

$$y(t) = \int_{0}^{+\infty} g(\tau) \cdot u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Wenn $g(t) < 0$ für $t < 0$ (Kausalität):

$$y(t) = \int_{0}^{t} g(\tau) \cdot u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Hinweise

- Bisherige Methoden würden sehr viel "Integrationsarbeit" erfordern.
- Ausgänge können auch mit DLG berechnet werden
- Die Impulsantwort g(t) charakterisiert ein lineares zeitinvariantes System vollständig.
- Bei linearen Systemen ist die Impulsantwort g(t) die zeitliche Ableitung der Sprungantwort h(t).