Berechnung der z-Übertragungsfunktion kontinuierlicher Systeme

Lehrbuch: Unbehauen 2: Abschnitt 2.4.2.2 "Durchführung der exakten Transformation"
→ Leider zu kompliziert für diesen Rahmen →SKIP←

Durchführung der approximierten Transformation

Ein Integrator:

DGL	Übertragungsfunktion
$\dot{y}(t) = u(t)$	$Y(S) = \frac{1}{s}U(s)$

Kleine Übung: Gesucht ist die

1. Differenzengleichung $y_{(k)} = \ldots$
2. Z-Transformierte der Differenzengleichung $G(Z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \ldots$

Durchführung der approximierten Transformation

Ein Integrator:

DGL	Übertragungsfunktion
$\dot{y}(t) = u(t)$	$Y(S) = \frac{1}{s}U(s)$

Differenzengleichung

$$y_{(k)} = y_{(k-1)} + T \cdot u_{(k)}$$

Übertragungsfunktion

$$\begin{gathered} Y(z) - z^{-1}Y(z) = T \cdot U(z) \\ Y(z)(1 - z^{-1}) = T \cdot U(z) \\ \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T}{1 - z^{-1}} \end{gathered}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T \cdot z}{z - 1}$$

Durchführung der approximierten Transformation

Variante 1

Integrator zeitkontinuierlich	Integrator zeitdiskret
$\frac{1}{s}$	$\frac{T \cdot z}{z - 1}$

Approximation

$$s \approx \frac{z - 1}{T \cdot z}$$

Dieses Vorgehen entspricht genau der Anwendung der Differenzenquotienten $\frac{df(t)}{dt} = \frac{f_{(k)} - f_{(k-1)}}{T}$ auf die zugehorige Differentialgleichung.

Durchführung der approximierten Transformation

Variante 2 (Tustin Approximation)

$$s \approx \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

- Eine etwas genauere Approximationsbeziehung
- Beschreibt die Integrations nach Trapezregel

Beispiel

$$Y(s) = \frac{C\,R\,s+1}{C\,L\,s^2 + C\,R\,s+1}\,U(s) \qquad \rightarrow \qquad Y(s) = \frac{0.5\,s+1}{0.2\,s^2+0.5\,s+1}\,U(s)$$

$$Y(s) = \frac{0.5\left(\frac{z-1}{0.2\cdot z}\right)+1}{0.2\left(\frac{z-1}{0.2\cdot z}\right)^2+0.5\left(\frac{z-1}{0.2\cdot z}\right)+1}\,U(s)$$

$$Y(z) = \frac{7z^2-5z}{17z^2-25z+10}\,U(z)$$

bzw:

$$Y(z) = \frac{7-5z^{-1}}{17-25z^{-1}+10z^{-2}}\,U(z)$$

Differenzengleichung:

....

Beispiel Reihenschwingkreis

$$Y(s) = \frac{C\,R\,s+1}{C\,L\,s^2 + C\,R\,s+1}\,U(s) \qquad \rightarrow \qquad Y(s) = \frac{0.5\,s+1}{0.2\,s^2+0.5\,s+1}\,U(s)$$

Approximation im Z-Bereich:

$$Y(z) = \frac{0.5\left(\frac{z-1}{0.2\cdot z}\right)+1}{0.2\left(\frac{z-1}{0.2\cdot z}\right)^2+0.5\left(\frac{z-1}{0.2\cdot z}\right)+1}\,U(z)$$

$$Y(z) = \frac{7z^2-5z}{17z^2-25z+10}\,U(z)$$

bzw:

$$Y(z) = \frac{7-5z^{-1}}{17-25z^{-1}+10z^{-2}}\,U(z)$$

Beispiel Reihenschwingkreis

Umformung:

$$Y(z)\left(17-25z^{-1}+10z^{-2}\right) = \left(7-5z^{-1}\right)U(z)$$
$$17Y(z)-25z^{-1}Y(z)+10z^{-2}Y(z) = 7U(z)-5z^{-1}U(z)$$

Transformation in Zeitbereich:

$$17y_{(k)}-25y_{(k-1)}+10y_{(k-2)} = 7u_{(k)}-5u_{(k-1)}$$

Transformation in Zeitbereich:

$$y_{(k)} = \frac{25}{17}y_{(k-1)}-\frac{10}{17}y_{(k-2)}+\frac{7}{17}u_{(k)}-\frac{5}{17}u_{(k-1)}$$