Der Bildbereich

(Laplace Transformation)

Motivation

Was
Eine Funktion f wird vom reellen Zeitbereich in eine Funktion F im komplexen Spektralbereich (Frequenzbereich, Bildbereich) überführt.

Warum
Im Bildbereich sind bestimmte Berechnungen einfacher - Faltung wird zu Multiplikation!!!1!!!!elf

---

Vorwärtstransformation

- Sei $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{C}$ eine Funktion. Die Laplace-Transformation von $f(t)$ ist durch

  $$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t, \qquad s \in \mathbb{C}$$

  definiert, insofern das Integral existiert.
- Die Funktion $F(s)$ wird Laplace-Transformierte der Funktion $f(t)$ genannt.

Rückwärtstransformation

Die Zeitfunktion $f(t)$ kann durch die Umkehrformel[1]

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty} e^{st}F(s)\,\mathrm{d}s = \begin{cases} f(t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \qquad \text{mit } \gamma > s_0,$$

aus der Spektralfunktion $F(s)$ bestimmt werden, dabei ist s_0 der größte Realteil einer Singularität von F.

Notationen

- Festlegung: Signale und Syteme im
  - Originalbereich bekommen Kleinbuchstaben $y(t)$, $u(t)$, $g(t)$
  - Bildbereich bekommen Großbuchstaben $Y(s)$, $U(s)$, $G(s)$
- Verbreitet sind diese Notationen für die Transformationen:

$$f(t) \ \circ\!\!-\!\!\bullet \ F(s)$$

$$F(s) \ \bullet\!\!-\!\!\circ \ f(t)$$

BTW: Selbe Notation wird auch für die Fourier-Transformation verwendet:

- $Y(j\omega)$, $U(j\omega)$, $G(j\omega)$
- $f(t) \ \circ\!\!-\!\!\bullet \ F(j\omega), \qquad F(j\omega) \ \bullet\!\!-\!\!\circ \ f(t)$

Allgemeine Eigenschaften bzw. Operationen

	Originalfunktion $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	**Bildfunktion** $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
Linearität	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (a > 0)$
Verschiebung im Originalbereich (bei einseitiger Transformation nur $a > 0$ oder $f(t) = 0 \ \forall \ t < a$)	$f(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
Verschiebung im Bildbereich (Dämpfungssatz)	$e^{-at} \cdot f(t)$	$F(s+a) \qquad (a \in \mathbb{C})$
Komplexe Konjugation	$f^*(t)$	$F^*(s^*)$
Zeitspiegelung (bei einseitiger Transformation nicht anwendbar!)	$f(-t)$	$F(-s)$
Zeitdehnung ($T \neq 0$; bei einseitiger Transformation nur für $T > 0$)	$f\left(\frac{t}{T}\right)$	$TF(s \cdot T)$

Allgemeine Eigenschaften bzw. Operationen 2

	Originalfunktion $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	**Bildfunktion** $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. Ableitung im Originalbereich	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
2. Ableitung im Originalbereich	$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
1. Ableitung im Bildbereich	$-tf(t)$	$F'(s)$
2. Ableitung im Bildbereich	$t^2 f(t)$	$F''(s)$
Integration im Olriginalbereich	$\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$	$\frac{1}{s} F(s)$
Integration im Bildbereich	$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\,\mathrm{d}u$
Faltung / Multiplitkation	$\int_0^t f(u)\, g(t-u)\,\mathrm{d}u$	$F(s)\, G(s)$
Periodische Funktion	$f(t) = f(t+T)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t) \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t$

Allgemeine Eigenschaften bzw. Operationen 3

	Originalfunktion $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	**Bildfunktion** $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
[Sinus]-Multiplikation	$\sin(at) \cdot f(t)$	$\frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot (F(s - \mathrm{i}a) - F(s + \mathrm{i}a))$
[Cosinus]-Multiplikation	$\cos(at) \cdot f(t)$	$\frac{1}{2} \cdot (F(s - \mathrm{i}a) + F(s + \mathrm{i}a))$
	$\sinh(at) \cdot f(t)$	$\frac{1}{2} \cdot (F(s-a) - F(s+a))$
	$\cosh(at) \cdot f(t)$	$\frac{1}{2} \cdot (F(s-a) + F(s+a))$

Korrenspondenzen 1

Funktionsname	**Originalfunktion** $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	**Bildfunktion** $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
Diracsche Deltadistribution Einheitsimpuls	$\delta(t)$ $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\delta(t)$	1 s^n

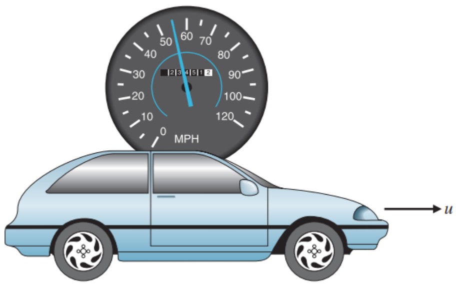
Funktionsname	**Originalfunktion** $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	**Bildfunktion** $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
Heavisidesche Sprungfunktion Einheitssprung	$\Theta(t)$	$\frac{1}{s}$
Exponentialfunktion	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Exponentialverteilung	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
1-te Potenz	t	$\frac{1}{s^2}$
n-te Potenz	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

Korrenspondenzen 2

Funktionsname	**Originalfunktion** $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	**Bildfunktion** $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
Potenzreihe	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{s^{n+1}} e^{-t_0 s}$
Gedämpfte Potenzfunktion	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-at}$	$(s+a)^{-n}$
n-te Wurzel	$\sqrt[n]{t}$	$s^{-(n+1)/n} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
Sinus	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
Cosinus	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
Sinus hyperbolicus	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
Cosinus hyperbolicus	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

Beispiel 1: Fahrzeugmodell 1/

- Betrachtet wird das Fahrzeug



mit einer Masse von $m = 1000kg$ einem Reibbeiwert von $b = 50\frac{N \cdot s}{m}$ und einer beschleunigenden Kraft von $F_u = 500N$

Aufgabe:
Mit den Korrespondenzen soll die Fahrzeuggeschwindugkeit nach einem:

1. Kraftimpuls zur Zeit t_0
2. einem Kraftsprung der Höhe $\hat{F}$ zur Zeit t_0

berechnet werden.

Beispiel 1: Fahrzeugmodell 2/

Systembeschreibung im Bildbereich

Das Fahrzeug folgt im Zeitbereich der Differentialgleichung :

$$\tfrac{d}{d\,t}v(t) = -\frac{b}{m}\cdot v(t) + \frac{1}{m}\,u(t)$$

mit der Korrespondenz

	Originalfunktion	Bildfunktion
1. Ableitung im Originalbereich	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$

ergibt sich im Bildbereich diese algebraische Gleichung:

$$s\,V(s) = -\frac{b}{m}\cdot V(s) + \frac{1}{m}\,U(s)$$

(Wir nehmen an: $f(0) = 0$)

Beispiel 1: Fahrzeugmodell 3/

Eingangssignal im Bildbereich

Eingangssignal festlegen

1. Impuls zut Zeit t_0: $\quad u(t) = \delta(t - t_0)$
2. Sprung der Höhe $\hat{F}$ zur Zeit t_0: $\quad u(t) = \hat{F}\,\Theta(t - t_0)$

Funktionsname	Originalfunktion	Bildfunktion
Diracsche Deltadistribution Einheitsimpuls	$\delta(t)$	1
Heavisidesche Sprungfunktion Einheitssprung	$\Theta(t)$	$\frac{1}{s}$
Verschiebung im Originalbereich (bei einse...)	$f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
Linearität	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$

1. Impuls zur Zeit t_0: $\quad U(s) = e^{-t_0 s}$
2. Sprung der Höhe $\hat{F}$ zur Zeit t_0: $\quad U(s) = \hat{F}\,\frac{1}{s}e^{-t_0 s}$

Beispiel 1: Fahrzeugmodell 4/

Ausgangssignal im Bildbereich

1. System umformen

$$\begin{aligned}
s\,V(s) &= -\frac{b}{m}\cdot V(s) + \frac{1}{m}\,U(s)\\
s\,V(s) + \frac{b}{m}\cdot V(s) &= \frac{1}{m}\,U(s)\\
V(s)\left(s + \frac{b}{m}\right) &= \frac{1}{m}\,U(s)\\
V(s) &= \frac{\frac{1}{m}}{(s + \frac{b}{m})}\,U(s)
\end{aligned}$$

Beispiel 1: Fahrzeugmodell 5/

Ausgangssignal im Bildbereich

Mit dem Eingangssignal: $U(s) = e^{-t_0 s}$

$$V(s) = \frac{\frac{1}{m}}{\left(s + \frac{b}{m}\right)} e^{-t_0 s}$$

Funktionsname	Originalfunktion	Bildfunktion
Exponentialfunktion	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Verschiebung im Originalbereich (bei einseitiger Transformation nur $a > 0$ oder $f(t) = 0 \ \forall \ t < a$)	$f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$

Rücktransformiert im Zeitbereich:

$$v(t) = \frac{1}{m} e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}$$

Beispiel 1: Fahrzeugmodell 6/

Ausgangssignal im Bildbereich

Mit dem Eingangssignal: $U(s) = \hat{F} \, \frac{1}{s} e^{-t_0 s}$

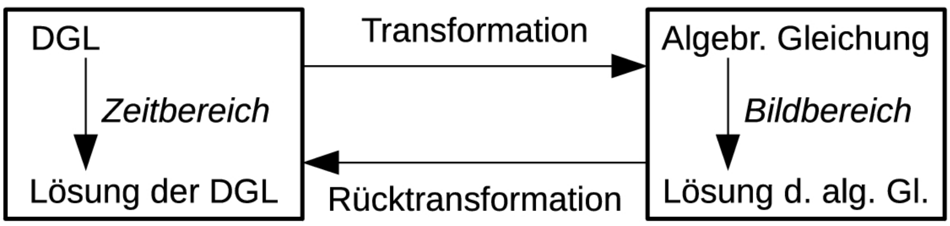
$$V(s) = \frac{\frac{1}{m}}{\left(s + \frac{b}{m}\right)} \hat{F} \, \frac{1}{s} e^{-t_0 s}$$

Funktionsname	Originalfunktion	Bildfunktion
Exponentialverteilung	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
Verschiebung im Originalbereich (bei einseitiger Transformation nur $a > 0$ oder $f(t) = 0 \ \forall \ t < a$)	$f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$

Rücktransformiert im Zeitbereich:

$$v(t) = \frac{\hat{F}}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}\,(t-t_0)}\right)$$

Erkenntnisse



	Impuls	Sprung
Eingangssignal	$u(t) = \delta(t - t_0)$	$u(t) = \Theta(t - t_0)$
Ausgangssignal	$v(t) = \frac{1}{m} e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}$ Impulsantwort	$v(t) = \frac{1}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}\,(t-t_0)}\right)$ Sprungantwort

- genau genommen ist die Sprungantwort (i.d.R. $h(t)$) die Reaktion auf den Einheitssprung (Höhe 1, Zeitpunkt 0)
- Impulsantwort (≙Gewichtsfunktion) (i.d.R. $g(t)$) ist die zeitliche Ableitung der Sprungantwort

---

Literatur

---

1. Bronstein, et al.: *Taschenbuch der Mathematik*. 7. Auflage, Verlag Harri Deutsch, S. 775, Kap. 15.2.1.1.↩