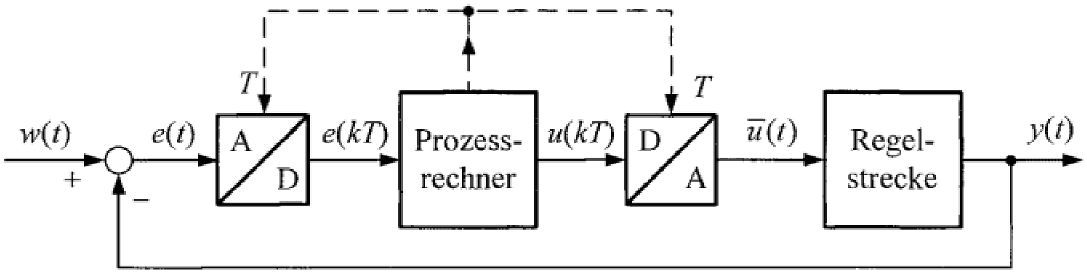
Abtastung

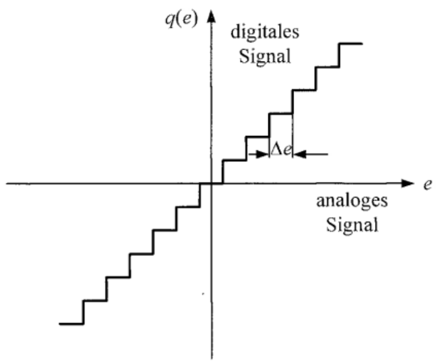
Prinzipieller Aufbau eines Abtastsystems - Prozessrechner wird als Regler eingesetzt:



die Regelabweichung $e(t)$ wird in den digitalen Wert $e(kT)$ umgewandelt.

Analog Digital Umsetzung

- erfolgt periodisch mit Abtastzeit T
- Amplitudenquantisierung bzw. Diskretisierung



- Die Zeit-diskretisierung ist linear, die Wert-Diskretisierung ist **nichtlinear**
- Quantisierungsstufen klein ⟶ Quantisierungseffekt oft vernachlässigbar
- Wenn von diskreten Systemen die Rede ist, sind zeitdiskrete gemeint.
- Lineare Systeme sind nach der Abtastung auch linear, **weil die Systeme nur an den Zeitpunkten kT betrachtet werden.**
- Es ergibt sich eine diskrete Systemdarstellung in der alle Funktionen Zahlenfolgen sind.

Digital Analog Umsetzung

- Prozessrechner berechnet Stellgröße $u(kT)$
- im D/A Umsetzer wird $\bar{u}(t)$ erzeugt, das ist konstant $kT < T < (k+1)T$
- Stellsignal hat Treppenform

Umwandlung zeitkontinuierlich ⟶ zeitdiskret

- Verschiede Ansätze verfügbar
- einfachste Möglichkeit: Approximation des Differenzenquotienten:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{t=kT} \approx \frac{f(kT)-f[(k-1)T]}{T},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=kT} \approx \frac{f(kT)-2f[(k-1)T]+f[(k-2)T]}{T^2},$$

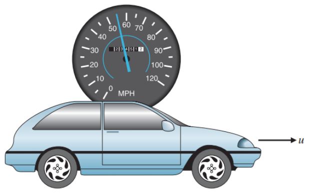
$$\left.\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}t^3}\right|_{t=kT} \approx \frac{f(kT)-3f[(k-1)T]+3f[(k-2)T]-f[(k-3)T]}{T^3}$$

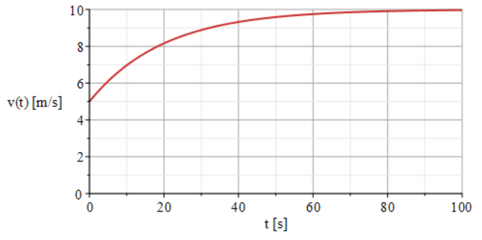
$$\vdots$$

Fahrzeugmodell zeitdiskret

Wiederholung aus 3_Modellbildung:

DGL	Lösung	eingesetzt
$\frac{d}{dt}v(t) = -\frac{b}{m} \cdot v(t) + \frac{F}{m}$	$v(t) = \frac{F}{b} + e^{-\frac{bt}{m}}\left(v_0 - \frac{F}{b}\right)$	$v(t) = 10 - 5\,e^{-t/20}$





Masse	Reibwert	Kraft
$m = 1000kg$	$b = 50\frac{N \cdot s}{m}$	$F = 500N$

Gesucht ist jetzt *ein* zeitdiskretes Modell

Fahrzeugmodell zeitdiskret

DGL:

$$\frac{d}{dt}v(t) = -\frac{b}{m} \cdot v(t) + \frac{F}{m}$$

ersetzen $v(t) = v(kT)$ und $\frac{dv(t)}{dt} = \frac{v(kT)-v((k-1)T)}{T}$

fertig:

$$\frac{v(kT) - v((k-1)T)}{T} = -\frac{b}{m}v(kT) + \frac{F}{m}$$

Fahrzeugmodell zeitdiskret

$$\frac{v(kT) - v((k-1)T)}{T} = -\frac{b}{m}v(kT) + \frac{F}{m}$$

umstellen :

$$v(kT) = \frac{m \cdot v((k-1)T)}{T \cdot b + m} + \frac{F \cdot T}{T \cdot b + m}$$

verkürzt :

$$v_{(k)} = \frac{m}{T \cdot b + m}v_{(k-1)} + \frac{F \cdot T}{T \cdot b + m}$$

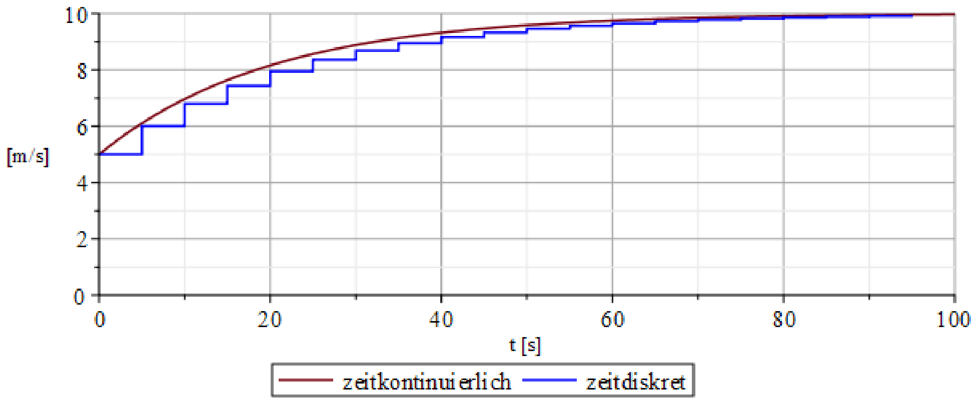
für T=5:

$$v_{(k)} = 0.8 \cdot v_{(k-1)} + 2$$

Fahrzeugmodell zeitdiskret

$$v_{(k)} = 0.8 \cdot v_{(k-1)} + 2$$

k	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y(k)	5	5	6	6.8	7.44	7.952	8.3616	8.68928	8.951424



Explizite Form der rekursiven Differenzengleichung für $v_0 = 5$:

$$v_{(k)} = 10 - 5\left(\frac{4}{5}\right)^k$$

Aufgabe Verzögerungsglied

DGL: $T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$

Gesucht ist:

1. die Differenzengleichung für $T = 1$ und $T_1 = 4$:
2. die Werte von $y_{(k)}$ für k=1,2,3,4,5 $u_{(k)} = 1$ und $y_0 = 0$

Lösung Verzögerungsglied 1/

ersetzen $y(t) = y(kT)$, $u(t) = u(kT)$ und $\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y(kT)-y((k-1)T)}{T}$

fertig:

$$T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad \rightarrow \quad T_1 \frac{y(kT) - y((k-1)T)}{T} + y(kT) = u(kT)$$

Lösung Verzögerungsglied 2/

umstellen :

$$\frac{T_1}{T} y(kT) - \frac{T_1}{T} y((k-1)T) + y(kT) = u(kT)$$
$$\frac{T_1}{T} y(kT) + y(kT) = u(kT) + \frac{T_1}{T} y((k-1)T)$$
$$\left(\frac{T_1}{T} + 1\right) y(kT) = u(kT) + \frac{T_1}{T} y((k-1)T)$$
$$y(kT) = \left(\frac{T}{T_1 + T}\right)\left(u(kT) + \frac{T_1}{T} y((k-1)T)\right)$$

$$y(kT) = \left(\frac{T}{T_1 + T}\right) u(kT) + \left(\frac{T_1}{T_1 + T}\right) y((k-1)T)$$

Lösung Verzögerungsglied 3/

vereinfachte Schreibweise:

$$y_{(k)} = \left(\frac{T_1}{T_1 + T}\right) y_{(k-1)} + \left(\frac{T}{T_1 + T}\right) u_{(k)}$$

Für $T = 1$ und $T_1 = 4$ und $y_{(0)} = 0$:

$$y_{(k)} = 0.8 y_{(k-1)} + 0.2 u_{(k)}$$

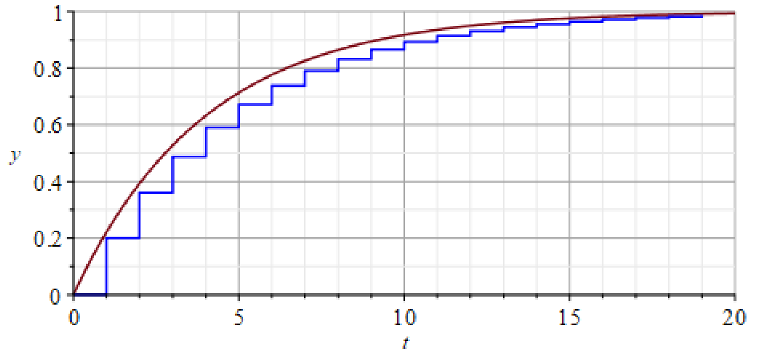
---

k	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
u(k)	0	0	1	1	1	1	1	1	1
y(k)	0	0	0.2	0.36	0.488	0.5904	0.67232	0.737856	0.7902848

- Der Sprung ist bei k=0 noch 0 - erst bei k=1 wird er hier 1
- Mit dieser zeitdiskreten Sprungdefinition wird bei dem System mit Durchgriff die Anfangsbedingung $y_{(0)} = 0$ eingehalten.

Lösung Verzögerungsglied 4/

$$y_{(k)} = 0.8y_{(k-1)} + 0.2u_{(k)}$$



- Das zeitdiskrete System ist rekursiv.
- Das zeitdiskrete System hat Durchgriff!!!
- Wegen der Approximation: $\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y(kT)-y((k-1)T)}{T}$ erzeugt die rekursive Gleichung nur eine Näherungslösung der Differentialgleichung.
- Approximationsfehler werden kleiner für kleineres T

Lösung Verzögerungsglied 5/

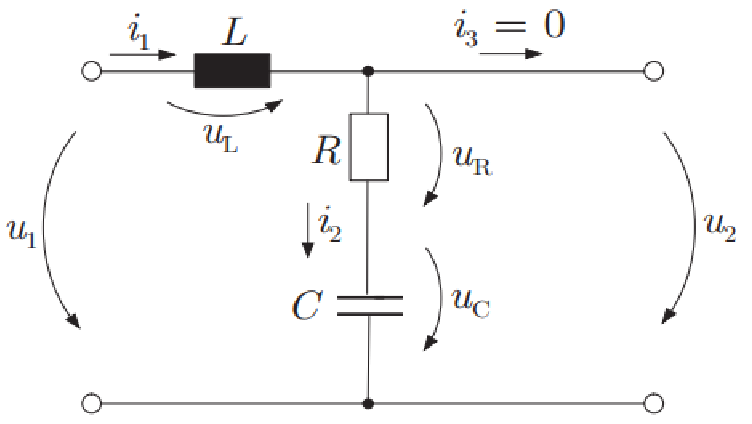
$$y_{(k)} = 0.8y_{(k-1)} + 0.2u_{(k)}$$

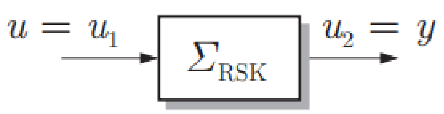
- Für bestimmte Eingangssignale $u_{(k)}$ kann eine explizite Lösung angegeben werden.
- z.B. $y_{(0)} = 0$ und $u_{(k)} = 1$:

$$y_{(k)} = 1 - 0.8^k$$

- Ist der Eingang $u_{(k)}$ unbekannt, kann keine explizite Lösung angeben werden.

Reihenschwingkreis 1/





Strom-Spannungsbeziehungen für R, L, C:

$$C\,L\frac{d^2}{dt^2}y(t) + C\,R\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = C\,R\frac{d}{dt}u(t) + u(t)$$

Reihenschwingkreis 2/

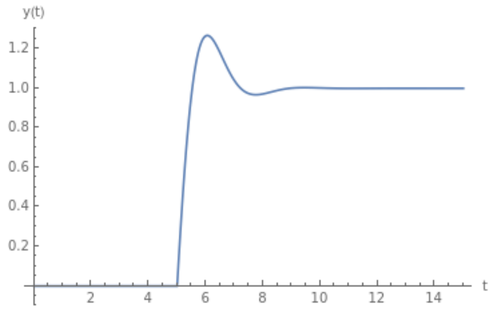
Ausgangssignal

mit $CR = 0.5$ und $CL = 0.2$ sieht so die Sprungantwort aus:

$$y(t) = \theta(t - \mathrm{t0})\left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{5}{4}(t-t0)}\left(\frac{\sqrt{55}}{11}\sin\left(\frac{\sqrt{55}}{4}(t - t0)\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{55}}{4}(t - t0)\right)\right)\right)$$

bzw. gerundet und zusammengefasst:

$$y(t) = \theta(t - \mathrm{t0})\left(1 - \mathrm{e}^{-1.25\,t + 1.25\,t0}(\cos(1.86\,(t - t0)) - 0.674\,\sin(1.86\,(t - t0)))\right)$$



Reihenschwingkreis 3/

DGL: $C\,L\frac{d^2}{dt^2}y(t) + C\,R\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = C\,R\frac{d}{dt}u(t) + u(t)$

Approximationen:

1. Ordnung	2. OPrdnung
$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y_k}{T} = \frac{y_{(k)} - y_{(k-1)}}{T}$	$\ddot{y}(t) = \frac{d^2y}{dt^2} \approx \frac{\Delta^2 y_k}{T^2} = \frac{y_{(k)} - 2y_{(k-1)} + y_{(k-2)}}{T^2}$

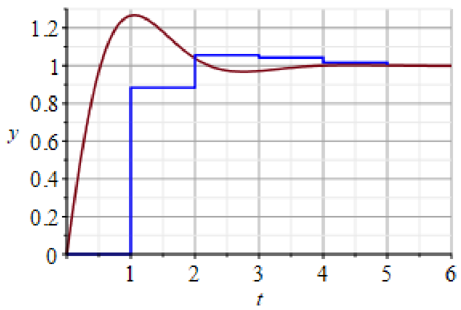
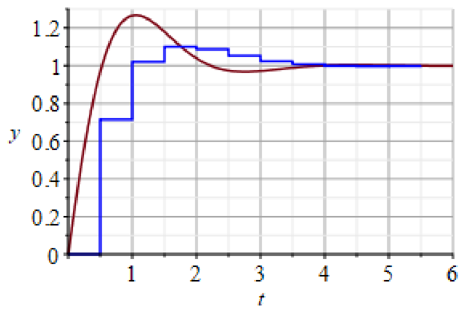
eingesetzt:

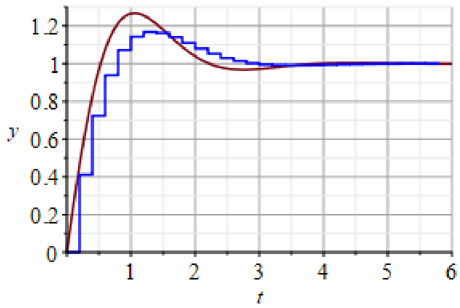
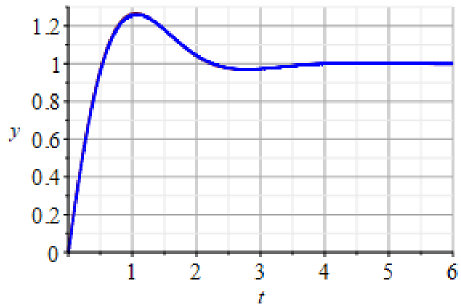
$$\frac{CL\left(y_{(k)} - 2\,y_{(k-1)} + y_{(k-2)}\right)}{T^2} + \frac{CR\left(y_{(k)} - y_{(k-1)}\right)}{T} + y(k) = \frac{CR\left(u_{(k)} - u_{(k-1)}\right)}{T} + u_{(k)}$$

umgestellt:

$$y_{(k)} = -\frac{T^2 u_{(k)}}{-CRT - T^2 - CL}\left(\frac{CR}{T} + 1\right) + \frac{CR\,u_{(k-1)}T}{-CRT - T^2 - CL} + \frac{CL\,y_{(k-2)}}{-CRT - T^2 - CL} + \frac{(-CRT - 2\,CL)y_{(k-1)}}{-CRT - T^2 - CL}$$

Reihenschwingkreis 4/

T=1	T=0.5
	

T=0.2	T=0.01
$y_{(k)} = \frac{7\,u_{(k)}}{17} - \frac{5\,u_{(k-1)}}{17} - \frac{10\,y_{(k-2)}}{17} + \frac{25\,y_{(k-1)}}{17}$	
	

Allgemeine Form linearer Differenzengleichungen

- Differenzengleichungen bilden lineare zeitdiskrete Systeme ab.
- Übliche Form

$$\boxed{y_{(k)} = -a_1 \cdot y_{(k-1)} - a_2 \cdot y_{(k-2)} - \cdots - a_n \cdot y_{(k-n)} \quad + \quad b_0 \cdot u_{(k)} + b_1 \cdot u_{(k-1)} + b_2 \cdot u_{(k-2)} + \cdots + b_m \cdot u_{(k-m)}}$$

- Analyse und Synthese von Regelkreisen ist im Bildbereich wieder einfacher $\longrightarrow$ Z-Transformation