Systemantworten

The What

- Wichtige Signale in der Regelungstechnik
- Linearität von Systemen
- Überleitung zur Faltung

The Why

- Hinführung zur Laplace-Transformation
  - ⟶ Viele Viele Methoden der linearen Regelungstechnik

Wichtige Signale

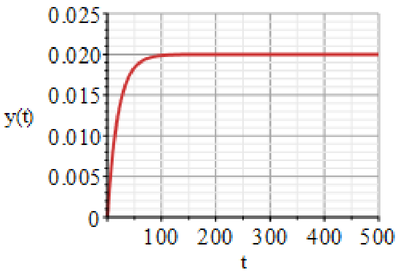
Einheitssprung 1(t), θ(t) "theta"

$$u(t) = 1(t)$$
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ undefined & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Sprungantwort h(t)

Systemantwort aus der Ruhelage in $y(t) = 0 \quad \forall\, t < 0$ auf einen Einheitssprung
Beispiel Fahrzeuggeschwindigkeit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) = -\frac{b}{m} \cdot v(t) + \frac{1(t)}{m} \quad \rightarrow \quad y(t) = h(t) = \frac{1}{b}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{bt}{m}} + 1\right)$$



Wichtige Signale

Dirac-Impuls δ(t)

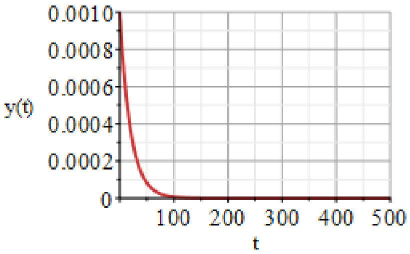
Impuls mit unendlichem Augenblickswert in verschwindend geringer Zeit und der Fläche 1

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

Impulsantwort, Gewichtsfunktion g(t)

Systemantwort aus der Ruhelage in $y(t) = 0 \quad \text{für } t < 0$ auf einen Dirac-Impuls
Beispiel Fahrzeuggeschwindigkeit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) = -\frac{b}{m}\cdot v(t) + \frac{\delta(t)}{m} \quad \rightarrow \quad y(t) = g(t) = \frac{1}{m}\mathrm{e}^{-\frac{tb}{m}}$$



Superposition

Superposition lt. Wikipedia:
A function $F(x)$ that satisfies the superposition principle is called a linear function. Superposition can be defined by two simpler properties; additivity and homogeneity

$F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$ **Additivity**

$F(ax) = aF(x)$ **Homogeneity**

Lineare Systeme –

Ein System ist linear, wenn das Superpositionsprinzip erfüllt ist.

$$\alpha_1\, u_1(t) \longrightarrow \boxed{\text{lin. Sys}} \longrightarrow \alpha_1\, y_1(t)$$
$$\alpha_2\, u_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{lin. Sys}} \longrightarrow \alpha_1\, y_2(t)$$
$$\alpha_1\, u_1(t) + \alpha_2\, u_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{lin. Sys}} \longrightarrow \alpha_1\, y_1(t) + \alpha_2\, y_2(t)$$

Beispiel Superposition

System beschrieben durch lineare DGL 1. Ordnung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + k\,y(t) = u(t)$

System 1	System 2
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_1(t) + k\,y_1(t) = u_1(t)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_2(t) + k\,y_2(t) = u_2(t)$

Überlagerung:

- Eingang: $u(t) = \alpha_1\, u_1(t) + \alpha_2\, u_2(t)$
- Ausgang: $y(t) = \alpha_1\, y_1(t) + \alpha_2\, y_2(t)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = \alpha_1\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_1(t) + \alpha_2\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_2(t)$

Beispiel Superposition

I. Ausgang ableiten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = \alpha_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_1(t) + \alpha_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_2(t)$$

II. Einzelantworten einsetzen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = \alpha_1 \left(-k\, y_1(t) + u_1(t)\right) + \alpha_2 \left(-k\, y_2(t) + u_2(t)\right)$$

III. Erwartbare Gesamtantwort einsetzen

$$-k\, y(t) + u(t) = \alpha_1 \left(-k\, y_1(t) + u_1(t)\right) + \alpha_2 \left(-k\, y_2(t) + u_2(t)\right)$$

IV. Überlagerung der Eingänge einsetzen

$$-k\left(\alpha_1\, y_1(t) + \alpha_2\, y_2(t)\right) + \alpha_1\, u_1(t) + \alpha_2\, u_2(t) = \alpha_1 \left(-k\, y_1(t) + u_1(t)\right) + \alpha_2 \left(-k\, y_2(t) + u_2(t)\right)$$

fertig! ⟶ Warum ist die Linearität so eine wichtige Eigenschaft?

Ausblendeigenschaft 1/2

Die Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses brauchen wir später - deswegen hier die Herleitung.

Es wird das Integral analysiert:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t$$

Wir ersetzen $\delta(t)$ durch einen Rechteckimpuls:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{T_0} & 0 \leq t < T_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} f(t)\frac{1}{T_0}\mathrm{d}t &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{F(T_0) - F(0)}{T0} \end{aligned}$$

Ausblendeigenschaft 2/2

Die Rechteckbreite T_0 wird reduziert $T_0 \to 0$:

$$\lim_{T_0 \to 0}\left(\frac{F(T_0) - F(0)}{T0}\right) = f(0) \qquad \text{es folgt:} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$$

Für verschobene Dirac-Impulse gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-\tau)\mathrm{d}t = f(\tau) \qquad \text{wechsel } t \text{ und } \tau \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(\tau - t)\mathrm{d}\tau = f(t)}$$

Das ist die Ausblendeigenschaft in der benötigten Form.

Übergang zur Faltung

Einführung Schreibweise nach: [1]

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\text{lin. Sys } \mathcal{S}} \longrightarrow y(t) \qquad \text{wird zu} \qquad y(t) = \mathcal{S}\{u(t)\}$$

Für den Spezialfall Gewichtsfunktion: $g(t) = \mathcal{S}\{\delta(t)\}$
Mit der Ausblendeigenschaft des Dirc-Impulses:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot \delta(t-\tau) \mathrm{d}\tau \quad \text{kann man schreiben:} \quad y(t) = \mathcal{S}\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot \delta(t-\tau) \mathrm{d}\tau \right\}$$

Im Integral hängt nur $\delta(t-\tau)$ von t ab; die Werte $u(\tau)$ sind bezüglich t nur Gewichtsfaktoren. Wegen der Linearität des Systems gilt daher

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot \mathcal{S}\{\delta(t-\tau)\} \mathrm{d}\tau \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot g(t-\tau) \mathrm{d}\tau}$$

Übergang zur Faltung

Wenn für den Eingang für $t < 0$ das gilt: $u(t) = 0$, halbiert sich der Integrationsaufwand:

$$y(t) = \int_{0}^{+\infty} u(\tau) \cdot g(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

Noch einfacher wird es, wenn für $t < 0$ die Gewichtfunktion null ist: $g(t) = 0$. In diesem Fall spricht man von kausalen Systemen (Kausalität) und die Faltung reduziert sich auf:

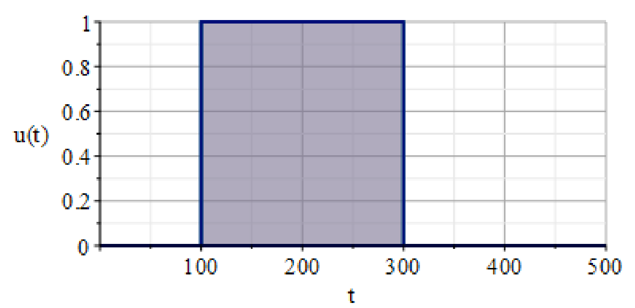
$$\boxed{y(t) = \int_{0}^{t} u(\tau) \cdot g(t-\tau) \mathrm{d}\tau}$$

Beispiel für die Überlagerung

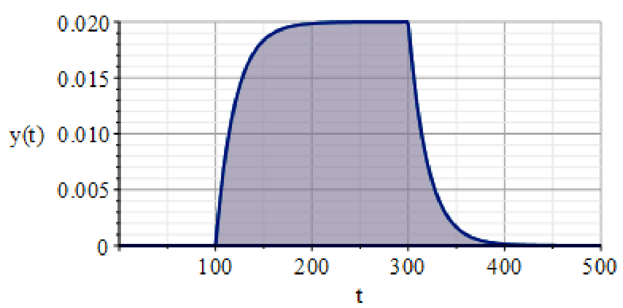
Rechteck am Fahrzeugmodell:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & 100 \leq t < 300 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eingang



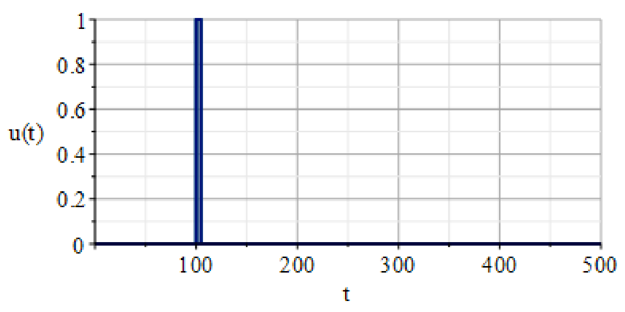
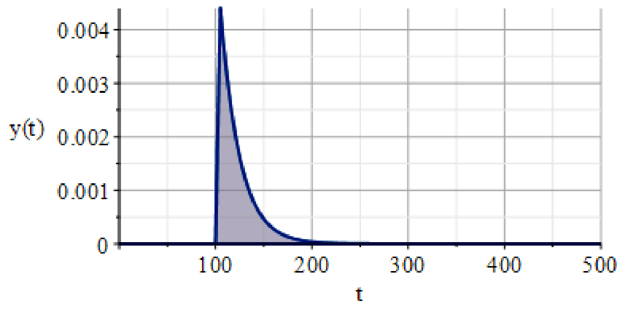
Ausgang



$$y(t) = \frac{\theta(t-100)}{50}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{t-100}{20}}\right) - \frac{\theta(t-300)}{50}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{t-300}{20}}\right)$$

Beispiel für die Überlagerung

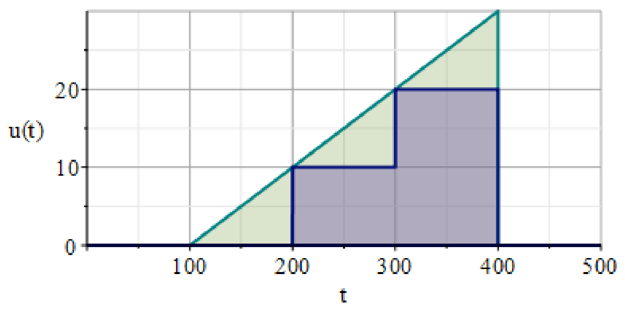
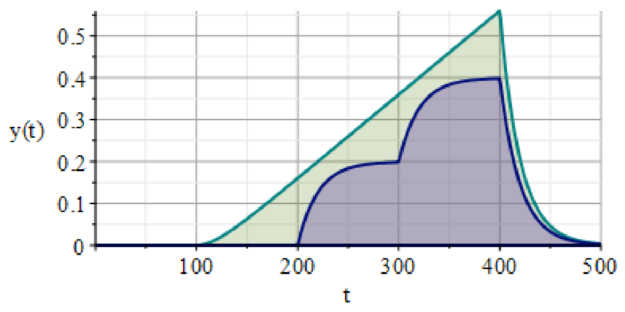
Schmaler rechteckförmiger Impuls

Eingang	Ausgang
	

$$y(t) = \frac{\theta(t-100)}{50}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{t-100}{20}}\right) - \frac{\theta(t-105)}{50}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{t-105}{20}}\right)$$

Beispiel für die Überlagerung

Approximationen 1/

Eingang	Ausgang
	

$$\begin{aligned} y(t) =& \frac{\theta(t-200)}{5}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{t-200}{20}}\right) - \frac{\theta(t-300)}{5}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{t-300}{20}}\right) \\ &+ \frac{\theta(t-300)}{2.5}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{t-300}{20}}\right) - \frac{\theta(t-400)}{2.5}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{t-400}{20}}\right) \end{aligned}$$

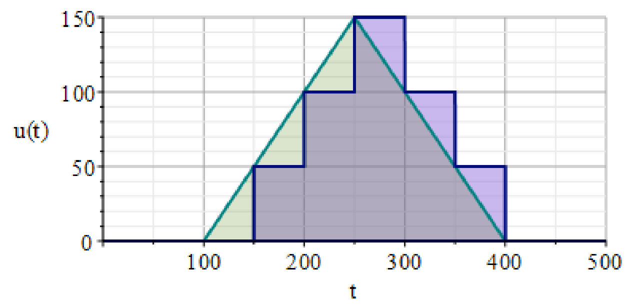
zusammengefasst:

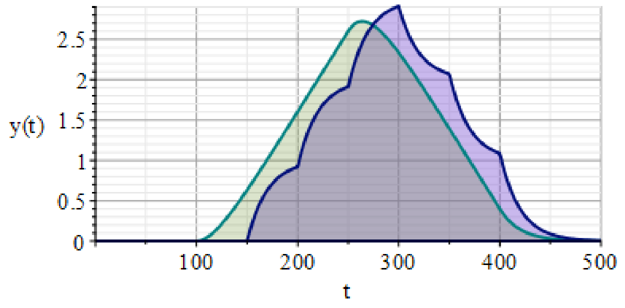
$$y(t) = \frac{\theta(t-200)}{5}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{t-200}{20}}\right) + \frac{\theta(t-300)}{5}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{t-300}{20}}\right) - \frac{\theta(t-400)}{2.5}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{t-400}{20}}\right)$$

Beispiel für die Überlagerung

Approximationen 2/

Eingang	Ausgang

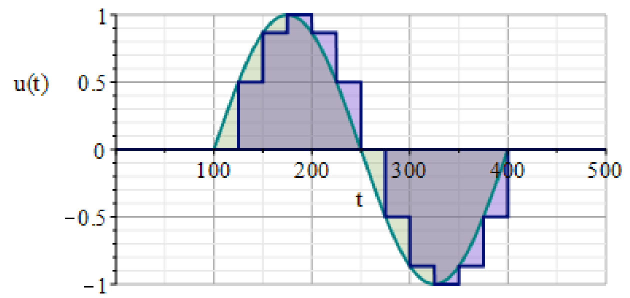
<table>
<tr><th>Eingang</th><th>Ausgang</th></tr>
<tr><td>


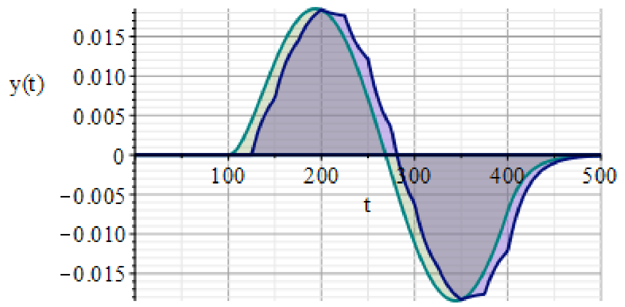
</td><td>


</td></tr>
</table>

Beispiel für die Überlagerung

Approximationen 3/

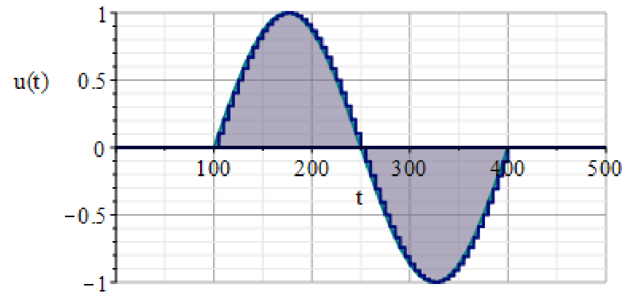
<table>
<tr><th>Eingang</th><th>Ausgang</th></tr>
<tr><td>


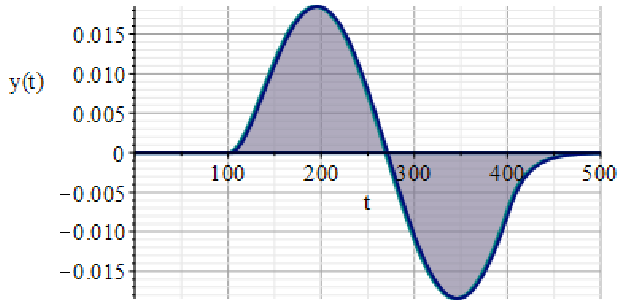
</td><td>


</td></tr>
</table>

Beispiel für die Überlagerung

Approximationen 4/

<table>
<tr><th>Eingang</th><th>Ausgang</th></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>

Hinweise

- Die Impulsantwort g(t) charakterisiert ein lineares zeitinvariantes System vollständig.
- Bei linearen Systemen ist die Impulsantwort g(t) die zeitliche Ableitung der Sprungantwort h(t).

1. Girod, Bernd: "Einführung in die Systemtheorie: Signale und Systeme in der Elektrotechnik und Informationstechnik"; 2003; DOI: 10.1007/978-3-322-99346-5; ISBN: 978-3-322-99346-5↩