Der Bildbereich

(Z-Transformation)

Motivation

Was
Ein Signal im diskreten Zeitbereich (Wertefolge) $f(k) = f_k$ wird vom reellen Zeitbereich in eine Z-Transformierte $F(z)$ im komplexen Spektralbereich (Frequenzbereich, Bildbereich) überführt.

Warum
Im Bildbereich sind bestimmte Berechnungen einfacher - Faltung wird zu Multiplikation - das gilt auch für Wertefolgen im diskreten Zeitbereich!!!1!!!!elf

---

Vorwärtstransformation

Sei $f_k \in \mathbb{C}$ eine Wertefolge mit $k \leq 0$. Die unilaterale z-Transformation ist durch

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k}$$

definiert.

- Die Summe $F(z)$ wird Z-Transformierte der Wertefolge f_k genannt.

Beispiel 1

Die Wertefolge

k	-1	0	1	2	3	...
f_k	0	1	0	0	0	0

soll transformiert werden. Hier noch mal die Transformationsglichung:

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k}$$

Ergebnis:

$$F(z) = 1 \cdot z^0 + 0 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + 0 \cdot z^{-3} + .. = 1$$

Beispiel 2

Die Wertefolge

k	-1	0	1	2	3	...
f_k	0	0	1	0	0	0

soll transformiert werden. Hier noch mal die Transformationsglichung:

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k}$$

Ergebnis:

$$F(z) = 0 \cdot z^0 + 1 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + 0 \cdot z^{-3} + .. = \frac{1}{z}$$

Beispiel 3

Die Wertefolge

k	-1	0	1	2	3	...
f_k	0	1	1	1	1	1

soll transformiert werden. Hier noch mal die Transformationsglichung:

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k}$$

Ergebnis:

$$F(z) = 1 \cdot z^{-0} + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3} + .. = \frac{z}{z-1} \qquad \text{Grenzwert dieser Reihe für } |z| > 1$$

Maple:

```
sum(z^(-k),k=0..infinity) assuming abs(z)>=1;
```

Beispiel 4

Die Wertefolge

k	-1	0	1	2	3	...
f_k	0	0	1	1	1	1

soll transformiert werden. Hier noch mal die Transformationsglichung:

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k}$$

Ergebnis:

$$F(z) = 0 \cdot z^{-0} + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3} + .. = \frac{1}{z-1} \qquad \text{Grenzwert dieser Reihe für } |z| > 1$$

Maple:

```
sum(z^(-k),k=1..infinity) assuming abs(z)>=1;
```

Beispiel 5

Die Wertefolge

k	-1	0	1	2	3	4	...
f_k	0	1	0	1	0	1	...

soll transformiert werden. Hier noch mal die Transformationsglichung:

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k}$$

Ergebnis:

$$F(z) = 1 \cdot z^{-0} + 1 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-4} + 1 \cdot z^{-6} + .. = \frac{z^2}{z^2-1} \qquad \text{Grenzwert dieser Reihe für } |z| > 1$$

Maple:

```
sum(z^(-2*k),k=0..infinity) assuming abs(z)>=1;
```

Rückwärtstransformation

Die *inverse z-Transformation* kann mit

$$f_k = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) z^{k-1} dz$$

berechnet werden, wobei *C* eine beliebige geschlossene Kurve um den Ursprung ist, die im Konvergenzbereich von $F(z)$ liegt.

Notationen

- Festlegung: Signale und Syteme im
  - Originalbereich bekommen Kleinbuchstaben $y(k)$, $u(k)$, $g(k)$
  - Bildbereich bekommen Großbuchstaben $Y(z)$, $U(z)$, $G(z)$
- Verbreitet sind diese Notationen für die Transformationen:

$$f(k) = f_k \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(z)$$
$$F(z) \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; f_k$$

BTW: Selbe Notation wird auch für die Laplace-Transformation verwendet:

- $Y(s)$, $U(s)$, $G(s)$
- $f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s), \qquad F(s) \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t)$

BTW: Selbe Notation wird auch für die Fourier-Transformation verwendet:

- $Y(j\omega)$, $U(j\omega)$, $G(j\omega)$
- $f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(j\omega), \qquad F(j\omega) \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t)$

Allgemeine Eigenschaften bzw. Operationen

Es sei $f_k = f(k)$ und $F(z)$ deren z-Transformierte.

	Originalfunktion $f_k = \mathcal{F}^{-1}\{F(z)\}$	**Bildfunktion** $F(z) = \mathcal{Z}\{f_k\}$
Linearität	$a_1 f_{k,1} + a_2 f_{k,2}$	$a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z)$
Verschiebung rechts	f_{k-n}	$z^{-n} F(z)$
Verschiebung links	f_{k+1}	$z^1 (F(z) - f_0)$
Verschiebung links	f_{k+2}	$z^2 (F(z) - f_0 - f_1 z^{-1})$
Verschiebung links	f_{k+n}	$z^n (F(z) - \sum_{i=0}^{n-1} f_i z^{-i})$

Allgemeine Eigenschaften bzw. Operationen

Es sei $f_k = f(k)$ und $F(z)$ deren z-Transformierte.

	Originalfunktion $f_k = \mathcal{F}^{-1}\{F(z)\}$	**Bildfunktion** $F(z) = \mathcal{Z}\{f_k\}$
Rückwärtsdifferenz	$f_k - f_{k-1}$	$\frac{z-1}{z} F(z)$
Vorwärtsdifferenz	$f_{k+1} - f_k$	$zF(z) - zf_0 - F(z) = (z-1)F(z) - zf_0$
Summensatz	$\sum_{n=0}^{k} f_n$	$\frac{z}{z-1} F(z)$

Beispiel

Gesucht ist die Z-Transformierte des Systems:

$$y_{(k)} = \frac{7\,u_{(k)}}{17} - \frac{5\,u_{(k-1)}}{17} - \frac{10\,y_{(k-2)}}{17} + \frac{25\,y_{(k-1)}}{17}$$

1. Variablen separieren
   $y_{(k)} - \frac{25}{17}\,y_{(k-1)} + \frac{10}{17}\,y_{(k-2)} = \frac{7}{17}\,u_{(k)} - \frac{5}{17}\,u_{(k-1)}$
2. Transformation durch Verschiebung
   $Y(z) - \frac{25}{17}\,z^{-1}Y(z) + \frac{10}{17}\,z^{-2}Y(z) = \frac{7}{17}\,U(z) - \frac{5}{17}\,z^{-1}U(z)$
3. Ausklammern
   $Y(z)\left(1 - \frac{25}{17}\,z^{-1} + \frac{10}{17}\,z^{-2}\right) = \left(\frac{7}{17} - \frac{5}{17}\,z^{-1}\right)U(z)$
4. Quotienten bilden
   $$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\frac{7}{17} - \frac{5}{17}\,z^{-1}}{1 - \frac{25}{17}\,z^{-1} + \frac{10}{17}\,z^{-2}}$$
5. Erweitern mit z^2
   $$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\frac{7}{17}\,z^{2} - \frac{5}{17}\,z^{1}}{z^{2} - \frac{25}{17}\,z^{1} + \frac{10}{17}}$$