Ejercicios Guía Extraordinario
MCA 4
versión 4

Profs. Juan Carlos Balleza
Roberto Méndez Méndez

14 Oct 24

Instrucciones:

I) Lee con detalle lo que se pide para cada inciso

II) Ten tus programas a la mano, si es que tu decides usarlos, los pude descargar de: https://github.com/RobertoMendezM/Extraordinario_Corto_MCA4_25-1.git

III) **La solución que entregues debe tener todos los pasos desarrollados, si solo entregas la solución se considerará inválida la respuesta.**

Ejercicios

1. Sea la EDO
$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{|y|}$$
   a) Di cuales son sus soluciones de equilibrio
   b) Da condiciones iniciales $y(t_0) = y_0$ con $y_0 \neq 0$
   c) En este caso se cumples las condiciones del teorema de existencias y unicidad.
   d) Resuelve el problema de Cauchy de manera analítica
   e) Utiliza el código de Runger Kutta para apróximar la solución computacionalmente. Aquí me debes poner los valores que diste a los parámetros y el esbozo de curva integral obtenida.
   f) Da las soluciones teóricas. Debes poner todo con muhco detalle.
   g) Grafica el Campo Direccional. Hint: Usa el código en python disponible

2. Sea la EDO de 1er orden no linea (Logística)
$$\frac{dy}{dt} = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) \tag{1}$$

con condiciones iniciales (Problema de Cauchy o Problema de valores Iniciales [PVI])

$$y(t_0) = y_0 \tag{2}$$

$K, r > 0$

- K Capacidad de carga
- r Tasa de Crecimiento

Obtén:

a) Soluciones de equilibrio

b) Solución analítica al problema de Cauchy

c) Esboza las diferentes curvas integrales (curvas solución) que podemos obtener, según la condición inicial que se tenga.

3. Encuentra la solución general de las siguientes EDO de 1er orden, encontrando el factor integrante cuando sea necesario

    a) $xy' + 5y = 7x^2$

    b) $xdy + ydx = sin(x)dx$

    c) Resuelva por homogénea (homogénea polar)
    $(x + y)dy + (x - y)dx = 0$

    d) Resuelva por Exactas
    $y \sec^2 t + \sec t \tan t + (2y + \tan t)\dfrac{dy}{dt} = 0$

    e) $(3x^2 - y^2)dy + -2xydx = 0$

4. Encuentra la solución general de las siguientes EDO de 2do orden

    a) $h'' + 6h' + 13h = 0$

    b) $9w'' + 6w' + w = 0$

    c) $y'' - 2y + -3 = 0$

5. Encuentra la solución del PVI siguiente

$$\begin{aligned} y'' + 5y' + 4y &= 0 \\ y(2) &= 1 \\ y'(2) &= 1 \end{aligned}$$

6. Sea la EDO de 2do orden

$$y'' + 2y' + 3y = x\cos(x)$$

Obtén la solución por el método de variación de parámetros

- Obtén la solución general de la homogénea
- Obtén la solución de la particular

- Construye la solución general

7. Sea el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

Calculando $\delta = \det(A)$, $\tau = tr(A)$ y $\Delta(A) = \tau^2 - 4\delta$ (discriminante de A) determina en los sistemas siguientes, si el origen es: punto silla, nodo, foco o un centro. Describe su estabilidad en caso de ser foco o nodo.

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad c)\ A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad e)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad f)\ A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

8. En el entendido de que

$$\dot{x}_i = \frac{d}{dt}x_i(t) \qquad i \in \{1, 2, 3\}$$

Resuelve analíticamente los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y esboza su retrato fase

a) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = -x_3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + +x_2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_3 = 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 \end{cases}$

9. ***Métodos Numéricos**. Euler Explícito / Runge-Kutta (RK). NOTA: Muy preferentemente utiliza los códigos que se te dan.

   I) Modelo para interacción de organismos basado en *Nowak(2006)*, él cual utiliza el esquema de un juego llamado '*'dilema del prisionero*''.
   Asumiendo que cada organismo interactúa con otros $\boldsymbol{n}$ por unidad de tiempo y que la tasa de reproducción es proporcional al beneficio total de todas estas interacciones, entonces puede ser mostrado que la proporción $x(t)$ de organismos que cooperan obedecerá la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = knx(x-1)(2x+1) \tag{3}$$

   con $k > 0$ constante.

   ACTIVIDAD. Obtén una solución numérica de la EDO utilizando RK y otra mediante Euler Explicito ,

II) Si se resuelve la EDO

$$\frac{dy}{dt} = -cy \tag{4}$$

$$y(t_0) = y_0 \tag{5}$$

con las condiciones: $t_0 = 0$, $t_f = 1.5$, $y_0 = 1$, c = 15, h = 0.1

1) ¿La solución numérica sigue representando bien la solución analítica?
2) ¿ Que factor fundamental conduce a éste resultado?

III) Para el caso de la logística

$$f(t,y) = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right),$$
$$t_0 = t_0$$
$$y_0 = y(t_0)$$

qué solución obtienes si resuelves con

1) $t_0 = -5$, $t_f = 7$; $y_0 = 4$
2) $t_0 = -5$,, $t_f = 2$; $y_0 = -.0001$

¿Porque se dan estos resultados?

10. La ecuación de conducción de calor en dos dimensiones espaciales es

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t$$

Si se supone que $u(x,y) = X(x)Y(y)T(t)$, encuentre ecuaciones diferenciales ordinarias que sean satisfechas por X(x), Y(y) y T(t).

11. Usando el discriminate $B^2 - 4AC$ diga como se clasifican las siguientes EDP

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$	Ec.de Onda en una dimensión
$u_t - k u_{xx} = 0$	Ec.de Calor (difusión) en una dimensión
$u_{yy} + u_{xx} = 0$	Ec.de Laplace en dos dimensiones