Cálculo Numérico

Lista de Exercícios 2 - Total 52 pontos

Cada grupo entregar ao professor até o dia 5/09/17 no início da aula

Professores do DCC/UFPB

Nota: quando não declarado, considere 4 dígitos de precisão para os cálculos e arredondamento.

Questão 1 (4 points)

Implemente os métodos da bisseção, posição falsa, Newton-Raphson e secante usando o *software* de sua preferência. Inclua a saída de pelo menos três exemplos para cada método identificando claramente qual foi a equação e os dados que foram utilizados para cada exemplo.

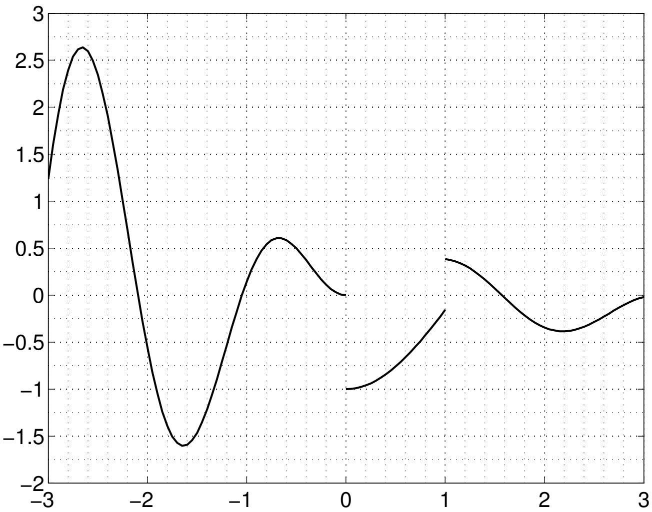
Sugestão: Use o Python, o Octave ou o MatLab.

Instruções: salvar os *scripts* como seguem: `SeuGrupo_listaN.m` , onde `N` é o número da lista; reunir os arquivos de *script* e funções em uma única pasta com o seu nome; enviar a pasta comprimida `SeuGrupo.zip` para `aparecido@ci.ufpb.br` até o dia 5/09/17 no início da aula com o texto `Lista N - SeuGrupo` como assunto.)

Questão 2 (3 points)

A seguir está plotado o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} x\,sen(3x), & \text{se } -3.0 \le x < 0.0 \\ x\,sen(x) - 1, & \text{se } 0.0 \le x < 1.0 \\ sen^2(x)cos(x), & \text{se } 1.0 \le x < 3.0 \end{cases}$$



Considerando o domínio da função, pergunta-se:

1. Podemos aplicar o Teorema do Valor Intermediário (TVI) a todo o domínio da função? Explique.
2. Arbitrando um limitante adequado para o erro absoluto, localize subintervalos para os quais uma raiz existe e poderia ser determinada com precisão por alguma técnica de refinamento.
3. Há um intervalo para o qual a derivada de $f(x)$ preserva o seu sinal. Podemos afirmar, então, pelo TVI, que existe uma raiz única neste intervalo?

Questão 3 (2 points)
Dadas as funções:

a) $x^3 + 3x - 1 = 0$,

b) $x^2 - sen(x) = 0$,

plote seus gráficos, pesquise a existência de raízes reais e isole-as em intervalos.

Questão 4 (1 point)
Justifique que a função:

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi(x+1)}{8}\right) + 0.148x - 0.9062$$

possui uma raiz no intervalo $(-1,0)$ e outra no intervalo $(0,1)$.

Questão 5 (4 points)
Use o método da bisseção e uma calculadora para obter aproximações das raizes da equação $f(x) = 0$ usando como critério de parada o Erro Absoluto em x e a tolerância $TOL = 10^{-2}$. Indique claramente qual o intervalo de pesquisa que foi utilizado em cada caso e como foi determinado. Inclua nas respostas os valores de todas as aproximações e os cálculos dos erros.

Se fosse exigido uma tolerância de $TOL = 10^{-5}$, qual seria o número mínimo de iterações necessárias?

(a) $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$.

(b) $x + \log(x) = 0$.

(c) $3x - cos(x) = 0$.

(d) $x + 2cos(x) = 0$.

Questão 6 (4 points)
Use o método da posição falsa e uma calculadora para obter aproximações das raizes da equação $f(x) = 0$ usando como critério de parada o Erro Absoluto em x e a tolerância $TOL = 10^{-3}$. Indique claramente qual o intervalo de pesquisa que foi utilizado em cada caso e como foi determinado. Inclua nas respostas os valores de todas as aproximações e os cálculos dos erros.

(a) $x^2 - 10\ln(x) - 5 = 0$.

(b) $x^3 - e^{2x} + 3 = 0$.

(c) $2x^3 + x^2 - 2 = 0$.

(d) $sen(x) - ln(x) = 0$.

Questão 7 (1 point)
A equação $x + ln(x) = 0$ possui uma raíz ξ no intervalo $I = [0.2, 2]$.

Se o objetivo for obter uma aproximação x_k para esta raíz de tal forma que $|x_k - \xi| < 10^{-5}$, é aconselhável usar o método da posição falsa tomando I com intervalo inicial? Justifique gráfica e analiticamente sem efetuar iterações numéricas.

Cite outros métodos nos quais este objetivo possa ser atingido.

Questão 8 (1 point)
Ao se aplicar o método do ponto fixo (MPF) na forma $x = \varphi(x)$ à resolução de uma equaçao $f(x) = 0$ obtivemos os seguintes resultados nas iterações indicadas:

$$\begin{array}{ll} x_{10} = 1.50000 & x_{14} = 2.14128 \\ x_{11} = 2.24702 & x_{15} = 2.14151 \\ x_{12} = 2.14120 & x_{16} = 2.14133 \\ x_{13} = 2.14159 & x_{17} = 2.14147 \end{array}$$

Escreva o que puder a respeito da raíz procurada.

Questão 9 (1 point)
Verifique analiticamente que num MPF na forma $x = \varphi(x)$, se $\varphi'(x) < 0$ num intervalo I centrado numa raíz ξ da equação $f(x) = 0$ (ou $x = \varphi(x)$), então, dado $x_0 \in I$, a sequência $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ é oscilante em torno de ξ.

Questão 10 (3 points)
Considere a equação $x^2 - x - 2 = 0$, cujas raízes são $\xi_1 = -1.0$ e $\xi_2 = 2.0$.

(a) Determine as seguintes funções de iteração para implementação de um método de ponto fixo (MPF):

  (i) $\varphi_1(x) = x^2 - 2$.

  (ii) $\varphi_2(x) = \sqrt{2 + x}$.

  (iii) $\varphi_3(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$.

  (iii) $\varphi_4(x) = \dfrac{2}{x - 1}$.

(b) Use uma calculadora e teste o MPF para cada uma das funções de iteração do item a) para aproximar a raíz $\xi_1 = -1$ da equação considerando a aproximação inicial $x_0 = -0.5$. Inclua nas respostas os valores de todas as iterações realizadas e responda em cada caso se há tendência de convergência para a raíz ξ_1.

(c) Use uma calculadora e teste o MPF para cada uma das funções de iteração do item a) para aproximar a raíz $\xi_2 = 2$ da equação considerando a aproximação inicial $x_0 = 2.5$. Inclua nas respostas os valores de todas as iterações realizadas e responda em cada caso se há tendência de convergência para a raíz ξ_2.

Questão 11 (5 points)
Considere a equação $2x^2 - 5x + 2 = 0$, cujas raízes são $\xi_1 = 0.5$ e $\xi_2 = 2.0$.

(a) Determine as seguintes funções de iteração para implementação de um método de ponto fixo (MPF):

   (i) $\varphi_1(x) = \frac{2x^2+2}{5}$.

   (ii) $\varphi_2(x) = \sqrt{\dfrac{5x}{2} - 1}$.

(b) Qual das duas funções de iteração você utilizaria num MPF para aproximar a raíz ξ_1? Por que?

(c) Use uma calculadora e verifique numericamente a sua resposta do item (b). Inclua os valores de todas as iterações realizadas.

(d) Repita os itens (b) e (c) para a raíz ξ_2.

Questão 12 (3 points)
Considere as seguintes funções de iteração: $\psi_1(x) = 2x - 1$, $\psi_2(x) = x^2 - 2x + 2$ e $\psi_3(x) = x^3 - 3x + 3$.

(a) Verifique que $\xi = 1$ é raíz das equações $x = \varphi(x)$, para cada função de iteração.

(b) Qual delas você escolheria para obter aproximar a raíz $\xi = 1$, utilizando um MPF?

(c) Com a sua escolha no item (b) use uma calculadora e exiba a sequência de iteradas considerando a aproximação inicial $x_0 = 1.2$.

Questão 13 (2 points)
Deseja-se obter a raíz positiva da equação: $bx^2 + x - a = 0$, em que $a > 0$ e $b > 0$, através de um MPF com a função de iteração $\varphi(x) = a - bx^2$. Quais condições devemos impor em a e b para que o MPF seja convergente? Por que?

Questão 14 (2 points)
A equação $x^2 - a = 0$, com $a > 0$, possui a raíz positiva $\xi = \sqrt{a}$. Considere a função de iteração $x = a/x$. Explique algébrica e geometricamente porque a sequência de iteradas $x_{k+1} = \dfrac{a}{x_k}$ não converge para $\sqrt{a}$ qualquer que seja o valor da aproximação inicial x_0. Use uma calculadora e ilustre iterações para algum valor de a. Ilustre numa mesma figura os gráficos de $y = x$, de $y = \varphi(x)$ e os pontos $(x_k, \varphi(x_k))$ para o valor de a escolhido.

Questão 15 (3 points)
Use o método de Newton-Raphson e uma calculadora para obter aproximações da **menor** raíz positiva das equações a seguir usando como critério de parada o Erro Absoluto em x e a tolerância $TOL = 10^{-3}$. Tome a aproximação inicial x_0 sendo um dos extremos do intervalo selecionado contendo tal raíz. Em cada ítem faça uma tabela e o gráfico de k pelo valor absoluto do Erro Absoluto EA_k e comprove a ordem de convergência quadrática.

(a) $x/2 - tg(x) = 0$.

(b) $2cos(x) = \dfrac{e^x}{2}$.

(c) $x^5 - 6 = 0$.

Questão 16 (1 point)

Use o método de Newton-Raphson e uma calculadora para tentar determinar uma raíz da equação $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$ tomando como aproximação inicial $x_0 = 1.9$. Justifique o que acontece. Exiba tabelas de valores, gráficos, etc..

Questão 17 (3 points)

Sabe-se que equação $e^x - 4x^2 = 0$ possui uma raíz ξ no intervalo $(0,1)$. Tomando a aproximação inicial $x_0 = 0.5$ determine uma aproximação desta raíz com tolerância $TOL = 10^{-3}$ usando uma calculadora e:

(a) o MPF com $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}e^{x/2}$;

(b) o método de Newton-Raphson.

Compare os resultados. Qual funcionou melhor? Por quê? Quantas iterações foram necessárias em cada caso? Exiba tabelas com a iterações.

Questão 18 (3 points)

Use o método da secante e uma calculadora para obter aproximações da **menor** raíz positiva das equações a seguir usando como critério de parada o Erro Absoluto em x e a tolerância $TOL = 10^{-3}$. Tome as duas aproximações iniciais x_0 e x_1 sendo os extremos do intervalo selecionado contendo tal raíz. Em cada ítem faça uma tabela e o gráfico de k pelo valor absoluto do Erro Absoluto EA_k e compare com os resultados obtidos via o método de Newton-Raphson em termos do número de iterações.

(a) $x/2 - tg(x) = 0$.

(b) $2cos(x) = \dfrac{e^x}{2}$.

(c) $x^5 - 6 = 0$.

Questão 19 (6 points)

O polinômio $p(x) = x^5 - \dfrac{10}{9}x^3 + \dfrac{5}{21}$ tem cinco raizes reais, todas no intervalo $(-1, 1)$.

(a) Verifique que as raizes estão assim distribuidas: $\xi_1 \in (-1, -0.75)$, $\xi_2 \in (-0.75, -0.25)$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 \in (0.3, 0.8)$ e $\xi_5 \in (0.8, 1)$.

(b) Determine aproximações das raizes considerando uma tolerância $TOL = 10^{-3}$, usando uma calculadora e o método indicado:

ξ_1, Newton-Raphson com aproximação inicial $x_0 = -0.8$;

ξ_2, bisseção considerando o intervalo $[-0.75, -0.25]$;

ξ_3, posição falsa considerando o intervalo $[-0.25, 0.25]$;

ξ_4, MPF considerando uma função de iteração adequada no intervalo $[0.2, 0.6]$ e com aproximação inicial $x_0 = 0.4$;

ξ_5, secante com aproximações iniciais $x_0 = 0.8$, $x_1 = 1$.