UNIVERSITÀ
DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Esame di:

“DINAMICA E CONTROLLO DEI SISTEMI MECCANICI”

MODELLAZIONE E CONTROLLO DI SISTEMI MECCANICI A PIU' GRADI DI LIBERTA'

Studenti:

Elisa Bertozzi 352195

Andrea Meni 353456

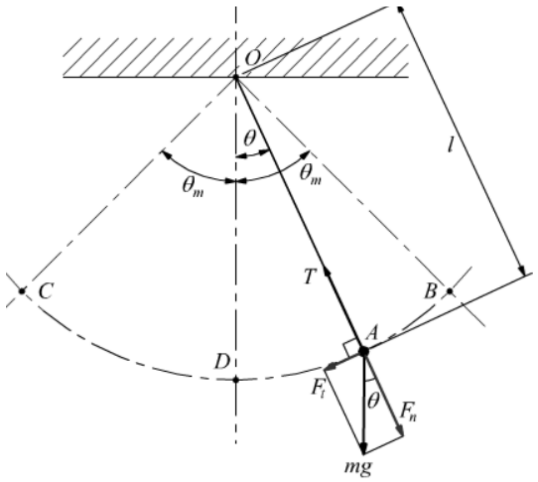
Gianluca Montomoli 353452

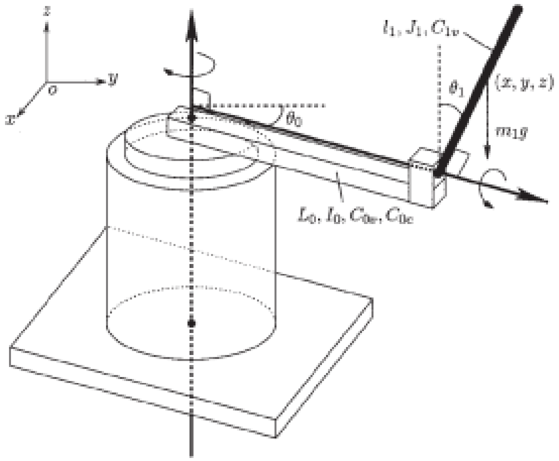
Roberto Ravaglia 356094

Anno Accademico 2023/24

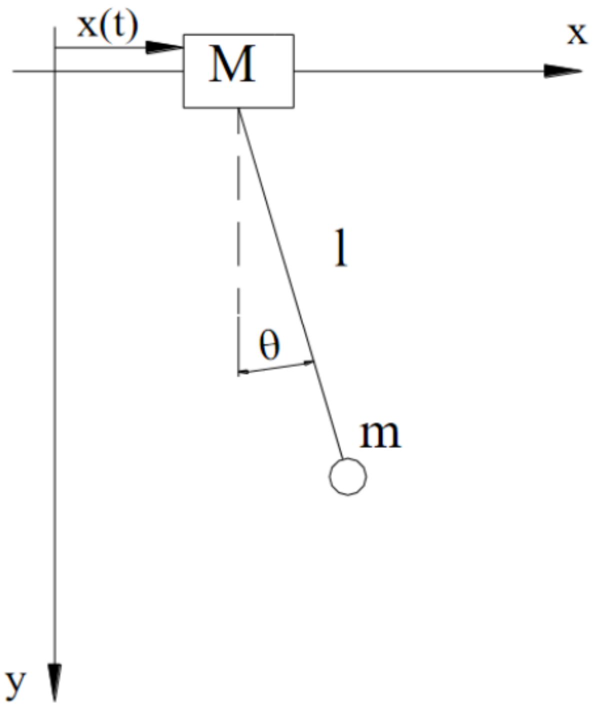
INTRODUZIONE

Obiettivo del seguente progetto è quello di studiare e controllare la dinamica di sistemi meccanici a più gradi di libertà, partendo dal pendolo semplice ed arrivando a sistemi meccanici complessi, quali pendolo di Furuta e doppio pendolo inverso.
Per raggiungere lo scopo, si utilizzano Matlab e Simulink (con implementazione blocchi Simscape)





PENDOLO SEMPLICE



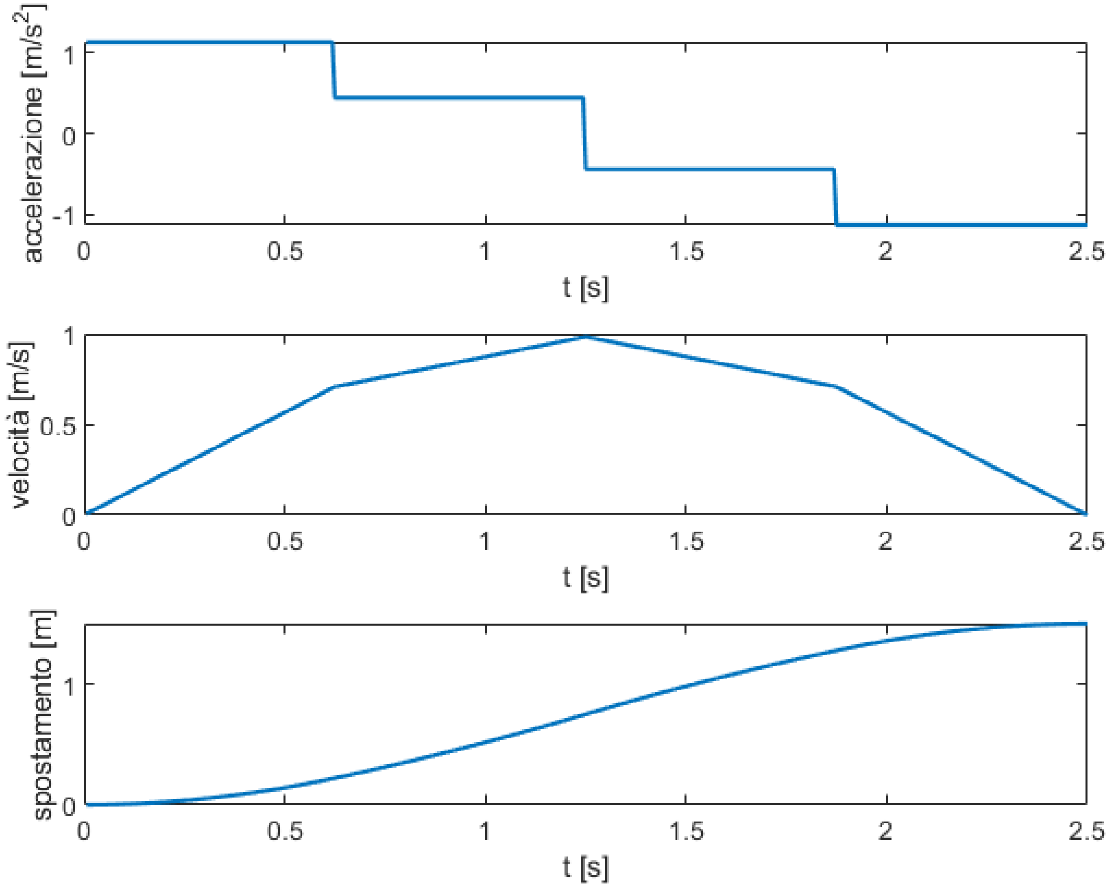
Massa	1 Kg
Lunghezza	0.7 m
Accelerazione di gravità	$9.81\,\frac{m}{s^2}$
Spostamento richiesto	1.5 m
Tempo di fine azionamento	2.5 s

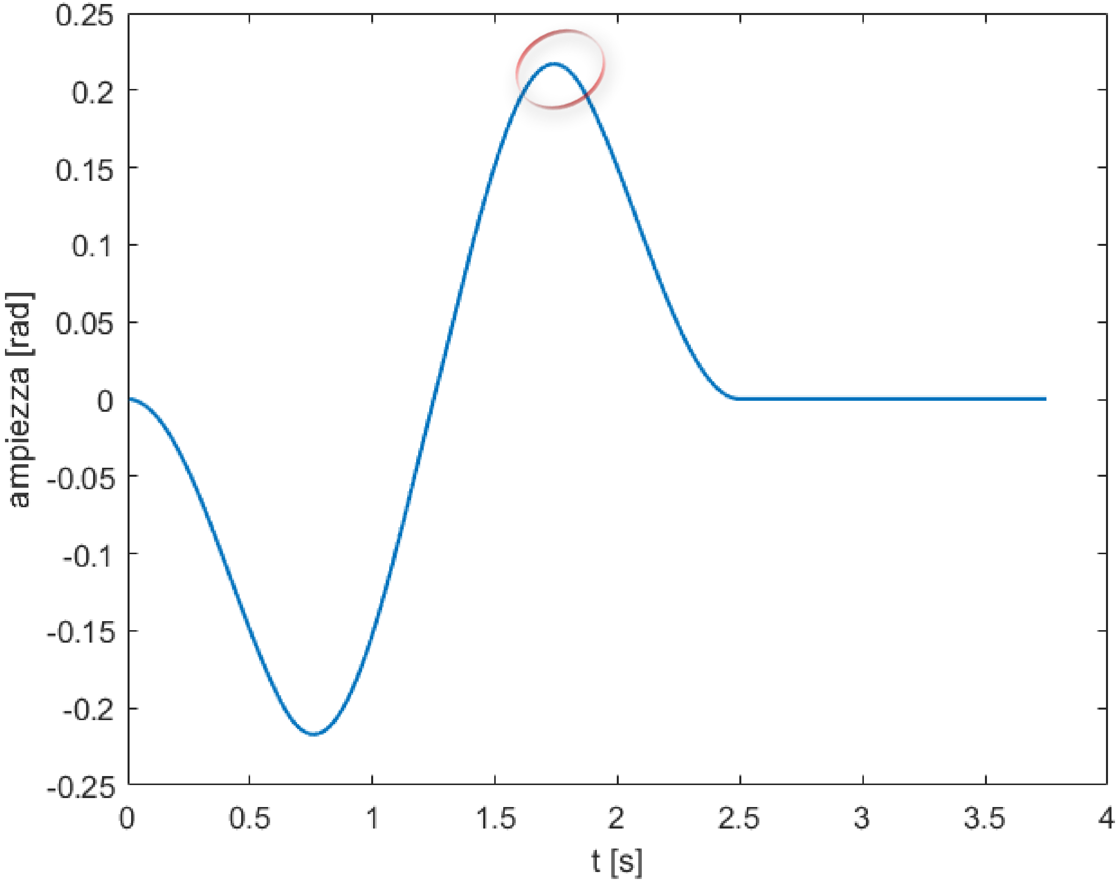
Modello Matematico: $ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = m\ddot{x}$

Energia del sistema: $E_{res} = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k\theta^2$

Il ciclo di calcolo incrementerà il numero di step «n» fino a soddisfare tutti i vincoli imposti.

ACCELERAZIONE – VELOCITÀ – SPOSTAMENTO

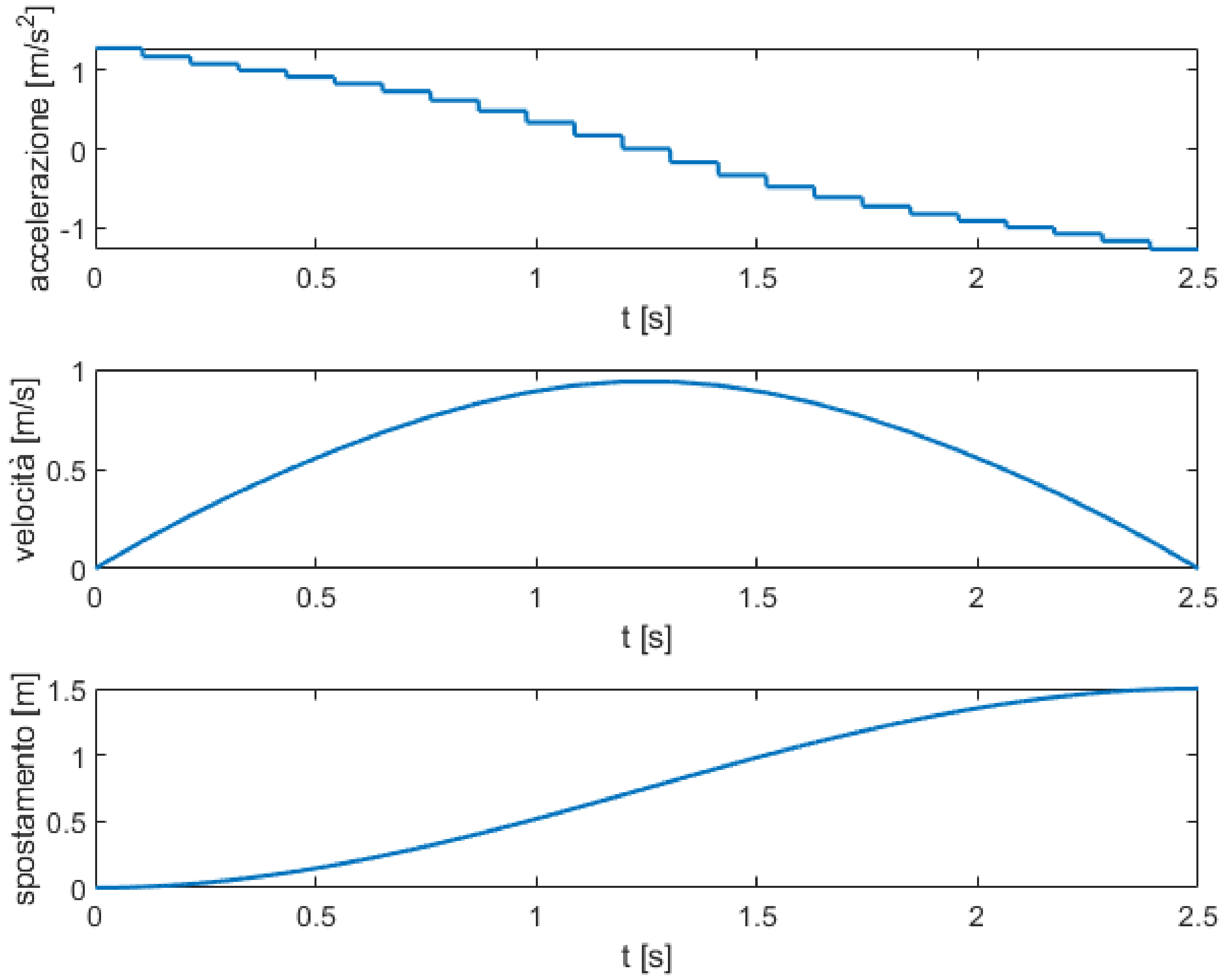




Legge di moto con energia residua minore di 10^{-4}

Valore assoluto della velocità finale minore di 10^{-6}

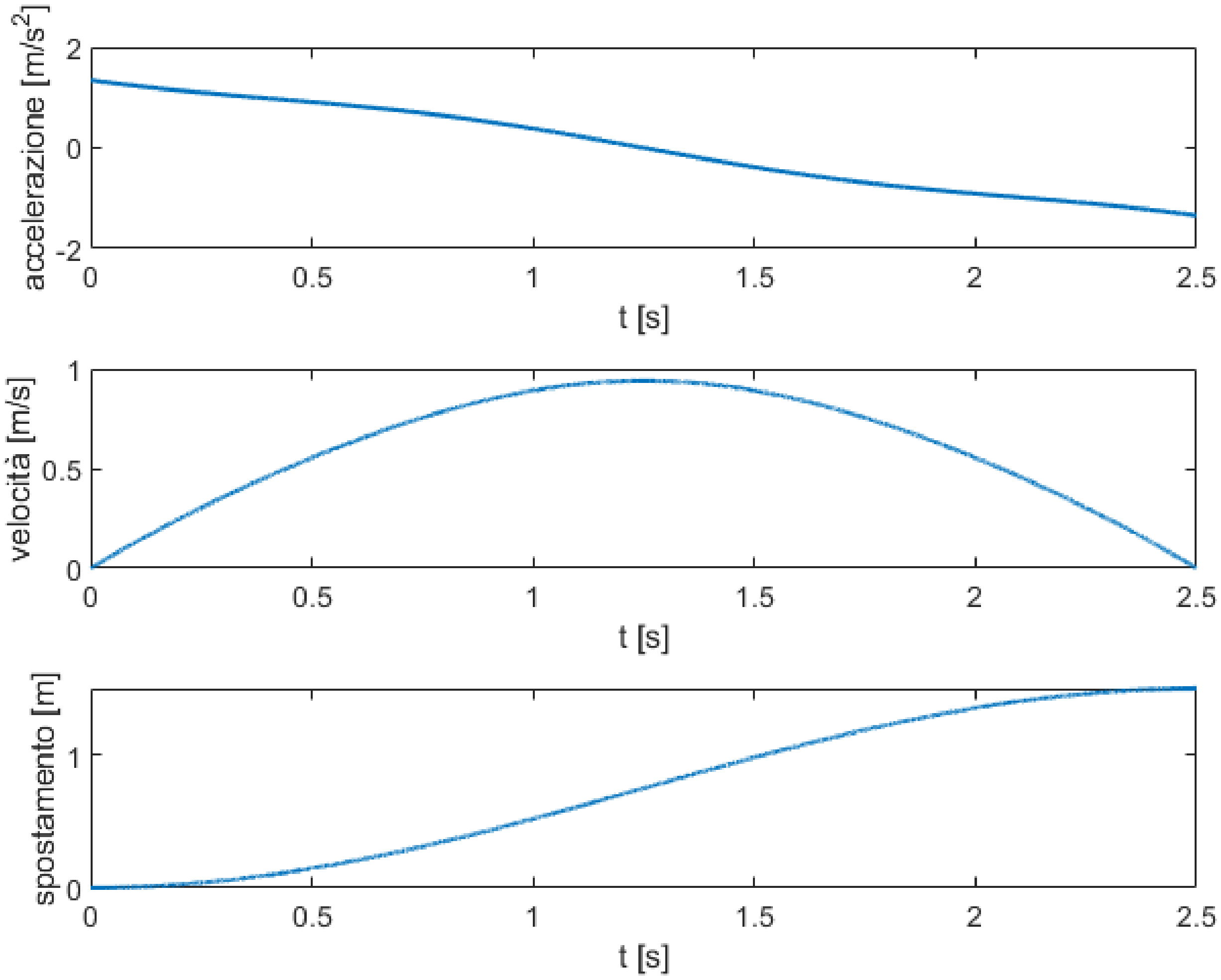
ACCELERAZIONE – VELOCITÀ – SPOSTAMENTO



Legge di moto con energia residua minore di 10^{-32}

Valore assoluto della velocità finale minore di 10^{-16}

ACCELERAZIONE – VELOCITÀ – SPOSTAMENTO

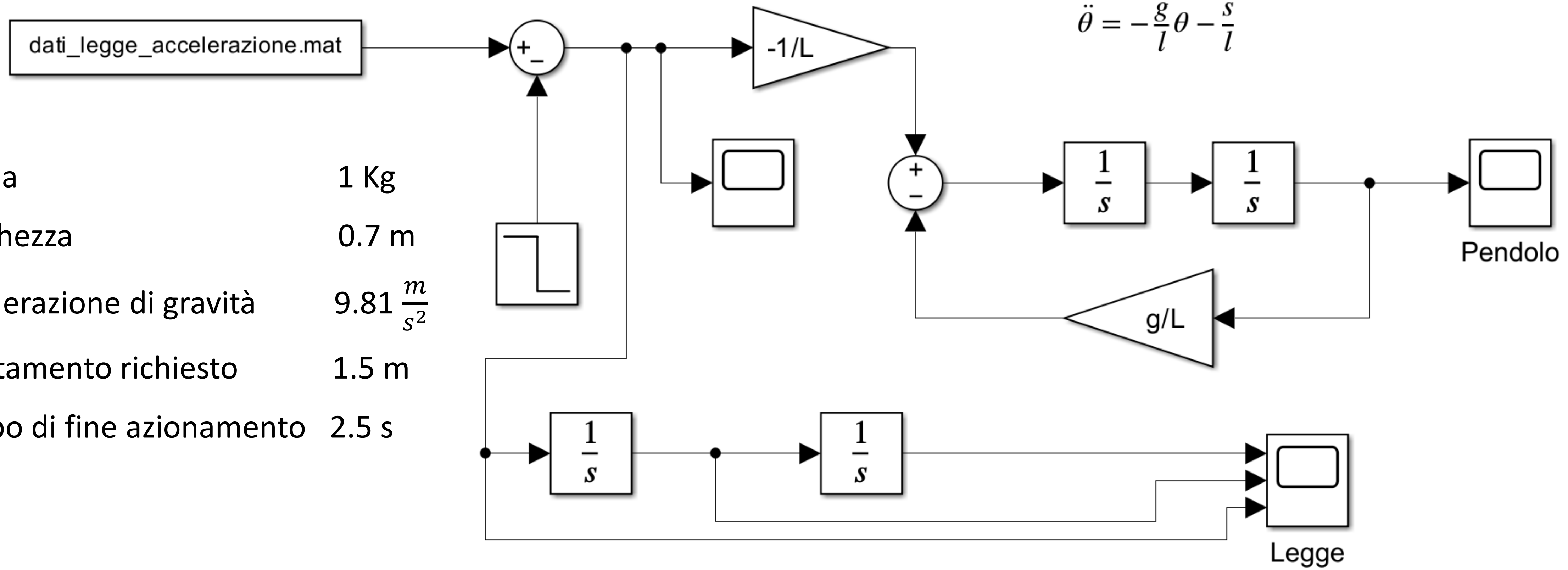


Legge di moto con energia residua minore di 10^{-32}

Valore assoluto della velocità finale minore di 10^{-6}

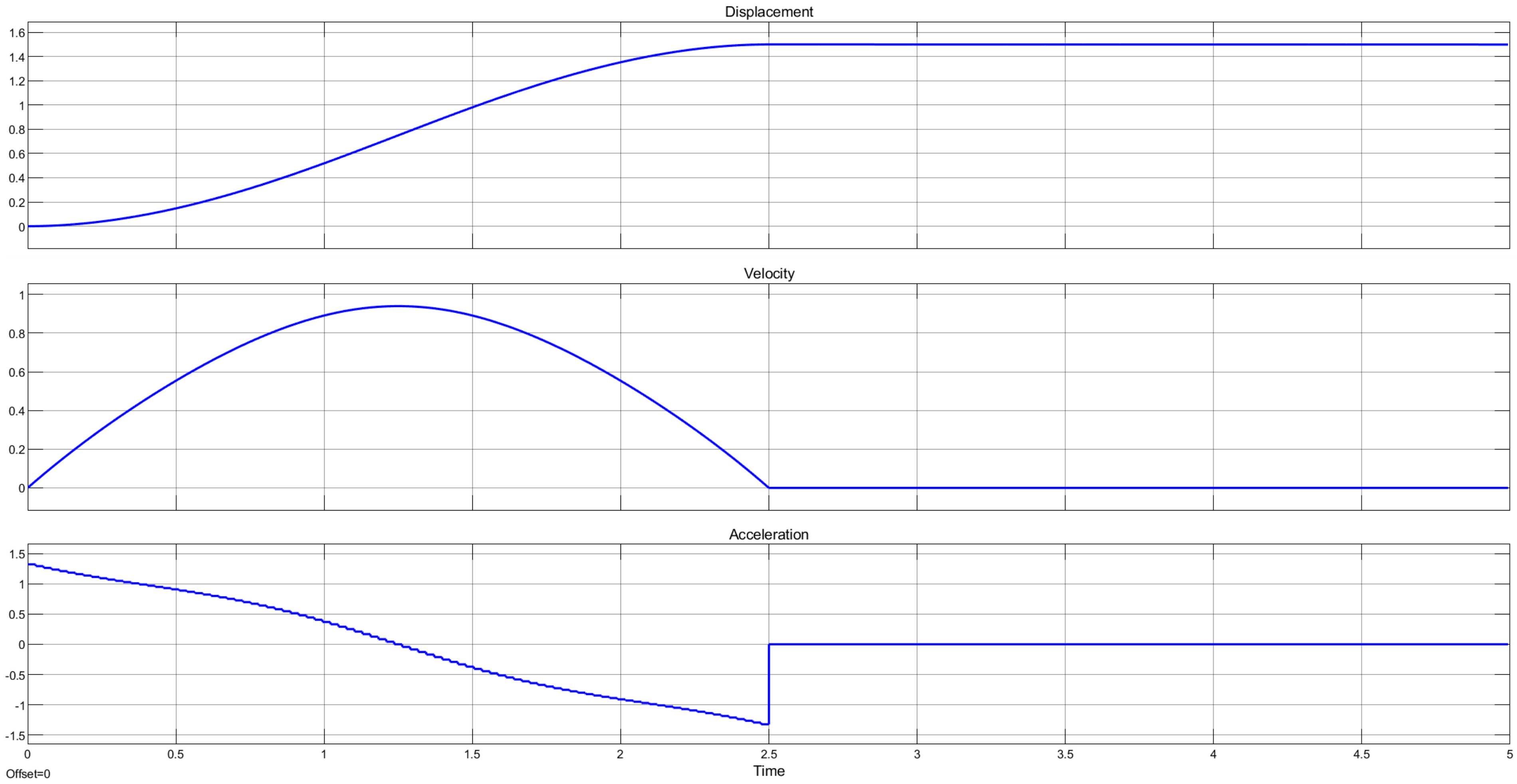
PENDOLO SEMPLICE: MODELLAZIONE TRAMITE SIMULINK

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta - \frac{\dot{s}}{l}$$

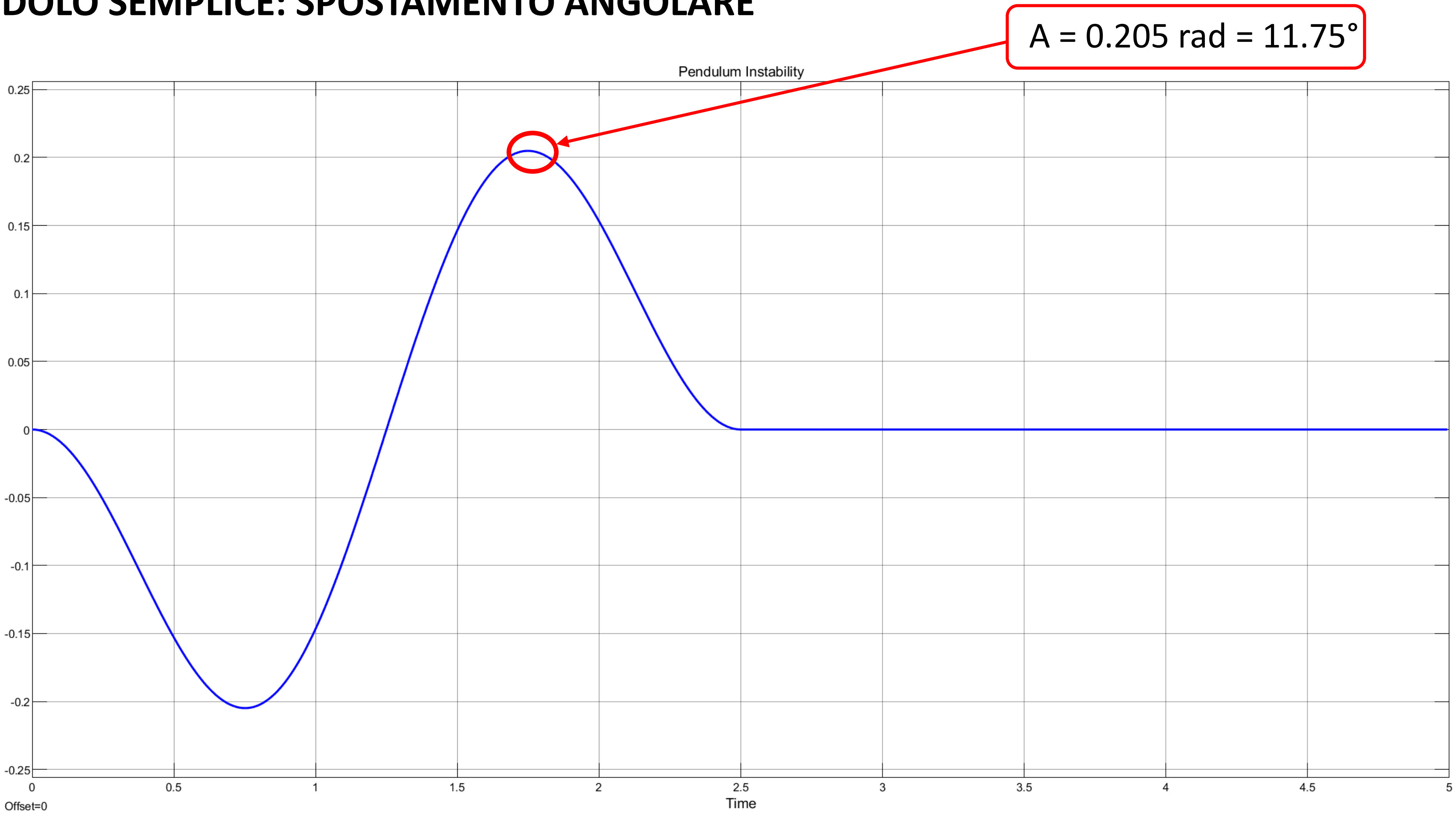


Massa	1 Kg
Lunghezza	0.7 m
Accelerazione di gravità	$9.81\ \frac{m}{s^2}$
Spostamento richiesto	1.5 m
Tempo di fine azionamento	2.5 s

PENDOLO SEMPLICE: LEGGE DEL MOTO



PENDOLO SEMPLICE: SPOSTAMENTO ANGOLARE



VARIAZIONE PARAMETRI SIGNIFICATIVI

Variazione Tempo di azionamento tf

Variando tf si valuta il comportamento dell'ampiezza delle oscillazioni del pendolo, con $E_{res} < 10^{-16}$.

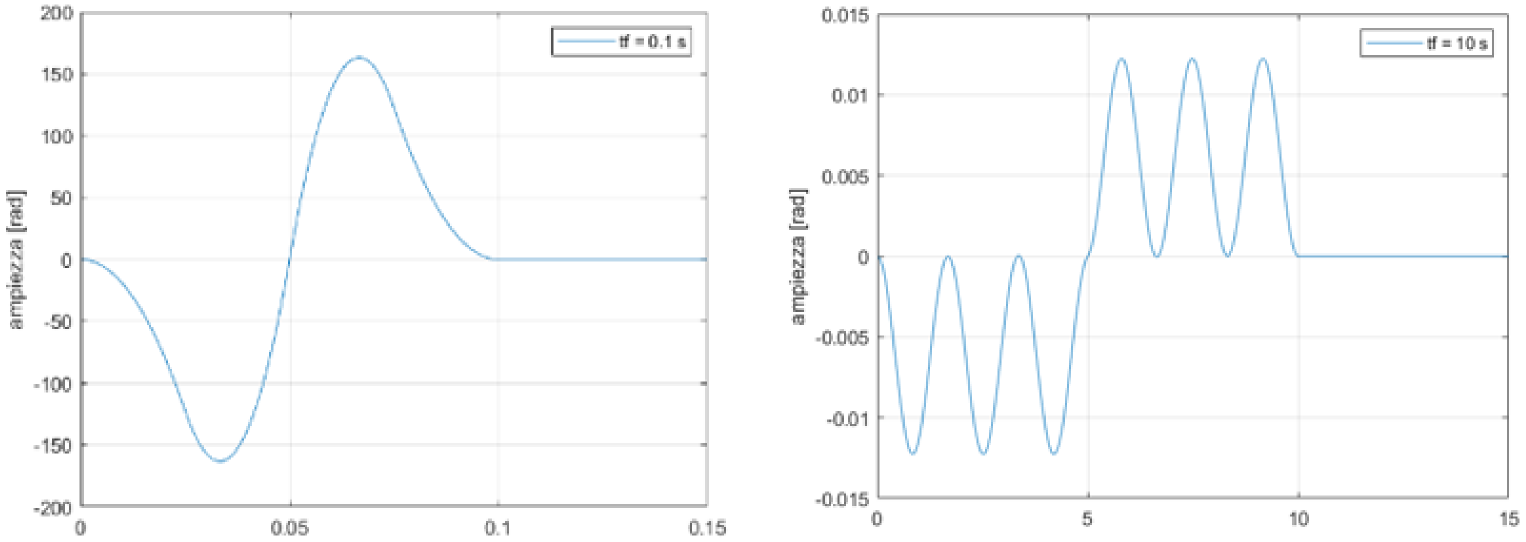


Figura 19 Confronto al variare del tempo di azionamento

VARIAZIONE PARAMETRI SIGNIFICATIVI

Variazione lunghezza del pendolo L

Variando L senza tener conto dell'energia residua si analizza la seguente funzione:

$$x(t) = \frac{FF}{K1}(1 - \cos(\omega_n t))$$

Con $FF = -\frac{1}{L}$ e $K1 = \frac{g}{L}$.

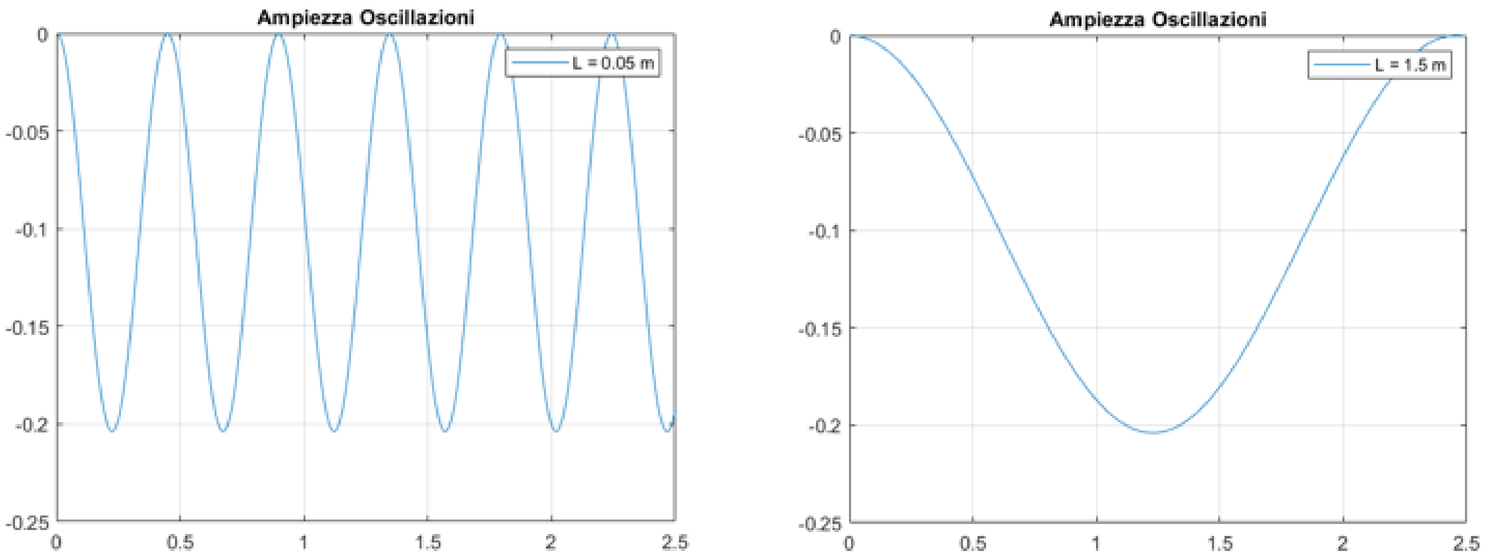
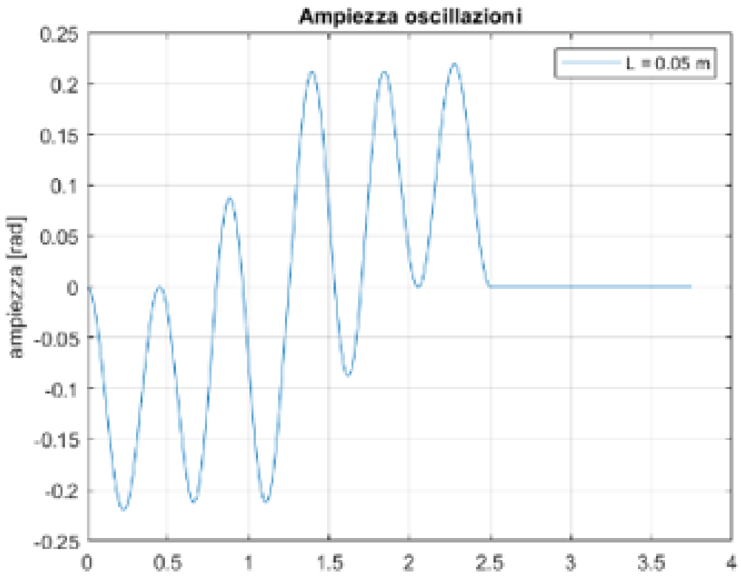


Figura 20 Confronto al varare della lunghezza del pendolo

VARIAZIONE PARAMETRI SIGNIFICATIVI

Variazione lunghezza del pendolo L

Implementando la limitazione sull'energia residua, il comportamento delle oscillazioni non varia come un coseno.



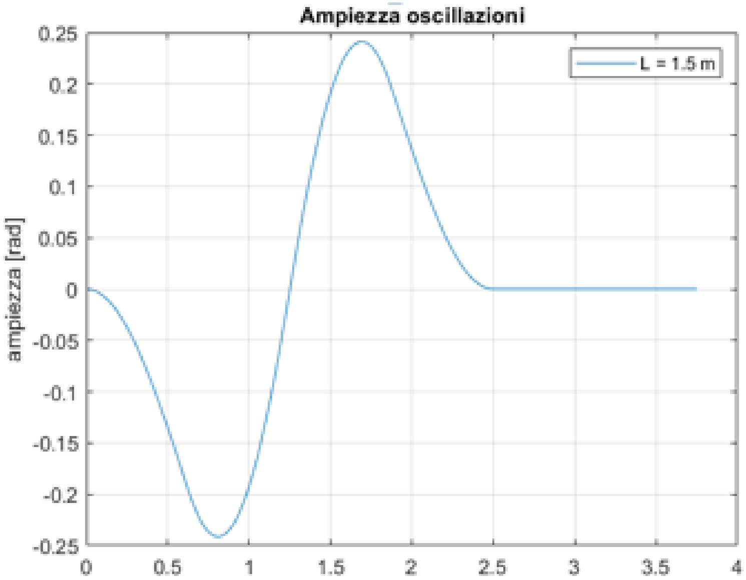


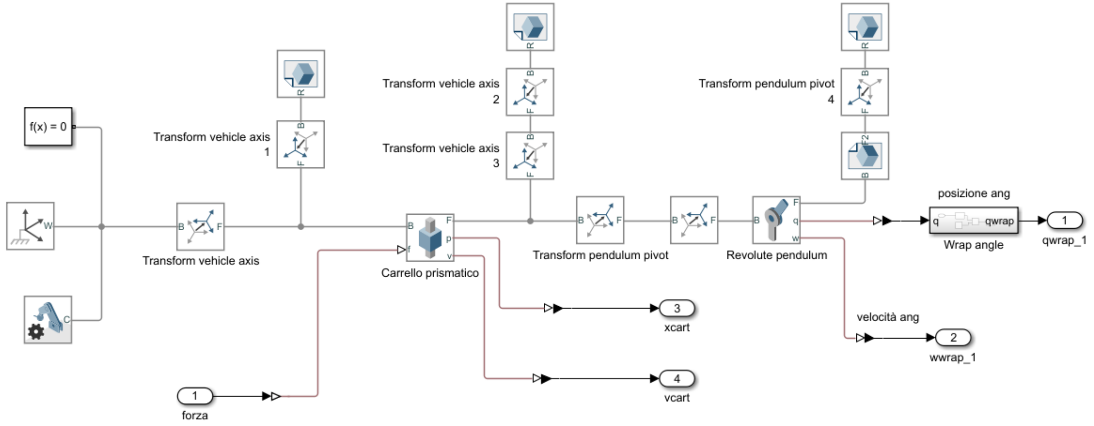
Figura 21 Confronto sulla lunghezza con implementazione del controllo sull'energia residua

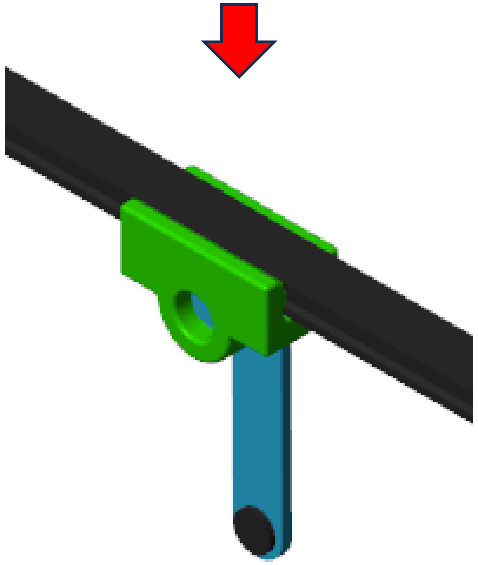
MODELLO SIMSCAPE DEL PENDOLO SEMPLICE

È un modello di simulazione avanzato → analisi multibody

Studio del pendolo semplice collegato a un carrello traslante avente massa definita.

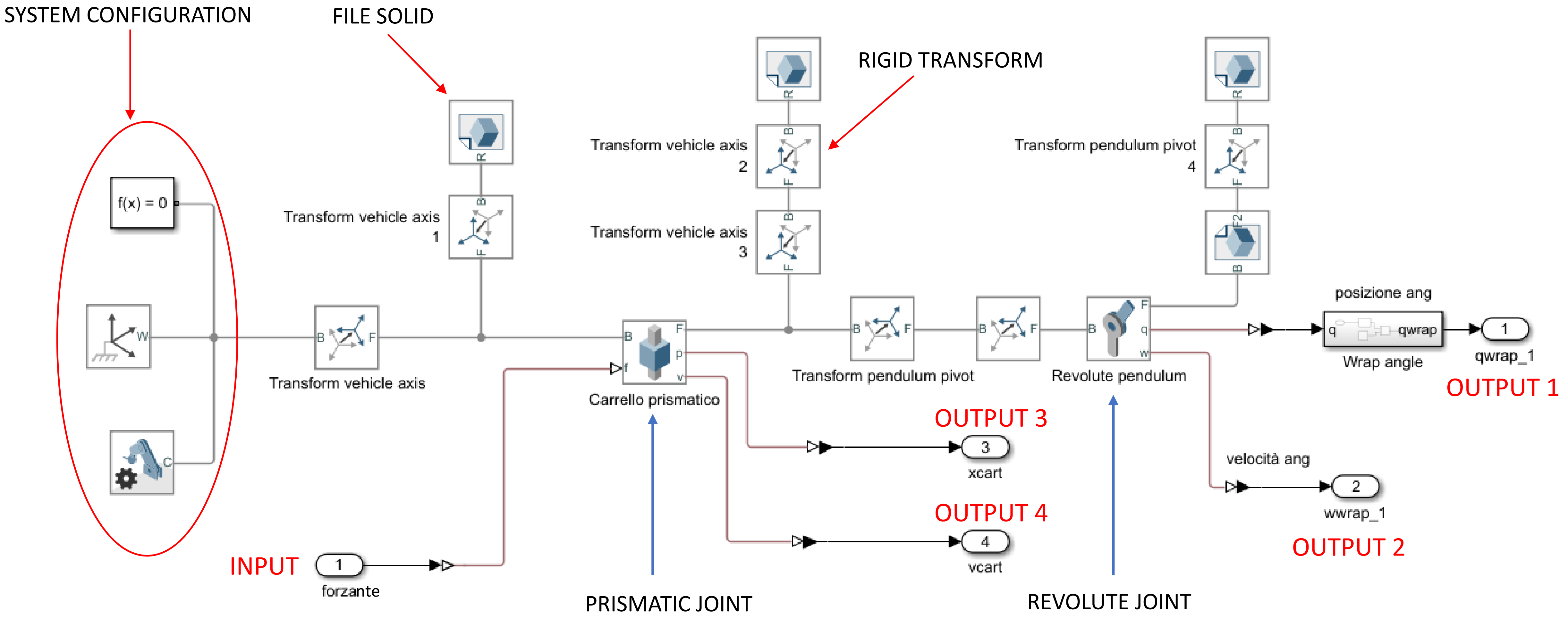
Questa rappresentazione visiva consentirà una comprensione più approfondita del sistema.





SCHEMA A BLOCCHI

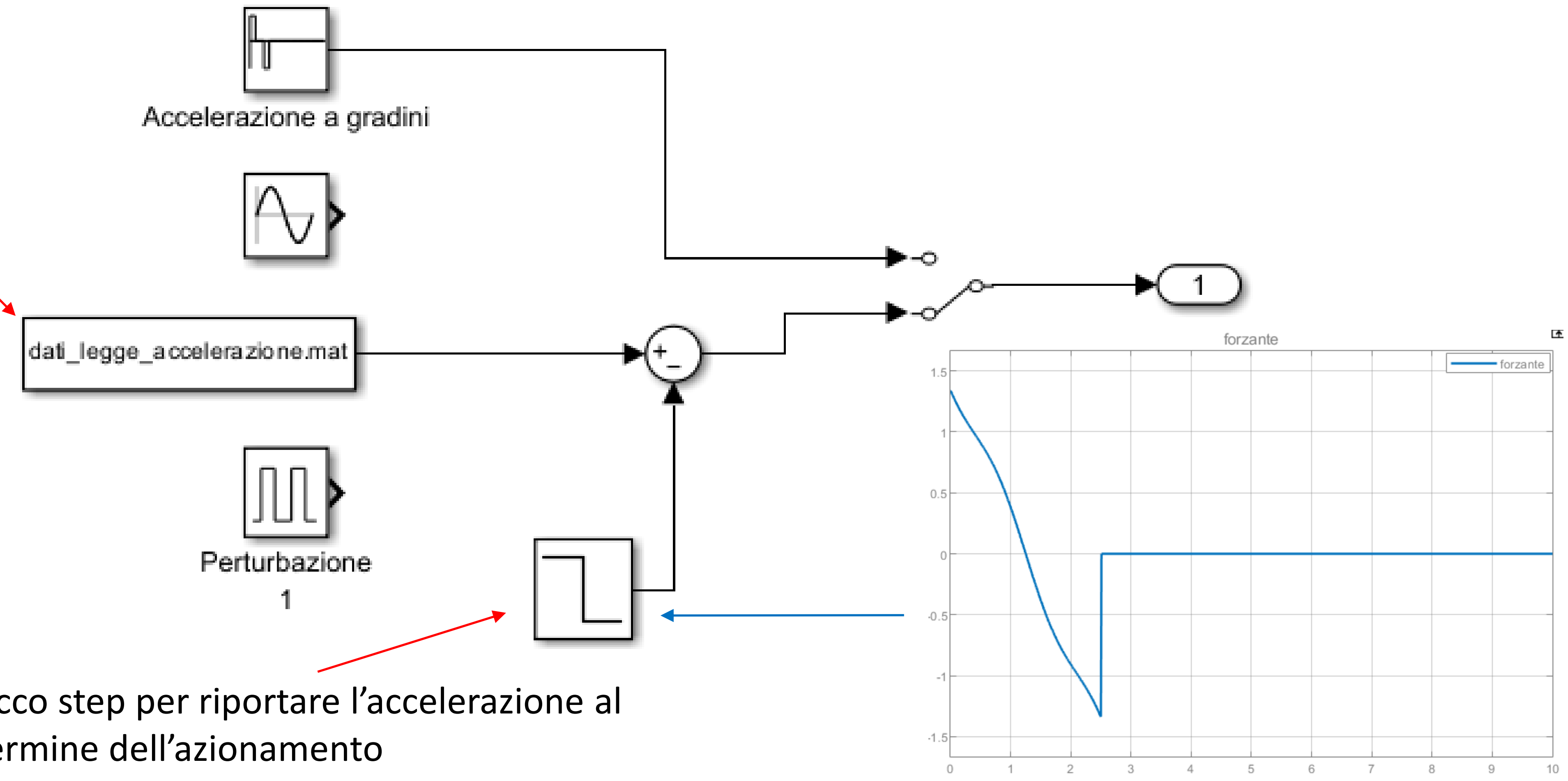
Subsystem Simscape



SCHEMA A BLOCCHI

Forzante input

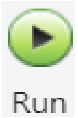
FILE MATLAB

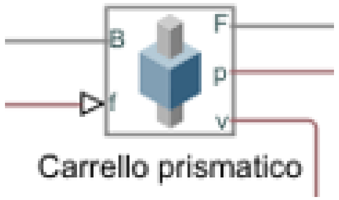


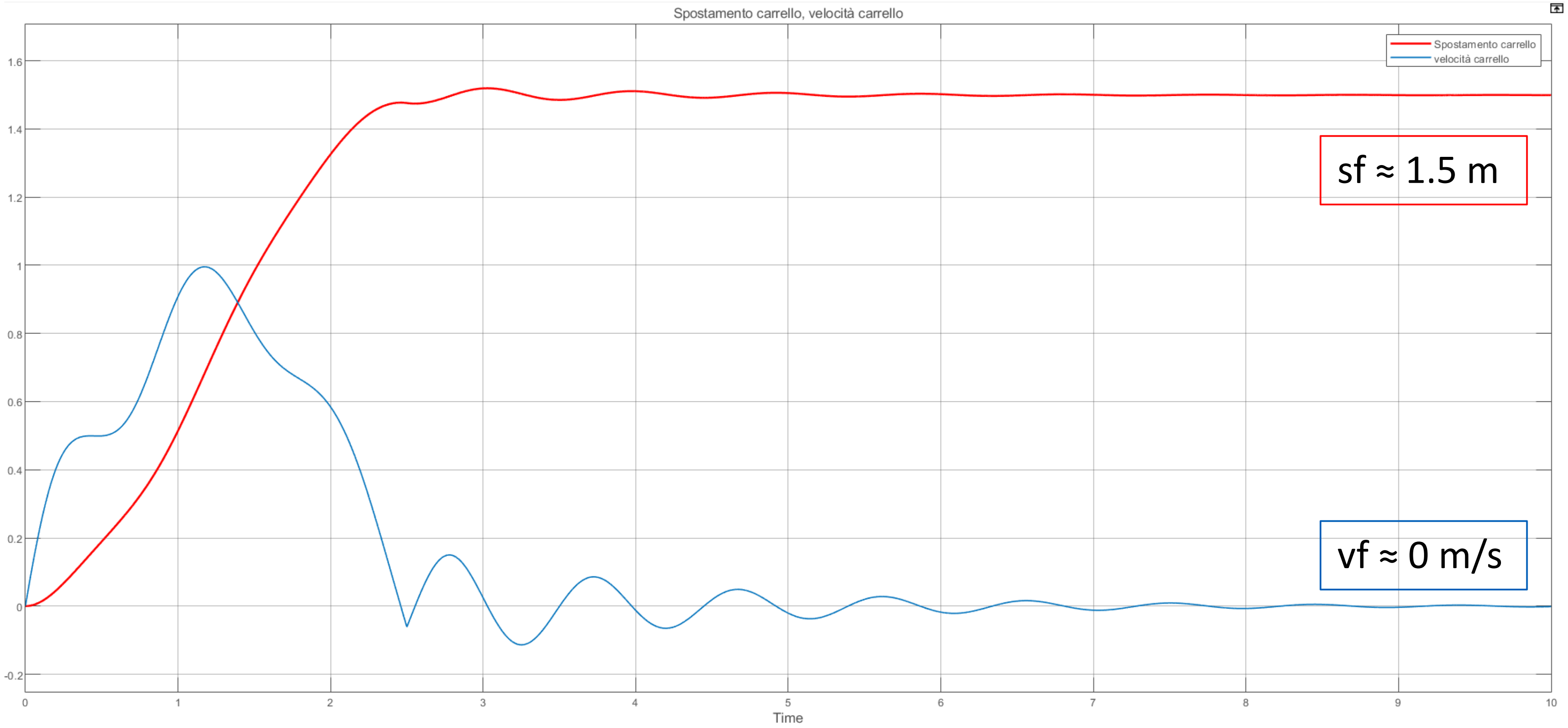
Si utilizza un blocco step per riportare l'accelerazione al valore nullo al termine dell'azionamento

SCHEMA A BLOCCHI

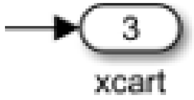
Output spostamento e velocità del carrello







OUTPUT 3

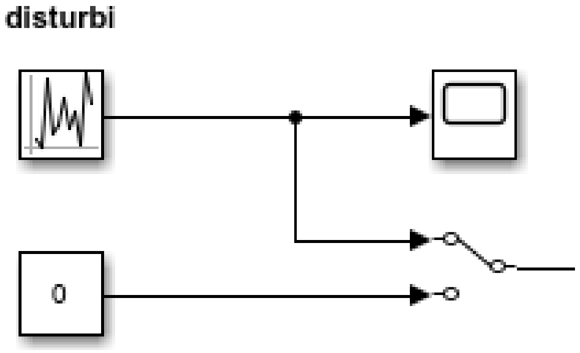


OUTPUT 4

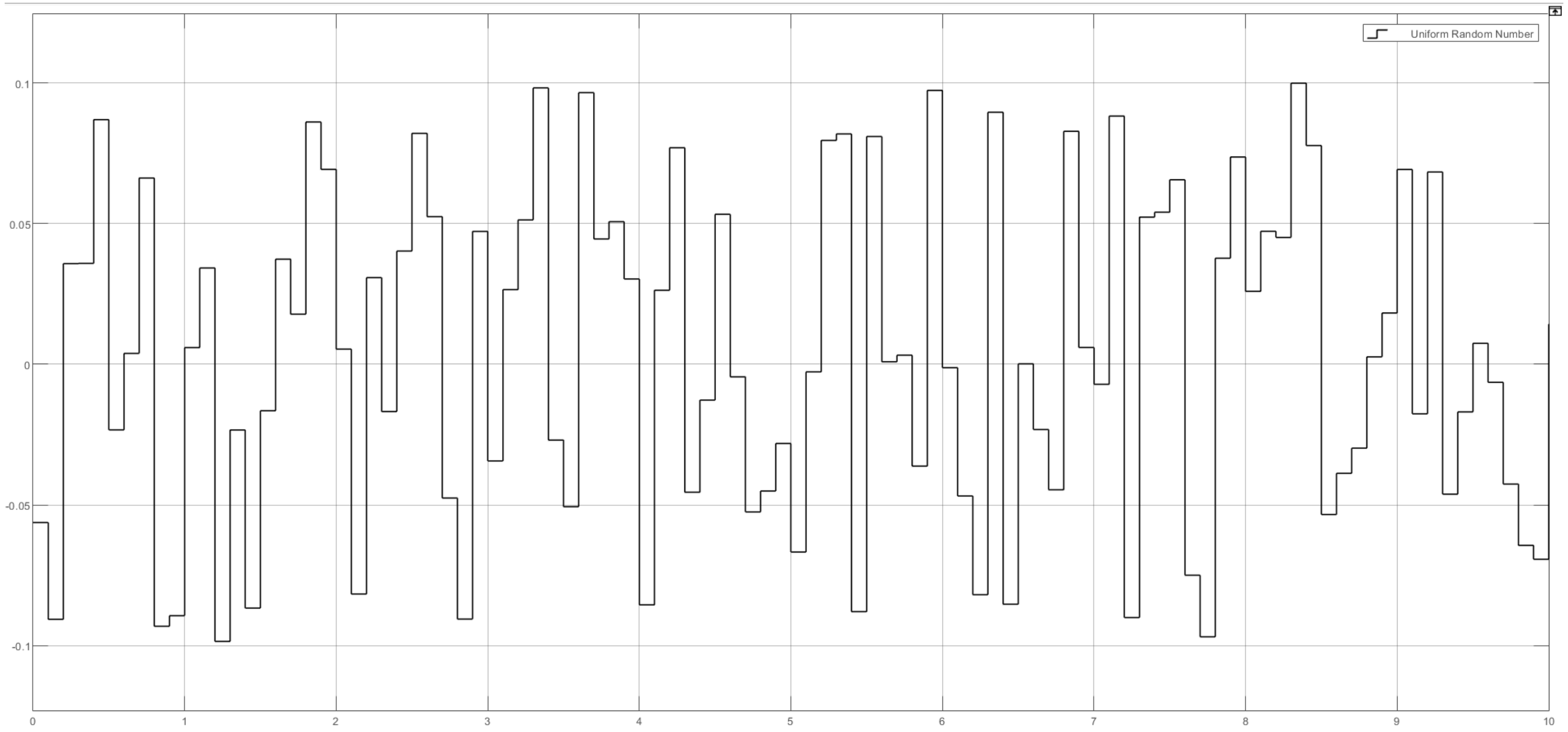
SCHEMA A BLOCCHI

Output spostamento e velocità del carrello

Disturbi attivi



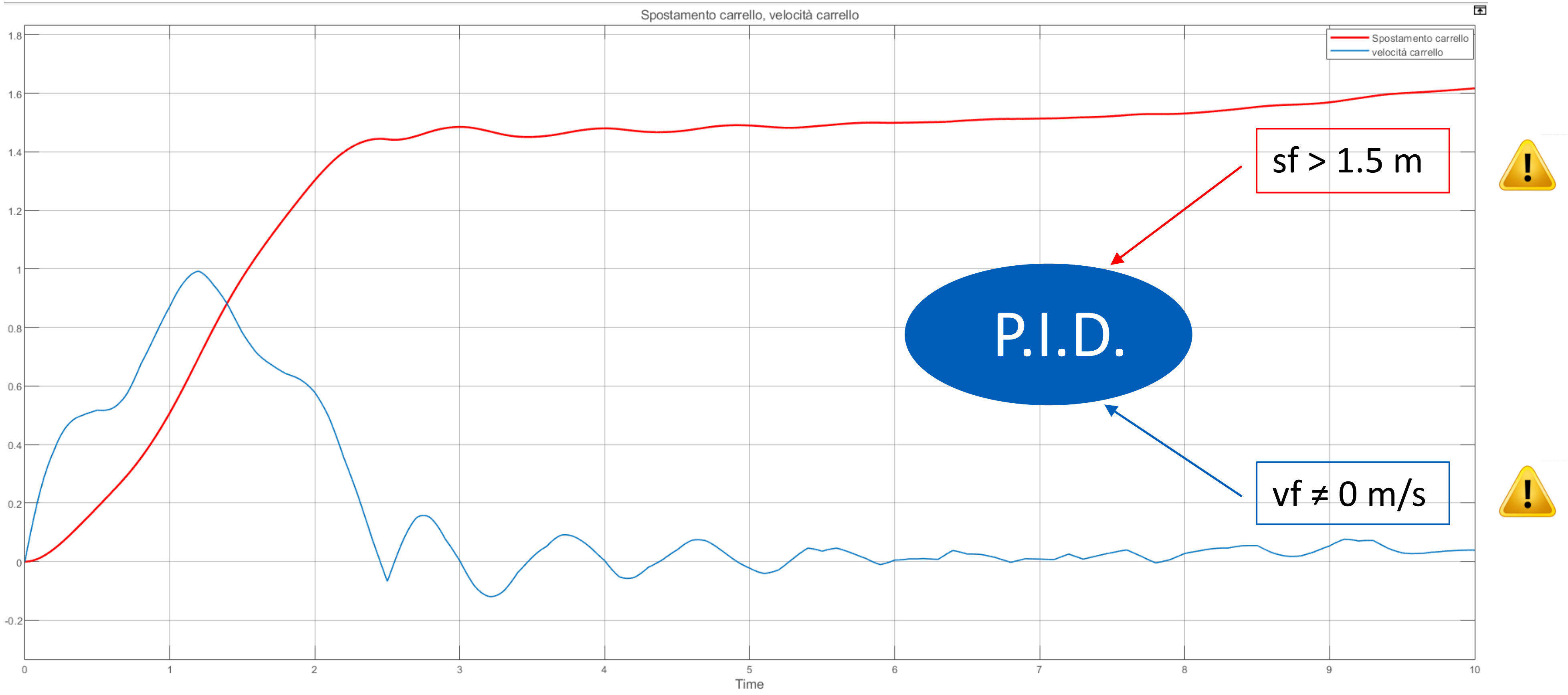
I disturbi sono stati inseriti come rumore casuale con ampiezza compresa tra $\pm 0.1\ m/s\text{^}2$



SCHEMA A BLOCCHI

Output spostamento e velocità del carrello

Disturbi attivi



CALCOLI PARAMETRI PID

Metodo Ziegler-Nicols

Control Type	K_p	T_i	T_d	K_i	K_d
P	$0.5K_u$	–	–	–	–
PI	$0.45K_u$	$0.8\bar{3}T_u$	–	$0.54K_u/T_u$	–
PD	$0.8K_u$	–	$0.125T_u$	–	$0.10K_uT_u$
classic PID[2]	$0.6K_u$	$0.5T_u$	$0.125T_u$	$1.2K_u/T_u$	$0.075K_uT_u$

CALCOLI ZIEGLER-NICHOLS PER PID PENDOLO SEMPLICE CON CARRELLO

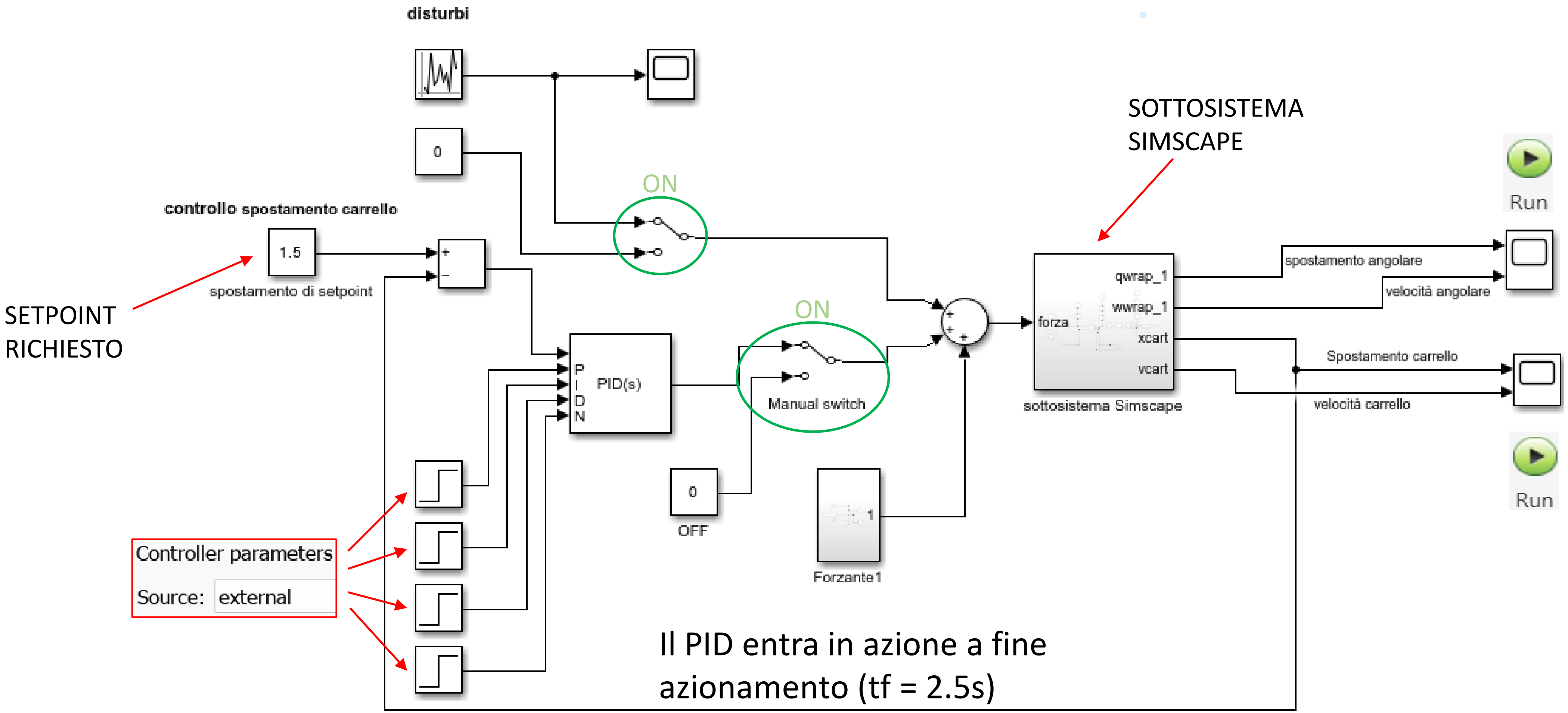
Periodo Tu	9,5
Ku	5

	Kp	Ti	Td	Ki	Kd
P	2,5				
PI	2,25	4		0,284211	
PD	4	2,5	1,1875		4,75
classic PID	3	2,5	1,1875	0,631579	3,5625

Successivamente sono state inserite le costanti Kp, Ki e Kd del PID in Simulink

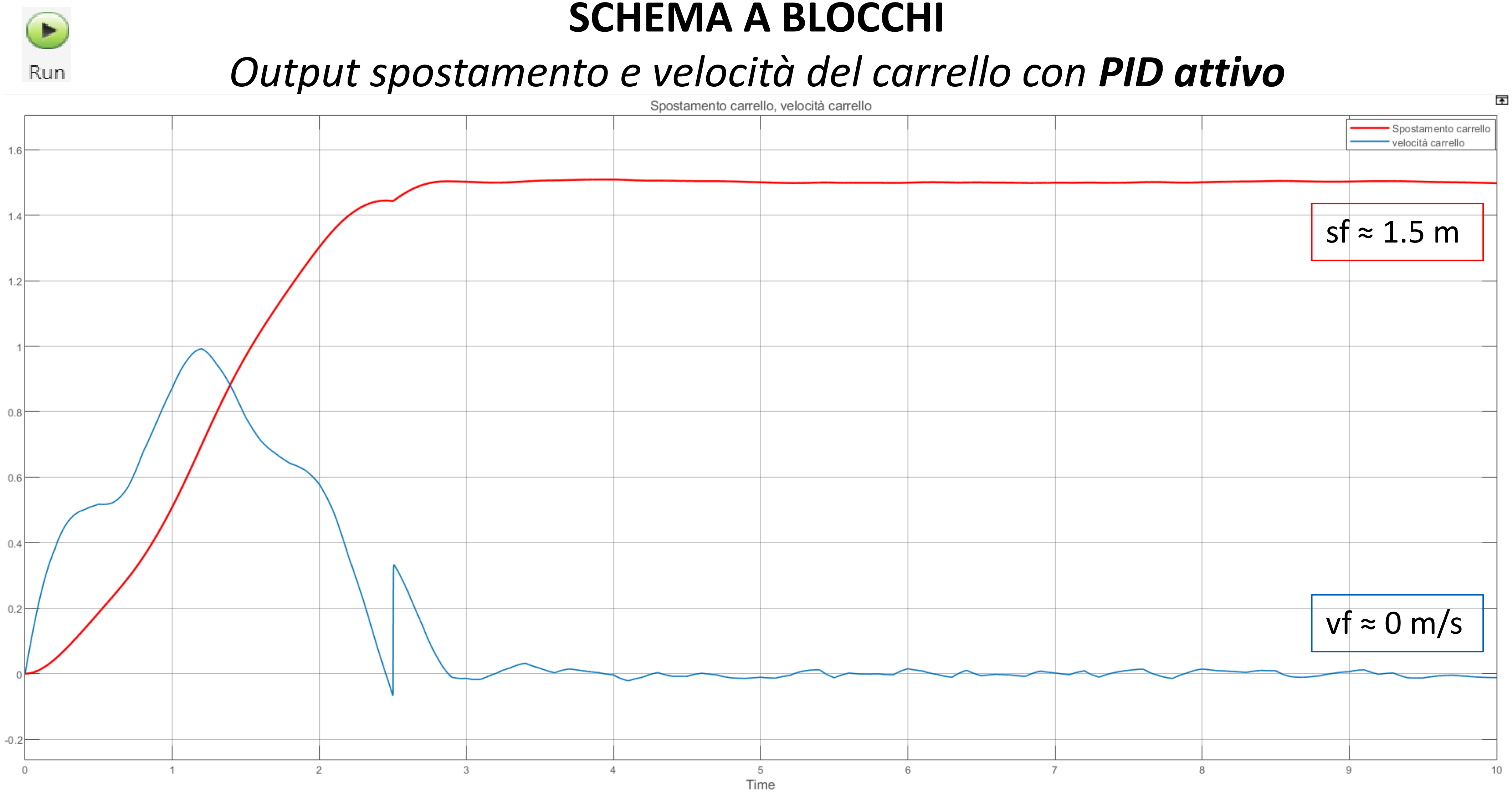
SCHEMA A BLOCCHI

*Schema Simulink con **PID attivo***



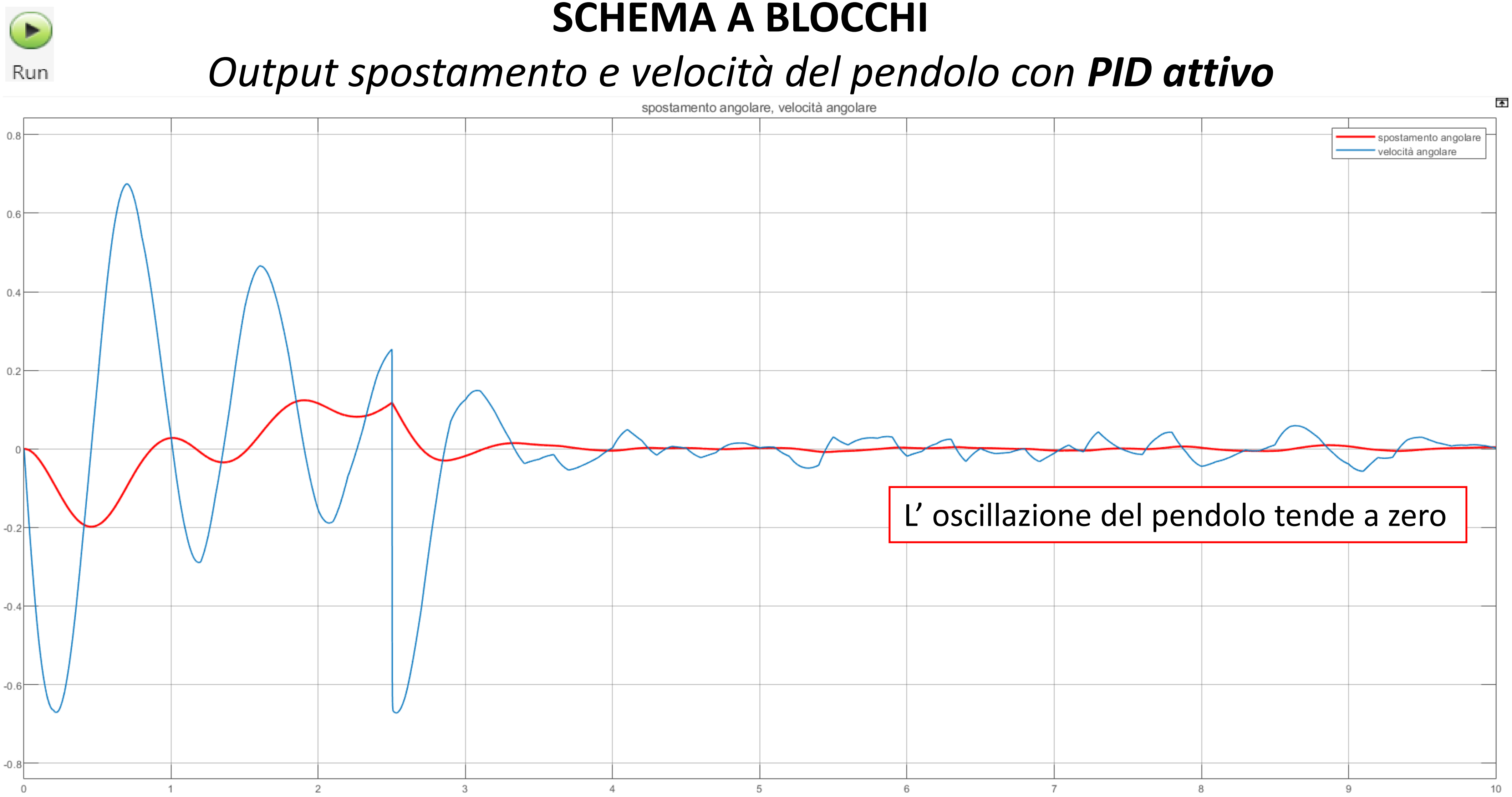
SCHEMA A BLOCCHI

*Output spostamento e velocità del carrello con **PID attivo***



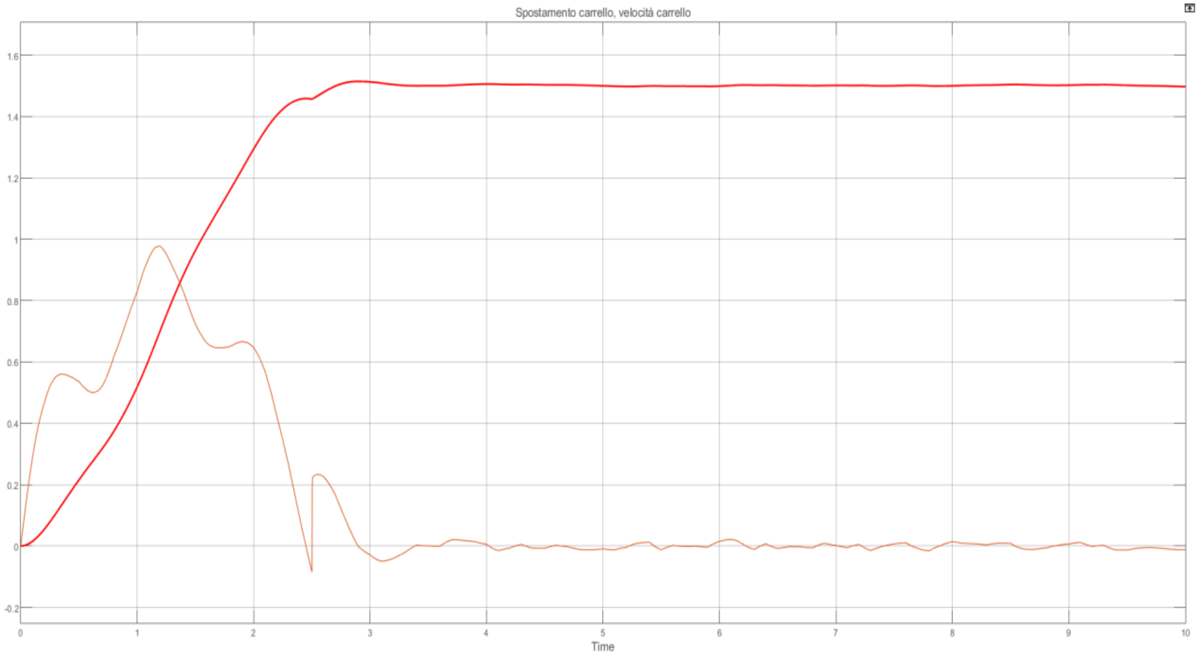
SCHEMA A BLOCCHI

*Output spostamento e velocità del pendolo con **PID attivo***

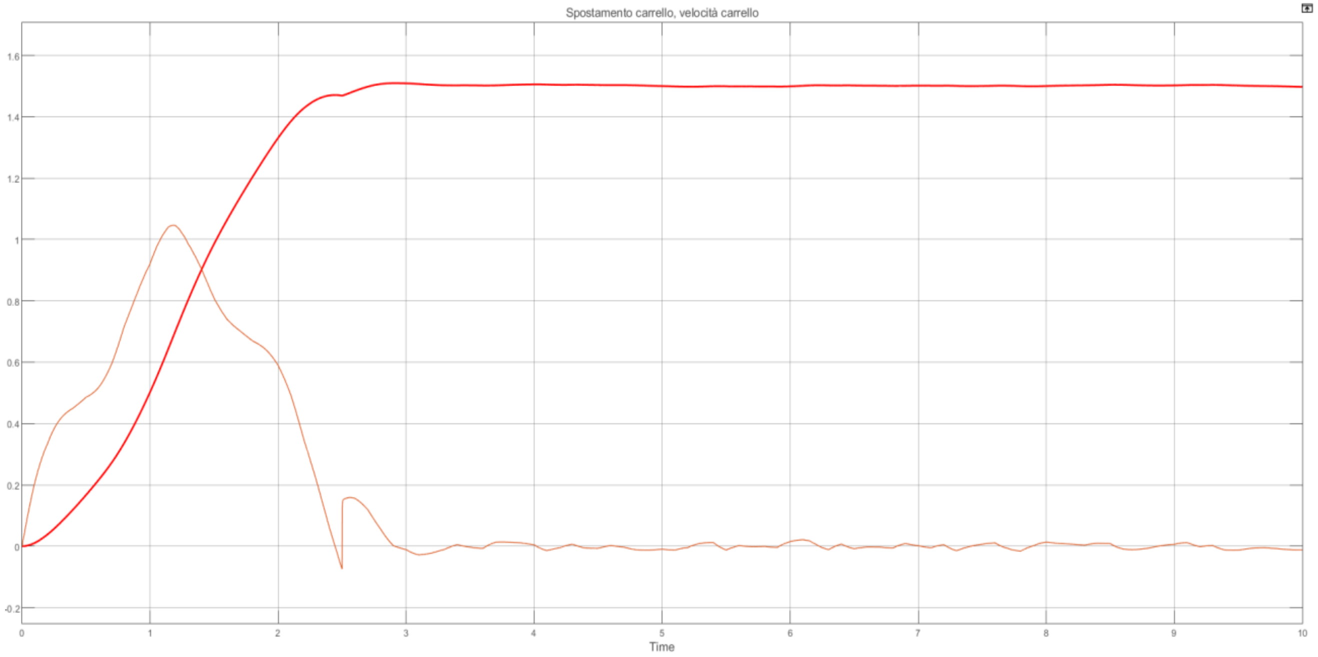


PENDOLO SEMPLICE: errori di modellazione del sistema con PID attivo

La pulsazione propria del sistema non risulta essere quella calcolata in precedenza ma presenta un’incertezza del ±10% .



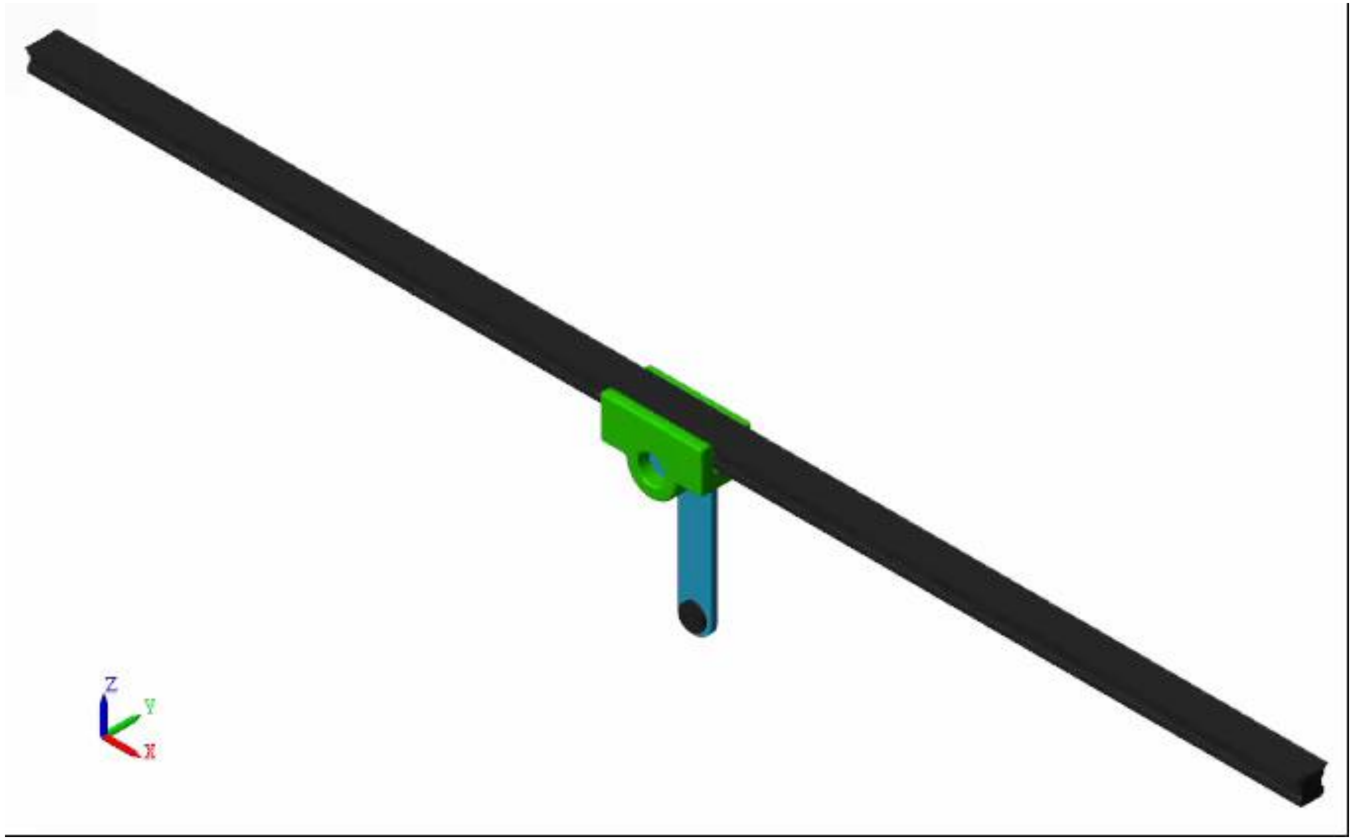
$$\boxed{wn = \ 3.3692(-10\%)}$$

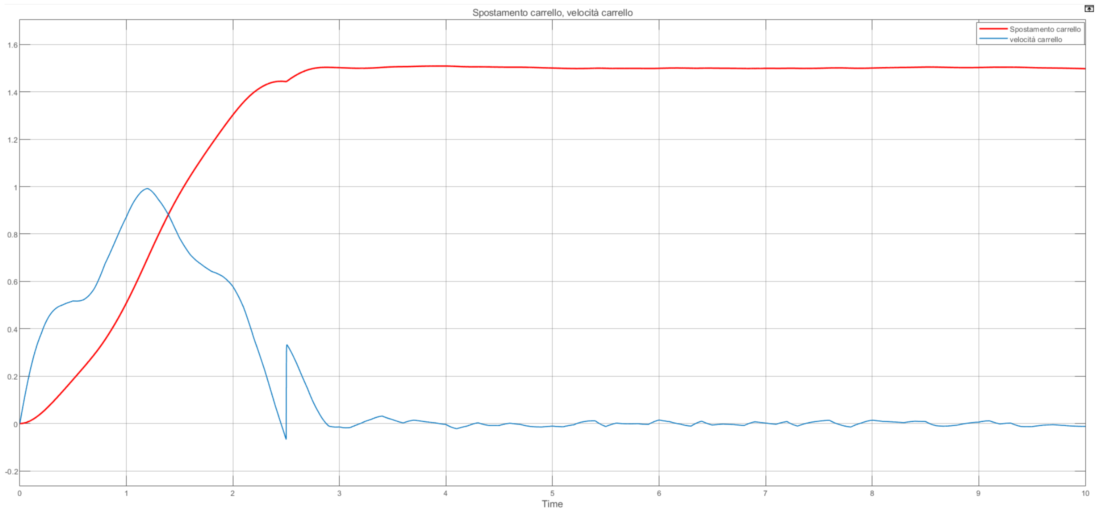


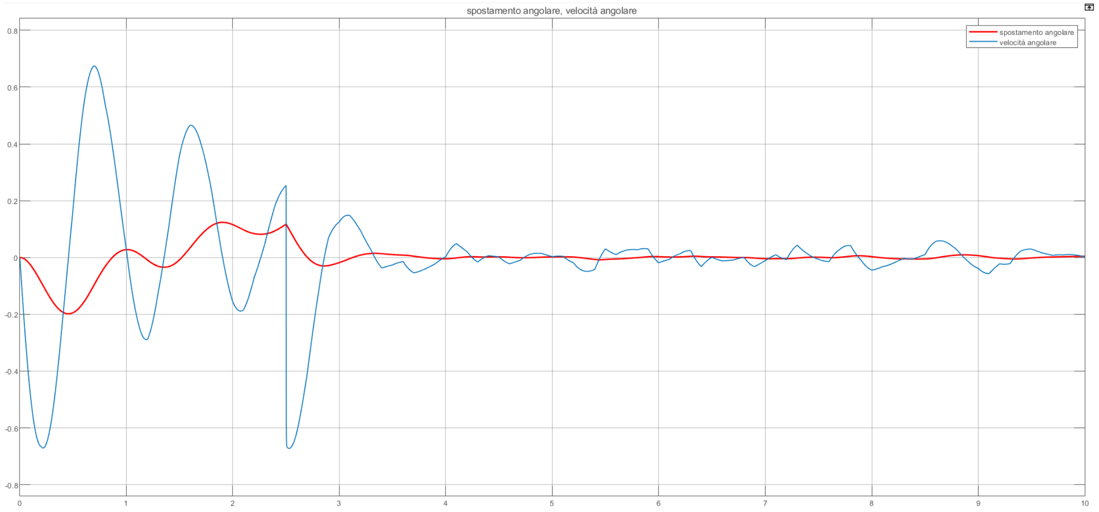
$$\boxed{wn = \ 4.1179\ (+10\%)}$$

Il controllo risulta stabile anche in presenza di piccole incertezze sulla pulsazione propria del sistema.

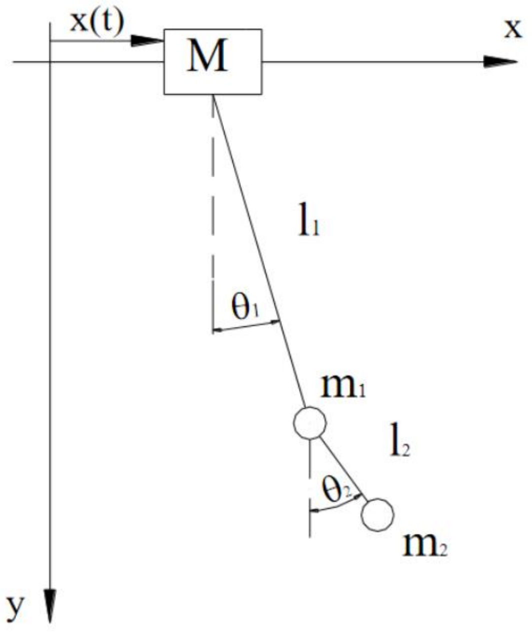
SIMULAZIONE MULTIBODY ‘MECHANICS EXPLORERS’







DOPPIO PENDOLO



Massa 1	0.2 Kg
Massa 2	0.5 Kg
Lunghezza 1	1.05 m
Lunghezza 2	0.35 m
Accelerazione di gravità	9.81 $\frac{m}{s^2}$
Spostamento richiesto	1.5 m
Tempo di fine azionamento	2.7 s

Dalle seguenti equazioni $(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1+(m_1+m_2)l_1\ddot{x}+m_2 l_1 l_2\ddot{\theta}_2+(m_1+m_2)g l_1\theta_1=0$

$$m_2 l_2^2\ddot{\theta}_2+m_2 l_2\ddot{x}+m_2 l_1 l_2\ddot{\theta}_1+m_2 g l_2\theta_2=0$$

è possibile ricavare le leggi di moto sia in forma analitica, sia attraverso un software di calcolo:

$$\ddot{\theta}_1=-\frac{m_1\ddot{x}+g(m_1\theta_1+m_2\theta_1-m_2\theta_2)}{l_1 m_1} \qquad \ddot{\theta}_2=\frac{g(m_1+m_2)(\theta_1-\theta_2)}{l_2 m_1}$$

PENDOLO DOPPIO: EQUAZIONE DEL MOTO

```
syms m1 m2 l1 l2 theta2ddot theta1ddot theta2 theta1 g xddot

M=([(m1+m2)*l1^2,m2*l1*l2;m2*l1*l2,m2*l2^2]); %matrice delle masse

thetaddot=[theta1ddot;theta2ddot]; %matrice delle derivate seconde di theta1,theta2

G=[(m1+m2)*g*l1,0;0,m2*g*l2]; %matrice della rigidezza

theta=[theta1;theta2]; %matrice dello spostamento angolare theta1,theta2

F=([-(m1+m2)*l1;-m2*l2])*xddot; %matrice della forzante

eqn= M*thetaddot==(F-G*theta); %EQUAZIONE DEL MOTO

C=solve(eqn,thetaddot);
```

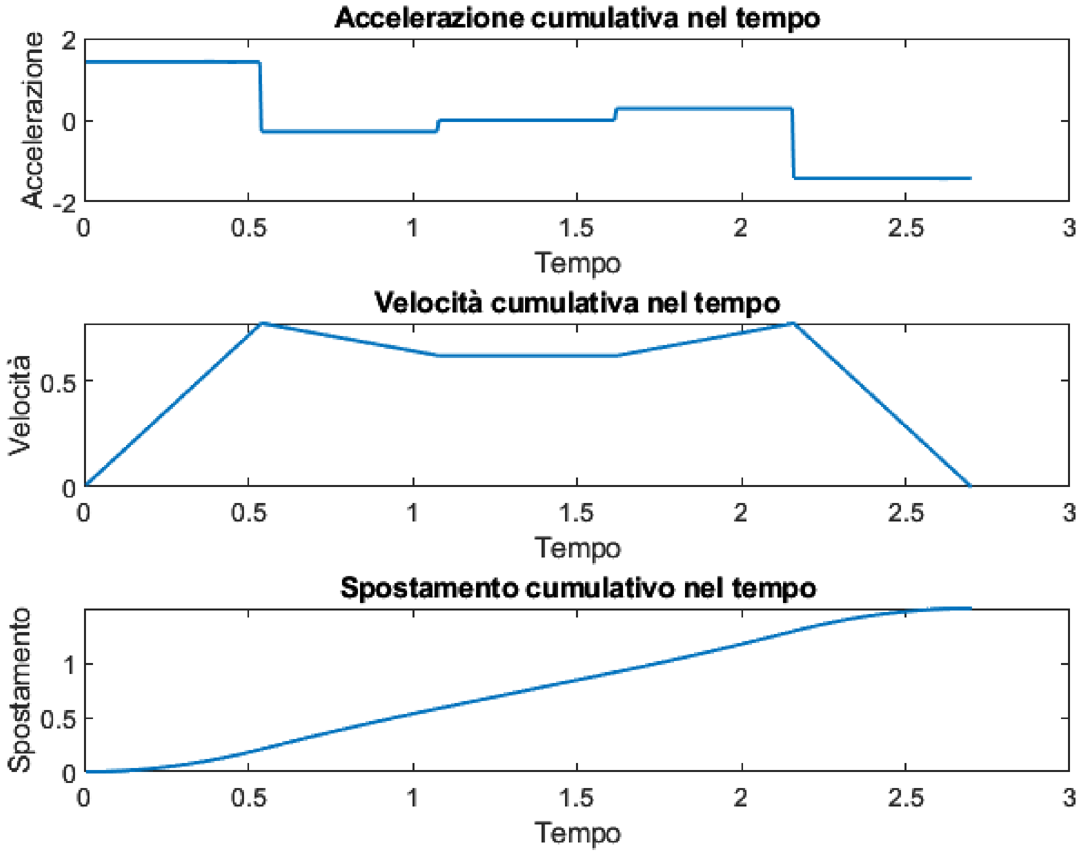
C.theta1ddot

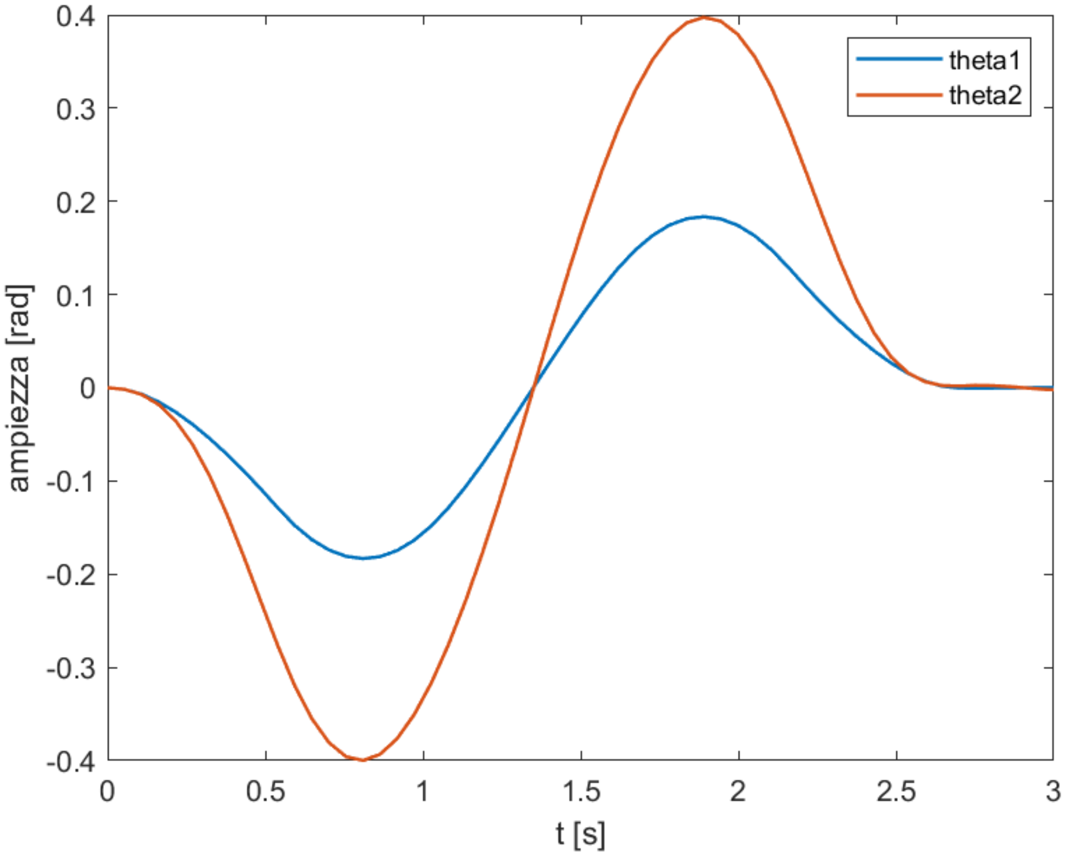
```
val =

-(m1*xddot + g*m1*theta1 + g*m2*theta1 - g*m2*theta2)/(l1*m1)
```

C.theta2ddot

```
val =

((m1 + m2)*(g*theta1 - g*theta2))/(l2*m1)
```

ACCELERAZIONE – VELOCITÀ – SPOSTAMENTO

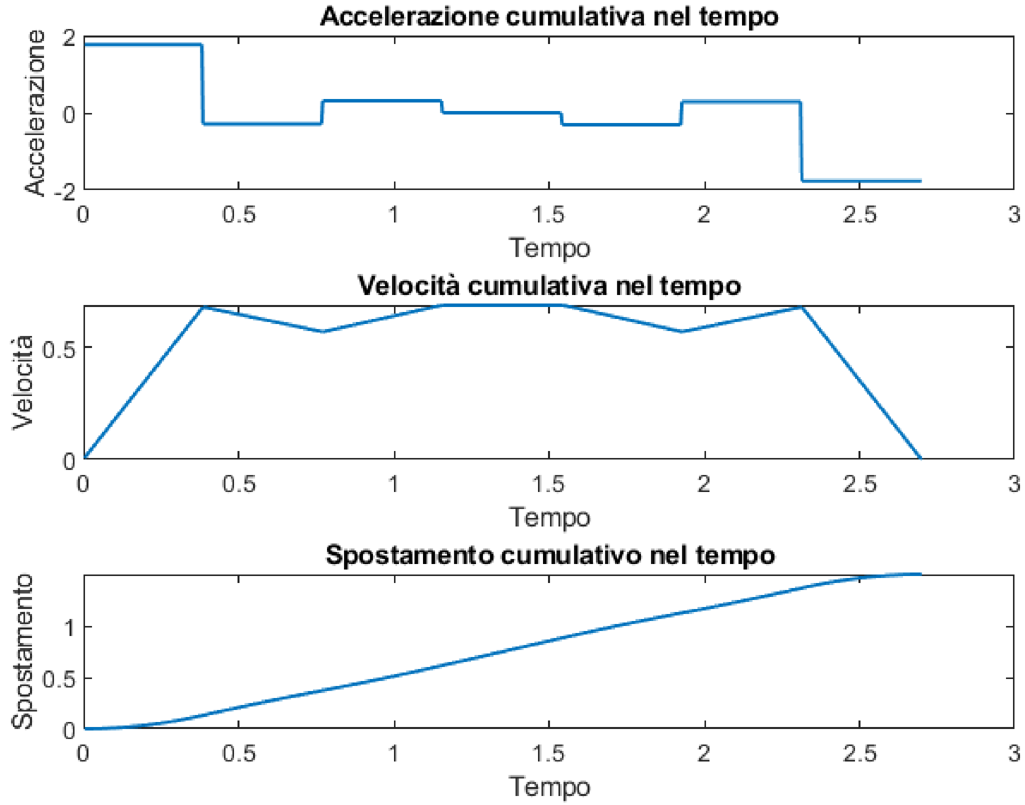


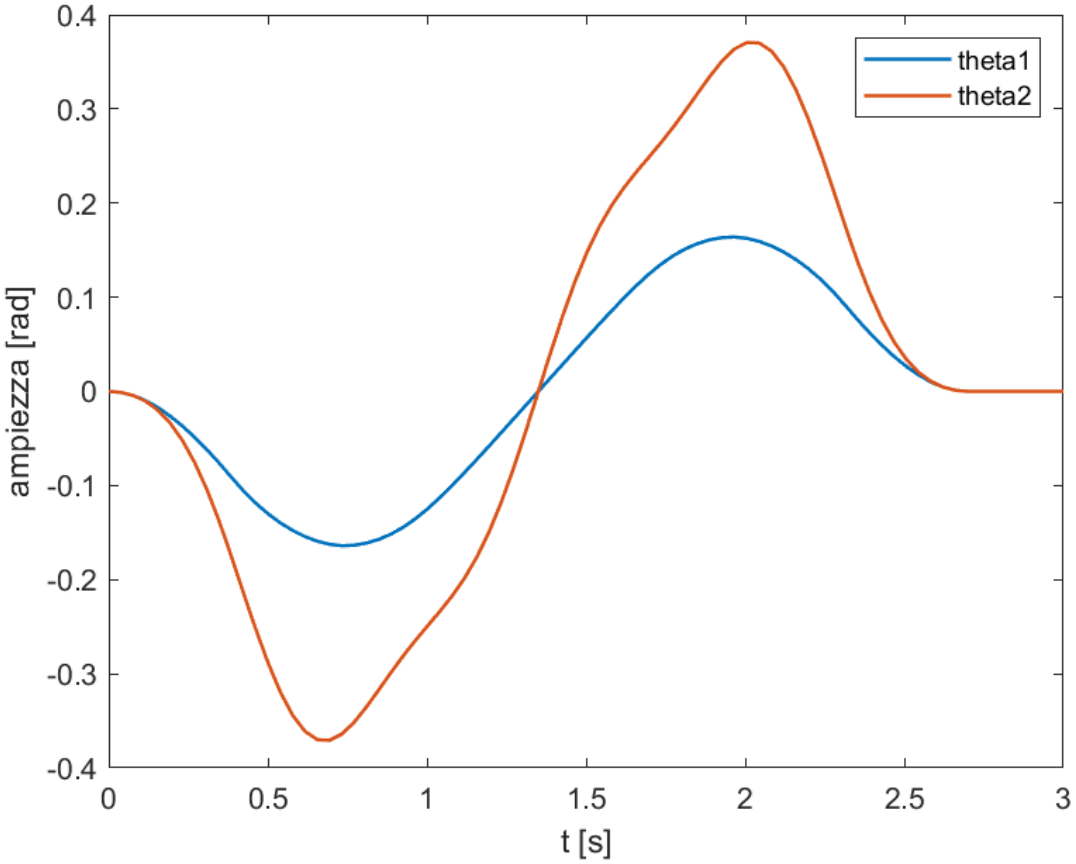


Legge di moto con energia residua minore di 10^{-4}

Valore assoluto della velocità finale minore di 10^{-6}

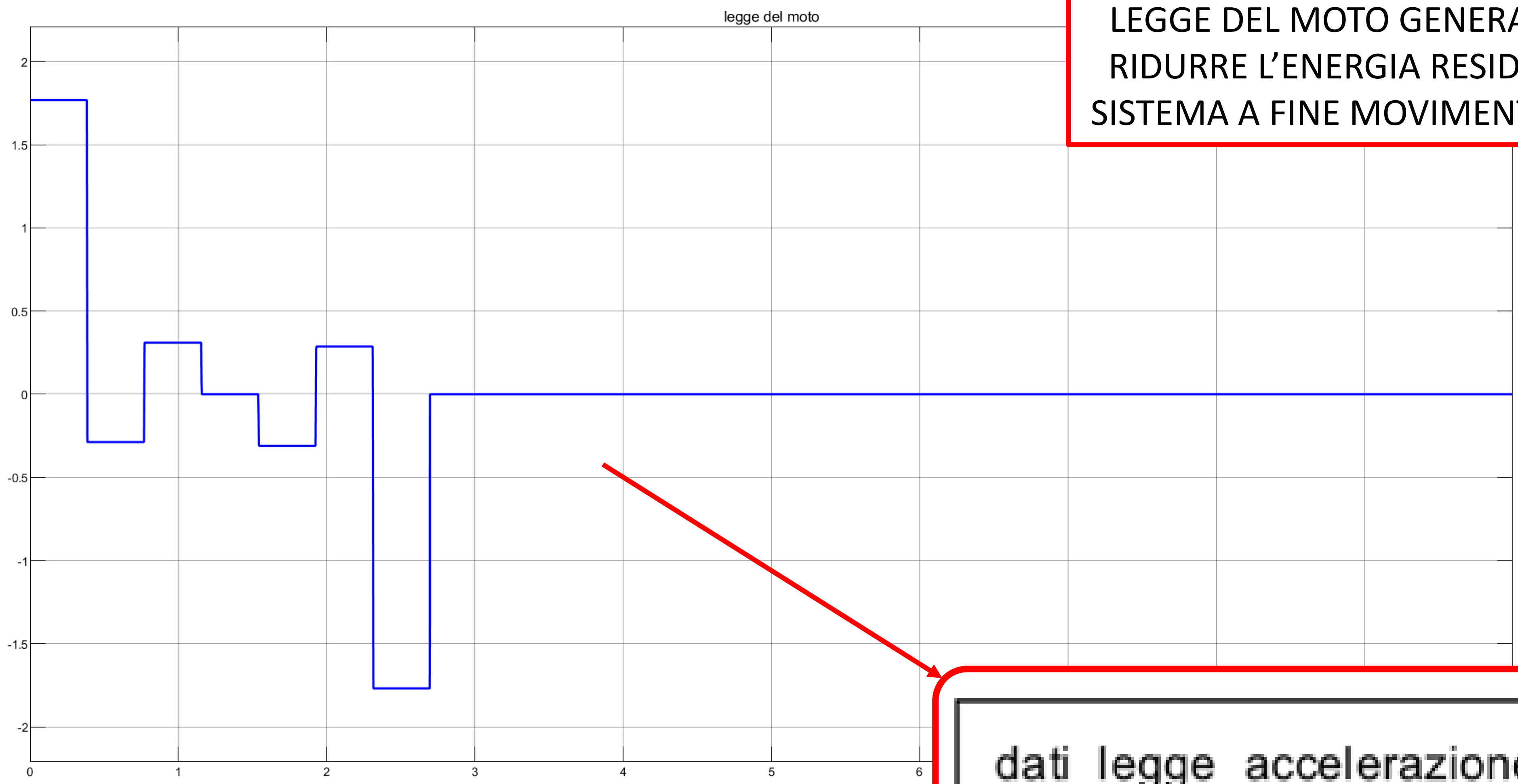
ACCELERAZIONE – VELOCITÀ – SPOSTAMENTO





Legge di moto con energia residua minore di 10^{-29}
Valore assoluto della velocità finale minore di 10^{-6}

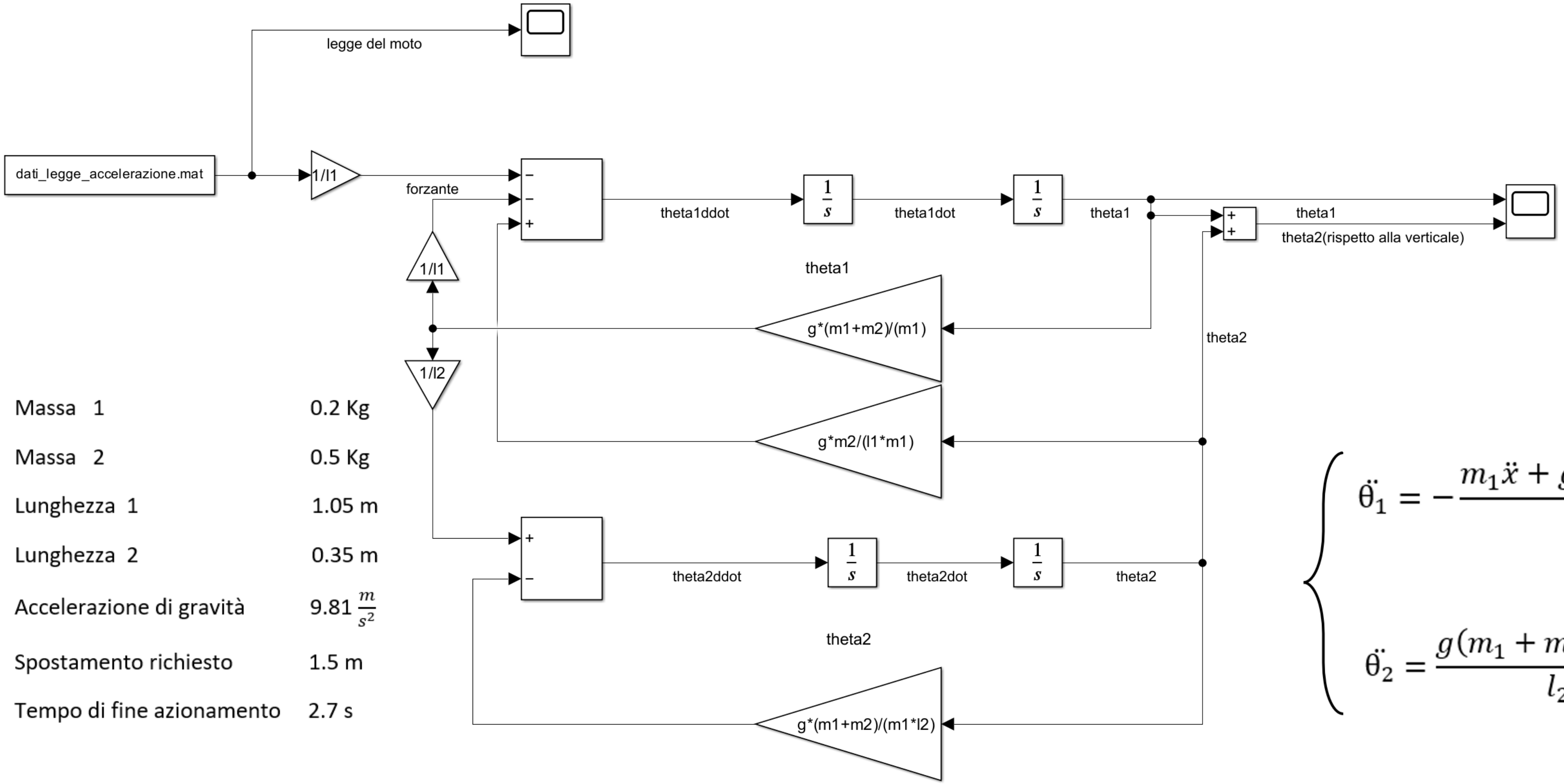
PENDOLO DOPPIO: LEGGE DEL MOTO, AZIONAMENTO t=10 s



LEGGE DEL MOTO GENERATA PER RIDURRE L'ENERGIA RESIDUA DEL SISTEMA A FINE MOVIMENTAZIONE

dati_legge_accelerazione.mat

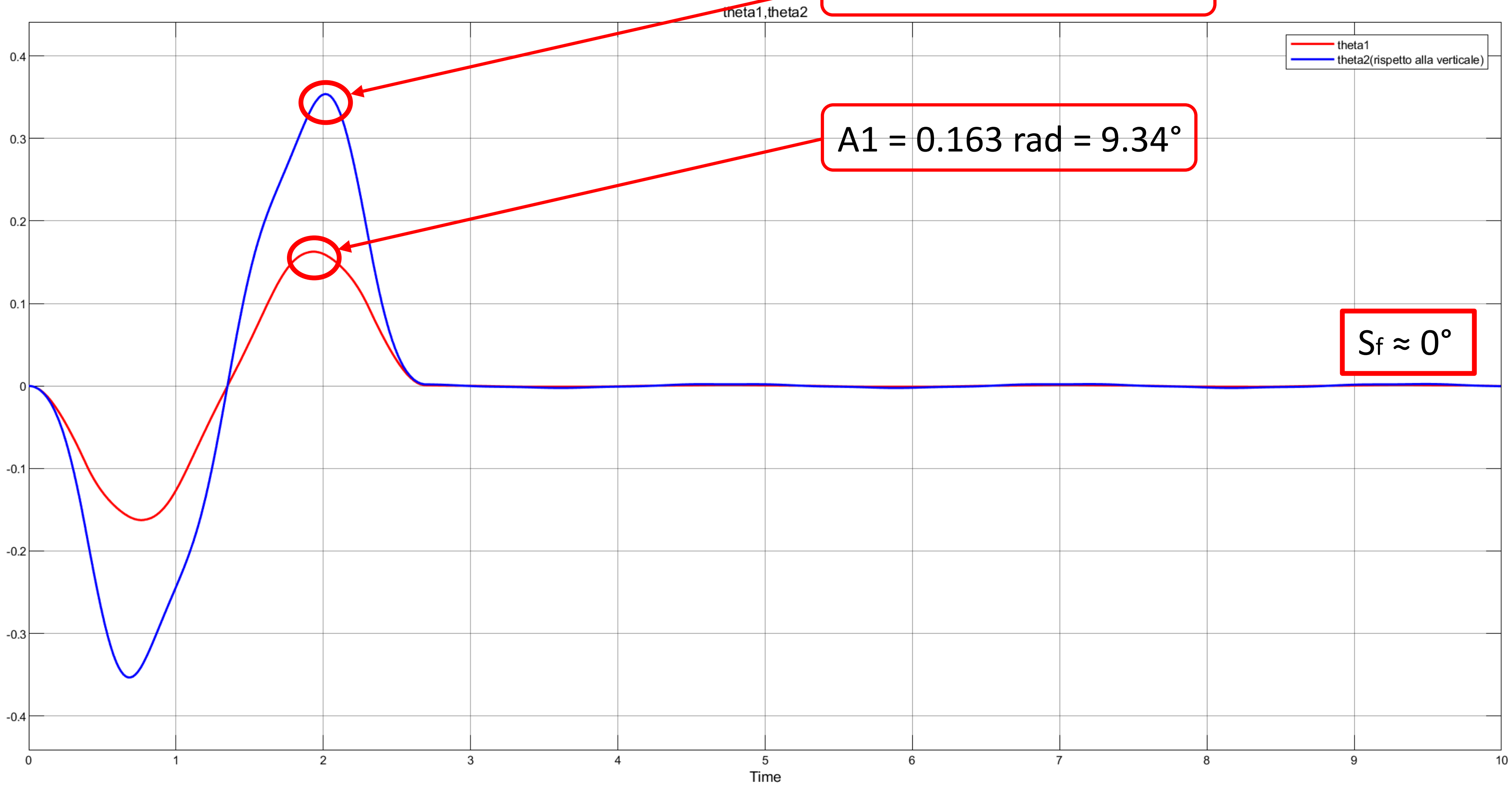
PENDOLO DOPPIO: MODELLAZIONE TRAMITE SIMULINK



Massa 1	0.2 Kg
Massa 2	0.5 Kg
Lunghezza 1	1.05 m
Lunghezza 2	0.35 m
Accelerazione di gravità	9.81 $\frac{m}{s^2}$
Spostamento richiesto	1.5 m
Tempo di fine azionamento	2.7 s

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = -\dfrac{m_1\ddot{x} + g(m_1\theta_1 + m_2\theta_1 - m_2\theta_2)}{l_1 m_1} \\[2ex] \ddot{\theta}_2 = \dfrac{g(m_1 + m_2)(\theta_1 - \theta_2)}{l_2 m_1} \end{cases}$$

PENDOLO DOPPIO: SPOSTAMENTO ANGOLARE

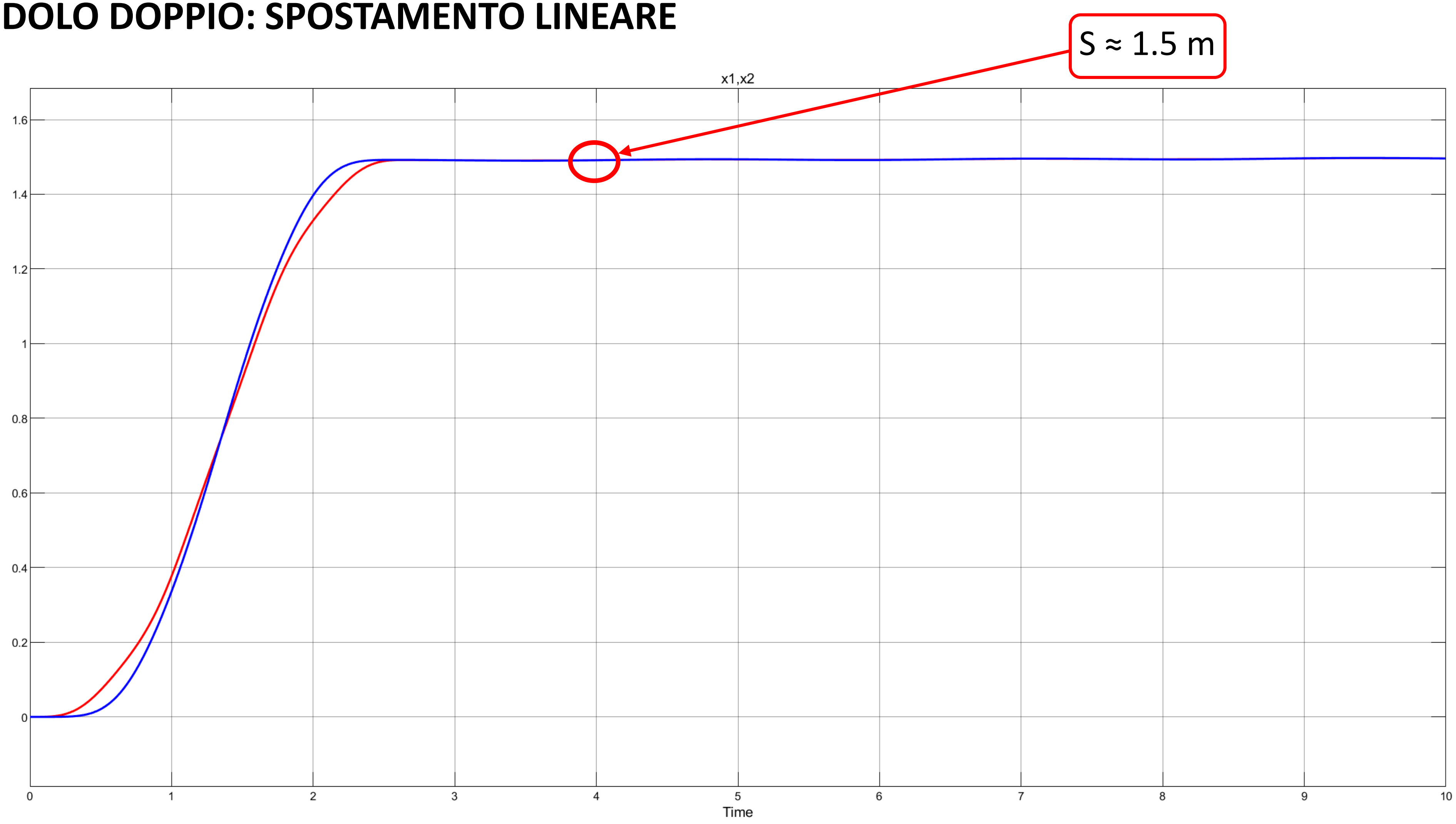


A2 = 0.358 rad = 20.51°

A1 = 0.163 rad = 9.34°

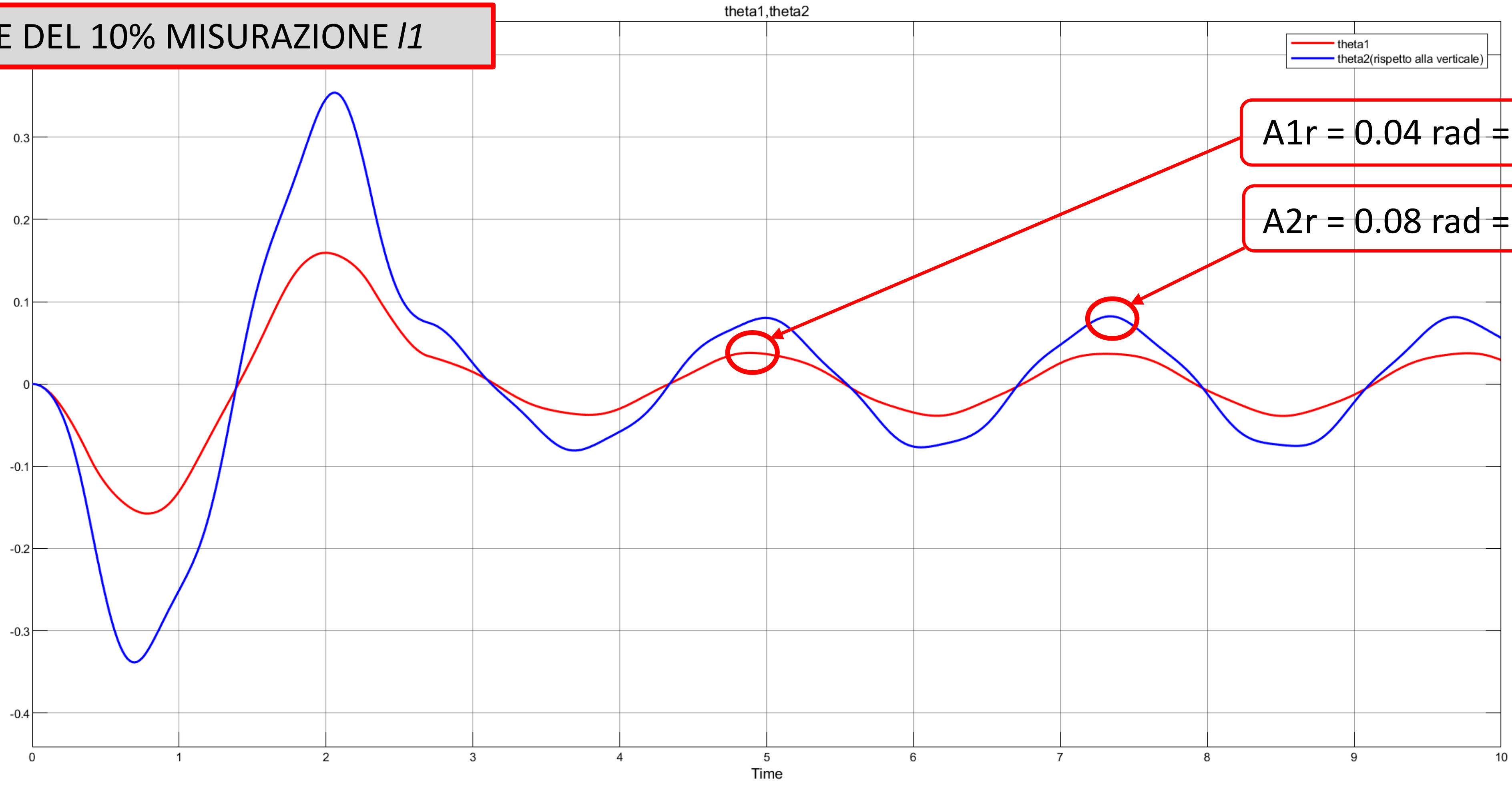
$S_f \approx 0°$

PENDOLO DOPPIO: SPOSTAMENTO LINEARE



PENDOLO DOPPIO: ERRORI DI MODELLAZIONE

ERRORE DEL 10% MISURAZIONE *l1*

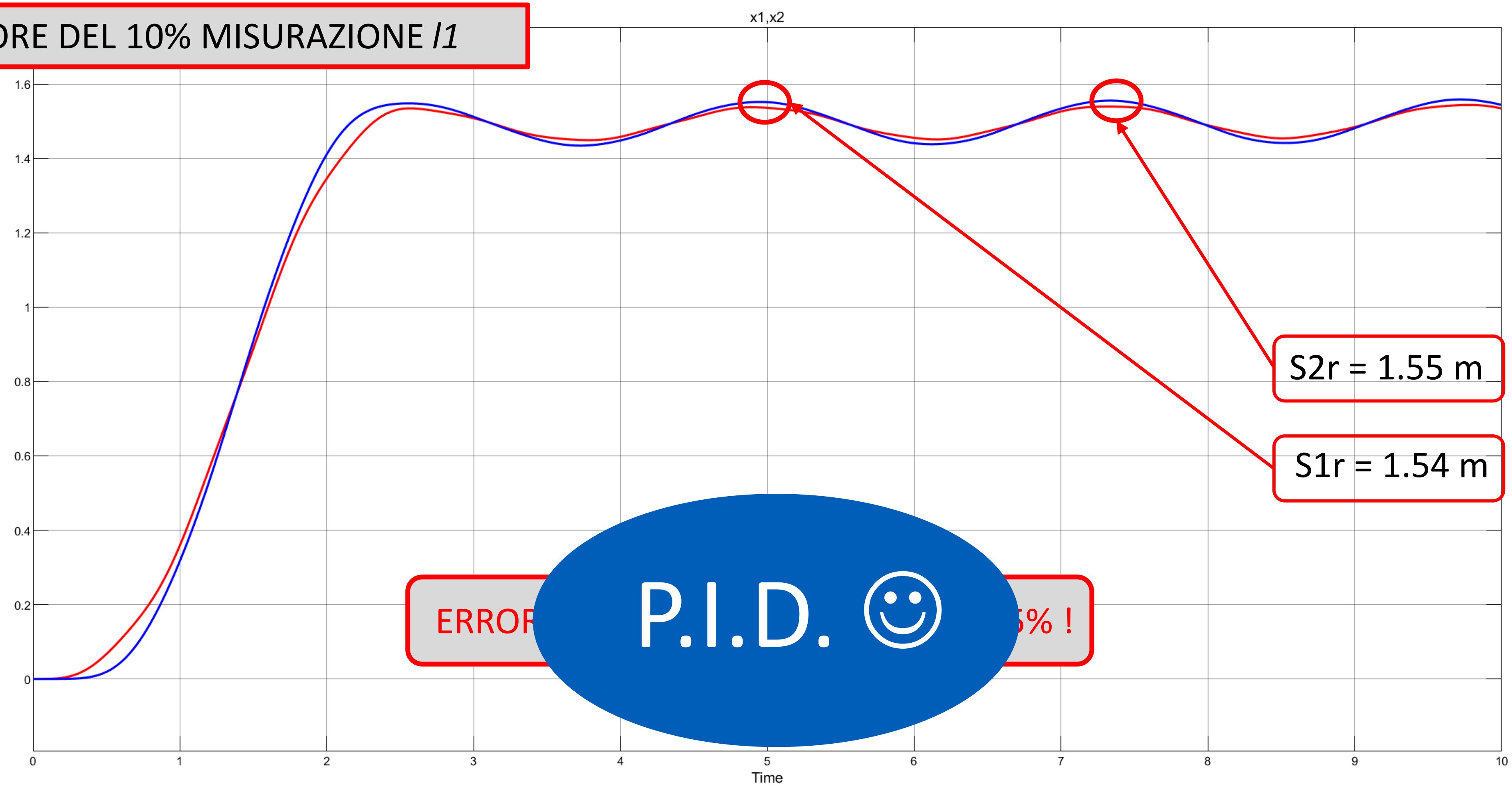


A1r = 0.04 rad = 2.17°

A2r = 0.08 rad = 4.70°

PENDOLO DOPPIO: ERRORI DI MODELLAZIONE

ERRORE DEL 10% MISURAZIONE *l1*

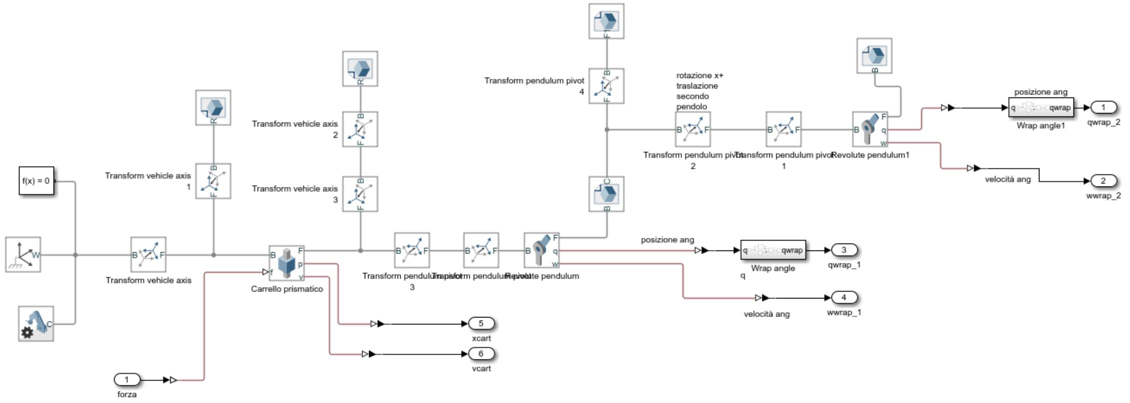


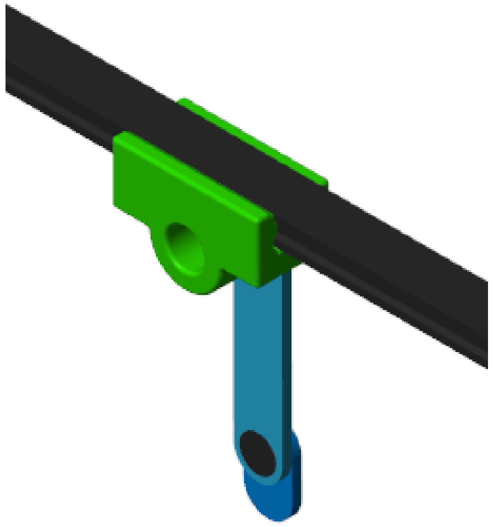
MODELLO SIMSCAPE DEL PENDOLO DOPPIO

È un modello di simulazione avanzato → analisi multibody

Studio del pendolo doppio collegato a un carrello traslante avente massa definita.

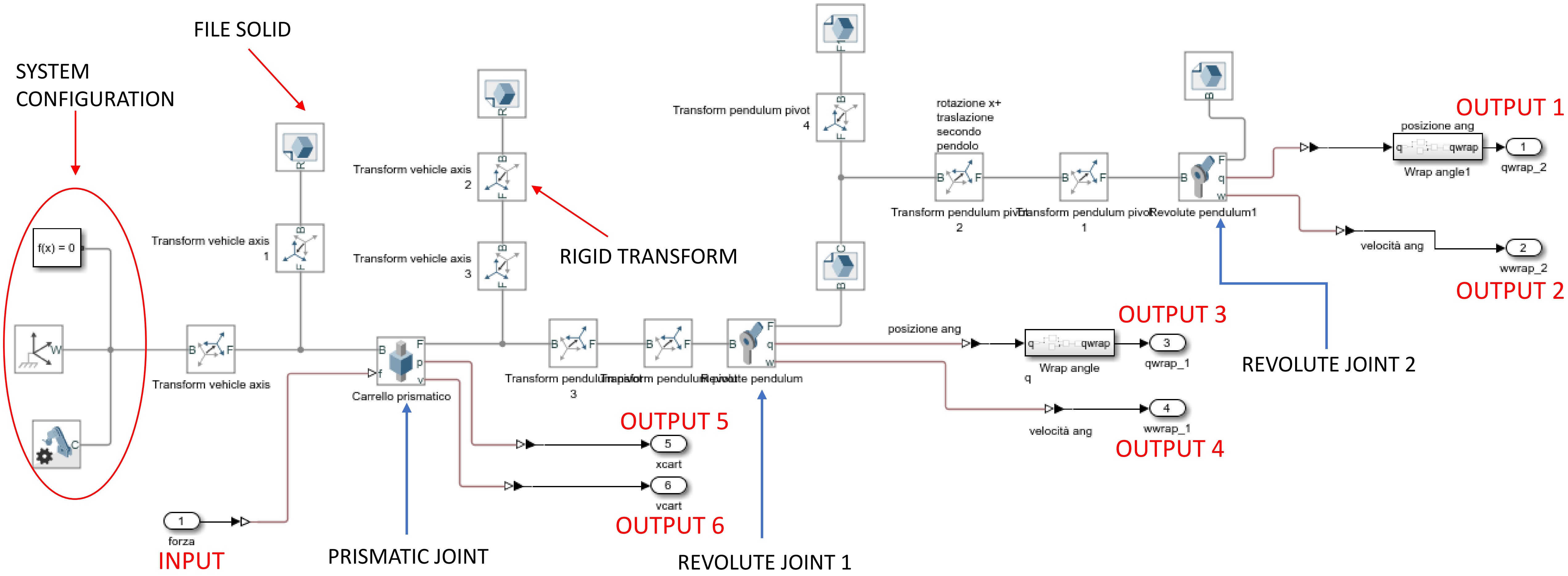
Questa rappresentazione visiva consentirà una comprensione più approfondita del sistema.





SCHEMA A BLOCCHI

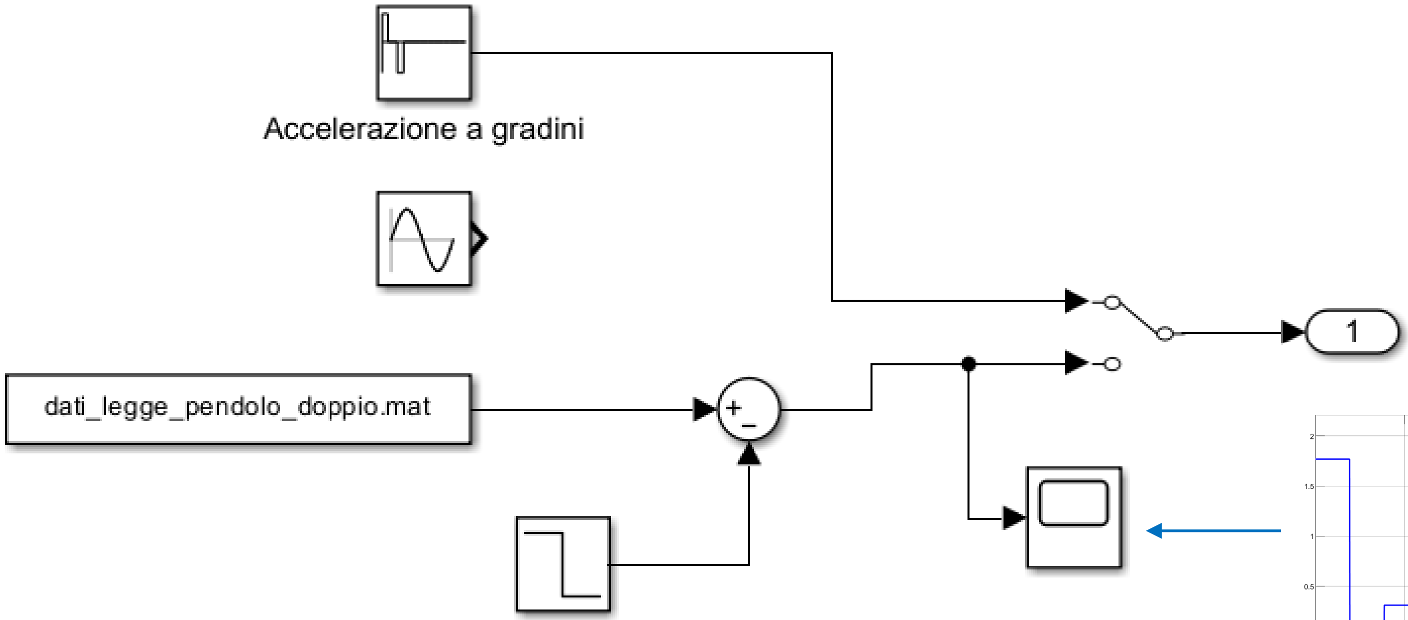
Subsystem Simscape

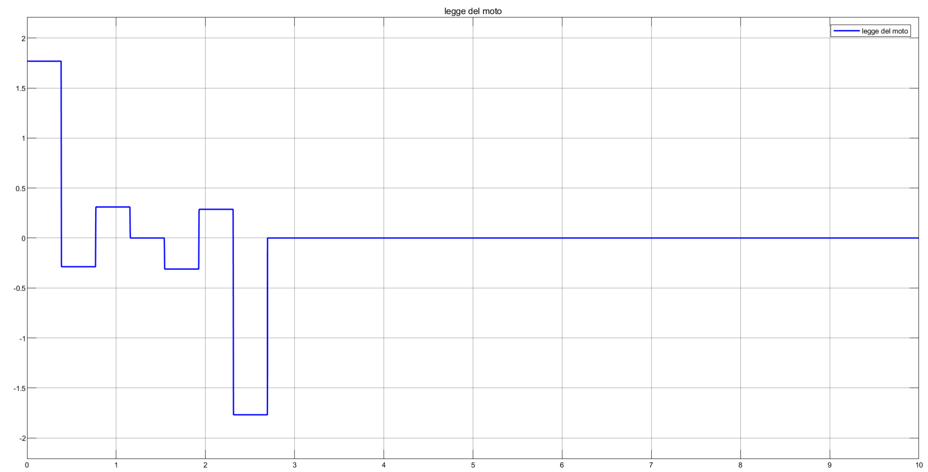


SCHEMA A BLOCCHI

Forzante

FILE MATLAB

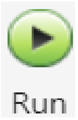


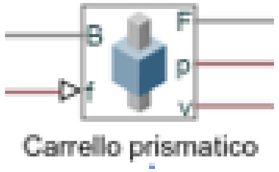


Si utilizza un blocco step per riportare l'accelerazione al valore nullo al termine dell'azionamento

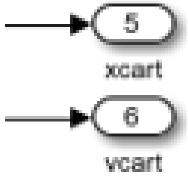
SCHEMA A BLOCCHI

Output spostamento e velocità del carrello

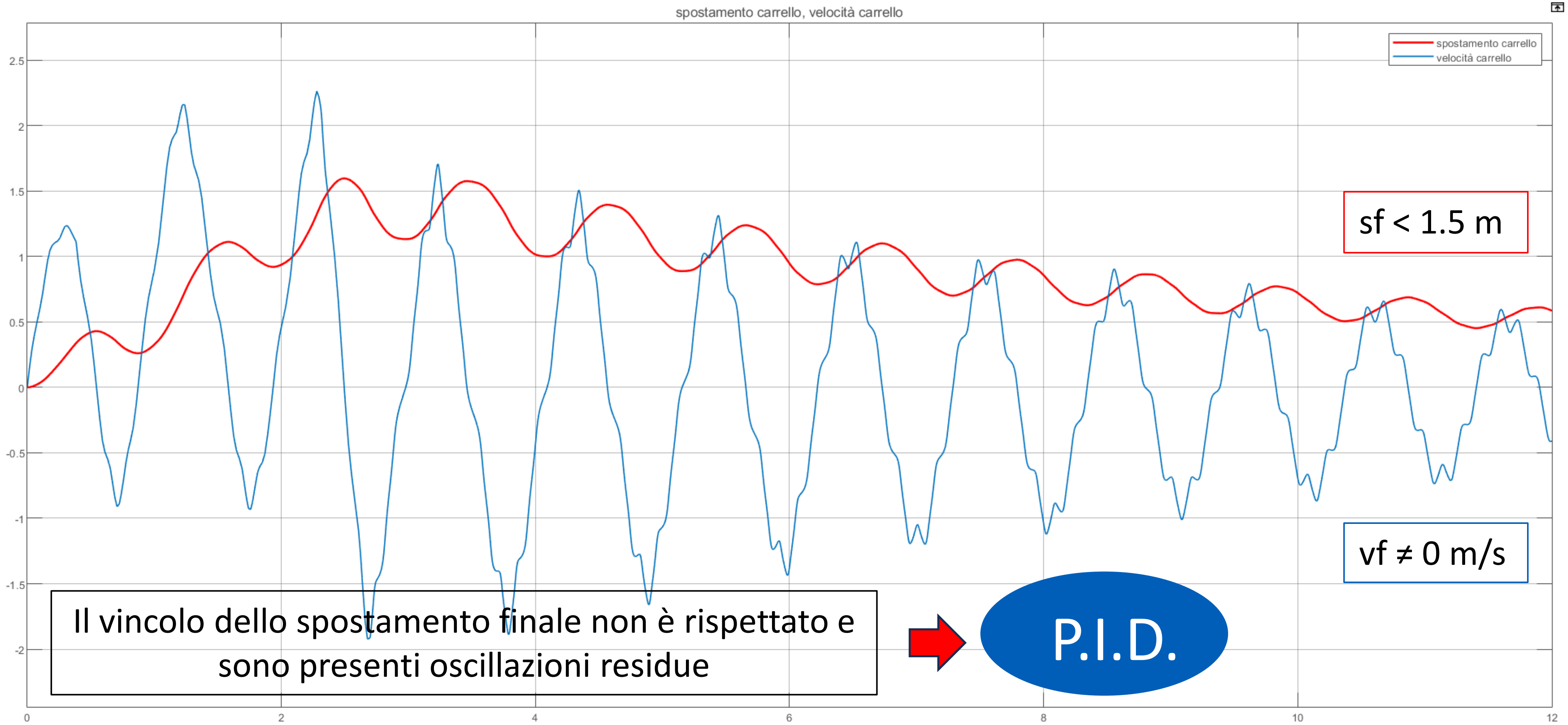




OUTPUT 5



OUTPUT 6



sf < 1.5 m

vf ≠ 0 m/s

Il vincolo dello spostamento finale non è rispettato e sono presenti oscillazioni residue

P.I.D.

CALCOLI PARAMETRI PID

Metodo Ziegler-Nicols

Control Type	K_p	T_i	T_d	K_i	K_d
P	$0.5K_u$	–	–	–	–
PI	$0.45K_u$	$0.8\bar{3}T_u$	–	$0.54K_u/T_u$	–
PD	$0.8K_u$	–	$0.125T_u$	–	$0.10K_uT_u$
classic PID[2]	$0.6K_u$	$0.5T_u$	$0.125T_u$	$1.2K_u/T_u$	$0.075K_uT_u$

CALCOLI ZIEGLER-NICHOLS PER PID PENDOLO DOPPIO CON CARRELLO

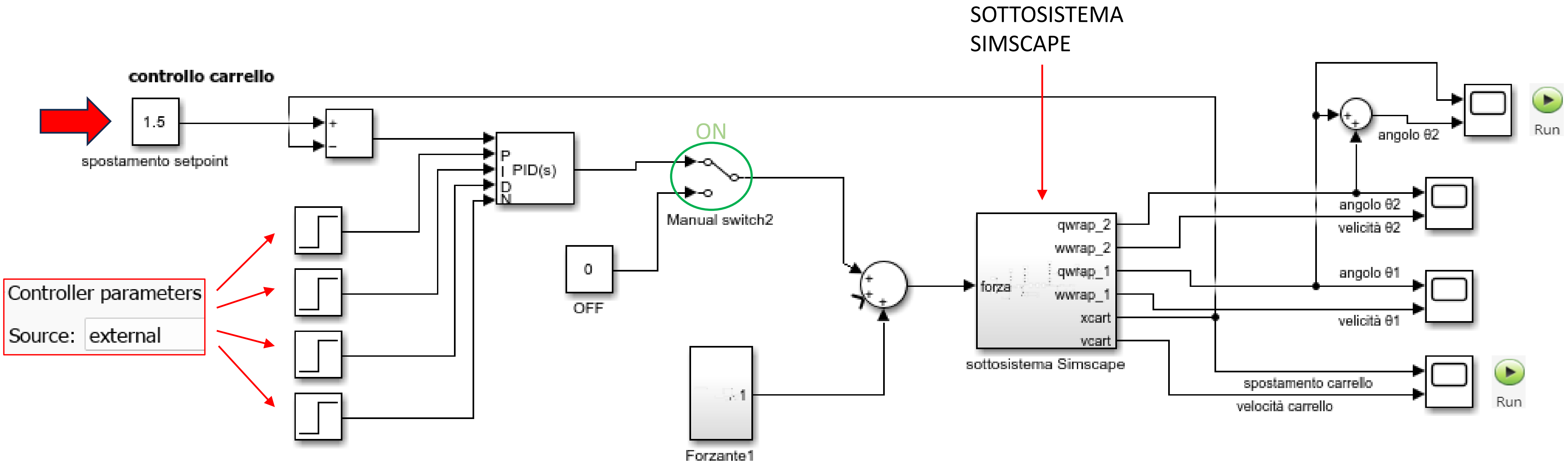
Periodo Tu	5
Ku	2

	Kp	Ti	Td	Ki	Kd
P	1				
PI	0,9	4,15		0,216	
PD	1,6		0,625		4,75
classic PID	1,2	2,5	0,625	0,48	0,75

Successivamente sono state inserite le costanti Kp, Ki e Kd del PID in Simulink

SCHEMA A BLOCCHI

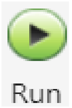
*Schema Simulink con **PID attivo***

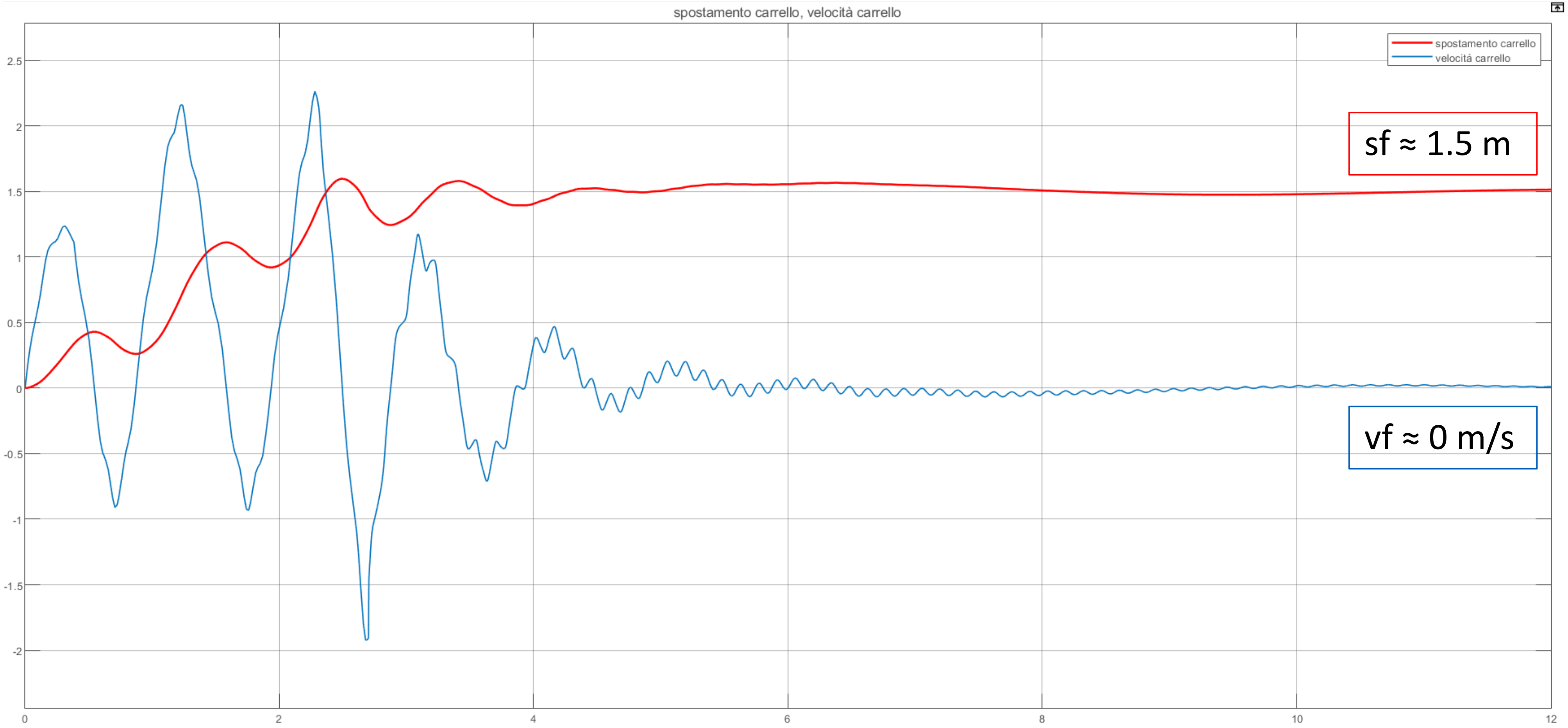


Il controllore PID entra in azione a fine azionamento (tf = 2.7s)

SCHEMA A BLOCCHI

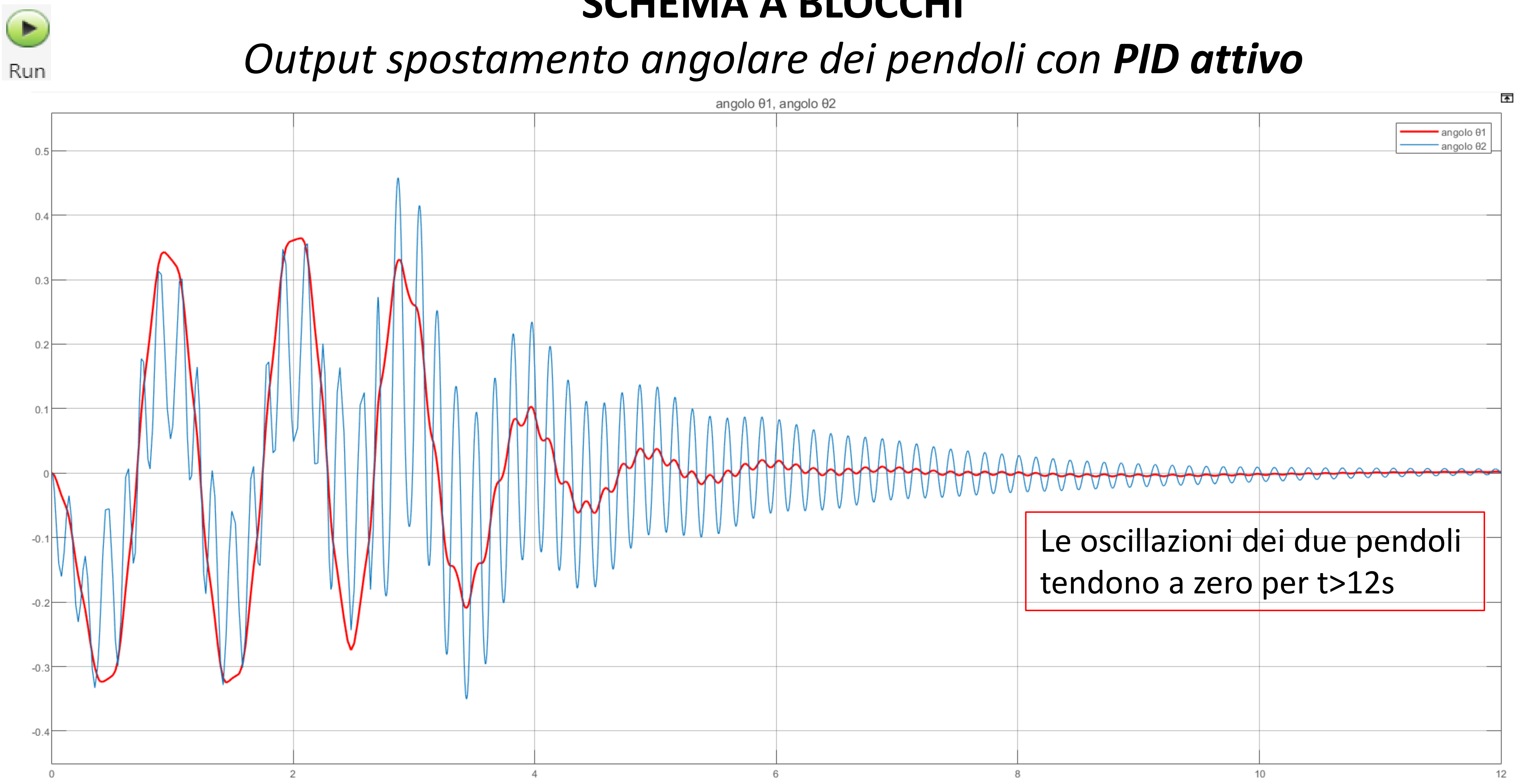
*Output spostamento e velocità del carrello con **PID attivo***





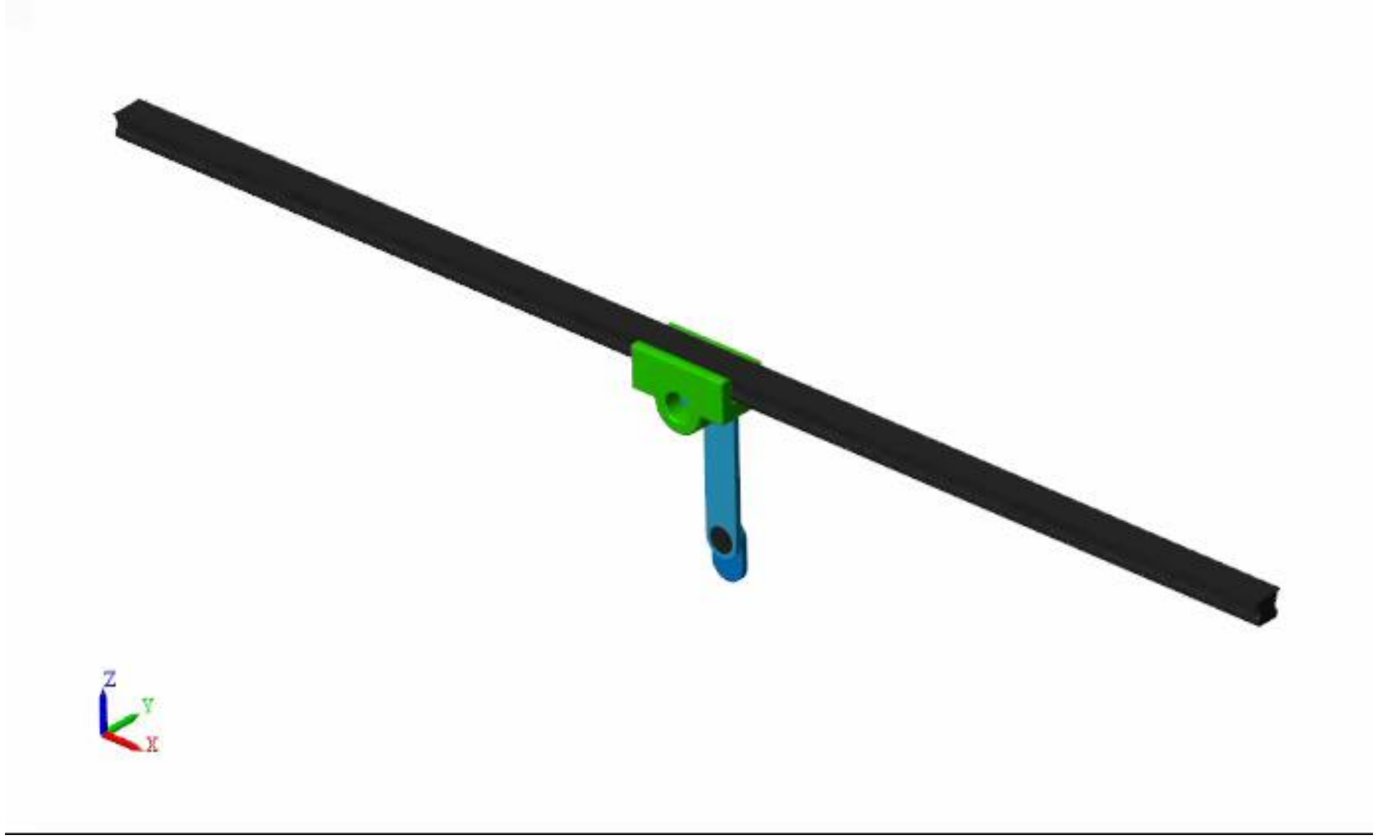
SCHEMA A BLOCCHI

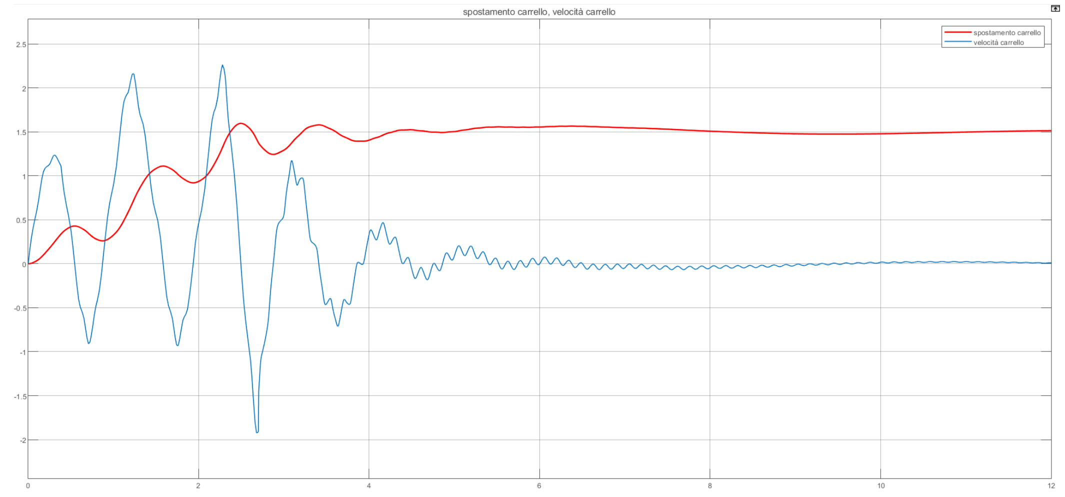
*Output spostamento angolare dei pendoli con **PID attivo***

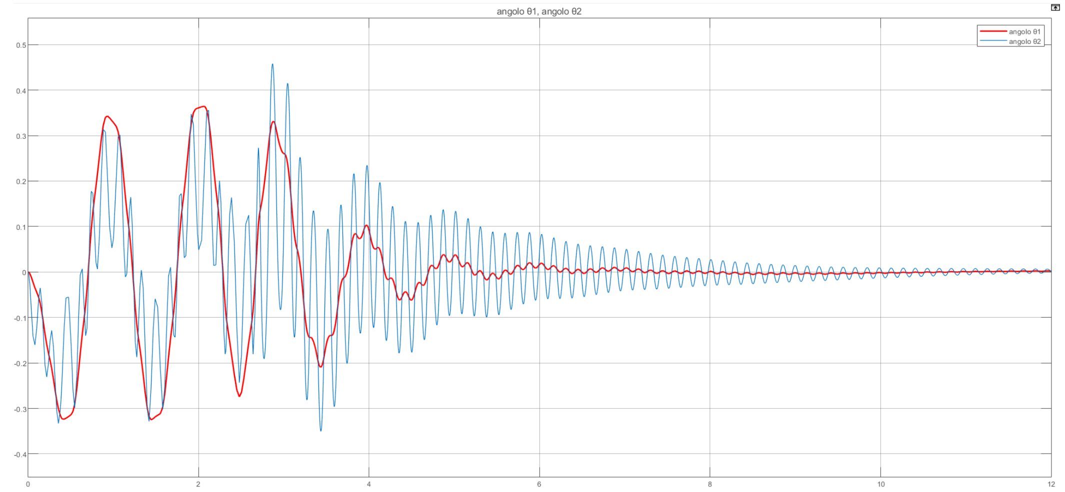


Le oscillazioni dei due pendoli tendono a zero per t>12s

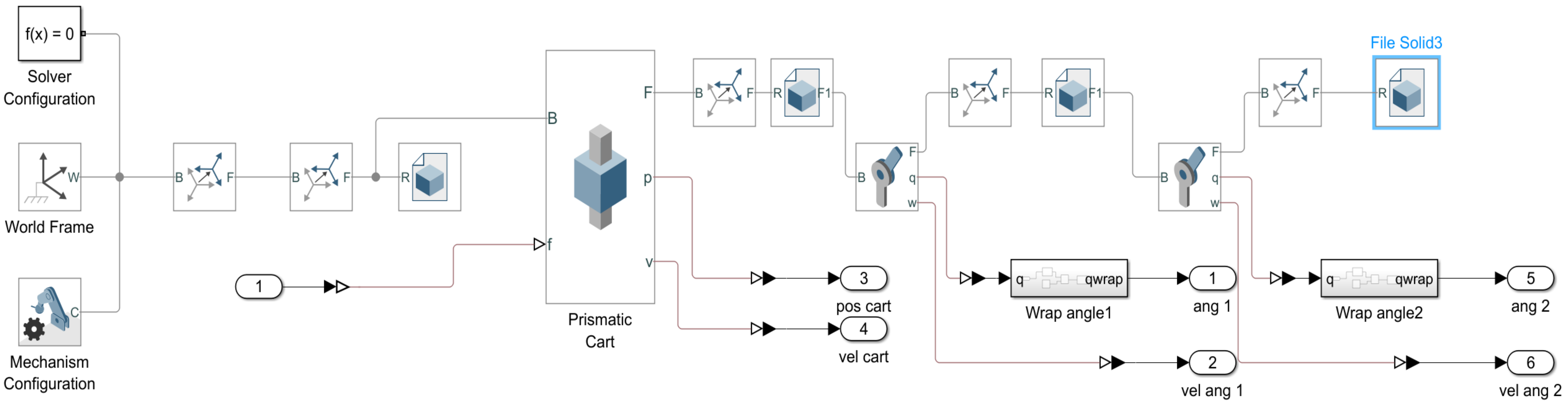
SIMULAZIONE MULTIBODY ‘MECHANICS EXPLORERS’







PENDOLO DOPPIO INVERSO: MODELLAZIONE TRAMITE SIMSCAPE



MODELLAZIONE IMMEDIATA, CONDIVISA CON IL PENDOLO DOPPIO CLASSICO

$$m_1 = m2 = 0.2\,kg$$

$$l_1 = l_2 = 0.2\,m$$

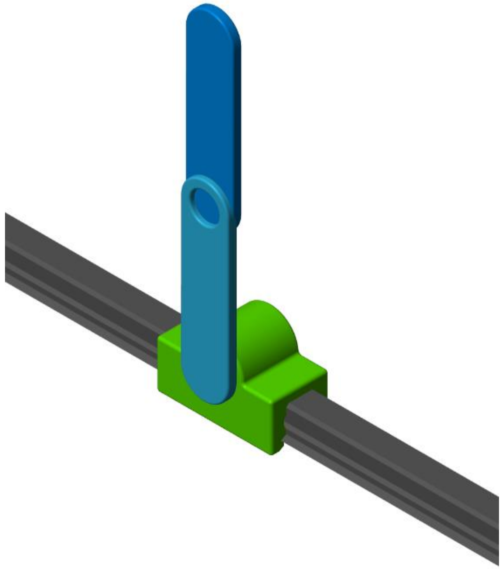
$$m_{carrello} = 0.5\,kg$$

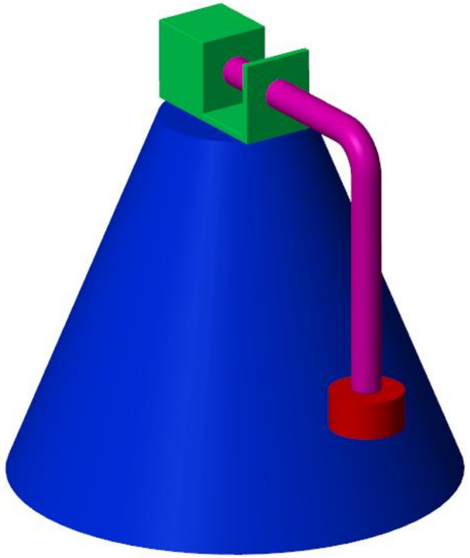
APPROFONDIMENTI

Nella sezione degli Approfondimenti ci concentriamo principalmente sullo studio di due sistemi:

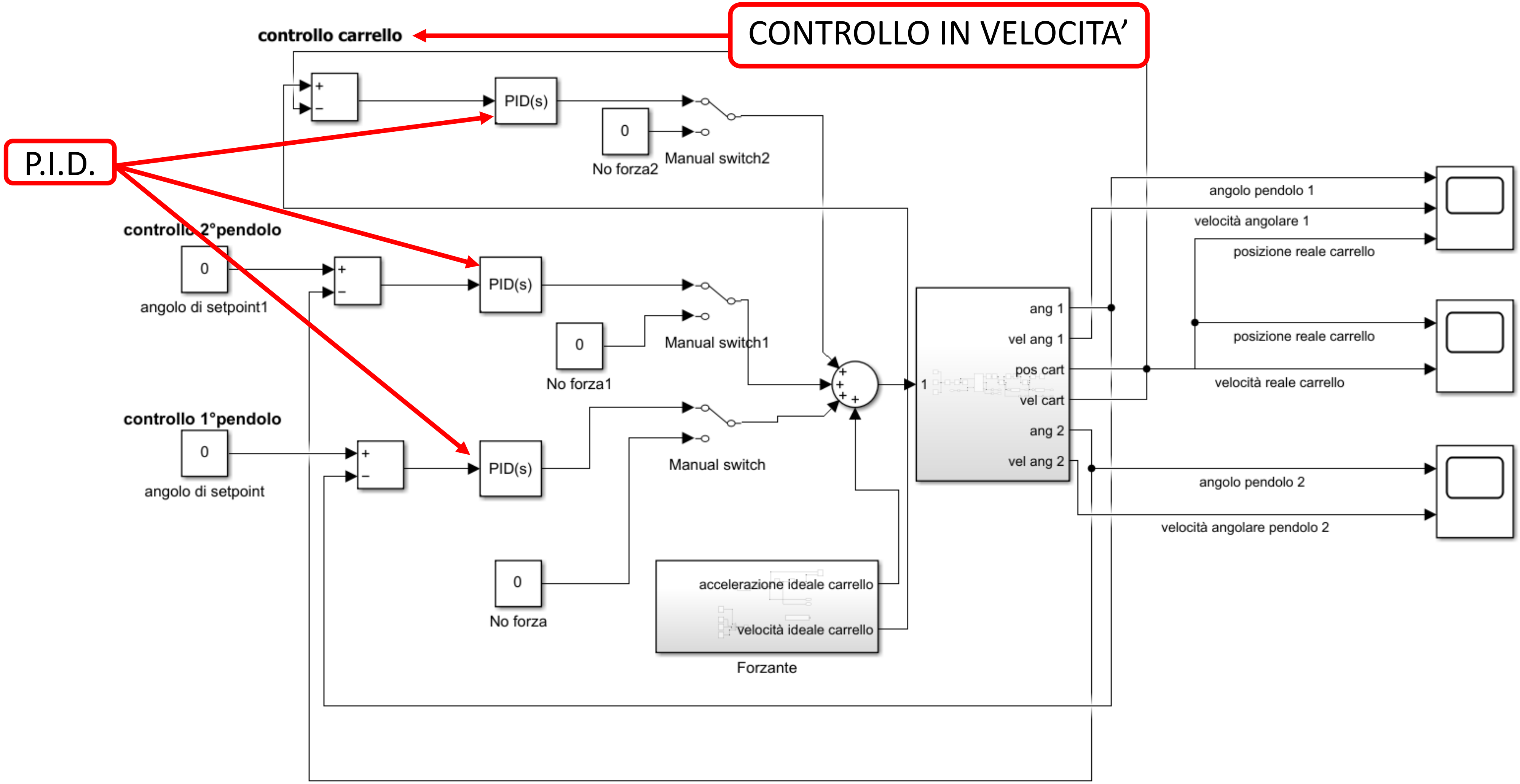
- Doppio pendolo inverso
- Pendolo di Furuta

Entrambi i sistemi vedono schema Simulink e Simscape con controllo PID.

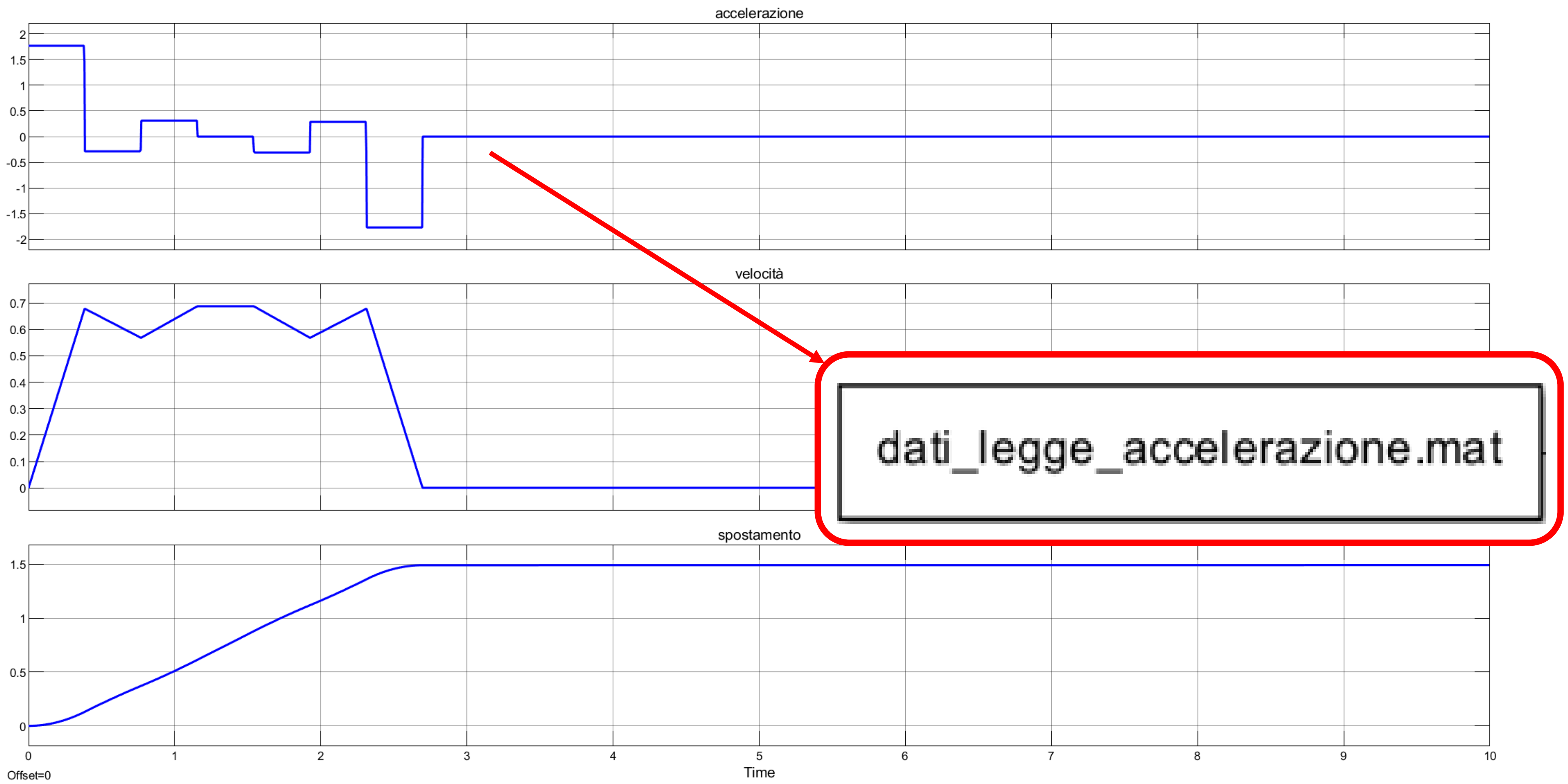




PENDOLO DOPPIO INVERSO: MODELLAZIONE TRAMITE SIMSCAPE



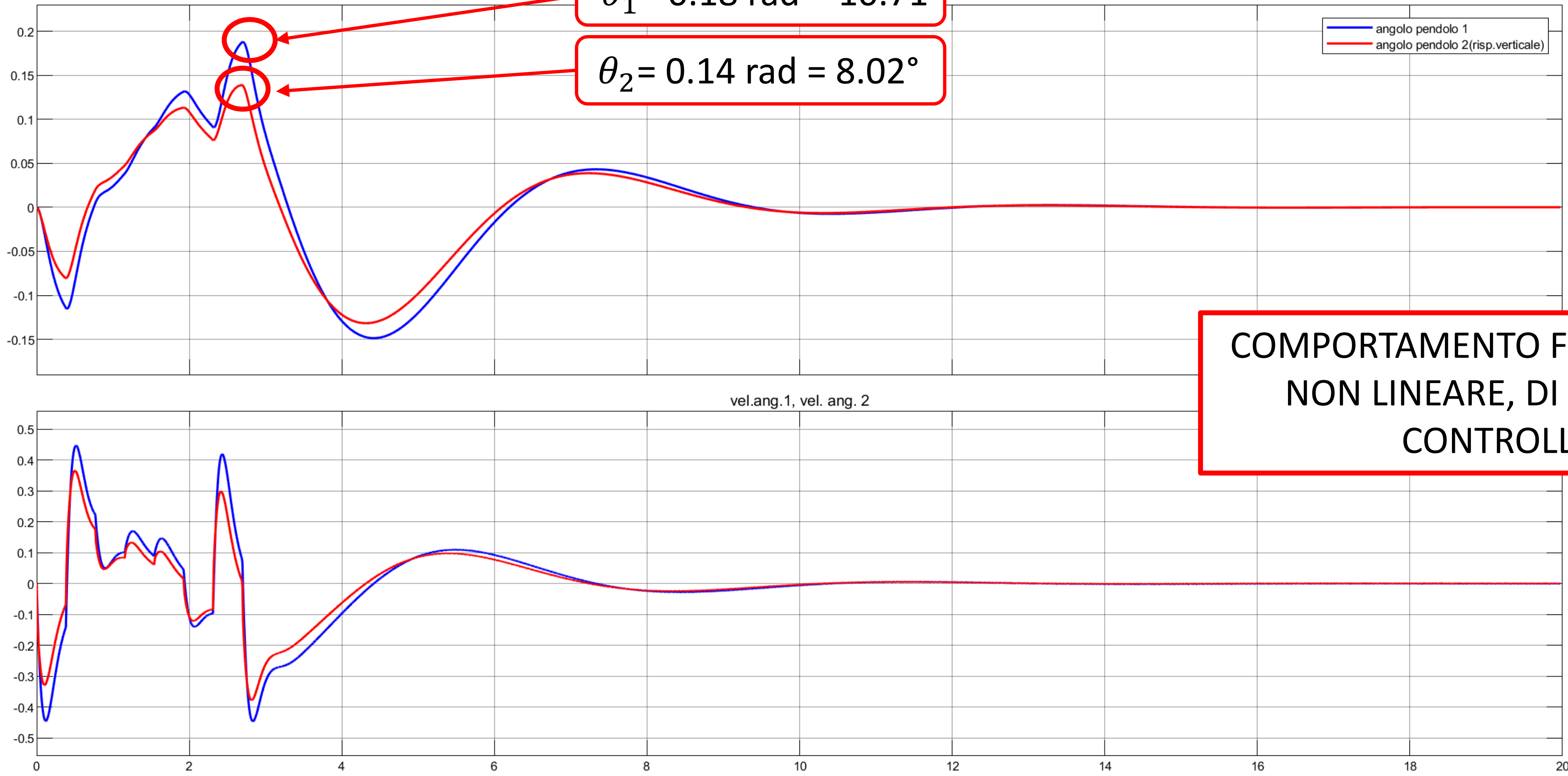
PENDOLO DOPPIO INVERSO: LEGGE DEL MOTO



PENDOLO DOPPIO INVERSO: SPOSTAMENTO ANGOLARE

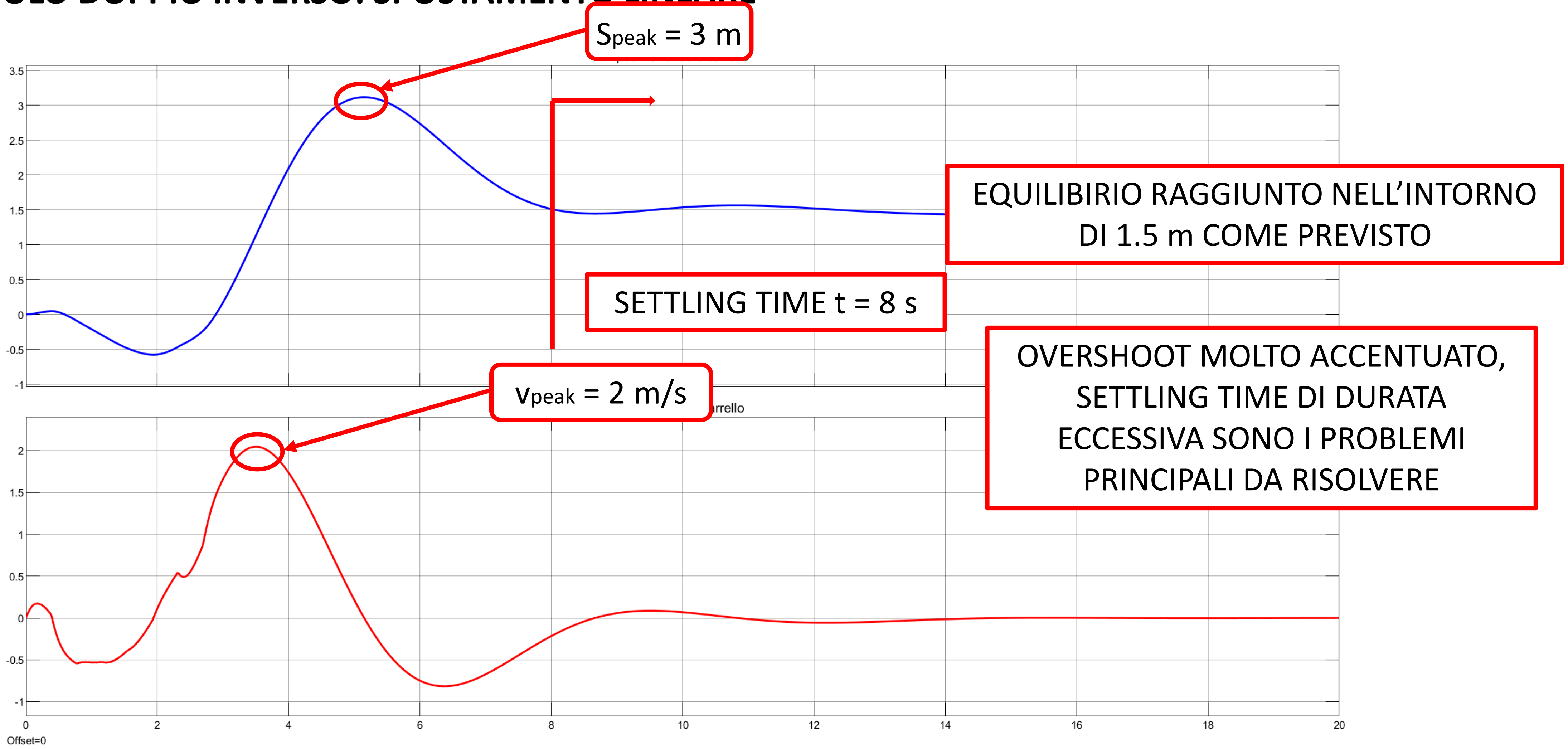
$\theta_1 = 0.18 \text{ rad} = 10.71°$

$\theta_2 = 0.14 \text{ rad} = 8.02°$

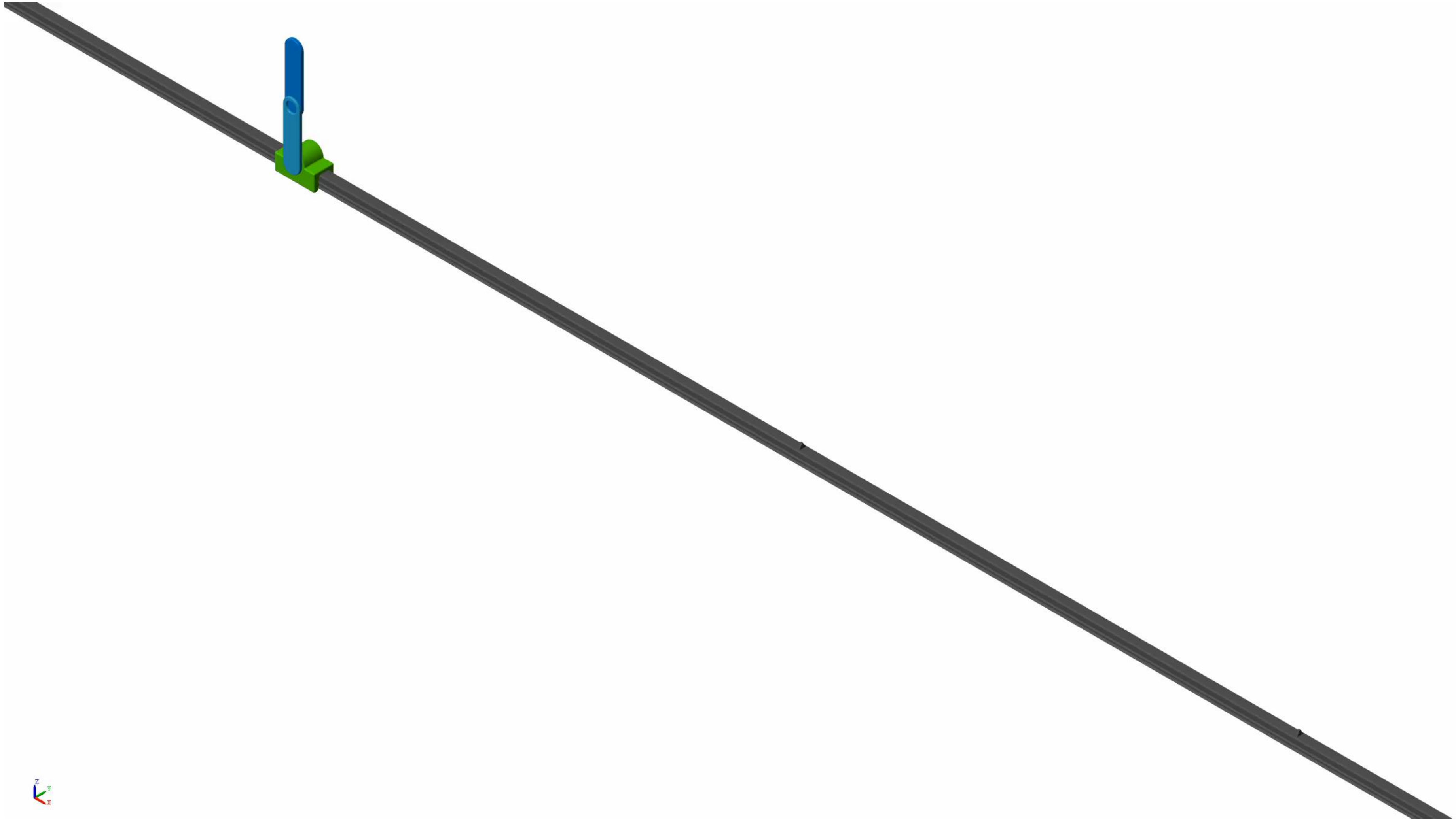


COMPORTAMENTO FORTEMENTE NON LINEARE, DI DIFFICILE CONTROLLO

PENDOLO DOPPIO INVERSO: SPOSTAMENTO LINEARE

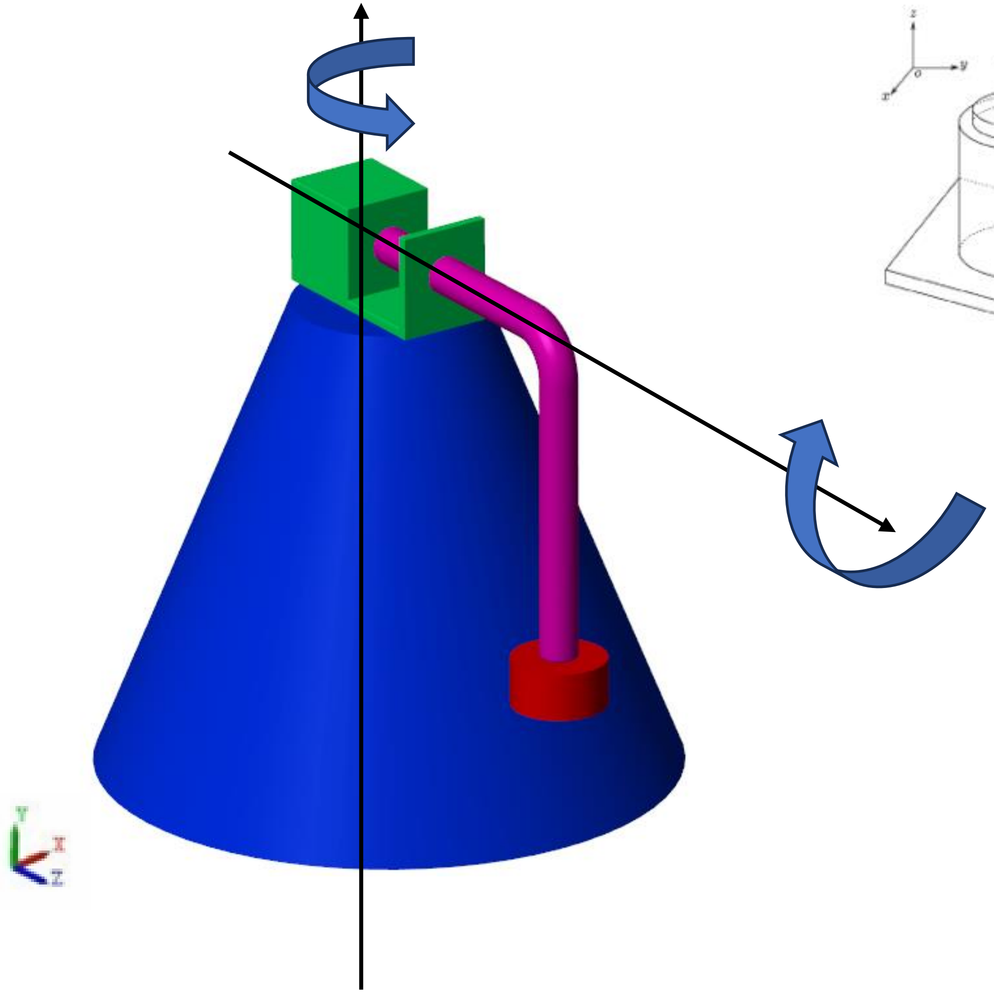


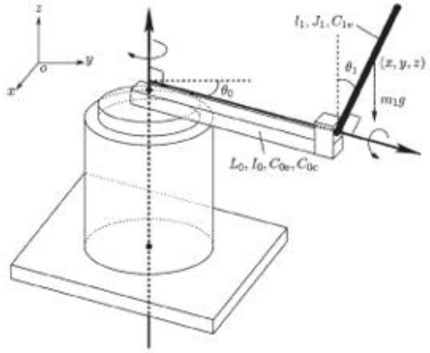
PENDOLO DOPPIO INVERSO: SPOSTAMENTO ANGOLARE



PENDOLO DI FURUTA

Il sistema preso in esame ha 2 gradi di libertà rotazionali, mostrati in figura. L'obbiettivo dell'analisi è quello di implementare un controllo delle vibrazioni del pendolo e/o del motore (blocco verde).

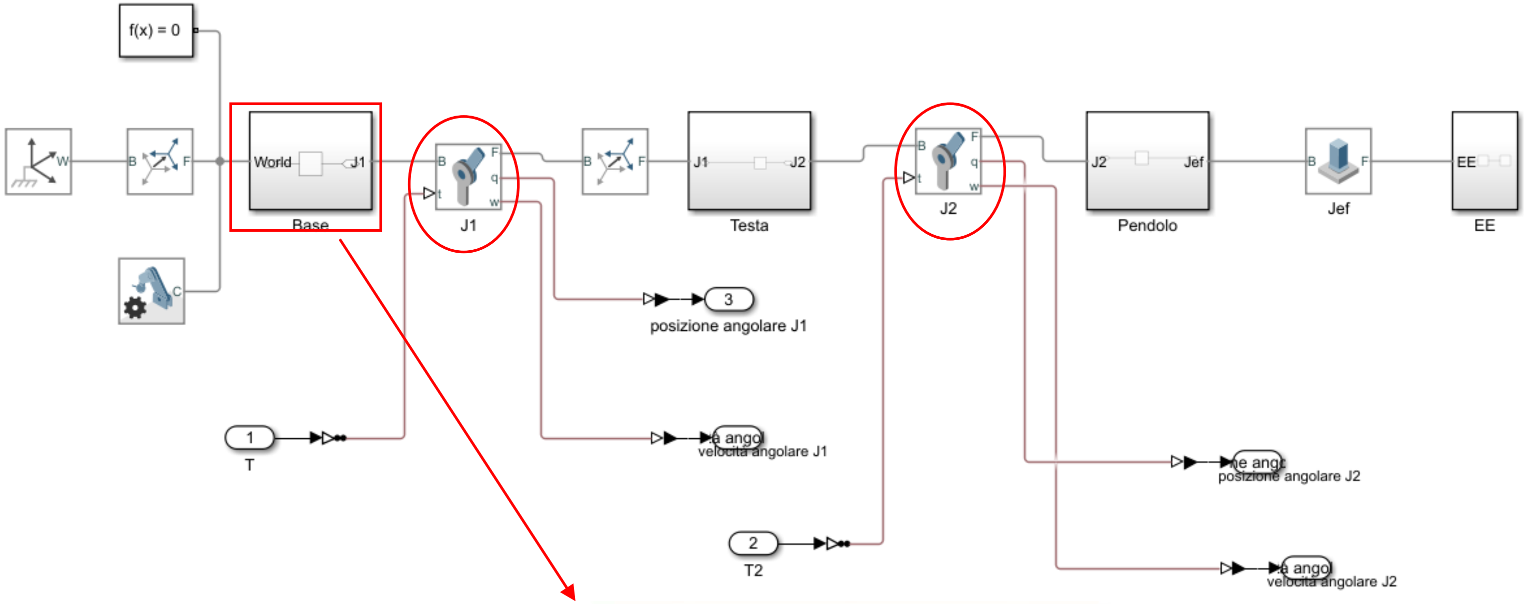


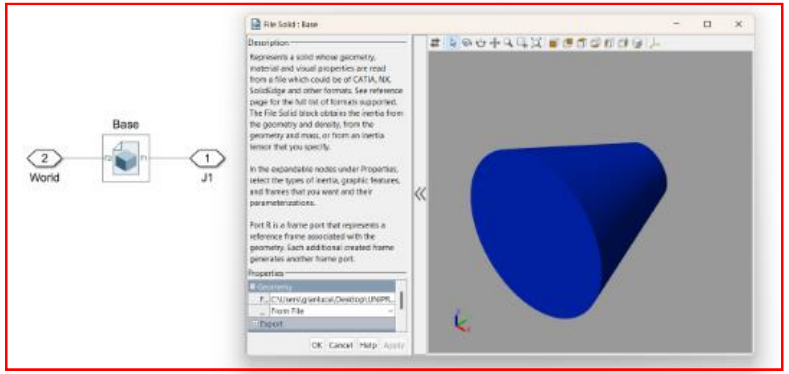


PENDOLO DI FURUTA

Il procedimento seguito per la realizzazione dei modelli è lo stesso utilizzato per i sistemi precedenti.

L'analisi è stata effettuata riferendosi al moto dei due giunti.

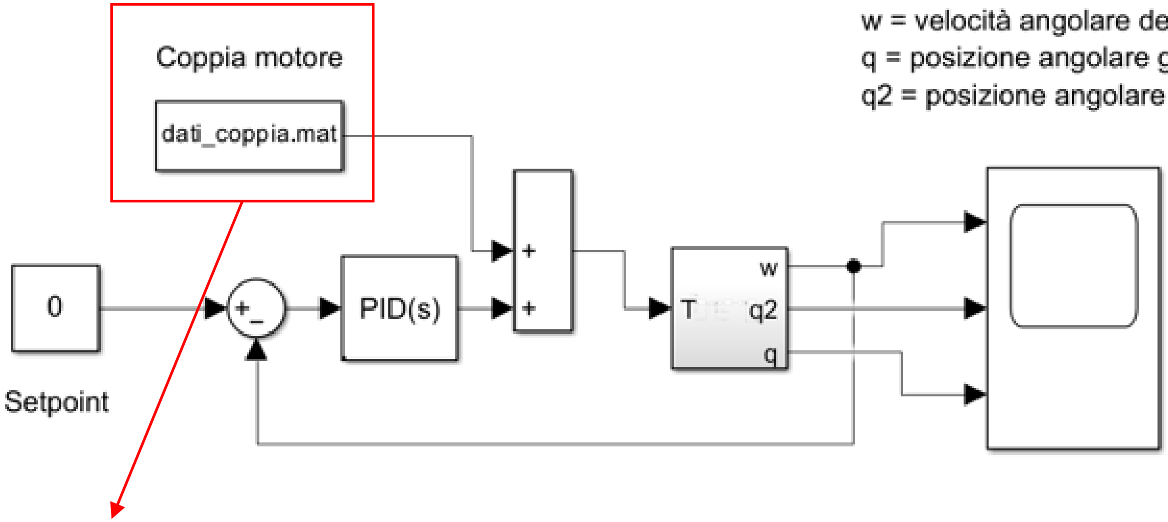




PENDOLO DI FURUTA

In primo approccio, è stata implementata una coppia al J1 che simulasse quella di un motore elettrico durante un posizionamento.

w = velocità angolare del giunto base-testa
q = posizione angolare giunto base-testa
q2 = posizione angolare giunto testa-pendolo



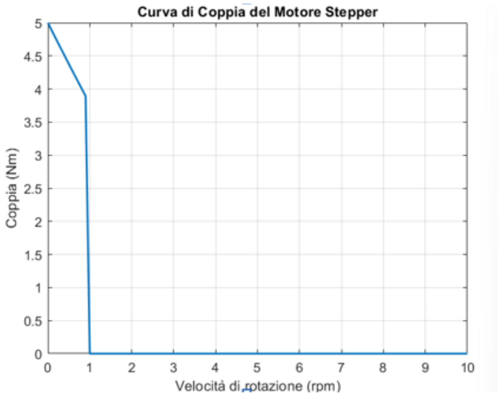


Figura 56 Curva di coppia motore elettrico

```
C = Cmax./(1+exp(a*(w/w0)));
```

PENDOLO DI FURUTA

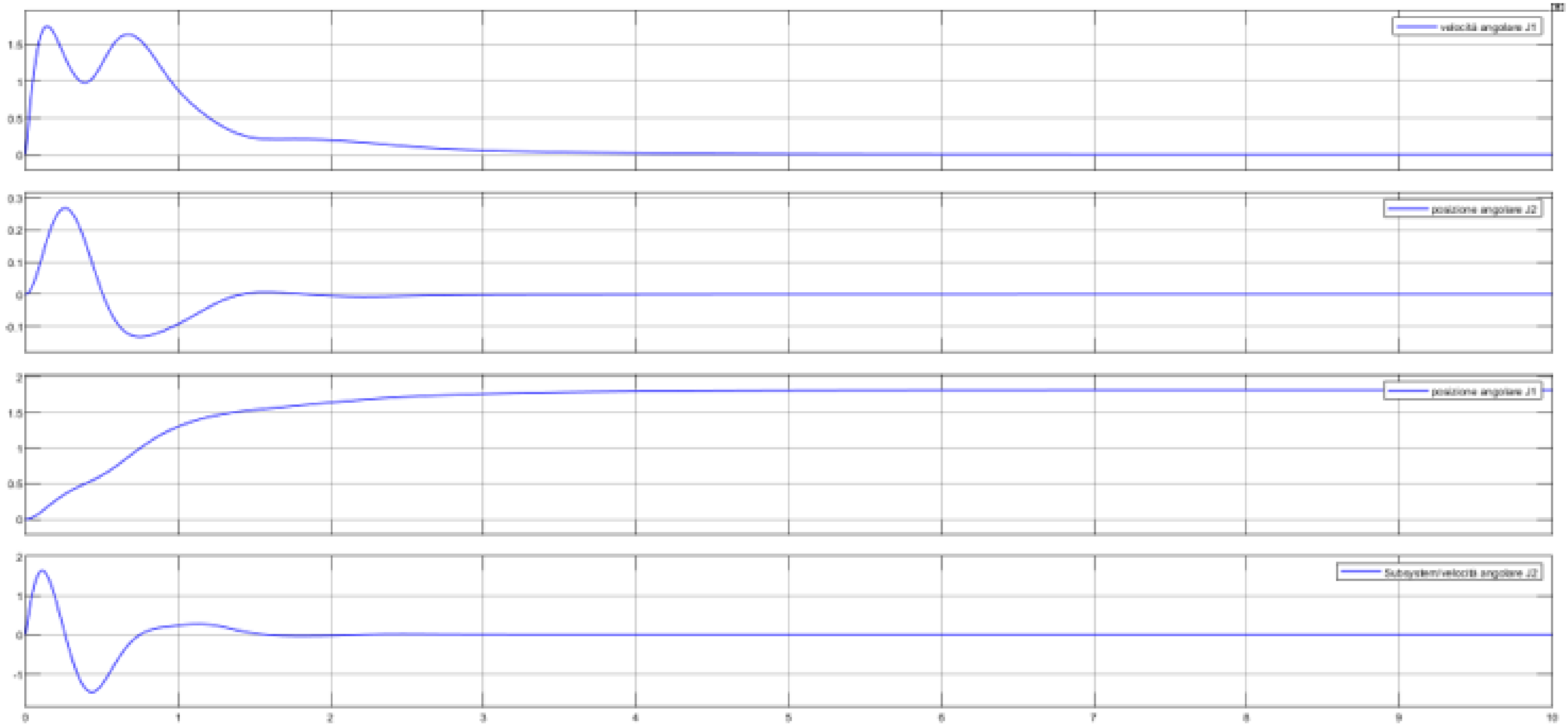
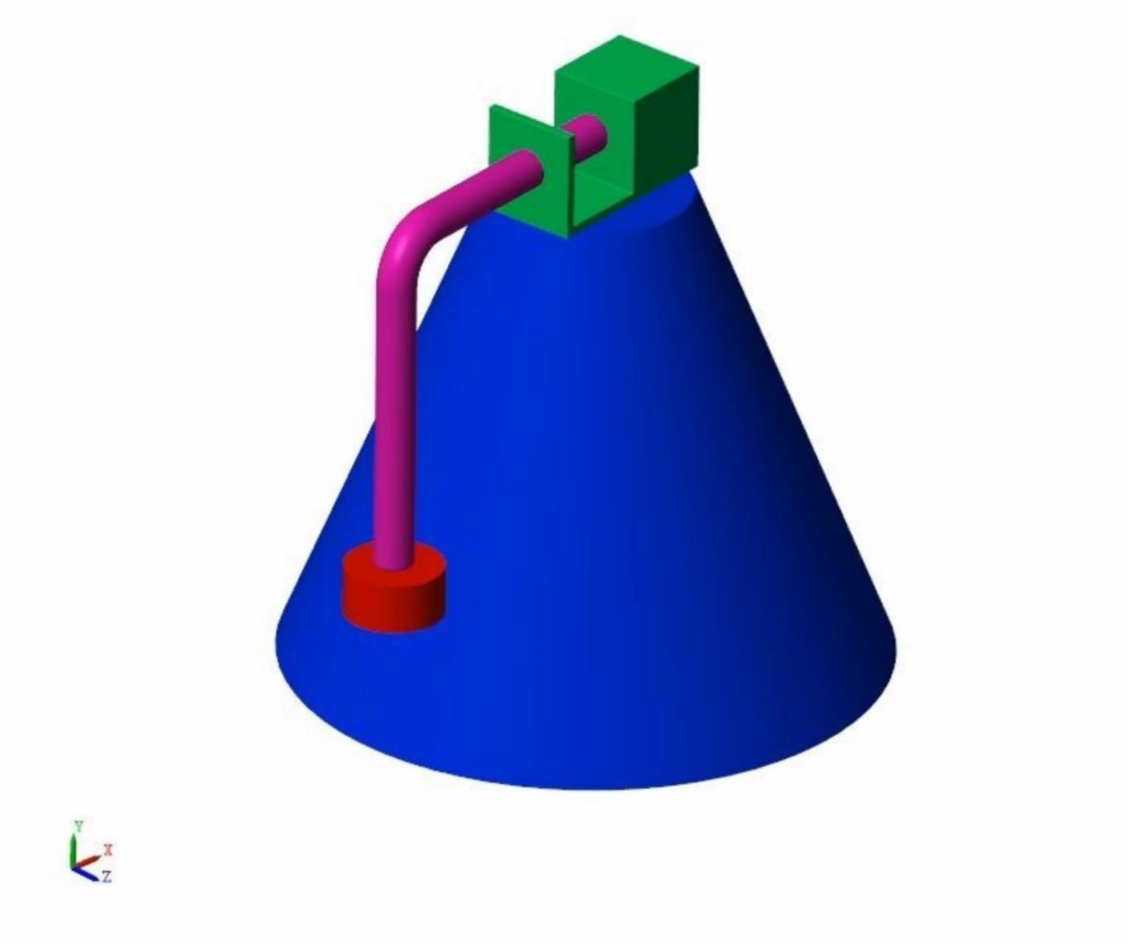


Figura 57 Posizione e velocità di J1 e J2

PENDOLO DI FURUTA

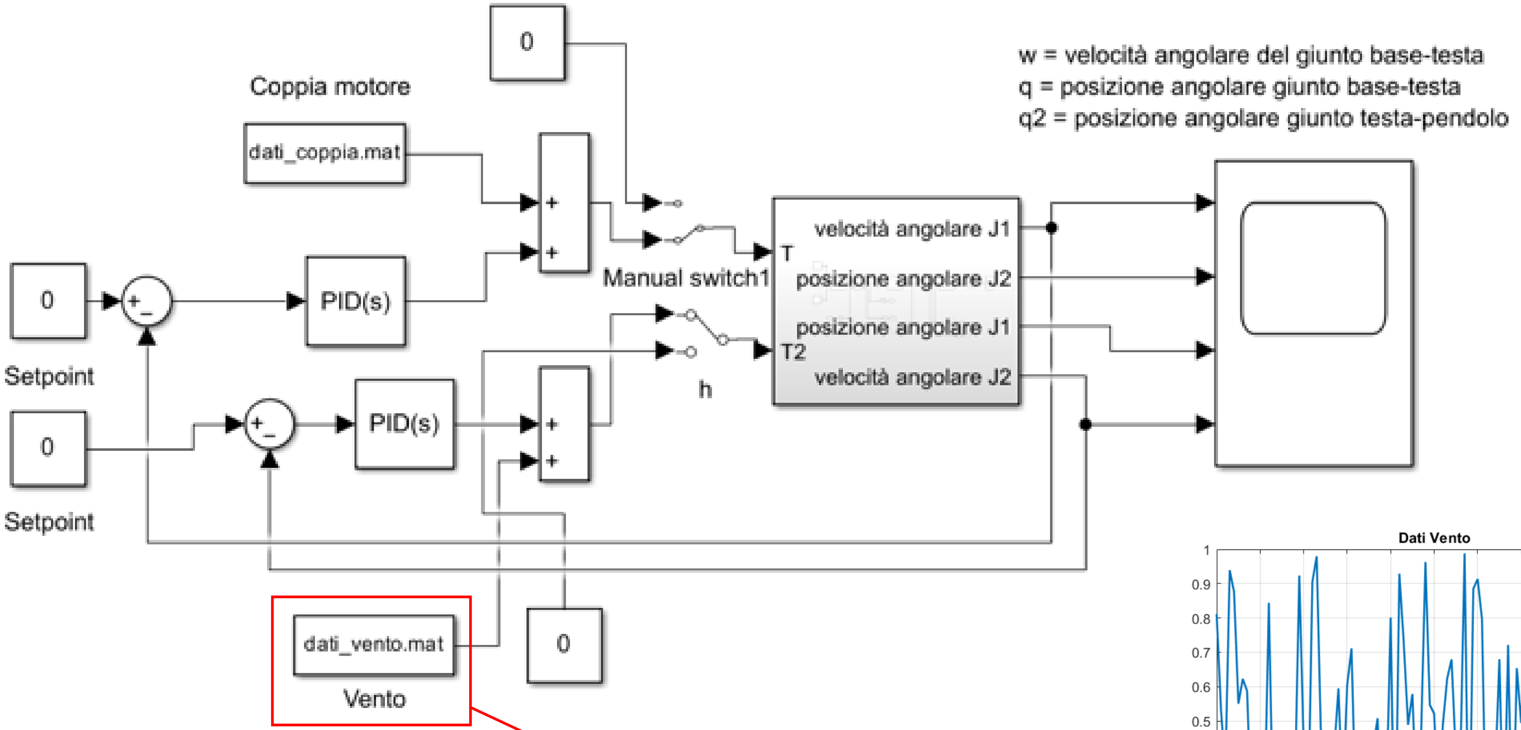
Caso con singolo controllo



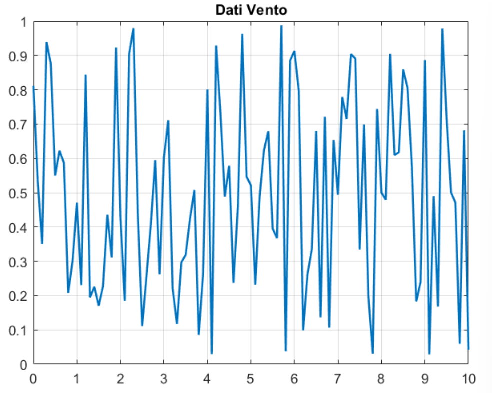
PENDOLO DI FURUTA

Si è passati, poi, ad un doppio controllo della velocità su entrambi i revolute joint.

Al joint tra motore-pendolo è stata applicata una forzante random.




```
vento = rand(101,1);
time = 0:0.1:10;
```



PENDOLO DI FURUTA

L'efficacia del modello è verificata poiché, anche in presenza di forzante random, le vibrazioni del pendolo sono trascurabili.

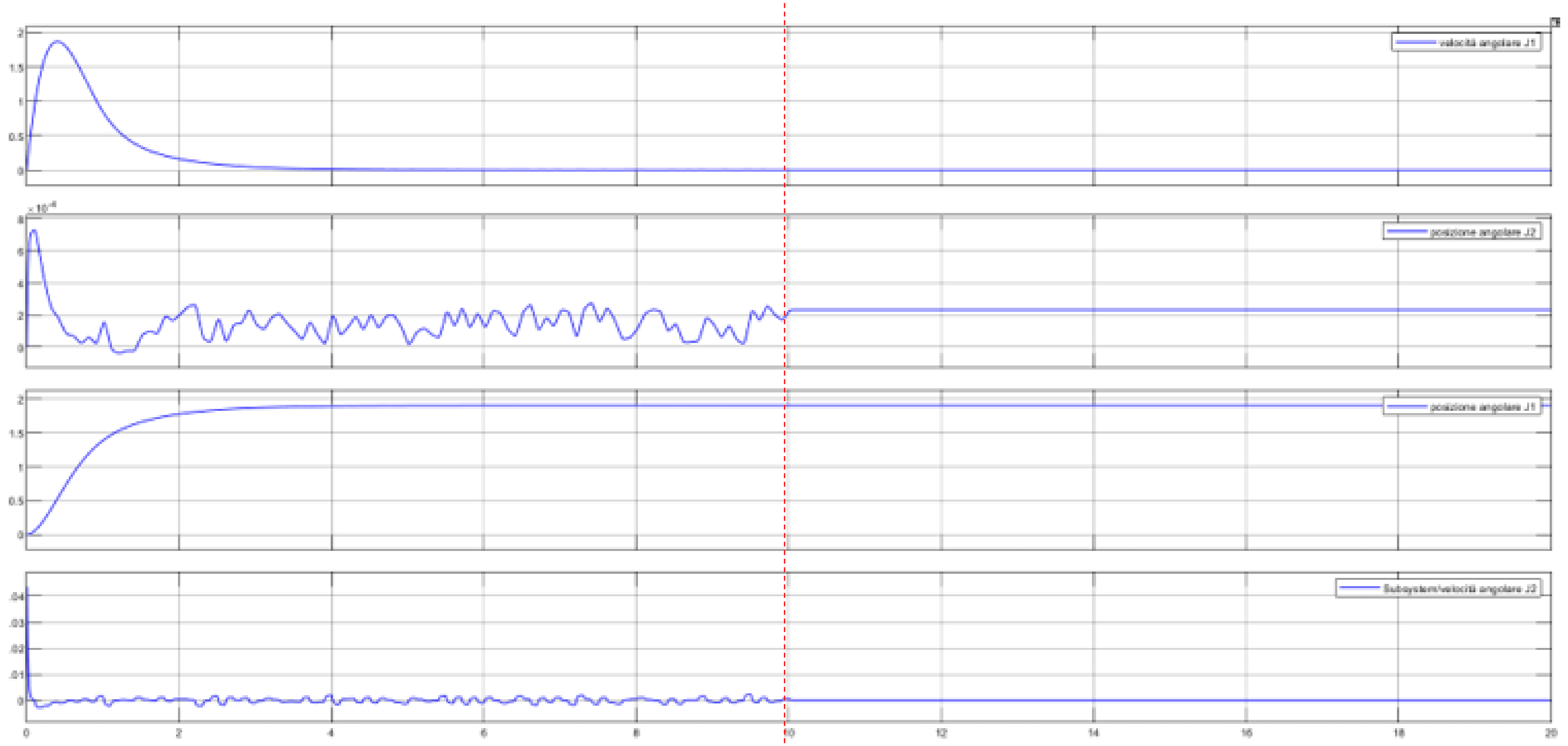
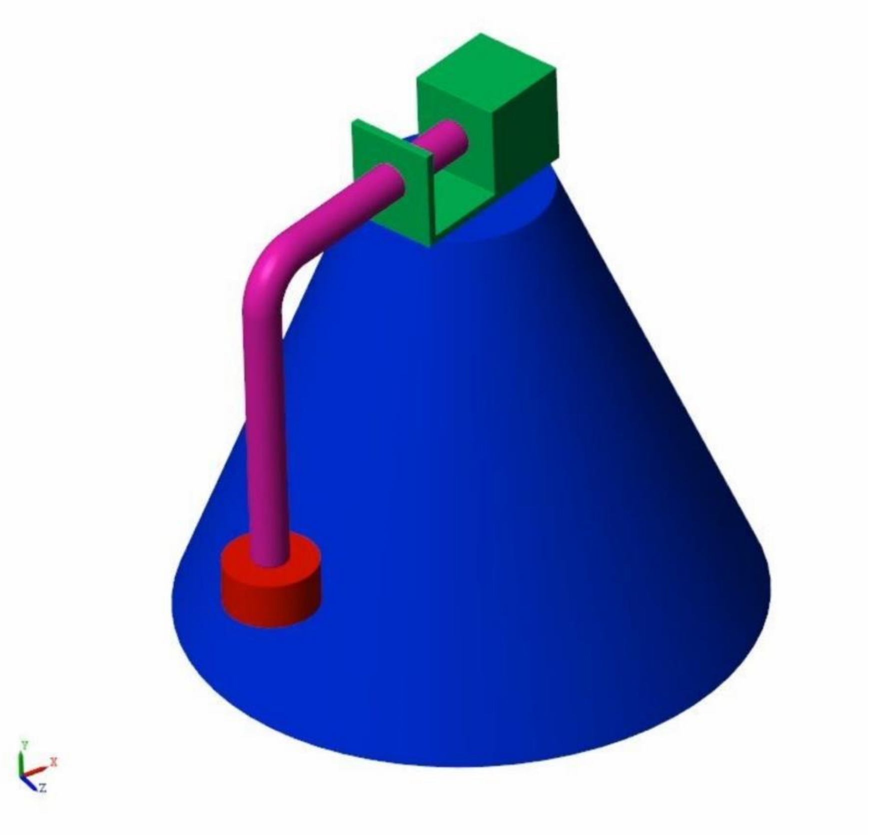


Figura 61 Grafici ottenuti con coppia nulla dopo intervallo di 10 secondi

PENDOLO DI FURUTA

Caso con doppio controllo



GRAZIE PER L'ATTENZIONE