



UNIVERSITÀ  
DI PARMA

# MODELLING FLEXIBLE ARMS VIBRATION-FREE MOVEMENTS

Università degli studi di Parma

Anno Accademico: 2022/2023

Cocconi Matteo 356072

Faia Ruben 355711

Ravaglia Roberto 356094

# Obiettivi



UNIVERSITÀ  
DI PARMA

## First Step:

- Approssimazione vibrazioni sistema 1 DOF  $y'' + w^2y = F(t)$

## Second Step:

- Definire la legge in input, le condizioni iniziali e finali e plottare la risposta del sistema

## Third Step:

- Considerare la legge di input totale e trovare la risposta del sistema a  $t_f$  e a  $t > t_f$ , dove  $t_f$  è il tempo di fine movimentazione.

## Fourth Step:

- Considerare la risposta del sistema a  $t > t_f$  e proporre soluzioni per ridurre le vibrazioni residue

# Obiettivi



UNIVERSITÀ  
DI PARMA

Opzionali:

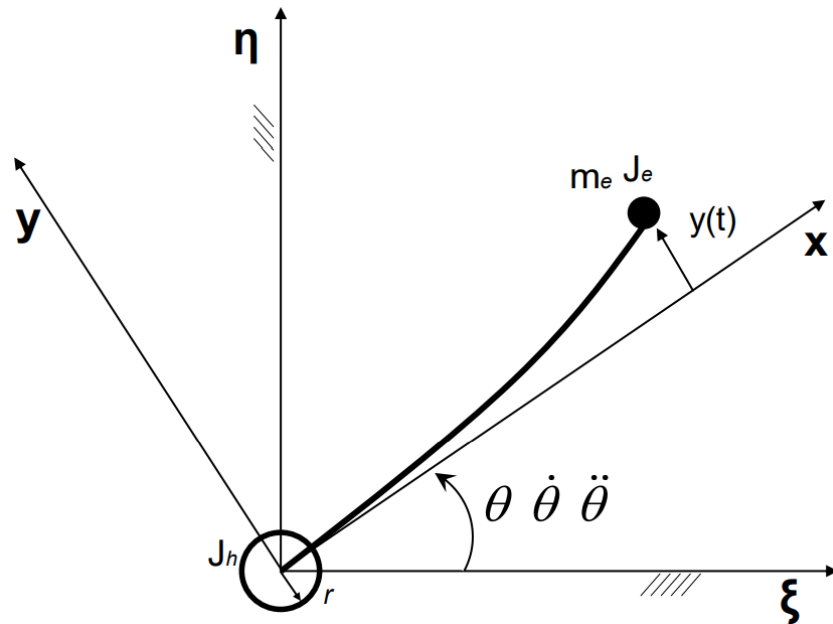
1. Considerare il loss factor  $\eta$  della trave in alluminio
2. Considerare la possibilità di aggiungere un assorbitore/neutralizzatore di vibrazioni, valutandone i suoi parametri
3. Proporre una differente legge del moto ottimizzata per ridurre le vibrazioni residue.

# Analisi del sistema

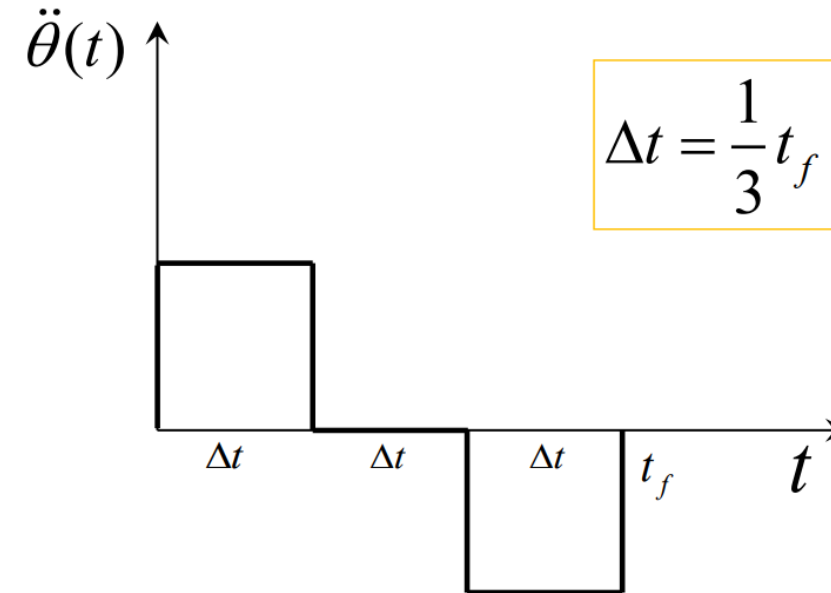


UNIVERSITÀ  
DI PARMA

## Modello del braccio:



## Legge di moto:



Control Slew angle $[\theta]$	$20^\circ$	Hub rotary inertia $[J_h]$	$0 \text{ kg m}^2$
Actioning time $[t_f]$	$1 \text{ s}$	Appendage Young's mod. $[E]$	$7 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$
Appendage length $[L]$	$1 \text{ m}$	Appendage density $[\rho]$	$2.62 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
End mass $[m_e]$	$1 \text{ kg}$	End mass rotary inertia $[J_e]$	$J_e = m_e (0.05)^2$
Hub radius $[r]$	$0 \text{ m}$	Appendage cross-section	$0.05 \cdot 0.05 \text{ m}$

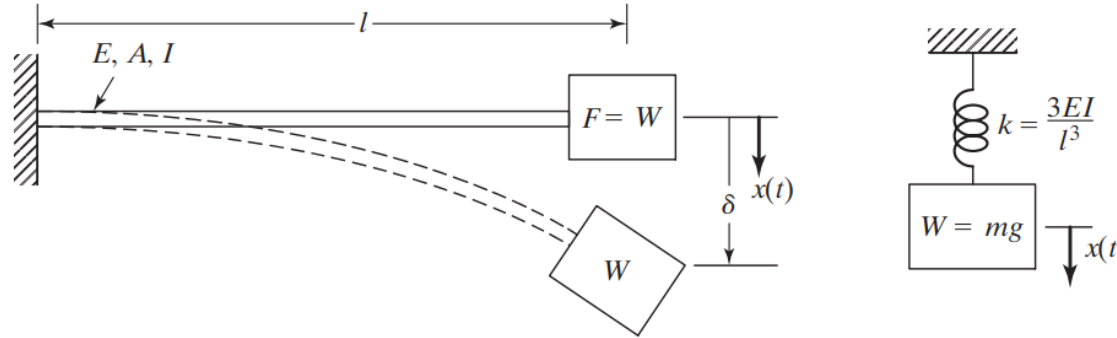
# Analisi del sistema



UNIVERSITÀ  
DI PARMA

Rigidezza Trave Alluminio:

$$k = \frac{(3EI)}{l^3} = 109375 \frac{N}{m}$$



Calcolo Accelerazione Angolare:

$$s = s_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$$

$$a = \Theta'' = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}^2$$

# 1DOF



UNIVERSITÀ  
DI PARMA

Equazione del moto :  $my'' + ky = F(t)$

3 metodi di risoluzione:

1. Soluzione Analitica
2. Soluzione tramite Matlab
3. Soluzione tramite Simulink



# 1DOF: Soluzione Analitica



UNIVERSITÀ  
DI PARMA

Equazione del moto:  $my'' + ky = F(t)$

$\Delta t = 1/3$  s

Condizioni Iniziali:

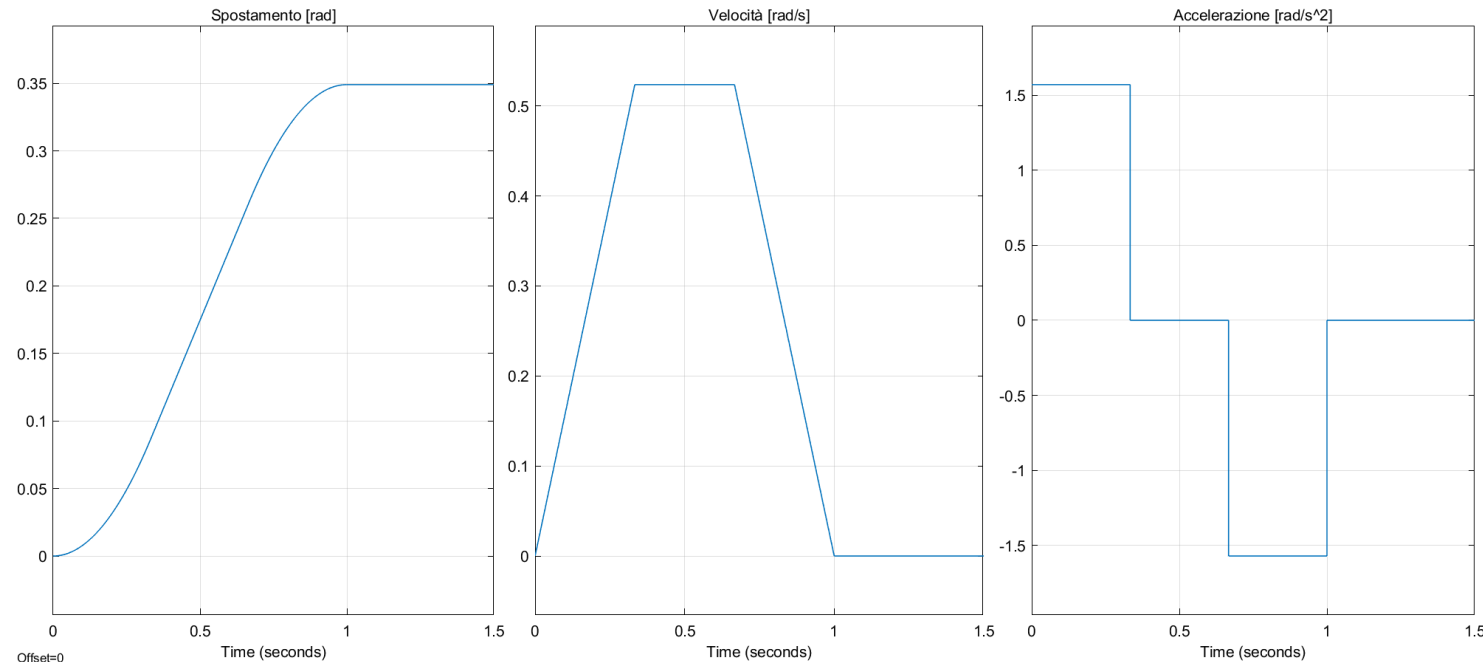
$y(0)=0$

$y'(0)=0$

Equazione risolta primo step:

$$y = \frac{F}{k} * (1 - \cos(w_n * t))$$

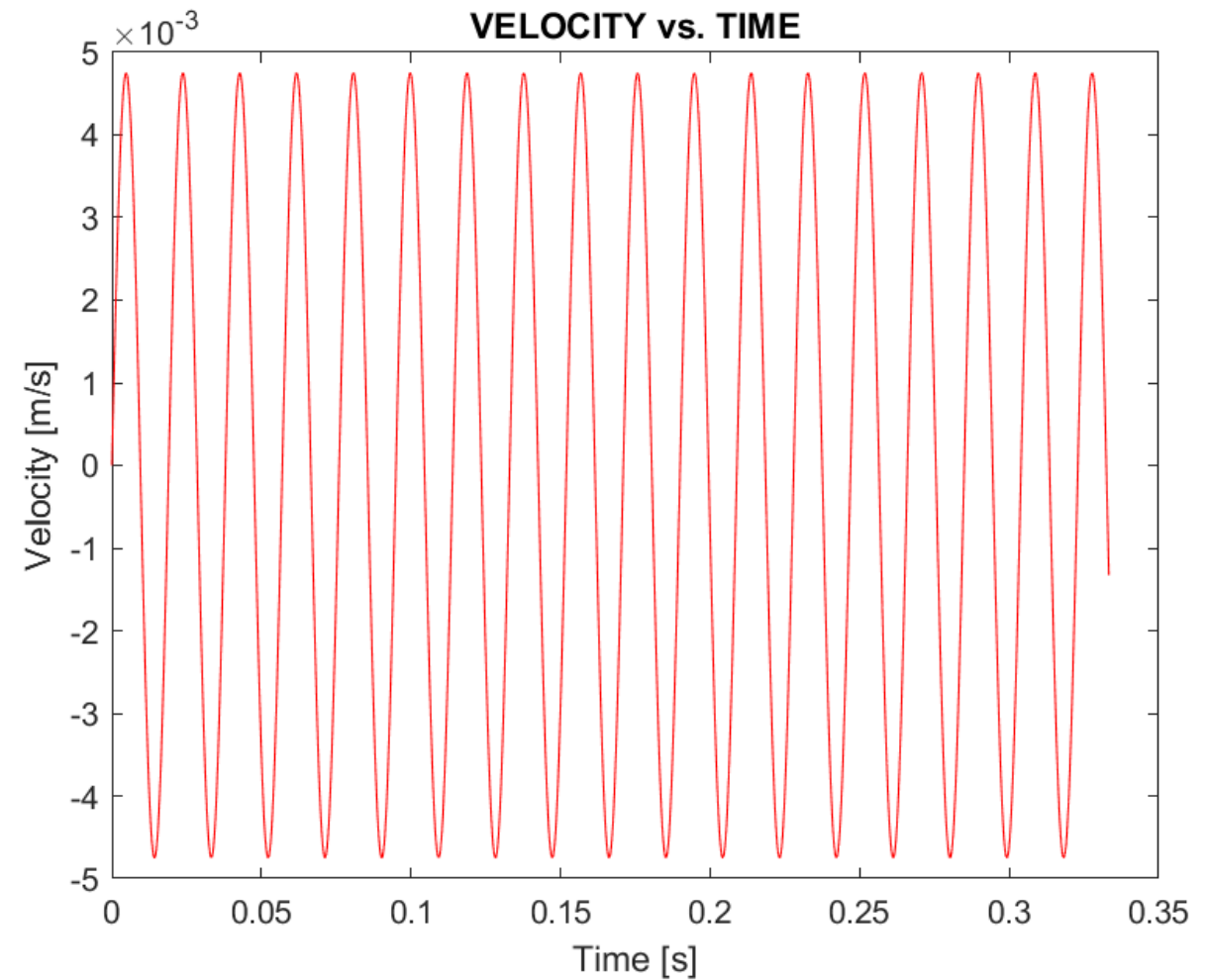
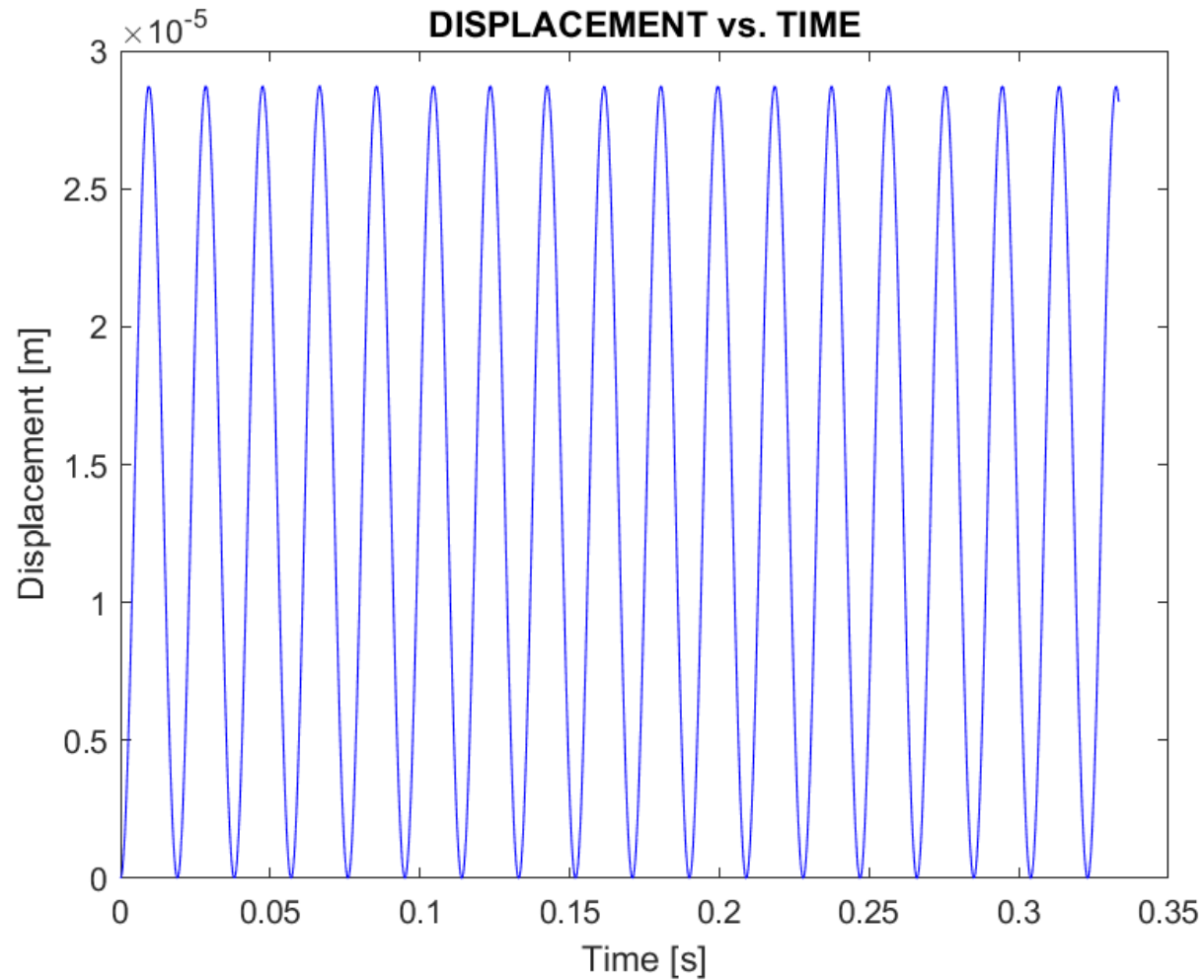
$$y' = \frac{F}{k} * (\sin(w_n * t) * w_n)$$



# 1DOF: Soluzione Analitica



UNIVERSITÀ  
DI PARMA





# 1DOF: Soluzione Analitica

Condizioni Iniziali a  $t=1/3$  s:

$$\text{spost\_finale}=(F/k)*(1-(\cos(\omega_n*t_f)));$$

$$\text{vel\_finale}=(F/k)*\omega_n*(\sin(\omega_n*t_f));$$

Equazione risolta secondo step:

$$y_2=(\text{vel\_finale}/\omega_n)*\sin(\omega_n*(t_2-t_0))+\text{spost\_finale}*\cos(\omega_n*(t_2-t_0));$$

$$y_2\dot{=}=(\text{vel\_finale}/\omega_n)*\cos(\omega_n*(t_2-t_0))*(\omega_n)-\text{spost\_finale}*\sin(\omega_n*(t_2-t_0))*\omega_n;$$

Condizioni Iniziali a  $t=2/3$  s:

$$\text{spost\_finale2}=(\text{vel\_finale}/\omega_n)*\sin(\omega_n*(2/3-t_0))+\text{spost\_finale}*\cos(\omega_n*(2/3-t_0));$$

$$\text{vel\_finale2}=(\text{vel\_finale}/\omega_n)*\cos(\omega_n*(2/3-t_0))*\omega_n+\text{spost\_finale}*(-\sin(\omega_n*(2/3-t_0))*\omega_n);$$

Equazione risolta terzo step:

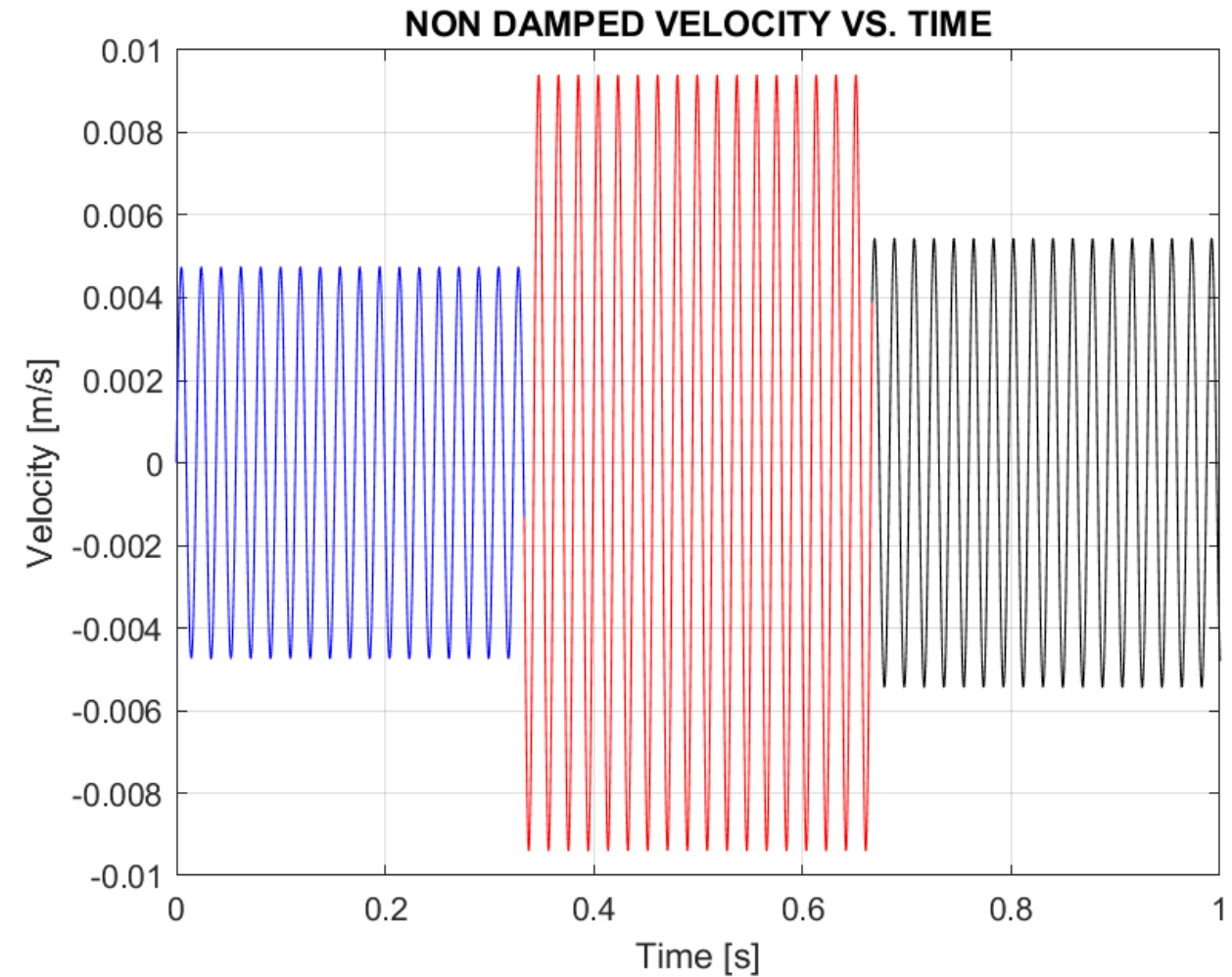
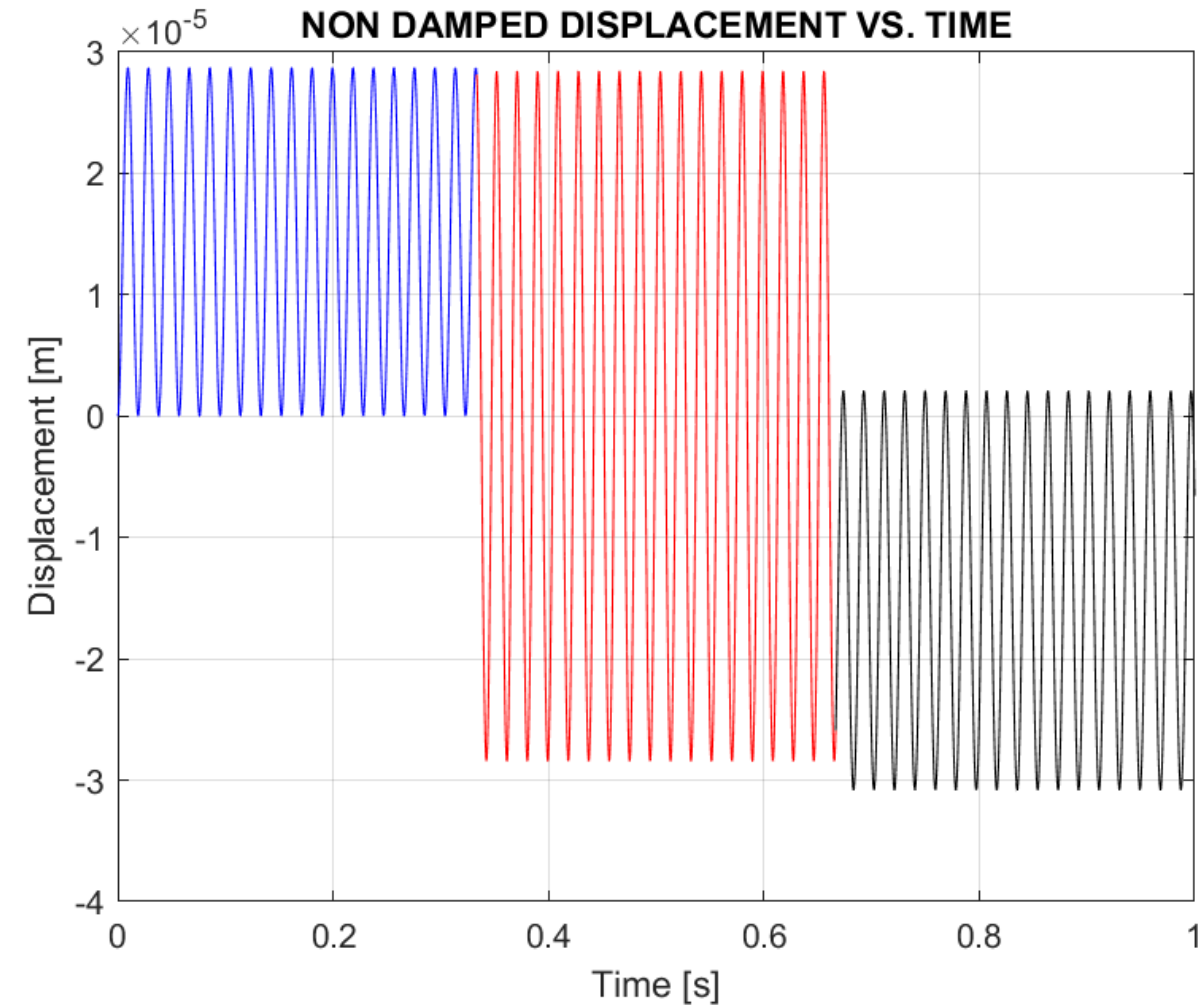
$$y_3=(\text{vel\_finale2}/\omega_n)*\sin(\omega_n*(t_3-2*t_0))+(\text{spost\_finale2}+F/\omega_n^2)*\cos(\omega_n*(t_3-2*t_0))-F/\omega_n^2;$$

$$y_3\dot{=}=(\text{vel\_finale2}/\omega_n)*\cos(\omega_n*(t_3-2*t_0))*\omega_n+(\text{spost\_finale2}+F/\omega_n^2)*(-\sin(\omega_n*(t_3-2*t_0))*\omega_n);$$

# 1DOF: Soluzione Analitica



UNIVERSITÀ  
DI PARMA



# 1DOF: Sol. Analitica Smorzata



UNIVERSITÀ  
DI PARMA

Considerando il loss factor della trave:

$$\eta = 2\zeta \rightarrow \zeta = 0.5 * 10^{-4}$$

Material	Viscous Damping Ratio $\zeta$ (under approximately 20 °C)
Aluminum	$\sim 0.5 \cdot 10^{-4}$
Lead (pure)	$\sim 10^{-2}$
Iron	1 to $3 \cdot 10^{-4}$
Copper (polycrystalline)	$10^{-3}$
Magnesium	$\sim 0.5 \cdot 10^{-4}$
Brass	$< 0.5 \cdot 10^{-3}$
Nickel	$< 0.5 \cdot 10^{-3}$
Silver	$< 1.5 \cdot 10^{-3}$
Bismuth	$\sim 4 \cdot 10^{-4}$
Zinc	$\sim 1.5 \cdot 10^{-4}$
Tin	$\sim 10 \cdot 10^{-4}$

Coefficiente di smorzamento critico = smorzamento/smorzamento critico

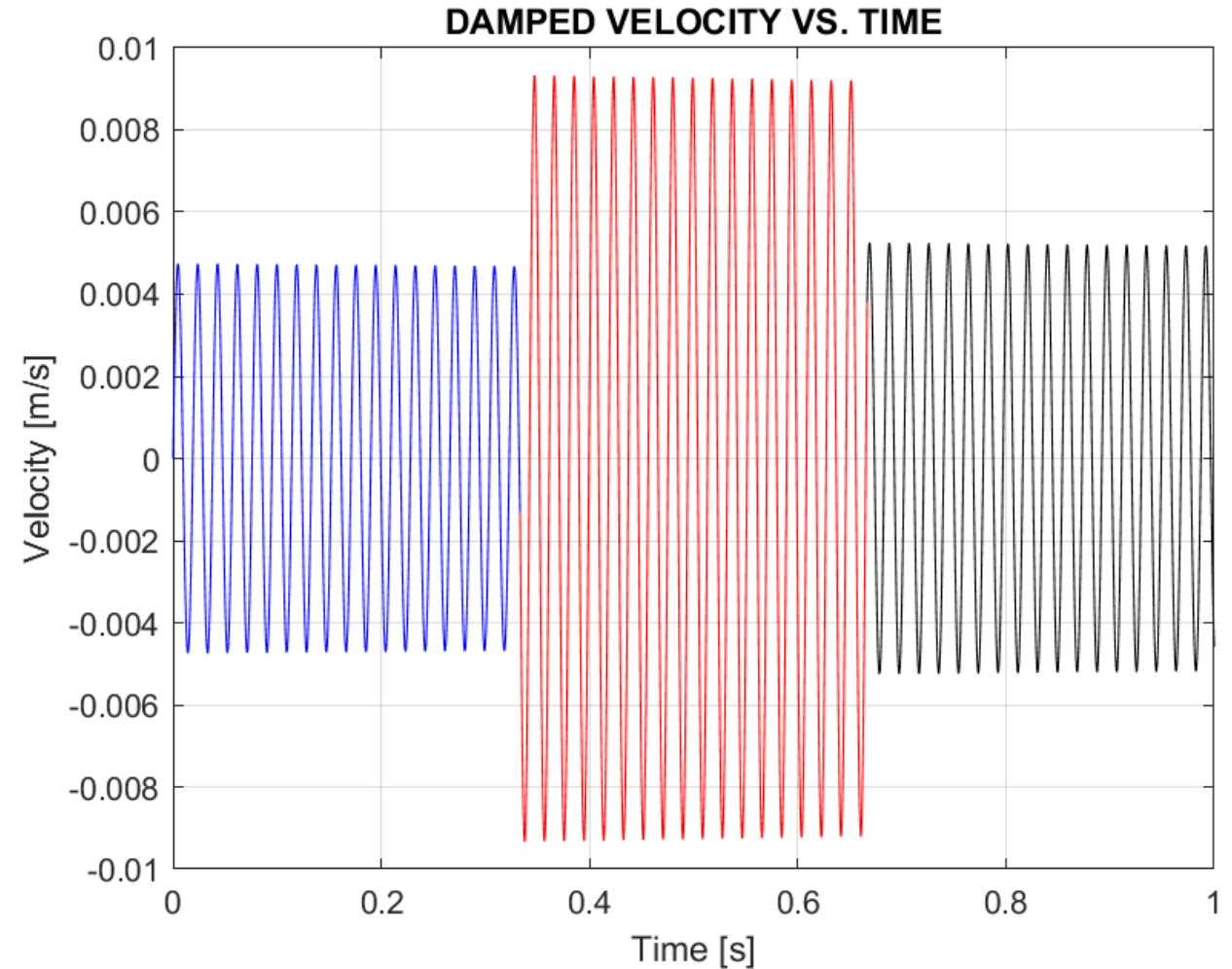
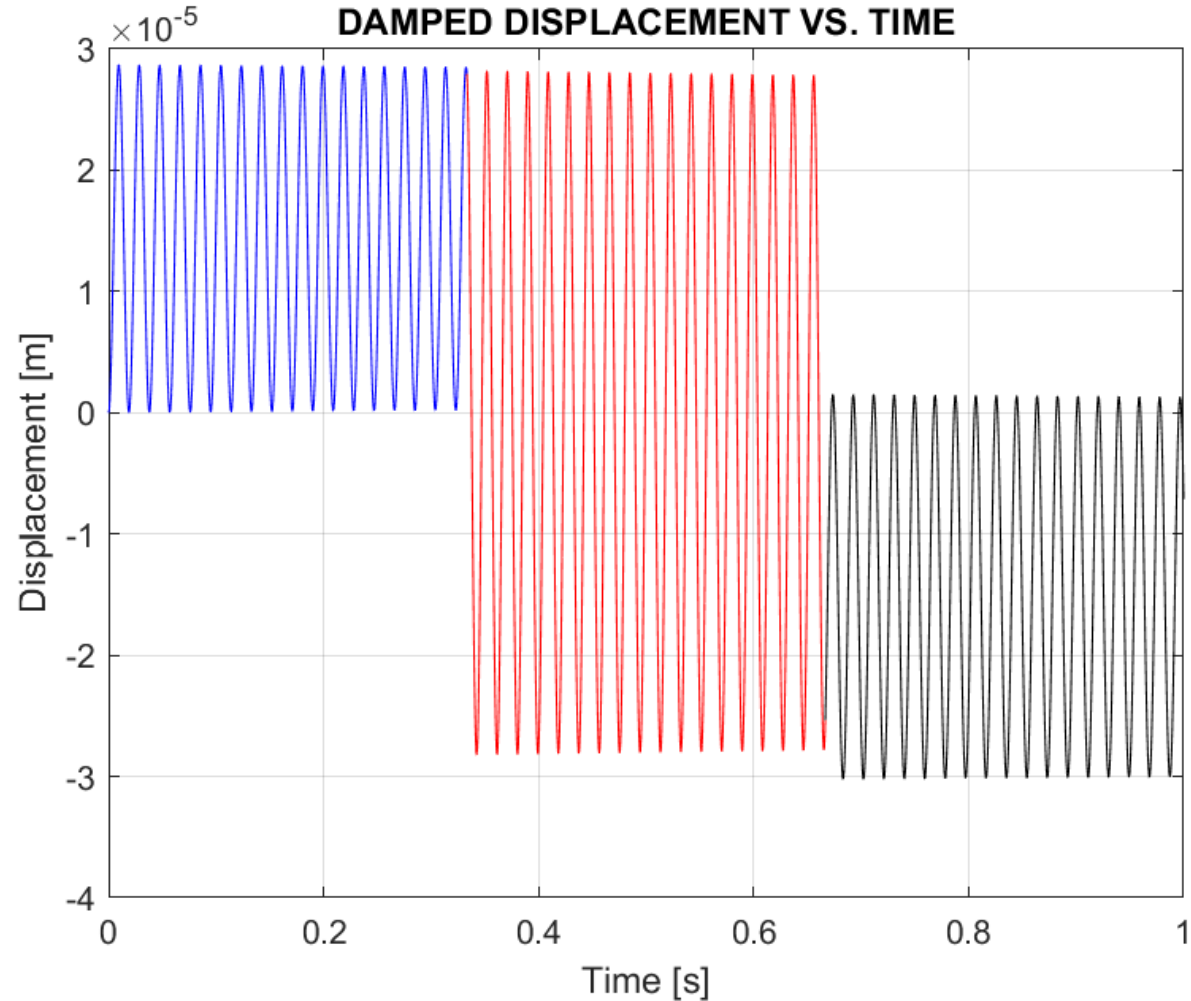
$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \rightarrow c = \zeta * 2\sqrt{km}$$

Equazione del moto:  $my'' + cy' + ky = F(t)$

# 1DOF: Sol. Analitica Smorzata



UNIVERSITÀ  
DI PARMA



# 1DOF: Soluzione ODE45



UNIVERSITÀ  
DI PARMA

```
function dydt=eq_diff_spost(t,y)
```

```
m0=6.75;
```

```
m1=1+33/140*m0;
```

```
L=1;
```

```
E=7e10;
```

```
h=0.05;
```

```
I=h^4/12;
```

```
k=3*E*I/L^3;
```

```
csi=5e-5;
```

```
c=csi*2*sqrt(k*m1);
```

```
if t<1/3
```

```
    F=m1*pi/2*L;
```

```
elseif t<2/3
```

```
    F=0;
```

```
elseif t<1
```

```
    F=-m1*pi/2*L;
```

```
else
```

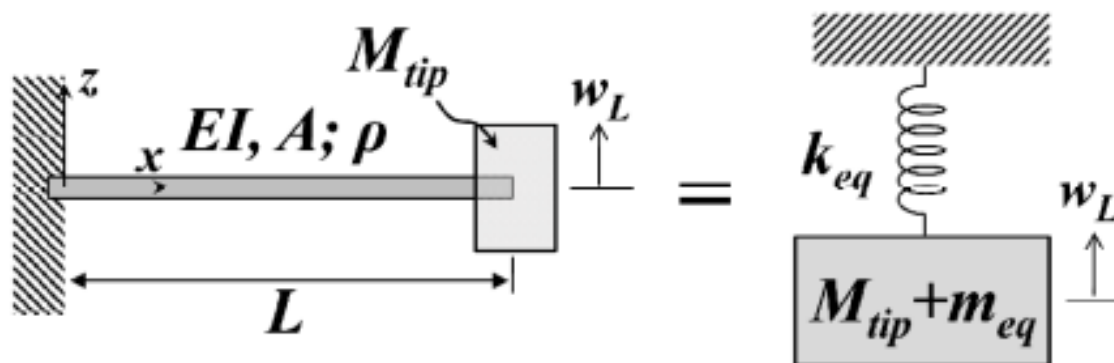
```
    F=0;
```

```
end
```

```
dydt=zeros(2,1);
```

```
dydt(1)=y(2);
```

```
dydt(2)=(1/m1)*(F-c*y(2)-k*y(1));
```



Massa Equivalente =  $M_{tip} + M_{eq} = M_{tip} + 33/140 M_{beam}$

```
tspan=linspace(0,5,100000);
```

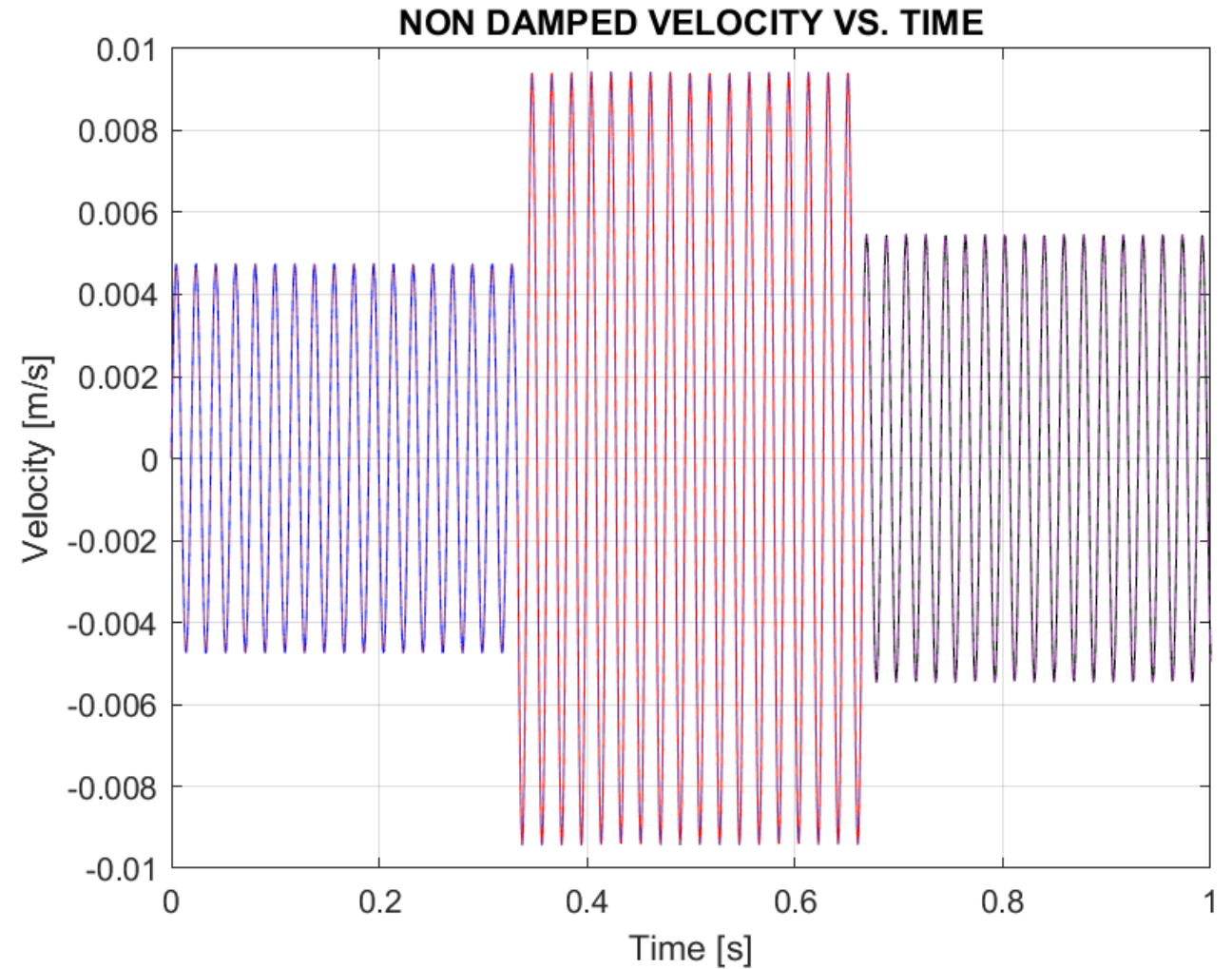
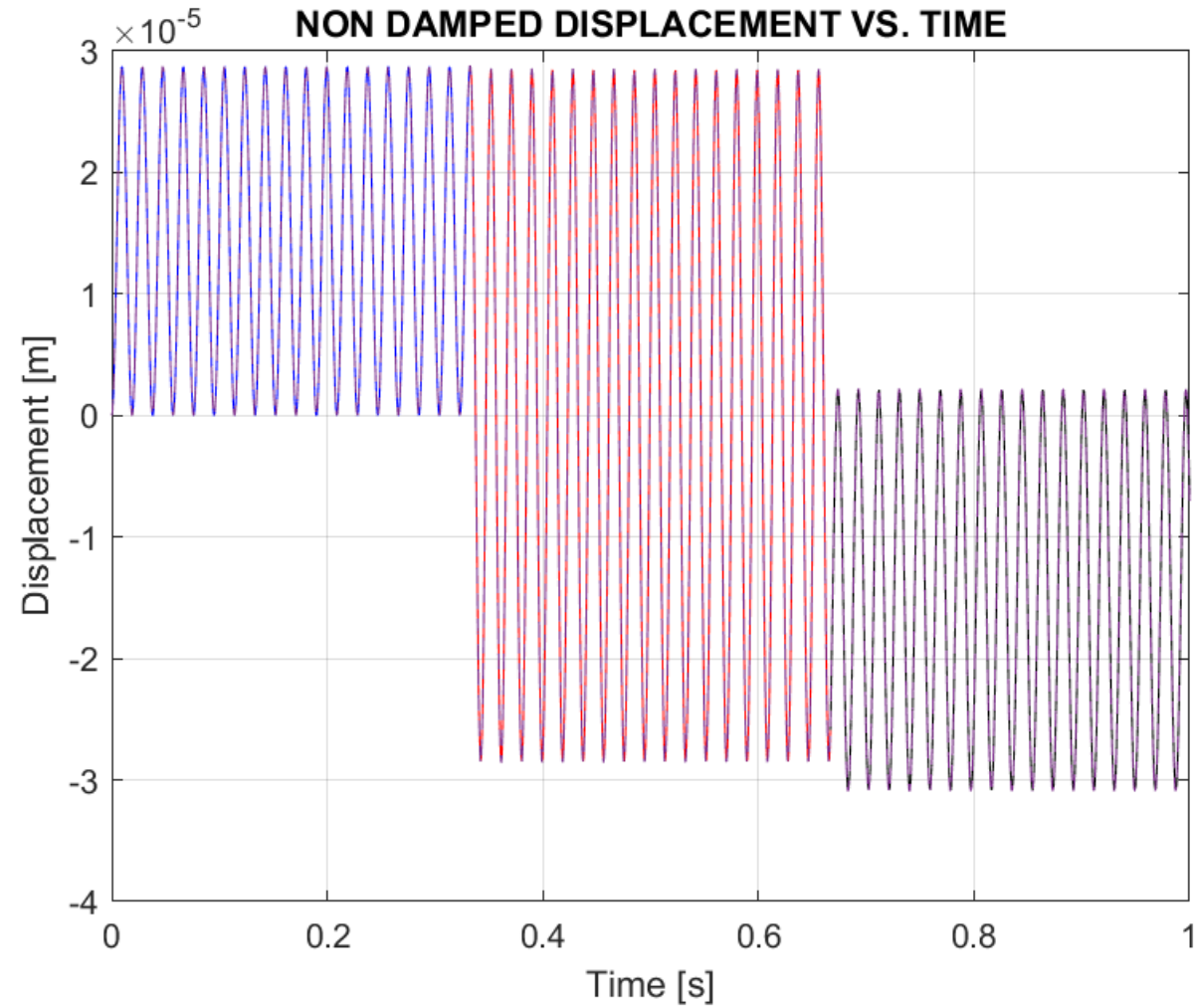
```
ic=[0 0];
```

```
[t,y]=ode45(@eq_diff_spost,tspan,ic);
```

# 1DOF: Confronto Risultati



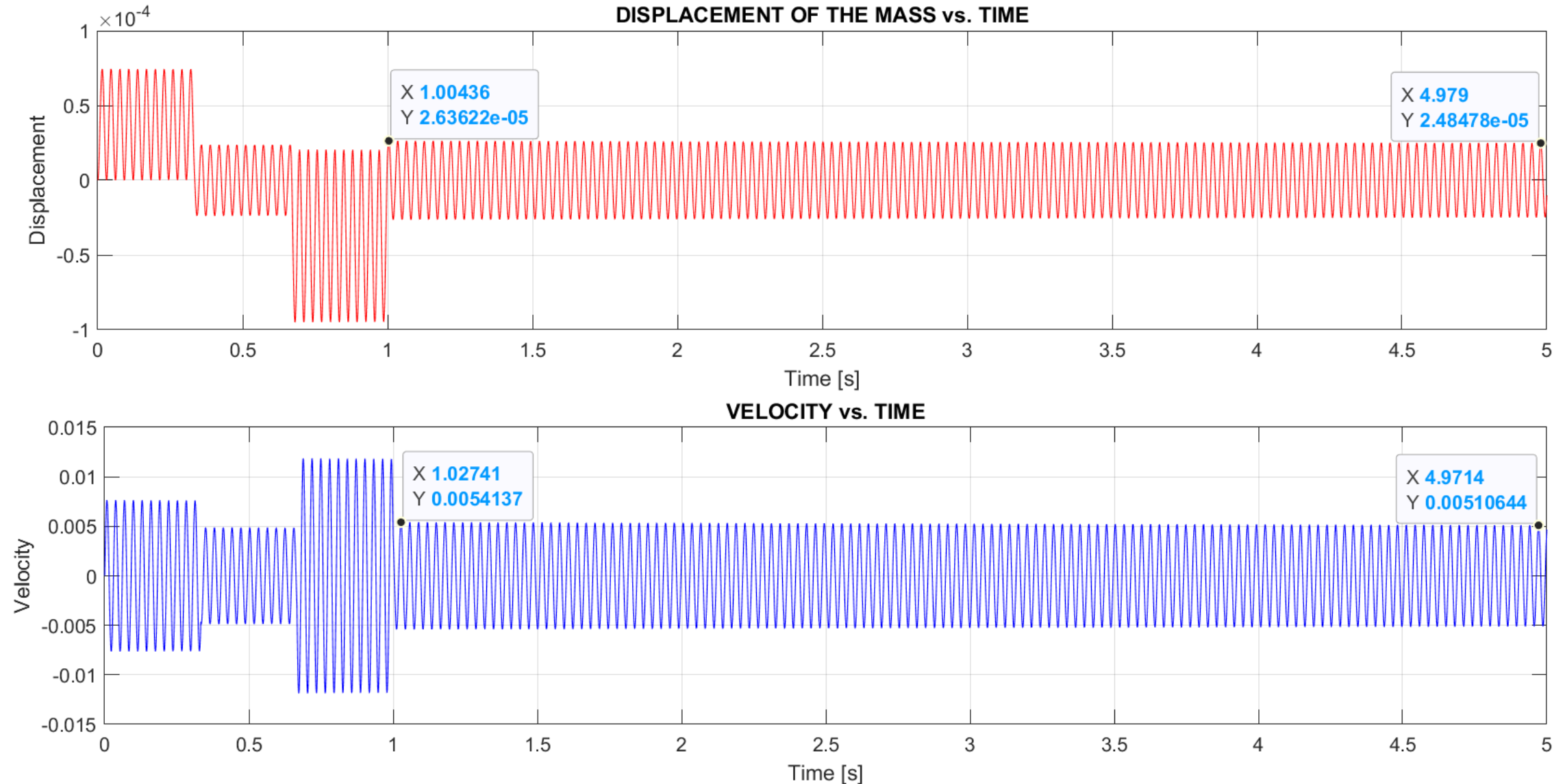
UNIVERSITÀ  
DI PARMA



# 1DOF: Soluzione ODE45



UNIVERSITÀ  
DI PARMA

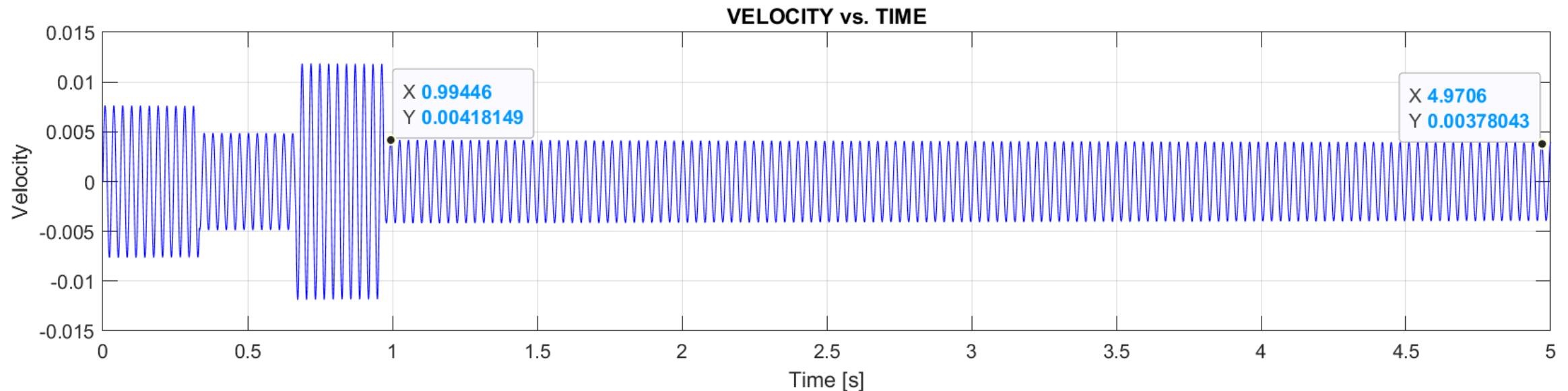
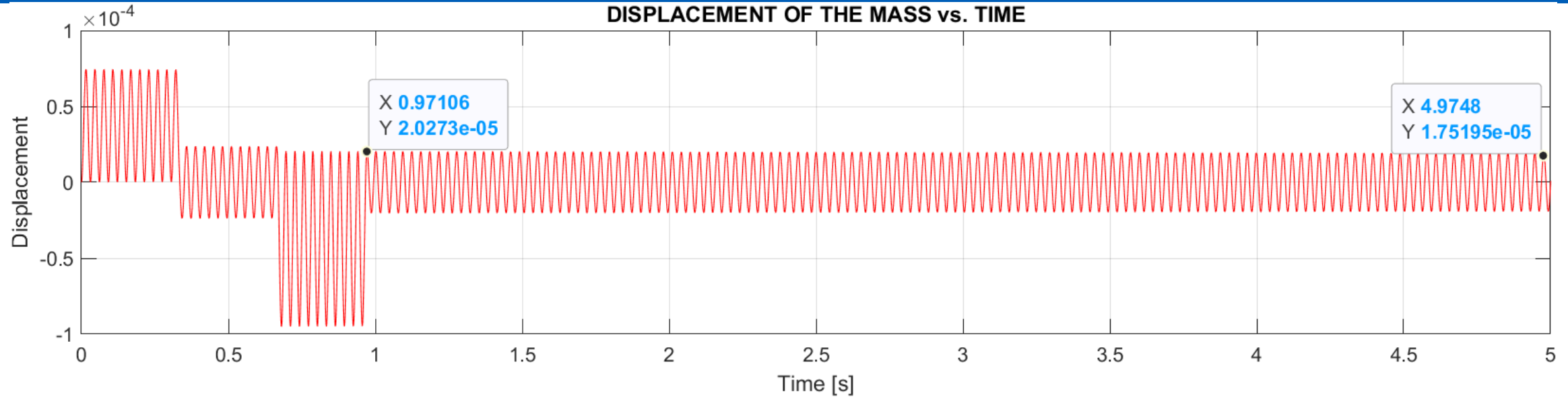




# 1DOF: Controllo vibrazioni, $t_f=0.971$



UNIVERSITÀ  
DI PARMA

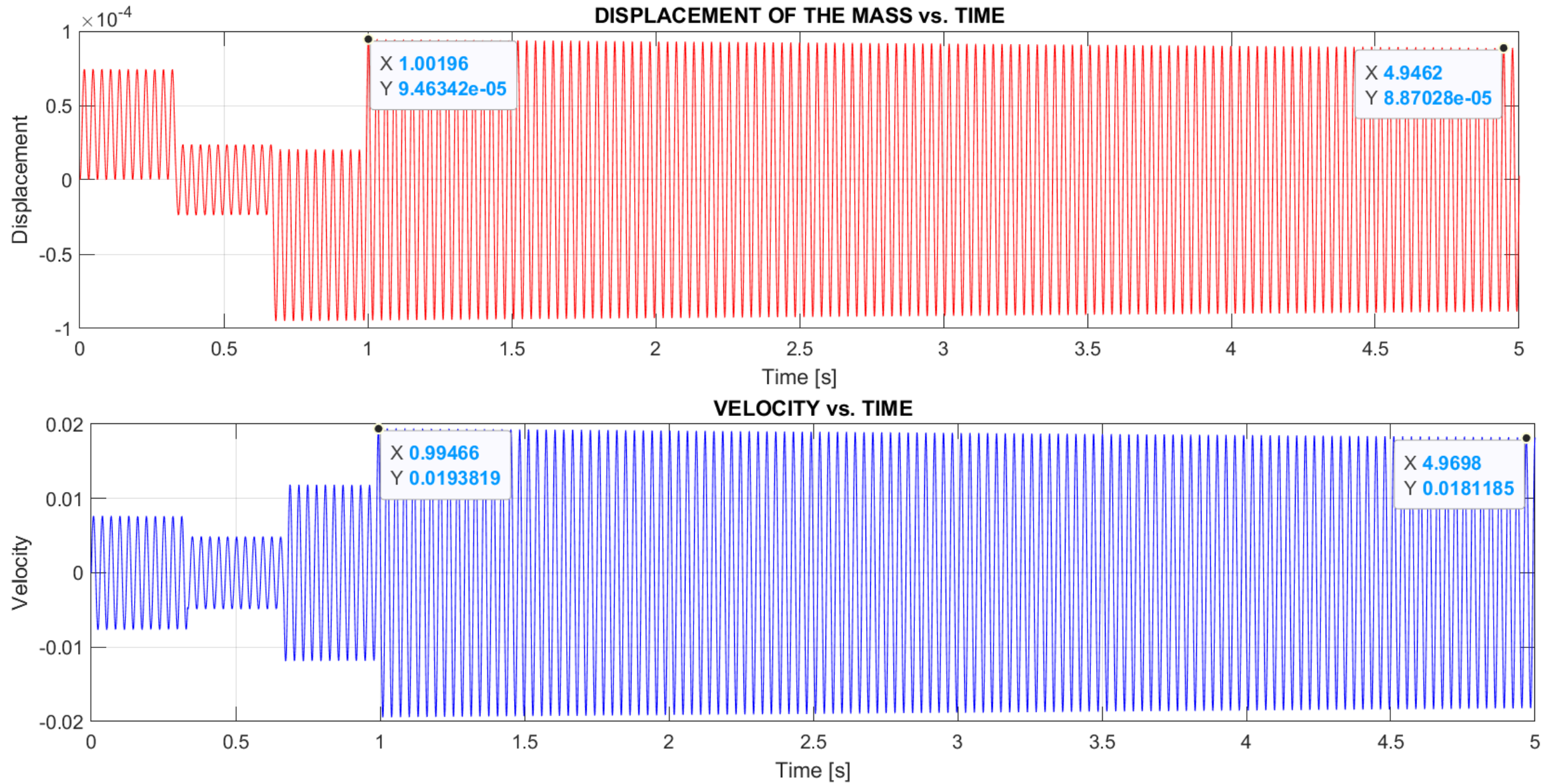




# 1DOF: Controllo vibrazioni, $t_f=0.986$



UNIVERSITÀ  
DI PARMA

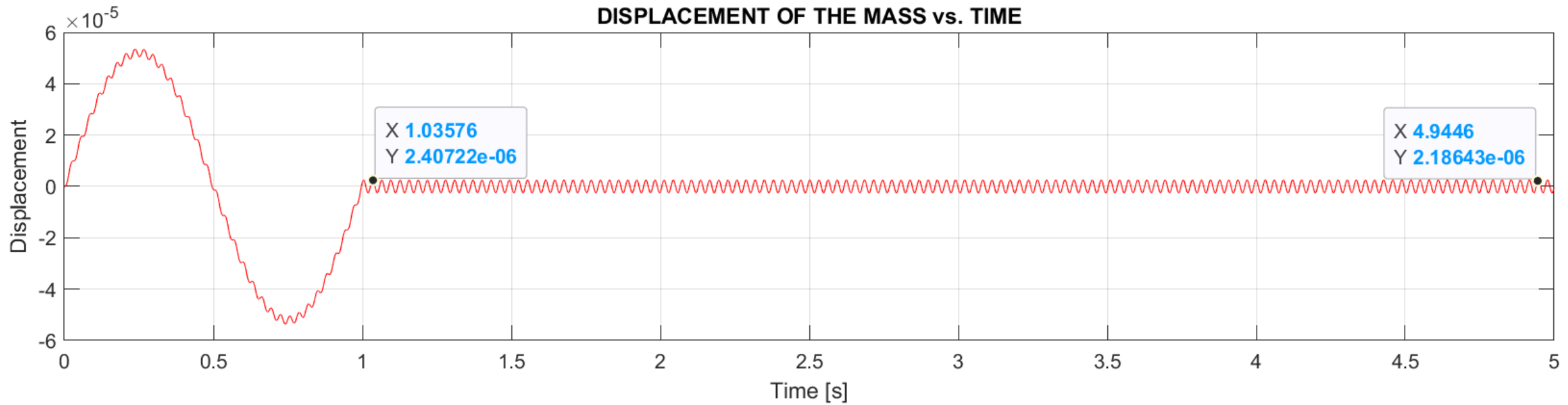
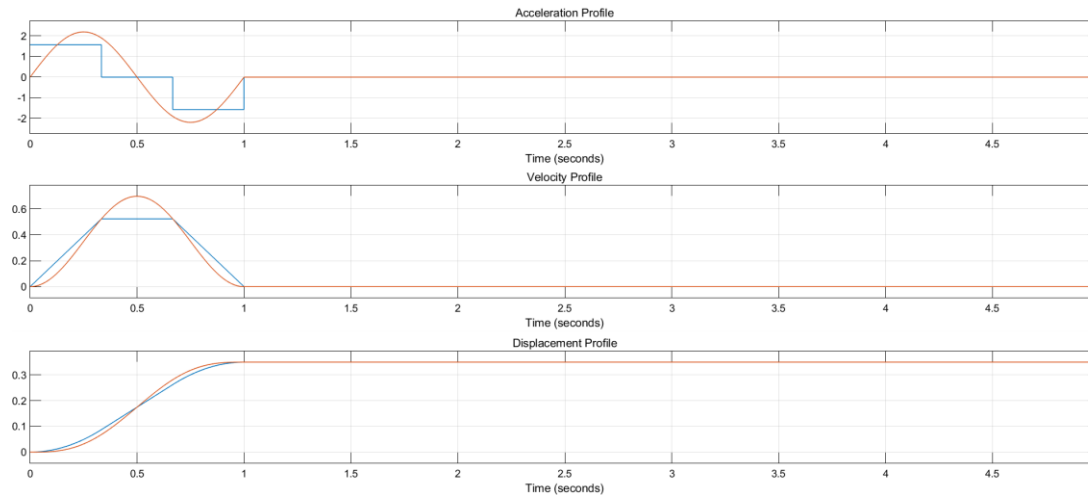


# 1DOF: Differente Legge del Moto



UNIVERSITÀ  
DI PARMA

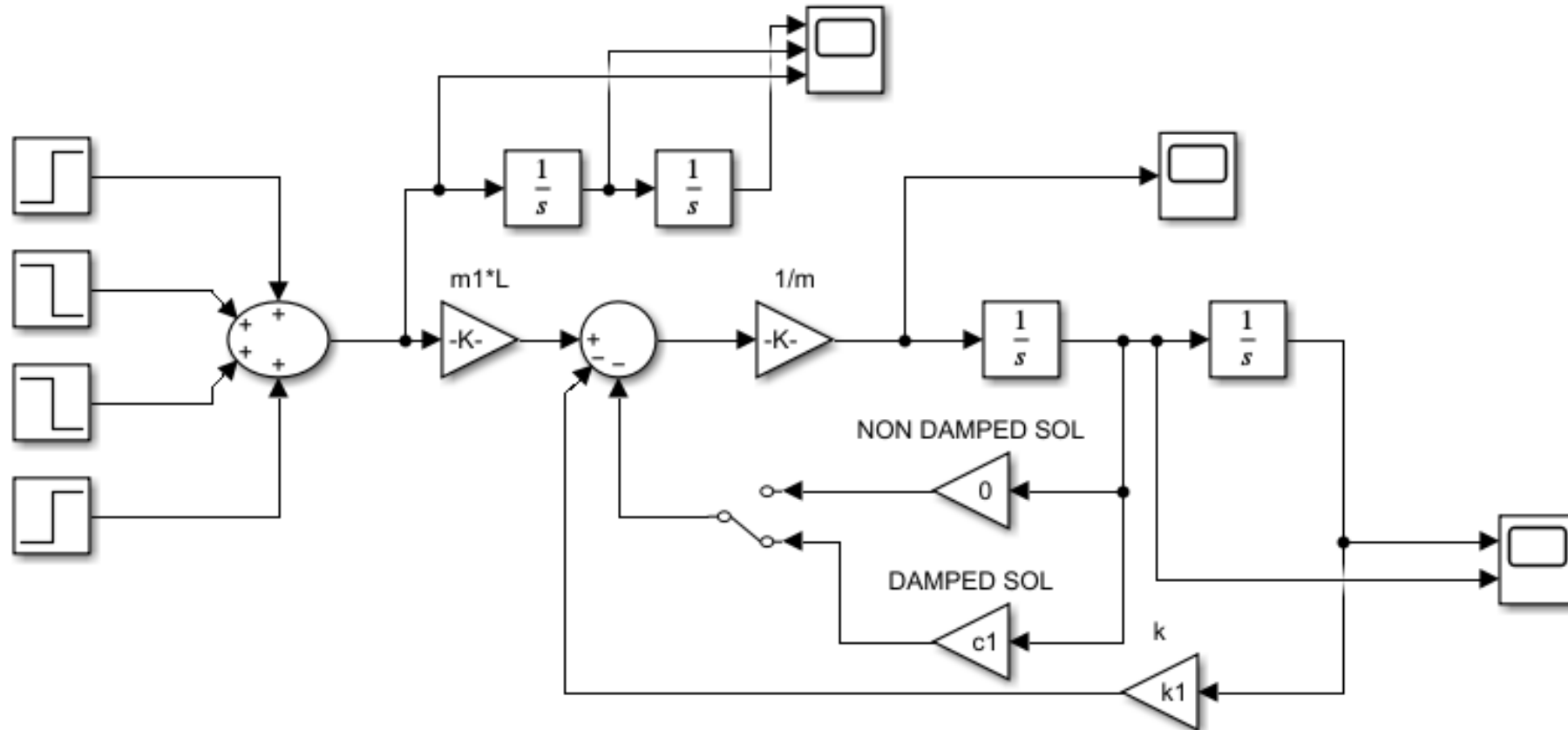
```
ff=1;  
A=pi/1.43;  
w=2*pi*ff;  
  
if t<1  
    F=m1*L*A*sin(w*t);  
else  
    F=0;  
end
```



# 1DOF: Modello Simulink



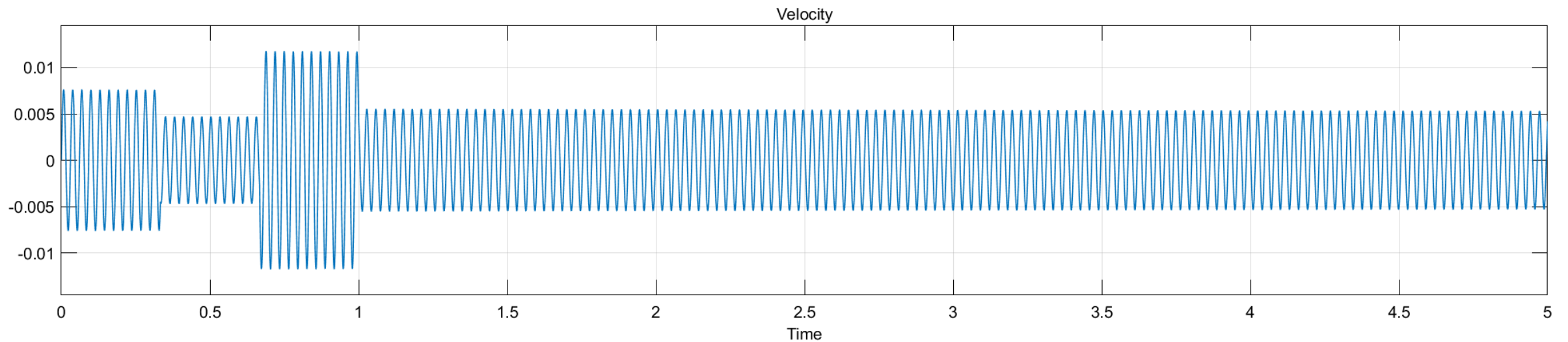
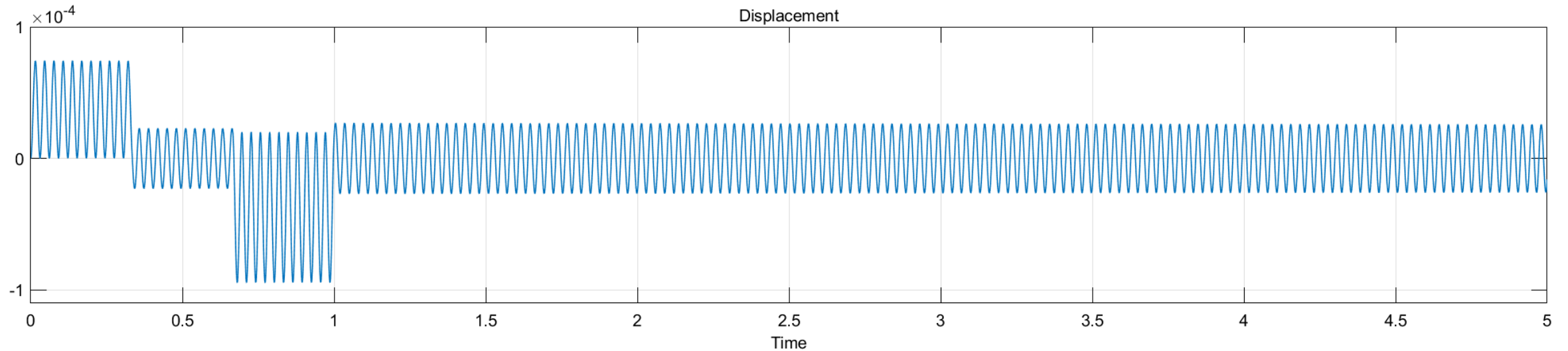
UNIVERSITÀ  
DI PARMA



# 1DOF: Soluzione tramite Simulink



UNIVERSITÀ  
DI PARMA



# 2DOF: Assorbitore di Vibrazioni



UNIVERSITÀ  
DI PARMA

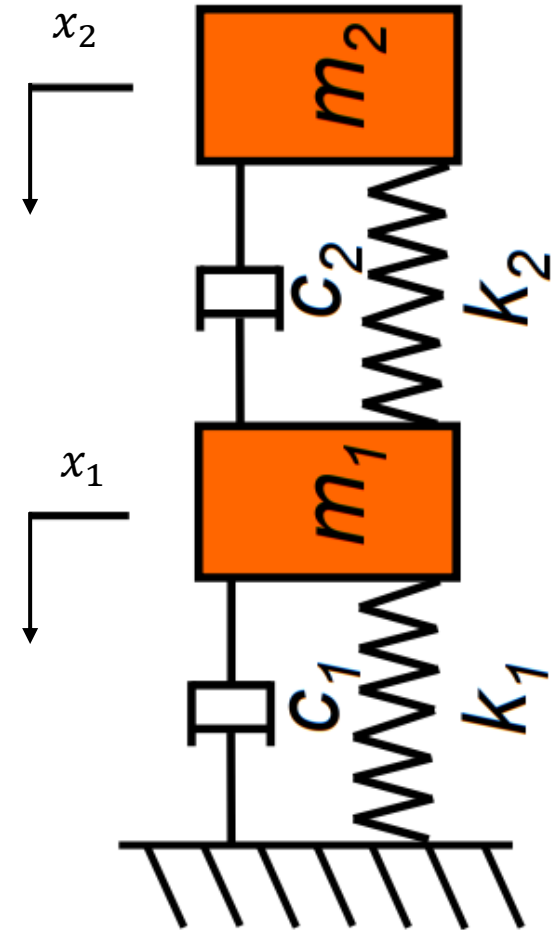
Equazione del moto 2DOF:

$$\begin{cases} m_1 x_1'' + c_2(x_1' - x_2') + c_1 x_1' + k_2(x_1 - x_2) + k_1 x_1 = F_1 \\ m_2 x_2'' + c_2(x_2' - x_1') + k_2(x_2 - x_1) = F_2 \end{cases}$$

Inserimento Assorbitore di Vibrazioni:

$$\mu = \frac{m_a}{m} = 0.1 \rightarrow m_2 = 2.59 \text{ kg} * 0.1 = 0.259 \text{ kg}$$
$$\frac{w_a}{w_n} = \frac{1}{1 + \mu} = 0.91 \rightarrow k_2 = 9039.25 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\zeta_{opt} = \sqrt{\frac{3}{8} \frac{\mu}{(1 + \mu)^3}} = 0.1679 \rightarrow c_2 = 17.04 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$



\*Ponendo  $c_2, k_2, F_2 = 0$  si ottengono gli stessi risultati del sistema 1DOF

# 2DOF: Assorbitore di Vibrazioni



UNIVERSITÀ  
DI PARMA

```
function dydt=eq_diff_spost2DOF(t,y)

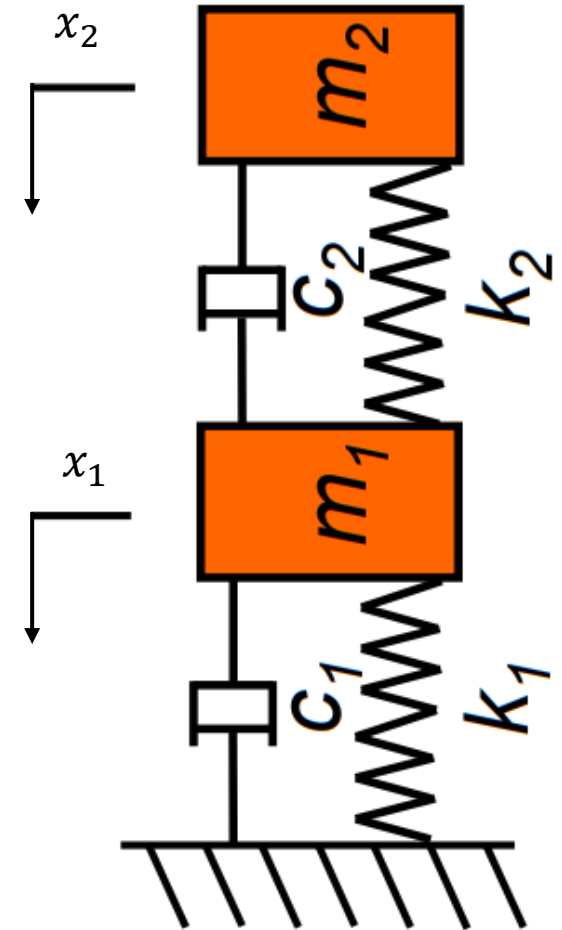
m0=6.75;
m1=1+33/140*m0;
mu=0.1;
L=1;
E=7e10;
h=0.05;
I=h^4/12;
k1=3*E*I/L^3;
csi1=5e-5;
c1=csi1^2*sqrt(k1*m1);
m2=mu*m1;
k2=k1*mu*(1+mu)^-2;
csi_opt=sqrt((3/8)*(mu/((1+mu)^3)));
c2=csi_opt^2*sqrt(k2*m2);

if t<1/3
    F1=m1*pi/2*L;
elseif t<2/3
    F1=0;
elseif t<1
    F1=-m1*pi/2*L;
else
    F1=0;
end

if t<1/3
    F2=m2*pi/2*L;
elseif t<2/3
    F2=0;
elseif t<1
    F2=-m2*pi/2*L;
else
    F2=0;
end

dydt=[y(1);y(2);y(3);y(4)];
dydt(1)=y(2);
dydt(2)=(1/m1)*(F1-c1*y(2)-c2*y(2)+c2*y(4)-k1*y(1)-k2*y(1)+k2*y(3));
dydt(3)=y(4);
dydt(4)=(1/m2)*(F2+c2*y(2)-c2*y(4)+k2*y(1)-k2*y(3));

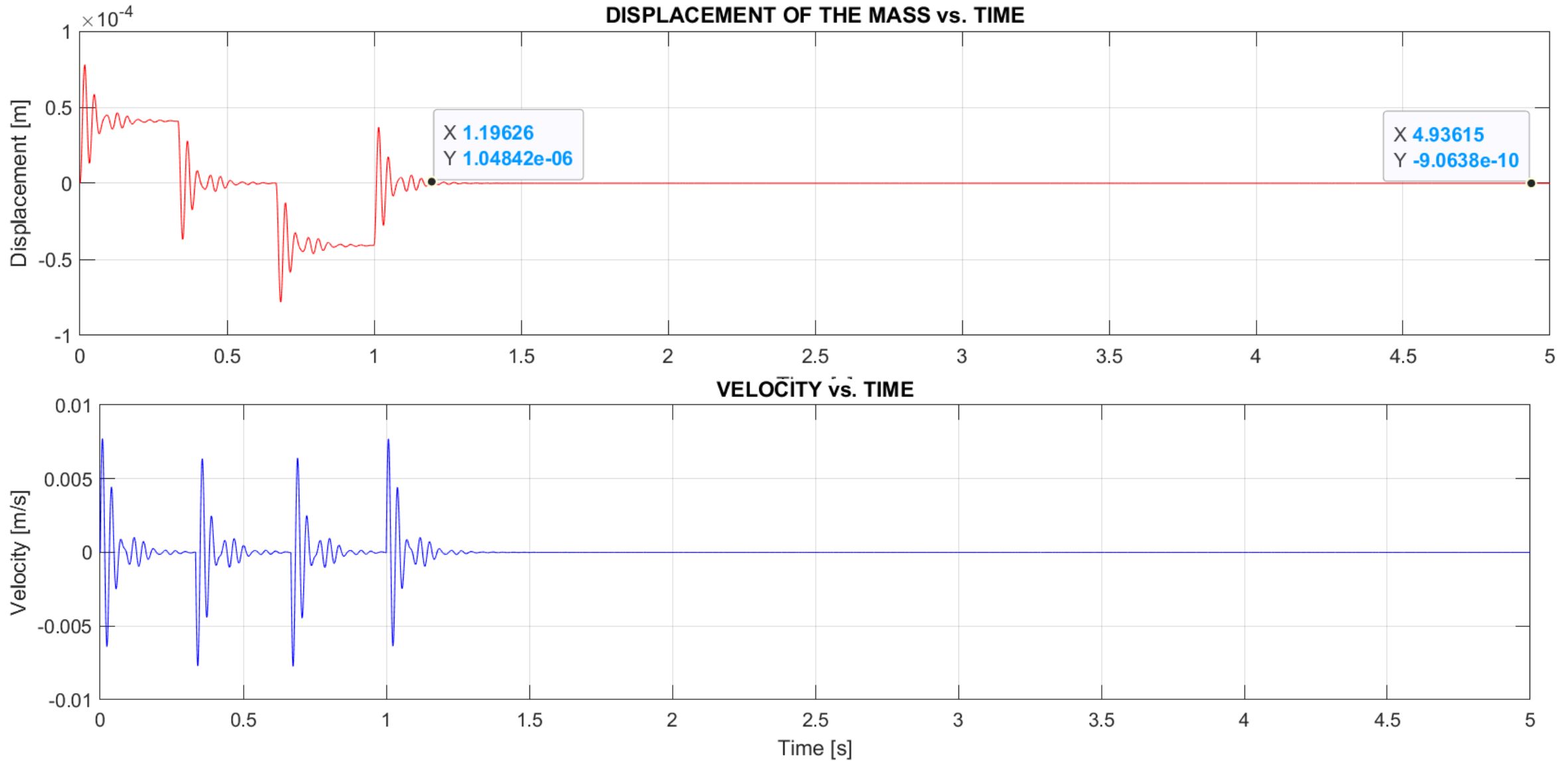
tspan=linspace(0,5,100000);
ic=[0 0 0 0];
[t,y]=ode45(@eq_diff_spost2DOF,tspan,ic);
```



# 2DOF: Risposta del Sistema



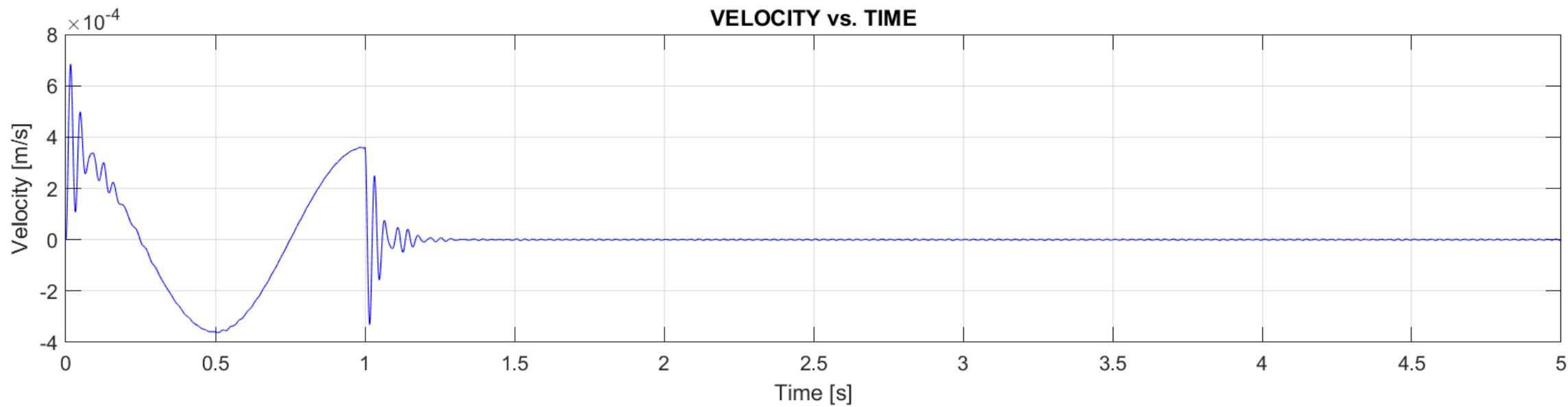
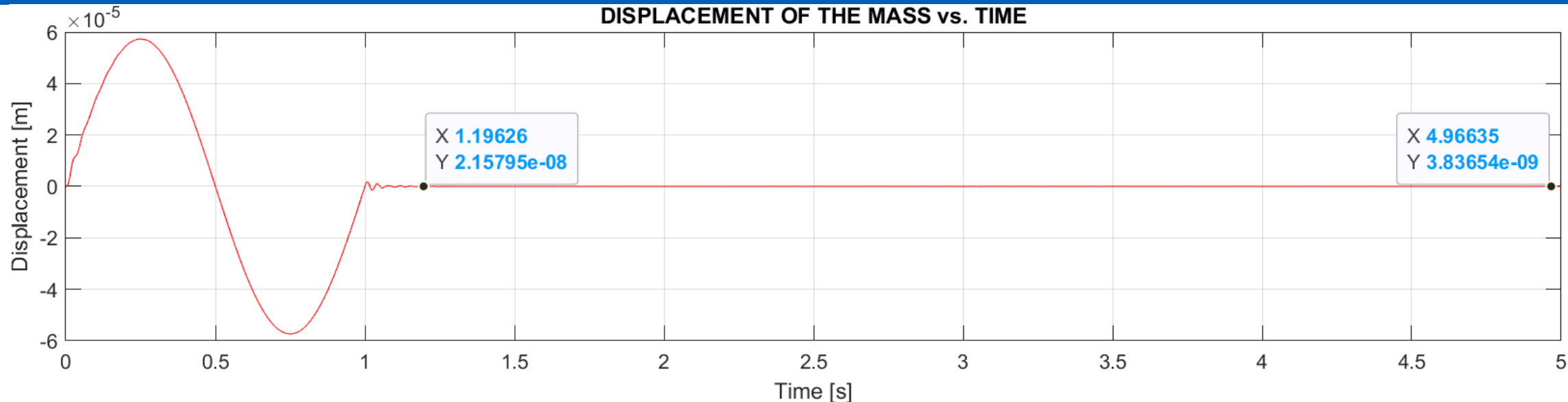
UNIVERSITÀ  
DI PARMA



# 2DOF: Differente Legge del Moto



UNIVERSITÀ  
DI PARMA

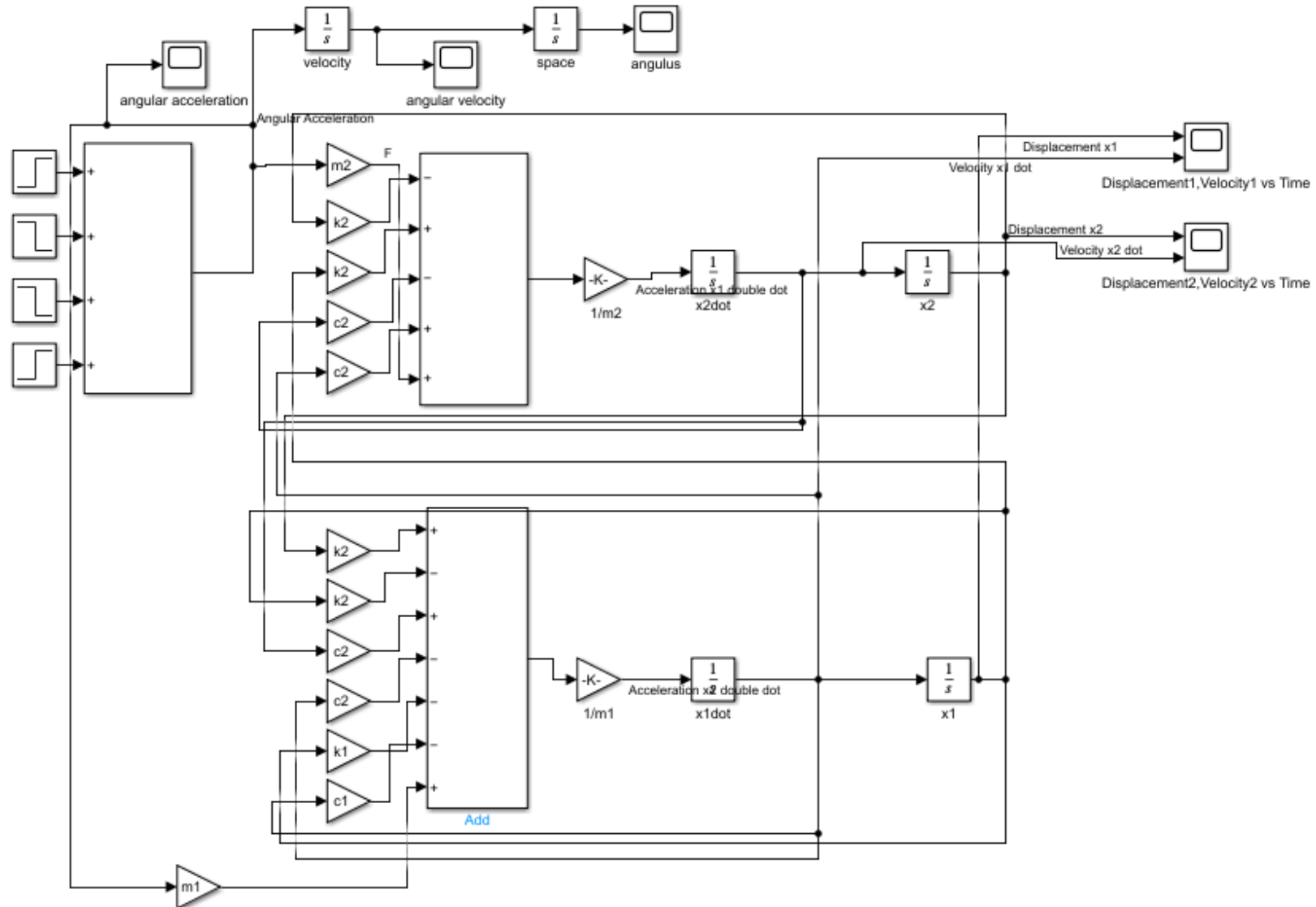




# 2DOF: Modello Simulink



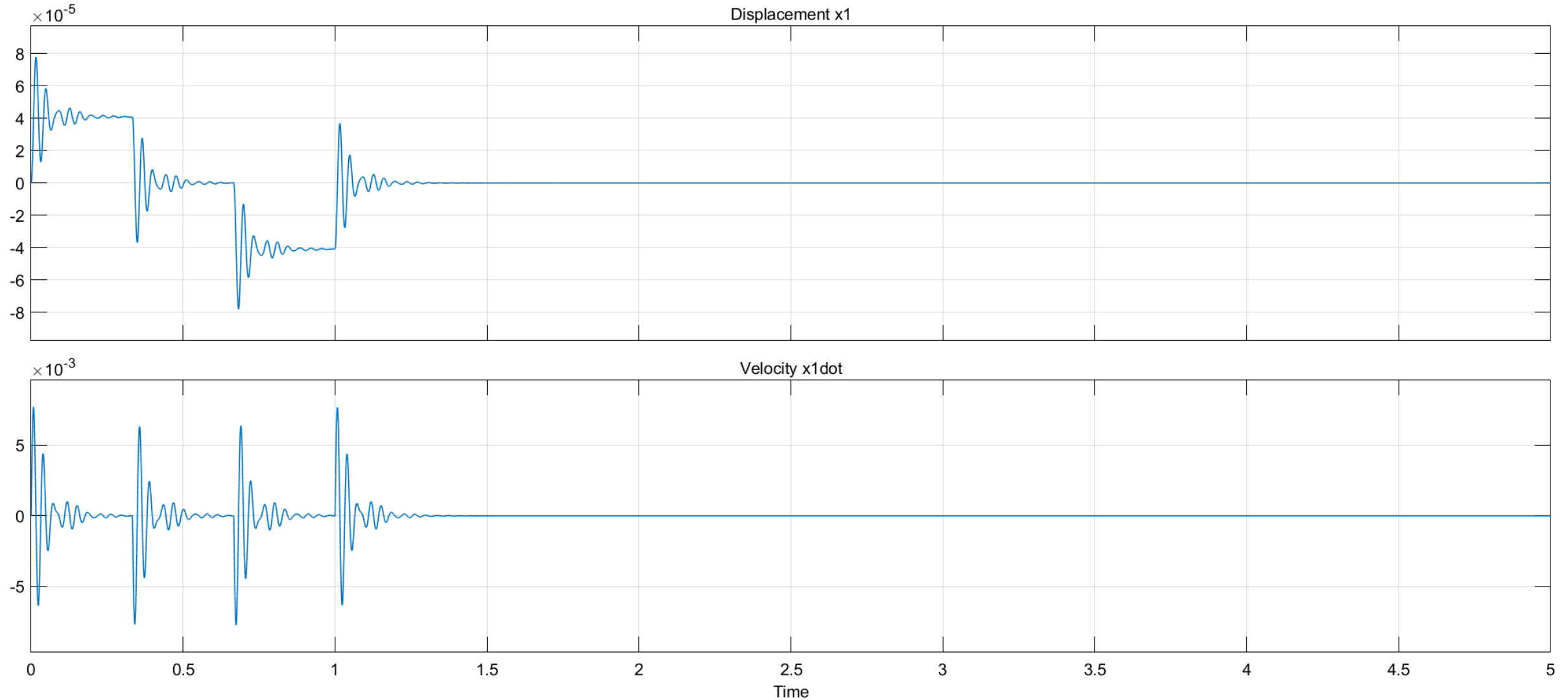
UNIVERSITÀ  
DI PARMA



# 2DOF: Soluzione tramite Simulink



UNIVERSITÀ  
DI PARMA



# Conclusioni:



UNIVERSITÀ  
DI PARMA

In conclusione, possiamo affermare che per ridurre le vibrazioni si può:

- Variare il tempo di fine movimentazione  $t_f \rightarrow$  si ottiene una riduzione moderata delle vibrazioni. È il modo più semplice e veloce per ridurre le vibrazioni, anche se la riduzione non è così elevata come andando ad inserire un assorbitore.
- Inserire un assorbitore di vibrazioni  $\rightarrow$  Il sistema che ne deriva è sicuramente più complesso ma risulta essere molto efficace.
- Variare la legge del moto  $\rightarrow$  con una legge di tipo armonico si può evitare di inserire un assorbitore di vibrazioni. Le vibrazioni non saranno nulle ma più contenute che con la legge del moto originaria.

Leggi di tipo armonico senza intervalli di tempo dove l'accelerazione è costantemente nulla sono più adatte per ottenere vibrazioni contenute quando il movimento dato dalla rotazione della trave cessa.

**La combinazione ottimale per ridurre le vibrazioni del sistema è rappresentata dall'utilizzo di una legge del moto armonica e dall'inserzione di un assorbitore di vibrazioni.**



UNIVERSITÀ  
DI PARMA

GRAZIE PER L'ATTENZIONE