



# **UNIVERSITÀ DI PARMA**

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

## **Corso di Meccanica delle Vibrazioni**

# **MODELLING FLEXIBLE ARMS VIBRATION-FREE MOVEMENTS**

Professoressa Elisabetta Manconi

Cocconi Matteo (Matricola 356072)

Faia Ruben (Matricola 355711)

Ravaglia Roberto (Matricola 356094)

Anno accademico 2022-2023



## Sommario

1. Introduzione .....	4
2. Procedimento 1DOF .....	9
2.1 Primo metodo di risoluzione 1DOF .....	9
2.2 Secondo metodo di risoluzione 1DOF .....	14
2.3 Terzo metodo di risoluzione 1DOF .....	16
2.4 Riduzione delle vibrazioni a fine movimentazione .....	18
3. Procedimento 2DOF .....	23
3.1 Primo metodo di risoluzione .....	23
3.2 Secondo metodo di risoluzione 2DOF .....	26
4. Conclusioni .....	27
5. Indice delle figure .....	28

## 1. Introduzione

Nel campo della scienza delle costruzioni riveste particolare importanza il corpo rigido definito comunemente come trave. Possiamo definire con il termine trave un qualunque corpo rigido prismatico ottenuto dall'estrusione di una generica figura piana lungo una linea passante per il baricentro della figura stessa e per il quale lo sviluppo longitudinale è molto maggiore rispetto allo sviluppo trasversale ( $l \gg h$ ).

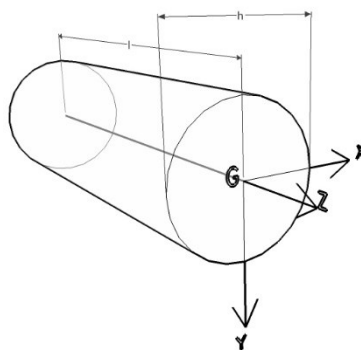


Figura 1: Modello della trave

Il solido trave è collocato in un sistema di riferimento tridimensionale (rappresentato in figura e collocato sempre nel baricentro della sezione) e potrà essere caratterizzato in ogni sezione da differenti valori di area (e conseguentemente diversi valori di tutte quelle grandezze quali il momento statico e i momenti di inerzia). Si può quindi notare che il numero di variabili da tenere in considerazione è estremamente elevato. Per semplificare il problema andremo a considerare il solo andamento della retta che unisce i baricentri delle sezioni della trave. Così facendo otterremo una rappresentazione schematica della trave che non considera aspetti come la rigidezza e lo smorzamento propri dati dalla trave, che reintrodurremo successivamente. Nel sistema di riferimento indicato in figura la linea d'asse coincide quindi con l'asse  $z$  mentre gli assi  $x$  e  $y$  giacciono sul piano della sezione. La rappresentazione bidimensionale della trave è rappresentata in figura.



Figura 2: Sistema di riferimento

Si distinguono 3 tipi di vincoli:

- Vincoli semplici, sono quei vincoli che eliminano un solo grado di libertà del solido trave, forniscono una sola equazione di vincolo e conseguentemente una sola reazione vincolare, un esempio è il carrello.
- Vincoli doppi, sono quei vincoli che eliminano due gradi di libertà del solido trave, forniscono due equazioni di vincolo e conseguentemente due reazioni vincolari. Sono vincoli doppi la cerniera, il pattino ed il manicotto;
- Vincoli tripli, sono quei vincoli che eliminano tre gradi di libertà del solido trave, forniscono tre equazioni di vincolo e conseguentemente tre reazioni vincolari. L'unico vincolo triplo nel piano è l'incastro.

Le travi a sbalzo sono elementi rigidi, se all'estremità viene applicata una forza, esse si deformano. Possiamo quindi andare a generare un modello che ci permetta di studiare l'inflessione. Nell'esempio della figura la trave è incastrata con un carico applicato all'estremità, si inflette a causa della forza applicata e si può calcolare l'inflessione in maniera analitica. Il delta massimo, ovvero l'inflessione massima, viene definita analiticamente come  $\delta_{max} = \frac{PL^3}{3EI}$  questo parametro dipende dal carico, dal materiale della trave attraverso il numero di Young E e dalla geometria con il momento d'inerzia.

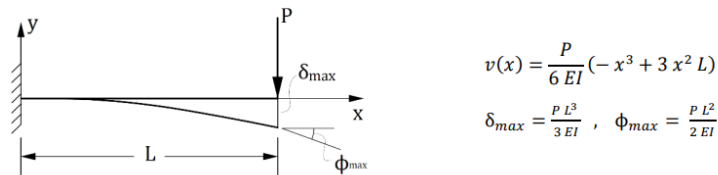


Figura 3: Modello dell'inflessione di una trave con una forza applicata all'estremità

La forza può essere data anche da una massa, posta all'estremità, molto maggiore del peso della trave e genera una deformazione di quest'ultima. La massa della trave a questo punto la possiamo concentrare, per semplificare la trattazione, nel baricentro della massa.

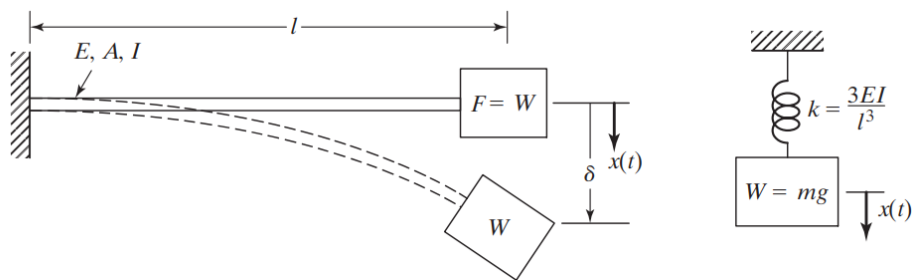


Figura 4: Modello dell'inflessione di una trave con una massa applicata all'estremità

Possiamo ora generare un modello che semplifichi la trattazione di una massa che genera una forza sulla trave originando in quest'ultima un'inflessione.

La trave possiamo considerarla infinitamente rigida e porre la sua componente elastica che genera la deformazione, uguale a una molla che è posta tra la trave e la massa. Quest'ultima sentirà la forza della massa e si deformerà in una data maniera secondo modelli matematici trattati successivamente. Il legame tra il modello della trave deformabile e il modello della trave rigida con una molla viene definito analiticamente da equazioni che tengono in considerazione forze e deformazioni come illustrato in figura.

La rigidità della molla K viene quindi definita attraverso una serie di rapporti che tengono in considerazione non solo il materiale e la geometria ma anche la lunghezza.

Per questa relazione si è preso in esame una trave di sezione quadrata di lunghezza l e con posta all'estremità una massa M pari a 1kg, che viene posta in rotazione rispetto all'origine degli assi con una velocità pari a  $\theta'$  e accelerazione pari a  $\theta''$ .

L'asta in un primo momento accelera per un tempo pari a 1/3 s per poi mantenere la velocità raggiunta per altri 1/3 s per poi decelerare sempre in 1/3 s. Sulla massa non è posta alcuna forza se non quella data dall'accelerazione e dalla decelerazione del sistema.

La rotazione avviene nel piano, dunque la forza data dalla gravità non viene considerata.

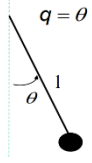
Ponendoci sul sistema relativo solidale con il moto dell'asta, possiamo andare a sviluppare un modello che ci permetta di studiare cosa avviene durante il moto dell'asta.

Sfruttando conoscenze forniteci da studi di scienza delle costruzioni, in particolare conoscenze apprese da *An introduction to the mechanics of solids* di S.H. Crandall and Norman C. Dahl in questi paragrafi andremo a descrivere cosa avviene a questo sistema e motivarlo con relazioni matematiche già verificate in precedenza che motivino le nostre risposte, tutto integrato con grafici ottenuti al calcolatore Matlab che hanno la funzione non solo visiva di quello che sta avvenendo ma anche una funzione pratica al supporto delle tesi affermate in precedenza.

Ci troviamo in un sistema a un grado di libertà.

Un esempio simile che ci aiuta a chiarire questo concetto può essere quello del pendolo;

Per definire il moto del pendolo basta definire come variabile per esempio un angolo, così facendo riusciamo a definire l'intero sistema, andando a trovare la legge del moto che lo governa.



$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2; \quad V = m g l (1 - \cos \theta)$$

$$m l^2 \ddot{\theta} + m g l \sin \theta = 0$$

Small oscillation around equilibrium position  $\sin \theta \approx \theta$

$$I \ddot{\theta} + g \theta = 0 \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/l}}$$

Figura 5: Modello del pendolo

Come nell'esempio in figura a destra dove è riportato un pendolo, la sua variabile scelta, in questo caso un angolo, e la sua equazione che governa il moto. Se avessi voluto scegliere un'altra variabile, come per esempio lo spostamento della massa lungo l'asse x o l'asse y, il sistema era definito in egual modo.

Quindi si dice grado di libertà di un sistema il numero di parametri indipendenti necessari ad individuare in modo univoco ogni sua configurazione (configurazione si intende l'insieme delle posizioni di tutti i punti del sistema). Nel nostro caso del pendolo definendo il parametro angolo e risolvendo l'equazione differenziale possiamo andare a determinare tutte le posizioni del sistema.

L'esempio precedentemente usato del pendolo così come la definizione di grado di libertà è stato ampiamente discusso e verificato nel libro *Meccanica Razionale* di Cantarelli Giancarlo.

Tornando al caso in esame la massa si muove lungo una retta e basta quindi un solo parametro per definirne la sua posizione.

Non essendoci smorzatori quindi il sistema si definisce sistema non smorzato a un grado di libertà.

Prima di andare ad applicare forze esterne quali l'accelerazione e la decelerazione dell'asta, andiamo a studiare l'equazione differenziale che definisce il sistema.

Nella figura sottostante è rappresentata la semplificazione dell'asta infinitamente rigida con molla e massa, prendiamo come parametro che definisce il sistema lo spostamento  $x$  definito dall'alto verso il basso e come linea dello zero di questo parametro, la quota iniziale della massa  $m$ . La massa applicherà sulla molla una forza data dall'inerzia che verrà contrastata con una forza opposta dalla molla di rigidezza  $k$ , generando così uno spostamento opposto al verso della freccia  $x$ , come riportato in figura.

Conoscendo ora le forze in gioco possiamo andare a scrivere l'equazione differenziale:

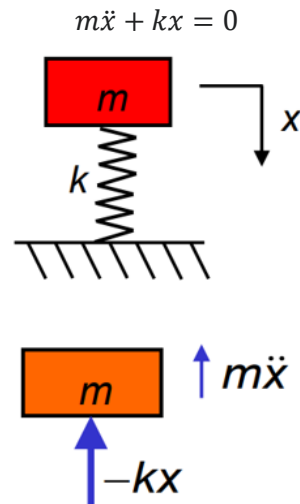


Figura 6: Modello asta non smorzato

Possiamo ora dividere per la massa e ottenere un termine  $k/m$  definito come la frequenza naturale del sistema al quadrato:

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Questo termine è estremamente importante poiché definisce le pulsazioni naturali del sistema. Possiamo riscrivere la formula nella seguente forma:

$$\ddot{x} + w_n^2 * x = 0.$$

La soluzione dell'integrale generale ci fornisce la legge del moto che sarà:

$$x(t) = C_1 * e^{iw_n*t} + C_2 * e^{-iw_n*t}$$

Andando a riscriverla in forma armonica:

$$x(t) = A \cos(w_n * t - \phi)$$

dove  $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{w_n}\right)^2}$  e la fase  $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{x_0 * w_n}{\dot{x}_0}\right)$ .

La legge del moto che abbiamo ricavato mostra che l'ampiezza del moto libero e di pulsazione naturale  $w_n$ , rimane costante nel tempo, ossia, il moto una volta avviato, non si estingue mai. Questo risultato va contro le evidenze scientifiche e dipende dal fatto che, nel nostro modello matematico non si è tenuto conto delle dissipazioni date dagli attriti per esempio.

Una volta esaminato il caso più semplice del nostro modello andiamo a complicarlo per avvicinarci sempre di più al risultato che vogliamo ottenere ovvero la descrizione di un sistema più complesso. Naturalmente ci avvicineremo per step al sistema complesso definendo prima dei sistemi più semplici. Ora infatti andremo a considerare che sopra la massa verrà applicata una forzante esterna e di conseguenza la nostra massa subirà una forza che ne determinerà un differente spostamento rispetto al precedente che si presentava libero di muoversi.

$$mx'' + kx = F$$

In quest'equazione  $F$  risulta essere la forza che agisce sul sistema.

A questo punto, grazie ai dati forniti, possiamo procedere con l'analisi del sistema. Andando quindi ad analizzare esclusivamente il nostro caso, possiamo andare a sviluppare l'equazione differenziale ottenendo così una formulazione matematica dello spostamento, tramite l'utilizzo delle condizioni iniziali che ci permettano di risolvere l'equazione determinando  $C1$  e  $C2$ . Saltando passaggi matematici intermedi del quale si possono trovare in maniera esaustiva spiegazione in letteratura, la risoluzione dell'equazione per quanto riguarda la forzante a gradino è:

$$x(t) = \frac{F_0}{k} [1 - \cos \omega_n(t - t_0)]$$

I libri al quale abbiamo fatto riferimento per la risoluzione dell'equazione differenziale sono *Mechanical Vibration, Fifth edition* di Singiresu S. Rao e *Secondo corso di Analisi Matematica* di Emilio Acerbi e Giuseppe Buttazzo.

Una volta definito il sistema, andiamo a inserire un'ulteriore complicazione per avvicinarci sempre di più al caso reale. Nella seguente trattazione andremo a inserire uno smorzatore che tenga conto dello smorzamento dato dall'asta. Ogni materiale, infatti, ha uno smorzamento proprio che è importante considerare.

Di conseguenza andando a considerare anche questo fattore di smorzamento l'equazione diventa la seguente:

$$mx'' + cx' + kx = F$$

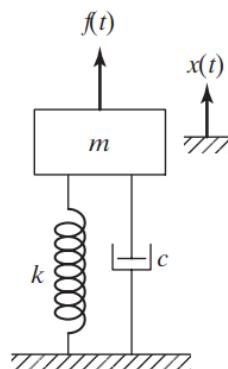


Figura 7: Modello asta smorzato



## 2. Procedimento 1DOF

### 2.1 Primo metodo di risoluzione 1DOF

Per procedere con l'analisi del problema, si è andati dapprima a studiare il modo di vibrare del sistema sottoponendolo ad una forzante a gradino. Il valore della forzante nel primo tratto è pari a:

$$F = m * L * \theta''$$

e corrisponde alla forza di inerzia della massa di 1 kg posta in punta alla trave in alluminio.  $L$  rappresenta la lunghezza della trave,  $\theta''$  rappresenta invece l'accelerazione angolare della trave.

Per calcolare il valore della accelerazione angolare si è andati a sfruttare delle semplici equazioni del moto, basandoci sull'osservazione del grafico della legge del moto forniti.

```
t=1/3;  
v0=0;  
s0=0;  
a=theta_2;  
v=v0+v*t;  
s=s0+v*t+1/2*a*t^2;
```

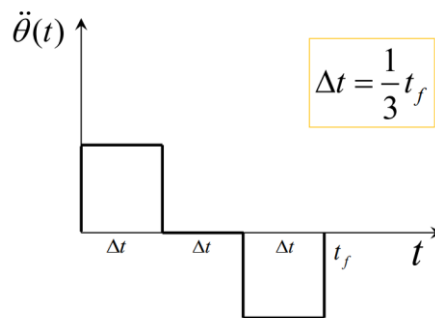


Figura 8: Grafico dell'accelerazione angolare rispetto al tempo

Il risultato ottenuto è di uno step di accelerazione pari a 1.5708 rad/s, pari cioè a  $\pi/2$ .

Nella prima parte di simulazione si è andati a studiare la risposta al primo gradino, come se la forzante fosse costante e pari a  $F = \frac{\pi}{2} N$ .

L'equazione del moto, in questa prima parte, non considera lo smorzamento:

$$m y'' + k y = F(t)$$

I valori riportati nel codice sono valori ottenuti dai dati forniti oppure calcolati tramite semplici operazioni. Possiamo vedere il calcolo della rigidezza  $k$ , calcolata considerando una trave incastrata con un carico posto nella sua parte finale.

Siamo andati a studiare il comportamento della trave soggetta alla forzante nel primo intervallo di tempo pari ad 0.333 secondi.

Il calcolo di  $y_1$ , ossia dello spostamento della massa rispetto all'asse della trave è stato fatto manualmente, tramite la risoluzione della equazione del moto  $m y'' + k y = F$ .

```
% Forzante 1  
E=7e10;  
m=1;  
L=1;  
H=0.05;  
I=H^4/12;  
theta_2=pi/2;  
k=(3*E*I)/(m*L^3);  
wn=sqrt(k/m);  
F=m*L*theta_2;  
T=(2*pi)/(wn);  
%condizioni iniziali 1: y(0)=0 , ydot(0)=0.  
t0=1/3;  
t_step=t0/100000;  
  
t1=[0:t_step:1/3];  
  
y1=(F/k)*(1-(cos(wn*t1)));  
y1dot=(F/k)*(sin(wn*t1))*(wn);
```

È stato ottenuto il seguente risultato:

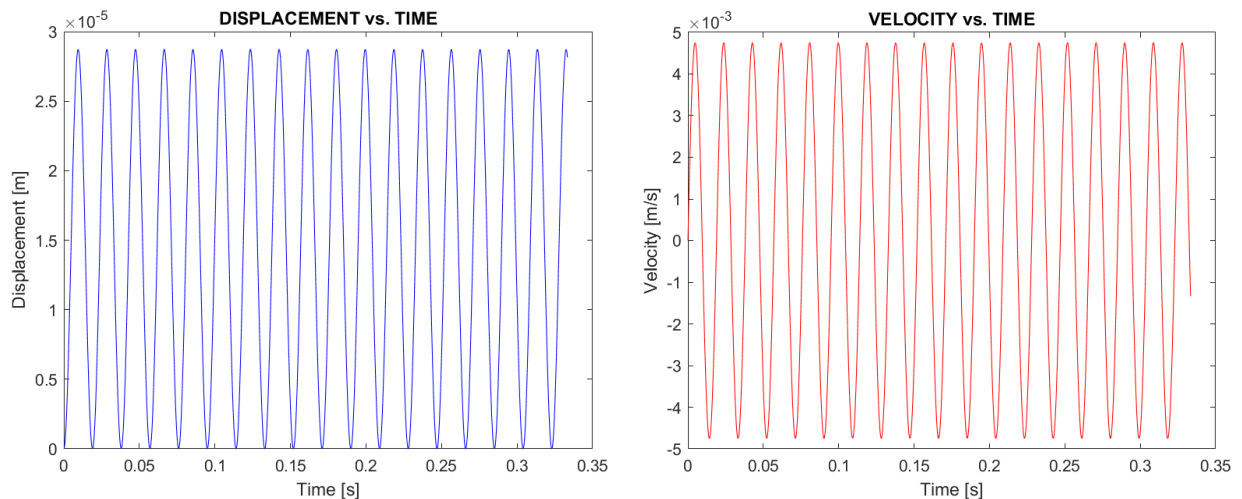


Figura 9: Grafici dello spostamento e della velocità in funzione del tempo nel primo intervallo di tempo  $\Delta t$

Si è passati poi allo studio della risposta alla forzante considerando tutto l'intervallo di tempo  $t$ . Si è andati dapprima a calcolare il valore finale di spostamento e velocità al tempo di 0.333 s. Questi due valori rappresentano le condizioni iniziali, necessarie al calcolo della soluzione dell'equazione del moto per il secondo step. L'equazione differenziale è stata sempre risolta per via analitica.

```
%Condizioni Iniziali al tempo t=1/3 s
spost_finale=(F/k)*(1-(cos(wn*tf)));
vel_finale=(F/k)*wn*(sin(wn*tf));
%Intervallo di tempo 2
t0=1/3;
t_plus=2*t0;
t2=[t0:t_step:t_plus];
%Eq. del moto 2
y2=(vel_finale/wn)*sin(wn*(t2-t0))+spost_finale*cos(wn*(t2-t0));
y2dot=(vel_finale/wn)*cos(wn*(t2-t0))*(wn)-spost_finale*sin(wn*(t2-t0))*wn;
```

Procedendo allo stesso modo nel calcolo del terzo step dove la forzante è negativa, abbiamo calcolato anche l'equazione del moto relativa al terzo intervallo di tempo:

```
%Condizioni iniziali 3
spost_finale2=(vel_finale/wn)*sin(wn*(2/3-t0))+spost_finale*cos(wn*(2/3-t0));
vel_finale2=(vel_finale/wn)*cos(wn*(2/3-t0))*wn+spost_finale*(-sin(wn*(2/3-t0))*wn);
%Intervallo di tempo 3
t3=[t_plus:t_step:1];
y3=(vel_finale2/wn)*sin(wn*(t3-2*t0))+(spost_finale2+F/wn^2)*cos(wn*(t3-2*t0))-F/wn^2;
y3dot=(vel_finale2/wn)*cos(wn*(t3-2*t0))*wn+(spost_finale2+F/wn^2)*(-sin(wn*(t3-2*t0))*wn);
```

Ottenendo così i seguenti valori di spostamento e velocità nel tempo:

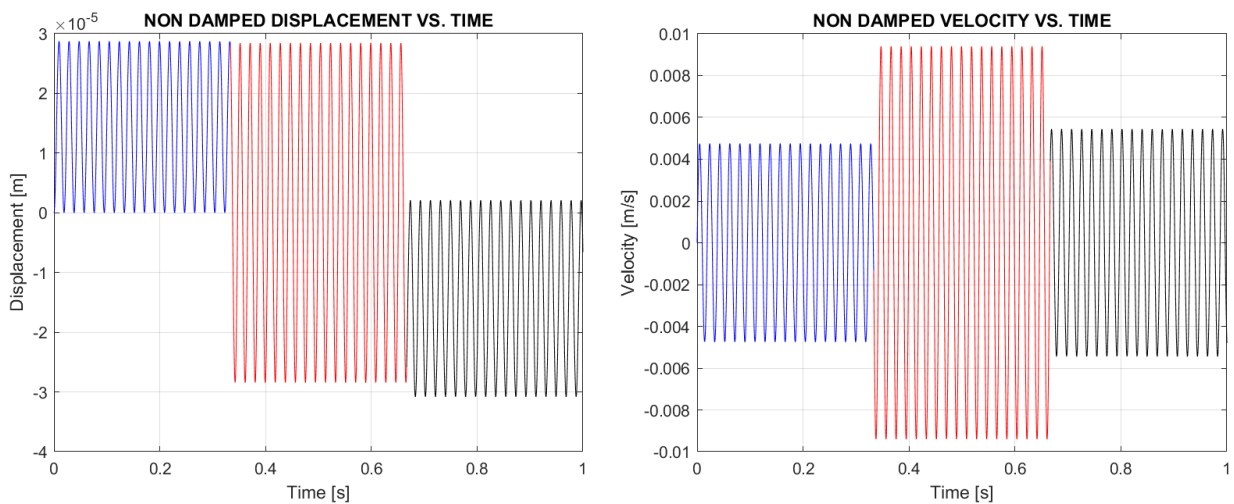


Figura 10: Grafico dello spostamento e della velocità del sistema non smorzato nell'intervallo  $t_f$

Si è andati poi a considerare l'inserimento dello smorzamento dato dalla trave in alluminio. Basandoci su valori provenienti da manuali, il loss factor dell'alluminio è  $\eta = 2\zeta$  e il valore di smorzamento dato da una trave di alluminio è pari a circa  $0.5 \cdot 10^{-4}$  Ns/m.

Si è andati quindi ad effettuare i calcoli considerando la seguente equazione del moto:

$$my'' + cy' + ky = F(t)$$

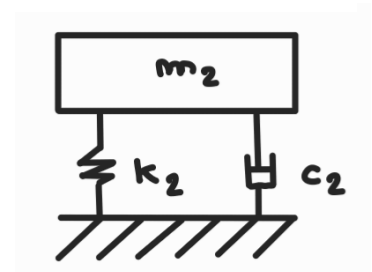


Figura 11: Schema del sistema con smorzatore

Il modo di procedere è analogo al precedente. Si è andati a calcolare le condizioni iniziali in ogni intervallo di tempo, grazie alle quali si è riusciti a calcolare soluzione all'equazione del moto in ogni intervallo di tempo.

```
% SMORZAMENTO 1
visc_damp_ratio=5e-4;
c=visc_damp_ratio*2*sqrt(m_a1*k);
%my''+cy'+ky=F

% y4(0) = k1 + k2 + F/wn^2;
% ydot4(0) = (-sqrt(c^2-4*m^2*wn^2)/m - c/m)*0.5*k1 + 0.5*(sqrt(c^2-4*m^2*wn^2)/m - c/m)*k2;

a=sqrt(c^2-4*m^2*wn^2)/m;
b=c/m;

k2=(-(a+b)*0.5*(F/wn^2))/(a);
k1=-(k2+F/wn^2);

t0=1/3;
t_step=t0/100000;

t1=[0:t_step:1/3];
y4=k1*exp(0.5*t1*(-a-b)) + k2*exp(0.5*t1*(a-b)) + F/(m*wn^2);
y4dot=k1*exp(0.5*t1*(-a-b))*(0.5*(-a-b)) + k2*exp(0.5*t1*(a-b))*(0.5*(a-b));
```

```

%SMORZAMENTO 2
%condizioni finali
spost_finale1damped=k1*exp(0.5*t0*(-a-b))+k2*exp(0.5*t0*(a-b))+F/wn^2;
vel_finale1damped=k1*exp(0.5*t0*(-a-b))*0.5*(-a-b)+k2*exp(0.5*t0*(a-b))*0.5*(a-b);

B2=[spost_finale1damped;vel_finale1damped];
%matrice dei coefficienti
d=sqrt(c^2-4*m^2*wn^2);

A2=[1 1; -(d+c)/(2*m) (d-c)/(2*m)];
%matrice delle incognite
% X=[c1 c2];
%risoluzione

%A*X=B

X2=A2\B2;
k3=X2(1,1);
k4=X2(2,1);

t0=1/3;
t_plus=2*t0;
t2=[t0:t_step:t_plus];

y5=k3*exp(-(t2-t0)*(d+c)/(2*m)) + k4*exp(((t2-t0)*(d-c))/(2*m));
y5dot=k3*exp(-(t2-t0)*(d+c)/(2*m))*(-(d+c)/(-2*m)) + k4*exp(((t2-t0)*(d-c))/(2*m))*((d-c)/(2*m));

% SMORZAMENTO 3
%condizioni finali
spost_finale2damped=k3*exp(-(t_plus-t0)*(d+c)/(2*m)) + k4*exp(((t_plus-t0)*(d-c))/(2*m));
vel_finale2damped=k3*((d+c)/(-2*m))*exp(-(t_plus-t0)*(d+c)/(2*m)) + k4*exp(((t_plus-t0)*(d-c))/(2*m))*((d-c)/(2*m));

B3=[spost_finale2damped + F/(m*wn^2);vel_finale2damped];
%matrice dei coefficienti
A3=[1 1; -(a+b)/2 (a-b)/2];
%matrice delle incognite
% X=[c1 c2];
%risoluzione

%A*X=B

X3=A3\B3;
k5=X3(1,1);
k6=X3(2,1);

t3=[t_plus:t_step:1];
y6=k5*exp(0.5*(t3-t_plus)*(-a-b))+k6*exp(0.5*(t3-t_plus)*(a-b))-F/(m*wn^2);
y6dot=k5*exp(0.5*(t3-t_plus)*(-a-b))*(0.5*(-a-b))+k6*exp(0.5*(t3-t_plus)*(a-b))*0.5*(a-b);

```

Abbiamo ottenuto i seguenti risultati:

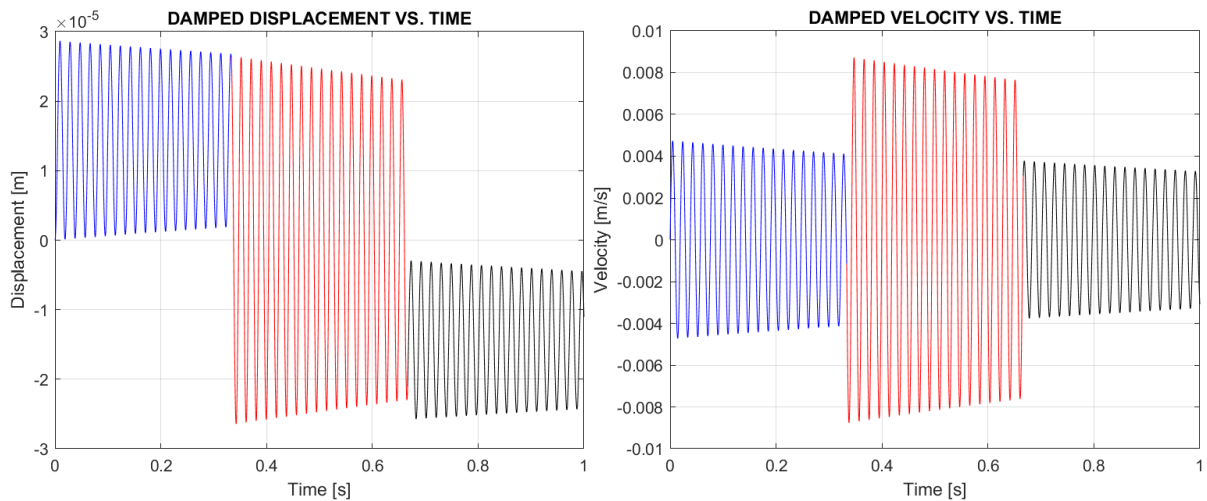


Figura 12: Grafico dello spostamento e della velocità del sistema smorzato nell'intervallo  $t_f$

Ponendo il valore di smorzamento pari a 0, si può notare come i grafici tornino ad essere quelli trovati precedentemente, confermando la correttezza dei calcoli svolti.

Si è notato anche che questa maniera di procedere con i calcoli era molto macchinosa, complessa ed esposta a facili errori.

## 2.2 Secondo metodo di risoluzione 1DOF

Si è deciso quindi di risolvere lo stesso sistema tramite l'utilizzo di ode45 per verificare che i risultati fossero corretti. Si è andati ad utilizzare gli stessi dati utilizzati in precedenza.

L'equazione differenziale è stata scritta nel modo che si può vedere a sinistra, utilizzando un ciclo *if* che simulasse il variare della forzante nell'intervallo di tempo *tf*. A destra vediamo invece il codice utilizzato per risolvere l'equazione differenziale:

```
function dydt=eq_diff_spost(t,y)
m0=6.75;
% m0=0;
m1=1+33/140*m0;
L=1;
E=7e10;
h=0.05;
I=h^4/12;
k=3*E*I/L^3;
csi=5e-4;
c=csi*2*sqrt(k*m1);
% c=0;

if t<1/3
    F=m1*pi/2*L;
elseif t<2/3
    F=0;
elseif t<1
    F=-m1*pi/2*L;
else
    F=0;
end

dydt=zeros(2,1);
dydt(1)=y(2);
dydt(2)=(1/m1)*(F-c*y(2)-k*(1+i*n)*y(1));

tspan=linspace(0,5,1000000);
ic=[0 0];
[t,y]=ode45(@eq_diff_spost1,tspan,ic);

figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(t,y(:,1),'r');
grid on
title('DISPLACEMENT OF THE MASS vs. TIME')
xlabel('Time [s]')
ylabel('Displacement [m]')
subplot(2,1,2)
plot(t,y(:,2),'b');
grid on
title('VELOCITY vs. TIME')
xlabel('Time [s]')
ylabel('Velocity [m]')
```

Ottenendo i seguenti risultati, coerenti con il sistema di risoluzione utilizzato in precedenza:

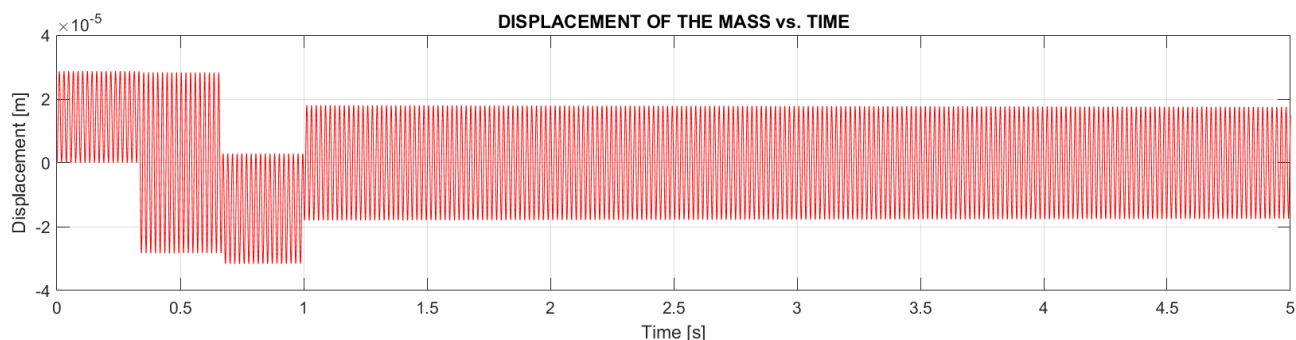


Figura 13: Grafico sistema non smorzato

Per il sistema smorzato considerando lo smorzamento dato dalla trave:

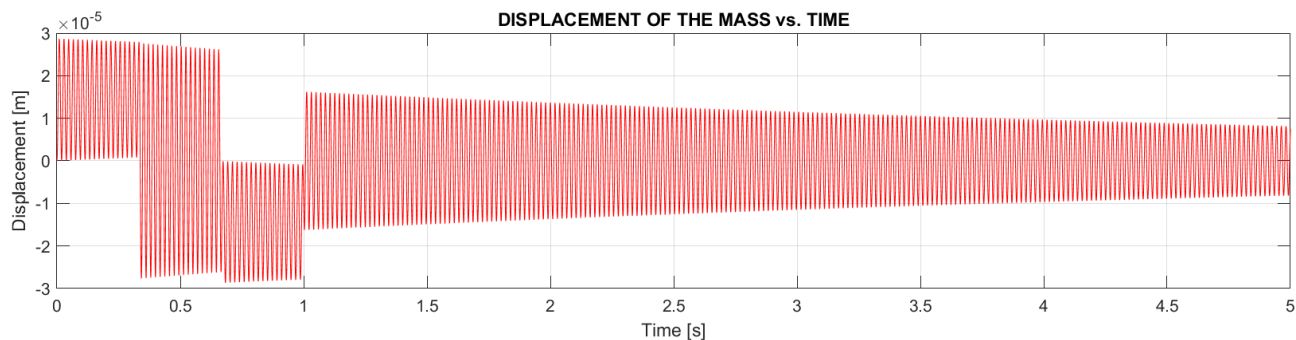


Figura 14: Grafico sistema smorzato

In un secondo momento si è andati ad aggiungere un ulteriore dettaglio. Si è andati a considerare una parte della massa della trave in alluminio nel calcolo della vibrazione del sistema. È stato considerato un valore pari a  $33/140 \cdot m_0$ , dove con  $m_0$  indichiamo la massa totale della trave in alluminio, pari a 6,75 kg. Abbiamo ottenuto i seguenti risultati:

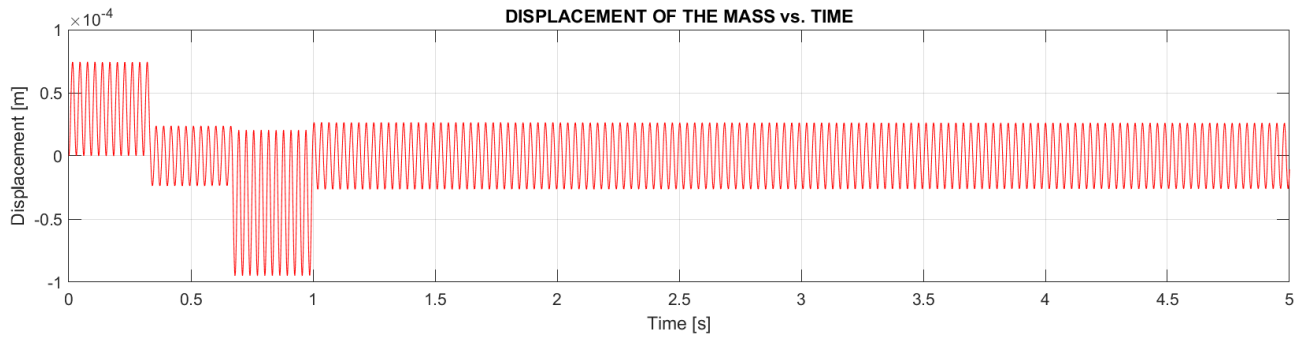


Figura 15: Grafico sistema non smorzato considerando la massa della trave

Per il sistema smorzato:

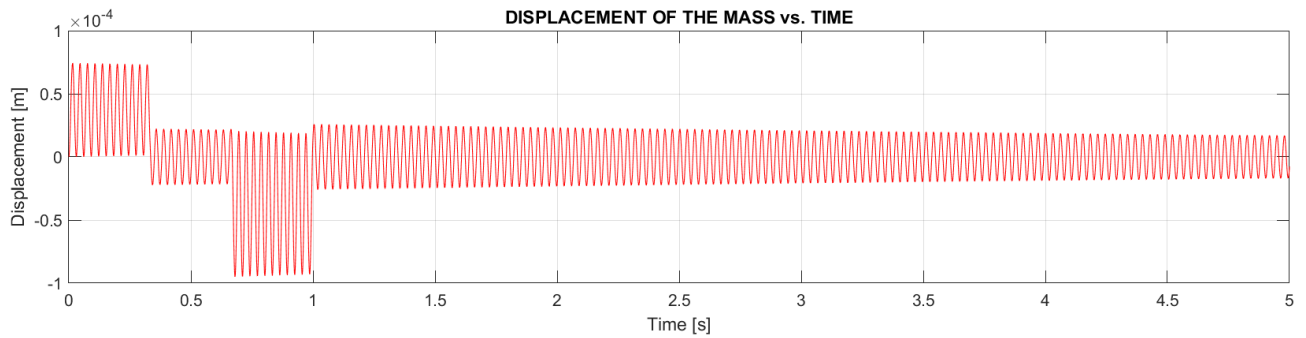


Figura 16: Grafico sistema smorzato considerando la massa della trave

### 2.3 Terzo metodo di risoluzione 1DOF

Si è cercato, quindi, di procedere a verificare ulteriormente i calcoli effettuati tramite l'utilizzo di Simulink, che fornisce una maniera grafica di effettuare gli stessi calcoli effettuati con MatLab.

Per effettuare questa operazione si è andati a costruire un sistema che schematizzasse una equazione differenziale in maniera grafica nel seguente modo utilizzando i parametri utilizzati in precedenza:

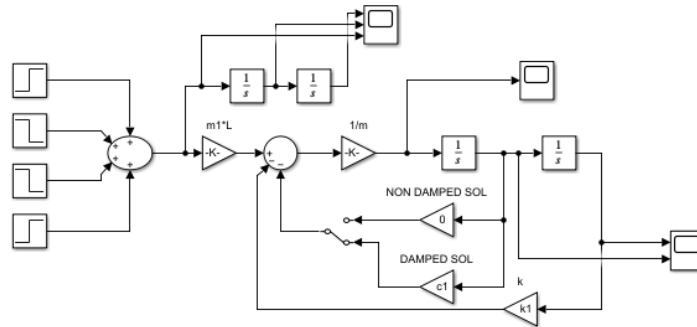


Figura 17: Modello Simulink 1DOF

L'input al sistema è una serie di step combinati per ricostruire la funzione a gradino in input, ossia:

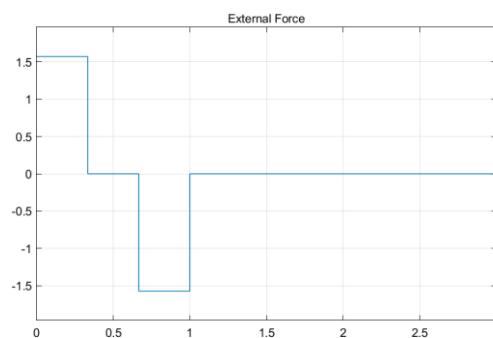


Figura 18: Legge del moto

Si è andati ad impostare dei tempi di sampling molto ristretti per ottenere risultati il più possibile accurati.

Ottenendo i seguenti risultati per il sistema non smorzato:

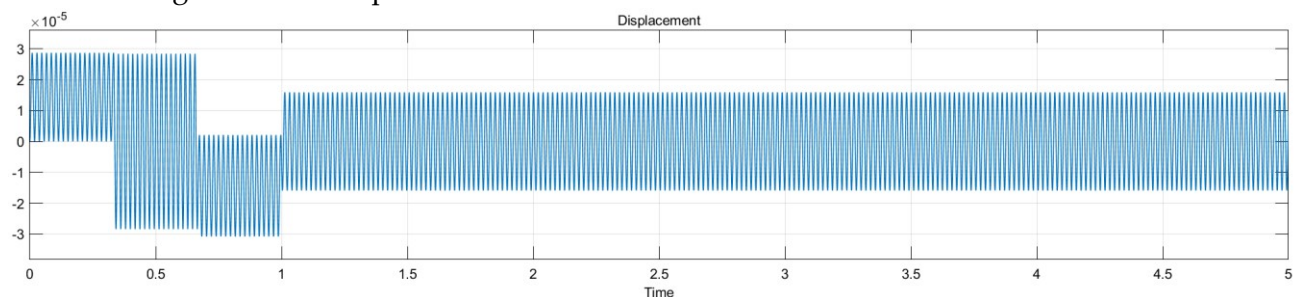


Figura 19: Grafici della risposta ottenuti con Simulink



Ottenendo i seguenti risultati per il sistema smorzato:

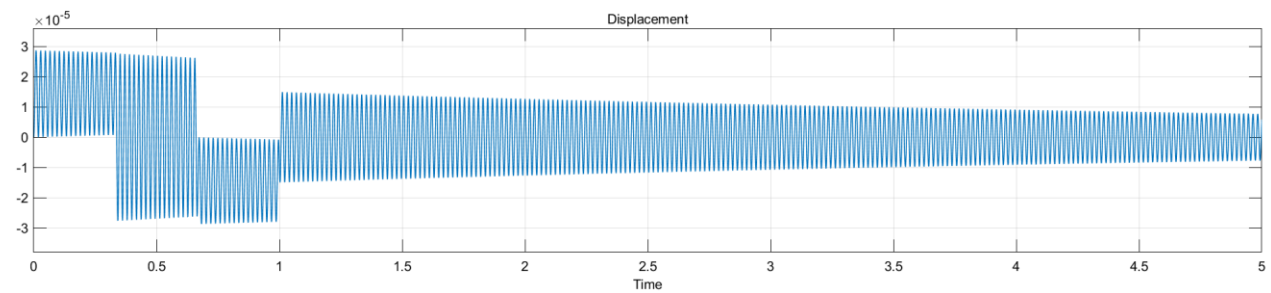


Figura 20: Grafici della risposta ottenuti con Simulink, con smorzamento

Entrambi coincidono con i grafici precedenti.

I risultati ottenuti ci permettono di affermare che questo modello restituisce gli stessi risultati del modello precedentemente creato su MatLab.

Come in precedenza, consideriamo una massa rotante pari a  $33/140 \cdot m_0$  kg.

Andando quindi a modificare il valore di  $m_1$  tra i parametri inseriti su Simulink si ottengono i seguenti risultati per il sistema non smorzato:

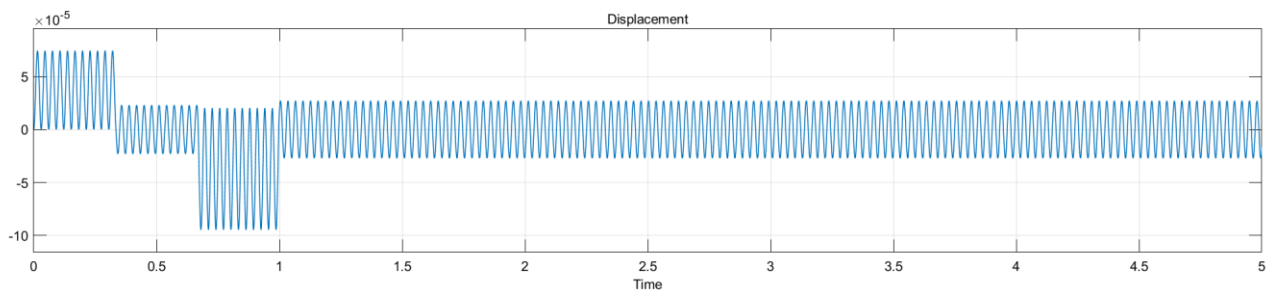


Figura 21: Grafici della risposta, del sistema non smorzato, considerando la massa dell'asta

E i seguenti valori per il sistema smorzato:

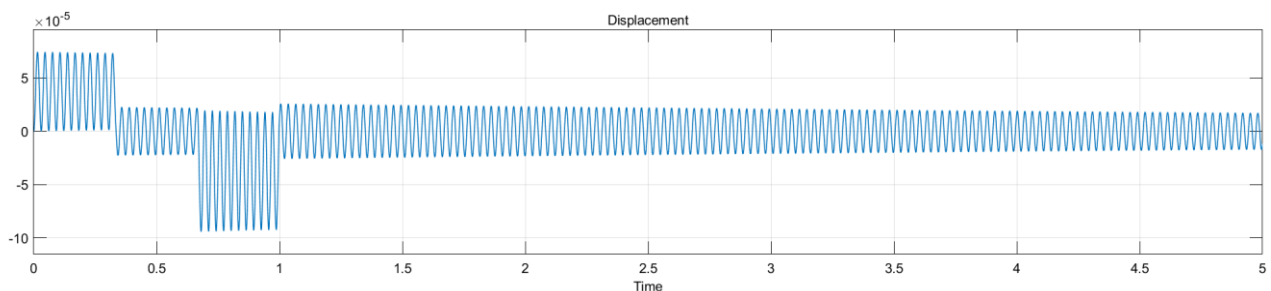


Figura 22: Grafici della risposta, del sistema smorzato, considerando la massa dell'asta

## 2.4 Riduzione delle vibrazioni a fine movimentazione

Si è andati, in primis, a cercare di ridurre le vibrazioni residue tramite la regolazione del tempo finale  $t_f$ .

Si è andati a ricercare un valore inferiore e uno superiore a  $t_f$ , per avere la possibilità di scegliere tra due soluzioni diverse a seconda del tipo di richieste.

Sperimentalmente, si è capito che, se si interrompe la forzante poco dopo che essa ha raggiunto il picco, si otterranno i valori minimi di vibrazione. Questi valori corrispondono all'accelerazione minima della massa. Si è andati quindi a scegliere dei valori di  $t_f$  corrispondenti alle zone descritte.

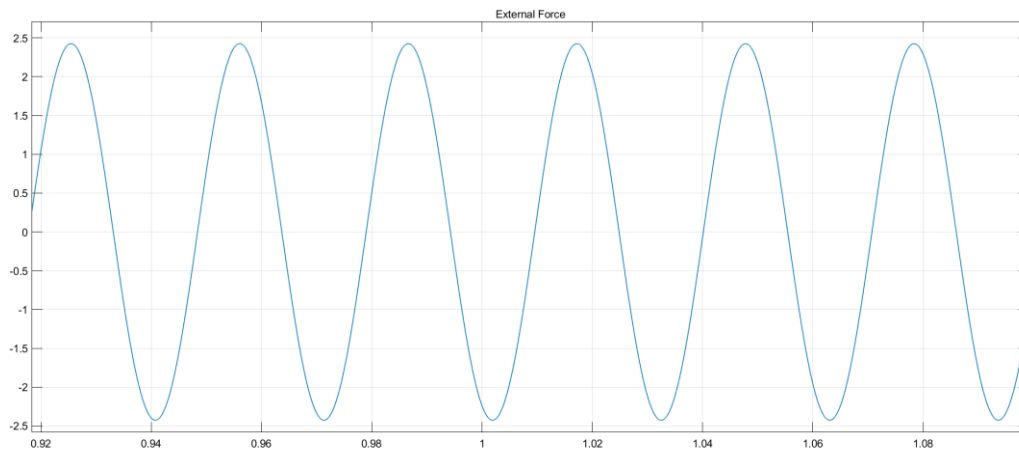


Figura 23: Accelerazione nell'intorno di  $t_f$

Per un valore di  $t_f$  pari a 0.971 si ottiene una riduzione delle vibrazioni libere, che possiamo vedere nel seguente diagramma:

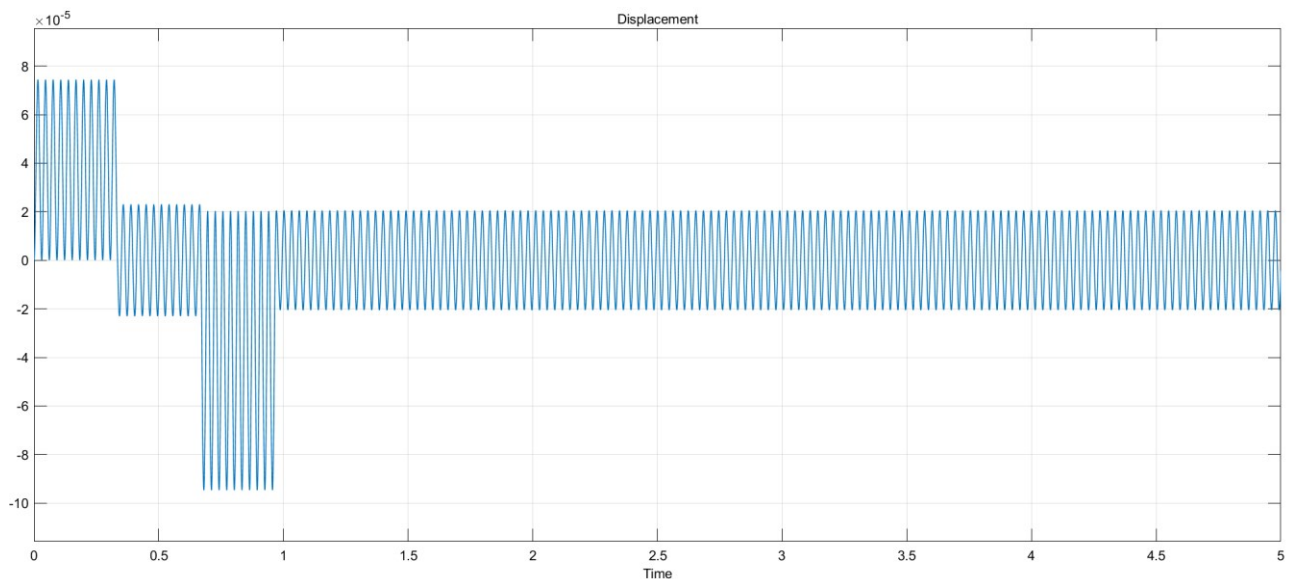


Figura 24: Risposta del sistema ponendo  $t_f = 0.971$  s

Ponendo  $t_f = 1.002$  s si ottiene all'incirca lo stesso risultato:

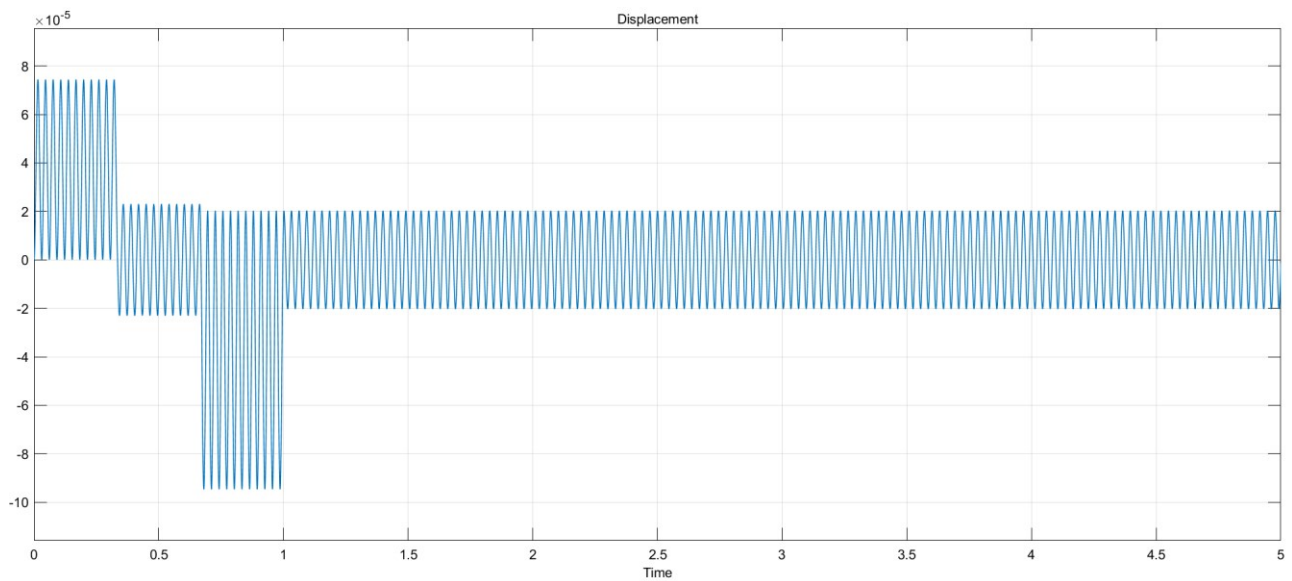


Figura 25: Risposta del sistema ponendo  $t_f = 1.002$  s

Ci si è limitati ai millesimi di secondo, perché andare oltre significherebbe sicuramente ottenere risultati migliori, ma di difficile applicazione nella realtà.

La selezione di tali intervalli di tempo è risultata corretta, poiché andando a scegliere  $t_f = 0.986$ , cioè il tempo in cui si ha un massimo della accelerazione si ottiene una amplificazione delle vibrazioni residue.

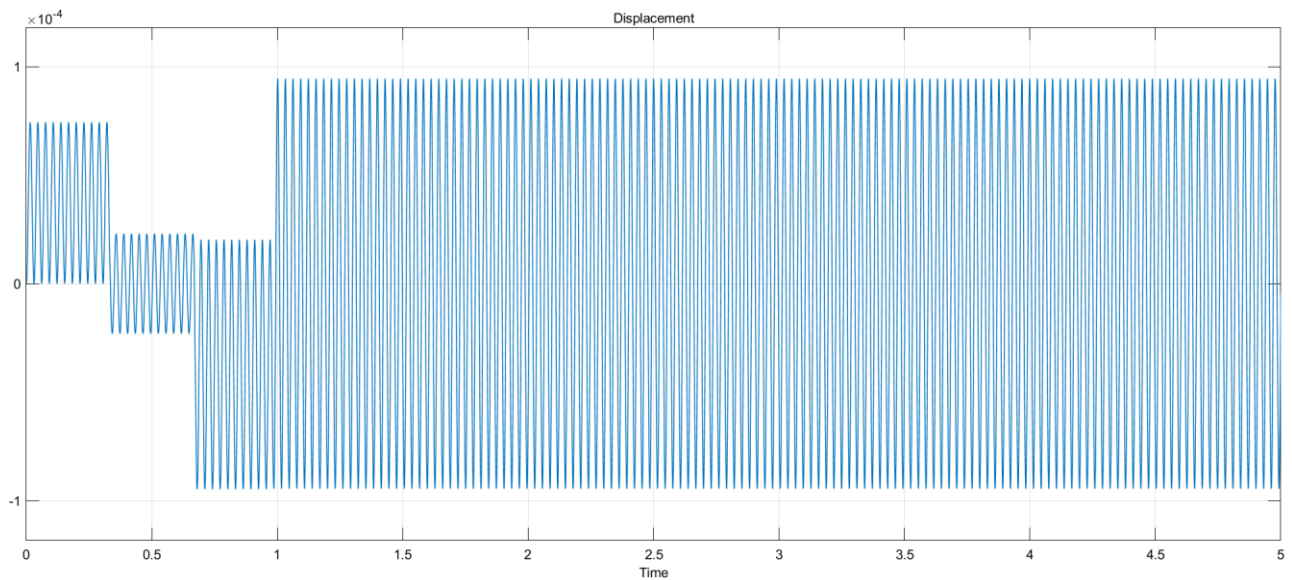
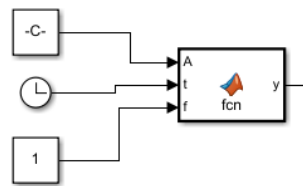


Figura 26: Risposta del sistema ponendo  $t_f = 0.986$  s

Si è deciso di procedere studiando una forma differente dell'equazione del moto, che garantisca uno spostamento di  $20^\circ$  in un tempo di 1 secondo come in origine e che potesse minimizzare le vibrazioni. Nei grafici i valori sono espressi in radianti.

Si è deciso di studiare la risposta del sistema ad una forzante armonica.

È stata utilizzata una forzante sinusoidale, sostituita al posto della funzione a gradino in input tramite il seguente blocco, al cui interno si trova un semplice ciclo for per fermare la sinusoide passato il tempo  $t_f$  pari a 1 secondo:



```
function y = fcn(A,t,f)
w=2*pi*f;
if t<1
    y=A*sin(w*t);
else
    y=0;
end
```

Di seguito possiamo vedere i profili di accelerazione, velocità e spostamento, ricavati tramite semplici calcoli:

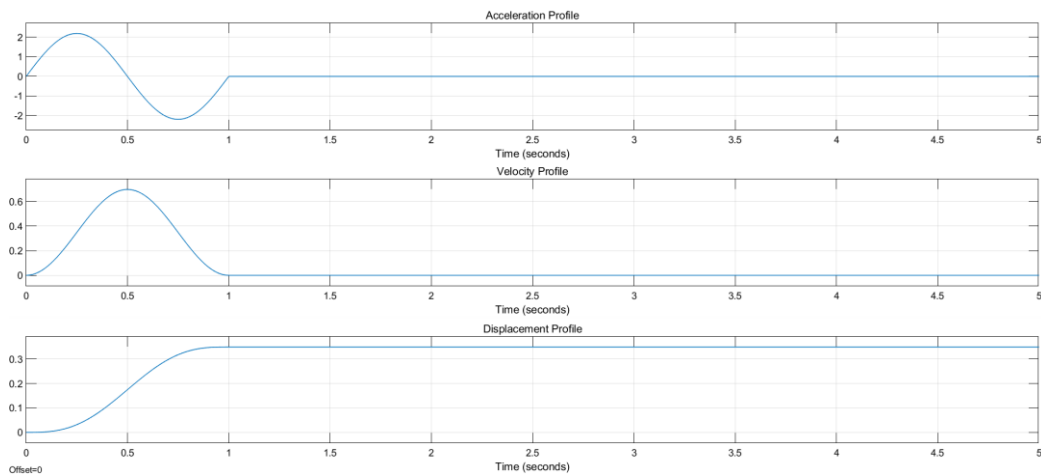


Figura 27: Legge del moto armonica

E di seguito il confronto con i profili di accelerazione, velocità e spostamento originari:

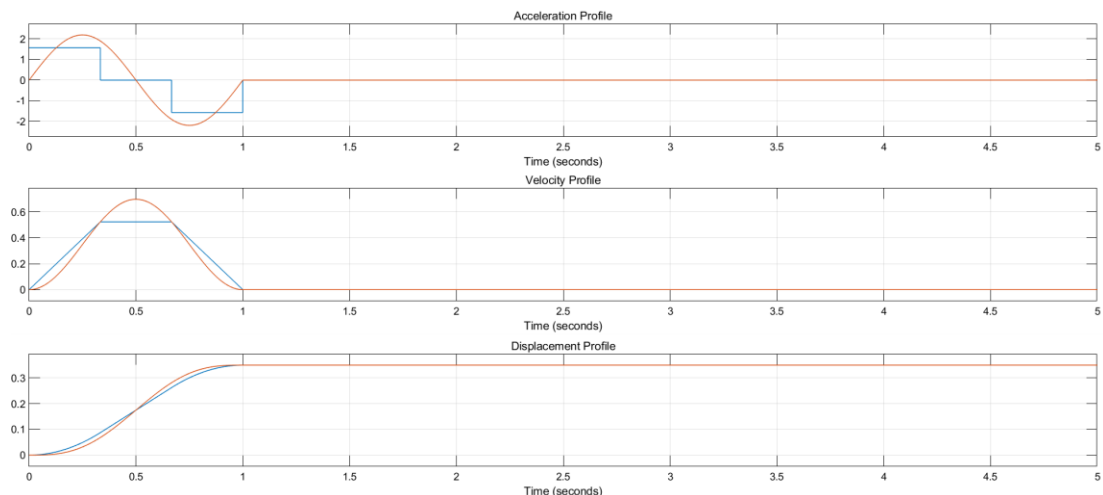


Figura 28: Legge del moto armonica confrontata con la legge originaria

I risultati ottenuti sono molto soddisfacenti, poiché evidenziano una grande riduzione delle vibrazioni residue dopo il tempo  $t_f$ . Possiamo notare come anche la velocità di movimento si sia ridotta di 1 ordine di grandezza. I risultati ottenuti ci sono sembrati coerenti per via della legge di moto armonica utilizzata. Vediamo la risposta del sistema 1DOF alla legge di moto armonica:

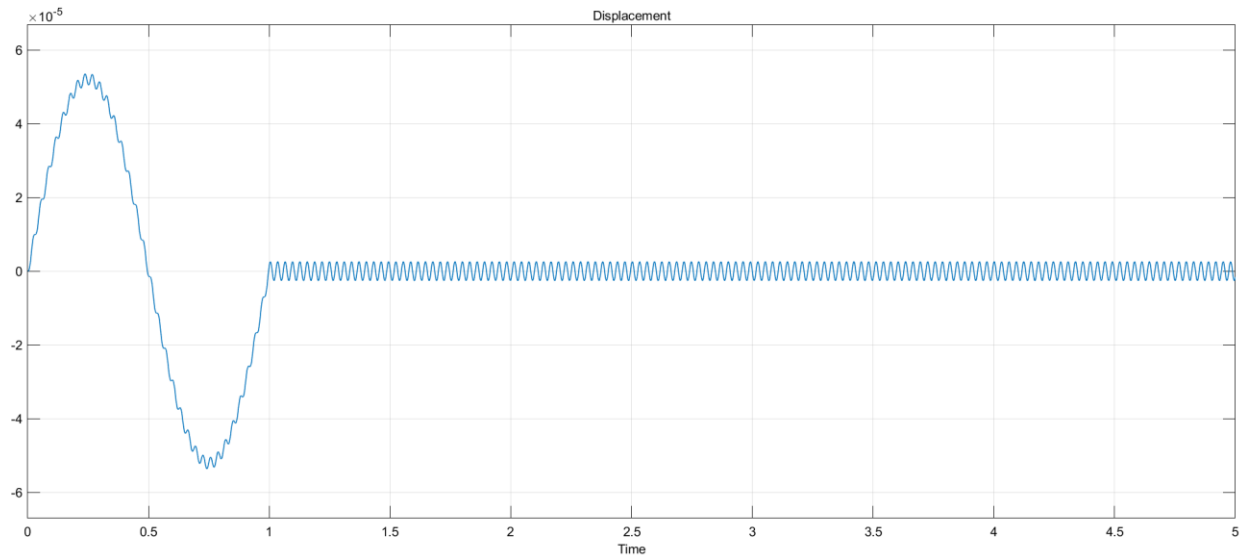


Figura 29: Grafico della riduzione delle vibrazioni residue dopo il tempo  $t_f$

Successivamente è stato effettuato un tentativo ulteriore con una legge di moto più simile all'originale, che non ha portato ai risultati sperati. L'ampiezza della vibrazione residua, infatti, è risultata essere maggiore che nel caso precedente. La soluzione migliore è data dalla legge di moto puramente armonica vista precedentemente.

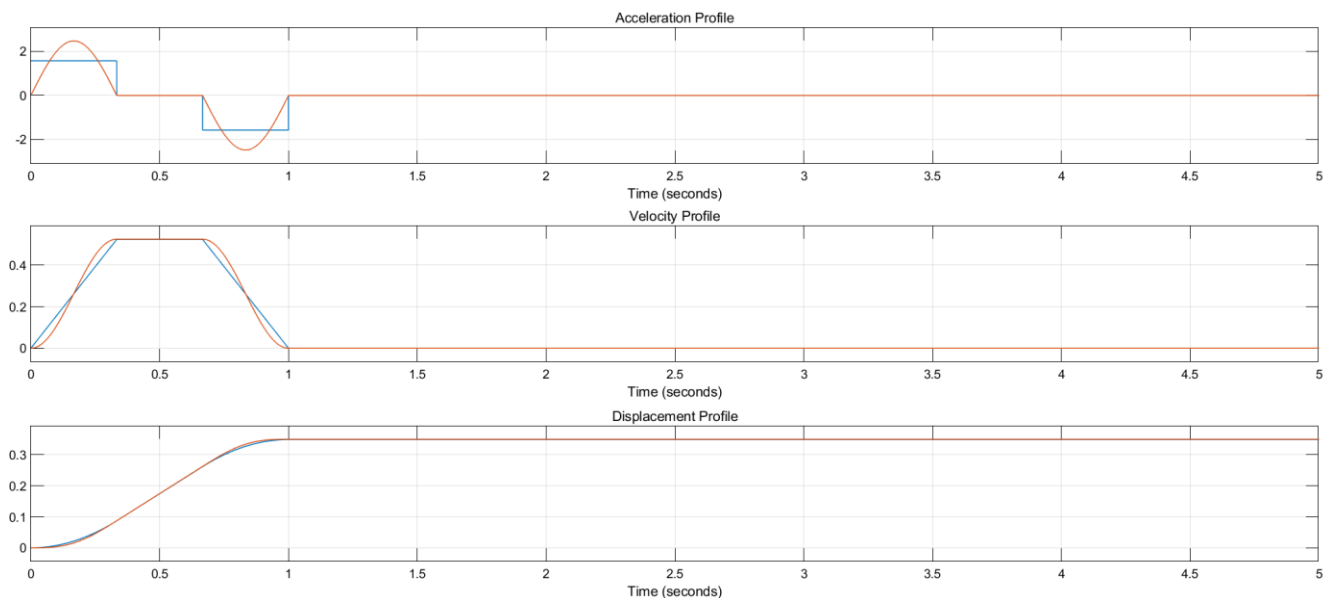
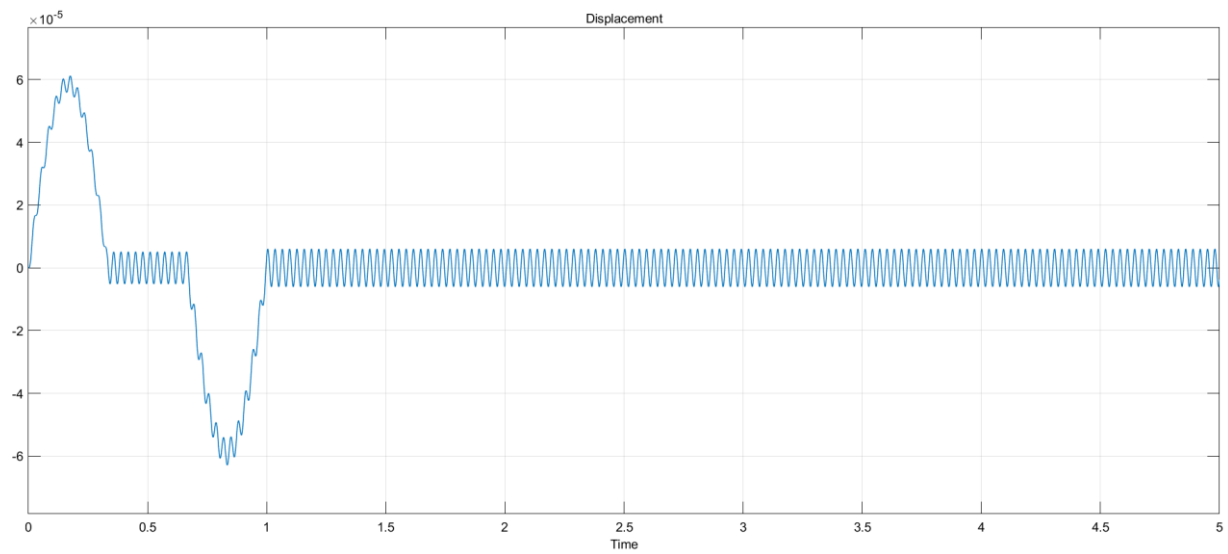


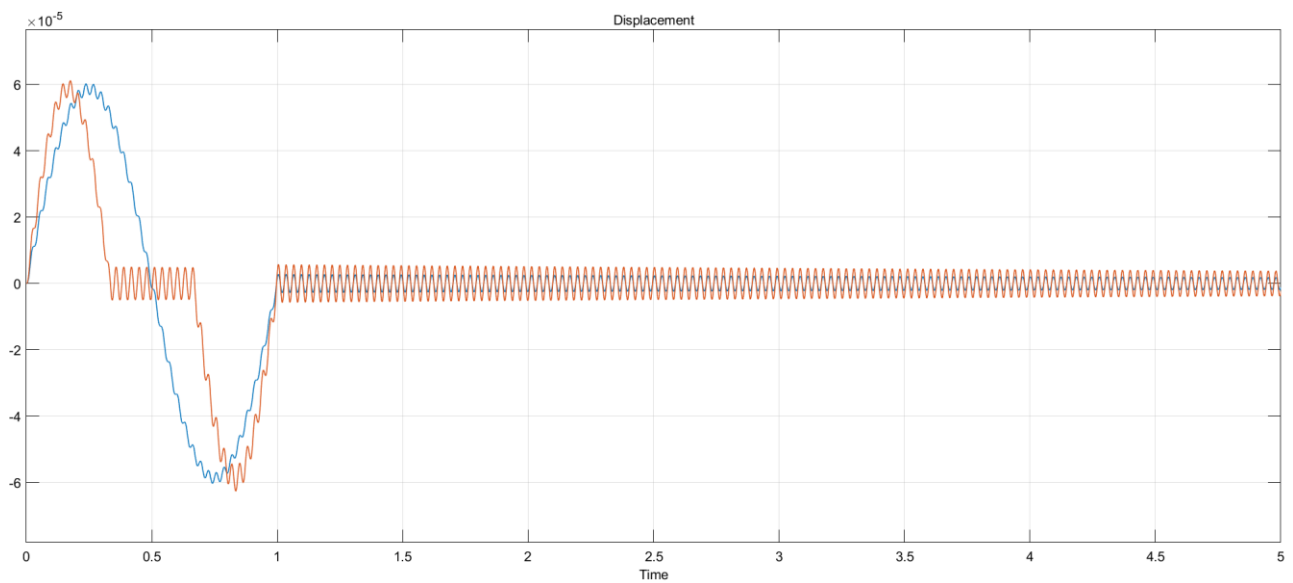
Figura 30: Confronto tra la seconda legge armonica e la legge originale

Risposta del sistema alla seconda forzante sinusoidale:



*Figura 31: Risposta del sistema alla seconda legge del moto armonica*

Confronto tra le risposte smorzate dallo smorzamento dato dalla trave:



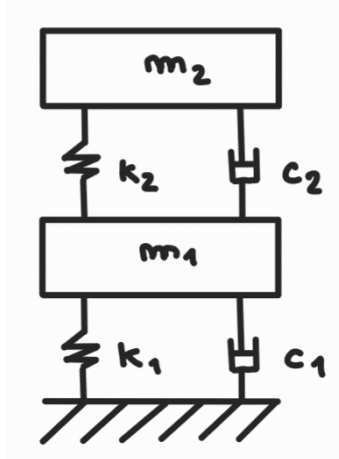
*Figura 32: Confronto tra le risposte alle forzanti armoniche*

### 3. Procedimento 2DOF

#### 3.1 Primo metodo di risoluzione

Si è deciso di procedere andando ad inserire un sistema in grado di assorbire le vibrazioni residue.

Si è passati quindi allo studio di un sistema a due gradi di libertà del seguente tipo:



```
% Parametri utilizzati nel sistema 2DOF
H=0.05; %square section side
E=7e10; %young's modulus of the aluminum beam
I=H^4/12; %inertial moment of the beam section
rho=2700; %kg/m^3 aluminum density
A=H^2; %m^2 aluminum beam section
L=1; %m aluminum beam length
m0=rho*A*L; %kg %aluminum beam's mass
mu=0.1; %relationship between absorber's mass and m1

m1=1+33/140*m0; %kg aluminum beam's mass + mass at the end of the beam
m2=mu*m1; %kg mass of the absorber

k1=(3*E*I)/(L^3); %N/m beam stiffness
k2=k1*(mu/(1+mu)); %N/m absorber stiffness

csi=5e-4; %viscous damping ratio of the aluminum beam
c_cr=2*sqrt(k1*m1); %critical damping of the beam model
c_cr2=2*sqrt(k2*m2); %critical damping of the absorber model
csi_opt=sqrt((3/8)*(mu/((1+mu)^3))); %viscous damping ratio of the absorber
c1=csi*c_cr; %beam's damping
c2=csi_opt*c_cr2; %damping of the absorber
```

Figura 33: Schema del sistema a 2 gradi di libertà

I parametri utilizzati nella simulazione possono essere visti a destra, nelle pagine successive spiegheremo i calcoli effettuati.

L'equazione del moto per il modello nell'immagine della pagina precedente è il seguente sistema:

$$\begin{cases} m_1 x_1'' + c_2(x_1' - x_2') + c_1 x_1' + k_2(x_1 - x_2) + k_1 x_1 = F_1 \\ m_2 x_2'' + c_2(x_2' - x_1') + k_2(x_2 - x_1) = F_2 \end{cases}$$

Andando a costruire un nuovo sistema basato su questa equazione del moto si ottiene un sistema come il seguente:

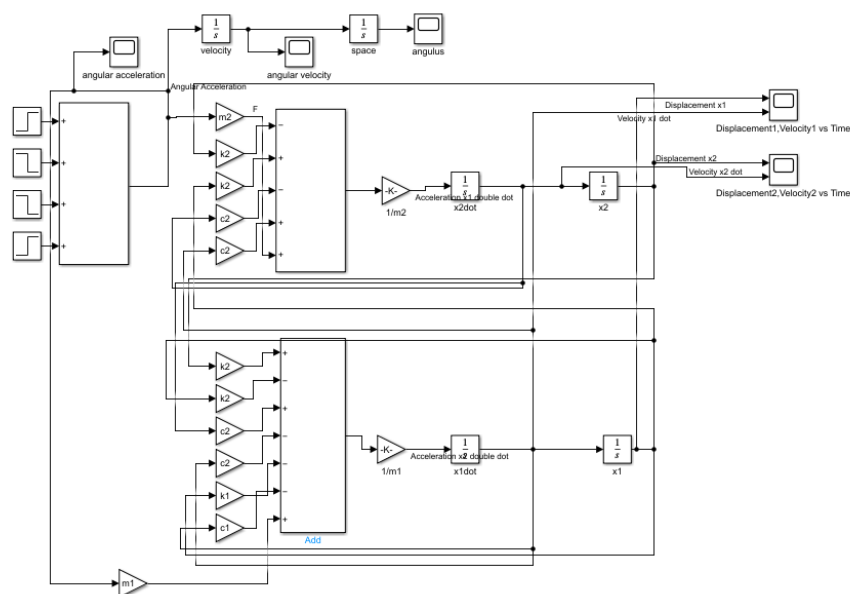


Figura 34: Modello Simulink 2DOF

In questo modo possiamo andare ad inserire un sistema massa-molla-smorzatore con parametri che potremo andare a studiare per andare a diminuire le vibrazioni finali.

Si è andati poi a verificare che il secondo modello a due gradi di libertà restituisse gli stessi risultati del modello a un grado di libertà eliminando i termini relativi all'assorbitore di vibrazioni.

Ponendo i valori di smorzamento ( $c_2$ ) e rigidezza ( $k_2$ ) pari a zero si ottengono i seguenti risultati per il sistema non smorzato:

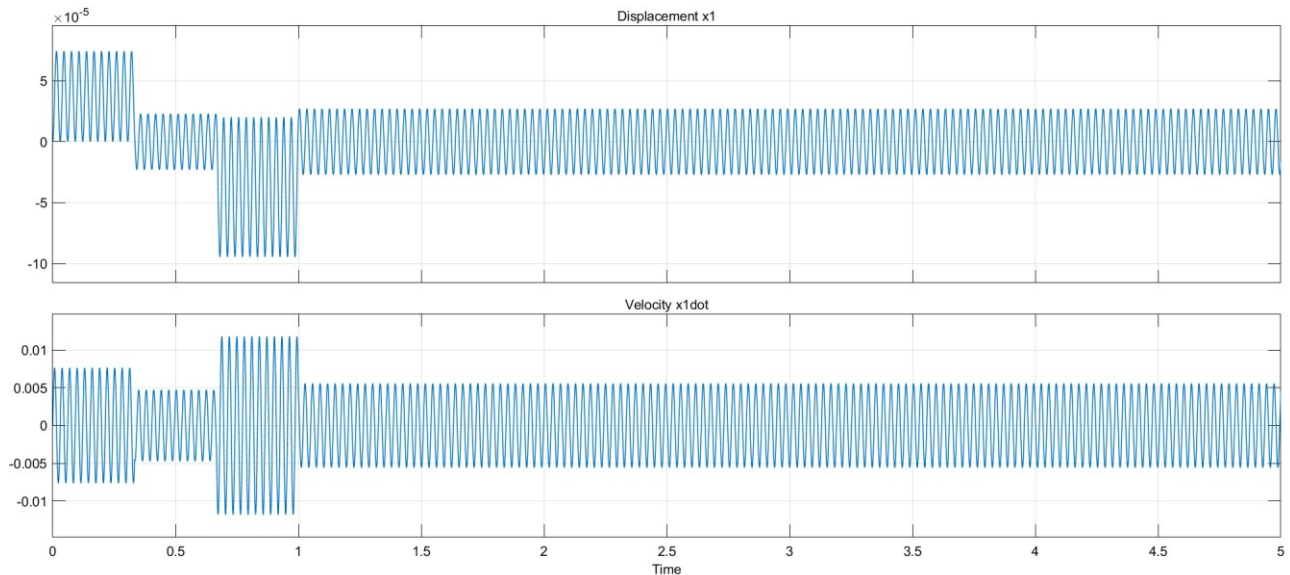


Figura 35: Risposta del sistema a 2 gradi di libertà con smorzamento e rigidezza uguali a 0

E i seguenti risultati per il sistema smorzato considerando lo smorzamento dato dall'asta:

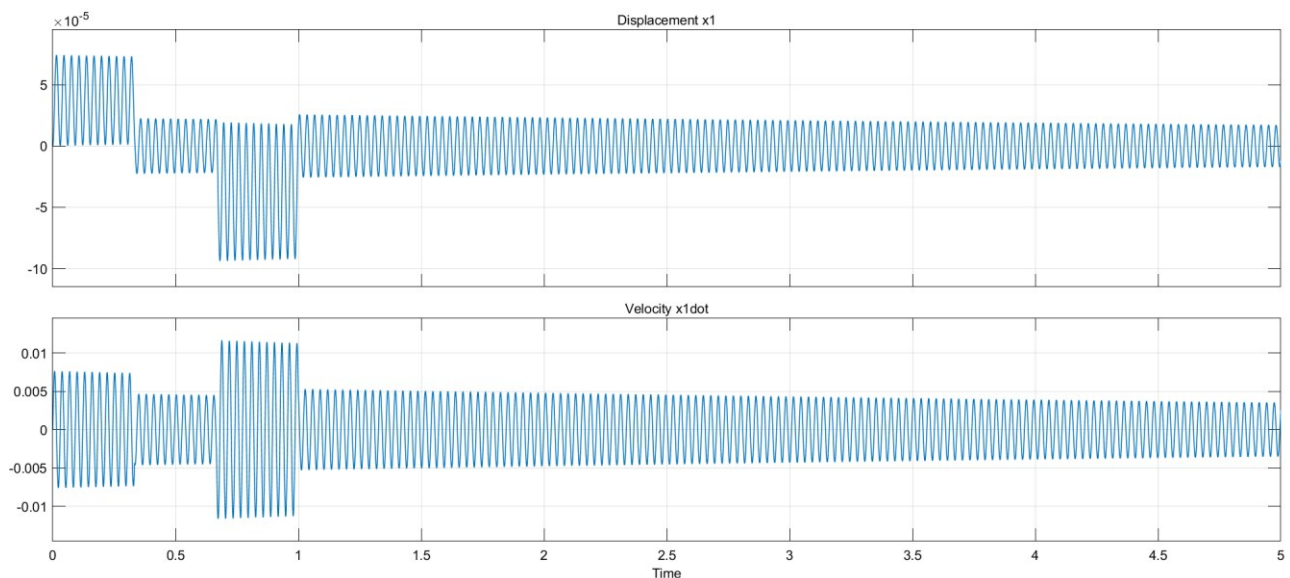


Figura 36: Risposta del sistema a 2 gradi di libertà, smorzato, con smorzamento e rigidezza uguali a 0

Verificato che il modello fosse coerente con il precedente, si è deciso quindi di simulare il sistema inserendo i valori di smorzamento e rigidezza dati dall'assorbitore di vibrazioni.



I valori sono stati ricavati da relazioni fornite nelle lezioni del corso di Meccanica delle Vibrazioni, in particolare abbiamo fatto riferimento alle seguenti equazioni per un primo dimensionamento dell'assorbitore:

$$\mu = \frac{m_a}{m} \qquad \zeta_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{3}{8} \frac{\mu}{(1+\mu)^3}} \qquad \frac{\omega_a}{\omega_n} = \frac{1}{1+\mu}$$

Si è deciso di utilizzare per una prima simulazione un rapporto tra la massa dell'assorbitore e la massa rotante pari a 0.1, ottenendo un valore di  $\zeta$  pari a 0.1679. Il valore di rigidità è  $k_2=9943.2$  N/m mentre il valore di smorzamento è  $c_2 = 17.04$  Ns/m. La massa è  $m_2 = 0.1 \cdot m_1$  kg = 2.59 kg.

I risultati ottenuti sono molto soddisfacenti, poiché mostrano chiaramente come l'inserzione di un assorbitore di vibrazioni così dimensionato riduca a zero le vibrazioni nel sistema dopo circa 0.2 secondi dalla fine della movimentazione.

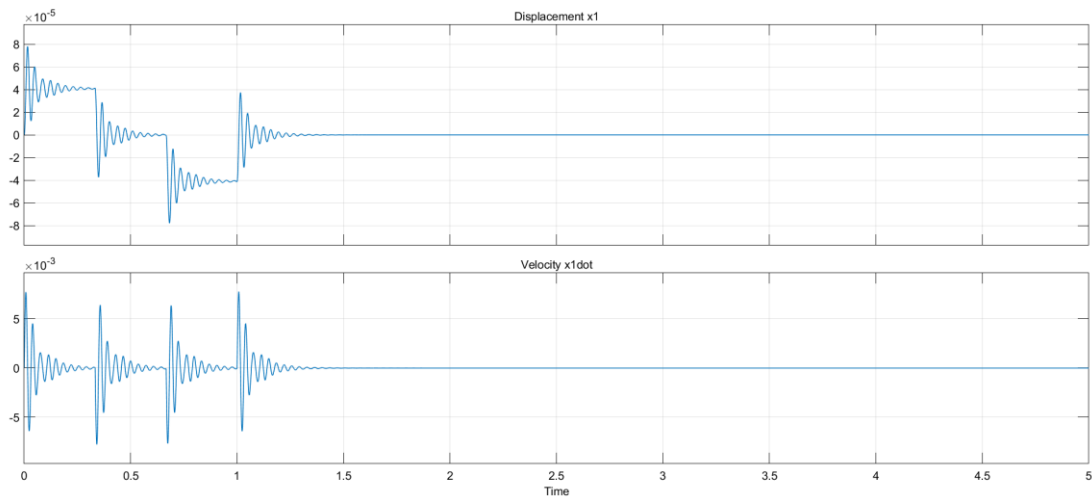


Figura 37: Risposta del sistema con l'assorbitore di vibrazioni

Di seguito la risposta del sistema 2DOF alla legge del moto armonica:

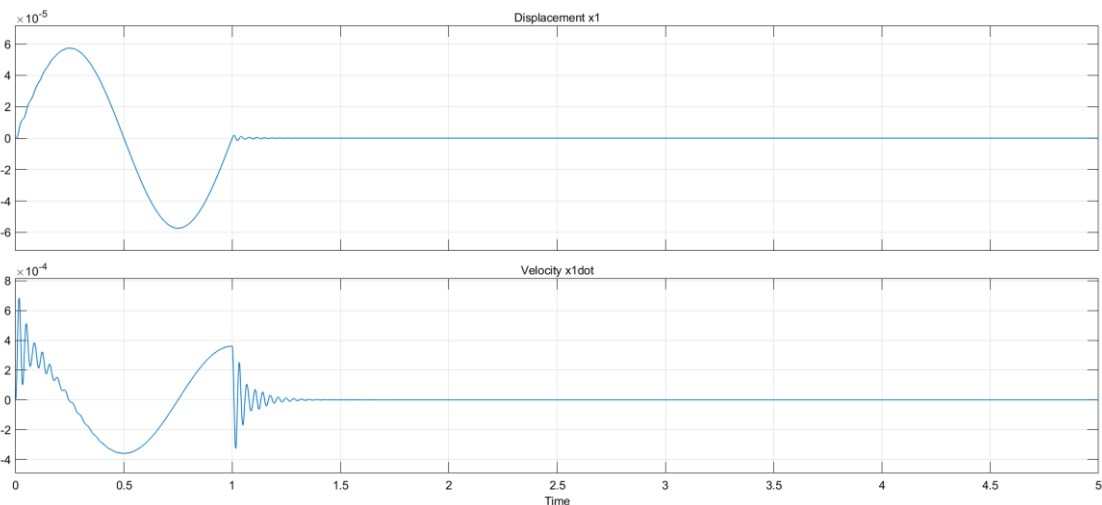


Figura 38: Risposta del sistema, alla legge armonica, con l'assorbitore di vibrazioni

In questo caso le vibrazioni sono ancor di più ridotte per via della diversa legge del moto.

### 3.2 Secondo metodo di risoluzione 2DOF

Si è deciso di procedere con una soluzione alternativa tramite MatLab per verificare i risultati corretti. Il metodo prevede la risoluzione del sistema precedente tramite l'utilizzo di ode45. Nelle immagini sottostanti si possono vedere l'equazione differenziale e il codice utilizzato per risolvere l'equazione:

```
function dydt=eq_diff_spost2DOF(t,y)

m0=6.75;
m1=1+33/140*m0;
mu=0.1;
L=1;
E=7e10;
h=0.05;
I=h^4/12;
k1=3*E*I/L^3;
csi1=5e-4;
c1=csi1*2*sqrt(k1*m1);
m2=mu*m1;
k2=(mu/(1+mu))*k1;
csi_opt=sqrt((3/8)*(mu/((1+mu)^3)));
c2=csi_opt*2*sqrt(k2*m2);

if t<1/3
    F1=m1*pi/2*L;
elseif t<2/3
    F1=0;
elseif t<1
    F1=-m1*pi/2*L;
else
    F1=0;
end

if t<1/3
    F2=m2*pi/2*L;
elseif t<2/3
    F2=0;
elseif t<1
    F2=-m2*pi/2*L;
else
    F2=0;
end

dydt=[y(1);y(2);y(3);y(4)];
dydt(1)=y(2);
dydt(2)=(1/m1)*(F1-c1*y(2)-c2*y(2)+c2*y(4)-k1*y(1)-k2*y(1)+k2*y(3));
dydt(3)=y(4);
dydt(4)=(1/m2)*(F2+c2*y(2)-c2*y(4)+k2*y(1)-k2*y(3));

tspan=linspace(0,5,100000);
ic=[0 0 0 0];
[t,y]=ode45(@eq_diff_spost2,tspan,ic);
```

Risultati ottenuti analoghi ai precedenti, che confermano la correttezza dei calcoli:

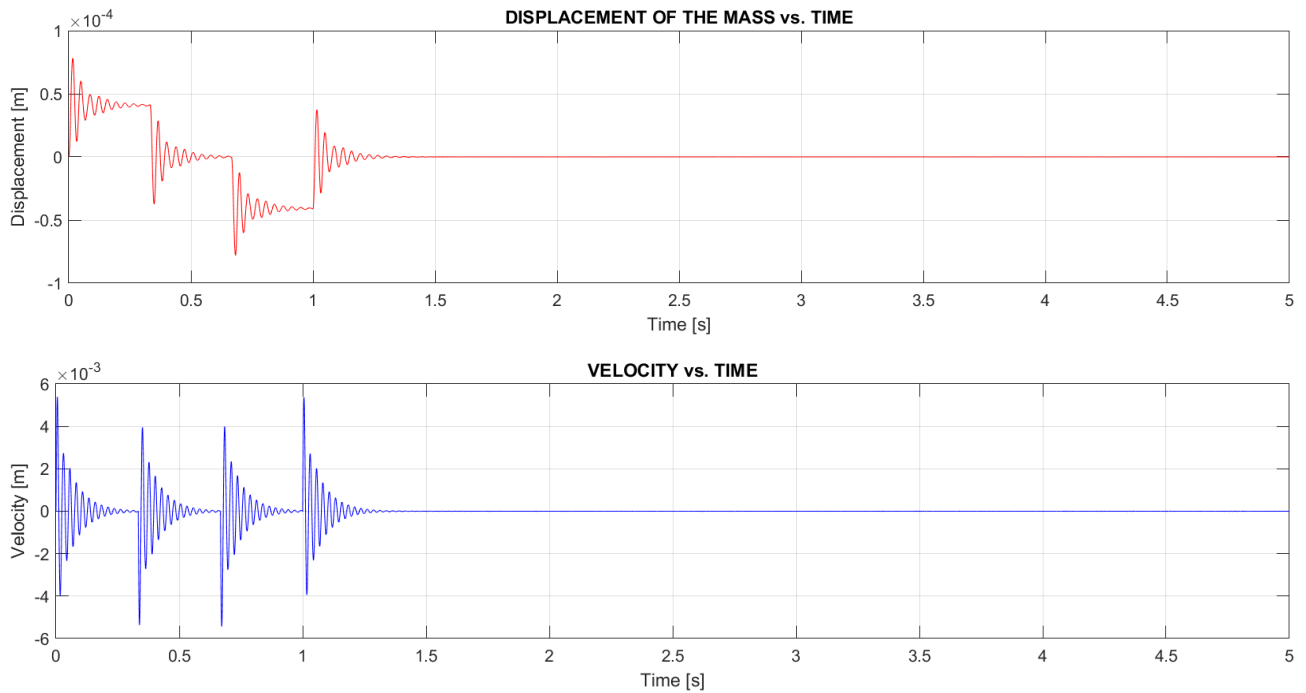


Figura 39: Risposta del sistema, tramite MATLAB, con l'assorbitore di vibrazioni

## 4. Conclusioni

In conclusione, possiamo affermare che per ridurre le vibrazioni si può agire andando a variare il tempo di fine movimentazione  $t_f$ . Così facendo si ottiene una riduzione moderata delle vibrazioni. È il modo più semplice e veloce per ridurre le vibrazioni, anche se la riduzione non è così elevata come andando ad inserire un assorbitore.

Nel caso le vibrazioni debbano essere necessariamente portate a zero è utile proseguire con l'inserzione di un assorbitore di vibrazioni. Il sistema che ne deriva è sicuramente più complesso ma risulta essere molto efficace.

Nel caso invece non sia necessario arrivare a valori praticamente nulli si può procedere andando a variare la legge del moto sostituendola con una legge di tipo armonico, evitando di dover inserire un assorbitore di vibrazioni.

È emerso che leggi di tipo armonico senza intervalli di tempo dove l'accelerazione è costantemente nulla sono più adatte per ottenere vibrazioni contenute quando il movimento dato dalla rotazione della trave cessa.

La combinazione ottimale per ridurre le vibrazioni del sistema è rappresentata dall'utilizzo di una legge del moto armonica e dall'inserzione di un assorbitore di vibrazioni.

## 5. Indice delle figure

Figura 1: Modello della trave .....	4
Figura 2: Sistema di riferimento .....	4
Figura 3: Modello dell'inflessione di una trave con una forza applicata all'estremità .....	5
Figura 4: Modello dell'inflessione di una trave con una massa applicata all'estremità.....	5
Figura 5: Modello del pendolo.....	6
Figura 6: Modello asta non smorzato .....	7
Figura 7: Modello asta smorzato .....	8
Figura 8: Grafico dell'accelerazione angolare rispetto al tempo .....	9
Figura 9: Grafici dello spostamento e della velocità in funzione del tempo nel primo intervallo di tempo $\Delta t$ .....	10
Figura 10: Grafico dello spostamento e della velocità del sistema non smorzato nell'intervallo $t_f$ ..	11
Figura 11: Schema del sistema con smorzatore .....	11
Figura 12: Grafico dello spostamento e della velocità del sistema smorzato nell'intervallo $t_f$ .....	13
Figura 13: Grafico sistema non smorzato .....	14
Figura 14: Grafico sistema smorzato.....	14
Figura 15: Grafico sistema non smorzato considerando la massa della trave .....	15
Figura 16: Grafico sistema smorzato considerando la massa della trave .....	15
Figura 17: Modello Simulink 1DOF .....	16
Figura 18: Legge del moto .....	16
Figura 19: Grafici della risposta ottenuti con Simulink.....	16
Figura 20: Grafici della risposta ottenuti con Simulink, con smorzamento .....	17
Figura 21: Grafici della risposta, del sistema non smorzato, considerando la massa dell'asta.....	17
Figura 22: Grafici della risposta, del sistema smorzato, considerando la massa dell'asta .....	17
Figura 23: Accelerazione nell'intorno di $t_f$ .....	18
Figura 24: Risposta del sistema ponendo $t_f = 0.982$ s.....	18
Figura 25: Risposta del sistema ponendo $t_f = 1.003$ s.....	19
Figura 26: Legge del moto armonica.....	20
Figura 27: Legge del moto armonica confrontata con la legge originaria .....	20
Figura 28: Grafico della riduzione delle vibrazioni residue dopo il tempo $t_f$ .....	21
Figura 29: Confronto tra la seconda legge armonica e la legge originale .....	21
Figura 30: Risposta del sistema alla seconda legge del moto armonica .....	22
Figura 31: Schema del sistema a 2 gradi di libertà.....	23
Figura 32: Modello Simulink 2DOF .....	23
Figura 33: Risposta del sistema a 2 gradi di libertà con smorzamento e rigidezza uguali a 0 .....	24
Figura 34: Risposta del sistema a 2 gradi di libertà, smorzato, con smorzamento e rigidezza uguali a 0 .....	24
Figura 35: Risposta del sistema con l'assorbitore di vibrazioni .....	25
Figura 36: Risposta del sistema, alla legge armonica, con l'assorbitore di vibrazioni .....	25
Figura 37: Risposta del sistema, tramite MATLAB, con l'assorbitore di vibrazioni.....	26