Tarefa de Integração Numérica

Roberto Sérgio Ribeiro de Meneses - 520403
Tiago Barros - 520401

25/04/2024

Tarefa 04 : Desenvolva a estimativa do erro para a fórmula aberta com polinômio de substituição de grau 2.

a) Série de Taylor

Lembre-se de que a Série de Taylor representa o valor exato de uma função analítica na vizinhança de um ponto onde se conhece o valor da função e os valores de todas as suas derivadas. Lembre-se também de que o conceito de vizinhança significa "subjetivamente" um ponto próximo do outro. Assim, a Série de Taylor é válida para $\Delta << 1.0$ (ou seja, para intervalos bem pequenos).

Vamos assumir que o ponto base para a Série de Taylor vai ser o centro do intervalo de integração, isto é

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$$

Se considerarmos ϵh como sendo a distância do ponto x ao ponto $\bar{x}$, podemos escrever a Série de Taylor para calcular $f(x) = f(\bar{x} + \epsilon h)$ como

$$f(x) = f(\bar{x} + \epsilon h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(\epsilon h) + \frac{1}{2!}f''(\bar{x})(\epsilon h)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\bar{x})(\epsilon h)^3 + \frac{1}{4!}f^{iv}(\bar{x})(\epsilon h)^4...$$

onde h é metade do intervalo, isto é,
$h = \frac{b-a}{2}$

Assim, para obtermos o valor de I_e no caso geral, substituímos f(x) na equação de :

$$I = \int_a^b f(x)fx$$

Logo temos:

$$\begin{aligned} I_e &= \int_a^b f(x)dx = h\int_{-1}^1 f(\bar{x} + \epsilon h)d\epsilon \\ &= h\int_{-1}^1 (f(\bar{x}) + \frac{1}{2!}f''(\bar{x})(\epsilon h)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\bar{x})(\epsilon h)^3 + ...) \end{aligned}$$

A igualdade na equação anterior só vale se considerarmos os infinitos termos. No entanto, se considerarmos um número finito de termos, teremos uma boa aproximação do valor exato. É por isso que chamamos estimativa do erro.

b) Estimativas do erro das fórmulas de Newton-Cotes Abertas

Para 2°Grau temos que:

$$I_f = \frac{\Delta x}{3}((2f(a) - f(\frac{a+b}{2}) + 2f(b)))$$

Nesta fórmula, Δx = 2h segundo a equação $h = \frac{a+b}{2}$. Usando a Série de Taylor para f(a) e f(b), temos:

$$f(a) = f(\bar{x} + (-1h)) = f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(h) + \frac{1}{2!}f''(\bar{x})(h)^2 - \frac{1}{3!}f'''(\bar{x})(h)^3 ...$$
$$f(b) = f(\bar{x} + (+1h)) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(h) + \frac{1}{2!}f''(\bar{x})(h)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\bar{x})(h)^3 ...$$

Substituindo f(a) e f(b) na equação de I_f chegamos em:

$$I_f = \frac{2h}{3}(3f(\bar{x}) + \frac{4}{2!}f''(\bar{x})(h)^2) + \frac{4}{4!}f^{iv}(\bar{x})(h)^4 + ...)$$

Efetuando as integrações da equação de I_e, concluímos

$$I_e = h(2f(\bar{x} + \frac{h^2}{2!}f''(\bar{x})\frac{2}{3} + \frac{h^4}{4!}f^{iv}(\bar{x})\frac{2}{5} + ...)$$

Usando I_e e I_f em $E_a = I_e - I_f$ obtemos

$$E_a = h(2f(\bar{x}) + \frac{h^2}{2!}f''(\bar{x})\frac{2}{3} + \frac{h^4}{4!}f^{iv}(\bar{x})\frac{2}{5} + ...) - \frac{2h}{3}(3f(\bar{x}) + \frac{4}{2!}f''(\bar{x})(h)^2 + \frac{4}{4!}f^{iv}(\bar{x})(h)^4 + ...)$$

Retendo apenas o termo dominante a estimativa do erro fica

$$E_a = \frac{1}{4!}h^5 f^{iv}(\bar{x})(\frac{2}{5} - \frac{8}{3}) = -\frac{1}{24}h^5 f^{iv}(\bar{x}) * \frac{34}{15}$$

$$E_a = -\frac{17}{180}(\frac{\Delta x}{3})^5 f^{iv}(\bar{x})$$