Tarefa de Integração Numérica

Roberto Sérgio Ribeiro de Meneses - 520403
Tiago Barros - 520401

06/05/2024

Tarefa 01 : Desenvolva as fórmulas Fechada e Aberta para um polinômio de substituição de grau 4.

a) Combinando expansões em série de Taylor de pontos da vizinhança

1. Abordagem aberta

Um polinômio de interpolação de grau 4 interpola cinco pontos. Na abordagem aberta, os pontos x_i e x_f são proibidos. Portanto, o polinômio de interpolação deve passar por $f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ e $f(x_4)$ tal que os pontos $x_i, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ e x_f sejam igualmente espaçados.

Chamando essa distância entre os valores de x onde a função será interpolada de h, temos que

$$h\frac{\Delta x}{6}$$

Assim,
$f(x_0) = f(x_i + h) = f(x(s = 0)) = g(0),$

$$f(x_i + 2h)) = f(x(s = 1)) = g(1),$$

$$f(x_i + 3h) = f(x(s = 2)) = g(2),$$

$$f(x_i + 4h) = f(x(s = 3)) = g(3),$$

$$f(x_i + 5h) = f(x(s = 4)) = g(4)$$

e

$x(s) = x_i + h + sh$

satisfaz essas relações, pois,

$$\begin{aligned}x(0) = x_i + h + 0h = x_0\\ x(1) = x_i + h + 1h = x_1\\ x(2) = x_i + h + 2h = x_2\\ x(3) = x_i + h + 3h = x_3\\ x(4) = x_i + h + 4h = x_4\end{aligned}$$

Assim, aplicando a mudança de variável, temos que a integral

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx = \int_{s_i}^{s_f} p(x(s))\frac{dx(s)}{ds}ds = h\int_{-1}^{5} p(x(s))ds = h\int_{-1}^{5} g(s)ds$$

Substituindo g(s) por:

$$\begin{aligned} g(s) = r(0) &\left[1 - s + \frac{1}{2}s(s-1) - \frac{1}{6}s(s-1)(s-2) + \frac{1}{24}s(s-1)(s-2)(s-3)\right] \\ + r(1) &\left[s - s(s-1) + \frac{1}{2}s(s-1)(s-2) - \frac{1}{6}s(s-1)(s-2)(s-3)\right] \\ + r(2) &\left[\frac{1}{2}s(s-1) - \frac{1}{2}s(s-1)(s-2) + \frac{1}{4}s(s-1)(s-2)(s-3)\right] \\ + r(3) &\left[\frac{1}{6}s(s-1)(s-2) - \frac{1}{6}s(s-1)(s-2)(s-3)\right] \\ + r(4) &\left[\frac{1}{24}s(s-1)(s-2)(s-3)\right] \end{aligned}$$

na equação anterior, chegamos em:

$$\begin{gathered} \int_{x_i}^{x_f} f(x)\,dx \approx h\int_{-1}^{5} (\ r(0)\left[1 - s + \tfrac{1}{2}s(s-1) - \tfrac{1}{6}s(s-1)(s-2) + \tfrac{1}{24}s(s-1)(s-2)(s-3)\right] \\ +r(1)\left[s - s(s-1) + \tfrac{1}{2}s(s-1)(s-2) - \tfrac{1}{6}s(s-1)(s-2)(s-3)\right] \\ +r(2)\left[\tfrac{1}{2}s(s-1) - \tfrac{1}{2}s(s-1)(s-2) + \tfrac{1}{4}s(s-1)(s-2)(s-3)\right] \\ +r(3)\left[\tfrac{1}{6}s(s-1)(s-2) - \tfrac{1}{6}s(s-1)(s-2)(s-3)\right] +r(4)\left[\tfrac{1}{24}s(s-1)(s-2)(s-3)\right]\ )\,ds \end{gathered}$$

E para finalizar calculamos a integral:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)\,dx = h(g(0) * \tfrac{33}{10} - g(1) * \tfrac{42}{10} + g(2) * \tfrac{78}{10} - g(3) * \tfrac{42}{10} + g(4) * \tfrac{33}{10})$$

Assim concluímos que:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)\,dx \approx \tfrac{h}{10}(g(0) * 33 - g(1) * 42 + g(2) * 78 - g(3) * 42 + g(4) * 33)$$

2. Abordagem Fechada

Um polinômio de interpolação de grau 4 interpola cinco pontos. Na abordagem fechada, os pontos x_i e x_f são obrigatórios. Portanto, o polinômio de interpolação deve passar por $f(x_i)$ e $f(x_f)$ e por três pontos intermediários de maneira que os cinco pontos do intervalo $[x_i, x_f]$ sejam igualmente espaçados. Chamando essa distância entre os valores de x onde a função será interpolada de h, temos que:

$$h\tfrac{\Delta x}{4}$$

Assim,
$f(x_i) = f(x(s=0)) = g(0)$,

$$f(x_i + h)) = f(x(s=1)) = g(1),$$

$$f(x_i + 2h) = f(x(s=2)) = g(2),$$

$$f(x_i + 3h) = f(x(s=3)) = g(3)$$

$$f(x_i + 4h) = f(x(s=4)) = g(4)$$

e
$x(s) = x_i + sh$

satisfaz essas relações, pois,

$$x(0) = x_i + 0h = x_i$$
$$x(1) = x_i + 1h$$

$$x(2) = x_i + 2h$$
$$x(3) = x_i + 3h$$
$$x(4) = x_i + 4h = x_f$$

Assim, aplicando a mudança de variável, temos que a integral

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx = \int_{s_i}^{s_f} p(x(s))\frac{dx(s)}{ds}ds = h\int_0^4 p(x(s))ds = h\int_0^4 g(s)ds$$

Substituindo g(s) por:

$$\begin{aligned} g(s) = r(0)&\left[1 - s + \frac{1}{2}s(s-1) - \frac{1}{6}s(s-1)(s-2) + \frac{1}{24}s(s-1)(s-2)(s-3)\right] \\ &+ r(1)\left[s - s(s-1) + \frac{1}{2}s(s-1)(s-2) - \frac{1}{6}s(s-1)(s-2)(s-3)\right] \\ &+ r(2)\left[\frac{1}{2}s(s-1) - \frac{1}{2}s(s-1)(s-2) + \frac{1}{4}s(s-1)(s-2)(s-3)\right] \\ &+ r(3)\left[\frac{1}{6}s(s-1)(s-2) - \frac{1}{6}s(s-1)(s-2)(s-3)\right] \\ &+ r(4)\left[\frac{1}{24}s(s-1)(s-2)(s-3)\right] \end{aligned}$$

na equação anterior, chegamos em:

$$\begin{gathered} \int_{x_i}^{x_f} f(x)\,dx \approx h\int_0^4 \left(\; r(0)\left[1 - s + \tfrac{1}{2}s(s-1) - \tfrac{1}{6}s(s-1)(s-2) + \tfrac{1}{24}s(s-1)(s-2)(s-3)\right]\right. \\ +r(1)\left[s - s(s-1) + \tfrac{1}{2}s(s-1)(s-2) - \tfrac{1}{6}s(s-1)(s-2)(s-3)\right] \\ +r(2)\left[\tfrac{1}{2}s(s-1) - \tfrac{1}{2}s(s-1)(s-2) + \tfrac{1}{4}s(s-1)(s-2)(s-3)\right] \\ \left. +r(3)\left[\tfrac{1}{6}s(s-1)(s-2) - \tfrac{1}{6}s(s-1)(s-2)(s-3)\right] + r(4)\left[\tfrac{1}{24}s(s-1)(s-2)(s-3)\right]\;\right) ds \end{gathered}$$

E para finalizar calculamos a integral:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)\,dx = h(g(0) * \tfrac{14}{45} + g(1) * \tfrac{64}{45} + g(2) * \tfrac{24}{45} + g(3) * \tfrac{64}{45} + g(4) * \tfrac{14}{45})$$

Assim concluímos que:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)\,dx \approx \tfrac{2h}{45}(7 * g(0) + 32 * g(1) + 12 * g(2) + 32 * g(3) + 7 * g(4))$$