Tarefa de Integração Numérica

Roberto Sérgio Ribeiro de Meneses - 520403
Tiago Barros - 520401

08/05/2024

Tarefa 08 : Tarefa: Resolver o Problema 2, seguindo os seguintes passos:

1. **Mudança de variável 1 como feito no caso da elipse;**
2. **Mudança de variável 2 como feito na solução do problema 1;**
3. **Usar quadratura de Gauss-Legendre com 3 pontos em cada direção.**

1) Mudança de variável 1 como feito no caso da elipse

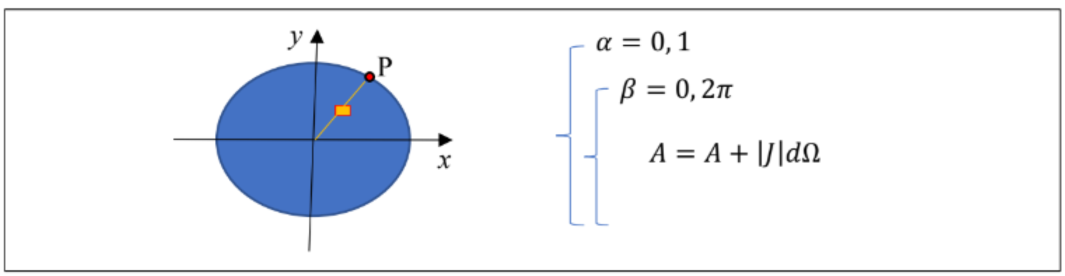

Figura 1: Mudança de variáveis para facilitar o processo de varredura na elipse.

$$\begin{aligned}\binom{x}{y} &= \binom{0}{0} + \alpha\binom{x_p}{y_p} \\ &= \alpha\binom{a*cos(\beta)}{b*sen(\beta)} \\ &= \binom{\alpha*a*cos(\beta)}{\alpha*b*sen(\beta)}\end{aligned}$$

Assim, análogo ao que foi feito nas equações:

$$dA = |J|d\omega$$

e

$$|J| = det\begin{pmatrix}\frac{\xi x}{\xi\alpha} & \frac{\xi x}{\xi\beta} \\ \frac{\xi y}{\xi\alpha} & \frac{\xi y}{\xi\beta}\end{pmatrix} = BH(1-\beta)$$

Assim temos que:

$$dA = |J| d\omega$$

Logo,

$$|J| = \begin{pmatrix} \frac{\xi x}{\xi \alpha} & \frac{\xi x}{\xi \beta} \\ \frac{\xi y}{\xi \alpha} & \frac{\xi y}{\xi \beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a * cos(\beta) & -\alpha * a * sen(\beta) \\ b * sen(\beta) & \alpha * b * cos(\beta) \end{pmatrix}$$

onde $|J|$ é o determinante da matriz Jacobiana mostrada na equação anterior e ω é o elemento de área infinitesimal do sistema (α, β), assim temos:

$$d\omega = d\alpha * d\beta$$

Assim, fazendo-se mudança de variáveis, a área da elipse pode ser calculada como:

$$A = \int_A dA = \int_\omega |J| d\omega = \int_\omega (ab\alpha) d\omega = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} ab\alpha d\beta) d\alpha$$
$$= ab \int_0^1 \alpha (\int_0^{2\pi} d\beta) d\alpha = 2\pi ab \int_0^1 \alpha d\alpha = 2\pi ab \frac{1}{2} = \pi ab$$

2) Mudança de variável 2 como feito na solução do problema 1

Inicialmente vamos definir os valores que x e y podem ser, como a equação do problema 2 é:

$$\frac{x^2}{1600} + \frac{y^2}{400} \leq 1$$

Logo temos que,

$$-40 \leq x \leq 40 \quad \text{e} \quad -20 \leq y \leq 20$$

Agora sabendo disso, podemos continuar com a solução.

$$V = \int_U f(x,y) dA = \int_{x_{min}}^{x_{max}} (\int_{y_{min}}^{y_{max}} (f(x,y)) dy) dx$$
$$= \int_{-40}^{40} (\int_{-20}^{20} (0.2(x^2 - y^2)) dy) dx$$
$$= 0.2 \int_{-20}^{20} (\int_{-40}^{40} ((x^2) dx) dy - \int_{-40}^{40} (\int_{-20}^{20} (y^2) dy) dx)$$
$$V = 0.2(2 \frac{40^3}{3} 40 - 2 \frac{20^3}{3} 80 = 256000 m^3$$

3) Usar quadratura de Gauss-Legendre com 3 pontos em cada direção.

Inicialmente vamos definir os valores que x e y podem ser, como a equação do problema 2 é:

$$\frac{x^2}{1600} + \frac{y^2}{400} \leq 1$$

Logo temos que,

$$-40 \leq x \leq 40 \quad \text{e} \quad -20 \leq y \leq 20$$

Agora sabendo disso, podemos continuar com a solução.

Quadratura de Gauss-Legendre com três pontos na direção x e três pontos na direção y. A quadratura de Gauss-Legendre exige uma mudança de coordenadas dada pela expressão:

$$\begin{pmatrix} x(\alpha\beta) \\ y(\alpha\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{40-40}{2} + \frac{40-(-40)}{2}\alpha \\ \frac{-20+20}{2} + \frac{20-(-20)}{2}\beta \end{pmatrix}$$

Assim,

$$|J| = det \begin{pmatrix} \frac{\xi x}{\xi \alpha} & \frac{\xi x}{\xi \beta} \\ \frac{\xi y}{\xi \alpha} & \frac{\xi y}{\xi \beta} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} = 800$$

Continuando, a mudança de variável fica:

$$\begin{gathered}
\text{A} = f(x,y)dA = \int_{-1}^{1}(\int_{-1}^{1}((0.2((40\alpha)^2 - (20\beta)^2)))800 d\alpha)d\beta \\
= 160\int_{-1}^{1}(\int_{-1}^{1}((0.2((40\alpha)^2 - (20\beta)^2)))d\alpha)d\beta \\
= 160\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(w_i w_j((40\alpha_j)^2 - (20\beta_i)^2)) = 256000m^3
\end{gathered}$$