

Tarefa de Integração Numérica

Roberto Sérgio Ribeiro de Meneses - 520403

Tiago Barros - 520401

08/05/2024

Tarefa 08 : Tarefa: Resolver o Problema 2, seguindo os seguintes passos:

1. Mudança de variável 1 como feito no caso da elipse;
2. Mudança de variável 2 como feito na solução do problema 1;
3. Usar quadratura de Gauss-Legendre com 3 pontos em cada direção.

1) Mudança de variável 1 como feito no caso da elipse

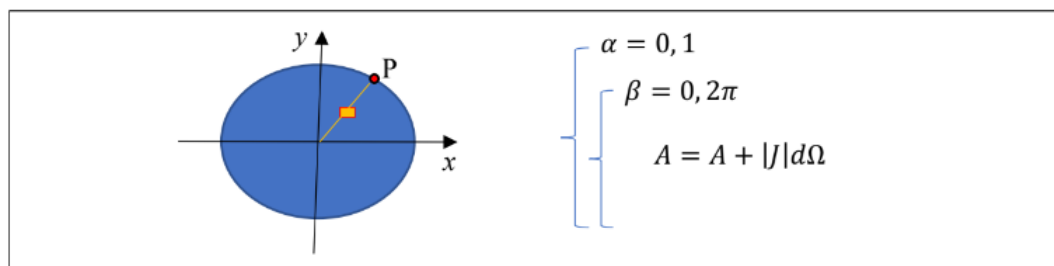


Figura 1: Mudança de variáveis para facilitar o processo de varredura na elipse.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} a \cos(\beta) \\ b \sin(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a \cos(\beta) \\ \alpha b \sin(\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim, análogo ao que foi feito nas equações:

$$dA = |J|d\omega$$

e

$$|J| = \det \begin{pmatrix} \frac{\xi x}{\xi \alpha} & \frac{\xi x}{\xi \beta} \\ \frac{\xi y}{\xi \alpha} & \frac{\xi y}{\xi \beta} \end{pmatrix} = BH(1 - \beta)$$

Assim temos que:

$$dA = |J|d\omega$$

Logo,

$$|J| = \begin{pmatrix} \frac{\xi x}{\xi \alpha} & \frac{\xi x}{\xi \beta} \\ \frac{\xi y}{\xi \alpha} & \frac{\xi y}{\xi \beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a * \cos(\beta) & -\alpha * a * \sin(\beta) \\ b * \sin(\beta) & \alpha * b * \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

onde $|J|$ é o determinante da matriz Jacobiana mostrada na equação anterior e ω é o elemento de área infinitesimal do sistema (α, β) , assim temos:

$$d\omega = d\alpha * d\beta$$

Assim, fazendo-se mudança de variáveis, a área da elipse pode ser calculada como:

$$\begin{aligned} A &= \int_A dA = \int_{\omega} |J|d\omega = \int_{\omega} (ab\alpha)d\omega = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} ab\alpha d\beta) d\alpha \\ &= ab \int_0^1 \alpha (\int_0^{2\pi} d\beta) d\alpha = 2\pi ab \int_0^1 \alpha d\alpha = 2\pi ab \frac{1}{2} = \pi ab \end{aligned}$$

2) Mudança de variável 2 como feito na solução do problema 1

Inicialmente vamos definir os valores que x e y podem ser, como a equação do problema 2 é:

$$\frac{x^2}{1600} + \frac{y^2}{1600} \leq 1$$

Logo temos que,

$$-40 \leq x \leq 40 \quad \text{e} \quad -40 \leq y \leq 40$$

Agora sabendo disso, podemos continuar com a solução.

$$\begin{aligned} A &= \int_S dS = \int_U (\sqrt{(\frac{\xi(x,y)}{\xi x})^2 + (\frac{\xi(x,y)}{\xi y})^2 + 1}) dA \\ &= \int_{-40}^{40} (\int_{-40}^{40} (\sqrt{(0.4x)^2 + (0.4y)^2 + 1}) dx) dy = 78695,8m^2 \end{aligned}$$

3) Usar quadratura de Gauss-Legendre com 3 pontos em cada direção.

Inicialmente vamos definir os valores que x e y podem ser, como a equação do problema 2 é:

$$\frac{x^2}{1600} + \frac{y^2}{1600} \leq 1$$

Logo temos que,

$$-40 \leq x \leq 40 \quad \text{e} \quad -40 \leq y \leq 40$$

Agora sabendo disso, podemos continuar com a solução.

Quadratura de Gauss-Legendre com três pontos na direção x e três pontos na direção y. A quadratura de Gauss-Legendre exige uma mudança de coordenadas dada pela expressão:

$$\begin{pmatrix} x(\alpha\beta) \\ y(\alpha\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{40-40}{2} + \frac{40-(-40)}{2} \alpha \\ \frac{40-40}{2} + \frac{40-(-40)}{2} \beta \end{pmatrix}$$

Assim,

$$|J| = \det \begin{pmatrix} \frac{\xi x}{\xi \alpha} & \frac{\xi x}{\xi \beta} \\ \frac{\xi y}{\xi \alpha} & \frac{\xi y}{\xi \beta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 40 \end{pmatrix} = 1600$$

Continuando, a mudança de variável fica:

$$\begin{aligned} A &= \int f(x, y) dA = \int_{-1}^1 (\int_{-1}^1 (\sqrt{(0.4x(\alpha\beta))^2 + (0.4y(\alpha\beta))^2 + 1}) 1600 d\alpha) d\beta \\ &= \int_{-1}^1 (\int_{-1}^1 (\sqrt{(0.4(40\alpha))^2 + (0.4(40\beta))^2 + 1}) 1600 d\alpha) d\beta \\ &= \int_{-1}^1 (\int_{-1}^1 (\sqrt{(16\alpha)^2 + (16\beta)^2 + 1}) 1600 d\alpha) d\beta \\ &\approx 1600 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (w_i w_j \sqrt{(16\alpha)^2 + (16\beta)^2 + 1}) = 93650.15m^2 \end{aligned}$$