Universidade de São Paulo
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Departamento de Ciências de Computação
SCC0221 - Introdução à Ciência de Computação I

Trabalho 1: Transformada Discreta do Cosseno (DCT)

Professor: Dr. Marcelo Garcia Manzato (mmanzato@icmc.usp.br)
Monitor PAE: Lucas Padilha Modesto de Araújo (padilha.lucas@usp.br)
Monitor PAE: Yuvisa Quispe Palomino (yuvisa.palomino@gmail.com)
Monitor PAP: Pedro Henrique de Sousa Prestes (pedro.prestes@usp.br)
Monitor PAP: Leonardo Dallagnol (dallagnol_leonardo@usp.br)
Data da Entrega: 15/05/2025

Introdução

Você já parou para pensar como é feita a compressão de arquivos? Uma das formas mais utilizadas atualmente consiste na filtragem de altas frequências, estas que consistem em detalhes que são irrelevantes para a percepção do ser humano. Este processo pode ser feito através da conversão do domínio em que os dados estão para o domínio das frequências, permitindo que altas frequências sejam identificadas e removidas. Dito isto, sua tarefa para este trabalho será a implementação de um algoritmo capaz de realizar tal conversão.

Transformada Discreta do Cosseno

Formatos famosos de compressão, como o MP3 e JPEG, utilizam uma técnica matemática que consiste na aplicação da Transformada Discreta do Cosseno (DCT). Para exemplificar o seu funcionamento, faremos a conversão de uma matriz de inteiros através do uso da DCT-II, isto é, o tipo mais comum de DCT.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$$

Quando se trata de matrizes, a conversão deverá ser feita com duas aplicações da DCT, uma para as linhas e outra para as colunas. Para uma sequência G de n valores, neste caso a sequência pode ser tanto para uma linha ou coluna da matriz, a equação da DCT é enunciada da seguinte forma:

$$G_f = \frac{1}{2} C_f \sum_{t=0}^{n-1} p_t \cos\left(\frac{(2t+1)f\pi}{2n}\right),$$

$$C_f = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, & f = 0 \\ \sqrt{2/n}, & f > 0 \end{cases} \text{ para } f = 0, 1, ..., n-1$$

Por exemplo, na matriz M, como cada linha ou coluna contém 5 valores, deverá haver 5 frequências ($f = 0, 1, 2, 3, 4$) que serão utilizadas no cálculo da DCT. A ideia do cálculo pode ser resumida da seguinte forma: o coeficiente de cada frequência para a respectiva linha ou coluna, G_f, é a soma de todos os seus valores p multiplicados pela frequência indicada pelo cosseno. Em suma, o cálculo é semelhante a uma média ponderada, onde cada valor (os inteiros na matriz) acrescentam o peso da respectiva frequência f. O componente C_f é usado como uma normalização, ou seja, ele é um fator de correção para que os valores calculados possam ser revertidos ao seu domínio anterior.

Porém, note que cada valor da matriz deverá ser processado duas vezes, uma para a linha e outra para a coluna. Para evitar este duplo processamento e diminuir a complexidade do algoritmo, o cálculo pode ser simplificado de modo a calcular simultâneamente as linhas e as colunas. Para isso, basta utilizar a DCT bidimensional cuja fórmula é descrita por:

$$G_{ij} = \alpha_i \alpha_j \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-1} p_{xy} \cos\left(\frac{(2y+1)j\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{(2x+1)i\pi}{2n}\right),$$

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, & i, j = 0 \\ \sqrt{2/n}, & i, j > 0 \end{cases}$$

A vantagem desta equação é que ela considera as frequências horizontais e verticais simultâneamente, tornando necessário o seu cálculo apenas uma única vez para cada célula da matriz. Note que $G_{0,0}$ se tornará apenas uma soma de todos os valores p da matriz divididos pelo coeficiente de normalização, já que o algoritmo estará considerando o cosseno de menor frequência possível (constante). Conforme os valores de i e j aumentam, as frequências aumentam, o que consequentemente irá diminuir o valor de G, já que altas frequências apresentam poucos detalhes na composição da informação da matriz.

Aplicando está formula para as células da matriz M mostrada anteriormente, o resultado obtido fica:

$$M' = \begin{pmatrix} 65.000 & -7.042 & -0.000 & -0.635 & -0.000 \\ -35.212 & -0.000 & 0.000 & -0.000 & 0.000 \\ -0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -3.175 & -0.000 & 0.000 & -0.000 & 0.000 \\ -0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$$

Perceba que a matriz resultante possui muitos zeros. Isto significa que existem muitas frequências que são irrelevantes para a representação dos dados originais. É por isso que a DCT é largamente utilizada na compressão de dados, pois basta guardar apenas a informação relevante (valores diferentes de zero), diminuindo consideravelmente o uso de espaço.

Uma observação importante é que a DCT não causa perda de informação, isto é, existe uma equação que pode restaurar todo o processo feito pela DCT. A perda de informação só pode ser causada durante o processo da compressão. Alguns métodos de compressão, como o JPEG, podem simplificar ainda mais a matriz, por exemplo, descartando os valores que estão próximos de zero, algo que provoca alterações nos dados originais.

Tarefa

Você deverá criar um programa que receba uma matriz quadrada e imprima, com três casas de precisão e formatados utilizando nove algarismos como espaço de largura, todos os seus coeficientes calculados através da DCT utilizando a teoria mostrada acima. A entrada será composta por um inteiro N referente à ordem da matriz quadrada, e em seguida, todos os valores $n_{i,j}$ $(0 \leq i, j < N)$ da matriz.

Segue abaixo um exemplo de entrada e saída:

Entrada	**Saída**
3 10 1000 5 30 2 200 15 50 20	444.000 −69.402 −429.921 379.671 5.000 −554.256 149.907 98.150 −417.000

Requisitos

- O trabalho será individual.
- Utilize apenas a linguagem C com as bibliotecas tradicionais.
- Entrega até 15/05/2025 (23:55) no RunCodes (https://runcodes.icmc.usp.br/).
- Faça um código legível, documentado e organizado. Os códigos serão analisados manualmente, portanto, isso será critério de avaliação.
- Utilize o valor de 3.141592 para π.

Observações

- Plágios resultarão em nota zero para todos os envolvidos.
- O sistema não aceitará submissões após o prazo, mesmo que seja de poucos minutos de atraso. Por isso, é recomendado submeter o trabalho com antecedência.