1 Questão Curta: Aro de cargas

Escrito por Tiago Rocha

Considere um aro tal qual que existam cargas $+q$ e $-q$ coladas uma ao lado da outra de forma alternada (em um número par para não haver carga sobrando). Considerando o limite em que o número de cargas N é tal que $N \to \infty$, calcule o campo elétrico e o potencial elétrico (com o infinito como referência) para uma carga localizada no eixo de simetria do anel. O centro do aro é a origem do nosso eixo de coordenadas e a carga se localiza em uma coordenada z dentro de tal eixo.

Dados:

Raio do aro: $R = 0,50\ cm$

Constante eletrostática do vácuo: $k_0 = 9,00 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$

Valor da carga: $q = 1,60 \cdot 10^{-19}$.

$\pi = 3,14$

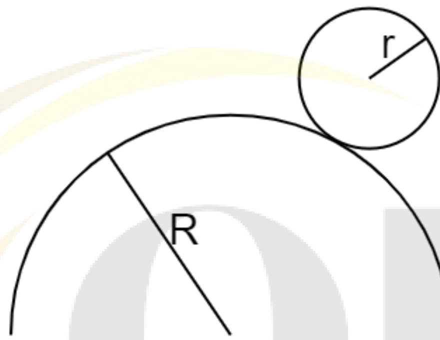
Solução:

Como o número de cargas tende ao infinto, então podemos dizer as cargas estão infinitesimalmente próximas uma da outra. Então, se formos considerar a contribuição de uma q ao campo elétrico, ela deve se cancelar com a de outra carga $-q$ muito próxima. Podemos sim analisar essa situação por pares de cargas, já que o enunciado deixa claro que todas estão posicionadas de forma alternada. Assim, tal padrão irá se manter em cada par de cargas q e $-q$, fazendo com que o campo elétrico final valia 0. Podemos repetir o mesmo processo para o potencia elétrico, que logo também deve ser nulo. Perceba que esse sistema lembra muito objetos da vida real: é cheio de cargas, todas muito pequenas e com uma carga pequena de $q = e = 1,60 \cdot 10^{-19}\ C$. Contudo, a carga do sistema é nula, pois existe o mesmo número de cargas positivas e negativas.

2 Questão Média: Queda de uma esfera em rolamento

Escrito por Guilherme

Uma esfera de raio r e massa m parte do repouso do topo de um hemisfério de raio R que está preso ao chão. Considerando o rolamento da esfera puro (sem deslizamento), determine o ângulo θ em relação a vertical no qual a esfera perde contato com o hemisfério.



;

Solução:

O momento de inércia de uma esfera I é $\frac{2}{5}mr^2$ onde m é a massa da esfera e r o seu raio.

I) Conservando a energia:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

com isso é preciso encontrar três coisas: a velocidade v, a velocidade angular ω e a altura h todos imediatamente antes da perda do contato.

II) Com N (força normal) igual a 0, $mg\cos\theta = \frac{mv^2}{(R+r)}$

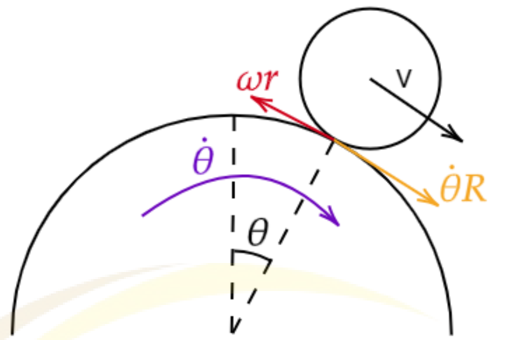
$$v^2 = (R+r)g\cos\theta$$

III) Analisando o ponto em contato com o solo, devido ao fato de não haver deslizamento o ponto possui velocidade nula no referencial do laboratório, com isso:

$$\omega r = \dot{\theta} R$$

$$\dot{\theta}(R+r) = v$$

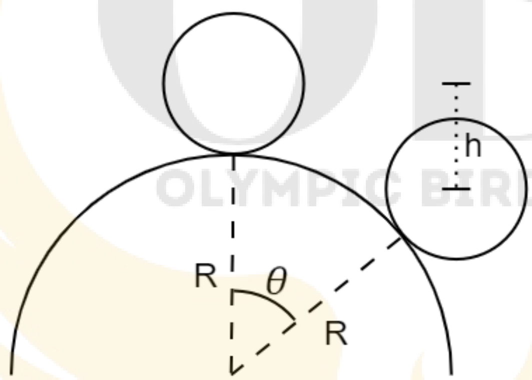
$$\omega^2 = \left(\frac{Rv}{r(R+r)}\right)^2 = \frac{R^2(R+r)g\cos\theta}{r^2(R+r)^2} = \frac{R^2 g\cos\theta}{r^2(R+r)}$$



;

IV) Analisando a geometria da figura é possível encontrar h:

$$h = (R+r) - (R+r)\cos\theta = (R+r)(1-\cos\theta)$$



V) Substituindo as expressões para v, ω e h, na expressão da conservação de energia:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

$$mg(R+r)(1-\cos\theta) = \frac{m(R+r)g\cos\theta}{2} + \frac{\frac{2}{5}mr^2\frac{R^2 g\cos\theta}{r^2(R+r)}}{2}$$

$$10mg(R+r)(1-\cos\theta) = 5m(R+r)g\cos\theta + 2mr^2\frac{R^2 g\cos\theta}{r^2(R+r)}$$

$$10(R+r)^2(1-\cos\theta) = 5(R+r)^2\cos\theta + 2R^2\cos\theta$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{10(R+r)^2}{15(R+r)^2 + 2R^2}}$$

3 Questão Longa: Momento e dipolo magnéticos

Escrito por William Alves

Um modelo das propriedades magnéticas dos materiais é baseado em pequenos momentos magnéticos gerados por cada átomo do material. Uma fonte deste momento magnético é o campo gerado pelo elétron em sua órbita ao redor do núcleo. Por simplicidade, assumiremos que cada átomo consiste em um único elétron de carga –e e massa $m_p \gg m_e$, um único próton de carga +e e massa, e que o elétron orbita em uma órbita circular de raio R em torno do próton.

Parte A: Momentos magnéticos

a) Calcule a força eletrostática resultante sobre o elétron a partir do próton. Expresse sua resposta em termos de qualquer um ou todos os seguintes parâmetros: e, m_e, m_p, R e a permissividade do espaço livre, onde

$$\varepsilon_o = \frac{1}{4\pi k}$$

(k é a constante da Lei de Coulomb).

b) Determine a velocidade angular ω_o do elétron em torno do próton em termos de qualquer um ou todos os seguintes parâmetros: e, m_e, R e ε_o.

c) Derive uma expressão para a magnitude do campo magnético B_e devido ao orbital movimento do elétron a uma distância $z \gg R$ do plano x-y ao longo do eixo de rotação orbital do elétron. Expresse sua resposta em termos de um ou de todas as seguintes parâmetros: e, m_e, R, ω_o, z, e a permeabilidade do espaço livre μ_o.

d) Uma pequena barra magnética tem um campo magnético distante do ímã dado por:

$$B = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{m}{z^3}$$

onde z é a distância do ímã no eixo que conecta os polos norte e sul, m é o momento dipolar magnético e μ_o é a permeabilidade do espaço livre. Supondo que um elétron orbitando um próton atue como uma pequena barra magnética, encontre o momento de dipolo m para um elétron orbitando um átomo em termos de qualquer um ou de todos os seguintes parâmetros: e, m_e, R e ω_o .

Parte B: Diamagnetismo

Modelamos uma substância diamagnética para ter todos os átomos orientados de modo que as órbitas dos elétrons estejam em o plano x-y, exatamente metade no sentido horário e metade no sentido anti-horário quando visto do eixo z positivo olhando em direção à origem. Algumas substâncias são predominantemente diamagnéticas.

e) Calcule o momento magnético total de uma substância diamagnética com N átomos. Escreva sua resposta em termos de um ou de todos os seguintes parâmetros: e, m_e, R, N, e μ_o.

f) Um campo magnético externo $\overrightarrow{B_o} = B_o\hat{z}$ é aplicado à substância. Suponha que o introdução do campo externo não altera o fato de que o elétron se move em uma órbita circular de raio R. Determine $\Delta\omega_o$, a mudança na velocidade angular de o elétron, tanto para as órbitas no sentido horário quanto no sentido anti-horário. Ao longo deste problema você pode assumir que $\Delta\omega \ll \omega_o$. Escreva sua resposta em termos de apenas e, m_e, e B_o.

g) Suponha que o campo externo seja ativado a uma taxa constante em um intervalo de tempo Δt. Isto é, quando $t = 0$ o campo externo é zero e quando $t = \Delta t$ o campo externo campo é B_o. Determine a f_{em} induzida ε experimentada pelo elétron. Escreva o seu responda em termos de qualquer um ou todos os seguintes parâmetros: e, m_e, R, N, B_o, ω_o e μ_0.

h) Verifique se a mudança na energia cinética do elétron satisfaz $\Delta K = e\varepsilon$. Isto justifica a nossa suposição em (f) de que R não muda.

i) Determine a mudança no momento magnético total ΔM para os N átomos quando o campo externo é aplicado, escrevendo sua resposta em termos de e, m_e, R, N, μ_o e B_o.

j) Suponha que o campo magnético uniforme usado nas partes anteriores deste problema é substituído por uma barra magnética. A substância diamagnética seria atraída ou repelido pela barra magnética? Como sua resposta mostra isso?

Solução:

a) Da lei de Coulomb

$$\boxed{F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o R^2}}$$

b) Para o movimento circular:

$$F = \frac{m_e v^2}{R} = m_e R\omega_o^2$$

A força é fornecida pela lei de coulomb, então

$$m_e R\omega_0^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon R^2}$$

$$\boxed{\omega_o = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o m_e R^3}}}$$

c) Da lei de Biot-Savart,

$$\vec{B}_e = \frac{\mu_o i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$B_e = \frac{\mu_o i}{4\pi} 2\pi R \frac{R}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{\mu_o i R^2}{2z^3}$$

Para a corrente i, nós podemos escrever

$$i = \frac{q}{t}$$

Então

$$\boxed{B_e = \frac{\mu_o e \omega_o R^2}{4\pi z^3}}$$

d) Por substituição

$$\boxed{m = \frac{e\omega_o R^2}{2}}$$

e) Se metade vai para um lado e metade vai para o outro, $M = 0$.

f) Força adicional do magnetismo,

$$F_B = qvB_o = eR\omega B_o$$

modifica o problema anterior da força central para dar

$$m_e R\omega_o^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o R^2} \pm eR\omega_o B_o$$

Onde o sinal positivo corresponde ao movimento no sentido anti-horário, o negativo ao sentido horário movimento. Um pouco de matemática,

$$m_e R(\omega^2 - \omega_o^2) = \pm eR\omega_o B_o$$

$$m_e R(\omega - \omega_o)(\omega + \omega_o) = \pm eR\omega_o B_o$$

$$m_e R(\Delta\omega)(2\omega_o) = \pm eR\omega_o B_o$$

Onde nós utilizamos a aproximação $\omega \approx \omega_o$. Então

$$\boxed{\Delta\omega = \pm\frac{eB_o}{2m_e}}$$

g) A fem é dada por

$$\varepsilon = n\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta n}{\Delta t}\Phi$$

mas $\frac{\Delta n}{\Delta t}$ é uma medida do número de voltas feitas pelo elétron em um intervalo de tempo ΔT, então

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{\omega_0 R}{2\pi R} = \frac{\omega_o}{2\pi}$$

Então

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\omega_0}{2\pi}B_o\pi R^2}$$

h) A mudança na energia cinética é dada por

$$\begin{aligned}\Delta K &= \Delta(\frac{1}{2}m_e\omega^2R^2)\\ &= m_eR^2\omega\Delta\omega\\ &\approx m_eR^2\omega_o\Delta\omega\\ &= m_e\omega_oR^2(\pm\frac{eB_o}{2m_e})\\ &\boxed{= e\epsilon}\end{aligned}$$

i) $\Delta M = N\Delta m$, onde N é o número de átomos, e Δm a mudança no momento magnético em cada um. A mudança é

$$\begin{aligned}\Delta m &= \Delta(\frac{e\omega_oR}{2})\\ &= \frac{eR}{2}\Delta\omega\\ &= \frac{e^2R^2B_o}{4m_e}\end{aligned}$$

Então :

$$\boxed{\Delta M = N\frac{e^2R^2B_o}{4m_e}}$$

j) Repelido, pela lei de Lenz.