1 Questão curta: Injustiça zodiacal

Escrito por Raul Sztutman

Qual o nome da estrela mais brilhante de cada constelação que **NÃO** é cortada pela ecliptíca, dentre as constelações a seguir?

- Órion
- Cão maior
- Touro
- Boeiro
- Ofiúco
- Cocheiro
- Virgem
- Águia

Solução:

Dentre as constelações citadas, Virgem, Touro e Ofiúco são cortadas pela elíptica, então devemos listar as estrelas mais brilhantes das demais:

- Órion - Rigel (β Orionis)
- Cão maior - Sirius (α Canis majoris)
- Boeiro - Arcturus (α Boötis)
- Cocheiro - Capella (α Aurigae)
- Águia - Altair (α Aquilae)

2 Questão média: Dr. Parque vaporiza o Sol!

Escrito por Leon Luca

Em um dia de tédio, o cientista maluco Parque decide, sem pensar muito nas consequências, "evaporar"metade da massa do sol. O que ele não esperava é que a translação da Terra fosse ser alterada do jeito que foi. Encontre o novo período considerando que Parque realizou seu plano no dia:

(a) 3 de Julho

(b) 3 de Janeiro

Dados: Excentricidade da órbita terrestre = 0,017

Solução:

Sabendo que no dia 3 de Julho e 3 de Janeiro a Terra está no Afélio e no Periélio, respectivamente, devemos analisar como ficará a energia da órbita depois do evento.

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$

Temos que v pela equação vis-viva é:

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

Para facilitar o cálculo, utilizaremos que $r = ka$. Assim:

$$E = \frac{m}{2}\frac{GM}{a}\left(\frac{2}{k} - 1\right) - \frac{GM'm}{ka}$$

$$\frac{2Ea}{GMm} = \frac{2}{k} - 1 - \frac{2M'}{Mk}$$

Como $M' = M/2$:

$$\frac{2Ea}{GMm} = \frac{2}{k} - 1 - \frac{1}{k} = \frac{1}{k} - 1$$

No Periélio, $k = 1 - e$:

$$\frac{2a}{GMm}E_P = \frac{1}{1-e} - 1 > 0$$

Ou seja, $E_A > 0$, caracterizando uma órbita aberta onde não se define período.

No Afélio, $k = 1 + e$:

$$\frac{2a}{GMm}E_A = \frac{1}{1+e} - 1 = -\frac{e}{1+e}$$

$$E_A = -\frac{GMm}{2a}\frac{e}{1+e} = -\frac{GM'm}{2a'}$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{1}{2}\frac{1+e}{e}$$

Pela terceira lei de Kepler:

$$\frac{T'^2}{a'^3} = \frac{4\pi^2}{GM'} = 2\frac{4\pi^2}{GM} = 2\frac{T^2}{a^3}$$

$$T'^2 = 2T^2\left(\frac{a'}{a}\right)^3 = \left(\frac{T}{2}\right)^2\left(\frac{1+e}{e}\right)^3$$

$$T' = \frac{T}{2}\left(\frac{1+e}{e}\right)^{3/2}$$

Substituindo e = 0,017 e T = 1 ano:

$$\boxed{T' = 231,3\,anos}$$

3 Questão Longa: Dupla órbita planetária

Escrito por Nicholas Lage

Um grande cometa foi detectado no sistema solar e, após alguns dias de estudo, o físico Raul percebeu que ele se chocaria com um planeta. Raul conseguiu obter dados de uma sonda muito próxima do Sol, a Parker Solar Probe, e, através dela, determinou a velocidade do cometa no momento da detecção (v_0) e a massa do cometa (m_c). Além disso, com a ajuda de seu grande amigo Praça, ele crackeou os dados da AEB. No entanto, Raul conseguiu apenas parte dos dados do cometa e do planeta.

- $v_0 = 2\text{km/s}$
- Excentricidade da órbita do cometa: $e_c = 0.9$
- Massa do cometa: $m_c = 2 \cdot 10^{13}\text{kg}$
- Massa do planeta: $m_p = 1.9 \cdot 10^{27}\text{kg}$
- Ângulo entre o afélio e a posição do cometa no momento da detecção: $\theta = 175°$
- Ângulo entre o afélio e a posição do cometa no momento da colisão: $\alpha = 120°$

Após obter os dados da sonda e enquanto aguardava os dados coletados por Praça, Raul decidiu descansar. Ajude Raul a descobrir o que acontecerá com o planeta:

a) Qual será o semi-eixo maior da órbita do cometa?

b) Para determinar com qual planeta o cometa irá colidir, calcule o valor do raio orbital do planeta, assumindo que sua órbita seja circular.

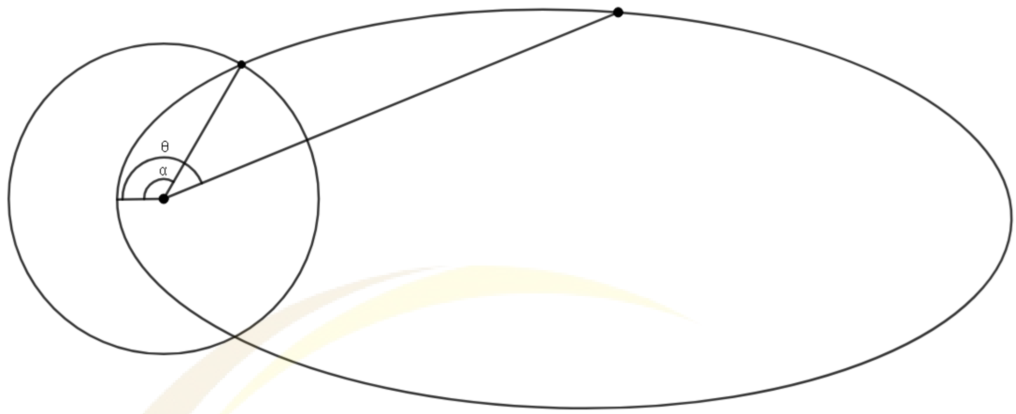
c) Quais serão as velocidades dos corpos instantes antes da colisão, considerando que a interação gravitacional entre os dois astros é desprezível.

d) Utilizando os vetores de velocidade dos dois corpos no instante da colisão, determine o ângulo β entre eles. Qual será o valor de β?

e) Agora, exponha os resultados obtidos para o caso em que, após a colisão, a massa do cometa seja absorvida pelo planeta. Nesse caso, o planeta obterá uma nova órbita por conta da colisão, que tipo de órbita será essa e quais são os novos parâmetros($a_N \wedge e_N$)

Solução:

Antes de iniciar a resolução da questão em si, é sempre recomendado uma pré-visualização do problema:



a) Conhecendo a velocidade do cometa em um ponto específico e seu ângulo em relação ao periélio, podemos determinar a distância do cometa ao Sol utilizando a equação da vis-viva:

$$v_0 = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \tag{1}$$

$$\frac{v_0^2}{GM} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \Longrightarrow \frac{v_0^2}{GM} + \frac{1}{a} = \frac{2}{r} \Longrightarrow \frac{v_0^2 a + GM}{GMa} = \frac{2}{r}$$

$$r = \frac{2GMa}{v_0^2 a + GM} \tag{2}$$

Sabendo o ângulo entre o cometa e o periélio de sua órbita, podemos determinar a distância do cometa ao Sol utilizando a equação polar da elipse:

$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta} \tag{3}$$

Igualando as equações 2 e 3, podemos encontrar o valor de a:

$$\frac{2GMa}{v_0^2 a + GM} = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta} \Longrightarrow \frac{2GM(1 + e\cos\theta)}{(1-e^2)} = v_0^2 a + GM$$

$$a = \frac{2GM(1 + e\cos\theta) - GM(1-e^2)}{v_0^2(1-e^2)} \tag{4}$$

Desenvolvendo a equação, obtemos o seguinte valor para a:

$$\boxed{a \approx 19,67\text{U.A}}$$

b) Utilizando da equação polar com o ângulo α:

$$r(\alpha) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\alpha}$$

$$\boxed{r(\alpha) = 6,795\text{U.A.}}$$

c) A velocidade do cometa pode ser determinada utilizando a equação 1. Para encontrar a velocidade de um planeta em órbita circular, basta igualar a equação da força centrípeta à equação da força gravitacional, resultando na seguinte fórmula:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{5}$$

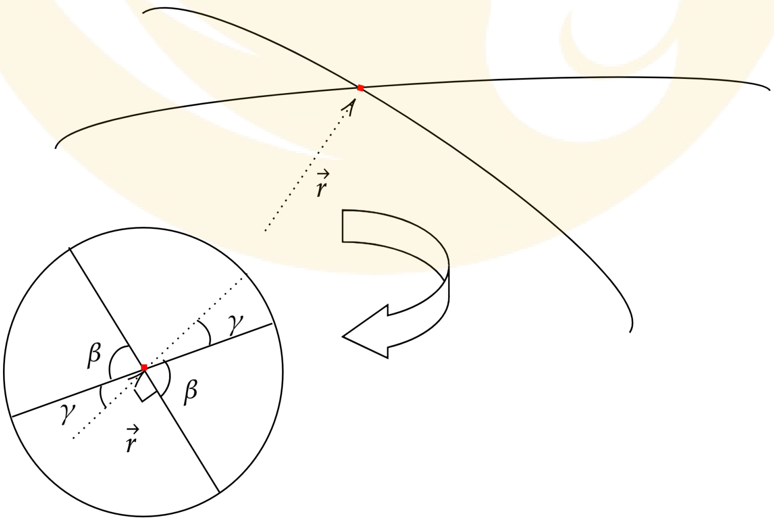
$$V_p = \sqrt{\frac{GM}{r(\alpha)}}$$

$$\boxed{V_p = 11,426\text{Km/s}}$$

$$V_c = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r(\alpha)} - \frac{1}{a}\right)}$$

$$\boxed{V_c == 14,698\text{Km/s}}$$

d) Para melhor compreensão, é necessária uma visualização aproximada do instante do impacto:



$$\gamma + \beta = 90$$

$$L = mvr\,\text{sen}(\theta)$$

Conservando o momento angular no periélio e em $r(\alpha)$:

$$mvr\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = mvr\,\text{sen}\left(\gamma\right) \Longrightarrow V_{pe}r_{pe} = V_c r(\alpha)\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

$$\frac{V_{pe}r_{pe}}{V_c r(\alpha)} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\left(\beta\right)$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{V_{pe}r_{pe}}{V_c r(\alpha)}\right) \tag{6}$$

Sendo que o valor de V_{pe} e r_{pe} são fornecidos pelas seguintes equações:

$$V_{pe} = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_{pe}} - \frac{1}{a}\right)} \wedge r_{pe} = a(1-e)$$

Resultando em:

$$\boxed{\beta \approx 54,79^{\circ}} \tag{7}$$

e) Embora a questão descreva uma colisão inelástica, onde fisicamente não haveria conservação de energia, podemos considerar um cenário onde um planeta e um cometa colidem sem que a energia cinética seja transformada em calor ou energia potencial de deformação, assumindo que os dois corpos simplesmente se aglomerem, conforme descrito na questão. No entanto, a ausência de menção ao calor permite margem para erros teóricos. Mesmo assim, o problema será resolvido como se a energia cinética de ambos os corpos fosse conservada, sem transformações em calor.

$$E_{Mi} = E_{Mf} \tag{8}$$

$$\frac{m_c V_c^2}{2} - \frac{GMm_c}{r(\alpha)} + \frac{m_p V_p^2}{2} - \frac{GMm_p}{r(\alpha)} = \frac{(m_p + m_c)V_f^2}{2} - \frac{GM(m_p + m_c)}{r(\alpha)}$$

$$\frac{1}{2}(m_c V_c^2 + m_p V_p^2) - \frac{GM}{r(\alpha)}(m_c + m_p) = \frac{(m_p + m_c)V_f^2}{2} - \frac{GM(m_p + m_c)}{r(\alpha)}$$

$$\frac{1}{2}(m_c V_c^2 + m_p V_p^2) = \frac{(m_p + m_c)V_f^2}{2}$$

$$m_c V_c^2 + m_p V_p^2 = (m_p + m_c)V_f^2$$

$$V_f = \sqrt{\frac{m_c V_c^2 + m_p V_p^2}{m_p + m_c}} \tag{9}$$

$$\boxed{V_f = 11,426\text{Km/s}}$$

Agora, para determinarmos qual tipo de órbita teremos nesta questão, basta conservar a energia:

$$E_{Mp} + E_{Mc} = E_{Mf} \tag{10}$$

Como E_{Mp} e E_{Mc} são negativas, sua soma resultará em E_{Mf}, que também será negativa, indicando que a órbita será elíptica.

Para encontrar o semi-eixo maior da nova órbita, basta calcular a energia mecânica do sistema ao final:

$$E_{Mi} = E_{Mf} = -\frac{GMm}{2a} \tag{11}$$

$$\frac{m_c V_c^2}{2} - \frac{GMm_c}{r(\alpha)} + \frac{m_p V_p^2}{2} - \frac{GMm_p}{r(\alpha)} = -\frac{GM(m_c + m_p)}{2a}$$

$$\frac{1}{2}(m_c V_c^2 + m_p V_p^2) - \frac{GM}{r(\alpha)}(m_c + m_p) = -\frac{GM(m_c + m_p)}{2a}$$

$$(m_c V_c^2 + m_p V_p^2) - \frac{2GM}{r(\alpha)}(m_c + m_p) = -\frac{GM(m_c + m_p)}{a}$$

$$a = \frac{-GM(m_c + m_p)}{(m_c V_c^2 + m_p V_p^2) - \frac{2GM}{r(\alpha)}(m_c + m_p)} \tag{12}$$

$$a = 6,7939U.A.$$

Agora, conhecendo o valor do semi-eixo maior (a_N), podemos determinar a nova excentricidade (e_N) através da conservação do momento angular. Uma equação pouco utilizada, porém que simplifica bastante este cálculo, é a seguinte:

$$L_{elipse} = \sqrt{GMm^2 a(1 - e^2)} \tag{13}$$

Utilizando da equação 13 e igualando com o momento angular final do sistema, temos:

$$\sqrt{GMm^2a(1-e^2)} = L_f = L_i$$

$$L_i = L_c + L_p = m_cV_cr(\alpha)\,\mathrm{sen}(\gamma) + m_pV_pr(\alpha)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{14}$$

$$\sqrt{GMm^2a(1-e_N^2)} = m_cV_cr(\alpha)\,\mathrm{sen}(\gamma) + m_pV_pr(\alpha)$$

$$(1-e_N^2) = \frac{\left(m_cV_cr(\alpha)\,\mathrm{sen}(\gamma) + m_pV_pr(\alpha)\right)^2}{GM(m_c+m_p)^2a}$$

$$e_N^2 = 1 - \frac{\left(m_cV_cr(\alpha)\,\mathrm{sen}(\gamma) + m_pV_pr(\alpha)\right)^2}{GM(m_c+m_p)^2a}$$

$$\boxed{e_N = \sqrt{1 - \frac{\left(m_cV_cr(\alpha)\,\mathrm{sen}(\gamma) + m_pV_pr(\alpha)\right)^2}{GM(m_c+m_p)^2a}}}$$