1 Questão Curta: Infinitos Resistores

Escrito por Daniela Emília

Dada uma malha quadriculada bidimensional, calcule a resistência equivalente entre dois vértices adjacentes. Tome o circuito como infinito para todos os sentidos e todas as arestas de mesma resistência R.

Solução:

Explora-se a ideia de superposição de correntes, estas de contextos independentes específicos. Vale ressaltar que, com a simétrica infinidade de resistências associadas, todas as extremidades tendem a um mesmo potencial eletroestático, permitindo fechar o circuito descrito.

Supõe-se uma corrente I entrando em V_1 e a mesma saindo em V_2, devido às baterias postas em tais pontos. Além disso, conclui-se as quatro correntes $\frac{I}{4}$ saindo de V_1 e as quatro correntes $\frac{I}{4}$ chegando em V_2, conforme a 1a Lei de Kirchhoff.

Então,

$$\begin{cases} V_1 - V_2 = \Delta U = R_{eq} I \\ \Delta U = R \cdot (\frac{I}{4} + \frac{I}{4}) = R \cdot \frac{I}{2} \end{cases}$$

Daí, igualando as equações encontradas, tem-se:

$$\boxed{R_{eq} = \frac{R}{2}}$$

2 Questão Média: Esferas em rota de colisão

Escrito por Gabriel Mendes

Sobre uma mesa, encontram-se três esferas idênticas de dimensões despresíveis dispostas sobre os vértices de um triângulo equilátero imaginário ABC de lado L. A esfera inicialmente no vértice A desloca-se em direção a esfera inicialmente em B com velocidade V_1, a esfera inicialmente em B desloca-se em direção a esfera inicialmente em C com velocidade V_2 e a esfera inicialmente em C desloca-se em direção a esfera inicialmente em A com velocidade V_3. Sendo $V_1 = V_2 = V_3 =$ V, Calcule:

a) o intervalo de tempo T para que ocorra o encontro entre as esferas;

b) A distância S percorrida por cada esfera.

Solução:

a) Primeiro, perceba que as esferas percorrerão trajetórias em espiral até o centro, mantendo a simetria do formato triangular de suas posições, pois o movimento das esferas é o mesmo. Decompondo a velocidade de cada esfera nas direções radial e tangente, obtemos:

$$V_r = V cos(30^\circ) = \frac{V\sqrt{3}}{2}$$

$$V_t = V sen(30^\circ) = \frac{V}{2}$$

Utilizando um pouco de geometria, conclui-se que a distância X percorrida na direção radial será:

$$X = \frac{L\sqrt{3}}{3}$$

Com isso, temos:

$$T = \frac{X}{V_r} = \frac{2L}{3V}$$

b) Agora, basta multiplicar o tempo total pela velocidade para encontras a distância percorrida

$$S = \frac{2L}{3}$$

3 Questão Longa: Buracos Negros

Escrito por Lucas Cavalcante

Nessa questão, será abordado sobre um dos fenômenos mais facinantes no universo, os buracos negros. Para isso, iremos derivar algumas relações que ajudam a caracterizar as propriedades físicas e termodinâmicas de um buraco negro. Essa questão é dividida em três partes, onde na primeira serão trabalhadas as características físicas desses objetos, na segunda serão abordadas caracterísicas termodinâmicas e, no final, iremos estimar o tempo para que um buraco negro desapareça.

Parte A: Propriedades Físicas

Um buraco negro semiclássíco, o qual não possui momento angular ou carga, também chamado de buraco negro de Schwarzschild, pode ser caracterizado exclusivamente por sua massa. Portanto, no decorrer da questão esse será o único fator que utilizaremos durante as respostas, além de constantes fundamentais e fatores númericos, ou seja, durante o decorrer da questão serão investigadas as características de um buraco negro com massa **M**.

a) Uma outra característica muito importante para um buraco negro é o seu horizonte de eventos. Ele pode ser definido como a distância do centro do objeto trabalhado em que é preciso se ter uma velocidade igual à velocidade da luz para escapar de sua gravidade, ou seja, a distância a partir do centro em que a **velocidade de escape precisa ser igual a c**. Sabendo que a velocidade de escape é a velocidade necessária para que **a energia total de um corpo sobre influência de um campo gravitacional seja 0**, pois dessa forma, ele conseguirá "chegar no infinito" com velocidade nula, saindo da área de influência do campo gravitacional do buraco negro. **Encontre a expressão para o raio do horizonte de eventos do buraco negro**, também chamado de raio de Schwarzschild.

b) Com o raio do buraco negro, obtenha também uma expressão para **a área superficial de um buraco negro** em formato de esfera e raio igual ao raio do horizonte de eventos.

c) Outra importante informação física que se pode obter sobre um buraco negro é a gravidade em sua superfície (κ). Portanto, **encontre a gravidade superficial de um buraco negro** sabendo que ela se relaciona com a força gravitacional exercida sobre um corpo de massa m a uma distância igual ao raio do horizonte de eventos, na forma, $F_g = m\kappa$.

Parte B: Propriedades Termodinâmicas

Agora que possuimos expressões para as características físicas mais importantes de um buraco negros, iremos encontrar suas principais propriedades termodinâmicas: **energia interna**, **entropia** e **temperatura**.

d) **Encontre a energia interna de um buraco negro**, sabendo que ela se relaciona com a massa pela equivalência massa-energia de Einstein.

e) Para se encontrar a entropia de um buraco negro, normalmente se utiliza conceitos de relatividade geral com a teoria quântica de campos. No entanto, é possível chegar em um resultado em que as dependências de constantes fundamentais e propriedades físicas é correta a partir da análise dimensional, ou seja, igualando as unidades de medida utilizadas em cada termo, apenas não sendo possível encontrar o fator numérico multiplicativo para se encontrar o resultado real. Portanto, sabendo que a entropia do buraco negro é diretamente proporcional a sua área superficial ($S \propto A$), depende exclusivamente das constantes fundamentais G, c, k_b e $\hbar$, e que o fator numérico multiplicativo é o mesmo da gravidade superficial desse objeto. **Encontre uma expressão para a entropia de um buraco negro**.

f) Agora que possuimos a energia interna e a entropia do buraco negro, pode-se encontrar uma expressão para a temperatura dele. Para isso, considere que as tranformações termodinâmicas sofridas por esse sistema são isocóricas, ou seja, são trocas de calor sem a realização de trabalho e **encontre uma expressão para a temperatura do buraco negro** a partir da primeira lei da termodiâmica na forma diferencial.

Parte C: Evaporação do buraco negro

Por fim, obtemos as principais características de um buraco negro e agora será possível estimar o tempo de vida necessário para que ele evapore considerando apenas a emissão de radiação Hawking, que é uma emissão que segue a mesma fórmula da potência emitida por um corpo negro.

g) Sabendo das características sobre a radiação emitida por um buraco negro mencionadas no início dessa parte. **Encontre uma expressão para a potência irradiada por esse corpo**.

h) Portanto, **encontre uma expressão para o tempo que um buraco negro demora para evaporar** considerando que ele apenas perde energia pela emissão de radiação, que é a radiação Hawking.

Solução:

a) Escrevendo a conservação de energia para se encontrar uma expressão para a velocidade de escape:

$$-\frac{GMm}{R} + \frac{mv_{esc}^2}{2} = 0 \Rightarrow v_{esc}^2 = \frac{2GM}{R}$$

Como no horizonte de eventos a velocidade de escape é c:

$$c^2 = \frac{2GM}{R_{sch}}$$

$$\boxed{R_{sch} = \frac{2GM}{c^2}}$$

b) A área superficial de uma esfera pode ser escrita como:

$$A = 4\pi R^2$$

Então, para um buraco negro $R = R_{sch}$

$$A = 4\pi R_{sch}^2$$

$$A = 4\pi \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2$$

$$\boxed{A = 16\pi \frac{G^2M^2}{c^4}}$$

c) A expressão para a gravidade superficial será:

$$F_g = m\kappa \Rightarrow \frac{GMm}{R_{sch}^2} = m\kappa \Rightarrow \kappa = \frac{GM}{R_{sch}^2}$$

$$\kappa = \frac{GM}{\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2}$$

$$\boxed{\kappa = \frac{c^4}{4GM}}$$

Então, o fator númerico utilizado no item **e** será $\frac{1}{4}$.

d) Como a energia interna do buraco negro se relaciona com a massa pelo princípio da equivalência massa-energia:

$$\boxed{E = Mc^2}$$

e) Durante o decorrer desse item será utilizado kg para representar massa; m para representar comprimento; s para representar tempo; T para representar temperatura. Primeiro, deve-se encontrar a unidade de medida necessária para o resto da expressão possui dimensão de entropia. Como entropia possui dimensão de $\dfrac{\text{energia (E)}}{\text{temperatura(T)}}$ e ela será escrita da forma:

$$S = \eta A$$

A dimensão da constante dimensional η será:

$$[\eta] = E \cdot T^{-1} \cdot m^{-2} = kg \cdot T^{-1} \cdot s^{-2}$$

Além disso, a essa constante pode ser escrita como:

$$\eta = G^a \cdot \hbar^b \cdot k_b^c \cdot c^d$$

Como $[G] = E \cdot m \cdot kg^{-2} = kg \cdot m^3 \cdot s^{-2}$; $[\hbar] = E \cdot s = kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$; $[k_b] = E \cdot T^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot T^{-1}$; e $[c] = m \cdot s^{-1}$:

$$kg \cdot T^{-1} \cdot s^{-2} = kg^{-a+b+c)} \cdot m^{3a+2b+2c+d} \cdot s^{-2a-b-2c-d} \cdot T^{-c}$$

Dessa relação, encontram-se as equações:

$$\begin{cases} c = 1 \\ -a + b + c = 1 \\ 3a + 2b + 2c + d = 0 \\ -2a - b - 2c - d = -2 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema de equações, resulta-se em:

$$\begin{cases} \boxed{c = 1} \\ \boxed{a = b = -1} \\ \boxed{d = 3} \end{cases}$$

Por fim, como o fator numérico é o mesmo que o encontrado para a gravidade superficial $\left(\frac{1}{4}\right)$, a expressão para a entropia será:

$$S = \frac{k_b c^3 A}{4G\hbar}$$

$$\boxed{S = \frac{4\pi k_b G M^2}{c\hbar}}$$

f) A partir da primeira lei da termodinâmica para uma transformação isocórica, tem-se:

$$dE = TdS$$

Substituindo as expressões para dE e dS encontradas anteriormente em suas formas infinitesimais:

$$T = \frac{dE}{dS} = \frac{c^2 dM}{\frac{8\pi k_b G M dM}{c\hbar}}$$

$$\boxed{T = \frac{c^3\hbar}{8\pi G k_b M}}$$

g) A potência irradiada por um corpo negro será:

$$P = A\sigma T^4$$

Substituindo as expressões para a área e a temperatura de um buraco negro:

$$P = 16\pi\frac{G^2M^2}{c^4}\sigma\left(\frac{c^3\hbar}{8\pi G k_b M}\right)$$

$$\boxed{P = \frac{\sigma c^8 \hbar^4}{256\pi^3 G^2 k_b^4 M^2}}$$

Caso fosse substituído a expressão de $\sigma = \dfrac{\pi^2 k_b^4}{60c^2\hbar^3}$

$$\boxed{P = \frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2 M^2}}$$

h) Como a energia perdida pelo buraco negro ocorre apenas pela emissão de radiação:

$$-\frac{dE}{dt} = P$$

$$-\frac{c^2 dM}{dt} = \frac{\sigma c^8 \hbar^4}{256\pi^3 G^2 k_b^4 M^2}$$

$$M^2 dM = -\frac{\sigma c^6 \hbar^4}{256\pi^3 G^2 k_b^4} dt$$

Para encontrar o tempo de evaporação, deve-se resolver essa equação diferencial, integrando desde uma massa M até 0. Resultando em:

$$\int_M^0 M'^2 dM' = -\int_0^{t_{eva}} \frac{\sigma c^6 \hbar^4}{256\pi^3 G^2 k_b^4} dt$$

$$\boxed{t_{eva} = \frac{256\pi^3 G^2 k_b^4}{3\sigma c^6 \hbar^4} M^3}$$

Caso fosse substituído o valor de σ:

$$\boxed{t_{eva} = \frac{5120\pi G^2}{c^4 \hbar} M^3}$$