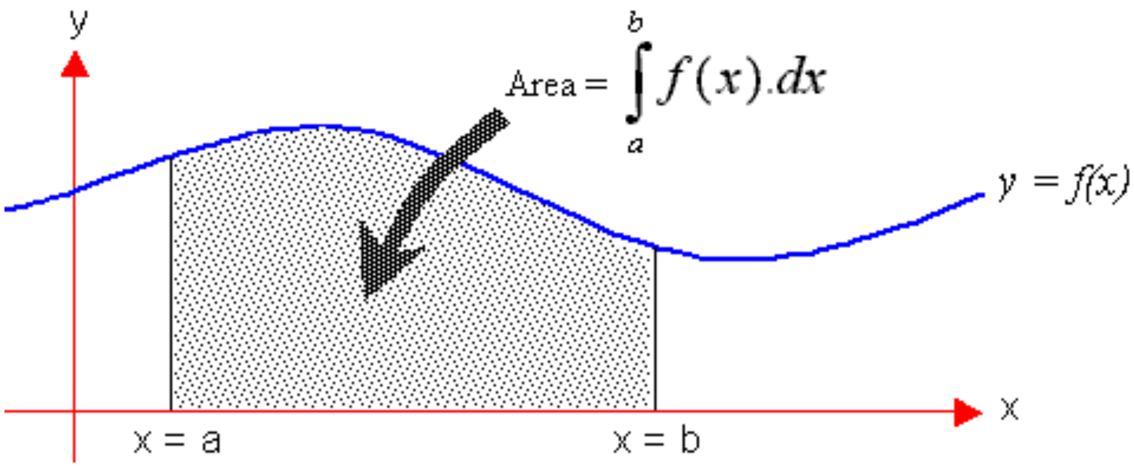
CÁLCULO DE ÁREAS POR INTEGRACIÓN

Área limitada por la gráfica de una función f continua en [a,b], el eje horizontal y las rectas verticales x=a y x=b

CASO 1. La función es positiva

La función f(x) es continua en $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$. El área comprendida entre f(x), y=0 (eje OX) y las rectas x=a y x=b en este caso es: $A = \int_a^b f(x)\,dx$



CASO 2. La función es negativa

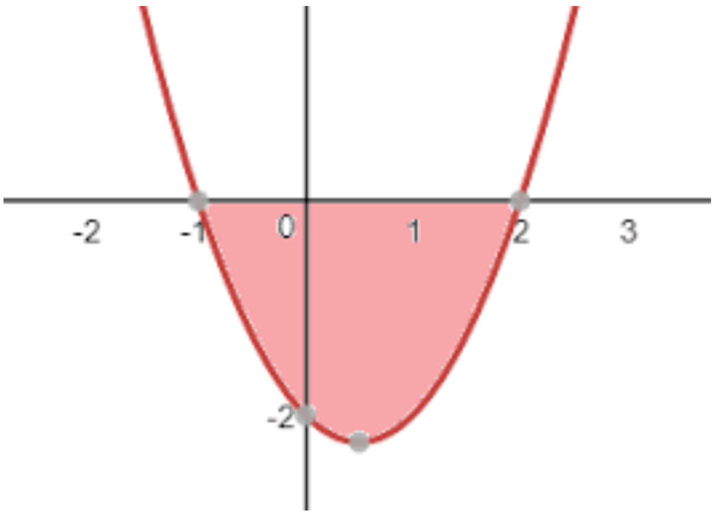
Si la función es negativa, por ejemplo $f(x) = -2x$ y queremos calcular su área en el intervalo $[2,4]$, haremos esto:

$$\int_2^4 -2x\,dx = \left[\frac{-2x^2}{2}\right]_2^4 = \left[-x^2\right]_2^4 = -16-(-4) = -12$$

En este caso, el área sería el valor absoluto del resultado, es decir, **12.**

E**n general**, el área comprendida entre la gráfica de f(x), el eje horizontal y las rectas x=a y x=b es:

$$A = \int_a^b |f(x)|dx$$

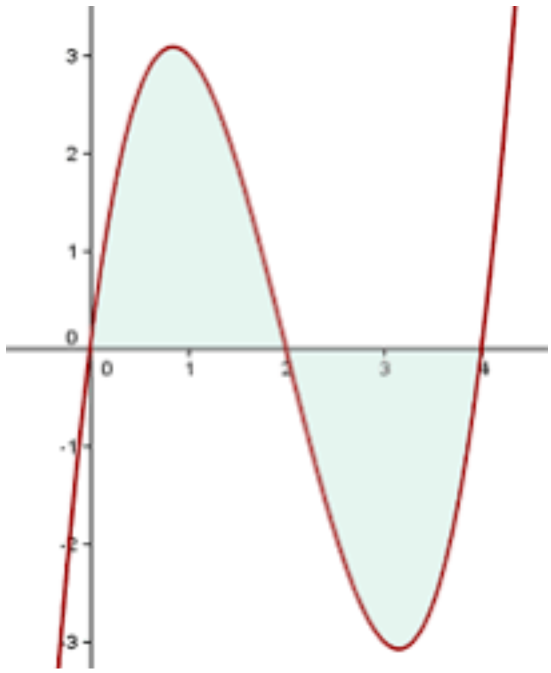


CASO 3. La función toma valores positivos y negativos

La función tiene zonas por encima y por debajo del eje OX. Para calcular el área seguimos estos pasos:

1. Se calculan los **puntos de corte** con el eje OX, es decir, hay que resolver la ecuación f(x)=0.
2. Se ordenan **de menor a mayor** las raíces (soluciones de la ecuación), que serán los límites de integración.
3. El área es la **suma** de las integrales definidas (en valor absoluto) de cada intervalo.

$$A=\int_a^d |f(x)|dx=\int_a^b |f(x)|dx+\int_b^c |f(x)|dx+\int_c^d |f(x)|dx$$



Ejemplo:
Calcula el área de las regiones del plano limitada por la curva
$f(x)=x^3-6x^2+8x$ y el eje OX.

1. $x^3-6x^2+8x=0$

2. x=**0**, x=**2** y x=**4**

3. $$A=\int_0^2\left|(x^3-6x^2+8x)\right|dx+\int_2^4\left|(x^3-6x^2+8x)\right|dx=$$

$$=\left|\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right]_0^2\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right]_2^4\right|=4+4=8u^2$$

Área entre dos curvas

Si f(x) y g(x) son continuas en [a, b] y f(x) ≥ g(x), el área de la región limitada por f(x), g(x), x=a y x=b es:

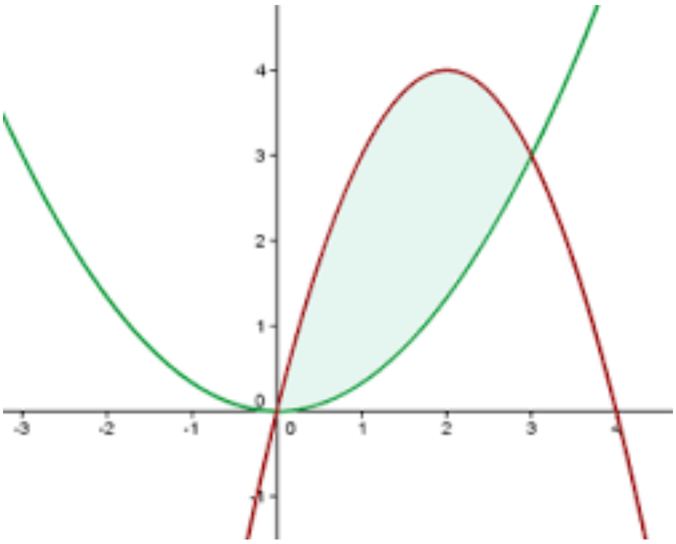
$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Para calcular el área de la región limitada por dos funciones, seguimos estos pasos:

1. Se calculan los **puntos donde se cortan** las dos funciones para conocer los límites de integración. Para ello se igualan f(x) = g(x) y se resuelve la ecuación.
2. Se ordenan **de menor a mayor** los puntos de corte (soluciones de la ecuación).
3. El área es la **suma** del valor las integrales definidas (en valor absoluto) de cada intervalo.

Ejemplo:

$$A = \int_{-4}^{4} |f(x) - g(x)| dx$$



Ejemplo:

Calcula el área de la región limitada por las funciones $f(x) = x^3 - 2x$ y $g(x) = 2x$

1. f(x) = g(x)

$$x^3 - 2x = 2x \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0$$

2. x=**-2**, x=**0** y x=**2**

3. El área sería:

$$A = \int_{-2}^{2} \left| f(x) - g(x) \right| dx = \int_{-2}^{0} \left| f(x) - g(x) \right| dx + \int_{0}^{2} \left| f(x) - g(x) \right| dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} \left| x^3 - 2x - 2x \right| dx + \int_{0}^{2} \left| x^3 - 2x - 2x \right| dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} \left| x^3 - 4x \right| dx + \int_{0}^{2} \left| x^3 - 4x \right| dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2} \right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2} \right]_{0}^{2} =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{0}^{2} = \left[0 - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2 \cdot (-2)^2 \right) \right] + \left[\left(\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^2 \right) - 0 \right] = 8u^2$$