UNIVERSIDAD DE MURCIA

Región de Murcia

Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

306-MATEMÁTICAS II

EBAU2024 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: [2,5] Taylor Swift tiene un total de 435 millones de seguidores en las tres siguientes redes sociales: Instagram, X (antiguo Twitter) y YouTube. Si ganara en Instagram tantos seguidores como la mitad de los que tiene en YouTube, el número de sus seguidores en Instagram sería el doble de la suma de los que tiene en X y en YouTube. Además, si Taylor recibiera cada mes 10 dólares por cada millón de seguidores en Instagram, 20 dólares por cada millón de seguidores en X y 30 dólares por cada millón de seguidores en YouTube, tendría unos ingresos mensuales de 6.500 dólares.
Calcule cuántos seguidores tiene Taylor Swift en cada una de estas redes sociales.

2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz ortogonal si cumple que $A \cdot A^t = I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

a) **[1]** Estudie si las siguientes matrices son ortogonales o no:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

b) **[0,75]** Si A es una matriz ortogonal cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) **[0,75]** Justifique que si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, entonces el producto $C = A \cdot B$ también lo es.

3: Considere la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 2x + 3}$, definida para todo valor $x \in \mathbb{R}$.

a) **[0,5]** Calcule $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ **y** $\lim_{x \to +\infty} f(x)$**.**

b) **[1,5]** Determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función *f (x)* y calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos relativos).

c) **[0,5]** Justifique que la función alcanza sus extremos absolutos (máximo y mínimo absolutos) y calcule el valor de dichos extremos absolutos.

4: Considere la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, definida para todo valor de $x > 0$.

a) **[0,5]** Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) **[1,5]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)\,dx$.

c) **[0,5]** Determine el valor de $a > 0$ para el cual se cumple que $\int_1^a f(x)\,dx = 4$.

UNIVERSIDAD DE MURCIA Región de Murcia Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

306-MATEMÁTICAS II

EBAU2024 - **JULIO**

5: Considere los planos $x-y+z=0$ y $x+y-z=2$ y los puntos $P(1,2,3)$ y $Q(1,1,3)$.

a) **[0,75]** Compruebe que ambos planos se cortan en una recta *r* y calcule la ecuación continua de dicha recta.

b) **[1]** Compruebe que el punto P no está en ninguno de los dos planos y calcule la ecuación de la recta que pasa por P y no corta a ninguno de los dos planos.

c) **[0,75]** Determine el punto de la recta *r* que equidista de P y de Q.

6: Considere los planos $x+y+z=-3$ y $x+y-z=3$ y la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{3}$

a) **[0,75]** Compruebe que ambos planos se cortan y calcule el ángulo que forman.

b) **[0,75]** Estudie la posición relativa de la recta *r* con el plano $x+y-z=3$.

c) **[1]** Determine los puntos de la recta *r* que equidistan de ambos planos.

7: El 60% de los habitantes de una población consume pan integral, el 40% consume pan blanco y el 20% consume ambos tipos de pan.

a) **[0,5]** ¿Son independientes los sucesos “consumir pan integral” y “consumir pan blanco”?

b) **[0,5]** Sabiendo que un habitante consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?

c) **[0,75]** Calcule el porcentaje de la población que no consume ninguno de los dos tipos de pan.

d) **[0,75]** Sabiendo que un habitante no consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?

8: Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes.
Una fábrica de componentes de ordenador produce 2500 microprocesadores al día. Sabiendo que el porcentaje de microprocesadores defectuosos fabricados es del 2%, responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) **[0,5]** ¿Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de microprocesadores defectuosos fabricados al día?

b) **[0,5]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) **[0,75]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea menor o igual que 57?

d) **[0,75]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea exactamente 50?

SOLUCIONES

1: [2,5] Taylor Swift tiene un total de 435 millones de seguidores en las tres siguientes redes sociales: Instagram, X (antiguo Twitter) y YouTube. Si ganara en Instagram tantos seguidores como la mitad de los que tiene en YouTube, el número de sus seguidores en Instagram sería el doble de la suma de los que tiene en X y en YouTube. Además, si Taylor recibiera cada mes 10 dólares por cada millón de seguidores en Instagram, 20 dólares por cada millón de seguidores en X y 30 dólares por cada millón de seguidores en YouTube, tendría unos ingresos mensuales de 6.500 dólares.
Calcule cuántos seguidores tiene Taylor Swift en cada una de estas redes sociales.

Llamamos "x" al número de seguidores de Taylor Swift en Instagram (en millones), "y" al número de seguidores de Taylor Swift en X y "z" al número de seguidores de Taylor Swift en YouTube.

"Taylor Swift tiene un total de 435 millones de seguidores" → $x+y+z=435$
"Si ganara en Instagram tantos seguidores como la mitad de los que tiene en YouTube, el número de sus seguidores en Instagram sería el doble de la suma de los que tiene en X y en YouTube" → $x+\frac{z}{2}=2(y+z)$
"Si Taylor recibiera cada mes 10 dólares por cada millón de seguidores en Instagram, 20 dólares por cada millón de seguidores en X y 30 dólares por cada millón de seguidores en YouTube, tendría unos ingresos mensuales de 6.500 dólares" → $10x+20y+30z=6500$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=435 \\ x+\frac{z}{2}=2(y+z) \\ 10x+20y+30z=6500 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y+z=435 \\ x+\frac{z}{2}=2y+2z \\ x+2y+3z=650 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y+z=435 \\ 2x+z=4y+4z \\ x+2y+3z=650 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y+z=435 \\ 2x-4y-3z=0 \\ x=650-2y-3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 650-2y-3z+y+z=435 \\ 2(650-2y-3z)-4y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} -y-2z=-215 \\ 1300-4y-6z-4y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -2z+215=y \\ -8y-9z=-1300 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8(-2z+215)-9z=-1300 \Rightarrow 16z-1720-9z=-1300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7z=420 \Rightarrow \boxed{z=\frac{420}{7}=60} \Rightarrow \boxed{y=-120+215=95} \Rightarrow \boxed{x=650-190-180=280}$$

Taylor Swift tiene 280 millones de seguidores en Instagram, 95 millones en X y 60 millones en YouTube.

2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz ortogonal si cumple que $A\cdot A^t = I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

a) **[1]** Estudie si las siguientes matrices son ortogonales o no:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

b) **[0,75]** Si A es una matriz ortogonal cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) **[0,75]** Justifique que si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, entonces el producto $C = A\cdot B$ también lo es.

a) Para que sean ortogonales deben cumplir $A\cdot A^t = I$.

Primera matriz.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{3}/2\right)^2 + 1/4 & -\sqrt{3}/4 + \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 + \sqrt{3}/4 & 1/4 + \left(\sqrt{3}/2\right)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/4 + 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 + 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Se cumple la igualdad y la primera matriz es ortogonal.

Segunda matriz.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{3}/2\right)^2 + 1/4 & -\sqrt{3}/4 - \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 - \sqrt{3}/4 & 1/4 + \left(\sqrt{3}/2\right)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/4 + 1/4 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/4 + 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

No se cumple la igualdad y la segunda matriz no es ortogonal.

b) Si A es una matriz ortogonal tenemos que $A\cdot A^t = I$.

$$A\cdot A^t = I \Rightarrow \left|A\cdot A^t\right| = |I| \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Propiedad} \\ |AB| = |A|\cdot|B| \end{matrix}\right\}\left\{|I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\right\} \Rightarrow |A|\cdot\left|A^t\right| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Propiedad} \\ \left|A^t\right| = |A| \end{matrix}\right\} \Rightarrow |A|\cdot|A| = 1 \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow \boxed{|A| = \sqrt{1} = \pm 1}$$

El determinante de una matriz ortogonal vale 1 o –1.

c) Si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, se cumple $A\cdot A^t = I$ y $B\cdot B^t = I$

Comprobamos si la matriz $C = A \cdot B$ es ortogonal.

$$C = A \cdot B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Propiedad} \\ (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t \end{array} \right\} \Rightarrow C^t = B^t \cdot A^t$$

$$CC^t = A \cdot B \cdot B^t \cdot A^t = \left\{ B \cdot B^t = I \right\} = A \cdot I \cdot A^t = A \cdot A^t = I$$

Queda justificado que si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, entonces el producto $C = A \cdot B$ también lo es.

3: Considere la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-2x+3}$, definida para todo valor $x\in\mathbb{R}$.

a) **[0,5]** Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **y** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**.**

b) **[1,5]** Determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función *f (x)* y calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos relativos).

c) **[0,5]** Justifique que la función alcanza sus extremos absolutos (máximo y mínimo absolutos) y calcule el valor de dichos extremos absolutos.

a) **C**alculamos el límite de la función en $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2-2x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{2}{1-\frac{2}{-\infty}+\frac{3}{+\infty}}=\frac{2}{1-0+0}=2$$

De forma análoga calculamos el límite de la función en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{2}{1-\frac{2}{+\infty}+\frac{3}{+\infty}}=\frac{2}{1-0+0}=2$$

b) Averiguamos el dominio de la función.

$$x^2-2x+3=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(3)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{2}=\nexists$$

El denominador nunca se anula y el dominio de la función es $\mathbb{R}$.
Utilizamos la derivada para hallar los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{2x^2}{x^2-2x+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x\left(x^2-2x+3\right)-2x^2(2x-2)}{\left(x^2-2x+3\right)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{4x^3}-8x^2+12x-\cancel{4x^3}+4x^2}{\left(x^2-2x+3\right)^2}=\frac{-4x^2+12x}{\left(x^2-2x+3\right)^2}$$

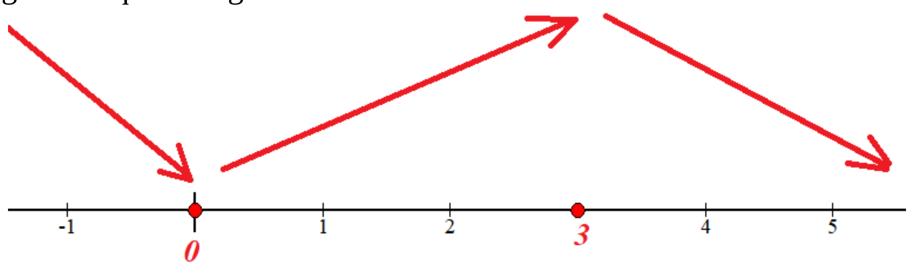
$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-4x^2+12x}{\left(x^2-2x+3\right)^2}=0\Rightarrow-4x^2+12x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \to x=3 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale
$f'(-1)=\dfrac{-4(-1)^2+12(-1)}{\left((-1)^2-2(-1)+3\right)^2}=\dfrac{-16}{36}<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $(0,3)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{-4+12}{(1-2+3)^2}=2>0$. La función crece en $(0,3)$.
- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos *x = 4* y la derivada vale
$f'(4)=\dfrac{-4(4)^2+12(4)}{\left(4^2-2(4)+3\right)^2}=\dfrac{-16}{121}<0$. La función decrece en $(3,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(0,3)$ y decrece en $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$.

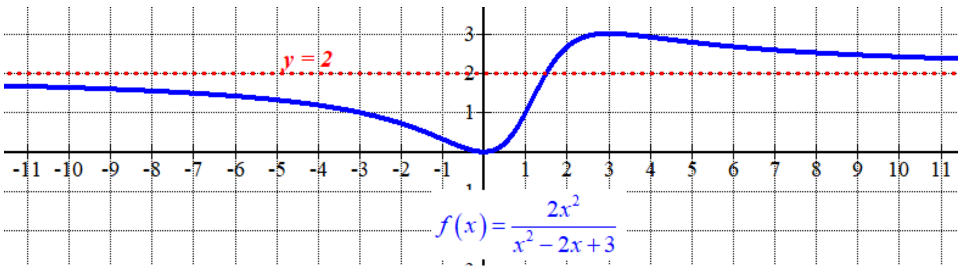
La función tiene un mínimo relativo en *x = 0* y un máximo relativo en *x = 3*.

Como $f(0)=\dfrac{0}{3}=0$ el mínimo relativo tiene coordenadas (0, 0).

Como $f(3)=\dfrac{2\cdot 3^2}{3^2-2\cdot 3+3}=\dfrac{18}{6}=3$ el máximo relativo tiene coordenadas (3, 3).

c) Tenemos que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$, la función es continua siendo su dominio todos los números reales, el valor mínimo relativo es 0 por lo que la función tiene un mínimo absoluto en dicho valor. El mínimo absoluto de la función es 0 y se alcanza en *x = 0*.

Tenemos que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$, la función es continua siendo su dominio todos los números reales, el valor máximo relativo es 3 por lo que la función tiene un máximo absoluto en dicho valor. El máximo absoluto de la función es 3 y se alcanza en *x = 3*.



4: Considere la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, definida para todo valor de $x>0$.

a) **[0,5]** Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **[1,5]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)\,dx$.

c) **[0,5]** Determine el valor de $a>0$ para el cual se cumple que $\int_1^a f(x)\,dx=4$.

a) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{\frac{1}{x}}=2\sqrt{\frac{1}{+\infty}}=2\cdot 0=\boxed{0}$$

b) Calculamos la integral usando el método de integración por partes.

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx=\int \ln x\cdot x^{-1/2}dx\left\{\begin{array}{l} u=\ln x\to du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x^{-1/2}dx\to v=\int x^{-1/2}dx=\frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{x}\end{array}\right\}=$$

$$=2\sqrt{x}\ln x-\int\frac{1}{x}2\sqrt{x}dx=2\sqrt{x}\ln x-2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln x-4\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=$$

$$=2\sqrt{x}\ln x-4\cdot\sqrt{x}=\boxed{2\sqrt{x}(\ln x-2)+C}$$

c) Usamos la integral indefinida obtenida en el apartado anterior para obtener la expresión de la integral definida del ejercicio.

$$\int_1^a f(x)\,dx=\left[2\sqrt{x}(\ln x-2)\right]_1^a=2\sqrt{a}(\ln a-2)-2\sqrt{1}(\ln 1-2)=2\sqrt{a}(\ln a-2)+4$$

Igualamos la integral definida a 4 y obtenemos el valor de *a*.

$$\left.\begin{array}{l}\int_1^a f(x)\,dx=2\sqrt{a}(\ln a-2)+4\\ \int_1^a f(x)\,dx=4\end{array}\right\}\Rightarrow 2\sqrt{a}(\ln a-2)+4=4\Rightarrow 2\sqrt{a}(\ln a-2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=0\to \text{¡Imposible! pues } a>1\\ \ln a-2=0\Rightarrow \ln a=2\Rightarrow \boxed{a=e^2}\end{array}\right.$$

El valor buscado es $a=e^2$.

5: Considere los planos $x-y+z=0$ y $x+y-z=2$ y los puntos $P(1,2,3)$ y $Q(1,1,3)$.

a) **[0,75]** Compruebe que ambos planos se cortan en una recta r y calcule la ecuación continua de dicha recta.

b) **[1]** Compruebe que el punto P no está en ninguno de los dos planos y calcule la ecuación de la recta que pasa por P y no corta a ninguno de los dos planos.

c) **[0,75]** Determine el punto de la recta r que equidista de P y de Q.

a) Para que los planos se corten en una recta los vectores normales de los planos no deben tener coordenadas proporcionales (planos no paralelos ni coincidentes).

$$\left.\begin{array}{l} x-y+z=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,-1,1) \\ x+y-z=2 \Rightarrow \vec{n'}=(1,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$$

Los planos no son paralelos y se cortan en una recta.

Hallamos la ecuación de la recta.

$$r:\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y-z \\ x+y-z=2 \end{cases} \Rightarrow y-z+y-z=2 \Rightarrow 2y-2z=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-z=1 \Rightarrow y=1+z \Rightarrow x=1+z-z=1 \Rightarrow r:\begin{cases} x=1 \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases} \vec{v_r}=(0,1,1) \\ P_r(1,1,0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{r:\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}}$$

La ecuación continua de la recta donde se cortan los planos es $r:\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$.

b) Comprobamos si el punto P pertenece al primer plano

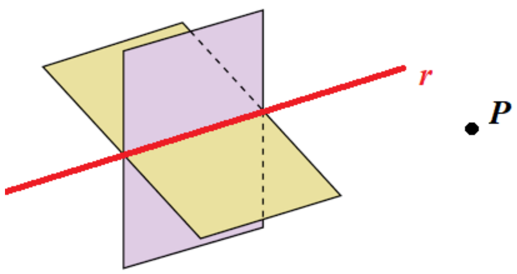
$$¿P(1,2,3) \in x-y+z=0? \Rightarrow ¿1-2+3=0?$$

No se cumple la igualdad y el punto P no está en el primer plano.

Comprobamos si el punto P pertenece al segundo plano

$$¿P(1,2,3) \in x+y-z=2? \Rightarrow ¿1+2-3=2?$$

No se cumple la igualdad y el punto P no está en el segundo plano.



La recta s paralela a r que pasa por P es una recta que no corta a ninguno de los dos planos.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{v_r}=(0,1,1)\\ P(1,2,3)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow s:\begin{cases}x=1\\ y=2+\lambda\,;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=3+\lambda\end{cases}$$

c) Un punto R de la recta $r:\begin{cases}x=1\\ y=1+\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$ tiene coordenadas $R(1,1+\lambda,\lambda)$. Buscamos el valor de λ tal que $d(R,P)=d(R,Q)$.

$$\left.\begin{array}{l}R(1,1+\lambda,\lambda)\\ P(1,2,3)\\ Q(1,1,3)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{RP}=(1,2,3)-(1,1+\lambda,\lambda)=(0,1-\lambda,3-\lambda)\\ \overrightarrow{RQ}=(1,1,3)-(1,1+\lambda,\lambda)=(0,-\lambda,3-\lambda)\end{cases}$$

$$d(R,P)=d(R,Q)\Rightarrow\left|\overrightarrow{RP}\right|=\left|\overrightarrow{RQ}\right|\Rightarrow\sqrt{0^2+(1-\lambda)^2+(3-\lambda)^2}=\sqrt{0^2+(-\lambda)^2+(3-\lambda)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda+9+\lambda^2-6\lambda}=\sqrt{\lambda^2+9+\lambda^2-6\lambda}\Rightarrow\sqrt{2\lambda^2-8\lambda+10}=\sqrt{2\lambda^2-6\lambda+9}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\lambda^2-8\lambda+10=2\lambda^2-6\lambda+9\to-2\lambda=-1\to\boxed{\lambda=\frac{1}{2}}\\ 2\lambda^2-8\lambda+10=-\left(2\lambda^2-6\lambda+9\right)\to2\lambda^2-8\lambda+10=-2\lambda^2+6\lambda-9\to\\ \to4\lambda^2-14\lambda+19=0\to\lambda=\dfrac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4(4)(19)}}{8}=\\ =\dfrac{2\pm\sqrt{-108}}{8}=\color{red}{No\,existe}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow R\left(1,1+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Rightarrow R\left(1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

El punto de la recta r que equidista de los puntos P y Q es $R\left(1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$.

6: Considere los planos $x+y+z=-3$ y $x+y-z=3$ y la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{3}$

a) **[0,75]** Compruebe que ambos planos se cortan y calcule el ángulo que forman.
b) **[0,75]** Estudie la posición relativa de la recta r con el plano $x+y-z=3$.
c) **[1]** Determine los puntos de la recta r que equidistan de ambos planos.

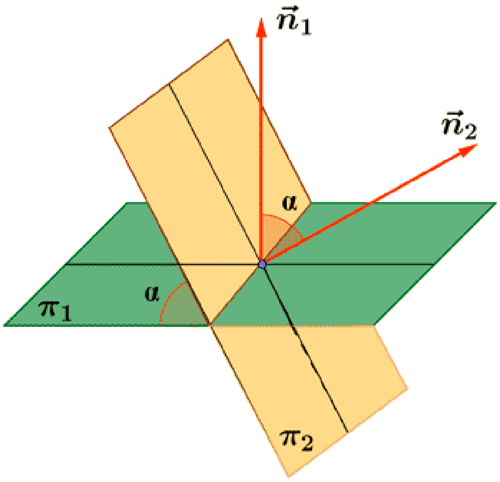
a) Para que los planos se corten en una recta los vectores normales de los planos no deben tener coordenadas proporcionales (planos no paralelos).

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=-3 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,1) \\ x+y-z=3 \Rightarrow \vec{n'}=(1,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{1}{1}\neq\frac{1}{-1}$$

Los planos no son paralelos y se cortan en una recta.
Hallamos el ángulo que forman sus vectores normales (ángulo entre los planos).

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=-3 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,1) \\ x+y-z=3 \Rightarrow \vec{n'}=(1,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\vec{n},\vec{n'}\right)=\frac{\vec{n}\cdot\vec{n'}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{n'}\right|}=$$

$$=\frac{(1,1,1)(1,1,-1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1+1-1}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow\left(\vec{n},\vec{n'}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\simeq 70.53^{\circ}$$



El ángulo que forman los dos planos es de aproximadamente 70.53º.

b) Hallamos un punto y un vector de la recta.

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{3}\Rightarrow r:\begin{cases}\vec{u_r}=(2,1,3)\\ P_r(1,-1,0)\end{cases}$$

Averiguamos si el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u_r}=(2,1,3) \\ x+y-z=3 \Rightarrow \vec{n'}=(1,1,-1) \\ ¿\vec{u_r}\perp\vec{n'}? \rightarrow ¿\vec{u_r}\cdot\vec{n'}=0? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿(2,1,3)(1,1,-1)=0? \Rightarrow ¿2+1-3=0?$$

Se cumple la igualdad, por lo que el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares y por tanto, la recta y el plano son paralelos o coincidentes.

Comprobamos si el punto $P_r(1,-1,0)$ de la recta pertenece al plano.

$$¿P_r(1,-1,0) \in x+y-z=3? \Rightarrow ¿1-1-0=3?$$

La igualdad es falsa y el punto no pertenece al plano por lo que recta y plano son paralelos.

c) Buscamos los puntos de la recta *r* que equidistan de ambos planos.

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{3} \Rightarrow r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(2,1,3) \\ P_r(1,-1,0) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=3\lambda \end{cases} \Rightarrow A_r(1+2\lambda,-1+\lambda,3\lambda)$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x+y+z+3=0 \\ \pi': x+y-z-3=0 \\ A_r(1+2\lambda,-1+\lambda,3\lambda) \\ d(A_r,\pi)=d(A_r,\pi') \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|1+2\lambda-1+\lambda+3\lambda+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|1+2\lambda-1+\lambda-3\lambda-3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|6\lambda+3|}{\sqrt{3}}=\frac{|-3|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |6\lambda+3|=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6\lambda+3=3 \to 6\lambda=0 \to \lambda=0 \to \boxed{P_r(1,-1,0)} \\ 6\lambda+3=-3 \to 6\lambda=-6 \Rightarrow \lambda=-1 \to A_r(1-2,-1-1,-3) \to \boxed{A_r(-1,-2,-3)} \end{cases}$$

Los puntos de la recta *r* que equidistan de ambos planos son $P_r(1,-1,0)$ y $A_r(-1,-2,-3)$.

7: El 60% de los habitantes de una población consume pan integral, el 40% consume pan blanco y el 20% consume ambos tipos de pan.
a) **[0,5]** ¿Son independientes los sucesos "consumir pan integral" y "consumir pan blanco"?
b) **[0,5]** Sabiendo que un habitante consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?
c) **[0,75]** Calcule el porcentaje de la población que no consume ninguno de los dos tipos de pan.
d) **[0,75]** Sabiendo que un habitante no consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?

a) Realizamos una tabla de contingencia.

	Consumen pan blanco	No consumen pan blanco	
Consumen pan integral	20		60
No consumen pan integral			
	40		100

Completamos la tabla.

	Consumen pan blanco	No consumen pan blanco	
Consumen pan integral	20	**40**	60
No consumen pan integral	**20**	**20**	**40**
	40	**60**	100

Llamamos B al suceso "consumir pan blanco" e I a "consumir pan integral".
Comprobamos si se cumpla la igualdad $P(B \cap I) = P(B)P(I)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(B \cap I) = 0.20 \\ P(B)P(I) = 0.40 \cdot 0.60 = 0.24 \end{array}\right\} \Rightarrow P(B \cap I) = 0.20 \neq 0.24 = P(B)P(I)$$

La igualdad no se cumple y los sucesos "consumir pan integral" y "consumir pan blanco" no son independientes.

b) Nos piden calcular $P(B/I)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/I) = \frac{P(B \cap I)}{P(I)} = \frac{0.2}{0.6} = \boxed{\frac{1}{3} \simeq 0.333}$$

La probabilidad de que un habitante que consume pan integral consuma pan blanco es de $\frac{1}{3} \simeq 0.333$.

c) Observando la tabla del comienzo del ejercicio sabemos que un 20 % de los habitantes no consume ninguno de los dos tipos de pan.

d) Nos piden calcular $P(B/\overline{I})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(B/\bar{I}\right)=\frac{P\left(B\cap\bar{I}\right)}{P\left(\bar{I}\right)}=\{\text{Datos de la tabla}\}=\frac{0.20}{0.40}=\boxed{\frac{1}{2}=0.5}$$

La probabilidad de que un habitante que no consume pan integral consuma pan blanco es de $\frac{1}{2}=0.5$.

8: Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes.
Una fábrica de componentes de ordenador produce 2500 microprocesadores al día. Sabiendo que el porcentaje de microprocesadores defectuosos fabricados es del 2%, responda razonadamente a las siguientes cuestiones:
a) **[0,5]** ¿Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de microprocesadores defectuosos fabricados al día?
b) **[0,5]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.
c) **[0,75]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea menor o igual que 57?
d) **[0,75]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea exactamente 50?

a) X = "El número de microprocesadores defectuosos de un grupo de 2500"
Esta variable es una binomial pues cada fabricación de un microprocesador es independiente de la anterior y la probabilidad de fabricar un microprocesador defectuoso es 0.02 en cada nueva fabricación. Los resultados siempre son "defectuoso" o "no defectuoso".
X = B(2500, 0.02).

b) La media es $np = 2500 \cdot 0.02 = 50$ microprocesadores defectuosos al día.
La desviación típica es $\sqrt{npq} = \sqrt{2500 \cdot 0.02 \cdot 0.98} = 7$ microprocesadores.

c) Nos piden calcular $P(X \leq 57)$.
Como el número de repeticiones es muy grande (2500) utilizamos la aproximación a la normal con media 50 y desviación típica 7.
Y = N(50, 7)

$$P(X \leq 57) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \leq 57.5) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{Y-50}{7} \end{array} \right\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{57.5-50}{7}\right) = P(Z \leq 1.07) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{array} \right\} = \boxed{0.8577}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0

La probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea menor o igual que 57 es de 0.8577.

d) Nos piden calcular $P(X = 50)$.
Calculamos esta probabilidad usando la binomial.

$$P(X=50)=\binom{2500}{50}0.02^{50}\cdot 0.98^{2450}=\text{¡La calculadora no es capaz de hacer este cálculo!}=$$

$$=\text{Utilizando la web Wolfram Alpha}=\boxed{0.0569}$$

Calculamos esta probabilidad usando la aproximación a la normal.

$$P(X=50)=\{\text{Corrección de Yates}\}=P(49.5\leq Y\leq 50.5)=P(Y\leq 50.5)-P(Y\leq 49.5)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} Tipificamos \\ Z=\dfrac{Y-50}{7} \end{array}\right\}=P\left(Z\leq \frac{50.5-50}{7}\right)-P\left(Z\leq \frac{49.5-50}{7}\right)=$$

$$=P(Z\leq 0.07)-P(Z\leq -0.07)=P(Z\leq 0.07)-P(Z\geq 0.07)=$$

$$=P(Z\leq 0.07)-\left[1-P(Z\leq 0.07)\right]=\left\{\begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{array}\right\}=0.5279-1+0.5279=\boxed{0.0558}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.5279

La probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea exactamente 50 es de 0.0569.