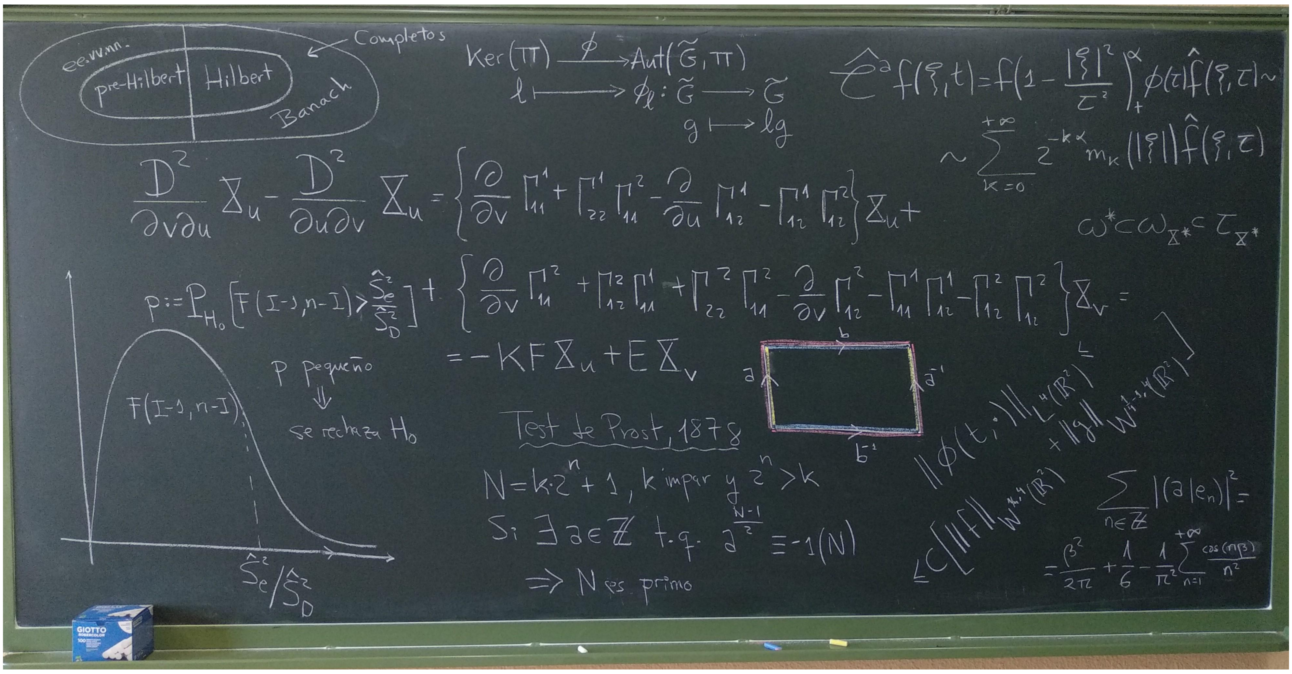
MATEMÁTICAS II

2º Bachillerato de Ciencias y Tecnología



Antonio Cipriano Santiago Zaragoza

Departamento de Matemáticas
I.E.S. "Ramón Giraldo"

Modificado y revisado en diciembre de 2023

Índice general

ANÁLISIS MATEMÁTICO

UNIDAD 1: LÍMITES

UNIDAD 2: CONTINUIDAD

UNIDAD 3: DERIVADAS

UNIDAD 4:
APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

UNIDAD 5:
PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

UNIDAD 6:
PRIMITIVAS E INTEGRALES

UNIDAD 7:
INTEGRAL DEFINIDA

UNIDAD 8:
APLICACIONES DE LA INTEGRAL

ÁLGEBRA

UNIDAD 9:
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

UNIDAD 10:
MATRICES

UNIDAD 11:
DETERMINANTES

UNIDAD 12:
DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

GEOMETRÍA

UNIDAD 13:
ESPACIO AFÍN

UNIDAD 14:
ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

UNIDAD 15:
PROBABILIDAD

UNIDAD 16: DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Unidad 1:
LÍMITES

1. SUCESIONES

Una **sucesión** de números reales es un conjunto ordenado de infinitos números reales

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

siendo a_n el término general. Se representa por $\{a_n\}$ o por (a_n).

Más formalmente, una sucesión es una función

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to f(n) := a_n$$

y así, $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2, ...$

Ejemplos:

(1) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$

$a_1 = \dfrac{1}{1} = 1,\ a_2 = \dfrac{1}{2},\ a_3 = \dfrac{1}{4},\ ...$

(2) $\{b_n\} = \{n^2\}$

$b_1 = 1^2 = 1,\ b_2 = 2^2 = 4,\ b_3 = 3^2 = 9,\ b_4 = 4^2 = 16,\ ...$

2. LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Intuitivamente, decimos que el límite de una sucesión $\{x_n\}$ es el número real L si los términos de dicha sucesión se van aproximando a L, y escribiremos $\{x_n\} \to L$ o $\lim x_n = L$ o $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$

Si $x_n \to L$, entonces $x_n \simeq L$ cuando n es grande.

Definición: El número real a es el **límite de la sucesión** (a_n) de números reales, cuando, para cualquier número positivo ε, podemos encontrar un término de la sucesión a_{n_0} tal que la distancia de los infinitos términos posteriores a a_{n_0} al número a es menor que ε:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tal que para } n > n_0,\ |a_n - a| < \varepsilon$$

Las **sucesiones** que tienen límite se llaman **convergentes** y las que tienden hacia ∞ se llaman **divergentes**.

Ejemplos:

(1) La sucesión $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ converge a cero, ya que los términos de x_n se van a proximando cada vez más a dicho valor: $1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001...$

(2) La sucesión $\{x_n\}=\{n^2\}$ diverge, ya que sus términos se van haciendo cada vez más grandes: $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36...$

(3) La sucesión $\{x_n\}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad n=1\\ \left\{\dfrac{x_{n-1}+2}{x_{n-1}+1}\right\} & \text{si} \quad n>1\end{cases}$ converge a $\sqrt{2}$, ya que los términos de dicha sucesión se van aproximando cada vez más a $\sqrt{2}$:

$$x_1=1$$
$$x_2=\frac{x_1+2}{x_1+1}=\frac{3}{2}=1{,}5$$
$$x_3=\frac{x_2+2}{x_2+1}=\frac{7}{5}=1{,}4$$
$$x_4=\frac{x_3+2}{x_3+1}=\frac{17}{12}=1{,}4166$$
$$x_5=\frac{x_4+2}{x_4+1}=\frac{41}{29}=1{,}4137$$
$$x_6=\frac{x_5+2}{x_5+1}=\frac{99}{70}\simeq 1{,}4142$$

<u>Propiedades elementales</u> de los límites de sucesiones:
Supongamos que $x_n\to x,\ y_n\to y$ y $\alpha\in\mathbb{R}$. Entonces:

a) $x_n+y_n\to x+y$

b) $x_ny_n\to xy$

c) $\alpha+y_n\to\alpha+y$

d) $\alpha y_n\to\alpha y$

e) $x_n-y_n\to x-y$

f) $\dfrac{x_n}{y_n}\to\dfrac{x}{y}$ siempre que $y\neq 0,\ y_n\neq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

<u>El número e</u>

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e, \quad e\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \quad \text{y} \quad e=2{,}7181828...$$

<u>Límites infinitos</u>

1) $x_n\to+\infty\Leftrightarrow -x_n\to-\infty$

2) Si $x_n\to\alpha$ e $y_n\to+\infty$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\infty=+\infty \quad \text{si} \quad \alpha \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \\ \alpha\cdot(+\infty)=\begin{cases} +\infty & \text{si} \quad 0<\alpha\leq+\infty \\ -\infty & \text{si} \quad -\infty\leq\alpha<0 \end{cases} \\ \dfrac{\alpha}{+\infty}=0 \quad \text{si} \quad \alpha\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Aritmética de } \overline{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \\ \text{Recta real ampliada} \end{array}$$

3) Los casos $+\infty-\infty$, $0\cdot(\pm\infty)$, $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$ son indeterminaciones.

3. ENTORNOS EN LA RECTA. DISTANCIA

Dado un número real a y un número real positivo ε, se llama **entorno de centro** a **y radio** ε, al intervalo abierto de extremos $a-\varepsilon,\ a+\varepsilon$:

$$E(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)=\{x\in\mathbb{R}:\ a-\varepsilon<x<a+\varepsilon\}$$

El número real a es el **límite de una sucesión** (a_n) de números reales, cuando, para cualquier entorno $E(a,\varepsilon)$, podemos encontrar un término de la sucesión a_{n_0} tal que los infinitos términos posteriores a a_{n_0} pertenecen al entorno $E(a,\varepsilon)$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=a \Leftrightarrow \forall E(a,\varepsilon),\ \exists n_0\in\mathbb{N} \text{ tal que para } n>n_0,\ \ a_n\in E(a,\varepsilon)$$

Se llama **entorno reducido de centro** a **y radio** ε al conjunto:

$$E^*(a,\varepsilon)=E(a,\varepsilon)-\{a\}$$

Dado un número $M>0$ arbitrariamente grande, se llama **entorno de más infinito**, al conjunto:

$$E(+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: x>M\}$$

Dado un número $M<0$, cuyo valor absoluto es arbitrariamente grande, se llama **entorno de menos infinito**, al conjunto:

$$E(-\infty)=\{x\in\mathbb{R}: x<M\}$$

Se denomina **entorno de infinito**, al conjunto:

$$E(\infty)=E(-\infty)\cup E(+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: |x|>M\}$$

Se define la **distancia entre los números reales** x e y, como: $d(x,y)=|x-y|$

4. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

4.1. *Definiciones*

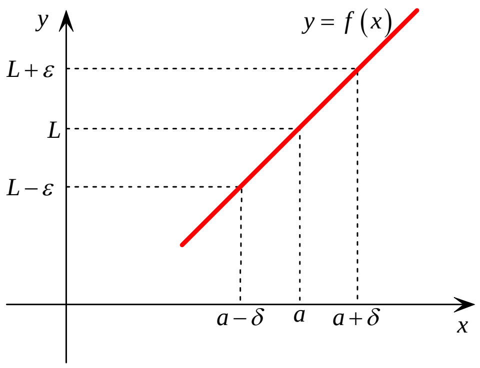
Un punto $a\in D$ es un <u>punto de acumulación</u> de $D\subseteq\mathbb{R}$, y escribiremos $a\in D'$, si $\forall E^*(a)$ se tiene que $E^*(a)\cap D\neq\varnothing$.

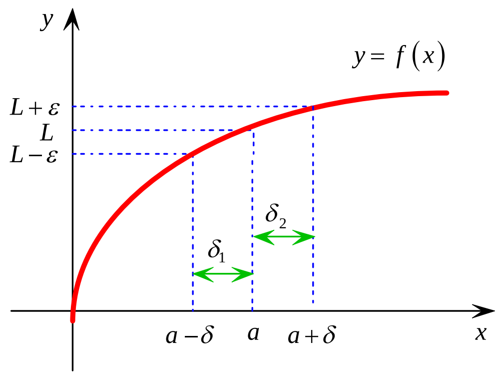
<u>*Criterio práctico*</u>: Siempre que exista un intervalo abierto de centro a contenido en D se tendrá que $a \in D'$.

<u>Definición intuitiva:</u> Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $a \in D'$ y $L \in \mathbb{R}$. Diremos que el <u>límite</u> de $f(x)$ cuando $x \to a$ es *L*, y escribiremos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si para valores de *x* cada vez más próximos a *a* (<u>distintos de *a*</u>), los valores de las imágenes $f(x)$ están cada vez más próximas a *L*.

<u>Definición formal:</u>

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $a \in D'$ y $L \in \mathbb{R}$. Diremos que el <u>límite</u> de $f(x)$ cuando $x \to a$ es *L*, y escribiremos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si para cada número real positivo ε, existe un número real positivo δ (que depende de ε), tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, si $|x - a| < \delta$.





(En general $\delta_1 \neq \delta_2$ y se toma $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. El que sí es simétrico es el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$)

<u>Límites laterales:</u>

El <u>límite por la izquierda</u> es el valor al que tiende la función s cuando la variable *x* se aproxima a *a* siendo menor que *a*. Se denota por:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \quad \text{o} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$$

El <u>límite por la derecha</u> es el valor al que tiende la función $f(x)$ cuando la variable *x* se aproxima a *a* siendo mayor que *a*. Se denota por:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{o} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

Esto da lugar a la siguiente:

<u>Caracterización:</u>

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_{x \to a^-} f(x), \ \exists \lim_{x \to a^+} f(x) \\ \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \end{cases}$$

En cuyo caso $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

<u>Propiedades</u> de los límites:

1) $\lim\limits_{x\to a} k = k$ donde $k \in \mathbb{R}$
El límite de un número es el propio número.

2) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$
El límite de una suma (resta) es igual a la suma (resta) de los límites.

3) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$
El límite de un producto es igual al producto de los límites.

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ siempre que $g(a)\neq 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$
El límite de un cociente es igual al cociente de los límites

5) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right]=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ siempre que $\lim\limits_{x\to a} f(x)>0$
El límite de una potencia es igual a la potencia de los límites.

6) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ siempre que $f(x)\geq 0$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)\geq 0$ cuando n sea par.
El límite de una raíz es la raíz del límite.

7) $\lim\limits_{x\to a}\left[\log_A f(x)\right]=\log_A\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]$ siempre que $f(x)>0$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)>0$
El límite de un logaritmo es igual al logaritmo del límite.

<u>Ejercicio:</u>

1. *Halla, si existe, el límite de las siguientes funciones cuando x tiende a cero:*

a) $f(x)=\dfrac{|x|-x}{2}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x}$

4.2. <u>Amplicación: cálculo de un límite aplicando la definición</u>

Demostremos, aplicando la definición de límite, que $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$.

Dado $\varepsilon>0$, tenemos que hallar un $\delta>0$ tal que, si $|x-3|<\delta$, entonces $|x^2-9|<\varepsilon$.

Como un punto próximo a 3 se puede escribir en la forma $x=3+h$ con $h\neq 0$, se tiene que

$$\left|(3+h)^2-9\right|=\left|6h+h^2\right|=|h||6+h|<7|h|$$

siempre que $|h|<1$.

Por tanto, tomando $|h|<\dfrac{\varepsilon}{7}=\delta$ si $\dfrac{\varepsilon}{7}<1$ o $|h|=1=\delta$ si $\dfrac{\varepsilon}{7}>1$, se tiene que $\left|(3+h)^2-9\right|<\varepsilon$, y como consecuencia, $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$.

5. LÍMITES INFINITOS: ASÍNTOTAS VERTICALES

Decir que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ significa que cuando *x* tiende a *a*, con $x < a$, $f(x)$ toma valores mayores que cualquier número real *k*:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } |x-a| < \delta \Rightarrow k < f(x)$$

Análogamente, decir que $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ significa que cuando *x* tiende a *a*, con $x < a$, $f(x)$ toma valores cada vez más pequeños:

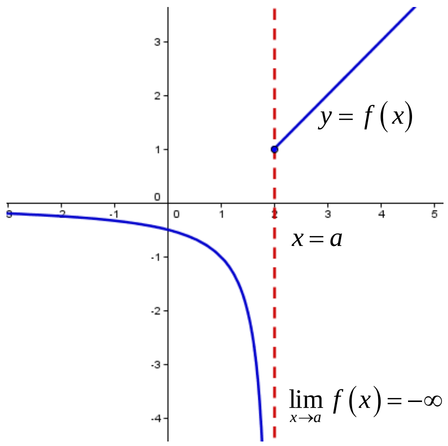
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall k > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -k$$

Dada la gráfica de una función, una asíntota es una recta a la cual dicha gráfica se aproxima cada vez más.

Ahora analizaremos de forma mas detallada los distintos tipos de asíntotas de una función.

Definición:

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites: $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$



Observaciones:

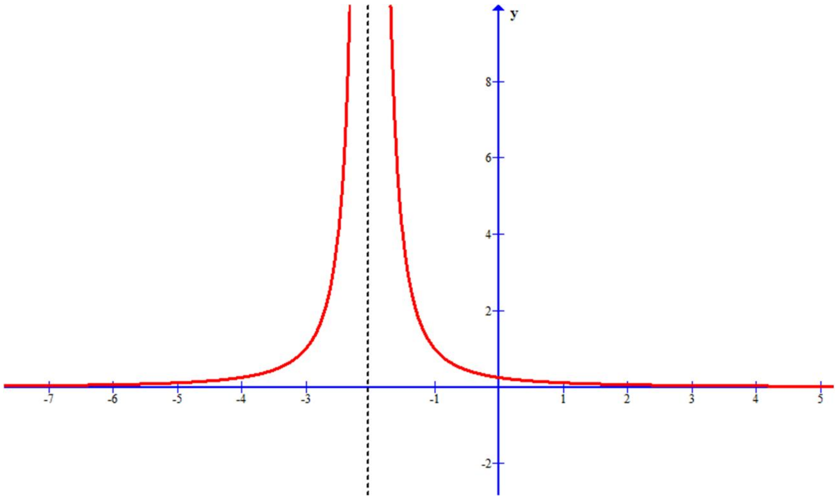
(1) Una función *puede tener infinitas asíntotas verticales*.

(2) En las funciones racionales las asíntotas verticales se hallan en los valores *x* que anulan al denominador.

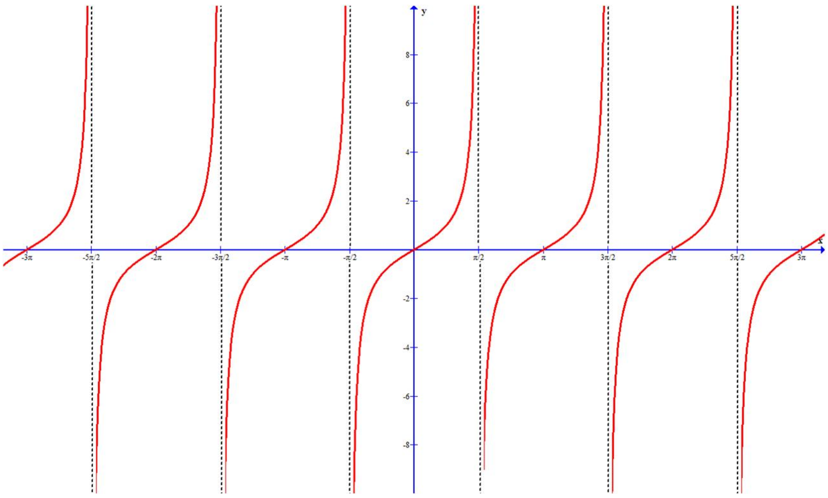
(3) La gráfica de *la función no puede cortar a las asíntotas verticales*.

Ejemplos:

1) La recta $x = -2$ es una asíntota vertical de la función $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$.



2) La función $f(x) = \operatorname{tg} x$ tiene infinitas asíntotas verticales: $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$



6. LÍMITES EN EL INFINITO: ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Decir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ significa que cuando x se hace tan grande como queramos, la función $f(x)$ toma valores muy próximos a un número fijo b:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists k > 0 \text{ tal que si } k < x \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

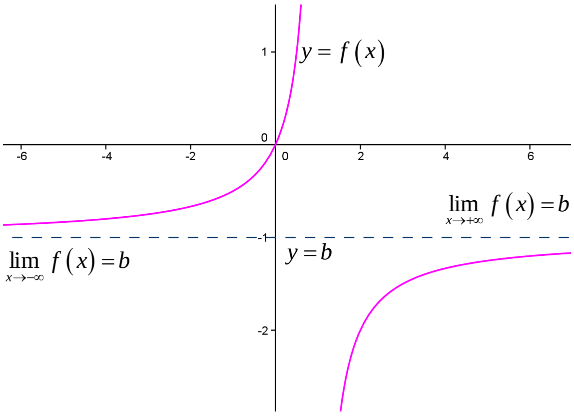
De igual modo, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ significa que $f(x)$ se aproxima a b cuando x se hace cada vez más pequeño:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists k > 0 \text{ tal que si } x < -k \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Definición:

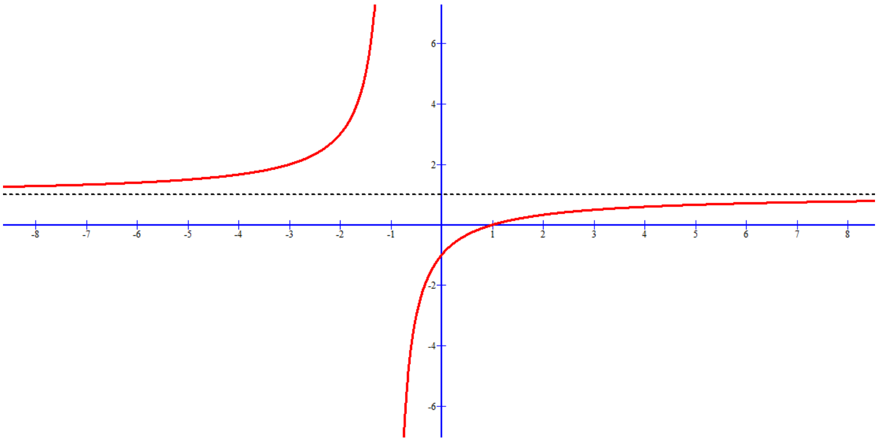
La recta $y = k$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = k \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = k$$

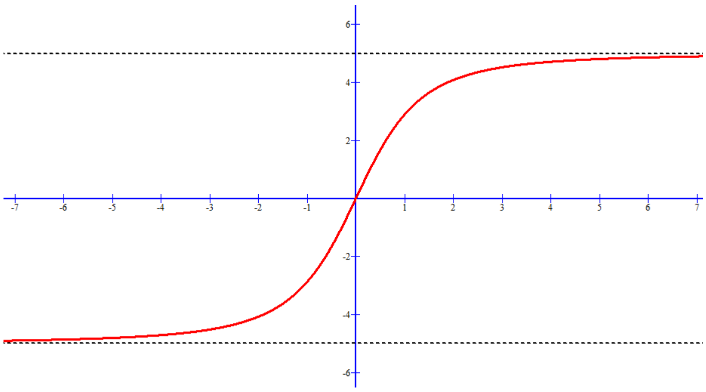


Ejemplos:

1) La función $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ tiene una asíntota horizontal, que es la recta $y=1$.



2) La función $f(x)=\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+2}}$ tiene dos asíntotas horizontales; las rectas $y=5$ e $y=-5$.



Observaciones:

(1) Una función tiene *como máximo dos asíntotas horizontales*.

(2) La gráfica de *la función puede cortar a las asíntotas horizontales*.

(3) Para *funciones racionales*:

- Si en una función racional el grado del numerador es menor que el grado del denominador la recta $y=0$ (el eje *OX*) es una asíntota horizontal.

- Si en una función racional el grado del numerador y el del denominador son iguales la recta $y = b$ será una asíntota horizontal (b indica el cociente entre los coeficientes líderes del numerador y del denominador).
- Si en una función racional el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador la función presenta una asíntota oblicua y no hay asíntotas horizontales.
- Si en una función racional el grado del numerador es dos o más unidades, mayor que el del denominador hay asíntota horizontal.

6.1. Ampliación: cálculo de un límite en el infinito aplicando la definición

Demostremos, aplicando la definición de límite, que $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x+10}{x-1} = 5$.

Dado $\varepsilon > 0$, tan pequeño como se quiera, se tiene que

$$\left|f(x)-5\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{5x+10}{x-1}-5\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{15}{x-1}\right| < \varepsilon$$

y, como $\frac{15}{x-1} > 0$ para x grande, se tiene que $\frac{15}{x-1} < \varepsilon$, lo que equivale a que $x > \frac{15}{\varepsilon} + 1$. Así, tomando $k = \frac{15}{\varepsilon} + 1$, se tiene lo que queríamos, esto es, que $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x+10}{x-1} = 5$.

7. LÍMITES INFINITOS EN EL INFINITO: ASÍNTOTAS OBLICUAS

También puede suceder que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, lo que significa que x y $f(x)$ se hacen infinitamente grandes a la vez. Por tanto:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow f(x) > k$$

para todo $x > p$, siendo k y p números arbitrariamente grandes.

Definición:

La recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, es una asíntota oblicua de $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - mx - n\right) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - mx - n\right) = 0$$

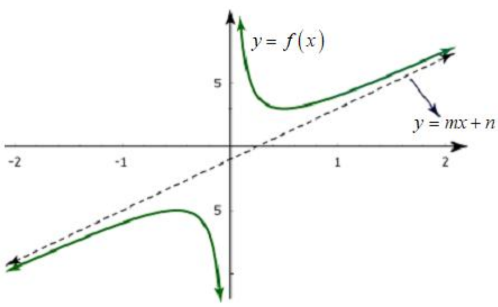
en cuyo caso $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right)$.

Observaciones:

(1) Una función puede tener *como máximo dos asíntotas oblicuas*.

(2) La gráfica de *la función puede cortar a las asíntotas oblicuas*.

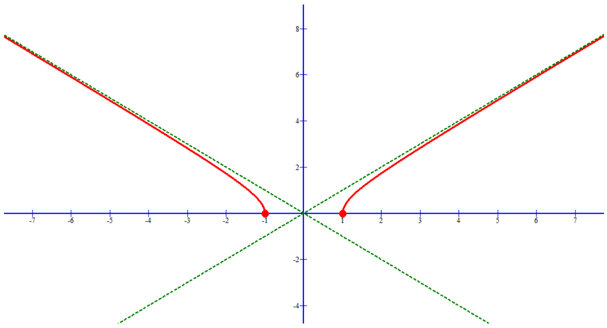
(3) Si en una función racional el grado del numerador es dos o más unidades, mayor que el del denominador, no hay asíntota oblicua.



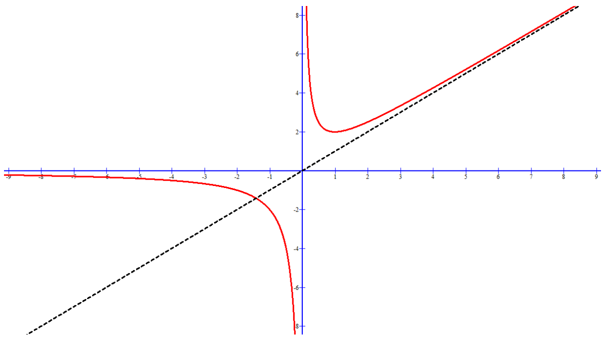
(4) Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional y $\text{grado } P(x)-\text{grado } Q(x)=1$, entonces la asíntota oblicua $y=mx+n$ de $f(x)$ es el cociente de $P(x)$ entre $Q(x)$.

Ejemplos:

1) La función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ tiene dos asíntotas oblicuas, que son las rectas $y=x$ e $y=-x$.



2) La función $f(x)=x^{\frac{|x|}{x}}+\dfrac{1}{x}$ tiene una asíntota oblicua solo, por un lado, que es la recta $y=x$.

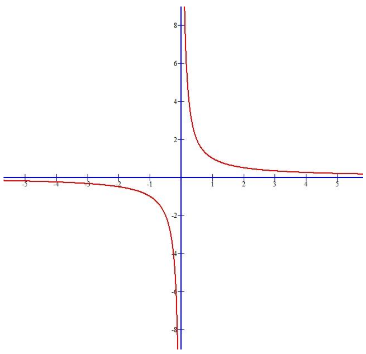


Además, es un ejemplo de función con una asíntota horizontal y una asíntota oblicua.

8. ALGUNOS LÍMITES IMPORTANTES

Vamos a estudiar algunos límites muy sencillos, pero que aparecen muy a menudo y que por tanto es necesario tenerlos siempre presentes:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

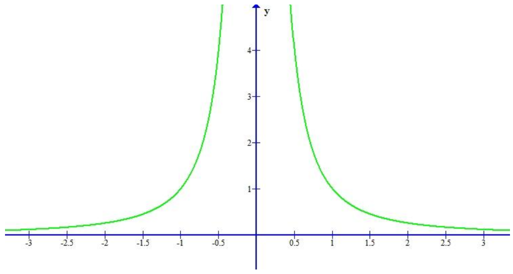


$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{1}{x}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{1}{x}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$$

(2) $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

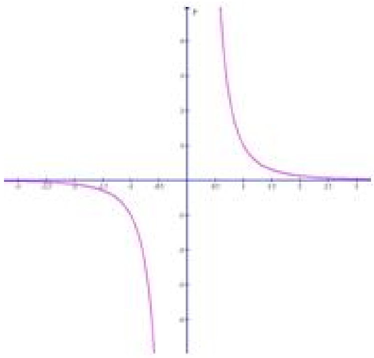


$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^2} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

(3) $h(x) = \dfrac{1}{x^3}$

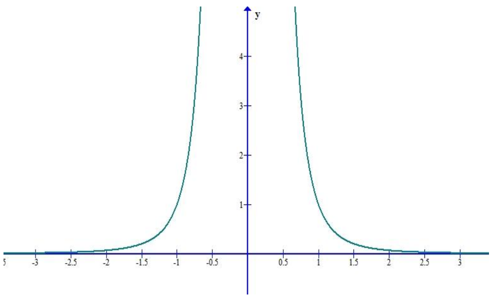


$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^3} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^3} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3}$$

(4) $i(x) = \dfrac{1}{x^4}$



$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^4} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^4} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^4} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

(5) En general:

Para n impar:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^n} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^n} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n}$$

Para n par:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^n} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^n} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

Un par de consideraciones a tener en cuenta al calcular límites:

a) Si $P(x)=a_n x^n+...+a_1 x+a_0$ es un polinomio, entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x)=\pm\infty$$

y el resultado solo depende del monomio $a_n x^n$.

b) Para límites en el infinito de funciones racionales se tiene la siguiente regla práctica, donde

$$P(x)=a_n x^n+...+a_1 x+a_0 \text{ y } Q(x)=b_m x^m+...+b_1 x+b_0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\pm\infty & \text{si} \quad \text{grado}(P)>\text{grado}(Q)\\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si} \quad \text{grado}(P)=\text{grado}(Q)\\ 0 & \text{si} \quad \text{grado}(P)<\text{grado}(Q)\end{cases}$$

9. INDETERMINACIONES

Cuando al calcular el límite de una suma, un producto, un cociente o una potencia de funciones no se pueden aplicar las propiedades de los límites, es decir, hay que hacer un estudio particular de cada caso, suele decirse que estos límites presentan **una indeterminación**.

Según el profesor R. Payá en esencia solo hay dos tipos de indeterminaciones, $[\infty-\infty]$ y $[0\cdot\infty]$, que aparecen al estudiar el comportamiento de sumas y productos, respectivamente, de funciones. La segunda puede tomar además dos aspectos, $\left[\frac{0}{0}\right]$ y $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, que aparecen al estudiar cocientes, y tres aspectos más, $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$ y $\left[1^\infty\right]$, que surgen al estudiar potencias. Se considerará además la «indeterminación» del tipo $\left[\frac{k}{0}\right]$ con $k\in(\mathbb{R}-\{0\})\cup\{\pm\infty\}$.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[\frac{k}{0}\right]$ CON $k\in(\mathbb{R}-\{0\})\cup\{\pm\infty\}$

Se calculan los límites laterales: $\lim_{x\to a+} f(x)$, $\lim_{x\to a-} f(x)$

Si existen ambos límites y coincide su valor, entonces:

$$\exists\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)$$

Si no existe alguno de los límites laterales o no coincide su valor, entonces, no existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[\frac{0}{0}\right]$

a) Para funciones racionales

Se descomponen numerador y denominador en factores y se simplifica.

b) Para funciones irracionales

Si se trata de una función con raíces cuadradas en el numerador (o en el denominador), multiplicamos numerador y denominador por la expresión conjugada del numerador (o del denominador).

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Se divide numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparezca en la función (basta con dividir por la mayor potencia de x del denominador).

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $[\infty-\infty]$

a) <u>La función es diferencia de dos funciones racionales</u>
Se efectúa dicha operación.
b) <u>La función es diferencia de funciones irracionales</u>
Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada de la función.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $[0\cdot\infty]$

Transformar esta indeterminación en una de las anteriores, generalmente efectuando las operaciones.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $[1^\infty]$

La indeterminación que nos ocupa se resuelve empleando la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)[f(x)-1]}$$

donde $a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

<u>Demostración:</u>

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}\left[1+f(x)-1\right]^{\frac{1}{f(x)-1}[f(x)-1]g(x)} = \lim_{x\to a}\left[1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\frac{1}{f(x)-1}[f(x)-1]g(x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)[f(x)-1]}$$ C.Q.D.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[0^0 \text{ o } \infty^0 \text{ o } 0^\infty\right]$

Estos dos tipos de indeterminaciones se pueden resolver aplicando la siguiente fórmula:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\log f(x)}$$

donde $a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ y $\log=\ln$ es el logaritmo natural.

<u>Demostración:</u>

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \underset{(1)}{=} e^{\lim\limits_{x\to a}\log\left[f(x)^{g(x)}\right]} \underset{(2)}{=} e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\log f(x)}$$

Donde en (1) hemos usado la definición de la función exponencial $a^b := e^{\log\left(a^b\right)}$, y en (2) la siguiente propiedad de los logaritmos: $\log a^b = b\log a$. C.Q.D.

Sugerencia:

Antes de lanzarnos a la resolución de indeterminaciones hay que pararse un momento y analizar el límite que queremos calcular:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to 0}1=1$$

¿Realmente había que resolver la indeterminación? La respuesta tiene que ser no, ya que $\frac{x}{x}=1$ y, por tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}1=1$$

¿Qué ha ocurrido? Pues que hemos visto la palabra límite y sin pensarlo hemos sustituido y hemos resuelto la indeterminación.

Otro ejemplo más:

$$\lim_{x\to+\infty}1^x=\left[1^\infty\right]$$

¿Y ahora nos ponemos a resolver la indeterminación? Si tenemos en cuenta que $1^x=1$ ya tenemos resuelto el límite que nos pedían:

$$\lim_{x\to+\infty}1^x=\lim_{x\to+\infty}1=1$$

Por tanto, la ***sugerencia*** es que *antes de empezar a calcular el límite, simplifiques todo lo que puedas la función y después hagas los cálculos necesarios para calcularlo*.

Ejercicios:

2. *Calcula los siguientes límites, resolviendo la correspondiente indeterminación, cuando ésta se presente:*

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{x-3}$

2) $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right]$

3) $\lim_{x\to -2}\frac{2x^2-8}{x^2+x-2}$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{x^4-2}}$

5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^4+2x^2-5}{4x^4-7}$

6) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-1}\right)^{2x}$

3. *Calcula los siguientes límites:*

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^3-1}$

2) $\lim_{x\to 3+}\frac{x^2+6x-9}{x-3}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x+6}{x^2+3x+2}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+6x-3}{2x^2+5x}$

5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{x^2+1}$

6) $\lim_{x\to 1-}\frac{2x^2-x+3}{x^2-5x+4}$

7) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$

8) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x^2 + 2x}$

10) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x\right)$

11) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$

12) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1}\right)$

13) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$

14) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{5x+1}{5x-1}\right)^{3x+2}$

15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}$

16) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^3+1}{x^2+1}\right)^{\frac{3}{x-1}}$

17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$

18) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-1}}$

4. *Calcula los siguientes límites:*

1) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x^2-4}{x+1} \cdot \dfrac{x^2+4}{x^2-2x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x+2}{x-1} - \dfrac{x+5}{x^2-1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 2} (x-1)^{\frac{3}{x-2}}$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1}$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{4x^2-5} - (2x-3)\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{\sqrt{2x-4}}{x-2}$

7) $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{2x^2-2}{x^2-2x+1}$

8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-3}$

9) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}$

10) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2+4}{x+4}\right)^{\frac{x}{x-1}}$

11) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}$

12) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3}$

5. *Calcula los siguientes límites, resolviendo la correspondiente indeterminación, cuando ésta se presente:*

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-4x-6}{3-\sqrt{x+6}}$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+3x^2-x-3}{2x^2-2x-4}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-x^2-x+6}{x(x-2)^2}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{x^2+x}\right)^{\sqrt{x^2+1}-x}$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x+2}{x-2} - \dfrac{6x+4}{x^2-4}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x+3}{x-1} \cdot \dfrac{x^2+x-2}{x^2-3}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}\right)$

k) $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)^{\frac{2x-1}{\sqrt{2x-1}}}$

l) $\lim_{x\to -1} \frac{x+\sqrt{x+2}}{x+1}$

m) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-\sqrt{x}}}$

n) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$

6. *Determina, si existen, las asíntotas de cada una de las siguientes funciones:*

a) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

b) $g(x)=\frac{x^2}{x+2}$

c) $h(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$

d) $i(x)=\frac{2x^3-4x^2}{2x^2-1}$

e) $j(x)=\frac{2x^3+3}{x^3-9x}$

f) $k(x)=\frac{x^3+x^2-2}{x^2-3x-4}$

Unidad 2: CONTINUIDAD

1. CONCEPTO DE FUNCIÓN CONTINUA

1.1. Definiciones

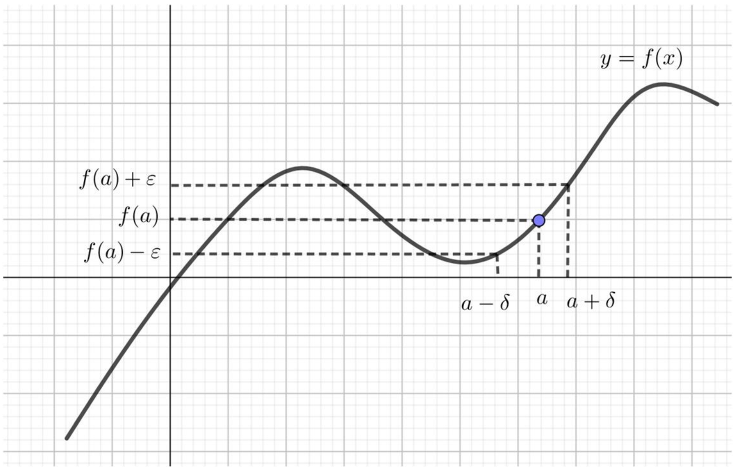
Definición:

Una función $y = f(x)$, que supondremos definida en un entorno de a, es continua en a, cuando

$\forall E(f(a)),\ \exists E(a)$ tal que si $x \in E(a) \Rightarrow f(x) \in E(f(a))$ (**definición topológica**)

o equivalentemente:

f continua en $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ (que depende de ε y de a): si $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (**definición métrica** o $\varepsilon - \delta$).



Definición/Caracterización:

Si f está definida en un intervalo[1] A, se tiene la siguiente caracterización, que también se suele usar como definición:

f es continua en $a \in A \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (**definición convergente**) (1)

Aclaraciones:

- Para que una función sea continua en un punto, *dicho punto ha de pertenecer a su dominio de definición*. En otro caso, no tiene sentido hablar de continuidad.

  No tiene sentido decir que la función $y = \dfrac{1}{x}$ no es continua en $x = 0$, por que dicho punto no pertenece a su dominio.

[1] Si A no es un intervalo, entonces hay que exigir que $a \in A \cap A'$ donde A' es el conjunto de puntos de acumulación de A.

- La condición (1) de continuidad implica:
  - $\exists f(a)$
  - $\exists \lim_{x\to a} f(x)$
  - Dichos valores coinciden: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Una <u>función</u> es <u>continua</u> cuando lo es en todos los puntos de su dominio de definición.

Una <u>función</u> es <u>continua por la derecha en un punto</u> si existe límite por la derecha en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$f \text{ continua en } x=a \text{ por la derecha} \Leftrightarrow \lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$$

Una <u>función</u> es <u>continua por la izquierda en un punto</u> si existe límite por la izquierda en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$f \text{ continua en } x=a \text{ por la izquierda} \Leftrightarrow \lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$$

<u>Caracterización:</u>

Una función es continua en un punto cuando es continua por la izquierda y por la derecha en ese punto:

$$f \text{ continua en } x=a \Leftrightarrow f \text{ continua por la derecha y por la izquierda en } x=a$$

<u>Definición:</u>

Una <u>función</u> es <u>continua en</u> $[a,b]$ cuando:

(1) Sea continua en el intervalo abierto (a,b)
(2) Sea continua por la derecha en a
(3) Sea continua por la izquierda en b

No suele ser tarea fácil demostrar que una función dada es continua, aunque a nosotros nos lo pueda parecer. Generalmente, lo que se hace es descomponer la función que queremos estudiar en otras más sencillas cuya continuidad ya es conocida previamente. Es por ello interesante saber qué tipo de operaciones realizadas con funciones continuas conducen a nuevas funciones continuas.

1.2. <u>Amplicación: estudio de la continuidad usando la definición</u> $\varepsilon-\delta$

(1) La función $f(x)=k$ con $k\in\mathbb{R}$, es continua en $\mathbb{R}$.

Para $a\in\mathbb{R}$ se verifica que $|f(x)-f(a)|=|x-a|=0<\varepsilon$ en cualquier entorno de a, por lo que la función constante es continua en $\mathbb{R}$.

(2) La función $f(x)=x$ es continua en $\mathbb{R}$.

Tomando $\delta=\varepsilon$, para $a\in\mathbb{R}$, si $|x-a|<\delta$, entonces $|f(x)-f(a)|=|x-a|<\delta=\varepsilon$, es decir, f es continua en a, $\forall a\in\mathbb{R}$ y, por tanto, es continua en $\mathbb{R}$.

(3) Demostremos la continuidad de la función $f(x)=x^2$ en $x=3$, usando la definición métrica.

En primer lugar, vamos a demostrar, aplicando la definición de límite, que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

Dado $\varepsilon > 0$, tenemos que hallar un $\delta > 0$ tal que, si $|x-3| < \delta$, entonces $|x^2 - 9| < \varepsilon$.

Como un punto próximo a 3 se puede escribir en la forma $x = 3 + h$ con $h \neq 0$, se tiene que

$$\left|(3+h)^2 - 9\right| = \left|6h + h^2\right| = |h||6+h| < 7|h|$$

siempre que $|h| < 1$.

Por tanto, tomando $|h| < \frac{\varepsilon}{7} = \delta$ si $\frac{\varepsilon}{7} < 1$ o $|h| = 1 = \delta$ si $\frac{\varepsilon}{7} > 1$, se tiene que $\left|(3+h)^2 - 9\right| < \varepsilon$, y como consecuencia, $f(x) = x^2$ es continua en $x = 3$.

(4) Estudiemos la continuidad de la función $f(x) = x^2$ en $a \in \mathbb{R}$. Si $0 < \delta \le 1$ y $|x-a| < \delta$, entonces,

$$\left|x^2 - a^2\right| = |x-a||x+a| = |x-a||x-a+2a| < |x-a|\left(2|x|+1\right)$$

y tomando

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|a|+1}\right)$$

se tiene que $\left|x^2 - a^2\right| < \delta\left(2|x|+1\right) < \varepsilon$, siempre que $|x-a| < \delta$ y, como consecuencia, f es continua en $a \in \mathbb{R}$.

(5) Veamos la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como

$$\left|f(x) - f(0)\right| = \left|f(x)\right| = \left|x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y queremos que sea menor que ε, tomamos $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Entonces, $|x-0| < \delta$ implica $x^2 < \delta^2 = \varepsilon$, y así,

$$|x-0| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(0)\right| < \varepsilon$$

esto es, f es continua en $x = 0$.

GeoGebra
Límite y continuidad de una función en un punto Autor:Ignacio Larrosa Cañestro Tema:Cálculo, Continuidad https://www.geogebra.org/m/ZAprW2qX

1.3. Amplicación: continuidad en puntos aislados y en puntos de acumulación

Se dice que $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ es un punto aislado, si $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \cap A = \{a\}$.

Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en todo punto aislado de A.

Demostración:

Si $a \in A \setminus A'$ (a es un punto aislado de A), $\exists \delta > 0$ (por definición de punto aislado) tal que $(a-\delta, a+\delta) \cap A = \{a\}$, luego dado $\varepsilon > 0$, para cada $x \in A$ con $|x-a| < \delta$, se tiene que $x = a$, y como consecuencia, $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. Es decir, f es continua en a.

Un punto $a \in A$ es un <u>punto de acumulación</u> de $A \subseteq \mathbb{R}$, y escribiremos $a \in A'$, si $\forall E^*(a)$ se tiene que $E^*(a) \cap D \neq \varnothing$.

<u>*Criterio práctico*</u>: siempre que exista un intervalo abierto de centro a contenido en A se tendrá que $a \in A'$.

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a \in A \cap A'$. Son equivalentes:

i) f es continua en a

ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

<u>*Demostración*</u>:

i) $\Rightarrow$ ii) Basta observar que si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de A distintos de a, con $\{x_n\} \to a$, la continuidad de f en a nos asegura que $\{f(x_n)\} \to f(a)$.

ii) $\Rightarrow$ i) Dado $\varepsilon > 0$, usando (ii) conseguimos un $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $0<|x-a| < \delta$, se tiene que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Ahora bien, si $x = a$, la última desigualdad es obvia, luego dicha desigualdad es cierta para todo $x \in A$ que verifique $|x-a| < \delta$, y como consecuencia tenemos la continuidad de f en a.

<u>2. OPERACIONES CON FUNCIONES CONTINUAS</u>

Si f y g son funciones continuas en el punto a, entonces:

- **Suma/resta**: $f+g$ y $f-g$ son continuas en a

En efecto:

$$\lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = f(a) \pm g(a) = (f \pm g)(a)$$

- **Producto**: fg es continua en a

En efecto:

$$\lim_{x \to a} (fg)(x) = \lim_{x \to a} \left[f(x) g(x) \right] = \lim_{x \to a} (x) \lim_{x \to a} g(x) = f(a) g(a) = (fg)(a)$$

- **Cociente**: $\dfrac{f}{g}$ es continua en a siempre que $g(a) \neq 0$

En efecto:

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g} \right)(a)$$

Si f es continua en a y g es continua en $b = f(a)$, entonces:

- **Composición**: $g \circ f$ es continua en a

En efecto:
Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad de g en $f(a)$, existe $\rho > 0$ tal que para todo $y \in \mathrm{Dom}(g)$ con $|y - f(a)| < \rho$ se tiene que $|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$. Ahora, por la continuidad de f en a, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$ con $|x - a| < \delta$ se tiene que $|f(x) - f(a)| < \rho$. Deducimos así que $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$ con $|x - a| < \delta$. Es decir, la función compuesta $g \circ f$ es continua en a.

3. CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Llamaremos «***funciones elementales***» a las funciones obtenidas al realizar sumas, productos, cocientes y composiciones de logaritmos, exponenciales, potencias y funciones trigonométricas.

- Las **funciones polinómicas**, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, son continuas en todos los puntos.
- Las **funciones racionales**, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, son continuas en su dominio de definición.
- La **función exponencial**, $y = e^{f(x)}$, es continua siempre que lo sea la $f(x)$.
- La **función logarítmica**, $y = \log f(x)$, es continua en todo punto x, tal que $f(x) > 0$ y $f(x)$ sea continua.
- Las **funciones trigonométricas**, $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$, son siempre continuas. La función $y = \operatorname{tg} x$ no es continua cuando $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- Las **funciones definidas a trozos** serán continuas si lo son en sus intervalos respectivos y en los puntos de unión. En estos puntos habrá que ver que la función esté definida y que los límites laterales existan, sean iguales y coincidan con el valor de la función en dicho punto.

<u>Ejemplos:</u>

(1) *Estudia la continuidad de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ *b)* $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} & \text{si} \quad x > 1 \\ k & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

a) Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio por ser funciones polinómicas.

Estudiamos la continuidad en los puntos de unión:
Continuidad en $x = -1$*: ¿*$\exists \lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$*?*
Para ver si existe el límite, estudiamos los límites laterales:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} |x+2| = 1 \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1^+} x^2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \to -1} f(x) = 1$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=-1$*:*

$f(-1)=(-1)^2=1$

Como $\exists \lim_{x\to -1} f(x)=1=f(-1)$*, se tiene que* f *es continua en* $x=-1$.

Continuidad en $x=1$*: ¿*$\exists \lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$*?*

Para ver si existe el límite, estudiamos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} x^2=1\\ \lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(2x+1)=3\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to -1} f(x)$$

Como $\nexists \lim_{x\to -1} f(x)$*, se tiene que* f *no es continua en* $x=1$.

Conclusión: f *es continua en* $\mathbb{R}-\{1\}$.

b) Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio, ya que la primera rama es un cociente con numerador bien definido y cuyo denominador no se anula, y la segunda rama es una función constante.

Estudiamos la continuidad en el punto de unión:

Continuidad en $x=1$*: ¿*$\exists \lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$*?*

Estudiamos si existe el límite: en este caso solo hay que estudiar el límite por la derecha.

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1+}\sqrt{\frac{x-1}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to 1+}\sqrt{\frac{1}{x-1}}=+\infty\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

Como $\nexists \lim_{x\to -1} f(x)$*, se tiene que* f *no es continua en* $x=1$.

Conclusión: $\nexists k\in\mathbb{R}$ *para que* f *sea continua en* $x=1$.

(2) *Calcula el valor de k para que la función* $f(x)$ *sea continua:* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si} \quad x>1\\ k & \text{si} \quad x=1\end{cases}$

Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio, ya que la primera rama es un cociente con numerador bien definido y cuyo denominador no se anula y la segunda rama es una función constante.

Estudiamos la continuidad en el punto de unión:

Continuidad en $x=1$*: ¿*$\exists \lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$*?*

Estudiamos si existe el límite: en este caso solo hay que estudiar el límite por la derecha.

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1+}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1+}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}\Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x)=2$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=1$*:*

$f(1)=k$

Imponemos que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ *y obtenemos:* $k=2$

Conclusión: para $k=2$ *la función* f *es continua en* $x=1$ *y, como consecuencia, en* $[1,+\infty)$.

(3) *Calcula a y b para que* $f(x)$ *sea continua en* $x=0$ y en $x=1$*:* $f(x)=\begin{cases} e^x+a & \text{si} \quad x\le 0 \\ ax^2+2 & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ \dfrac{b}{2x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

Continuidad en $x=0$*: ¿*$\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$*?*

Para ver si existe el límite, estudiamos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\left(e^x+a\right)=1+a \\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\left(ax^2+2\right)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{para que } \exists \lim_{x\to 0} f(x) \textit{ se tiene que cumplir que } 1+a=2$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=0$*:*

$f(0)=e^0+a=1+a$

Para que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$*, se tiene que cumplir que* $\boxed{1+a=2}$.

Continuidad en $x=1$*: ¿*$\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$*?*

Para ver si existe el límite, estudiamos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}\left(ax^2+2\right)=a+2 \\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{b}{2x}=\dfrac{b}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{para que } \exists \lim_{x\to 1} f(x) \textit{ se tiene que cumplir que } a+2=\frac{b}{2}.$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=1$*:*

$f(1)=a+2$

Para que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$*, se tiene que cumplir que* $\boxed{a+2=\dfrac{b}{2}}$.

Resolvemos el sistema $\begin{cases} 1+a=2 \\ a+2=\dfrac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow (a,b)=(1,6)$.

Conclusión: para $(a,b)=(1,6)$ *la función* $f(x)$ *es continua en* $x=0$ y en $x=1$.

(4) *Se considera la función* $f(x)=\begin{cases} \log x & \text{si} \quad 0<x<1 \\ ax^2+b & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$. *Determina los valores de a y b para que* $f(x)$ *sea continua y* $f(2)=3$.

Solución:

Para que f sea continua en $x=1$ (ya que cada una de las ramas lo es en su dominio, por se una función logarítmica bien definida y una función polinómica) se tiene que verificar:

$$\exists \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

Como además queremos que $f(2)=3$, hay que resolver el sistema correspondiente.

Continuidad en $x=1$*: ¿* $\exists \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ *?*

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \log x = 0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(ax^2+b\right) = a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \text{para que } \exists \lim_{x\to 1} f(x) \textit{ se tiene que cumplir que } a+b=0.$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=1$*:*

$f(1)=a+b$

Para que $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$*, se tiene que cumplir que* $\boxed{a+b=0}$.

Como, además $f(2)=3$, se tiene que $\boxed{4a+b=3}$

Resolvemos el sistema correspondiente: $\begin{cases} a+b=0 \\ 4a+b=3 \end{cases} \Rightarrow (a,b)=(1,-1)$

Conclusión: para $(a,b)=(1,-1)$ *se verifican las condiciones del enunciado.*

Ejercicios:

1. *Estudia la continuidad de esta función según los valores de a.*

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si } x\le 1 \\ x^2-ax+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

2. *Calcula a y b para que sea continua la siguiente función:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{si} \quad x\le -1 \\ b & \text{si} \quad -1<x<3 \\ 2x+4 & \text{si} \quad x\ge 3 \end{cases}$$

3. *Sea* $f(x)=\begin{cases} -x-4 & \text{si} \quad x<c \\ -3 & \text{si} \quad c\le x\le 0 \\ x^2-10x & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$. *¿Para qué valor de* c *la función* $f(x)$ *es continua en* $x=c$ *?*

4. *Consideremos la función* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & 0<x<b \\ 1-\dfrac{1}{4}x & b\le x \end{cases}$. *Determinar el valor de b para que sea continua.*

5. *Dada la función* $f(x)=\begin{cases} ax^2+3 & \text{si} \quad x\le -1 \\ bx+a & \text{si} \quad -1<x\le 1 \\ x^2-b & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$. *Halla a y b para que sea continua en* $\mathbb{R}$.

6. *Dada la función:*

$$f(x)=\begin{cases} a-x^2 & \text{si} \quad -2\le x\le 0 \\ e^x-a & \text{si} \quad 0<x\le 2 \end{cases}$$

Halla el valor de a para que la función sea continua en $[-2,2]$.

7. *Dada la función* $f(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{si} \quad x\le 1 \\ x^2+k & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$, *determina k para que* f *sea continua en x = 1.*

Ejercicio de selectividad

4. DISCONTINUIDADES: CLASIFICACIÓN

El ***criterio adoptado por la UCLM en la EvAU*** es el siguiente:

Una función es discontinua en un punto cuando falla alguna de las tres condiciones de la definición (convergente) de función continua en un punto.

Definición:

Clasificación de las discontinuidades en a:

i) **Evitable**

Diremos que f presenta una **discontinuidad evitable** cuando

$$\begin{cases} \nexists f(a) \text{ pero } \lim_{x\to a} f(x)\in\mathbb{R} \\ \text{o} \\ \lim_{x\to a} f(x)\ne f(a) \end{cases}$$

ii) **No evitable**

ii-1) **De primera especie**

Diremos que f presenta una **discontinuidad de salto** (finito o infinito) cuando $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$ ($\exists \lim_{x\to a-} f(x)=L$, $\exists \lim_{x\to a+} f(x)=L'$ y $L\ne L'$):

Finito, si $L, L'\in\mathbb{R}$. En este caso el salto es $|L-L'|$.

Infinito, si $\begin{cases} L = \pm\infty \\ L' \in \mathbb{R} \end{cases}$ o $\begin{cases} L \in \mathbb{R} \\ L' = \pm\infty \end{cases}$.

Diremos que f tiene una **discontinuidad asintótica** en a cuando $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$ porque los límites laterales son infinitos y distintos o $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

ii-2) **De segunda especie**

Diremos que f presenta una **discontinuidad de segunda especie o esencial**, cuando al menos uno de los límites laterales no exista.

$$\text{Función} \begin{cases} \text{Continua} \\ \text{Discontinua} \begin{cases} \text{Evitable} \\ \text{No evitable} \begin{cases} \text{De primera especie} \begin{cases} \text{De salto} \begin{cases} \text{Finito} \\ \text{Infinito} \end{cases} \\ \text{Asintótica} \end{cases} \\ \text{De segunda especie} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

<u>Ejemplos:</u>

(1) La función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} & x \neq 0 \\ 1 & \text{si} & x = 0 \end{cases}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$, ya que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left(x^2 + 1\right) = 2 \neq -1 = f(-1)$.

El valor verdadero de f en $x = 0$ es $f(0) = 0$.

(2) La función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si} & x \neq -1 \\ -1 & \text{si} & x = -1 \end{cases}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = -1$, ya que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x = 0 \neq 1 = f(1)$.

El valor verdadero de f en $x = -1$ es $f(-1) = 2$.

(3) La función «signo de x», $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} & x > 0 \\ 0 & \text{si} & x = 0 \\ -1 & \text{si} & x < 0 \end{cases}$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 0$, ya que $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim\limits_{x \to 0+} f(x)$.

(4) La función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} & x > 0 \\ 0 & \text{si} & x = 0 \\ -1 & \text{si} & x < 0 \end{cases}$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 0$, ya que $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim\limits_{x \to 0+} f(x)$.

(5) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\\ -1 & \text{si} \quad x<0\end{cases}$ tiene una discontinuidad de salto infinito en $x=0$, ya que $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=-1$.

(6) La función $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ tiene una discontinuidad asintótica en $x=0$, ya que

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=+\infty=\lim_{x\to 0+} f(x)$$

(7) La función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ tiene una discontinuidad asintótica en $x=0$, ya que

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=-\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0+} f(x)=+\infty$$

(8) La función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ (cuyo dominio es $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$) tiene discontinuidades de segunda especie en $x=-1$ y, en $x=1$, ya que:

$$\lim_{x\to -1}\sqrt{x^2-1}\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1-}\sqrt{x^2-1}\\ \nexists \lim\limits_{x\to -1+}\sqrt{x^2-1}\end{cases} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1}\sqrt{x^2-1}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1+}\sqrt{x^2-1}\\ \nexists \lim\limits_{x\to 1-}\sqrt{x^2-1}\end{cases}$$

(9) La función $f(x)=\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ tiene una discontinuidad esencial en $x=0$, ya que los límites laterales no existen.

<u>Ejercicios de selectividad</u>

<u>5. TEOREMA DE BOLZANO Y DE WEIERSTRASS</u>

Teorema de Bolzano[2] o Teorema de los ceros de Bolzano:

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario $[\text{signo } f(a)\neq \text{signo } f(b)]$, entonces $\exists c\in(a,b): f(c)=0$.

<u>Demostración:</u>

Sea $A=\{x\in[a,b]: f(x)<0\}$. Como $a\in A$, se tiene que $A\neq\varnothing$ y además está acotado superiormente por b, luego tiene supremo:

$$\sup A := c$$

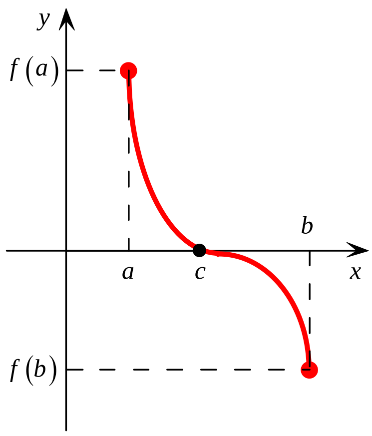
[2] *Bernhard Bolzano*: Filósofo, lógico y matemático checo nacido en Praga. Después de ordenarse sacerdote enseñó filosofía y religión en la Universidad, aunque, en 1820, acusado de racionalista, se le expulsó. El teorema que ahora nos ocupa es de 1817, y como la mayoría de sus resultados fueron redescubiertos a finales del S. XIX.

que verifica: $a \leq c \leq b$
Por otra parte, en todo intervalo de la forma $(c-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, tiene que haber puntos en los que f tome valores negativos, pues en caso contrario c no podría ser el supremo de A.
Falta demostrar que $f(c) = 0$.
Supongamos que $f(c) < 0$. Entonces, existirá un entorno de c, en el que f tomará valores negativos, lo cual implicará la existencia de puntos a la derecha de c en los que f sería negativa !! (contradicción), ya que c es el supremo de A.
Análogamente, si $f(c) > 0$.
Por tanto,

$$f(c) = 0$$

C.Q.D.

Interpretación geométrica: Si $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$, y se debe dibujar una curva desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ sin levantar el lápiz del papel, dicha curva debe cortar, al menos una vez, al eje OX.



Ejemplos:

1. Demostrar que la ecuación $e^{-x} + 2 = x$ tiene al menos una solución real.
La función $f(x) = e^{-x} + 2 - x$ es continua en $\mathbb{R}$, por ser suma de funciones continuas, y en particular es continua en $[0,3]$. Como además $f(0) = 3 > 0$ y $f(3) < 0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c \in (0,3) : f(c) = 0$, esto es, $\exists c \in (0,3) : e^{-c} + 2 - x = 0$ (es decir, c es una solución real de la ecuación inicial).

2. Demostrar que existe al menos un número real x tal que $\operatorname{sen} x = x$.
Consideramos la función $f(x) = \operatorname{sen} x - x$ que es continua en $\mathbb{R}$, por ser suma de funciones continuas, y en particular es continua en $[-\pi, \pi]$. Como además $f(-\pi) = \pi > 0$ y $f(\pi) = -\pi < 0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c \in (-\pi, \pi) : f(c) = 0$, esto es, $\exists c \in (-\pi, \pi) : \operatorname{sen}(c) - c = 0$ (es

decir, c es una solución real de la ecuación inicial). Como consecuencia, $\exists x \in (-\pi, \pi)$ (que es c) tal que $\operatorname{sen} x = x$.

3. Como aplicación del Teorema de Bolzano prueba que las funciones $f(x) = \log x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en un punto.

Consideramos la función $h(x) = f(x) - g(x) = \log x - e^{-x}$ que es continua en $\mathbb{R}^+$, por ser diferencia de funciones continuas, y en particular es continua en $[1,2]$. Como además $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c \in (1,2) : h(c) = 0$, esto es, $(c, h(c))$ es el punto de corte de ambas funciones.

4. ¿Tiene la ecuación $x^5 - 3x = 1$ alguna solución comprendida entre 1 y 2?

Consideramos la función $f(x) = x^5 - 3x - 1$ que es continua en $\mathbb{R}$, por una función polinómica, y en particular es continua en $[1,2]$. Como además $f(1) = -3 < 0$ y $f(2) = 25 > 0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c \in (1,2) : f(c) = 0$, esto es, la ecuación dada tiene una solución en el intervalo pedido.

5. Probar que la ecuación $\operatorname{cotg} x = x$ tiene al menos una solución en el intervalo c$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Consideramos la función $f(x) = \operatorname{cotg} x - x$, que verifica:

- Es continua en $\mathbb{R} - \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$, luego continua en $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.

Por el teorema de Bolzano, $\exists c \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, la ecuación $\operatorname{cotg} x = x$ tiene al menos una solución en dicho intervalo.

6. ¿Se puede aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$?

La función f es continua en $\mathbb{R}$, luego en particular lo es en cualquier intervalo cerrado. Sin embargo como $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, no se puede aplicar el teorema de Bolzano, ya que no existe ningún intervalo $[a,b]$ en el que $signo(f(a)) \neq signo(f(b))$.

Ejercicios de selectividad

Teorema de Weierstrass:

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, entonces

$$\exists c, d \in [a,b] : f(c) \le f(x) \le f(d) \qquad \forall x \in [a,b].$$

Demostración:

Sea $B=\{f(x): x\in[a,b]\}$. Se tiene que $B\neq\varnothing$ y acotado superiormente, luego $\sup B=\alpha$.

Vamos a probar que existe al menos un punto $d\in[a,b]$ tal que $f(d)=\alpha$.

Supongamos que $\nexists d\in[a,b]$ tal que $f(d)=\alpha$, es decir, $\forall x\in[a,b]$ se tiene que $f(x)\neq d$. En esta situación consideramos la función $g(x)=\dfrac{1}{\alpha-f(x)}$, que es continua en $[a,b]$, ya que es cociente de funciones continuas y el denominador no se anula.

Ahora bien, como $\alpha=\sup\{f(x): x\in[a,b]\}$, existen números de $f(x)$ tan próximos a α como se quiera, lo que implica que $\alpha-f(x)$ se puede acercar a cero tanto como se quiera, por lo que $\dfrac{1}{\alpha-f(x)}$ se puede hacer más grande que cualquier número, lo que implica que g no está acotada superiormente en $[a,b]$, en contradicción con el hecho de al ser g continua, g está acotada en $[a,b]$

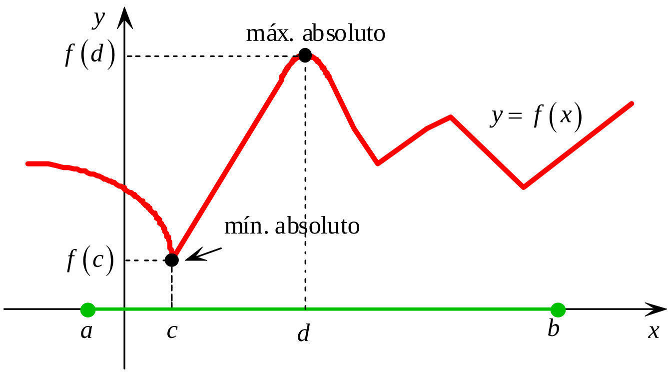
Por tanto, $\exists d\in[a,b]$ tal que $f(d)=\alpha$, es decir, $f(d)$ es el máximo valor de f en $[a,b]$.

De forma análoga se demuestra que $\exists c\in[a,b]$ tal que $f(c)=f(x)$ $\forall x\in[a,b]$.

C.Q.D.

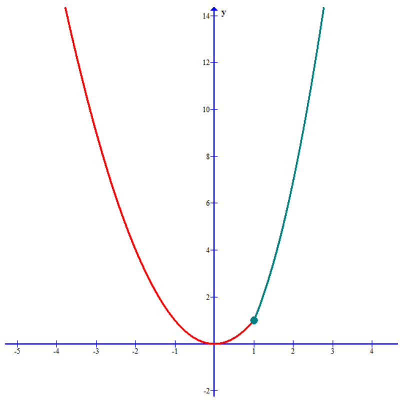
Reformulación del Teorema de Weierstrass:

Una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo en dicho intervalo.

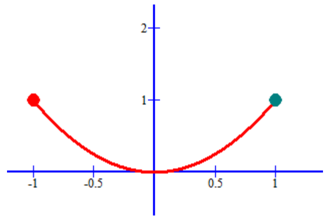


Ejemplos:

1. Consideramos la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x<1 \\ 2x^2-2 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$ y la representamos gráficamente:



Teniendo en cuenta la representación gráfica, f es continua en $\mathbb{R}$ (se puede comprobar analíticamente) y, por tanto, lo es en cualquier intervalo cerrado que consideremos, por ejemplo, en $[-1,1]$.



El teorema de Weiertrass afirma que f tiene, al menos un máximo y un mínimo absolutos en dicho intervalo.
En nuestro caso, tiene:
Máximos absolutos: $(-1,1)$ y $(1,1)$

Mínimo absoluto: $(0,0)$

2. La función $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$, luego verifica el teorema de Weierstrass en cualquier intervalo cerrado que no contenga al cero. Por ejemplo, en $[1,2]$.

Como consecuencia del teorema de Weierstrass, la función $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$ tiene, al menos, un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo $[1,2]$.

<u>Nota:</u> Hay que observar que dicho teorema nos dice que dichos extremos absolutos existen, pero no nos dice nada de dónde están.

Unidad 3:
DERIVADAS

1. TASA DE VARIACIÓN

Muchas leyes de la Física, la Química, la Biología o la Economía, son funciones que relacionan una variable «dependiente» *y* con otra variable «independiente» *x*, lo que suele escribirse en la forma $y = f(x)$. Si la variable independiente cambia de un valor inicial *a* a otro *x*, la variable *y* lo hace de *f* (*a*) a *f* (*x*). La *razón de cambio promedio (o tasa de variación media) de* $y = f(x)$ *con respecto a x en el intervalo* $[a, x]$ *es:*

$$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \equiv \text{Tvm}[a, x]$$

Con frecuencia interesa considerar la razón de cambio en intervalos cada vez más pequeños. Esto lleva a definir lo que podemos llamar «*razón de cambio puntual* (*o instantánea*) de $y = f(x)$ *con respecto a x en el punto a» como:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \equiv \text{Tvi}(a)$$

2. CONCEPTO DE DERIVADA

Definición:

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a \in A \cap A'$. Entonces

$$f \text{ es derivable en } x = a \Leftrightarrow \exists \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$$

o equivalentemente, si

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$$

en cuyo dicho límite, caso de existir, se representa[3] por: $f'(a) = \dfrac{df(a)}{dx} = \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=a}$

$f'(a)$ se lee f prima en a (derivada de f en a)

$\dfrac{df(a)}{dx}$ se lee derivada de f respecto de x en a

[3] La notación $\dfrac{d}{dx} f(a)$ fue introducida por Leibniz (1646-1716), y en ella se entiende que $\dfrac{d}{dx}$ es un operador, mientras que la notación $f'(a)$ fue introducida por Lagrange (1736-1813), la notación $Df(a)$ fue introducida por Augustin Louis Cauchy (1789-1857) y la notación $\dot{f}(a)$ se suele usar en física, ingeniería… y fue introducidad por Newton.

Ejemplos:

(1) Calculamos la derivada de $f(x)=x^2-5x$ en $x=3$:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-5(3+h)-(9-15)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0}(h+1)=1$$

(2) Calculamos la derivada de $g(x)=\sqrt[3]{x}$ en $x=0$:

$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty$$

es decir, $\nexists g'(0)$ y, por tanto, g no es derivable en $x=0$.

(3) Calculamos $f'(0)$ para $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+|h|}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{1+|h|}=1$$

(4) Calculamos $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ para $f(x)=\cos x$:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(h)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}=1$$

Definición:

2.1. Derivadas laterales

f derivable por la izquierda en $x=a \Leftrightarrow \exists f'(a-)=\lim_{x\to a-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R}$

f derivable por la derecha en $x=a \Leftrightarrow \exists f'(a+)=\lim_{x\to a+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R}$

Caracterización:

f es derivable en $x=a \Leftrightarrow \exists f'(a-),\ f'(a+)$ y $f'(a-)=f'(a+)$

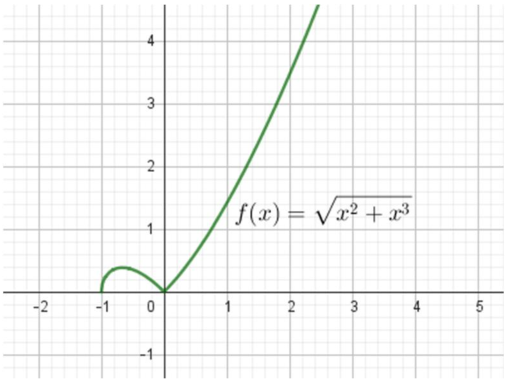
Ejemplos:

(1) Estudiamos la derivabilidad de la función $f(x)=\sqrt{x^2+x^3}$ en $a=0$:

$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{h^2+h^3}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{h^2(1+h)}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\cancel{h}\sqrt{1+h}}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0+}\sqrt{1+h}=1$$

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{h^2+h^3}}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{h^2(1+h)}}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{|h|\sqrt{1+h}}{h}=-1$$

Por tanto, f no es derivable en $a=0$.



(2) Estudiamos la derivabilidad de $f(x)=x-1+\left|4-x^2\right|$ en $a=-2$:

En primer lugar, escribimos la función, como una función definida a trozos:

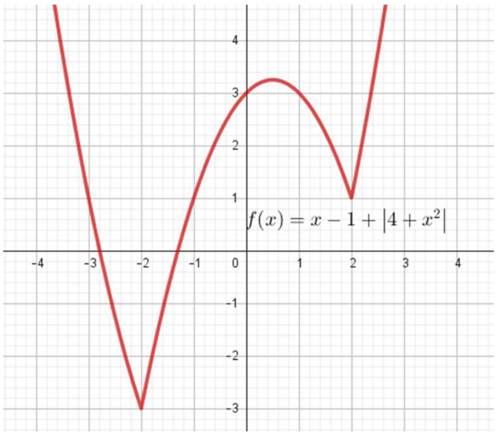
$$f(x)=x-1+\left|4-x^2\right|=\begin{cases}x-1+4-x^2 & \text{si} \quad |x|\le 2\\ x-1-4+x^2 & \text{si} \quad |x|>2\end{cases}=\begin{cases}-x^2+x+3 & \text{si} \quad |x|\le 2\\ x^2+x-5 & \text{si} \quad |x|>2\end{cases}$$

Ahora, calculamos las derivadas laterales:

$$f_+'(-2)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{(-2+h)^2+(-2+h)-5+3}{h}=\lim_{h\to 0+}(h-3)=-3$$

$$f_-'(-2)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-(-2+h)^2+(-2+h)+3+5}{h}=\lim_{h\to 0-}(-h+5h)=5$$

Como consecuencia, f no es derivable en $a=-2$.



(3) Estudiamos la derivabilidad de $f(x)=x^2|x|$ en $a=0$:

Escribimos la función en forma de función definida a trozos:

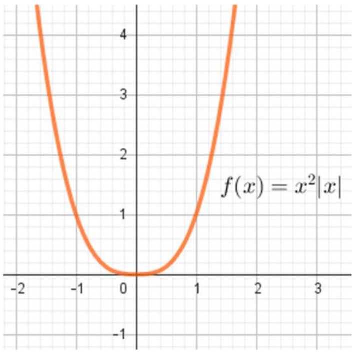
$$f(x)=x^2|x|=\begin{cases}-x^3 & \text{si} \quad x\le 0\\ x^3 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

Ahora, estudiamos la derivabilidad lateral:

$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^3}{h}=\lim_{h\to 0+}h^2=0$$

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h^3}{h}=\lim_{h\to 0-}\left(-h^2\right)=0$$

Por tanto, f es derivable en $a=0$ y $f'(0)=0$



(4) Estudiamos la derivabilidad de $f(x)=\sqrt{x}$ en $a=0$:

$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^{1/2}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h^{1/2}}=+\infty$$

Como consecuencia, f no es derivable en $a=0$.

(5) Estudiamos la derivabilidad en $x=0$ de la siguiente función: $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ e^x & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

Calculamos las derivadas laterales:

- Derivada por la izquierda: $f'(x-)=-2x \Rightarrow f'(0-)=0$
- Derivada por la derecha: $f'(x+)=e^x \Rightarrow f'(0+)=e^0=1$

Existen las derivadas laterales en $x=0$ pero no son iguales y, por tanto, f no es derivable en $x=0$.

2.2. <u>Derivabilidad y continuidad</u>

<u>Propiedad 1:</u>

Si una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es derivable en un punto a entonces es continua en a.

<u>Demostración:</u>

Si f es derivable en a, de la igualdad

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (x\neq a)$$

se sigue que $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, es decir, f es continua en a.

C.Q.D.

El recíproco es falso:

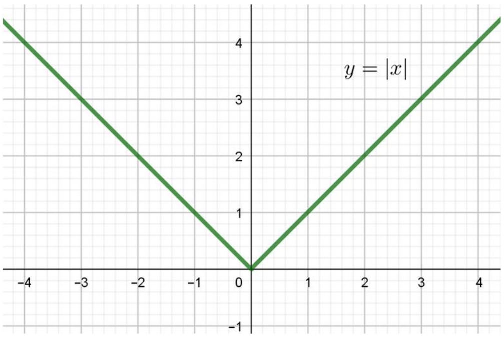
<u>Contraejemplo</u>*:* La función $f(x)=|x|$ es continua en $x_0=0$ pero no es derivable en dicho punto.

Continuidad en $x_0=0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}|x|=\lim\limits_{x\to 0-}(-x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}|x|=\lim\limits_{x\to 0+} x=0\end{array}\right\}\Rightarrow \exists\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$$ y $f(0)=|0|=0$, luego $f(x)$ es continua en $x_0=0$.

Derivabilidad en $x_0=0$:

$$\left.\begin{array}{l}f'(0-)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{-x}{x}=-1\\ f'(0+)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{x}=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$ no existe $f'(0)$ y, por tanto, $y=|x|$ no es derivable en $x_0=0$.



Resumiendo:

- f es continua en 0
- f no es derivable en 0
- La gráfica de f no tiene recta tangente en 0

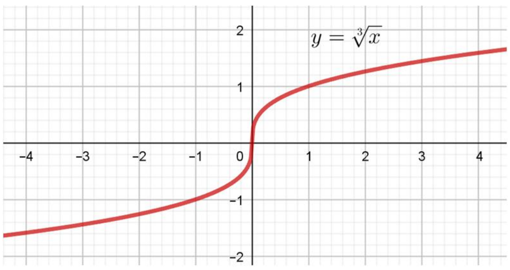
__Otro contraejemplo más__: La función $y=\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$ es continua en $x_0=0$ pero no es derivable en dicho punto.

Continuidad en $x_0=0$:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^{1/3}=0=f(0)$, luego $f(x)$ es continua en $x_0=0$.

Derivabilidad en $x_0=0$:

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{1/3}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2/3}}=\left[\dfrac{1}{0}\right]=+\infty\Rightarrow\nexists f'(0)$, y, por tanto, $y=x^{1/3}$ no es derivable en $x_0=0$.



Resumiendo:

- f es continua en 0
- f no es derivable en 0
- La gráfica de f tiene una recta tangente vertical en 0

Este resultado también se puede utilizar en *sentido negativo*:

__Propiedad 1':__
Si f no es continua en a, entonces no puede ser derivable en dicho punto.

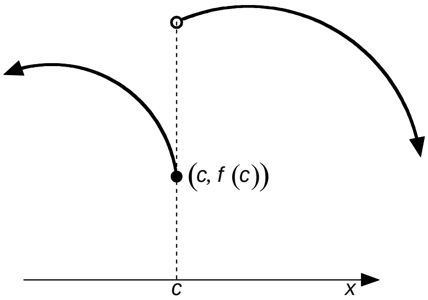
Como consecuencia, *siempre que nos pidan estudiar la derivabilidad de una función, comenzaremos por estudiar su continuidad*.

Resumen:

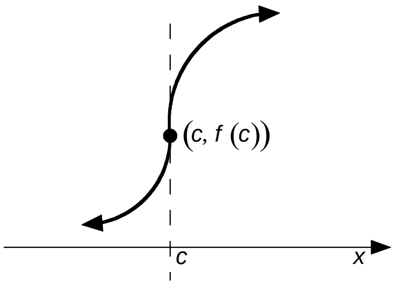
$$\boxed{f \text{ derivable en } x_0 \Rightarrow f \text{ continua en } x_0}$$

$$\boxed{f \text{ NO continua en } x_0 \Rightarrow f \text{ NO derivable en } x_0}$$

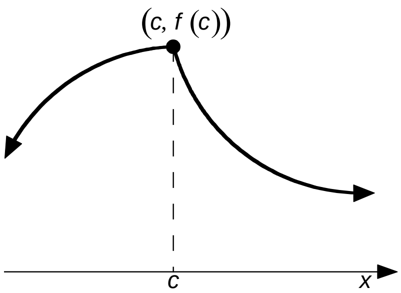
Gráficamente las <u>*situaciones en las que una función no es derivable*</u> en un punto son:



f no es continua en c $\Rightarrow$ f no es derivable en c



f es continua en c, pero la gráfica de f tiene una recta tangente vertical en c $\Rightarrow$ f no es derivable en c



f es continua en c, pero la gráfica de f no tiene recta tangente en c (ya que tiene un «pico») $\Rightarrow$ f no es derivable en c

Los puntos en los que la gráfica de la función tiene «picos» se denominan **puntos angulosos**, y en ellos se verifica:

$$f'(x_0-) \neq f'(x_0+)$$

2.3. <u>Operaciones con funciones derivables</u>

<u>Suma</u>

La función derivada de una suma de funciones derivables es la suma de las funciones derivadas:

$$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)}$$

<u>*Demostración:*</u>

$$(f+g)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

<u>Producto por un número real</u>

La función derivada del producto de una constante por una función derivable es la constante por la función derivada de la función:

$$\boxed{(\alpha f)'(x)=\alpha\cdot f'(x)}$$

<u>Demostración:</u>

$$(\alpha f)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(\alpha f)(x+h)-(\alpha f)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\alpha f(x+h)-\alpha f(x)}{h}=$$
$$=\alpha\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\alpha f'(x)$$

<u>Producto de funciones</u>

La función derivada de un producto de funciones derivables es igual a la derivada del primer factor por el segundo sin derivar más el primer factor si derivar por la derivada del segundo factor:

$$\boxed{(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$$

<u>Demostración:</u>

$$(f\cdot g)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\lim_{h\to 0}g(x+h)+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\lim_{h\to 0}f(x)=$$
$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

<u>Función recíproca de una función</u>

La derivada de la función recíproca de una función derivable viene dada por:

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=\frac{-f'(x)}{f(x)^2}}$$

<u>Demostración:</u>

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x+h)-\left(\frac{1}{f}\right)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+h)}-\frac{1}{f(x)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(x+h)}{f(x+h)f(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h\big(f(x)f(x+h)\big)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\big(f(x+h)-f(x)\big)}{h}\frac{1}{f(x+h)f(x)}=-f'(x)\frac{1}{f(x)f(x)}=\frac{-f'(x)}{f(x)^2}$$

Cociente de funciones

La función derivada de un cociente de funciones derivables es igual al cociente de la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, entre el denominador al cuadrado:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$$

Demostración:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\left(f\,\frac{1}{g}\right)'(x)=f'(x)\frac{1}{g}(x)+f(x)\frac{-g(x)}{g(x)^2}=\frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2}=$$

$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Composición de funciones: regla de la cadena

Sean $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:B\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones reales de variable real con $f(A)\subseteq B$. Supongamos que *f* es derivable en *a* y que *g* es derivable en $b=f(a)$. Entonces:

$$\boxed{(g\circ f)'(a)=g'\big(f(a)\big)f'(a)}$$

Demostración:

Sea $h=g\circ f$. Hay que probar que $\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=g'(b)f'(a)$.

Por hipótesis,

$$\lim_{y\to b}\frac{g(y)-g(b)}{y-b}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=g'(b)f'(a)$$

La idea es hacer en esta igualdad la sustitución $y=f(x)$. Definimos

$$\varphi:B\to\mathbb{R}$$

$$\varphi(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(b)}{y-b} & y\neq b\\[2mm] g'(b) & y=b\end{cases}$$

que es una función continua.

Se tiene que $\forall x\in A$ con $x\neq a$

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\varphi\big(f(x)\big)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\qquad [1]$$

y como f es continua en a y φ es continua en $b = f(a)$, se sigue que $\varphi \circ f$ es continua en a, por lo que

$$\lim_{x\to a} \varphi\left(f(x)\right) = \varphi\left(f(a)\right) = \varphi(b) = g'(b)$$

La igualdad [1] nos dice ahora que

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = g'(b)\, f'(a) \qquad \text{C.Q.D.}$$

3. TABLAS DE DERIVADAS

A modo de ejemplo calcularemos las funciones derivadas de algunas funciones elementales. A la vez que practicamos y afianzamos el cálculo de derivadas aplicando la definición, también nos sirve para construir la conocida tabla de derivadas y que esta no aparezca como por arte de magia.

1) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=c$ es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$. Su derivada viene dada por:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{c-c}{x-a} = 0$$

2) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x$ es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$ y su derivada es:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a} = 1$$

3) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n$ es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$. Para calcular su función derivada utilizaremos la fórmula del binomio de Newton:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n - a^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{\binom{n}{0}a^n h^0} + \binom{n}{1}a^{n-1}h + \ldots + \binom{n}{n-1}ah^{n-1} + \binom{n}{n}a^0h^n - \cancel{a^n}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{na^{n-1}h + \binom{n}{2}a^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ah^{n-1} + \binom{n}{n}ah^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left[na^{n-1} + \binom{n}{2}a^{n-2}h + \ldots + \binom{n}{n-1}ah^{n-2} + \binom{n}{n}ah^{n-1}\right]}{\cancel{h}} = na^{n-1}$$

4) La función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$, es derivable en cualquier $a\in(0,+\infty)$. Su derivada es:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} =$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{(x-a)\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

5) La función exponencial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$, es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{a+h}-e^a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^a\left(e^h-1\right)}{h}=e^a$$

teniendo en cuenta que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

6) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{sen}x,$ es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen}a}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h}=\cos a$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}y=2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

y que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1$$

7) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x,$ es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$. Su función derivada se puede obtener teniendo en cuenta que $\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\quad\forall x\in\mathbb{R}$ y aplicando la regla de la cadena:

$$f'(a)=-\cos a$$

8) La función $\begin{array}{l}\operatorname{tg}:\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}\\ \qquad x\mapsto\operatorname{tg}x\end{array}$ es derivable en cualquier punto de su dominio y su derivada viene dada por:

$$\operatorname{tg}'x=\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)'(x)=\frac{\cos x\cos x-\operatorname{sen}x(-\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2x=\sec^2 x$$

9) La función $\begin{array}{l}\log_a:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\\ \qquad x\mapsto\log_a x\end{array}$ es derivable en cualquier $x_0\in(0,+\infty)$. Su función derivada viene dada por:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x_0+h)-\log_a x_0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\frac{x_0+h}{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{x_0}{x_0}\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x_0}\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}=$$

$$=\frac{1}{x_0}\log_a\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right)=\frac{1}{x_0}\log_a\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{h}}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right)=\frac{1}{x_0}\log_a e$$

En particular la función $\begin{array}{c}\log_a:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\log_a x\end{array}$ es derivable en cualquier $x_0\in(0,+\infty)$, y su derivada viene dada por: $\ln' x=\dfrac{1}{x}$

10) La función $\begin{array}{c}\operatorname{arcsen}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ x\mapsto\operatorname{arcsen}x\end{array}$ es derivable en cualquier $x_0\in(-1,1)$. Su función derivada viene dada por:
Como $y=\operatorname{arcsen}x$ equivale a que $x=\operatorname{sen}y$, derivando esta última igualdad (aplicando la regla de la cadena):

$$1=y'\cdot\cos y\Rightarrow y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

11) La función $\begin{array}{c}\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]\\ x\mapsto\arccos x\end{array}$ es derivable en cualquier $x_0\in(-1,1)$. Su función derivada viene dada por:
Como $y=\arccos x$ equivale a que $x=\cos y$, derivando esta última igualdad (aplicando la regla de la cadena):

$$-1=y'\cdot\operatorname{sen}y\Rightarrow y'=\frac{-1}{\operatorname{sen}y}=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

12) La función $\begin{array}{c}\operatorname{arctg}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\\ x\mapsto\operatorname{arctg}x\end{array}$ es derivable en cualquier $x_0\in\mathbb{R}$. Su función derivada viene dada por:
Como $y=\operatorname{arctg}x$ equivale a que $x=\operatorname{tg}y$, derivando esta última igualdad (aplicando la regla de la cadena):

$$1=\left(1+\operatorname{tg}^2 y\right)\cdot y\Rightarrow y'=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

Tabla de derivadas (de funciones simples)

Función	**Derivada**
$y = c \in \mathbb{R}$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y = a^x$ con $a > 0$	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x} \log_a e$
$y = \log x \equiv \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y = -\operatorname{sen} x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$y = \operatorname{arcsen} x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Ejemplo de aplicación:

Vamos a calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$:

Consideramos $f(x) = \operatorname{sen} x$. Se tiene que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\cos 0=1$$

Ejercicio:

1. *Calcula la derivada de las siguientes funciones:*

1) $f(x)=7x^5-2x^3+3x^2-4$

2) $f(x)=5x^4+3x^2+2x-7$

3) $f(x)=(3x-1)(5x^2+3x-2)$

4) $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{7x+1}$

5) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}+\sqrt[3]{x}$

6) $f(x)=\left(x-\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)$

7) $f(x)=\dfrac{(3x-1)(2x+3)}{x^2+7}$

8) $f(x)=(5x^2-3x+1)\dfrac{2x}{5x+3}$

9) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt{x^5}$

10) $f(x)=\dfrac{(3x-1)^2-(3x+1)^2}{2-x^2}$

11) $f(x)=\dfrac{1}{3x^2-5x+2}$

12) $f(x)=\dfrac{1}{5x-3}(3x^2-x+2)$

13) $f(x)=(x^2+3x)\ \text{sen}\,x$

14) $f(x)=3^x$

15) $f(x)=\dfrac{x\ \text{tg}\,x}{x+1}$

16) $f(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\ \text{sen}\,x}{1+\text{tg}\,x}$

17) $f(x)=\text{tg}\,x\ \text{sen}\,x$

18) $f(x)=\cos x\ \text{tg}\,x$

19) $f(x)=e^x\ \text{tg}\,x$

20) $f(x)=2^x\ln x$

21) $f(x)=e^x\log_{10}x$

22) $f(x)=\log_5 x\ \cos x$

23) $f(x)=\dfrac{\text{sen}\,x}{\text{tg}\,x}$

24) $f(x)=\dfrac{2^x}{\ln x}$

25) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$

26) $f(x)=\text{sen}\,x\cos x$

27) $f(x)=\text{sen}\,x+e^x\ \text{sen}\,x$

28) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x+\cos x}$

29) $f(x)=\dfrac{3^x\ \text{sen}\,x}{2x+e^x}$

30) $f(x)=\log_5 x\ \log_7 x$

31) $f(x)=e^x\ \text{sen}\,x$

32) $f(x)=5^x\ \text{arctg}\,x$

Aplicando la regla de la cadena, obtenemos la siguiente tabla de derivadas para funciones compuestas:

Tabla de derivadas, para funciones compuestas

Función	**Derivada**

$y = f(x)^n$	$y' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{2 \cdot \sqrt{f(x)}}$
$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
$y = a^{f(x)}$ con $a > 0$	$y' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$
$y = e^{f(x)}$	$y' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$
$y = \log_a f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \cdot \log_a e$
$y = \ln f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \operatorname{sen} f(x)$	$y' = f'(x) \cdot \cos f(x)$
$y = \cos f(x)$	$y' = -f'(x) \cdot \operatorname{sen} f(x)$
$y = \operatorname{tg} f(x)$	$y' = f'(x) \cdot \left[1 + \operatorname{tg}^2 f(x)\right]$
$y = \operatorname{arcsen} f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$
$y = \arccos f(x)$	$y' = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$
$y = \operatorname{arctg} f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{1 + f(x)^2}$

Ejercicios:

2. *Calcula la derivada de las siguientes funciones:*

1) $f(x) = \operatorname{sen}\left(2x^2 - 3x\right)$
2) $f(x) = \ln(3x+1)$
3) $f(x) = e^{5x}$
4) $f(x) = \operatorname{tg}(2-3x)$
5) $f(x) = \left(x^2 - 5x + 2\right)^7$
6) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$
13) $f(x) = \left(x^2 + 1\right)^5$
14) $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$
15) $f(x) = \operatorname{sen}\left(x^3\right)$
16) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$
17) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(5x+2)}{\cos(3x-1)}$
18) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cos x$

7) $f(x)=3^{1+\operatorname{sen}x+\cos x}$
8) $f(x)=\log_7(4+\operatorname{sen}x)$
9) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$
10) $f(x)=\operatorname{tg}^3 x$
11) $f(x)=3^{x^2+2}\ \operatorname{sen}x$
12) $f(x)=(3x^2-2)\ \operatorname{sen}\ (5x)$
19) $f(x)=\log_5(3x+1)$
20) $f(x)=\ln(\operatorname{tg}x)$
21) $f(x)=\operatorname{sen}\ (\cos(3x))$
22) $f(x)=\sqrt{5x^2-3x+2}$
23) $f(x)=\sqrt[3]{(3-2x^2)^2}$
24) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-3x+1}$

3. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

1) $y=\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$
2) $y=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{2}{3}}$
3) $y=\dfrac{\ln x}{x}$
4) $y=3^x+1$
5) $y=\sqrt[3]{(5x-3)^2}$
6) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$
7) $y=\sqrt[3]{3x^2}$
8) $y=\dfrac{2}{x}+\dfrac{x^2}{2}$
9) $y=7e^{-x}$
10) $y=\operatorname{sen}x\cdot\cos x$
11) $y=\dfrac{1}{\operatorname{sen}x}$
12) $y=\ln(x^2+1)$
13) $y=(2\cdot\sqrt{x}-3)^7$
14) $y=\operatorname{sen}^2 x$
15) $y=\operatorname{sen}x^2$
16) $y=\operatorname{arctg}(x^2+1)$
17) $y=\log_2\left(\log\dfrac{1}{x}\right)$
18) $y=\log_2\sqrt{x}$
19) $y=\operatorname{sen}^2 x^2$
20) $y=\cos^5(7x^2)$
21) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$
22) $y=\ln(2x-1)$
23) $y=\operatorname{arcsen}\dfrac{x^2}{3}$
24) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x^2}{2}$
25) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}$
26) $y=\sqrt{\operatorname{tg}x}$

4. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\ln(x^2-1)$
b) $y=\arccos\sqrt{2x}$
c) $y=\ln\sqrt{1-x}$
d) $y=(\operatorname{arctg}x)^2$
h) $y=2^{x^2-\frac{1}{x}}$
i) $y=\operatorname{arcsen}\dfrac{x+1}{x-1}$
j) $y=\sqrt{\operatorname{tg}x^2}$

e) $y = \log_3(7x+2)$

f) $y = \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{3}{x}\right)$

g) $y = \ln\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)$

k) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+2}}$

l) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

m) $y = 5\cdot\operatorname{tg}^3\left(3x^2+1\right)$

Ejercicio curioso:
Obtención de la regla de derivación de un producto (regla de Leibniz), a partir de la derivada de la función logarítmica:

Sabemos que $\log(fg) = \log(f) + \log(g)$. Derivando, resulta:

$$\left[\log(fg)\right]' = (\log f)' + (\log g)' \Rightarrow \frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$$

y multiplicando por fg se obtiene:

$$(fg)' = g\cdot f' + f\cdot g' = f'\cdot g + f\cdot g'$$

Ejercicios de selectividad

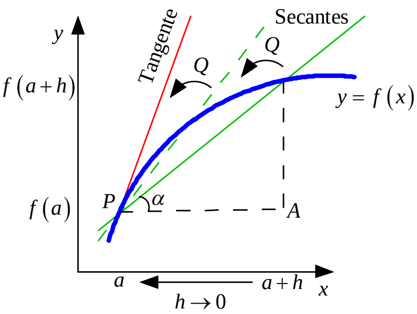
4. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Si f es continua en x_0, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P\left(x_0, f(x_0)\right)$ es:

i) la recta que pasa por P y tiene pendiente $m(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ si este límite existe, es decir, es un número real.

ii) la recta $x = x_0$ si $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty$

Aclaración: esta definición proviene del hecho de que la recta tangente a una función en un punto x_0 es el límite de la recta secante a la función, cuando el otro punto de corte de la recta secante y la función tiende a x_0.



Sea $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua y

$$P = \left(a, f(a)\right),\ Q = \left(a+h, f(a+h)\right)$$

dos puntos de su gráfica. Geométricamente se tiene que

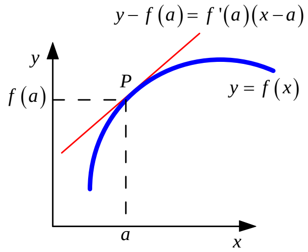
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \operatorname{tg}\,\alpha = m_{\text{secantes}}$$

que es el valor que mide la pendiente de la recta secante en los puntos P y Q a la curva.

Tomando límites en la igualdad anterior resulta:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\operatorname{tg}\alpha = \lim_{h\to 0} m_{\text{secantes}} \Leftrightarrow \boxed{f'(a) = \operatorname{tg}\alpha = m_{\text{tangente}}}$$

es decir, *la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto*.



Como consecuencia:

Ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $(a, f(a))$:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x-a)}$$

Ecuación de la recta normal a la curva $y = f(x)$ en $(a, f(a))$:

$$\boxed{y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a)}$$

Ejercicios de selectividad

5. INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA DERIVADA

Si $x(t)$ es la posición de un móvil en el instante de tiempo t, la velocidad media en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ viene dada por

$$v_m([t,t+h]) = \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

y la velocidad instantánea en el instante t se obtiene tomando límites, cuando $h \to 0$, en la expresión anterior:

$$v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} = x'(t)$$

Además, la derivada de la velocidad es la aceleración:

$$a(t) = v'(t) = x''(t)$$

Si la aceleración es cero, no hay cambio de velocidad con respecto al tiempo, es decir, la velocidad es constante. En este caso, la curva de x en función de t es una línea recta. Si la aceleración no es nula, pero constante, la velocidad varía linealmente con el tiempo y la curva de x en función de t es cuadrática con el tiempo.

En general, la derivada de la función $y = f(x)$ es el ritmo de cambio (velocidad) con que varía la magnitud y respecto de la magnitud x.

6. DERIVADAS SUCESIVAS

Sea I un intervalo y f una función derivable en *I*. Si f' es derivable en $a \in I$, a la derivada $(f')'(a)$ se le llama derivada segunda de f en a y se designa por $f''(a)$.

Si $\forall x \in I$ existe $f''(x)$, la función $x \mapsto f''(x)$ se llama función derivada segunda de f en I.

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

En general, definidas las funciones $f', \ldots, f^{n-1)} : I \to \mathbb{R}$, de tal modo que $f^{k)} = \left(f^{k-1)}\right)'$, para $k = 2, \ldots, n-1$, diremos que $f^{k)}$ es la <u>función derivada *k*-ésima</u> (o derivada de orden *k*) de f en I, que también se representa por: $f^{k)}(x) = \dfrac{d^k f}{dx^k}$

$$f^{n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{n-1)}(x+h) - f^{n-1)}(x)}{h}$$

Unidad 4:
APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

1. ESTUDIO GLOBAL Y LOCAL DE FUNCIONES

1.1. Monotonía de una función

Recordemos que salvo que expresamente se diga lo contrario, el conjunto D es un *intervalo abierto*.

Definiciones:

Una función $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente (resp. decreciente) en D cuando para cualesquiera $x, y \in D$ en la situación $x < y$, se verifica que $f(x) \leq f(y)$ (respectivamente $f(x) \geq f(y)$).

Una función $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) en D cuando para cualesquiera $x, y \in D$ en la situación $x < y$, se verifica que $f(x) < f(y)$ (respectivamente $f(x) > f(y)$).

Criterio de la derivada primera:

Si $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en D, y:

$$f'(x_0) \begin{cases} > 0 & \forall x_0 \in D \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente en } D \\ < 0 & \forall x_0 \in D \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente en } D \end{cases}$$

Demostración:

Si $f'(x_0) > 0 \ \forall x \in D$, entonces $f(x)$ es derivable en D y, como consecuencia, continua en D.

Además, si $x, y \in D$ con $x < y$, entonces f es continua en $[x, y]$ y derivable en (x, y), luego por el teorema del valor medio de Lagrange (que veremos más adelante) $\exists c \in (x, y)$ tal que $f'(x) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$, y como $f'(x) > 0$, resulta que $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0$. Ahora bien, como $x < y$ se tiene que $y - x > 0$ y, por tanto, ha de ser $f(y) - f(x) > 0$, es decir, $f(x)$ es estrictamente creciente en dicho intervalo.

Análogamente se demuestra que si $f'(x_0) < 0 \ \forall x \in D$, la función es estrictamente decreciente en *D*.

C.Q.D.

Definiciones:

Diremos que una función es monótona, cuando sea creciente o decreciente y estrictamente monótona, cuando sea estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Por tanto, **estudiar la monotonía de una función es estudiar el signo de** f'.

Ejercicio:

1. Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+1}$

b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$ d) $f(x)=\ln\sqrt{x^2+1}$

1.2. Extremos relativos (extremos locales o puntos críticos)

Definición:

Se dice que $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tiene un máximo (resp. mínimo) relativo en x_0 si $\exists E(x_0)$: $x\in E(x_0)\Rightarrow f(x)\leq f(x_0)$ (resp. $f(x)\geq f(x_0)$).

Las coordenadas del máximo (resp. mínimo) relativo son $(x_0, f(x_0))$.

Condición necesaria para la existencia de extremos relativos en funciones derivables:

Sea $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable en x_0 y supongamos que f tiene un extremo relativo en x_0. Entonces: $f'(x_0)=0$

Contraejemplo: *El recíproco no es cierto.*

La función $f(x)=x^3$ es derivable y $f'(0)=0$, y sin embargo, no tiene un extremo relativo en el origen, ya que es siempre creciente.

Condición necesaria y suficiente para que una función derivable posea un extremo relativo en un punto:

Sea $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función dos veces derivable en x_0. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)\neq 0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow f(x) \text{ tiene un extremo relativo en } x_0,$$

que es un $\begin{cases}\text{máximo relativo si } f''(x_0)<0 \\ \text{mínimo relativo si } f''(x_0)>0\end{cases}$

Demostración:

Sabemos que $f''(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$, y como $f'(x_0)=0$, resulta que $f''(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x_0+h)}{h}$. Si además, $f''(x_0)>0$, entonces $\dfrac{f'(x_0+h)}{h}>0$ para h suficientemente pequeño.

A la izquierda de x_0, se tiene que $h<0$ y, por tanto, $f'(x_0+h)<0$. Aplicando el criterio de la derivada primera, f es decreciente a la izquierda de x_0.

A la derecha de x_0, se tiene que $h>0$ y, por tanto, $f'(x_0+h)>0$. Aplicando el criterio de la derivada primera, f es creciente a la derecha de x_0.

Así, necesariamente f tiene un mínimo relativo o local en x_0.

Análogamente se rezona si $f''(x_0)<0$.

C.Q.D.

Ejercicio:

2. Halla, caso de que los tenga, los extremos relativos de las funciones del ejercicio anterior.

El **criterio** anterior nos servirá en la mayoría de los casos, pero hay otro más **general** que es importante conocer:

Criterio general:

Sea $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función $(n-1)-$veces derivable en x_0. Las condiciones

1) $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=...=f^{n-1)}(x_0)=0$

2) $f^{n)}(x_0)\neq 0$

equivalen a que:

i) si n es par, $f(x)$ posee un extremo relativo en x_0, que es un

$$\begin{cases}\text{máximo relativo si } f^{n)}(x_0)<0\\ \text{mínimo relativo si } f^{n)}(x_0)>0\end{cases}$$

ii) y si n es impar, entonces f no tiene un extremo relativo en el punto x_0.

Ejemplo:

Vamos a estudiar los extremos relativos de la función $f(x)=x^4$.

Como $f'(x)=4x^3$, si la función $f(x)$ tiene extremo relativo, lo tiene en $x=0$ (único punto en el que la derivada primera se anula). Ahora bien:

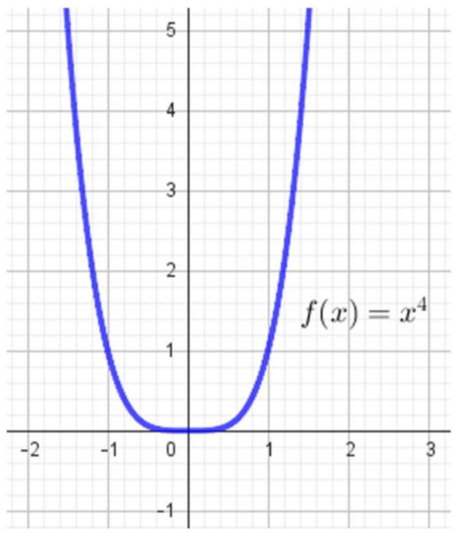
$$f''(0)=0 \text{ ya que } f''(x)=12x^2$$

y

$$f'''(0)=0 \text{ ya que } f'''(x)=24x$$

Sin embargo, $f^{iv)}(0)=24>0$ (derivada de orden par) y, por tanto, $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x=0$.

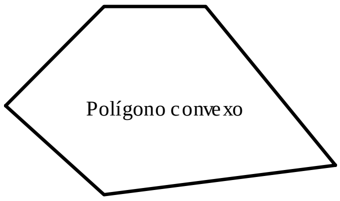
La representación gráfica de $f(x)$ nos permite visualizar este hecho.

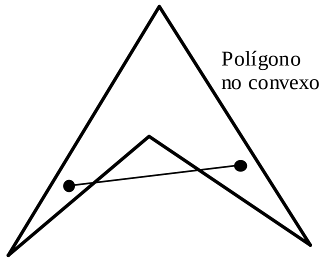


1.3. Curvatura de una función: puntos de inflexión

1.3.1. Definición no rigurosa de convexidad

Una figura o región del plano es convexa si al tomar dos puntos cualesquiera de ella, el segmento que los une está completamente incluido en la figura. En caso contrario se dice que la figura o región es cóncava.





Definición:

Una <u>función</u> es <u>convexa</u>[4] en un intervalo si la tangente a dicha función en cualquier punto del intervalo queda por debajo de la gráfica; si queda por encima se dirá que la función es <u>cóncava</u>.

Los puntos en los que la tangente a la gráfica atraviesa a la función, se llaman <u>puntos de inflexión</u>.

1.3.2. <u>Ampliación: definición de función convexa</u>

Una <u>función</u> $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es <u>convexa</u> en D sii $\forall a, b \in D$ con $a < b$ se tiene que

$$f\left(ta+(1-t)b\right) \leq f(t)a + f(1-t)b \qquad \forall t \in [0,1]$$

Una <u>función</u> $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es <u>cóncava</u> en D sii $-f$ es convexa en D.

<u>Ejemplos:</u>

Vamos a demostrar que las funciones $f(x) = x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = |x| \ \forall x \in \mathbb{R}$ y las funciones afines son convexas.

1) $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Para $\forall x, y \in \mathbb{R}$ y $0 \leq t \leq 1$ se tiene:

$$f\left(tx+(1-t)y\right) - tf(x) - (1-t)f(y) = \left(tx+(1-t)y\right)^2 - tx^2 - (1-t)y^2 = -t(1-t)(x-y)^2 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ f\left(ta+(1-t)b\right) \leq f(t)a + f(1-t)b \quad \forall t \in [0,1] \Rightarrow f \text{ es convexa en } \mathbb{R}$$

2) $g(x) = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Para $\forall x, y \in \mathbb{R}$ y $0 \leq t \leq 1$ se tiene:

$$g\left(tx+(1-t)y\right) = |tx+(1-t)y| \leq |tx| + |(1-t)y| = |t||x| + |1-t||y| = tg(x) + (1-t)g(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ g \text{ es convexa en } \mathbb{R}$$

3) $h(x) = mx + n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall m, n \in \mathbb{R}$ con $m \neq 0$

Para $\forall x, y \in \mathbb{R}$ y $0 \leq t \leq 1$ se tiene:

$$h\left(tx+(1-t)y\right) = m\left(\left(tx+(1-t)y\right)\right) + n = t(mx+n) + (1-t)(my+n) = th(x) + (1-t)h(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ h \text{ es convexa en } \mathbb{R}$$

[4] ¡¡Ojo!! Al consultar la bibliografía es posible encontrar libros donde llaman función cóncava a lo que nosotros llamamos función convexa. Lo importante es su significado, no el nombre que se le de. Sin embargo, no he encontrado ni un solo libro de texto que no sea de bachillerato en el que la función $y = x^2$ sea cóncava.

1.3.3. Criterio de la derivada segunda

Criterio para estudiar la curvatura de una función:

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en D.

$$\text{Si } f''(x_0) \begin{cases} >0 & \forall x_0 \in D \Rightarrow f \text{ es convexa en } D \\ <0 & \forall x_0 \in D \Rightarrow f \text{ es cóncava en } D \end{cases}$$

Criterio para estudiar los puntos de inflexión de una función:

Definición:

Los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman *puntos de inflexión*.

Si x_0 es un punto de inflexión de f, las coordenadas de dicho punto de inflexión son $(x_0, f(x_0))$.

Condición necesaria:

Si f es dos veces derivable en x_0 y x_0 es un punto de inflexión, entonces $f''(x_0)=0$.

Condición necesaria y suficiente:

Sea f una función tres veces derivable en x_0. Entonces:

$$f''(x_0)=0 \text{ y } f'''(x_0)\neq 0 \Leftrightarrow f \text{ tiene un punto de inflexión en } x_0.$$

Por tanto, **estudiar la curvatura de una función es estudiar el signo de la derivada segunda, f''**

Ejercicio:

3. Estudia la curvatura de las funciones del ejercicio 1.

Ejercicios de selectividad

GeoGebra

Estudio de funciones a partir de sus derivadas
Autor: Juan Ojeda García
Tema: Derivada, Funciones
https://www.geogebra.org/m/fv26j9Tf

2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Para representar gráficamente una función seguiremos los siguientes pasos:

1º) DOMINIO Y RECORRIDO

$Dom(f)$ = {números x para los que $f(x)$ tiene sentido}

$Img(f) = \{y : \exists x \text{ de forma que } y = f(x)\}$

2º) SIMETRÍAS

a) **Función par**: $f(-x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)$ es simétrica respecto del $f(-x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)$ eje *OY*
b) **Función impar**: $f(-x)=-f(x) \Leftrightarrow f(x)$ es simétrica respecto del origen, es decir, si giramos 180º la gráfica obtenemos la misma función.

3º) PERIODICIDAD

$y=f(x)$ es periódica de período $T \Leftrightarrow f(x+T)=f(T)$ y T es el menor de los números que cumplen dicha condición.

4º) PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

a) **Corte(s) con el eje *OX*:** $y=0 \Rightarrow f(x)=0 \rightarrow$ Ninguno, uno o más puntos
b) **Corte con el eje** OY **:** $x=0 \Rightarrow f(0)=y \rightarrow$ Ninguno o un punto

5º) REGIONES DE EXISTENCIA

a) Intervalos de positividad

$f(x)>0 \Rightarrow$ gráfica por encima del eje *OX*

b) Intervalos de negatividad

$f(x)<0 \Rightarrow$ gráfica por debajo del eje *OX*

Para determinar las regiones de existencia de la función $y=f(x)$ hay que estudiar el signo de $f(x)$

6º) ASÍNTOTAS

a) Asíntotas verticales

La recta $x=a$ es una asíntota vertical de $y=f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty \qquad \lim_{x\to a+} f(x)=\pm\infty \qquad \lim_{x\to a-} f(x)=\pm\infty$$

Observaciones:
(1) Una función puede tener infinitas asíntotas verticales.
(2) La gráfica de la función no puede cortar a las asíntotas verticales.

b) Asíntotas horizontales

La recta $y = k$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=k \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x)=k$$

Observaciones:
(1) Una función tiene como máximo dos asíntotas horizontales.
(2) La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas horizontales.

c) Asíntotas oblicuas

La recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, es una asíntota oblicua de $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(f(x)-mx-n\right)=0 \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(f(x)-mx-n\right)=0$$

en cuyo caso $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ y $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)$

Observaciones:
(1) Una función puede tener como máximo dos asíntotas oblicuas.
(2) Si una función tiene asíntota oblicua no tiene asíntota horizontal y recíprocamente.
(3) La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas oblicuas en uno o varios puntos.

7º) PUNTOS DE DISCONTINUIDAD

$f(x)$ es continua en $x=a\in Dom(f)$ cuando $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, y por tanto, la función $y=f(x)$ presenta discontinuidad en un punto cuando o no existe el límite de la función en dicho punto o cuando ese límite no coincide con el valor que toma la función en él.

8º) MONOTONÍA

a) **Intervalos de crecimiento**: $f'(x)>0$ para todos los *x* del intervalo
b) **Intervalos de decrecimiento**: $f'(x)<0$ para todos los *x* del intervalo
c) **Puntos críticos: extremos relativos**
$x=a$ es un posible máximo o mínimo relativo de $f(x)$ si $f'(a)=0$
Si $f''(a)>0$ entonces $f(x)$ tiene en $x=a$ un mínimo relativo
Si $f''(a)<0$ entonces $f(x)$ tiene en $x=a$ un mínimo relativo

Para determinar la monotonía de la función hay que estudiar el signo de $f'(x)$.

9º) CURVATURA

a) **Intervalos de convexidad**: $f''(a)>0$ para todos los *x* del intervalo
b) **Intervalos de concavidad**: $f''(a)<0$ para todos los *x* del intervalo
c) **Puntos de inflexión**:
$x=a$ es un posible punto de inflexión de $f(x)$ si $f''(a)=0$
Si $f'''(a)>0$, entonces $f(x)$ tiene en $x=a$ un punto de inflexión cóncavo-convexo
Si $f'''(a)<0$, entonces $f(x)$ tiene en $x=a$ un punto de inflexión convexo-cóncavo

Para determinar la curvatura de la función hay que estudiar el signo de $f''(x)$.

3. OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

Optimizar una función es obtener el valor o valores de la variable independiente que maximizan o minimizan la función objeto de estudio.

3.1. Problemas resueltos de optimización de funciones

1. Halla dos números que sumados den 20 y que su producto sea máximo.

Sean *x* e *y* los números buscados. El problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} x+y=20 \\ xy \ \text{ máximo} \end{cases}$$

Llamamos p al producto de los dos números, esto es, $p = xy$ [*]

Como $x+y=20 \Rightarrow y=20-x$ y sustituyendo en [*] resulta:

$$p = x(20-x) = 20x - x^2$$

Vamos a calcular el (o los) máximo(s) de la función $p(x)$:

$p'(x) = 20 - 2x$

$p'(x) = 0 \Leftrightarrow 20 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 10$

$p''(x) = -2$

$p''(10) < 0 \Rightarrow x = 10$ es un máximo

Por tanto, los números buscados son:

$$\begin{cases} x=10 \\ y=20-10=10 \end{cases}$$

2. Halla dos números tales que el cuadrado de uno multiplicado por el otro sea máximo, si la suma de dichos números es 40.

Sean x e y los números buscados. El problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} x+y=40 \\ x^2 y \ \text{ máximo} \end{cases}$$

Llamamos $p = x^2 y$. Como $x+y=40$ se tiene que $y=40-x$ y, por tanto:

$$p = x^2(40-x) = 40x^2 - x^3$$

Vamos a maximizar la función $p(x)$:

$p'(x) = 80x - 3x^2$

$$p'(x)=0 \Leftrightarrow 80x-3x^2=0 \Leftrightarrow x(80-3x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 80-3x=0 \Rightarrow x=\dfrac{80}{3} \end{cases}$$

$p''(x) = 80 - 6x$

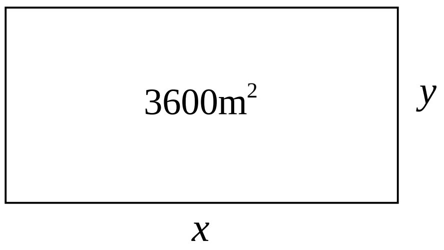
$p''(0) = 80 > 0 \Rightarrow x = 0$ es un máximo (no nos interesa)

$p''\left(\dfrac{80}{3}\right) = -80 < 0 \Rightarrow x = \dfrac{80}{3}$ es un mínimo relativo

Los números buscados son: $\begin{cases} x=\dfrac{80}{3} \\ y=40-\dfrac{80}{3}=\dfrac{40}{3} \end{cases}$

3. Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular de 3 600 m^2 de superficie, para poderlo cercar con una valla de longitud mínima.

Por la fórmula del área del rectángulo se tiene:



$$xy = 3600$$

Por otro lado, la superficie que tenemos que vallar es $2x + 2y$

Así, el problema a resolver es:

$$\begin{cases} xy = 3600 \\ 2x + 2y \ \text{ mínima} \end{cases}$$

Como $xy = 3600 \Rightarrow y = \dfrac{3600}{x}$

Llamando $f = 2x + 2y$ ý sustituyendo $y = \dfrac{3600}{x}$ obtenemos:

$$f(x) = 2x + 2\frac{3600}{x} = \frac{2x^2 + 7200}{x}$$

Vamos a minimizar *f*:

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 2x^2 - 7200}{x^2} = \frac{2x^2 - 7200}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7200 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 60$

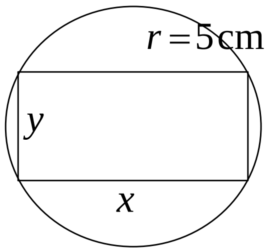
$$f''(x) = \frac{14400}{x^3}$$

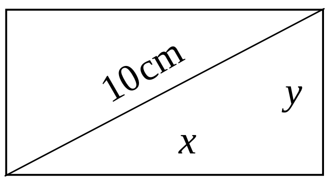
$f''(-60) < 0 \Rightarrow x = -60$ es un máximo (no nos interesa)

$f''(60) > 0 \Rightarrow x = 60$ es un mínimo

Por tanto, las dimensiones del campo son: $\begin{cases} x = 60 \text{ m} \\ y = \dfrac{3600}{60} = 60 \text{ m} \end{cases}$

4. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 5 cm.





$A = xy$ máxima

Por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 10^2$$

de donde

$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

La función a maximizar es: $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$

$$f(x) = x\sqrt{100 - x^2} = \sqrt{x^2\left(100 - x^2\right)} = \sqrt{100x^2 - x^4} = \left(100x^2 - x^4\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(100x^2 - x^4\right)^{-\frac{1}{2}}\left(200x - 4x^3\right) = \frac{200x - 4x^3}{2 \cdot \sqrt{100x^2 - x^4}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 200x - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x(200 - 4x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 200 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{50} \end{cases}$

El único posible extremo que nos interesa es $x = \sqrt{50}$

$$f'(x) = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f''(x)=\frac{-4x\sqrt{100-x^2}-\left(100-2x^2\right)\dfrac{-x}{\sqrt{100-x^2}}}{\left(\sqrt{100-x^2}\right)^2}=\frac{-4x\left(\sqrt{100-x^2}\right)^2+\left(100-2x^2\right)x}{\left(100-x^2\right)\sqrt{100-x^2}}=$$

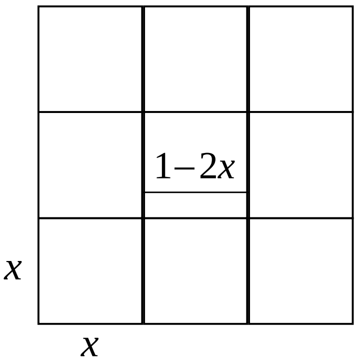
$$=\frac{-300x+2x^3}{\left(100-x^2\right)\sqrt{100-x^2}}$$

$f''\left(\sqrt{50}\right)<0\Rightarrow x=\sqrt{50}$ es un máximo

Calculamos el valor de *y*: $y=\sqrt{100-\left(\sqrt{50}\right)^2}=\sqrt{50}$

Por tanto, las dimensiones del rectángulo para que el área sea máxima son: $\begin{cases} x=\sqrt{50} \text{ cm} \\ y=\sqrt{50} \text{ cm}\end{cases}$

5. Con 1 m² de cartón cómo construirías una caja del mayor volumen posible.



Teniendo en cuenta el dibujo, tenemos que maximizar la función

$$v(x)=(1-2x)^2x=4x^3-4x^2+x$$

Calculamos las derivadas:

$v'(x)=12x^2-8x+1$

$20+3x$ (cent./kg)

$$=\frac{8\pm\sqrt{16}}{24}=\frac{8\pm4}{24}=\begin{cases}\dfrac{8+4}{24}=\dfrac{12}{24}=\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{8-4}{24}=\dfrac{4}{24}=\dfrac{1}{6}\end{cases}$$

$$v''(x)=24x-8$$

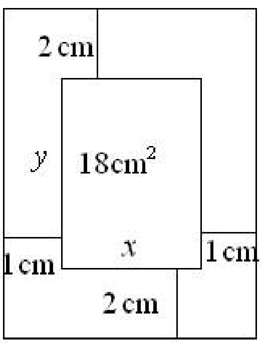
$v''\left(\frac{1}{2}\right)=12-8>0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ es un mínimo (no nos interesa)

$v''\left(\frac{1}{6}\right)=4-8<0\Rightarrow x=\frac{1}{6}$ es un máximo

Por tanto, como $1-2x=1-2\frac{1}{6}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ las dimensiones de la caja son: $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}$ (m)

6. Una hoja de papel debe contener 18 cm² de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que resulten hojas con un coste mínimo?

Teniendo en cuenta el dibujo, la función a minimizar es:



$$s=2x+2x+2+2+2+2+18+y+y=4x+2y+26$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la fórmula del área de un rectángulo, se tiene que:

$$xy=18$$

Así, tenemos que resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases}xy=18\\ 4x+2y+26 \text{ mínima}\end{cases}$$

Como $24\times24\times24$, y, por tanto, sustituyendo en *s* tenemos:

$$s = 4x + 2\frac{18}{x} + 26 = \frac{4x^2 + 36 + 26x}{x} = \frac{4x^2 + 26x + 36}{x} = s(x)$$

Vamos a minimizar $s(x)$:

$$s'(x) = \frac{(8x+26)x - (4x^2 + 26x + 36)\cdot 1}{x^2} = \frac{8x^2 + 26x - 4x^2 - 26x - 36}{x^2} = \frac{4x^2 - 36}{x^2}$$

$$s'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{36}{4} = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = 3$$

$$s''(x) = \frac{8x\cdot x^2 - (4x^2 - 36)2x}{x^4} = \frac{8x^3 - 8x^3 + 72x}{x^4} = \frac{72}{x^3}$$

$s''(3) > 0 \Rightarrow x = 3$ es un mínimo

Así las dimensiones de la zona que contiene el texto impreso son:

$$\begin{cases} x = 3 \text{ cm} \\ y = \frac{18}{3} = 6 \text{ cm} \end{cases}$$

y las dimensiones de la hoja de papel son: 5×10 cm.

7. Un agricultor sabe que si vende hoy su cosecha podrá recoger 50 000 kg, que le pagarán al precio de 20 céntimos por kg. Por cada día que espere, la cosecha disminuirá en 800 kg, pero el precio aumentará en 3 céntimos por kg. ¿Cuántos días deberá esperar para obtener el mayor beneficio?

Sea x = número de días que espera el agricultor.
Recoge una cosecha de $50000 - 800x$ (kg), que vende al precio de $20 + 3x$ (cent./kg). La ganancia que obtiene es:

$$g(x) = (50000 - 800x)(20 + 3x)$$

que es la función que tenemos que maximizar:

$$g'(x) = -800\cdot(20+3x) + (50000 - 800x)\cdot 3 =$$
$$= -16000 - 2400x + 150000 - 2400x = -4800x + 134000$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -4800x + 134000 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{134000}{4800} = \frac{335}{12}$$

$$g''(x) = -4800$$

$g''\left(\frac{335}{12}\right) < 0 \Rightarrow x = \frac{335}{12}$ es un máximo

Por tanto, el agricultor deberá esperar $\frac{335}{12} \simeq 27'917 \simeq 28$ días para que su ganancia sea máxima.

8. Un vendedor de bolígrafos ha observado que, si vende sus bolígrafos a 15 céntimos, es capaz de vender 1 000 unidades diarias, pero que por cada céntimo que aumente el precio, disminuye en 100 unidades la venta diaria de bolígrafos. Por otra parte, a él le cuesta 7.5 céntimos fabricar un bolígrafo. Averiguar qué precio ha de poner para obtener el máximo beneficio.

Sea x el precio de cada bolígrafo.
El número de bolígrafos vendidos al día es $n = 1000 - 100x$, y en cada bolígrafo obtiene un beneficio igual a $x - 5$.
El beneficio total es:

$$b(x) = (1000 - 100x)(x - 5)$$

que es la función que tenemos que maximizar:

$$b'(x) = -100(x-5) + (2000-100x) = -100x + 500 + 2000 - 100x = -200x + 2500$$

$$b'(x) = 0 \Rightarrow -200x + 2500 = 0 \Rightarrow x = \frac{2500}{200} = 12,5$$

$$b''(x) = -200$$

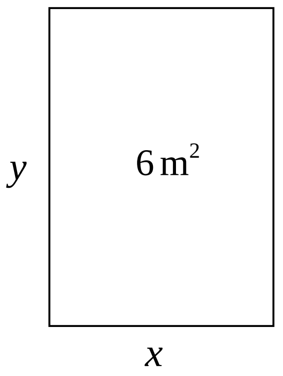
$b''(12{,}5) < 0 \Rightarrow x = 12{,}5$ es un máximo para $b(x)$

Por tanto, el precio del bolígrafo para que el beneficio sea máximo es de 12,5 céntimos.

9. Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20 euros y el tramo vertical 30 euros.

a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) Determinar el coste del marco.



El problema a resolver es:

$$\begin{cases} xy = 6 \\ M \equiv 2x \cdot 20 + 2y \cdot 30 = 40x + 60y \end{cases}$$

Como $xy = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{x}$ y sustituyendo en la expresión de M:

$$M = 40x + 60\frac{6}{x} = \frac{40x^2 + 360}{x} = M(x)$$

Calculamos $M'(x)$ e igualamos a cero:

$$M'(x) = \frac{80x \cdot x - (40x^2 + 360) \cdot 1}{x^2} = \frac{80x^2 - 40x^2 - 360}{x^2} = \frac{40x^2 - 360}{x^2}$$

$$M'(x) = 0 \Leftrightarrow 40x^2 - 360 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{360}{40} = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Comprobamos que la solución positiva que es la que tiene sentido corresponde a un mínimo:

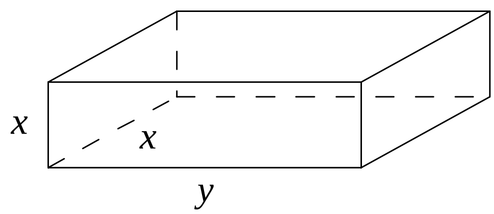
$$M''(x) = \frac{80x \cdot x^2 - (40x^2 - 360) \cdot 2x}{x^4} = \frac{80x^3 - 80x^3 + 720x}{x^4} = \frac{720x}{x^4} = \frac{720}{x^3}$$

$M''(3) = \frac{720}{3^3} > 0 \Rightarrow x = 3$ es un mínimo

Por tanto, las dimensiones del marco son: $\begin{cases} x = 3 \text{ m} \\ y = 2 \text{ m} \end{cases}$

Así, el coste del marco es: $40 \cdot 3 + 60 \cdot 2 = 120 + 120 = 240$ €.

10. En una oficina de correos sólo admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular, tales que la anchura sea igual a la altura y, además, la suma de sus tres dimensiones debe ser de 72 cm. Halla las dimensiones del paralelepípedo para que el volumen sea máximo.



El problema a resolver es:

$$\begin{cases} x + x + y = 72 \\ v \equiv x^2 y \text{ máximo} \end{cases}$$

Como $2x + y = 72 \Rightarrow y = 72 - 2x$ ý sustituyendo en la expresión de v:

$$v = x^2(72 - 2x) = 72x^2 - 2x^3 = v(x)$$

Maximizamos $v(x)$:

$v'(x) = 144x - 6x^2$

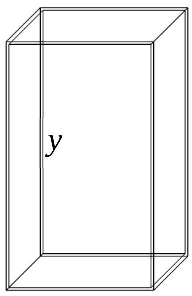
$$v'(x) = 0 \Leftrightarrow x(144 - 6x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{(No vale)} \\ x = \dfrac{144}{6} = 24 \end{cases}$$

$v''(x) = 144 - 12x$

$v''(24) = -144 < 0 \Rightarrow x = 24$ es un máximo

Por tanto, las dimensiones de la caja son: $24 \times 24 \times 24$ (cm).

11. Queremos diseñar un envase cuya forma sea un prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material; pero para la base debemos emplear un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de este envase (longitud del lado de la base y altura) para que su precio sea el menor posible.



Si suponemos que el precio del material para la tapa y los laterales es de una unidad por cm^2, el precio para 1 cm^2 de la base será de 1.5 unidades. El precio del envase, que es la función que debemos minimizar, es:

$$p = x^2 + 4xy + 1{,}5x^2 = 2{,}5x^2 + 4xy$$

Esta función depende de dos variables, pero como sabemos que el volumen es de 80 cm^3, se tiene:

$$V = x^2y = 80 \Rightarrow y = \frac{80}{x^2}$$

Sustituyendo en la función:

$$p = 2{,}5x^2 + 4x\frac{80}{x^2} = 2{,}5x^2 + \frac{320}{x} = p(x)$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$p'(x) = 5x - \frac{320}{x^2}$$

$p'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^3 - 320 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = 4$ cm

Para comprobar que se trata del precio mínimo, calculamos la derivada segunda y sustituimos:

$$p''(x) = 5 + \frac{640}{x^3}$$

$p''(4) > 0 \Rightarrow x = 4$ es un mínimo

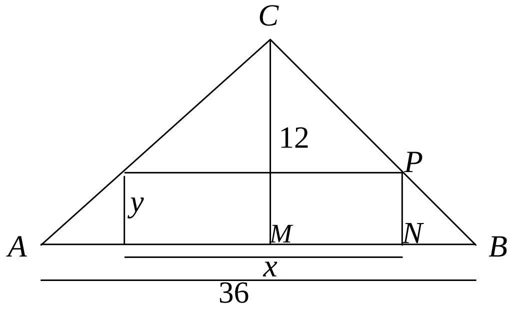
El envase de precio mínimo tiene una base cuadrada de 4 cm de lado y una altura de 5 cm.

12. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo isósceles cuya base es el lado desigual y mide 36 cm y la altura correspondiente mide 12 cm. Supón que un lado del rectángulo está en la base del triángulo.

La función que debemos hacer máxima es el área del rectángulo: $A = xy$

Como esta función depende de dos variables, debemos buscar una relación entre ellas.

Los triángulos *CMB* y *PNB* son semejantes, por tanto:



$$\frac{MB}{CM}=\frac{BN}{PN}\Leftrightarrow\frac{18}{12}=\frac{18-\frac{x}{2}}{y}\Leftrightarrow 3y=36-x$$

$$\Rightarrow x = 36 - y^2$$

Sustituimos en la función a maximizar:

$$A = 36y - 3y^2 = A(y)$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$A'(y) = 36 - 6y$$

$$A'(y) = 0 \Leftrightarrow 36 - 6y = 0 \Leftrightarrow y = 6$$

Sustituimos en la derivada segunda:

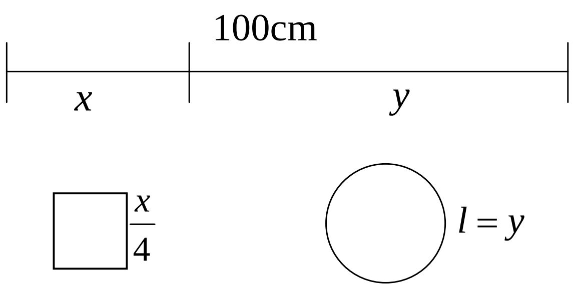
$A''(6) = -6 < 0 \Rightarrow y = 6$es un máximo

Por tanto, las dimensiones del rectángulo son: $\begin{cases} y=6 \text{ cm} \\ x=18 \text{ cm}\end{cases}$

13. Un hilo de 100 cm se divide en dos trozos de longitudes *x* e *y*; con el primero se forma un cuadrado y con el segundo un círculo. Razonadamente:

a) Halla *x* e *y* para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea máxima.
b) Halla x e y para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea mínima.

La longitud de la circunferencia es $2\pi\ r = y$, y por tanto el radio es $r=\dfrac{y}{2\pi}$.



La función que tenemos que maximizar y minimizar es la suma de las áreas:

$$S=\frac{x^2}{16}+\frac{\pi\ y^2}{4\pi^2}=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4\pi}$$

Además, sabemos que $x+y=100$, es decir, $y=100-x$.

Sustituyendo:

$$S=\frac{x^2}{16}+\frac{(100-x)^2}{4\pi}=S(x)$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$S'(x)=\frac{x}{8}+\frac{-(100-x)}{2\pi}=\frac{x}{8}-\frac{100-x}{2\pi}$$

$$S'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x}{8}-\frac{100-x}{2\pi}=0\Leftrightarrow 2\pi\ x=800-8x\Leftrightarrow x(2\pi+8)=800\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{800}{2\pi+8}=\frac{400}{\pi+4}$$

Calculamos la derivada segunda y sustituimos:

$$S''(x)=\frac{1}{8}+\frac{1}{2\pi}>0\Rightarrow x=\frac{400}{\pi+4}\ \text{ es un mínimo}$$

Por tanto, el valor hallado corresponde a un mínimo. Es decir, cuando $x=\dfrac{400}{\pi+4}$ e $y=100-\dfrac{400}{\pi+4}=\dfrac{100\pi}{\pi+4}$ la suma de las áreas es **mínima**.

El área será máxima en uno de los extremos del intervalo $[0,100]$ en el que toma valores la variable x.

Si $x=0$ e $y=100$, el radio del círculo es $r=\dfrac{100}{2\pi}$, el área del cuadrado es 0 y el área del círculo es:

$$A_{círculo}=\pi\cdot\frac{100^2}{4\pi^2}=\frac{10000}{4\pi}\approx 795.8\ \text{cm}^2$$

Si $x=100$ e $y=0$, el lado del cuadrado es 25 cm y el área del cuadrado es:

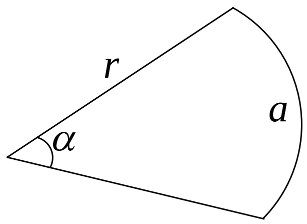
$$A_{cuadrado}=25^2=625\text{cm}^2$$

Así, la función se hace **máxima** cuando $x=0$, es decir, cuando todo el hilo se utiliza en hacer un círculo.

14. Un jardinero quiere hacer un parterre[5] en forma de sector circular y que tenga de perímetro 20 m. Se pregunta acerca del radio que debe tomar para lograr que el área del parterre sea máxima.

a) Expresa el área del parterre, *S*, como función del radio *r*.
b) Determina el valor del radio que maximiza *S*.
c) ¿Cuál es la amplitud de este sector de máxima superficie?
d) ¿Qué criterio se utilizará para garantizar que la solución encontrada corresponde ciertamente a un máximo?

Consideramos un sector circular de radio *r*, arco *a* y ángulo α.



Deducimos la fórmula del área de dicho sector a partir de la fórmula del área de círculo y de la longitud de la circunferencia.

$$A=\pi\cdot r^2 \ \text{ y } \ L=2\cdot\pi\cdot r$$

Si llamamos S al área del sector circular, se tiene:

$$\frac{2\cdot\pi\cdot r}{a}=\frac{\pi\cdot r^2}{S}\Rightarrow S=\frac{\pi\cdot r^2\cdot a}{2\cdot\pi\cdot r}=\frac{ra}{2}$$

a) Para expresar el área S en función del radio utilizamos la relación que proporciona el perímetro del parterre, $2r+a=20$, de donde:

$$a=20-2r$$

Sustituimos en la fórmula de *S*:

$$S=\frac{r(20-2r)}{2}=10r-r^2=S(r)$$

b) Derivamos e igualamos a cero:

$S'(r)=10-2r$

$S'(r)=0\Leftrightarrow 10-2r=0\Leftrightarrow r=5$m

Calculamos la derivada segunda y sustituimos:

$S''(r)=-2<0\Rightarrow r=5$ es un máximo

c) Para calcular el valor de la amplitud, α, correspondiente a esta solución, calculamos primero el valor de *a*:

$$a=20-2\cdot 5=10\text{ m}$$

y el ángulo correspondiente a este arco (expresado en radianes) se obtiene mediante una regla de tres:

$$\frac{2\cdot\pi\cdot r}{10}=\frac{2\pi}{\alpha}\Rightarrow\alpha=\frac{20\pi}{2\cdot\pi\cdot r}=\frac{10}{5}=2\text{ radianes}$$

d) Para garantizar que la solución corresponde a un máximo, hemos calculado la derivada segunda y hemos visto que tiene signo negativo.

[5] Jardín o parte de él con césped, flores y anchos paseos.

15. El valor de un rubí es proporcional al cuadrado de su peso. Divide un rubí de 2 gramos en dos partes de x gramos y de $2-x$ gramos, de forma que los dos rubíes formados sea mínima.

El valor de dos rubíes será, en función del peso de uno de ellos:

$$V(x) = k(x^2 + (x-2)^2) = k(2x^2 - 4x + 4)$$

Calculamos la deriva e igualamos a cero:

$V'(x) = k(4x-4)$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow k(4x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Calculamos la derivada segunda y sustituimos:

$V''(x) = 4x$

$V''(1) = 4 > 0 \Rightarrow x = 1$ es un mínimo

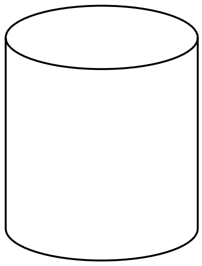
Así, ambos rubíes deben pesar 1 gramo cada uno.

16. Se quieren construir depósitos cilíndricos como el de la figura, con la condición de que la altura y el perímetro de la circunferencia sumen 100 m.

Comprueba que el volumen de los depósitos viene dado por la expresión:

$$V(r) = 100\pi \cdot r^2 - 2\pi^2 r^3$$

y determina las dimensiones del que tiene volumen máximo.



La función que queremos hacer máxima es el volumen del cilindro:

$$V = \pi \cdot r^2 h$$

La condición dada en el enunciado relaciona las dos variables que aparecen en la fórmula del volumen:

$$h + 2\pi \cdot r = 100 \Rightarrow h = 100 - 2\pi \cdot r$$

Sustituyendo en *V*:

$$V(r) = \pi \cdot r^2(100 - 2\pi \cdot r) = 100\pi \cdot r^2 - 2\pi^2 r^3$$

Derivamos e igualamos a cero:

$V'(r) = 200\pi \cdot r - 6\pi^2 r^2$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow 200\pi \cdot r - 6\pi^2 r^2 = 0 \Leftrightarrow r = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{100}{3\pi} \end{cases}$$

La solución $r = 0$ corresponde a un cilindro degenerado de volumen 0. Estudiamos la solución no nula, y para ello calculamos la derivada segunda:

$V''(r) = 200\pi - 12\pi^2 r$

$$V''\left(\frac{100}{3\pi}\right) = 200\pi - 12\pi^2 \frac{100}{3\pi} = 200\pi - 400\pi < 0 \Rightarrow r = \frac{100}{3\pi} \text{ es un máximo}$$

El cilindro de volumen máximo tiene por dimensiones $r = \dfrac{100}{3\pi}$ m y $h = \dfrac{100}{3}$ m.

Ejercicios de selectividad

Unidad 5:
PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

1. TEOREMA DE ROLLE

Los resultados más útiles del cálculo diferencial se refieren a funciones derivables en todos los puntos de un intervalo y en esta categoría entran los teoremas que aparecen en esta unidad.

Michel Rolle (1652 - 1719) fue miembro de la Académie des Sciences y en 1691, estudiando un método para resolver ecuaciones, estableció, sin demostrar, el teorema que ahora lleva su nombre que es esencialmente equivalente al teorema del valor medio. Dicho teorema aparece en un texto de geometría y álgebra llamado «*Démonstration d'une Méthode pour resoudre les Egalitez de tous les degrez (Demostración de un método para resolver las Igualdades de todos los grados)*[6]», publicado en 1691. Como curiosidad decir que Michel Rolle estaba en contra de los métodos infinitesimales defendidos entre otros por L'Hôpital y de hecho estaba enzarzado en un acalorado debate sobre los fundamentos de dichos métodos, y sostenía que esos métodos conducían a paralogismos. Además de por L'Hôpital fue refutado también por John Bernouilli, quien mantuvo que Rolle no entendía el Cálculo.

El teorema del valor medio es frecuentemente atribuido a **Joseph Louis Lagrange**; no obstante, fue publicado por vez primera en 1806 por el físico **André Marie Ampére** que justificaba el resultado usando ideas de Lagrange y suponiendo que la función derivada era continua; lo cual, como se verá enseguida, es innecesario. Quince años más tarde **Augustin Cauchy** volvió a probar el teorema con las mismas hipótesis. También es digno de mención que en ese mismo artículo Ampére alegó haber demostrado un resultado que hoy se sabe que es falso, a saber, que una función continua es derivable excepto, posiblemente, en un número de puntos excepcionales.

El Teorema del Valor Medio relaciona los valores de la función en los extremos de un intervalo con el valor de la derivada en un punto intermedio del mismo y su demostración se basa en aplicar el Teorema de Rolle a una función adecuada. Además de una sencilla prueba, este teorema se interpreta geométricamente de una forma fácil, como se verá a continuación.

Teorema de Rolle:

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a)=f(b)$, entonces $\exists c\in(a,b): f'(c)=0$.

Demostración:

Si $f(x)=f(a)\ \ \forall x\in[a,b]$, es decir, si f es constante, entonces $f'\equiv 0$ en $[a,b]$, y la conclusión es trivial.

[6] En lenguaje moderno: «Demostración de un método de análisis numérico para obtener las raíces (reales) de polinomios de cualquier grado».

Supongamos que $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) \neq f(a) = f(b)$ y consideremos que $f(x_0) > f(a) = f(b)$.

Como f es continua en $[a,b]$, aplicando el teorema de Weierstrass, $\exists x_1 \in [a,b]$ tal que $f(x) \leq f(x_1) \quad \forall x \in [a,b]$, luego en particular $f(a) = f(b) < f(x_0) \leq f(x_1)$.

Así, $f(a) = f(b) < f(x_1)$ y, por tanto, $x_1 \neq a$ y $x_1 \neq b$, luego $x_1 \in (a,b)$.

Tomando $x_1 = c$, se tiene que $f'(c) = 0$ (ya que f tiene en x_1 un máximo).

Análogamente, si $f(x_0) < f(a) = f(b)$. C.Q.D.

Ejemplo:

La función $f(x) = x^2 + x + 2$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en $[-2,1]$ pues es continua y derivable en $\mathbb{R}$ (por ser una función polinómica), luego en particular es continua en $[-2,1]$ y derivable en $(-2,1)$. Además, $f(-2) = 4 = f(1)$.

Como consecuencia, $\exists c \in (-2,1)$ tal que $f'(c) = 0$.

Ahora bien, como $f'(x) = 2x + 1$ y $f'(x) = 0$, se tiene que $x = -\frac{1}{2}$, luego $c = -\frac{1}{2} \in (-2,1)$ es el valor cuya existencia asegura el teorema.

Ejemplo:

Vamos a ver que no podemos aplicar el teorema de Rolle a la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 - 2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

en el intervalo $[-1,1]$.

Cada una de las ramas de la función es continua en su dominio, por ser funciones polinómicas y constante, luego tenemos que ver si es continua en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) \quad \left. \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} (1 + 2x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} (1 - 2x) = 1 \end{cases} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

y, por tanto, f es continua en $\mathbb{R}$, luego en particular, en $[-1,1]$.

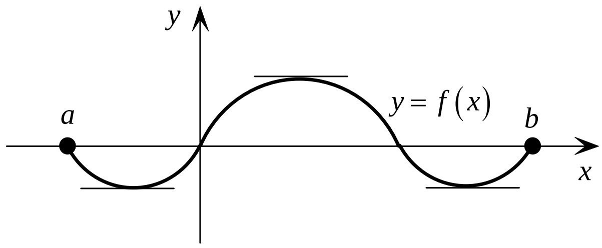
Cada una de las ramas de la función es derivable en su dominio, por ser funciones polinómicas y constante, luego tenemos que ver si es derivable en $x = 0$:

$$f'(0) \quad \left. \begin{cases} f'_+(x) = 2 \Rightarrow f'_+(0) = 2 \\ f'_-(x) = -2 \Rightarrow f'_-(0) = -2 \end{cases} \right\} \Rightarrow \nexists f'(0)$$

y, por tanto, f no es derivable en $x = 0$, luego no es derivable en $(-1,1)$.

Ya sabemos que no podemos aplicar el teorema de Rolle, ya que la función no es derivable en $(-1,1)$.

Interpretación geométrica: Este teorema afirma la existencia de, al menos un punto c de (a,b), tal que la recta tangente a $f(x)$ en $(c, f(c))$ sea paralela al eje OX.



Aplicando de forma conjunta los teoremas de Bolzano y de Rolle se pueden determinar intervalos donde la ecuación $f(x)=0$, tiene, a lo sumo, una solución.

Para ello hay que tener en cuenta el siguiente **teorema**:
«Entre cada dos raíces de una función derivable, existe al menos una raíz de la función derivada».

Combinando los teorema de Bolzano y Rolle, obtenemos el siguiente resultado, que es muy útil para demostrar la unicidad de la solución,

Teorema:

Si $f'(x)\neq 0$ en (a,b), entonces la ecuación $f(x)=0$ tiene, como mucho, una única solución en el intervalo (a,b).

Ejemplo:

Vamos a ver que la ecuación $\cos x = 2x$ tiene una única solución en $\mathbb{R}$.

Consideramos la función $f(x)=\cos x - 2x$ que es continua y derivable en $\mathbb{R}$, luego en particular lo es en $[0,1]$ y $(0,1)$ respectivamente.

Como además $f(0)=1>0$ y $f(1)=\cos 1 - 2<0$, aplicando el teorema de Bolzano $\exists c\in(0,1)$ tal que $f(c)=0$, esto es, $\cos(c)=2c$.

Vamos a demostrar que dicha solución es única. Supongamos que d es otra solución. Entonces, $f(d)=0=f(c)$, y aplicando el teorema de Rolle a f en $[c,d]$ si $d>c$, o en $[d,c]$ si $d<c$, se tiene que $\exists e\in(c,d)$ tal que $f'(e)=0$.

Ahora bien, $f'(x)=-\operatorname{sen} x-2<0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, lo que es contradictorio con que $f'(e)=0$ y, como consecuencia, la ecuación solo tiene una solución real.

Ejemplo:

Vamos a ver que la ecuación $e^{-x}=x$ tiene una única solución en $\mathbb{R}$.

a) Existencia (teorema de Bolzano)

$$f(x)=e^{-x}-x\begin{cases} f \text{ es continua en } [0,1] \\ f \text{ es derivable en } (0,1) \end{cases}$$

$$f(0)=e^{0}-0=1>0$$

$$f(1)=e^{-1}-1<0$$

Por el teorema de Bolzano, $\exists c\in(0,1): f(c)=0$.

b) Unicidad (teorema de Rolle)

$f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente y, por el teorema de Rolle, tiene como máximo una única raíz.

Ejercicios de Selectividad

2. TEOREMA DEL VALOR MEDIO

El teorema del valor medio es uno de los resultados más útiles del Cálculo. Su utilidad se debe principalmente a que dicho teorema permite acotar el incremento de una función cuando se conoce una cota de su derivada.

Teorema del valor medio (de Lagrange):

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

(igualdad que puede escribirse en la forma:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

y que se conoce con el nombre de **fórmula de los incrementos finitos**).

Demostración:

Considermos la función f menos la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, esto es,

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right]$$

Es inmediato que g cumple las hipótesis del teorema de Rolle, luego $\exists c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$. Ahora bien,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y, como consecuencia,

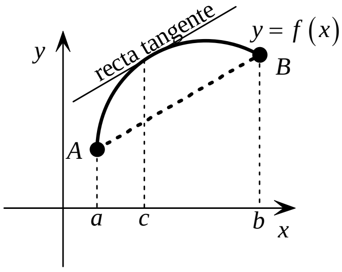
$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{C.Q.D.}$$

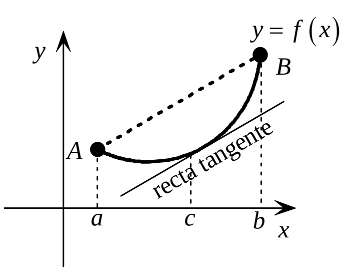
Ejemplo:

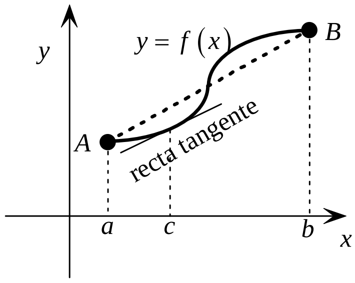
La función $f(x) = x^3 - 6x$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ (por ser una función polinómica), luego en particular en $[-2,1]$ y, por tanto, $\exists c \in (-2,1)$ tal que $\frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = f'(c)$.

En efecto, $\frac{-5 - 4}{1 - (-2)} = 3x^2 - 6 \Rightarrow -3 = 3x^2 - 6 \Rightarrow x = \pm 1$. El valor que cumple el teorema es $c = -1$.

Interpretación geométrica: Si se cumplen las hipótesis del teorema en el intervalo $[a,b]$, existe al menos un punto $c\in(a,b)$ en el que su recta tangente es paralela al segmento determinado por los puntos $A(a,f(a))$ y $B(b,f(b))$.







Interpretación física: Si x representa el tiempo y $f(x)$ la posición de un móvil sobre una recta, entonces $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ representa la velocidad media en el intervalo de tiempo $[a,b]$, y $f'(c)$ la velocidad instantánea en el instante c. El teorema afirma que la velocidad media es alcanzada al menos en un instante del tiempo transcurrido entre a y b.

Ejemplo:

¿Verifica la función $f(x)=x^2-2x$ las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo $[0,6]$? En caso afirmativo, hallar el punto en el que la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta que pasa por los puntos $A(0,0)$ y $B(6,24)$.

Como f es una función polinómica, es derivable en $\mathbb{R}$, luego es continua en $[0,6]$ y derivable en $(0,6)$, por lo que, aplicando el teorema de Lagrange,

$$\exists c\in(0,6) \text{ tal que } f'(c)=\frac{f(6)-f(0)}{6-0}$$

Ahora bien, $f'(c)=2c-2$ y $\dfrac{f(6)-f(0)}{6-0}=\dfrac{24}{6}=4$, luego $2c-2=4\Rightarrow c=3\in(0,6)$.

Así, el punto buscado es $C(3,f(3))=(3,3)$.

Ejercicios de Selectividad

Consecuencias:

(1) Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b), y $\exists c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0\quad \forall c\in(a,b)$, entonces la función $y=f(x)$ es constante en $[a,b]$.

(2) Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), tales que $f'(x)=g'(x)\quad \forall x\in(a,b)$, entonces las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se diferencian en una constante, esto es: $f(x)=g(x)+cte$

3. TEOREMA DE CAUCHY

El teorema de Cauchy del valor medio generalizado aparece en su «*Cours d’Analyse*» (1821) y, permite, entre otros, demostrar la regla de L´Hôpital, que usaremos para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites.

Teorema de Cauchy (o del valor medio generalizado):

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), entonces $\exists c\in(a,b)$ tal que:

$$g'(c)\left[f(b)-f(a)\right]=f'(c)\left[g(b)-g(a)\right]$$

Demostración:

Consideramos la función $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por $h(x)=\begin{vmatrix}1 & f(x) & g(x)\\ 1 & f(a) & g(a)\\ 1 & f(b) & g(b)\end{vmatrix}$ que verifica:

iii) h es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

iv) $h(a)=h(b)=0$

Entonces, por el teorema de Rolle, $\exists c\in(a,b)$ tal que $h'(c)=0$, y como

$$h'(c)=\left(f(b)-f(a)\right)g'(c)-\left(g(b)-g(a)\right)f'(c)=0$$

Resulta que $\left(f(b)-f(a)\right)g'(c)=\left(g(b)-g(a)\right)f'(c)$ C.Q.D.

Ejemplo:

¿Verifican las funciones $f(x)=x^2+2x+1$ y $g(x)=x^3-2x-1$ el teorema de Cauchy en el intervalo $[-2,1]$? En caso afirmativo, determinar el punto en el que se verifica.

Las funciones f y g son derivables en $\mathbb{R}$, luego son continuas en $[-2,1]$ y derivables en $(-2,1)$. Además, $g(-2)\neq g(1)$, luego por el teorema de Cauchy,

$$\exists c\in(a,b) \text{ tal que } g'(c)\left[f(b)-f(a)\right]=f'(c)\left[g(b)-g(a)\right]$$

Vamos a determinar c:

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x)=2x+2\to f'(c)=2c+2\\ g'(x)=3x^2-2\to g'(c)=3c^2-2\\ f(1)=4 \text{ y } f(-2)=1\\ g(1)=-2 \text{ y } g(-2)=-5\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} g'(c)\left[f(b)-f(a)\right]=f'(c)\left[g(b)-g(a)\right]\\ \text{que escribimos en la forma}\\ \dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{4-1}{-2-(-5)}=\dfrac{2c+2}{3c^2-2}\Rightarrow 3c^2-2c-4=0\Rightarrow c=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{3}$, pero la única que está en el intervalo dado es $c=\dfrac{1-\sqrt{3}}{3}\in(-2,1)$.

4. REGLAS DE L'HÔPITAL

En este apartado aplicaremos el teorema del valor medio generalizado de Cauchy para dar un método muy poderoso para calcular límites indeterminados conocido como «Regla de L'Hôpital».
Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704), publicó anónimamente en 1696 el primer libro de texto sobre cálculo diferencial, el cual tuvo gran éxito e influencia durante el siglo XVIII. En él aparecen los resultados que hoy llevan su nombre, que permiten resolver en muchos casos indeterminaciones de la forma $0:0$ o $\infty:\infty$, que se presentan frecuentemente al estudiar el límite de un cociente de dos funciones. Si bien L'Hôpital era un escritor excepcionalmente claro y eficaz, las llamadas «reglas de L'Hôpital» no se deben a él sino a su maestro **Jean Bernouilli** (1667-1748) quien las incluyó en el primer texto de Cálculo Diferencial que se conoce (impreso en 1724). Sin embargo, L'Hôpital ya las había publicado en su «*Analyse des infiniment petits*», publicado por él en París en 1696.

REGLA DE L'HÔPITAL PARA $\frac{0}{0}$:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en un entorno E de a y tales que:

1) $f(a)=g(a)=0$
2) g' no se anula en E

Si existe el límite finito $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe también $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, y, además:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración:
Como $f(a)=g(a)=0$, podemos elegir $x\in E$ y escribir:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

por lo que podemos aplicar el teorema de Cauchy al intervalo $[a,x]$ (o al $[x,a]$, según se tome x). Como en particular $g(x)-g(a)\neq 0$, ya que si no $g(x)=g(a)$, y por el teorema de Rolle, g' se anularía en algún punto de (a,x), en contra de las hipótesis de la regla de L'Hôpital.
Así, $\exists c_x\in(a,x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \qquad [1]$$

Ahora bien, por hipótesis, $\exists\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$. Demostremos que $\exists\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.
En efecto, para cualquier $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ tal que $\forall x:|x-a|<\delta$, se verifica que

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-L\right|<\varepsilon \qquad [2]$$

Como $c_x \in (a,x)$, siempre que $|x-a|<\delta$, se tiene que $|c_x-a|<\delta$, y teniendo en cuenta [2], se verifica que $|x-a|<\delta$ y, por tanto,

$$\left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}-L\right|<\varepsilon$$

Lo que prueba que $\exists \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}=L$. Así, teniendo en cuenta [1], resulta que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

C.Q.D.

Ejemplos:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$

2) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{3\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-2}{2\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg} x+3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{6\operatorname{tg} x\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)+1+\operatorname{tg}^2 x}{4\operatorname{tg} x\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)+5\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)}=\frac{-10}{2}=-5$

<u>Otras formas de la regla de L'Hôpital</u>:

El esquema

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

es válido para $x\to a$, $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to +\infty$ y $x\to -\infty$, tanto si la indeterminación es del tipo $\frac{0}{0}$, como si es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, e independientemente de que el límite sea finito o infinito.

Ejemplos:

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{\log x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}x=+\infty$ ($\log$ es el logarimo natural)

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\log x}{x-\sqrt{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

<u>Indeterminación</u> $[0\cdot\infty]$: para transformarla en una de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ tendremos en cuenta que:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{cotg} x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\frac{1}{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{0}{1}=0$$

$$\lim_{x\to 0+}x\log x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}x=0$$

Indeterminación $[\infty-\infty]$: puede resolverse utilizando la regla de L' Hôpital; para ello, se suelen realizar las operaciones indicadas, obteniéndose indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{x-e^x+1}{x\left(e^x-1\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{xe^x+e^x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{xe^x+2e^x}=-\frac{1}{2}$$

Indeterminaciones $\left[\infty^0,\ 0^0 \text{ y } 1^\infty\right]$: para aplicar la regla de L'Hôpital, las transformamos en la forma $0\cdot\infty$ teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}e^{g(x)\cdot\log f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\cdot\log f(x)}$$

donde $\log$ representa el logaritmo natural.

Ejemplos:

1) $$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\left[\infty^0\right]=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\ln x}\ln\left(x^2+4\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln\left(x^2+4\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+4\right)}{\ln x}}=e^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+4}}{\frac{1}{x}}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+4}}=e^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x}}=e^2$$

2) $$\lim_{x\to 0^+}x^x=\left[0^0\right]=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x^x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x^x}=e^{[0\cdot\infty]}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)}=e^0=1$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=\left[0^0\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x\log x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\log x}=e^0=1$ (donde hemos usado que $\lim\limits_{x\to 0+}x\log=0$)

3) $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{[\infty\cdot 0]} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\left[\frac{0}{0}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} =$$

$$= e^1 = e$$

<u>Ejemplos: (Límites que no se puede resolver por L´Hôpital)</u>

a) El siguiente límite no puede resolverse aplicando la regla de L’Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \left(\text{aplicando L'Hôpital}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \left(\text{aplicando L'Hôpital}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

que es el límite que queríamos resolver.
Sin embargo, este límite se calcula como sigue:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = \sqrt{0+1} = 1$$

b) Este otro límite tampoco puede resolverse aplicando la regla de L’Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\log x}$$

Este límite presenta una indeterminación del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, pero la utilización de la regla de L’Hôpital no la resuelve (¡¡Inténtalo!!). Sin embargo, su resolución no es difícil:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\log x} = \lim_{x\to\infty}\left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\log x} = +\infty$$

ya que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = 1$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\log x} = +\infty$.

c) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+\operatorname{sen}x}{e^x+\cos x}$

Se presenta una inderteminación del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, pero aplicando la regla de L’Hôpital se entra en un bucle infinito. Sin embargo, dividiendo numerador y denominador por e^x obtenemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\operatorname{sen}x}{e^x+\cos x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{e^x+\operatorname{sen}x}{e^x}}{\dfrac{e^x+\cos x}{e^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{\operatorname{sen}x}{e^x}}{1+\dfrac{\cos x}{e^x}}=1$$

ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sen}x}{e^x}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{e^x}$.

d) Para calcular $\lim\limits_{x\to0}x\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ no se puede aplicar L'Hôpital, y sin embargo, dicho límite no es difícil de calcular, ya que $\lim\limits_{x\to0}x=0$ y $\left|\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|\le1$ (es una función acotada), luego

$$\lim_{x\to0}x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

Ejercicios de Selectividad

Unidad 6:
PRIMITIVAS E INTEGRALES INDEFINIDAS

1. CONCEPTO DE PRIMITIVA

PRIMITIVAS

Definición:

Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $F : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones reales de variable real. Se dice que F es una **primitiva** de f cuando

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

Ejemplos:

a) Una primitiva de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es la función $F(x) = -\cos x$, ya que $F'(x) = \operatorname{sen} x = f(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Una primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{x} \ \ \forall x \in (0,+\infty)$, es la función $F(x) = \log x \ \ \forall x \in (0,+\infty)$, ya que $F'(x) = (\log x)' = \dfrac{1}{x} = f(x) \ \ \forall x \in (0,+\infty)$.

Ejercicios:

1. *Comprueba, en cada caso, que F es una primitiva de f:*

1) $F(x) = \sqrt[4]{x^4 - 2} - 287$ $\qquad f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt[4]{(x^4-2)^3}}$

2) $F(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ $\qquad f(x) = \dfrac{-x-2}{(1+x)^2}$

3) $F(x) = \dfrac{(x^2+1)^6}{6}$ $\qquad f(x) = 2x(x^2+1)^5$

2. *Calcula una primitiva de las siguientes funciones:*

1) $y = x^2$ $\qquad$ 5) $y = x$

2) $y = \operatorname{sen} x$ $\qquad$ 6) $y = x^3$

3) $y = 5x^4 - 2$ $\qquad$ 7) $y = \dfrac{1}{x}$

4) $y = e^{2x}$ $\qquad$ 8) $y = x + k$ con $k \in \mathbb{R}$

3. *Halla la primitiva de* $f(x) = e^{2x}$ *que valga e para* $x = 0$.

Nótese que si una función f tiene una primitiva F también $F+k$ (siendo $k \in \mathbb{R}$) es una primitiva de f.

Al conjunto de todas las primitivas de una función dada f, lo representaremos por

$$\int f(x)\,dx = \{F : F \text{ es una primitiva de } f\} = \{F : F'(x) = f(x)\}$$

y se lee: **integral indefinida de *f***.

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \text{ significa que } F'(x) = f(x)}$$

El signo $\int$ (S de «suma») fue propuesto por Leibniz en una carta a Henry Oldenburg, secretario de la Royal Society, escrita en 1675. «Será útil, sugería Leibniz, escribir dicho signo en lugar de omn, que se usaba hasta entonces para indicar la integración»:

$$\text{omn } x^2 = \int x^2 \text{ d}x$$

Posteriormente, en 1690, Jacques Bernoulli (Jacques I) sugirió el nombre de «integral» a Leibniz

Propiedades inmediatas:

(1) $\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x)$

La derivada de la integral indefinida es la función integrando, esto es, la derivada y la integral indefinida son operaciones inversas.

(2) $\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

La integral de una suma es igual a la suma de las integrales de los sumandos.

En efecto:

Si F y G son primitivas de f y g, respectivamente, entonces $F' = f$ y $G' = g$, y como $(F+G)' = F' + G'$, resulta que

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = (F+G)(x) + k = F(x) + k_1 + G(x) + k_2 = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

(3) $\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$ con $c \in \mathbb{R}$

La integral de un número real por una función es igual al número real por la integral de la función.

En efecto:

Si F es una primitiva de f se tiene que $F' = f$, y como $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, resulta que

$$\int c \cdot f(x)\,dx = \big(cF(x)\big) + k = cF(x) + k = c\big(F(x) + k_1\big) = c \cdot \int f(x)\,dx \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

donde $ck_1 = k$.

2. TABLAS DE INTEGRALES

La siguiente tabla de integrales inmediatas se obtiene calculando la correspondiente primitiva de la función, por lo que es muy importante no perder nunca de vista de dónde han salido esas integrales, esto es, el concepto de primitiva de una función. Ahora bien, como se suelen usar mucho y son la base para calcular otras integrales más complejas es conveniente memorizar dicha tabla.

Funciones simples

	Forma simple
Potencial $n \neq -1$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
Logarítmico	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + k$
Exponencial	$\int e^x dx = e^x + k$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$
Seno	$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + k$
Coseno	$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + k$
Tangente	$\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + k$ $\int \left(1+\operatorname{tg}^2 x\right) dx = \operatorname{tg} x + k$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + k$
Cotangente	$\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{cotg} x + k$ $\int \left(1+\operatorname{cosec}^2 x\right) dx = -\operatorname{cotg} x + k$ $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + k$
Arco seno =arco coseno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + k$
Arco tangente = – Arco cotangente	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + k$ $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + k$

Funciones compuestas

	Forma compuesta
Potencial $n \neq -1$	$\int f'(x) f(x)^n dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + k$

Logarítmico	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left\|f(x)\right\| + k$
Exponencial	$\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + k$ $\int a^{f(x)} f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + k$
Seno	$\int \cos f(x)\cdot f'(x)dx = \operatorname{sen} f(x) + k$
Coseno	$\int \operatorname{sen} f(x)\cdot f'(x)dx = -\cos f(x) + k$
Tangente	$\int \sec^2 f(x)\cdot f'(x)dx = \operatorname{tg} f(x) + k$ $\int \left[1+\operatorname{tg}^2 f(x)\right]\cdot f'(x)dx = \operatorname{tg} f(x) + k$ $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx = \operatorname{tg} f(x) + k$
Cotangente	$\int \operatorname{cosec}^2 f(x)\cdot f'(x)dx = -\operatorname{cotg} f(x) + k$ $\int \left(1+\operatorname{cosec}^2 f(x)\right) f'(x)dx = -\operatorname{cotg} f(x) + k$ $\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}dx = -\operatorname{cotg} f(x) + k$
Arco seno **= – arco coseno**	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}dx = \operatorname{arcsen} f(x) + k$
Arco tangente **= – Arco cotangente**	$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}dx = \operatorname{arctg} f(x) + k$ $\int \frac{f'(x)}{a^2+f(x)^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{f(x)}{a} + k$
Neperiano – Arco tangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx = \text{neperiano} + \text{arcotangente} + k$ $M \neq 0, \quad ax^2+bx+c$ irreducible

Ejercicio:

4. *Calcula las siguientes integrales inmediatas:*

1) $\int \left(x^3+2x-1\right)dx$

2) $\int \frac{2}{x}dx$

3) $\int \frac{1}{2}e^x dx$

4) $\int (x+1)^2\, dx$

12) $\int \frac{1}{6+6x^2}dx$

13) $\int \frac{9}{9x^2+9}dx$

14) $\int \sqrt[6]{x}\,dx$

15) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

5) $\int \frac{1}{x^3}dx$

6) $\int \frac{1}{2+2x^2}dx$

7) $\int \frac{x^3+5x^2+x-4}{x}dx$

8) $\int 10^x dx$

9) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \right) dx$

10) $\int \left(2^x - x^2 \right) \mathrm{d}x$

11) $\int \frac{4}{1-\operatorname{sen}^2 x}\, \mathrm{d}x$

16) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

17) $\int \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}dx$

18) $\int \frac{1}{\sqrt{8x}}dx$

19) $\int \sqrt[3]{5x^2}\,dx$

20) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{7}{x^2} - 8 \right) dx$

21) $\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x$

22) $\int \frac{2^x}{3^x}\, \mathrm{d}x$

Ejemplos (de tipo arco):

1) $\int \frac{3x}{4+x^2}dx = 3\int \frac{x}{4+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}dx = \frac{3}{4}\int \frac{x}{1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}dx = \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C$

2) $\int \frac{5}{2+x^2}dx = \frac{5\sqrt{2}}{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx = \frac{5\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$

3) $\int \frac{1}{x^2-4x+13} = \int \frac{1}{(x-2)^2+9}dx = \int \frac{\frac{1}{9}}{\left(\frac{x-2}{3}\right)+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x-2}{3}\right)+1}dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right) + C$

4) $\int \frac{5}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{9}}}dx = \frac{5}{3}\cdot\frac{3}{2}\int \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}}dx = \frac{5}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{3}\right) + C$

3. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

3.1. Integración por cambio de variable

Integración por cambio de variable:

Siempre que en un integrando reconozcamos una expresión del tipo $g'(f(x))\,f'(x)$ el cambio de variable proporcionará buenos resultados. El cambio que hay que hacer es:

$$\begin{cases} t = f(x) \\ dt = f'(x)\,dx \end{cases}$$

Ejemplos:

1) $\displaystyle \int \frac{\log x}{x}dx = \begin{bmatrix} t = \log x \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{bmatrix} = \int tdt = \frac{t^2}{2} = \frac{\log^2 x}{2} + C$

2) $\displaystyle \int \frac{(2+\log x)^2}{x}dx = \begin{bmatrix} t = 2+\log x \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{bmatrix} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} = \frac{(2+\log x)^3}{3} + C$

3) $\displaystyle \int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}dx = \begin{bmatrix} t = 3^x \\ dt = 3^x \log 3 dx \Rightarrow 3^x dx = \frac{dt}{\log 3} \end{bmatrix} = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{1}{\log 3}dt = \frac{1}{\log 3}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt =$

$\displaystyle = \frac{1}{\log 3}\operatorname{arcsen} t = \frac{1}{\log 3}\operatorname{arcsen} 3^x + C$

Ejercicio:

5. *Calcula las siguientes integrales, por cambio de variable:*

1) $\int \sqrt[3]{5x^2-10x}\cdot(10x-10)\,\mathrm{d}x$

2) $\int \sqrt{x^2+1}\cdot x\,\mathrm{d}x$

3) $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$

4) $\int x\sqrt{1+3x^2}\,\mathrm{d}x$

5) $\int x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x$

6) $\int (5x+1)^4\,\mathrm{d}x$

7) $\int (e^x+1)^3 e^x dx$

8) $\displaystyle \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$

9) $\int x\operatorname{sen}(x^2+4)dx$

10) $\displaystyle \int \frac{x^2}{x^3+2}dx$

11) $\displaystyle \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

12) $\displaystyle \int \frac{x}{1+(x^2+4)^2}dx$

13) $\displaystyle \int \frac{x^2}{\sqrt{1-(x^3-1)^2}}dx$

14) $\displaystyle \int e^{\ln x}\frac{1}{x}dx$

15) $\int e^{-3x}dx$

16) $\int x^2 \operatorname{sen} x^3 dx$

17) $\displaystyle \int \frac{2x}{1+x^4}dx$

18) $\displaystyle \int \frac{1}{1+(x+1)^2}dx$

19) $\displaystyle \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

20) $\displaystyle \int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

3.2. Integración por partes

Teorema (fórmula de integración por partes):

Sean $D \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y f y g dos funciones con derivadas continuas en D. Entonces:

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Demostración:

Partiendo de la fórmula de la derivada de un producto,

$$(fg)' = f'g + fg'$$

e integrando ambos miembros, se obtiene que:

$$\int (fg)' = \int f'g + \int fg' \Rightarrow fg = \int f'g + \int fg' \Rightarrow$$

y despejando:

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

C.Q.D.

Fórmula de integración por partes:

En los cálculos se procede como sigue:

$$u = f(x) \xrightarrow{\text{derivando}} du = f'(x)dx$$

$$dv = g'(x)dx \xrightarrow{\text{integrando}} v = g(x)$$

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \quad \text{Fórmula de integración por partes}}$$

Para tomar la función u seguiremos la siguiente regla ordenada (→): ALPES

- A: arco
- L: logaritmos
- P: polinomios
- E: exponenciales
- S: seno, coseno, …

Ejemplos:

1) $$\int \log(x+1)dx = \begin{bmatrix} u = \log(x+1) \xrightarrow{\text{derivando}} du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ dv = dx \xrightarrow{\text{integrando}} v = x \end{bmatrix} = x\log(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx =$$

$$= x\log|x+1| - \int dx + \int \frac{dx}{x+1}dx = x\log|x+1| - x + \log|x+1| + C$$

2) $$\int x^3 \log x dx = \begin{bmatrix} u = \log x \xrightarrow{\text{derivando}} du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x^3 dx \xrightarrow{\text{integrando}} v = \dfrac{x^4}{4} \end{bmatrix} = \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{4}\int x^4 \frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{4}\int x^3 dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{16}x^4 + C$$

3)

$$\int \sqrt{x}\log x dx = \left[\begin{array}{l} u = \log x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = \sqrt{x}dx \Rightarrow v = \int \sqrt{x}dx = \dfrac{2\sqrt{x^3}}{3} \end{array}\right] = \log x \cdot \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \int \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\cdot\log x - \frac{2}{3}\int x^{1/2}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\cdot\log x - \frac{2}{3}\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\cdot\log x - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C$$

4)

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx \Rightarrow v = \int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x \end{array}\right] = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx =$$

$$= x\operatorname{tg} x - \log|\cos x| + C$$

<u>Ejercicio:</u>

6. *Calcula las siguientes integrales, aplicando la fórmula de integración por partes:*

1) $\int x\cos x dx$	*6)* $\int e^x \operatorname{sen} x dx$	*11)* $\int \operatorname{arcsen} x dx$
2) $\int xe^x dx$	*7)* $\int \ln x dx$	*12)* $\int \arccos x dx$
3) $\int x^2 e^x dx$	*8)* $\int x\ln x dx$	*13)* $\int x\sqrt{1+x}dx$
4) $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$	*9)* $\int x^2 \ln x dx$	
5) $\int x^2 \cos x dx$	*10)* $\int \operatorname{arctg} x dx$	

3.3. <u>Integración de funciones racionales</u>

<u>Integración de funciones racionales:</u>

Integrales del tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

donde P y Q son funciones polinómicas.

Supondremos que $\text{grado}P < \text{grado}Q$, pues si no lo fuese, haríamos la división entera de P y Q, y podríamos escribir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

con $\text{grado}R < \text{grado}Q$.

<u>Caso 1: El polinomio $Q(x)$ tiene solo raíces reales simples:</u>

Calcula $\int \frac{4}{x^2-1}dx$

1) Descomponemos el denominador, obteniendo sus raíces:

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

2) Descomponemos la función $\frac{4}{x^2-1}$ en suma de fracciones que tienen por numerador una constante y por denominador cada uno de los factores:
$$\frac{4}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$
3) Determinamos los valores de A y B operando, igualando los numeradores y dando valores a x:
$4=A(x+1)+B(x-1)$ que para $x=1$ es $A=2$ y para $x=-1$ es $B=-2$
4) Integramos:
$$\int\frac{4}{x^2-1}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{-2}{x+1}\right)dx=2\ln|x-1|-2\ln|x+1|+C$$

<u>Caso 2: Que el polinomio $Q(x)$ tenga una raíz real múltiple</u>

Calcula $\int\frac{4x^2-3x+2}{x^3-3x^2+3x-1}dx$

1) Factorizamos el denominador, obteniendo sus raíces:
$$x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$$
2) Descomponemos $\frac{4x^2-3x+2}{x^3-3x^2+3x-1}$ en suma de tres fracciones que tienen por numerador una constante y por denominador $x-1$ elevado a 1, 2 y 3:
$$\frac{4x^2-3x+2}{x^3-3x^2+3x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}$$
3) Determinamos los valores de las constantes $A,\ B$ y C:
$$4x^2-3x+2=A(x-1)^2+B(x-1)+C$$
Para $x=1$ obtenemos $C=3$
Derivando: $8x-3=2A(x-1)+B$ que para $x=1$ resulta $B=5$
Volvemos a derivar: $8=2A\Rightarrow A=4$
4) Integramos:
$$\int\frac{4x^2-3x+2}{x^3-3x^2+3x-1}dx=\int\frac{4}{x-1}dx+\int\frac{5}{(x-1)^2}dx+\int\frac{3}{(x-1)^3}dx=$$
$$=4\ln|x-1|-\frac{5}{x-1}-\frac{3}{2(x-1)^2}+C$$

<u>Caso 3: Que el polinomio $Q(x)$ tenga raíces reales simples y múltiples</u>

Se trata de combinar lo visto en los casos 1 y 2.

Calcula $\int\frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1}dx$

1) Factorizamos el denominador, obteniendo sus raíces:
$$x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$$

2) Descomponemos $\dfrac{3x+7}{x^3-x^2-x+1}$ en suma de tres fracciones que tienen por numerador una constante y por denominador $x+1$ y $x-1$ elevado a 1 y a 2:

$$\frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

3) Determinamos los valores de las constantes $A,\ B$ y C:

$$3x+7=A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)$$

$x=1\to 2C=10\to C=5$

$x=-1\to 4A=4\to A=1$

$x=0\to B=A+C-7\to B=-1$

4) Integramos:

$$\int\frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1}dx=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}\right)dx=\ln|x+1|-\ln|x-1|-\frac{5}{x+1}+C$$

<u>Caso 4: Que el polinomio $Q(x)$ tenga raíces complejas conjugadas</u>

Calcula $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^3+2x^2+5x}dx$

1) Factorizamos el denominador, obteniendo sus raíces:

$$x^3+2x^2+5x=x\left(x^2+2x+5\right)$$

2) Descomponemos la fracción en suma de dos fracciones. La primera con numerador A y denominador x, y la segunda con numerador $Mx+N$ y denominador el polinomio irreducible (en $\mathbb{R}$) x^2+2x+5:

$$\frac{2x+1}{x\left(x^2+2x+5\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+2x+5}$$

3) Determinamos las constantes $A,\ M$ y N:

$$2x+1=A\left(x^2+2x+5\right)+(Mx+N)x\Rightarrow A=\frac{1}{5},\ M=-\frac{1}{5},\ N=\frac{8}{5}$$

4) Integramos:

$$\int\frac{2x+1}{x^3+2x^2+5x}dx=\int\frac{\frac{1}{5}}{x}dx+\int\frac{-\frac{1}{5}x+\frac{8}{5}}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{5}\ln|x|-\frac{1}{5}\int\frac{x-8}{x^2+2x+5}dx=$$

$$=\frac{1}{5}\ln|x|-\frac{1}{10}\ln\left|x^2+2x+5\right|-\frac{9}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$$

<u>Ejercicio:</u>

7. *Calcula las siguientes integrales, aplicando la fórmula de integración por partes:*

1) $\displaystyle\int\frac{4x^3+7x+2}{2x+1}dx$

11) $\displaystyle\int\frac{x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)}dx$

2) $\int \frac{2x^3+3x^2-2x+3}{x^2+x-2}dx$

3) $\int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2}dx$

4) $\int \frac{2x-1}{x^2-7x+10}dx$

5) $\int \frac{x^3-x^2+1}{x^2-5x+6}dx$

6) $\int \frac{x+1}{x-1}dx$

7) $\int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^2-4}dx$

8) $\int \frac{x^4-x^2}{x-\frac{1}{2}}dx$

9) $\int \frac{x^2+1}{x(x+1)(x+3)}dx$

10) $\int \frac{1}{x^2+x-6}dx$

12) $\int \frac{1}{x^2-4}dx$

13) $\int \frac{3x+2}{x^3-x}dx$

14) $\int \frac{1}{(x-2)(x^2-9)}dx$

15) $\int \frac{x-2}{(x+2)(x^2+3x+2)}dx$

16) $\int \frac{2x-1}{x^2-7x+10}dx$

17) $\int \frac{x^3-x^2+1}{x^2-5x+6}dx$

18) $\int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2}dx$

19) $\int \frac{3x-1}{(x-1)(x^2-1)}dx$

3.4. <u>Integración de funciones circulares</u>

<u>Integración de funciones circulares:</u>

Las primitivas del tipo $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, se resuelven dependiendo de la paridad de los exponentes m y n.

- Si m es impar y n es par, hacemos el cambio $\cos x = t$.
- Si m es par y n es impar, hacemos el cambio $\operatorname{sen} x = t$.
- Si m y n son impares, hacemos el cambio $\cos x = t$ o bien $\operatorname{sen} x = t$.
- Si m y n son pares, hacemos el cambio $\operatorname{tg} x = t$, con el que se obtienen las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Para calcular la primitiva $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx$ y antes de hacer el cambio correspondiente, utilizaremos las siguientes fórmulas, para transformarla en otra más sencilla:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$
$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\ 2x$$

Ejemplos:

1) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x dx$

$$\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x dx = \int \operatorname{sen} x\left(1-\cos^2 x\right)\cos^4 x dx = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ -\operatorname{sen} x dx = dt \end{bmatrix} =$$
$$= -\int\left(1-t^2\right)t^4 dt = -\int\left(t^4 - t^6\right)dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

2) $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x dx$

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x dx = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \cos x dx = \int \operatorname{sen}^4 x\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^2 \cos x dx =$$
$$= \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x = t \\ \cos x dx = dt \end{bmatrix} = \int t^4\left(1-t^2\right)^2 dt = \int t^4\left(1-2t^2+t^4\right)dt = \int\left(t^4 - 2t^6 + t^8\right)dt =$$
$$= \frac{t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{2\operatorname{sen}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{sen}^9 x}{9} + C$$

3) $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x dx$

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \cos x dx = \int \operatorname{sen}^5 x\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)\cos x dx = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x = t \\ \cos x dx = dt \end{bmatrix} =$$
$$= \int t^5\left(1-t^2\right)dt = \int\left(t^5 - t^7\right)dt = \frac{t^6}{6} - \frac{t^8}{8} + C = \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{sen}^8 x}{8} + C$$

Cuando en el integrando aparezcan funciones trigonométricas genéricas, realizaremos el cambio $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. A partir de él se obtienen las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Ejemplo: $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \to \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2}{1+t^2+1-t^2}dt =$$

$$=\int \frac{2}{2}dt = t + C = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$$

3.5. Integración de funciones irracionales

Integración de funciones irracionales:

Las primitivas del tipo $\int R\left(x, \sqrt[n]{x^m}, \ldots, \sqrt[p]{x^q}\right)dx$, se resuelven haciendo el cambio de variable $x = t^M$, donde $M = m.c.m.(n, \ldots, p)$. Con este cambio nos aseguramos que desaparezcan las raíces de la integral.

Ejemplo: $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} x = t^4 \\ dx = 4t^3dt \end{bmatrix} = \int \frac{t}{1+t^2}4t^3dt = 4\int \frac{t^4}{1+t^2}dt =$$

$$= 4\int\left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 4\left[\frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t\right] = 4\left[\frac{\sqrt[4]{x^3}}{3} - \sqrt[4]{x} + \operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}\right] + C$$

Integración de funciones irracionales:

Las primitivas del tipo $\int R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}, \ldots, \sqrt[p]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^q}\right)dx$, se resuelven haciendo el cambio de variable $\frac{ax+b}{cx+d} = t^M$, donde $M = m.c.m.(n, \ldots, p)$. Con este cambio nos aseguramos que desaparezcan las raíces de la integral.

Ejercicios de Selectividad

4. APLICACIÓN: PROBLEMAS DE VALORES INICIALES

La integral indefinida nos permite hallar una función $f(x)$ conocida su derivada $f'(x)$, pues

$$f(x) = \int f'(x)dx = F(x) + c$$

Pero $f(x)$ queda indefinida, pues la constante c no se conoce. Para determinar c es necesario dar un dato adicional; por ejemplo, el punto $(a, f(a))$ de la función. A este dato se le llama **valor inicial**. Por lo dicho, de $f(a) = F(a) + c$ se obtiene que

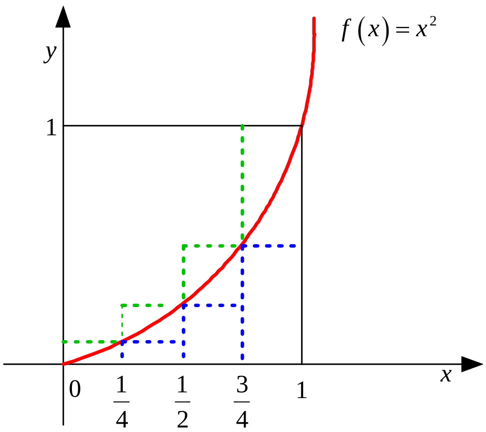
$$c = f(a) - F(a).$$

Ejercicios de Selectividad

Unidad 7:
INTEGRAL DEFINIDA

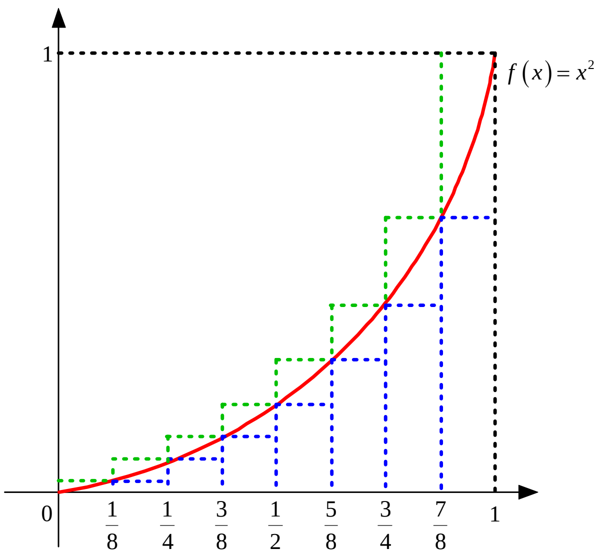
1. INTEGRAL DEFINIDA

El problema geométrico de la determinación del área de ciertas superficies planas es el origen y la base del Cálculo Integral. Se atribuye a Eudoxo (ca. 370 a.C.) la invención del método de *exhaución*, una técnica para calcular el área de una región aproximandola por una sucesión de polígonos de forma que en cada paso se mejora la aproximación anterior. Arquímedes (287-212 A.C.) perfeccionó este método y, entre otros resultados, calculó el área de un segmento de parábola y el volumen de un segmento de paraboloide, así como el área y el volumen de una esfera.
Las ideas expuestas por Arquímedes (en carta a Dositeo) son fundamentalmente las siguientes:
Se desea medir el área encerrada por el siguiente segmento parabólico (entre 0 y 1), que representaremos por *S*:



$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{9}{16}<S<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}1^2$$

$$\frac{7}{32}<S<\frac{15}{32}\Leftrightarrow 0,22<S<0,47$$



$$\frac{1}{8}0^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2<S<$$

$$<\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2+\frac{1}{8}1^2$$

$$\frac{35}{128}<S<\frac{51}{128}\Leftrightarrow 0,27<S<0,40$$

Haciendo cada vez rectángulos de base más pequeña y aplicando la fórmula para sumar los primeros *n* cuadrados[7], se tiene que:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{n(n-1)\frac{2n-1}{6}}{n^2}\right)<S<\frac{1}{n}\left(\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^2}\right)$$

$$\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}<S<\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\le S\le\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

$$\frac{1}{3}\le S\le\frac{1}{3}\Rightarrow S=\frac{1}{3}$$

Como consecuencia de lo anterior, podemos dar la siguiente definición:

Definición:

Representaremos por $\int_a^b f(x)dx$ el área del recinto limitado por la función positiva $y=f(x)$ y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$. Se lee «**integral definida entre *a* y *b* de $f(x)$ diferencial de** x». La función $y=f(x)$ se denomina *integrando*, el intervalo $[a,b]$ se denomina *intervalo de integración* y los valores a y b se llaman *límites de integración* (a se denomina límite inferior y b límite superior, de la integral). Además, la notación $\int_a^b f(x)dx$ (debida a Leibniz) también indica el valor $f(x)$ que toma la función f en un punto genérico $x\in[a,b]$ y *dx* indica la *variable de integración*, que como puede ser cualquier letra, se denomina variable muda.

Si dejamos *a* fijo y hacemos que *b* sea variable, la expresión $\int_a^x f(t)dt$ para un *x* dado representa el área limitada por la función, la recta vertical $t=a$ y la vertical que pasa por *x*. Es, por tanto, una función de *x* que llamaremos **función área**.

[7] La fórmula para sumar los *n* primeros cuadrados es: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Cuando existe la integral $\int_a^b f(t)\,dt$, se dice que la **función** $f(t)$ es (Riemann) **integrable en el intervalo** $[a,b]$.

Geogebra
Integral and Riemann sums Autor: Daniel Mentrard Tema: Cálculo, Integral Definida, Funciones, Gráfica de Funciones, Cálculo integral https://www.geogebra.org/m/qbqdtxvq?s=08

2. PROPIEDADES INMEDIATAS

(1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

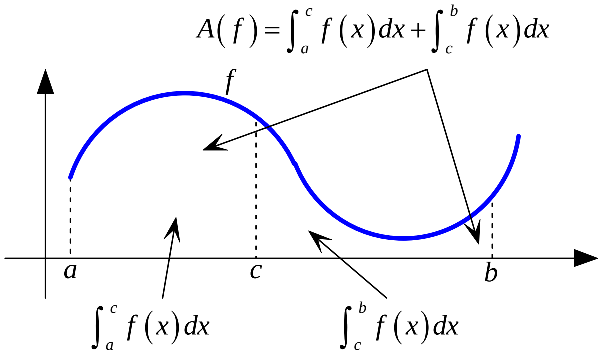
Es lo mismo que decir que un segmento tiene área cero.

(2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Para nosotros va a ser un simple convenio.

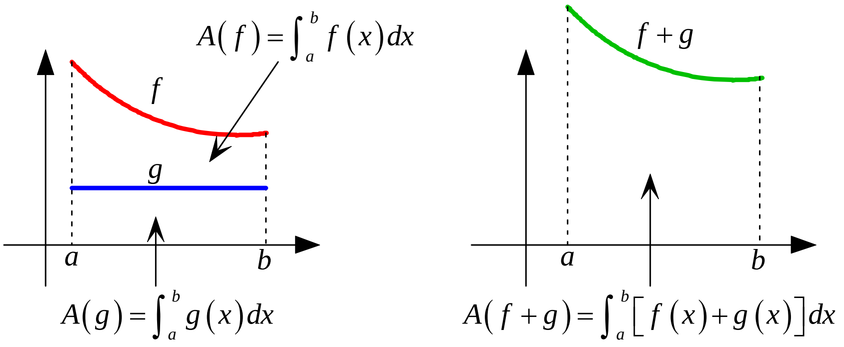
(3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ para $a < c < b$

Si dividimos el área a calcular en dos trozos, el área total será igual a la suma de las áreas de cada uno de los trozos.



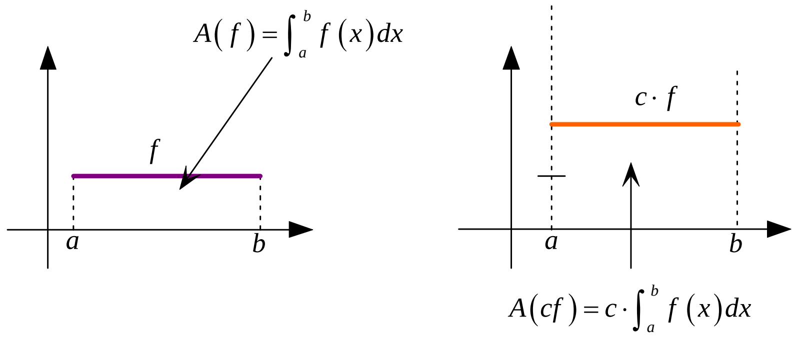
(4) $\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

La situación es la misma que en la propiedad 3, aunque un poco más delicada.



(5) $\int_a^b cf(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

La diferencia entre las gráficas de f y $c\cdot f$, es que cambiamos la escala de altura (en la segunda) en un factor c, y, por tanto, el área también debe variar en dicho factor.



3. TEOREMAS IMPORTANTES

Teorema Fundamental del Cálculo:

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y $F(x)=\int_a^x f(t)dt,$ entonces

(1) $F(x)$ es derivable

(2) $F'(x)=f(x) \quad \forall x\in[a,b]$

Demostración:

$$F'(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\int_a^{x_0+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)dt}{h}=f(x_0) \qquad \forall x_0\in D$$

pues si $h\to0$ la altura tiende a ser $f(x_0)$. C.Q.D.

Regla de Barrow:

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

Demostración:

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ se verifica que

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

Supongamos que $G(x)$ es otra primitiva de $f(x)$. Entonces: $F(x)=G(x)+k$

Vamos a determinar k:

$$\left.\begin{array}{l}F(a)=0\\ F(a)=G(a)+k\end{array}\right\}\Rightarrow G(a)+k=0\Rightarrow k=-G(a)$$

Por otro lado

$$F(b)=\int_a^b f(t)\,dt$$

luego

$$F(b)=G(b)+k=G(b)-G(a)$$

de donde se deduce que

$$\int_a^b f(t)\,dt=G(b)-G(a) \qquad \text{C.Q.D.}$$

Teorema del Valor Medio:

Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces, existe un punto $c\in(a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$$

Demostración:

Sea $G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. Se tiene que G es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), luego por el teorema del valor medio para derivadas, $\exists c\in(a,b)$ tal que

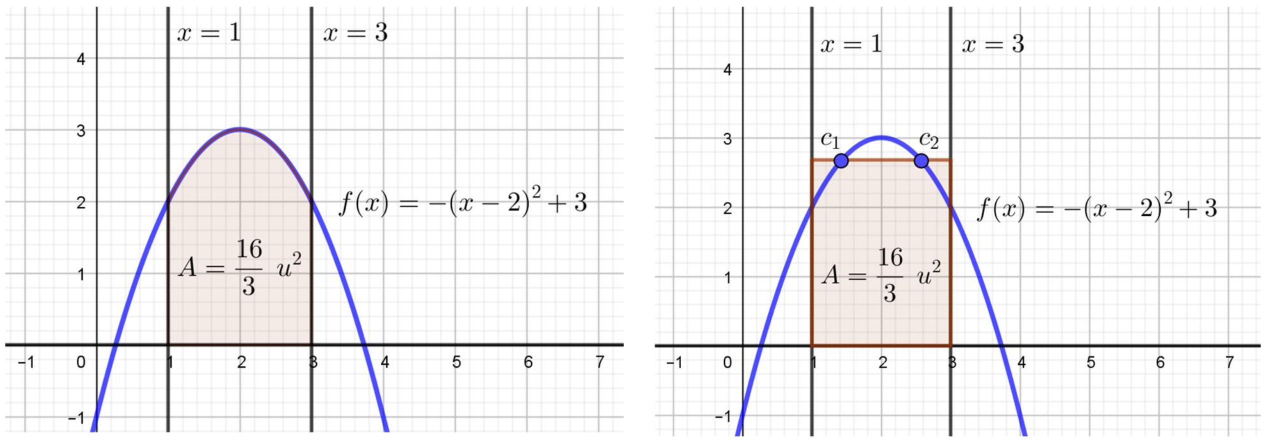
$$G(b)-G(a)=G'(c)(b-a)$$

es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a) \qquad \text{C.Q.D.}$$

Interpretación geométrica:

El área limitada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ coincide con el área del rectángulo de base la longitud del intervalo, $b-a$, y altura $f(c)$, donde c es el punto cuya existencia asegura el teorema.



Ejemplos:

(1) Determina el punto c, cuya existencia asegura el TVM para integrales, de la función $f(x)=-(x-2)^2+3$, en el intervalo $[1,3]$.

Por una parte, $f(x)$ es continua en $[1,3]$, por ser una función polinómica, y

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \left[-(x-2)^2+3\right]dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-x\right]_1^3 = \frac{16}{3}\ u^2$$

Y, por otra,

$$\frac{16}{3} = f(c)-(3-1) \Rightarrow \frac{16}{3} = \left(-(c-2)^2+3\right)\cdot 2 \Rightarrow c = \begin{cases} 2-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ 2+\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

y ambos puntos están en $(1,3)$

(2) Sabiendo que el área que encierra la función $f(x)=2x+1$ con el eje OX, en el intervalo $[1,4]$ es de 18 u^2, vamos a determinar el punto $c\in(1,4)$ cuya existencia garantiza el teorema del valor medio para integrales.
Que el área que encierra la función con el eje OX, en el intervalo $[1,4]$ quiere decir que

$$\int_1^4 (2x+1)\,dx = 18\ u^2$$

y como la base del rectángulo es $4-1=3$, se tiene que $f(c)=6$ (para que el área de dicho rectángulo sea 18), y así:

$$f(c)=6 \Rightarrow 2c+1=6 \Rightarrow c=\frac{5}{2}\in(1,4)$$

Ejercicios de Selectividad

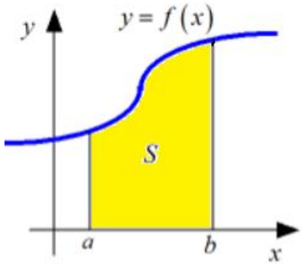
Unidad 8:
APLICACIONES DE LA INTEGRAL

1. ÁREAS DE RECINTOS PLANOS

1.1. Recinto Limitado por la curva $y = f(x)$**, el eje OX y las rectas** $x = a$ y $x = b$

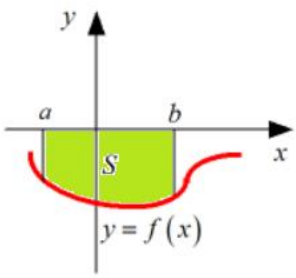
a) Si $f(x) \geq 0$ en todo el intervalo [a, b]

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$



b) Si $f(x) \leq 0$ en todo el intervalo [a, b]

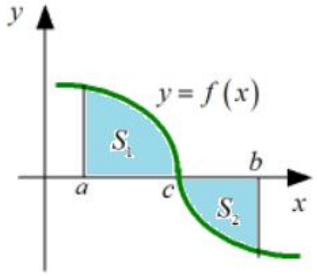
$$\boxed{S = -\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx}$$



c) Si $f(x)$ corta al eje *OX* en el punto $c \in [a, b]$

$$\boxed{S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx}$$

El punto *c* se halla resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.

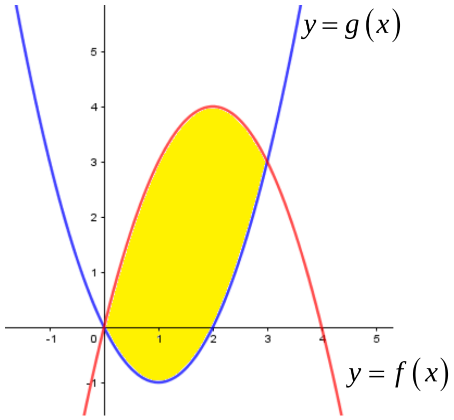


1.2. Recinto limitado por dos curvas, $y=f(x)$ e $y=g(x)$, en el intervalo [a, b]

a) Si $f(x)\geq g(x)$ en todo [a, b]

$$\boxed{S=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx}$$

Para poder aplicar esta fórmula no es necesario que las funciones sean positivas. ***Se puede aplicar en cualquier caso***.



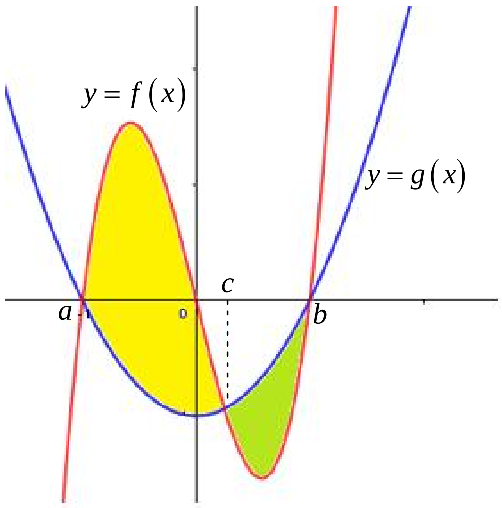
b) Si $f(x)\geq g(x)$ y, $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en el intervalo [a, b] cuando x = c

$$\boxed{S=S_1+S_2=\int_a^c\left(f(x)-g(x)\right)dx+\int_c^b\left(g(x)-f(x)\right)dx}$$

El valor c del punto de corte se halla resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$$

También hay que determinar qué función está por encima en cada trozo.

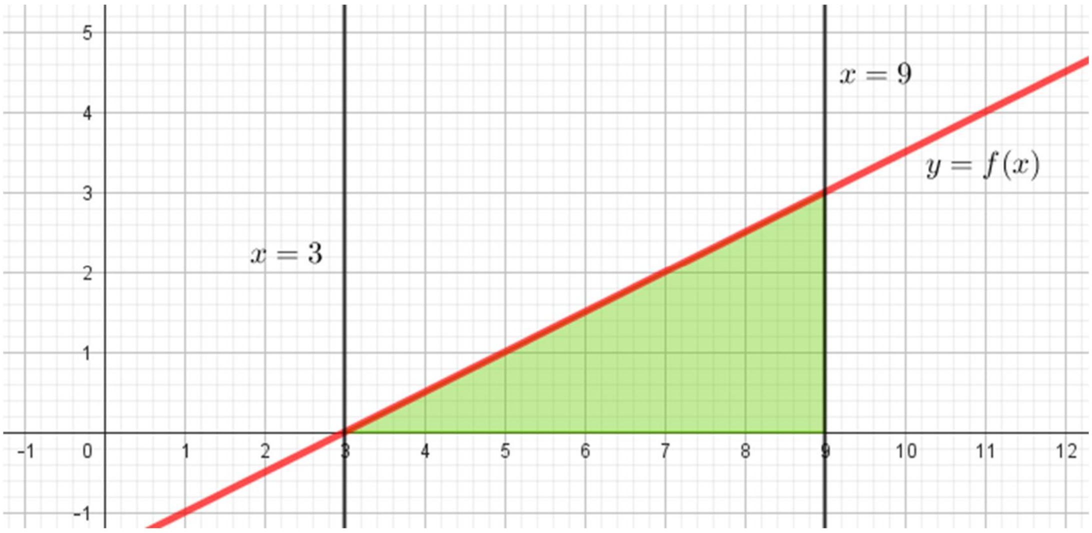


1.3. Ejercicios resueltos de cálculo de áreas por integración

1.-Calcular el área encerrada por la función: $f(x)=\dfrac{x-3}{2}$, el eje OX, y las rectas x = 3 y x = 9

Se trata de un triángulo de base 6 y altura $f(9)=3$

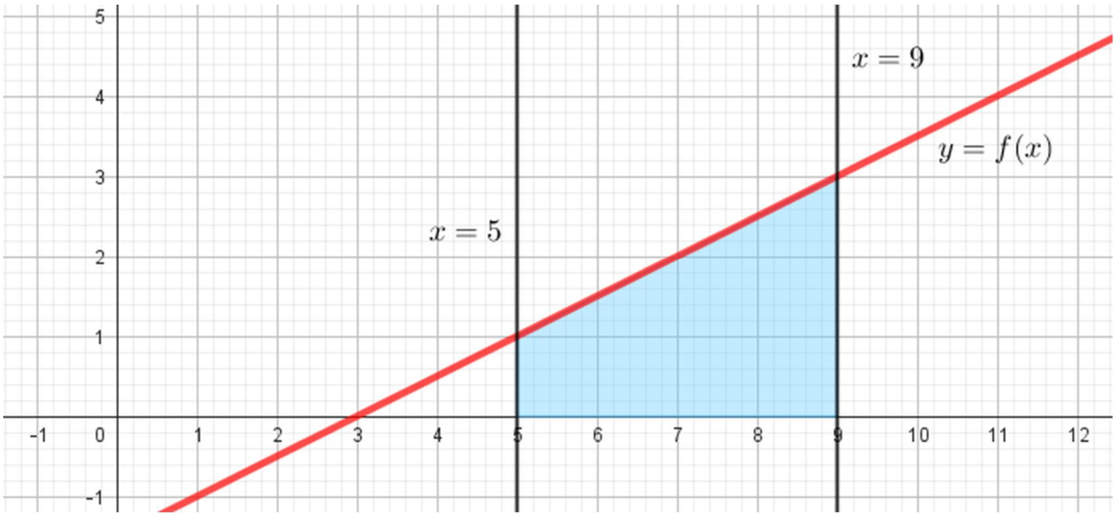
El área sombreada es = $\int_3^9 \dfrac{x-3}{2}dx = \dfrac{1}{2}\int_3^9\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{2}\right)dx = \dfrac{6\cdot 3}{2}=9\ \text{u}^2$



2. Calcular el área encerrada por la función: $f(x)=\dfrac{x-3}{2}$, el eje OX, y las rectas x = 5 y x = 9

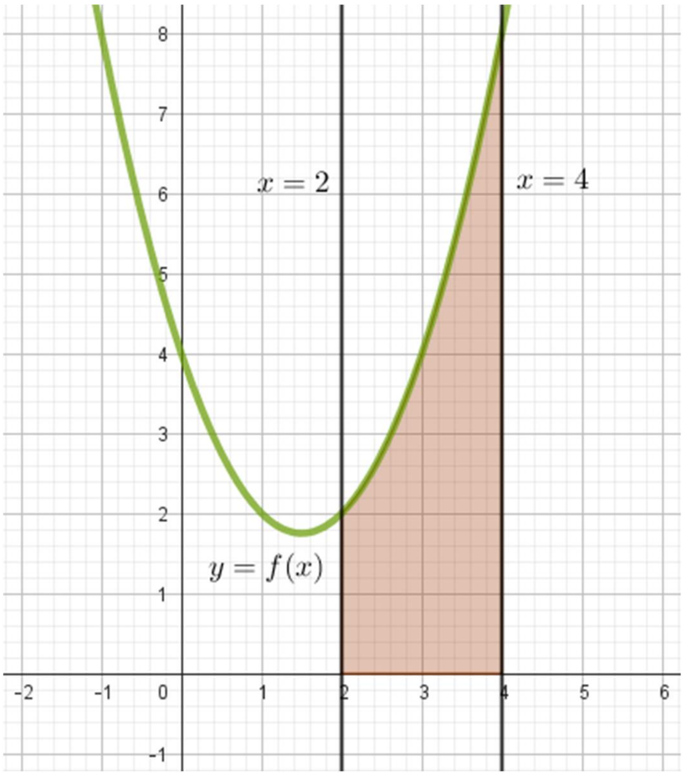
Es un trapecio de bases: $f(5)=1$ y $f(9)=3$, y de altura 4 unidades

Es el área sombreada = $\int_5^9 \dfrac{x-3}{2}dx = \dfrac{(1+3)\cdot 4}{2}=8\ \text{u}^2$



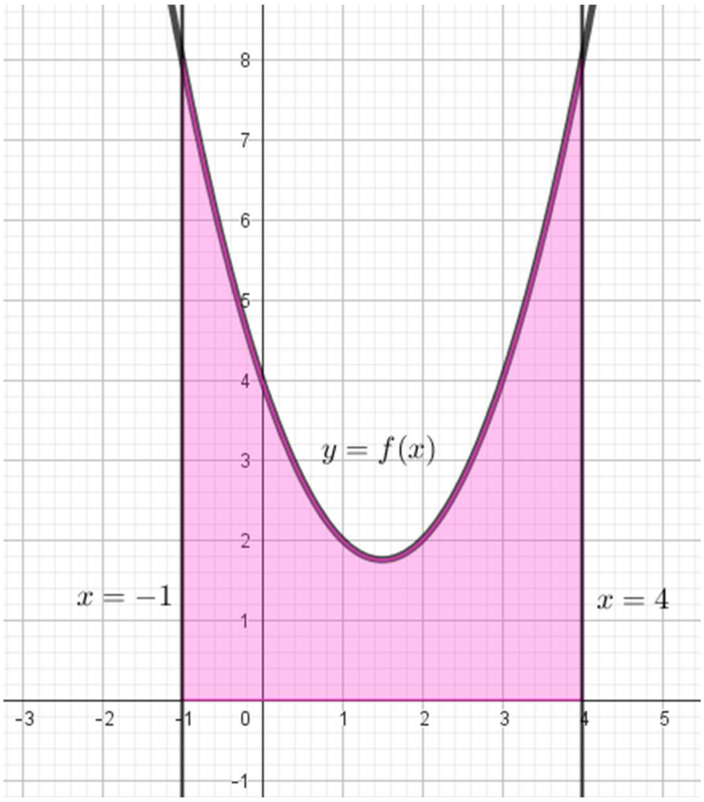
3. Calcular el área encerrada por la función: $f(x)=x^2-3x+4$, el eje OX, y las rectas x = 2 y $x=4$.

Es el área sombreada = $\int_2^4\left(x^2-3x+4\right)dx = \left.\dfrac{x^3}{3}-3\dfrac{x^2}{2}+4x\right|_2^4 = \dfrac{26}{3}\ \text{u}^2$



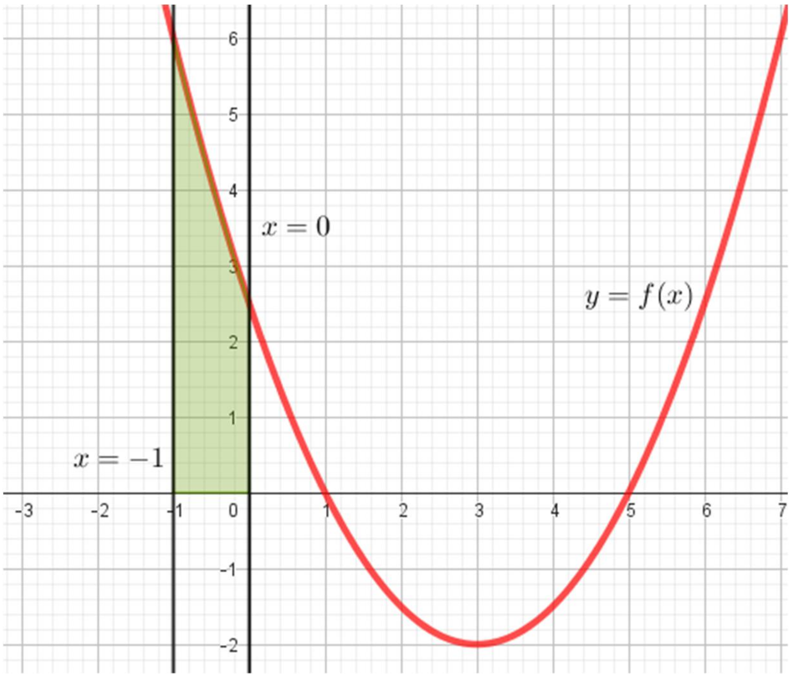
4. Calcular el área encerrada por la función: $f(x) = x^2 - 3x + 4$, el eje OX, y las rectas $x = -1$ y $x = 4$.

$$A = \int_{-1}^{4} \left(x^2 - 3x + 4\right) dx = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x \right|_{-1}^{4} = \frac{4^3}{3} - \frac{3 \cdot 4^2}{2} + 4 \cdot 4 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{3 \cdot (-1)^2}{2} + 4 \cdot (-1) \right) = \frac{115}{6} \text{ u}^2$$



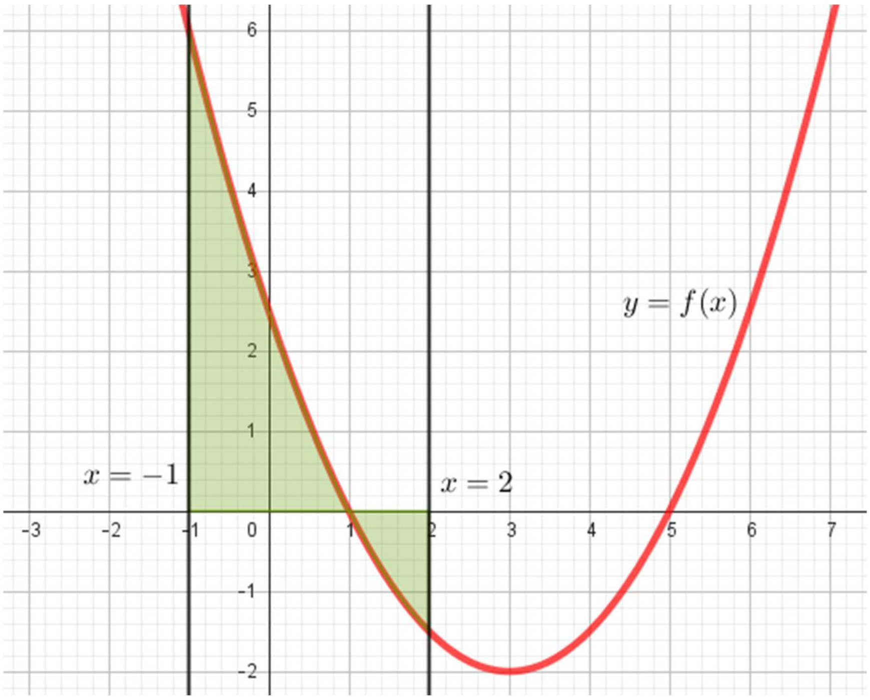
5. Calcular el área encerrada por la función: $f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{2}$, el eje OX, y las rectas $x=-1$ y $x=0$.

$$A=\int_{-1}^{0}\frac{x^2-6x+5}{2}\,dx=\frac{25}{6}\ \text{u}^2$$



6. Calcular el área encerrada por la función: $f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{2}$, el eje OX, y las rectas $x=-1$ y $x=2$.

$$A=\int_{-1}^{1}\frac{x^2-6x+5}{2}dx-\int_{1}^{2}\frac{x^2-6x+5}{2}dx=\frac{32}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{37}{3}\ \text{u}^2$$

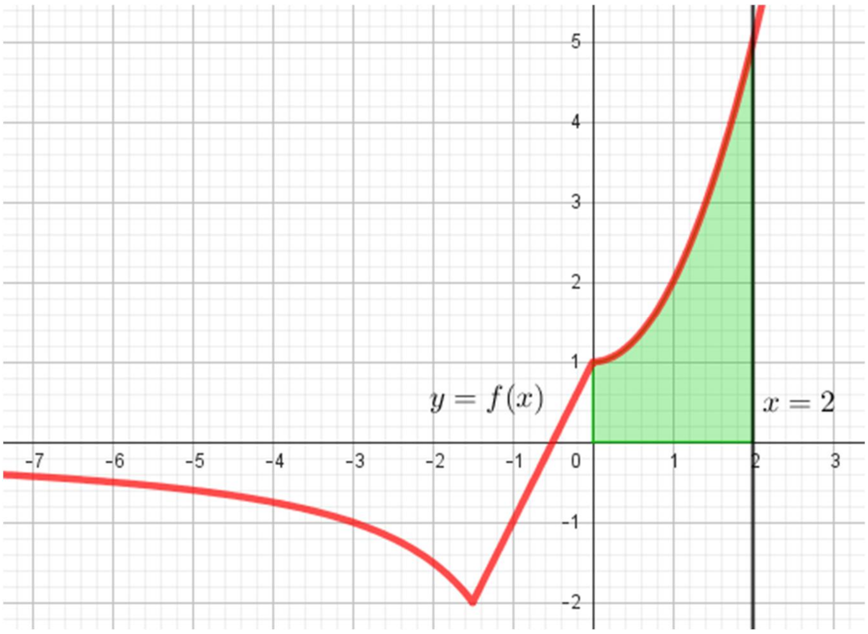


7. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x} & si \quad x<\dfrac{-3}{2} \\ 2x+1 & si \quad \dfrac{-3}{2}\leq x<0 \\ x^2+1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Se pide, calcular el área del recinto plano limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje *OX*, el eje *OY* y la recta $x=2$.

La representación gráfica del recinto al que hay que calcularle el área es:



Calculamos los límites de integración. Uno es $x=0$ (ya que el área está limitada por el eje OY) y el otro es $x=3$ (recta dada). Por tanto, el área pedida vendrá dada por la siguiente integral:

$$A=\int_0^2 \left(x^2+1\right)dx=\left.\frac{x^3}{3}+x\right]_0^2=$$

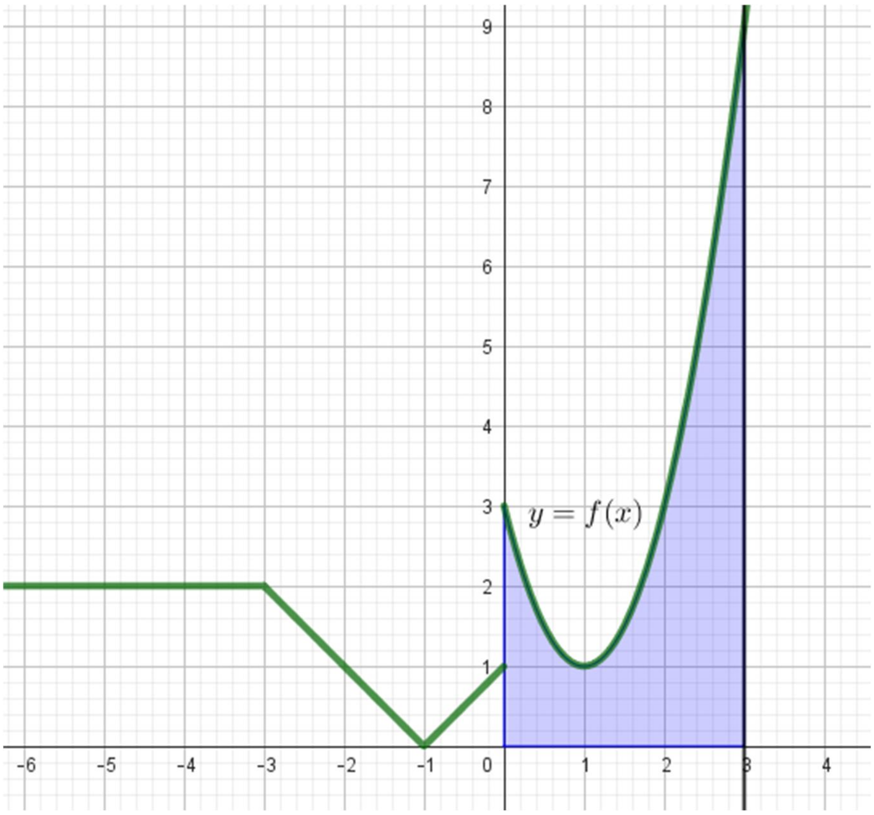
$$=\frac{2^3}{3}+3-\left(\frac{0^3}{3}-0\right)=\frac{17}{3}$$

Así, el área buscada es de $\dfrac{17}{3}$ u^2.

8. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x<-3 \\ |x+1| & si \quad -3\leq x<0 \\ 2x^2-4x+3 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Se pide: Calcular el área de la región del plano limitada por la gráfica de $f\left(x\right)$, el eje *OX*, el eje *OY* y la recta $x=3$.



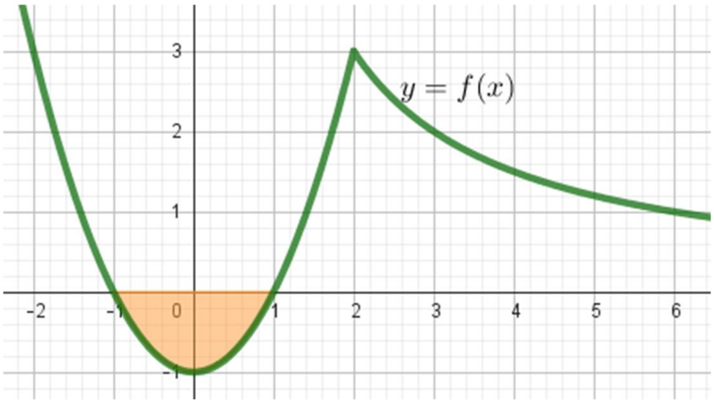
Los límites de integración son $x=0$ (ya que el área pedida está limitada por el eje OY) y $x=3$ (recta dada), y por tanto, el área pedida vale:

$$A=\int_0^3\left(2x^2-4x+3\right)dx=2\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+3x\Bigg]_0^3=2\frac{3^3}{3}-4\frac{3^2}{2}+3\cdot3=18-18+9=9\text{ u}^2$$

9. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & si \quad x\le 2\\ \dfrac{6}{x} & si \quad x>2\end{cases}$$

Se pide: Área del recinto cerrado que delimita la gráfica de $f\left(x\right)$ y el eje *OX*.



Los límites de integración son los puntos donde la función corta al eje OX. En nuestro caso:

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

(ten en cuenta que $\dfrac{6}{x}\neq 0$ ya que una fracción es cero sólo cuando el numerador lo es)

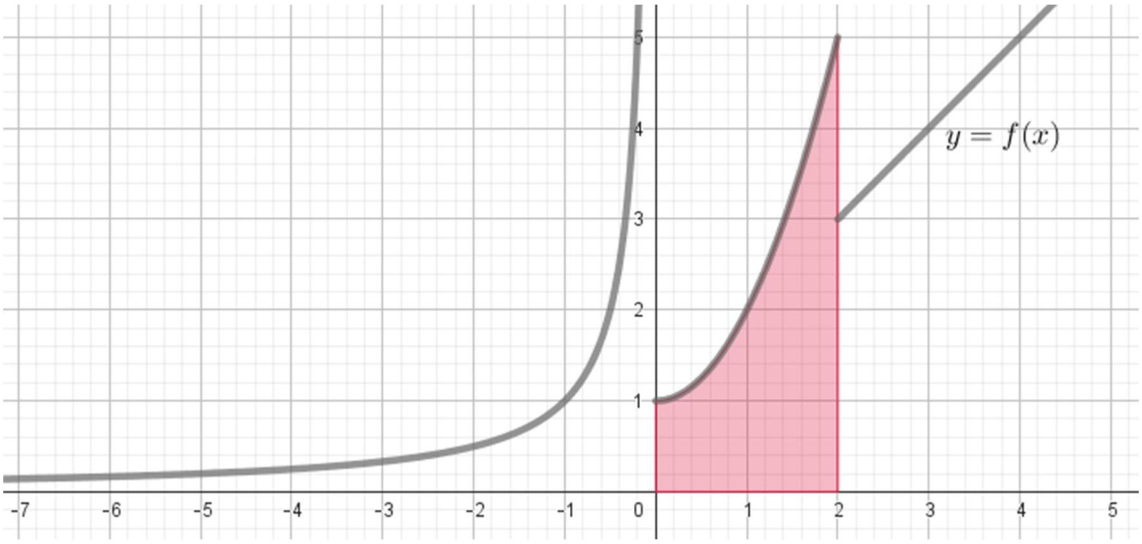
El área pedida es[8]:

$$A=-\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)dx=-\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg]_{-1}^{1}=-\frac{x^3}{3}+x\Bigg]_{-1}^{1}=-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}\ \text{u}^2$$

10. Dada la función

$$f\left(x\right)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x<0 \\ x^2+1 & \text{si} \quad 0\le x<2 \\ x+1 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Se pide: Área del recinto limitado por la gráfica de $f\left(x\right)$, los ejes de coordenadas y la recta $x=2$.



Los límites de integración son $x=0$ (ya que el área pedida está limitada por el eje OY) y $x=2$ (recta dada), y, por tanto, el área pedida es:

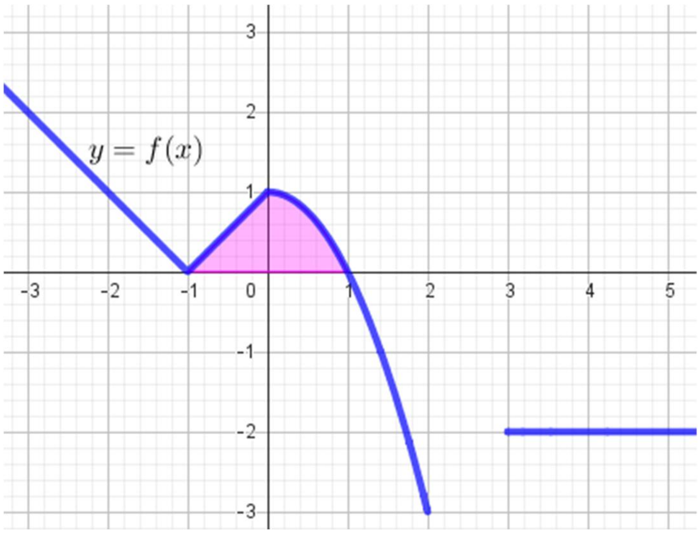
$$A=\int_{0}^{2}\left(x^2+1\right)dx=\frac{x^3}{3}+x\Bigg]_{0}^{2}=\frac{8}{3}+2-\left(\frac{0}{3}+0\right)=\frac{13}{3}\ \text{u}^2$$

11. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \left|x+1\right| & si \quad x\le 0 \\ -x^2+1 & si \quad 0<x\le 2 \\ -2 & si \quad x>2 \end{cases}.$$

Se pide: Calcula el área del recinto cerrado que delimita la gráfica de la función con el eje *OX*.

[8] La integral lleva signo negativo, por que el área pedida está por debajo del eje X.



Los límites de integración son los puntos de corte de la función con el eje OX:

$$|x+1| = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$-x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \Rightarrow$ solo nos vale $x = 1$, ya que $x = -1$ está fuera del dominio

$-2 = 0$ nunca

Así, los límites de integración son $x = -1$ y $x = 1$

El área pedida es:

$$A = \int_{-1}^{0} |x+1|\, dx + \int_{0}^{1} \left(-x^2 + 1\right) dx = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \text{ u}^2$$

12. Determina el valor de a para que el área comprendida por la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + 2$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 2$ sea 21 unidades de área.

En este caso, los límites de integración nos vienen dados por las rectas $x = -1$ y $x = 2$. Así, tenemos la siguiente integral:

$$A = \int_{-1}^{2} \left(ax^2 + 2\right) dx = 21 \Leftrightarrow \left. a\frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^{2} = 21 \Leftrightarrow a\frac{8}{3} + 4 - \left(-a\frac{1}{3} - 2\right) = 21 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8a}{3} + \frac{12}{3} + \frac{a}{3} + \frac{6}{3} = 21 \Leftrightarrow 9a + 18 = 63 \Leftrightarrow a = \frac{63-18}{9} \Leftrightarrow a = \frac{45}{9} \Leftrightarrow a = 5$$

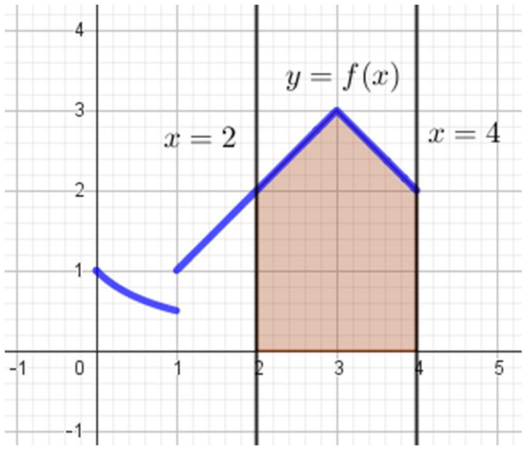
Por tanto, la función es $f(x) = 5x^2 + 2$

13. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ x & \text{si } 1 < x < 3 \\ 6 - x & \text{si } 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

En este caso, los límites de integración nos vienen dados por las rectas $x = 2$ y $x = 4$. La gráfica de la función es:



Ojo, aunque los límites de integración son $x = 2$ y $x = 4$, en ese intervalo hay dos funciones que están por encima, luego hay que calcular el punto de corte de ambas funciones (sólo nos interesa la coordenada *x*), para dividir el intervalo en dos intervalos:

$$x = 6 - x \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

Por tanto, tenemos que calcular dos integrales:

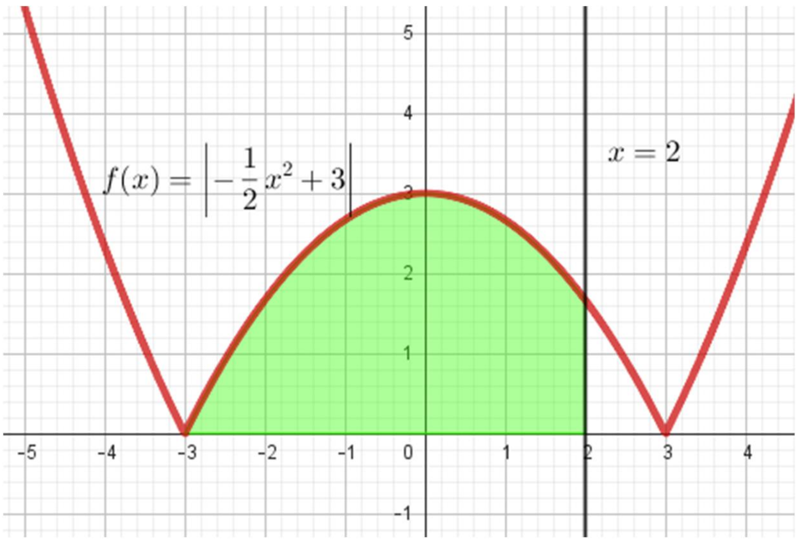
1ª) Integral de la función $f_1(x) = x$ en el intervalo $[2,\ 3]$

2ª) Integral de la función $f_2(x) = 6 - x$ en el intervalo $[3,\ 4]$

El área pedida vale:

$$A = \int_2^3 x dx + \int_3^4 (6 - x) dx = \left. \frac{x^2}{2} \right]_2^3 + \left. 6x - \frac{x^2}{2} \right]_3^4 = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} + 24 - \frac{16}{2} - \left(18 - \frac{9}{2}\right) = \frac{14}{2} - 2 = 5 \text{ u}^2$$

14. Dada la función $f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^2 + 3 \right|$. Calcula el área del recinto limitado por el eje *OX*, la gráfica de f y la recta $x = 2$.



Calculamos los límites de integración (puntos de corte con el eje OX):

$$f(x)=\left|-\frac{1}{3}x^2+3\right|=0\Rightarrow -\frac{1}{3}x^2+3=0\Rightarrow -\frac{1}{3}x^2=-3\Rightarrow x^2=\frac{-3}{-\frac{1}{3}}=9\Rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$$

Por tanto, el límite inferior de integración es $x=-3$ y el límite superior es $x=2$, que es la recta que nos dan.
El área pedida es:

$$A=\int_{-3}^{2}\left(-\frac{1}{3}x^2+3\right)dx=-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}+3x\Big]_{-3}^{2}=\frac{100}{9}\text{ u}^2$$

Ejercicios de Selectividad

GeoGebra
Integrals for area between two curves
Author: Daniel Mentrard
Topic: Area, Calculus, Functions, Function Graph
https://www.geogebra.org/m/rwt3nycr?s=03

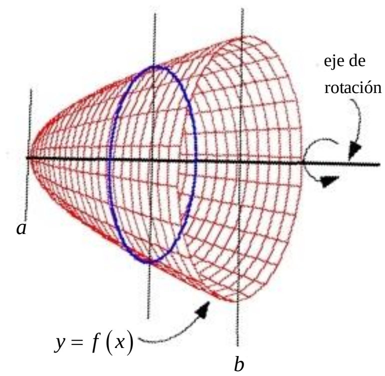
2. VOLUMEN Y ÁREA DE UN CUERPO DE REVOLUCIÓN

El ***volumen del cuerpo de revolución*** engendrado al girar un arco de curva continua, $y=f(x)$, $a\le x\le b$, alrededor del eje OX es:

$$\boxed{V=\pi\int_a^b f(x)^2\,dx}$$

El ***área del cuerpo de revolución*** engendrado al girar un arco de curva con derivada primera continua, $y=f(x)$, $a\le x\le b$, alrededor del eje OX es:

$$\boxed{A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx}$$



GeoGebra
Integral calculus for volume of solids of rotation
Author: Daniel Mentrard
Topic: Calculus, Rotation, Solids or 3D Shapes, Volume

https://www.geogebra.org/m/z9gyatka?s=03

3. LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA

A través de la historia de las matemáticas, grandes pensadores consideraron imposible calcular la longitud de un arco irregular. Aunque **Arquímedes** había descubierto una aproximación rectangular para calcular el área bajo una curva con un método de agotamiento (método de exhaución), pocos creyeron que fuese posible que una curva tuviese una longitud definida, como las líneas rectas. Las primeras mediciones se hicieron usando aproximaciones: los matemáticos de la época trazaban un polígono dentro de la curva, y calculaban la longitud de los lados de éste para obtener un valor aproximado de la longitud de la curva. Al aumentar el número de segmentos, disminuyendo la longitud de cada uno, se obtenía una aproximación cada vez mejor.

En el siglo XVII, el método de exhausción llevó a la rectificación por métodos geométricos de muchas curvas: la espiral logarítmica por **Torricelli** en 1645 (algunos piensan que fue **John Wallis** en 1650), la cicloide por **Christopher Wren** en 1658, la catenaria por **Gottfried Leibniz** en 1691…

Longitud de un arco de curva

Dado un arco de curva en el espacio, definido por sus ecuaciones paramétricas:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \text{ con } t \in [a,b]$$

la longitud del arco viene dada por:

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt}$$

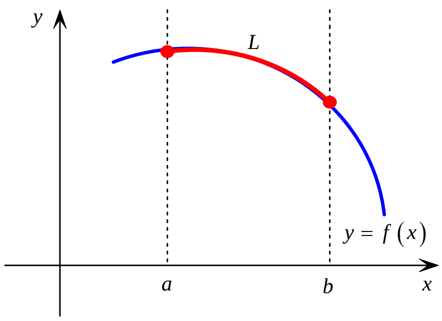
Si la curva viene dada en forma explícita, $y = f(x)$, entonces:

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}$$

GeoGebra

Longitud de arco
Autor: Instituto GeoGebra de Celaya
Tema: Integral Definida
https://www.geogebra.org/m/CfStT8bR

Longitud de arco
Autor: Ana Belem Gutiérrez Rosas
https://www.geogebra.org/m/NR2US28H



Ejercicio de Selectividad

4. GEOGEBRA

(1) Matemáticas II, 2º bachillerato
Autor: José M. Melián

Tema: Matemática
https://www.geogebra.org/m/hk8zhfnx

(2) Derivadas
Autor: Aula MatemáTICa, tu blog de aula
Tema: Derivada
https://www.geogebra.org/m/VS79P8bZ

(3) Cálculo gráfico de derivadas
Autor: Luisa García
Tema: Cálculo, Derivada
https://www.geogebra.org/m/Me6qQAQ2

(4) Tres problemas de optimización
Autor: Ignacio Larrosa Cañestro
Tema: Problemas de Optimización
https://www.geogebra.org/m/vs539RDT

(5) Extremos Relativos de una Función
Autor: Javier Diaz Ugalde
https://www.geogebra.org/m/DGaAkrtn

(6) Puntos de inflexión
Autor: Lucas Castro
Tema: Derivada
https://www.geogebra.org/m/JdXNCQeG

(7) Cálculo integral
Autor: Miguel Ángel Fresno Martínez
Tema: Cálculo, Cálculo integral
https://www.geogebra.org/m/fTkpUM4E

ÁLGEBRA

Unidad 9:
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal de incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ es una igualdad de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

donde los números reales $a_1, ..., a_n$ se denominan coeficientes, y el número real b, término independiente.

Sistemas de ecuaciones

Un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas, es un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad [1]$$

donde los $a_{ij} \in \mathbb{R}$ son los coeficientes, $b_k \in \mathbb{R}$ los términos independientes y $x_p \in \mathbb{R}$ son las incógnitas (números reales que hay que calcular, si existen).

Una solución de [1] es una $n-$upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de números reales que hacen que las ecuaciones de [1] se transformen en identidades. Resolver un sistema de ecuaciones lineales, es hallar todas las soluciones.

Diremos que dos sistemas de ecuaciones lineales con las mismas incógnitas son equivalentes, cuando tienen las mismas soluciones.

2. MÉTODO DE GAUSS

Método de Gauss

Un sistema tiene forma escalonada cuando cada una de las ecuaciones posee una incógnita menos que la anterior.

Un sistema de ecuaciones se resuelve por el método de Gauss cuando sus soluciones mediante la reducción del sistema dado a otro sistema equivalente a él que sea escalonado. El desarrollo del método lo veremos en la unidad siguiente.

3. CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS

Los sistemas los podemos clasificar, atendiendo al número de soluciones que tengan, como sigue:

$$\text{Sistema}\begin{cases} \text{COMPATIBLE (tiene solución)}\begin{cases} \text{DETERMINADO} \\ \text{(solución única)} \\ \\ \text{INDETERMINADO} \\ \text{(infinitas soluciones)} \end{cases} \\ \text{INCOMPATIBLE (no tiene solución)} \end{cases}$$

Unidad 10:
MATRICES

1. MATRICES

Definición:

Una matriz de dimensión (u orden) $m\times n$ es un conjunto de mn números reales distribuidos en una tabla de *m* filas y *n* columnas (se acostumbra a encerrarlos entre paréntesis).

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

También se suele representar en la forma, $A=\left(a_{ij}\right),\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$ en la que el elemento a_{ij} se encuentra en la intersección de la fila *i* con la columna *j*.

Definición:

Diremos que dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y los elementos que están en la misma posición son iguales.

Ejercicios:

1. *En un IES hay 107 alumnos en 3ºESO, y 110 alumnas. En 4ºESO hay 84 alumnos y 95 alumnas. En 1ºBACH. hay 69 alumnos y 68 alumnas, y en 2ºBACH. hay 46 alumnos y 48 alumnas.*

a) Representa mediante una matriz, los datos anteriores. Dicha matriz la representaremos por A.

b) Explica el significado de los elementos a_{22}, a_{31} y a_{42}.

c) Asigna subíndices a las entradas con valor superior a 60 e inferior a 100.

d) ¿Cuántos alumn@s cursan 2ºBACH.?

2. *Si el IES anterior es un centro comarcal en el que se reúnen estudiantes procedentes de tres pueblos* P_1, P_2 y P_3*, atendiendo a su procedencia y sexo, obtenemos la siguiente matriz* 2×3*:*

$$B=\begin{array}{c} \\ H \\ M \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 90 & 182 & 34 \\ 91 & 182 & 41 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) ¿Cuántos alumnos preceden del pueblo 1?

b) ¿Qué significado tiene el elemento b_{23}*?*

Y si consideramos la actividad profesional principal de los padres de esos alumnos y su lugar de origen, tenemos la matriz 3×3*:*

$$C = \begin{array}{l} \\ \text{Funcionario} \\ \text{Agricultor} \\ \text{Manufacturero} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 22 & 105 & 11 \\ 114 & 115 & 12 \\ 45 & 151 & 52 \end{pmatrix} \end{array}$$

c) *Explica el significado de los términos* c_{12}, c_{31} y c_{23}.

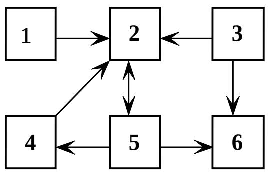
d) *Asigna subíndices a los elementos de la matriz de valor inferior a 50.*

e) *¿Qué valor numérico corresponde a las entradas de la matriz* c_{13}, c_{22} y c_{32}

3. *En la matriz siguiente se representan los gramos de vitaminas* A, B y C *de dos alimentos 1 y 2. ¿Qué alimento tiene más vitamina B? ¿Y C? ¿Qué alimento tiene mayor cantidad de vitaminas?*

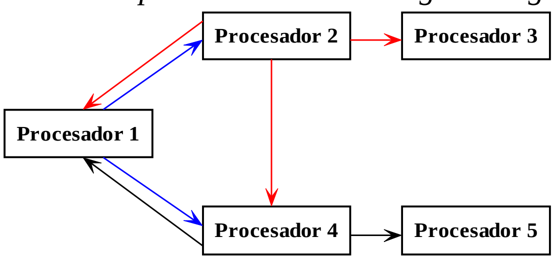
$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 15 & 6 & 2 \\ 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. *El gráfico siguiente nos muestra las relaciones que se establecen en un grupo de seis personas. Construye una matriz que indique las relaciones anteriores, indicando con 1 la existencia de relación entre dos personas y con 0 la no existencia de relación.*



(Indicación: por convenio pondremos 0 en la diagonal principal (en los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{55} y a_{66}*), ya que las relaciones las consideramos con otros y no con uno mismo)*

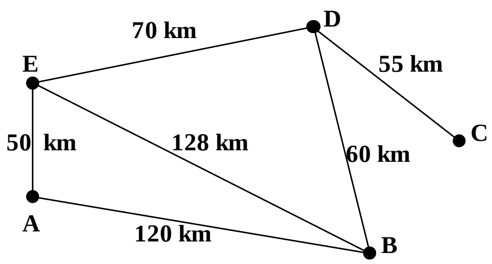
5. *Una red de cinco procesadores puede relacionarse según el siguiente esquema:*



Construye una matriz que indique las relaciones entre los procesadores, indicando con 1 la existencia de relación entre dos procesadores y con 0 la no existencia de relación. ¿Es posible una comunicación total entre todos los procesadores?

6. *El grafo*[9] *adjunto representa los caminos que comunican diversas localidades, con sus respectivas distancias. Halla la matriz de las distancias más cortas.*

[9] Un grafo es un conjunto, no vacío, de objetos llamados vértices y otra colección de pares de vértices, llamados aristas (que pueden ser orientados o no). Usualmente, un grafo se representa mediante una serie de puntos (los vértices) conectados por líneas (las aristas).



2. TIPOS DE MATRICES

Definición:

Se llama *matriz traspuesta* de A a la matriz que resulta de intercambiar ordenadamente las filas por las columnas. Se representa por A^t o por A^T.

Definición:

Una *matriz* es *nula* si todos sus elementos son cero.

Definición:

Una *matriz* es *cuadrada* si tiene igual número de filas que de columnas.

Diagonal principal: Los elementos a_{ii} de una matriz cuadrada forman la diagonal principal.

Definición:

Una matriz cuadrada es simétrica cuando $a_{ij} = a_{ji}$, esto es, cuando $A = A^T$.

Definición:

Una *matriz* **cuadrada** es:

- *triangular superior* cuando todos los elementos por debajo de la diagonal principal son cero.
- *triangular inferior* cuando todos los elementos por encima de la diagonal principal son cero.

Definición:

Una *matriz diagonal* es una matriz cuadrada en la que todos los elementos que no estén en la diagonal principal son cero.

Definición:

La *matriz identidad* es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son unos.

3. OPERACIONES CON MATRICES

Suma:

Sobre la dimensión: **tienen que ser de igual dimensión**

$$\left.\begin{array}{l} A=\left(a_{ij}\right) \\ B=\left(b_{ij}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A+B=\left(a_{ij}\right)+\left(b_{ij}\right)=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)}$$

Propiedades:

- Asociativa: $A+\left(B+C\right)=\left(A+B\right)+C$
- Conmutativa: $A+B=B+A$
- Elemento neutro: $A+O=A$
- Elemento opuesto: $A+\left(-A\right)=O$

Producto de un número real por una matriz:

Se multiplica dicho número por todos los elementos de la matriz.

$$\left.\begin{array}{l} A=\left(a_{ij}\right) \\ \alpha\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\alpha A=\alpha\left(a_{ij}\right)=\left(\alpha a_{ij}\right)}$$

Propiedades:

- o $\alpha\left(A+B\right)=\alpha A+\alpha B$
- o $\left(\alpha+\beta\right)A=\alpha A+\beta A$
- o $\left(\alpha\beta\right)A=\alpha\left(\beta A\right)$
- o $1A=A$

Por cumplir estas ocho propiedades, el conjunto $\mathrm{M}_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right)=\left\{\text{matrices reales de orden } n\times m\right\}$ tiene estructura algebraica de espacio vectorial real:

$$\boxed{\left(\mathrm{M}_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right),+,\cdot_{\mathbb{R}}\right) \text{ es un espacio vectorial real}}$$

Producto de matrices:

Sobre la dimensión: *número de filas del segundo factor = número de columnas del primer factor*

Para multiplicar dos matrices hay que efectuar el producto de cada fila de la primera matriz por todas las columnas de la segunda.

Sobre la dimensión de la matriz producto: $A_{\boxed{n}\times m}\cdot B_{m\times\boxed{p}} \Rightarrow \left(AB\right)_{n\times p}$

Propiedades:

Que no cumple:

- Conmutativa: $AB\neq BA$
- Divisores de cero: $AB=0 \not\Rightarrow A=0 \text{ o } B=0$
- Cancelativa: $AB=CB \not\Rightarrow A=C$ (para $B\neq 0$)

Que cumple:

- ➢ Asociativa: $A\left(BC\right)=\left(AB\right)C$

- Distributiva: $A(B+C)=AB+AC$
- Elemento neutro: $A_{m\times n}\cdot I_n = A_{m\times n}$ e $I_m \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$

Potencia de una matriz cuadrada:

Si A es una matriz cuadrada, se define:

$$A^n = A\cdot A\cdot \overset{n)}{\ldots}\cdot A \quad \text{con } n\in\mathbb{N}$$

y

$$A^0 = I$$

Ejercicios:

7. *Dadas las matrices*

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ 6 & -3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 8\\ 7 & 9 & 4\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

halla:

a) $A+B+C$ *c)* $A+(-B)+(-C)$

b) $B+(-C)$ *d)* $A^t+B^t+(-C)^t$

8. *Efectúa la siguiente operación:*

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

9. *Calcula* a, b, c y d *para que se cumpla:*

$$\begin{pmatrix}2a & 2b\\ 2c & 2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 7\\ -2 & 3d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & a+b\\ c+d & 4\end{pmatrix}$$

10. *Comprueba con un ejemplo que la traspuesta de una suma de dos matrices es igual a la suma de las dos matrices traspuestas:* $(A+B)^t = A^t+B^t$.

11. *Realiza las siguientes operaciones:*

a) $2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}$

12. *Dadas las matrices:*

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

calcula:

a) $\frac{1}{2}A+B$

b) $3A+5B-6C$

c) $2A-\frac{1}{2}B-\frac{1}{3}C$

13. *Calcula todos los productos posibles entre las matrices:*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-7 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 7 & 1 & 4\\ 0 & -2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

14. *Dadas las matrices A y B:*

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 0\\ -2 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

halla:

a) $(A\cdot B)\cdot B$

b) $A\cdot(B\cdot A)$

15. *Para las matrices:*

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 0 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 1\\ -5 & 1 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\ \text{y}\ D=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$$

realiza las siguientes operaciones:

a) $A+B$ *b)* $3A-4B$ *c)* AB

d) AD *e)* BC *f)* CD

g) A^tC *h)* D^tA^t *i)* B^tA

j) D^tD *k)* DD^t

16. *Con las matrices* $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 9 & 8\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 7\end{pmatrix}$, *calcula:*

a) AB *b)* BA *c)* C^2 *d)* C^3 *e)* A^tC^2

f) ¿Son conmutativas las matrices A *y* B*?*

17. *Calcula* A^2, A^3 *y* A^4 *siendo* $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

18. *Dadas las matrices*

$$A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 0 & 1\\ -4 & 7\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 5\\ 4 & -2\end{pmatrix}$$

a) *Calcular la matriz* $5A^t - 3B^t$.

b) *Hallar* AB^t.

19. *Sea* k *un número natural y la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula A^k *para* $k \in \mathbb{N}$.

20. *Considera la matriz* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$ *y halla los valores de* p y q *que hacen que se verifique la siguiente igualdad:* $A^2 = A$.

21. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Calcula* A^n *para* $n \in \mathbb{N}$.

22. *Efectúa las siguientes operaciones con matrices:*

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^2$

c) $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\right]^2$

Ejercicios de selectividad

4. MÉTODO DE GAUSS

Consiste en transformar el sistema original en un sistema triangular, mediante las transformaciones elementales de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & = & a_{14} \\ a_{21}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & = & a_{24} \\ a_{31}x & + & a_{32}y & + & a_{33}z & = & a_{34} \end{array}\right\}\right) \xrightarrow[\text{de Gauss}]{\text{transformaciones}} \to \left(\begin{array}{ccccccc} b_{11}x & + & b_{12}y & + & b_{13}z & = & b_{14} \\ & & b_{22}y & + & b_{23}z & = & b_{24} \\ & & & & b_{33}z & = & b_{34} \end{array}\right\}\right)$$

Transformaciones elementales de Gauss:

- Multiplicar una fila por un número distinto de cero $(F_i \to \alpha F_i)$
- Sumar a una fila un múltiplo de otra ($F_j \to F_j + pF_i$)
- Intercambiar filas ($F_i \leftrightarrow F_j$)

Hay una variante del método de Gauss que se conoce con el nombre de **método de Gauss-Jordan**, y que consiste en diagonalizar la matriz, es decir, hacer unos en la diagonal principal y ceros en los demás.

Ejercicios de selectividad

5. INVERSA DE UNA MATRIZ

Inversa:

Sobre la dimensión: la matriz (y como consecuencia su inversa) tienen que ser cuadradas

Una matriz cuadrada A es invertible (o tiene inversa), si existe una matriz, que se representa por A^{-1}, y que verifica:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Unicidad de la matriz inversa:

La matriz inversa, caso de existir, es única.

Demostración:

Supongamos que B_1 y B_2 son inversas de la matriz A. Entonces:

$$B_1 = IB_1 = (B_2B)B_1 = B_2(BB_1) = B_2I = B_2$$

C.Q.D.

Métodos para calcular la inversa:

- Método directo para calcular A^{-1}:
  Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales que resulta.

- Método de Gauss-Jordan

$$(A\,|\,I) \xrightarrow{\text{transformaciones de Gauss}} (I\,|\,A^{-1})$$

Ejercicios:

23. *Calcula, si existe, la inversa de:*

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *b)* $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ *c)* $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

24. *Encuentra* x e y *tales que* $A \cdot B = 0$, *siendo:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -1 & x & y \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & x & y \end{pmatrix}$$

25. *Halla la inversa de* $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ *y la inversa de* $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

26. *Utilizando los métodos vistos en clase, calcula las matrices inversas de:*

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

y comprueba que $AA^{-1}=I$ y $B^{-1}B=I$.
Comprueba además que:

a) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

b) $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

c) $(3A)^{-1}=\dfrac{1}{3}A^{-1}$

27. *Calcula, utilizando el método de Gauss-Jordan, las inversas de las matrices:*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

y comprueba que $A^{-1}A=I$ y $BB^{-1}=I$

Propiedades de la inversa que es interesante conocer:

(1) $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

Demostración:
Se tiene que $\left(A^{-1}\right)^{-1}\cdot A^{-1}=I$ y, por otro lado, $AA^{-1}=I$, por lo que A y $\left(A^{-1}\right)^{-1}$ son inversas de A, pero por la unicidad en la matriz inversa, se tiene que $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

(2) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

Demostración:
Se tiene que

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)AB=B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B=B^{-1}IB=B^{-1}B=I$$

y, por otro lado,

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$$

Como consecuencia, $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa de AB, esto es $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

(3) $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1} \quad \forall k\in\mathbb{R}-\{0\}$

Demostración:
Por una lado $\left(k^{-1}A^{-1}\right)(kA)=\left(k^{-1}k\right)\left(A^{-1}A\right)=1\cdot I=I$, y por otro

$$(kA)\left(k^{-1}A^{-1}\right)=\left(kk^{-1}\right)AA^{-1}=1\cdot I=I$$

luego, $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1} \quad \forall k\in\mathbb{R}-\{0\}$.

6. ECUACIONES Y SISTEMAS MATRICIALES

Definición:

Una *ecuación matricial lineal* es aquella ecuación matricial lineal en la que la incógnita es una matriz.

Resolución de ecuaciones matriciales:

Todas las ecuaciones matriciales (lineales), se pueden transformar en una del tipo

$$AX = B \quad \text{o} \quad XA = B$$

siguiendo los mismos pasos que para resolver ecuaciones polinómicas de primer grado. La única diferencia es que no hay una división de matrices, por lo que para despejar X, hay que usar la inversa:

$$AX = B \qquad\qquad XA = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \qquad\qquad XAA^{-1} = BA^{-1}$$

$$X = A^{-1}B \qquad\qquad X = BA^{-1}$$

Definición:

Un *sistema lineal de ecuaciones matriciales* es un sistema lineal en el que las incógnitas con matrices.

Resolución de sistemas lineales de ecuaciones matriciales:

Para resolver un sistema matricial (lineal), se aplican los métodos conocidos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales (reducción, sustitución o igualación).

Ejercicios:

28. *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, *resuelve las ecuaciones:*

a) $A^2 + 3X = A$

b) $AX = B$

29. *Calcula* X *e* Y *en los siguientes sistemas de ecuaciones matriciales:*

a) $\begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$

c) $\begin{cases} X + 2Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\ 2X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$)

b) $\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$

30. *Obtén la matriz X en las siguientes ecuaciones matriciales:*

a) $AX+B=C$	h) $X+3A^{-1}=A+B$
b) $XA=2B+C$	i) $AX-A=I-AX$
c) $AX+A=B$	j) $AX+A^{-1}X=I$
d) $A+2XB=C$	k) $X-A^2X=B$
e) $A-BX=C$	l) $XA+A^t=XB$
f) $AX=BX+C$	m) $XA+XA^t=C$
g) $XA-B=X$	n) $AXB=C$

31. *Resuelve la ecuación matricial $2X-AB=A^2$, donde:*

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1&3\\2&-2\end{pmatrix}$$

32. *Sean las matrices:*

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\3&1\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}1&0\\1&-5\end{pmatrix}$$

(a) Calcular las matrices C y D, sabiendo que AC = BD = I, siendo I la matriz identidad de orden dos.

(b) Discutir y resolver el sistema dado por:

$$\left(C^{-1}-D^{-1}\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

siendo C^{-1} y D^{-1} las matrices inversas de las matrices C y D indicadas en el apartado anterior.

33. *Encuentra una matriz X que verifique $X-B^2=AB$ siendo*

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&1\\0&0&2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&2\\0&0&6\end{pmatrix}$$

34. *Siendo*

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&1\\0&1\\1&2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \quad y \quad D=\begin{pmatrix}9&3\\8&13\end{pmatrix}$$

resuelve la ecuación matricial $AB+CX=D$.

Ejercicios de selectividad

7. RANGO DE UNA MATRIZ

Definición:

Diremos que una *fila* o *columna* (de una matriz) es *linealmente independiente* si no se puede expresar como combinación lineal de las otras.

Definición:

El rango de una matriz A es el número de filas (o de columnas) linealmente independientes que tiene la matriz. Se representa por $rg(A)$ o por $rango(A)$.

Método de Gauss para el cálculo del rango:

Se calcula, ***aplicando el método de Gauss***, haciendo cero el mayor número de filas (o de columnas). En este caso, el rango es el número de filas (o de columnas) no nulas.

EJEMPLOS:

Calculamos el rango de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-5F_3+Fl2]{-8F_3+F_1} \begin{pmatrix} 0 & -7 & 4 \\ 0 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(A)=2$ (número de filas distintas de cero)

b) $B=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -6 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -6 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 8 & -6 & 0 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[5F_1+F_3]{8F_1+F_2} \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 0 & 42 & 24 \\ 0 & 32 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{-32F_2+42F_3}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 0 & 42 & 24 \\ 0 & 0 & -348 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(B)=3$ ya que tiene tres filas distintas de cero.

c) $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1+F_3]{2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 19 \\ 0 & 8 & 8 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 19 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(C)=3$

Ejercicios:

35. *Calcula, por el método de Gauss, el rango de las siguientes matrices:*

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

g) $G = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

h) $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

36. *Calcula el rango de las siguientes matrices:*

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ -3 & -6 & -9 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Unidad 11: DETERMINANTES

1. DETERMINANTES

Determinante de una matriz cuadrada

A cada matriz cuadrada se le puede asociar un número real, llamado determinante de la matriz, que se obtiene a partir de los elementos de la misma. Si la matriz es *A*, se simboliza por $\det(A)$ o $|A|$.

El determinante de una matriz es importante, porque entre otras cosas, permite saber si una matriz es inversible o no, sin tener que «calcular» la inversa.

Determinante de una matriz de orden dos

Definición:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejercicios:

1. *Calcula el determinante de las siguientes matrices:*

a) $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$

2. *Indica para que valores de* x *son regulares las siguientes matrices:*

a) $A = \begin{pmatrix} x & 12 \\ -3 & -x \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} x-1 & -3 \\ -x-1 & x+1 \end{pmatrix}$

3. *Resuelve las siguientes ecuaciones:*

a) $\begin{vmatrix} 5+x & x \\ -3 & 2x \end{vmatrix} = 15$ b) $\begin{vmatrix} 9 & -5 \\ x+1 & 3x \end{vmatrix} = 69$

Determinante de una matriz de orden 3

Definición:

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, se define el <u>menor complementario del elemento</u> a_{ij}, y se escribe M_{ij}, como el determinante de la matriz de orden dos, que resulta de suprimir la fila *i* y la columna *j* de la matriz *A*.

Definición:

Se llama <u>adjunto del elemento</u> a_{ij} , al número $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Definición:

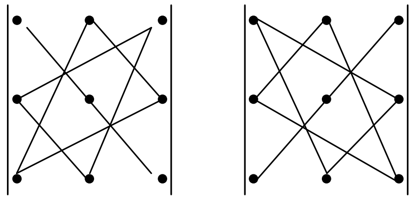
El *<u>determinante de una matriz de orden 3</u>* es la suma de los productos de los elementos de cualquier fila o columna por sus adjuntos correspondientes.

Regla de Sarrus:

Efectuando el desarrollo correspondiente se obtiene la **<u>regla de Sarrus</u>**,

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

que esquematizaremos como sigue:



Productos con signo +   Productos con signo –

Ejercicios:

4. *Calcula los determinantes de las siguientes matrices:*

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 4 & -8 & 3 \\ 7 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5. *Indica cuáles de las matrices de la actividad anterior son regulares y cuáles no lo son.*

6. *Resuelve las siguientes ecuaciones:*

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & x \end{vmatrix} = 24$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2x & x & 1 \\ 4 & -3 & x \end{vmatrix} = -47$

7. *Calcula todos los adjuntos de las siguientes matrices:*

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

8. *Calcula los determinantes por la regla de Sarrus:*

a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -4 & 5 & -2 \\ 7 & 9 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

9. *Calcula desarrollando por una fila o una columna, los determinantes:*

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \\ 4 & 0 & 12 \end{vmatrix}$

Determinante de una matriz de orden 4

Definición:

El cálculo del determinante de matrices cuadradas de orden 4 o superior se realiza siguiendo el mismo procedimiento (que nosotros usaremos como definición), es decir, se elige una fila o columna cualquiera y se realiza la suma de los productos de cada elemento de la fila o columna por su adjunto:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

(determinante de una matriz $A = \left(a_{ij}\right)$ de orden 4, que se ha desarrollado por la primera columna).

Ejercicio:

10. *Calcula, desarrollando por una fila o una columna, el siguiente determinante:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. PROPIEDADES

1. Si una matriz tiene una fila o una columna de ceros, el determinante es cero.

Ejemplos:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 - 0\cdot 2 = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot(-3) + 0\cdot(-1)\cdot(-2) + 2\cdot 0\cdot 1 - \left[1\cdot 0\cdot(-2) + 0\cdot 2\cdot 1 + (-1)\cdot 0\cdot(-3)\right] = 0$

2. Si se intercambian dos filas o dos columnas, cambia el signo del determinante.

Ejemplos:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 2\cdot(-2) = 7$

Intercambiamos la primera y la segunda filas:

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2) - 1\cdot 3 = -7$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 - 8 = 4$

Intercambiamos la primera y la tercera columnas:

$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 - 12 = -4$

3. El determinante de una matriz con dos filas o columnas iguales es cero.

Ejemplos:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$ (tiene dos columnas iguales)

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$ (tiene dos filas iguales)

4. Si multiplicamos una fila o columna por un número real, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

Ejemplos:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \xrightarrow{\text{multiplicamos la primera fila por 3}} \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \xrightarrow{\text{multiplicamos la tercera columna por } -2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 = -2\cdot 2$

5. Un determinante, con una fila o columna formada por la suma de dos números, puede descomponerse en suma de otros dos determinantes que tienen las mismas filas o columnas restantes y, en lugar de aquella, otra formada por los primeros y segundos sumandos, respectivamente.

Ejemplos:

a)
$$\begin{vmatrix} 1+2 & 2 \\ -1+3 & 0 \end{vmatrix} = (1+2)\cdot 0-(-1+3)\cdot 2=-4$$
$$\begin{vmatrix} 1+2 & 2 \\ -1+3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2-6=-4$$

b)
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1+2 & 2-1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1+2 & 2-1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+2=3$$

6. El determinante de una matriz no cambia si a una cualquiera de sus filas o columnas se le suman o restan los elementos de otra paralela a ella, multiplicados por una constante.

Ejemplos:

a)
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{=\!=}{F_2 \Rightarrow F_1+F_2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

b)
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3+2=5$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{F_1+F_3}{\overset{-2F_1+F_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

7. Un determinante es cero si alguna de las filas o columnas que lo componen es combinación lineal de otras paralelas a ella.

Ejemplos:

a) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 3 & -3 & -9 \end{vmatrix} = 0 \text{ ya que } C_3 = 3C_2$$

b) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ya que } F_3 = F_1 + 2F_2$$

8. El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de cada factor.

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 5\\ -1 & 2 & 0\\ 4 & 5 & -2\end{pmatrix}$$

$$|A|=\det\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=0 \text{ y } |B|=\det\begin{pmatrix}0 & 1 & 5\\ -1 & 2 & 0\\ 4 & 5 & -2\end{pmatrix}=-67 \Rightarrow \det(A)\det(B)=0\cdot(-67)=0$$

$$|AB|=\det\left[\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 5\\ -1 & 2 & 0\\ 4 & 5 & -2\end{pmatrix}\right]=\det\begin{pmatrix}9 & 9 & 1\\ -8 & -12 & -6\\ -5 & -3 & 2\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \det(AB)=0$$

Otras propiedades de los determinantes que es importante conocer son:

9. $|A^T|=|A|$

10. $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$

Demostración:

$AA^{-1}=I \Rightarrow \det(AA^{-1})=\det I \Rightarrow \det A \det A^{-1}=1 \Rightarrow \det A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}$ (podemos dividir por $\det A$, ya que si A tiene inversa, entonces $\det A\neq 0$). C.Q.D.

Ejercicios:

11. *Si* $|A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=6$, *calcula:*

a) $|2A|$

b) $|-5A|$

c) $\begin{vmatrix}a & d & 3g\\ b & e & 3h\\ c & f & 3i\end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix}g & h & i\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix}2a & 2b & 2c\\ -d & -e & -f\\ \frac{1}{2}g & \frac{1}{2}h & \frac{1}{2}i\end{vmatrix}$

12. *Aplica las propiedades de determinantes para probar que* $\det(A)$ *vale cero, siendo A la matriz:*

a) $A=\begin{pmatrix} a & a & a \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ *b)* $A=\begin{pmatrix} a+1 & a+2 & a+3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

3. MÉTODOS PARA CALCULAR DETERMINANTES

Método del pivote:

Se basa en la propiedad 6, y consiste en elegir una fila o columna, tomar un elemento (llamado pivote) y hacer ceros los demás elementos de dicha fila o columna. Después, se desarrolla el determinante por esa fila o columna.

Método de Gauss:

Dado un determinante cualquiera de orden *n*, para hallar su valor por el método de Gauss tendremos que transformarlo en otro determinante de forma triangular.

Para anular todos los elementos que quedan por debajo de la diagonal principal, utilizaremos la búsqueda de ceros, y tendremos en cuenta las propiedades de los determinantes.

Ejercicios:

13. *Halla los determinantes:*

a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

14. *Demuestra que:*

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+1)^3\cdot(a-3)$$

15. *Halla en función de* a *el determinante:*

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$$

16. *Resuelve la ecuación*

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicios de selectividad

4. APLICACIONES DE LOS DETERMINANTES

(1) *CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA*

Definición:

La *matriz adjunta* de la matriz $A = (a_{ij})$ es la matriz $Adj(A) = (A_{ij})$ que resulta de sustituir el elemento a_{ij} por su adjunto correspondiente, A_{ij}.

Cálculo de la inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\mathrm{Adj}(A)\right)^T$$

Ejercicios:

17. *Consideramos la matriz A:* $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de a *tendrá inversa la matriz?*
b) Calcúlala para $a = 2$ *y para* $a = 3$.

18. *Halla las matrices inversas, cuando existan, de las siguientes:*

a) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *c)* $C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ *d)* $D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) *CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ*

Rango: el rango de una matriz es el número de filas o de columnas linealmente independientes.

Teorema del rango:

El rango de una matriz coincide con el orden de la mayor submatriz regular, es decir, con el orden de la mayor submatriz cuadrada con determinante no nulo.

Del teorema del rango se deduce que si en una matriz cuadrada A

- Intercambiamos dos filas (columnas) o
- Multiplicamos una fila (columna) por un número no nulo o
- Le sumamos a una columna una combinación lineal del resto

la matriz $\tilde{A}$ resultante tiene el mismo rango que A.

Condiciones necesarias y suficientes para que una matriz tenga inversa:

Una matriz cuadrada A es invertible (es decir, existe A^{-1}) $\Leftrightarrow \text{rango}(A) = \text{orden}(A) \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ A es regular.

EJEMPLOS:

Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A_1 = (8)$ es una submatriz de A de orden 1 y $|8| \neq 0 \Rightarrow rango(A) \geq 1$

$A_2 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ es una submatriz de A de orden 2 y $\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A) \geq 2$

$A_3 = A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una submatriz de A de orden 3 y $|A| = 0 \Rightarrow rango(A)$ no puede ser 3

Como consecuencia, $rango(A) = 2$.

b) $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -6 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

$B_1 = (6)$ es una submatriz de B de orden 1 y $|6| \neq 0 \Rightarrow rango(A) \geq 1$

$B_2 = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$ es una submatriz de B de orden 2 y $\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(B) \geq 2$

$B_3 = B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -6 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ es una submatriz de B de orden 3 y $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -6 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & -5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(B) = 3$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$C_1=(1)$ es una submatriz de C de orden 1 y $|C_1|=|1|\neq 0 \Rightarrow rango(C)\geq 1$

$C_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ es una submatriz de C de orden 2 y $|C_2|\neq 0 \Rightarrow rango(C)\geq 2$ (fíjate que hay un montón de submatrices de orden 2 en C)

Y también hay 4 submatrices de orden 3 en C:

- Quitando la cuarta columna: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
- Quitando la tercera columna: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$
- Quitando la segunda columna: $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
- Quitando la primera columna: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Sin embargo en este caso hemos tenido suerte y todos tienen determinante distinto de cero (-8, -64, -53 y 30), pero si el primero hubiera tenido determinante cero, habría que haber calculado el segundo, y así hasta encontrar o no, uno con determinante distinto de cero.

Como consecuencia, $\text{rango}(C)=3$.

Ejercicios:

19. *Calcula el rango de las siguientes matrices:*

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ *b)* $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

b) $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *d)* $D=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 4 \\ -2 & 8 & -1 \end{pmatrix}$

20. *Busca el valor de* a *para que la siguiente matriz tenga rango 2:* $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & a \end{pmatrix}$

21. *Estudia el rango de la matriz A, según los valores del parámetro a:* $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a+2 & 2 & -1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$

22. *Estudia el rango de las matrices según los valores de a:*

a) $M=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$ *b)* $N=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & a & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

23. *Estudia el rango de A según los valores del parámetro a. ¿Para qué valores de a es A invertible?*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & a \\ 5 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -6 & a+8 \end{pmatrix}$$

(3) ***RESOLUCIÓN DE S.E.L.: REGLA DE CRAMER***

La **expresión matricial** del sistema de $m-$ ecuaciones y $n-$incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

es $AX=B$, donde $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Definición:

$AX=B$ es un sistema de Cramer $\Leftrightarrow$ A es regular

Regla de Cramer (válida solo para sistemas de Cramer):

$$|A|\neq 0 \;\Rightarrow\; x_i = \frac{\det\left(c_1\middle|\ldots\middle|b\middle|\ldots\middle|c_n\right)}{|A|}$$

donde el determinante del numerador está formado por las columnas de A, sustituyendo la $i-$ ésima columna, por la columna b de términos independientes.

Demostración:

En el determinante de A, sustituimos la columna $i-$ésima por la de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & b_i & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11}x_1 & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i1}x_1 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1}x_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1}x_1 & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in}x_1 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}x_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{(3)}{=}$$

$$= x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + x_i \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + x_n \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(4)}{=} x_i \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = x_i\,|A|$$

de donde se obtiene que $x_i = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & b_i & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$

En (1) hemos sustituido b_i por su valor $a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n$; en (2) hemos usado la propiedad 5 de los determinantes «Un determinante, con una fila o columna formada por una suma de varios números, puede descomponerse en suma de varios determinantes que tienen las mismas filas o columnas restantes y, en lugar de aquella, otra formada por los primeros, segundos… sumandos, respectivamente»; en (3) hemos usado la propiedad 4 de los determinantes «Si multiplicamos una fila o columna por un número real, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número»; y en (4) hemos usado la propiedad 3 de los determinantes «El determinante de una matriz con dos filas o columnas iguales es cero».

C.Q.D.

Curiosidad: cálculo numérico		
Método	Número exacto/aproximado de operaciones que hay que hacer para resolver un sistema de ecuaciones lineales $n \times n$.	Ejemplo ($n=6$)
Gauss	$=n\left(n^2+n-1\right)$	246
Cramer	$\simeq n!n^2$	25 920

Problemas de sistemas de ecuaciones lineales: Cramer vs Gauss

24. *En un grupo de 2º de Bachillerato todos los alumnos tienen como materia optativa una de estas tres asignaturas: Literatura, Psicología o Francés. El número de alumnos matriculados en Literatura representa el 60 % del total de alumnos del grupo. Si tres alumnos de Psicología se hubiesen matriculado en Francés, entonces estas dos asignaturas tendrían el mismo número de alumnos. Finalmente, el doble de la diferencia del número de matriculados en Literatura y en Psicología es el triple de la diferencia de los matriculados en Psicología y en Francés. Halla el número de alumnos matriculados en cada una de las materias optativas y el número alumnos del grupo.*

25. *En un IES se imparten enseñanzas de ESO, Bachillerato y Ciclos Formativos. La suma del número de los alumnos de Bachillerato y del doble de los alumnos de Ciclos Formativos excede en 100 al número de los alumnos de ESO. Si sumamos el 40 % de los matriculados en ESO con el 30 % de los matriculados en Bachillerato y con el 20 % de los matriculados en Ciclos Formativos se obtiene un número que excede en 45 unidades al 30 % del número total de alumnos. Sabiendo que cursan estos tres tipos de enseñanza un total de 1200 alumnos, halla el número de matriculados en cada tipo de enseñanza.*

26. *Un alumno de 2º de Bachillerato emplea en la compra de tres lápices, un sacapuntas y dos gomas de borrar, tres euros. El doble del precio de un lápiz excede en cinco céntimos de euro a la suma de los precios de un sacapuntas y de una goma de borrar. Si cada lápiz costara cinco céntimos de euro más, entonces su precio duplicaría al de una goma de borrar. Determina el precio de un lápiz, de un sacapuntas y de una goma de borrar.*

27. *La suma de las edades actuales de los tres hijos de un matrimonio es 59 años. Hace cinco años, la edad del menor era un tercio de la suma de las edades que tenían los otros dos. Dentro de cinco años, el doble de la edad del hermano mediano excederá en una unidad a la suma de las edades que tendrán los otros dos. Halla las edades actuales de cada uno de los hijos*

28. *En una población se han presentado dos partidos políticos A y B a las elecciones municipales. Si 250 votantes del partido A hubiesen votado el partido B, ambos partidos hubiesen empatado a votos. El número de votos en blanco o nulos es el 1 % de la suma del número de votos obtenidos por ambas candidaturas. Sabiendo que fueron a votar 11615 electores, halla el número de votos obtenido por cada partido y cuantos son blancos o nulos.*

Solución:

$$\begin{cases} x = \text{ número de votantes de A} \\ y = \text{ número de votantes de B} \\ z = \text{ número de votos nulos o en blanco} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-250=y+250 \\ z=0.01(x+y) \\ x+y+z=11615 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y=500 \\ -x-y+100z=0 \\ x+y+z=11615 \end{cases} \rightarrow (x,y,z)=(6000,5500,115)$$

El candidato A obtiene 6000 votos, el B 5500, y nulos o en blanco hay 115.

29. *Para poder comprar 5 bolígrafos necesito 2 euros más de los que tengo. En cambio, me sobra un euro de lo que tengo si compro 2 lapiceros. Finalmente, necesito 60 céntimos de euro más de lo que tengo para poder comprar dos bolígrafos y dos lapiceros. Halla el precio de un bolígrafo y el de un lapicero. ¿De cuánto dinero dispongo?*

<u>Solución:</u>

$x =$ cantidad de dinero de la que dispongo

$y =$ precio de un boli

$z =$ precio de un lapicero

$$\begin{cases} 5y=x+2 \\ 2z=x-1 \\ 2y+2z=x+0.60 \end{cases} \rightarrow (x,y,z)=(2,\ 0.8,\ 0.5)$$

Así, dispongo de 2€, un bolígrafo cuesta 80 céntimos y un lapicero cuesta 50 céntimos.

30. Se consideran, el número de tres cifras “*xyz*” y el que resulta de éste al permutar las cifras de las unidades y de las centenas. Halla el valor de las cifras “*x*”, “*y*” y “*z*” sabiendo que la suma de los dos números es 585, que la división del primero entre el segundo tiene de cociente 1 y de resto 99 y que la suma de la cifra de las centenas y la cifra de las decenas del primer número es 7.

<u>Solución:</u>

$$\left.\begin{matrix} xyz=100x+10y+z \\ zyx=100z+10y+x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (100x+10y+z)+(100z+10y+x)=585 \\ 100x+10y+z=100z+10y+x+99 \\ x+y=7 \end{cases} \rightarrow (x,y,z)=(3,4,2)$$

Las cifras “*x*”, “*y*” y “*z*” toman los valores 3, 4 y 2 respectivamente.

31. *Un hombre le dice a su esposa: ¿Te has dado cuenta que desde el día de nuestra boda hasta el día del nacimiento de nuestro hijo transcurrieron el mismo número de años que desde el día del nacimiento de nuestro hijo hasta hoy? El día del nacimiento de nuestro hijo la suma de nuestras edades era de 55 años. La mujer le replicó: “Me acuerdo que en ese día del nacimiento de nuestro hijo, tú tenías la edad que yo tengo ahora y además recuerdo que el día de nuestra boda el doble de la edad que tu tenías excedía en 20 años a la edad que yo tengo hoy. Halla las edades actuales de ambos.*

<u>Solución:</u>

$$\text{Boda} \xrightarrow{\quad x \quad} \text{Nacimiento hijo} \xrightarrow{\quad x \quad} \text{Hoy}$$

$$2(y-x)=(z+x)+20 \qquad \begin{cases} y=\text{edad marido} \\ z=\text{edad mujer} \end{cases}$$

$$3^{\text{a}}\ \text{ecuación} \qquad \begin{cases} y+z=55\ (1^{\text{a}}\ \text{ecuación}) \\ y=z+x\ (2^{\text{a}}\ \text{ecuación}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z=55 \\ y=z+x \\ 2(y-x)=(z+2x)+20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y+z=55 \\ -x+y-z=0 \\ -4x+2y-z=20 \end{cases} \rightarrow (x,y,z)=(5,35,30)$$

Por tanto, a día de hoy, el marido tiene 30 + 5 = 35 años y la mujer 25 + 5 = 30 años.

32. *Para la compra de un artículo de precio 10,70 euros se utilizan monedas de 1 euro, de 50 céntimos de euro y de 20 céntimos de euro. El número total de monedas excede en una unidad al triple de monedas de 1 euro. El 30% de la suma del número de monedas de 1 euro con el doble del número de monedas de 50 céntimos coincide con el número de monedas de 20 céntimos. Halla el número de monedas que se utilizan de cada clase.*

Solución:

Nombramos las incógnitas

$$\begin{cases} x = \text{ número de monedas de 1 €} \\ y = \text{ número de monedas de 50 cent.} \\ z = \text{ número de monedas de 20 cent.} \end{cases}$$

y planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+0,5y+0,2z=10,70 \\ x+y+z=3x+1 \\ 0,3(x+2y)=z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 100x+50y+20z=1070 \\ -2x+y+z=1 \\ 3x+6y-10z=0 \end{cases} \rightarrow (x,y,z)=(6,7,6)$$

Por tanto, utiliza 6 monedas de 1 €, 7 monedas de 50 cent. Y 6 monedas de 20 cent.

Ejercicios de selectividad

Unidad 12:
DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

1. TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

Lleva el nombre del matemático francés **Eugène Rouché** quien lo enunció en 1875 y lo completó en 1880, y del matemático alemán **Ferdinand Georg Fröbenius** quien fue uno de los muchos matemáticos que lo demostraron.

Teorema de Rouché-Fröbenius

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si, y solo si, el rango de la matriz de coeficientes *A*, es igual al rango de la matriz ampliada $\left(A \mid b\right)$:

$$\text{Sistema compatible} \Leftrightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}\left(A \mid b\right)$$

Demostración:

Escribimos el sistema en forma vectorial: $C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n = b$

$\Rightarrow$) Si el sistema es compatible determinado, entonces, existe al menos una solución $\left(s_1, s_2, ..., s_n\right)$. Esto es, $C_1s_1 + C_2s_2 + ... + C_ns_n = b$, es decir, la columna de términos independientes es combinación lineal de las columnas de la matriz de los coeficientes, A, y, como consecuencia, $\text{rango}(A) = \text{rango}\left(A \mid b\right)$.

$\Leftarrow$) Si $\text{rango}(A) = \text{rango}\left(A \mid b\right)$, entonces la columna de términos independientes es combinación lineal de las columnas de la matriz A y, por tanto, $\exists\left(s_1, ..., s_n\right)$ tal que $b = C_1s_1 + C_2s_2 + ... + C_ns_n$, esto es, $\left(s_1, ..., s_n\right)$ es una solución del sistema y, como consecuencia, el sistema es compatible determinado. C.Q.D.

2. DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sea $AX = b$ un sistema lineal de $m-$ ecuaciones y $n-$incógnitas.

Discusión de sistemas lineales homogéneos:

$$\text{Sistemas homogéneos}\begin{cases} \left.\begin{array}{l} rango(A) = rango\left(A \mid b\right) = n \\ \text{el sistema tiene solución, la trivial} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \textit{COMPATIBLE} \\ \textit{DETERMINADO} \end{array} \\ \\ \left.\begin{array}{l} rango(A) = rango\left(A \mid b\right) < n \\ \text{el sistema tiene infinitas soluciones} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \textit{COMPATIBLE} \\ \textit{INDETERMINADO} \end{array} \end{cases}$$

Discusión de sistemas lineales no homogéneos:

$$\text{Sistemas no homogéneos}\begin{cases} \begin{array}{c} rango(A)=rango(A\mid b)=r \\ \text{el sistema tiene solución} \\ COMPATIBLE \end{array} \begin{cases} \begin{array}{c} r=n \\ \text{solución única} \\ DETERMINADO \end{array} \\ \begin{array}{c} r<n \\ \text{infinitas soluciones} \\ INDETERMINADO \end{array} \end{cases} \\ \begin{array}{c} rango(A)\neq rango(A\mid b) \\ \text{el sistema no tiene solución} \\ INCOMPATIBLE \end{array} \end{cases}$$

Como consecuencia del teorema de Rouché-Fröbenius se tiene que todo sistema de Cramer es compatible determinado. Sin embargo, *no todo sistema compatible determinado es de Cramer.*

3. DISCUSIÓN DE SISTEMAS CON UN PARÁMETRO

Un **parámetro** es un símbolo matemático que puede tomar infinitos valores reales en una ecuación, para cada uno de los cuales se obtendrá una solución diferente, denominada **solución particular**.

Definición:

La **discusión de sistemas con un parámetro** consiste en hallar los valores de dicho parámetro, para los que el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Se pueden ***discutir***:

- Utilizando el método de Gauss.
- Con el teorema de Rouché–Fröbenius, aplicando solo los determinantes.
- Con el teorema de Rouché–Fröbenius primero y aplicando el método de Gauss después.

Ejercicios de selectividad

Ejercicio:

1. Discutir y resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales dependientes de un parámetro:

a) $$\begin{cases} 2x + y + z + t = 0 \\ ax - 2y + z + 4t = 0 \\ 3x - y - z + 4t = 0 \\ -2x + 4y - z + 9t = 0 \end{cases} \quad \text{con } a\in\mathbb{R}$$

b) $\begin{cases} 3x - ay + 3z = 4 \\ ax + y - z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ ax + 4y - z = 5 \end{cases}$ con $a \in \mathbb{R}$

4. ELIMINACIÓN DE PARÁMETROS

La **eliminación de parámetros** de un sistema de ecuaciones es el procedimiento que transforma un sistema dado en otro equivalente en el que no aparecen los parámetros anteriores.

Consideremos un sistema de ecuaciones expresado en función de los parámetros $\lambda_1,...,\lambda_n$:

$$\left.\begin{array}{l} b_1 + a_{11}\lambda_1 + ... + a_{1n}\lambda_n = x_n \\ .... \\ b_m + a_{m1}\lambda_1 + ... + a_{mn}\lambda_m = x_m \end{array}\right\}$$

Transformamos el sistema anterior en un sistema de *m*-ecuaciones con *n*-incógnitas ($\lambda_1,...,\lambda_n$):

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\lambda_1 + ... + a_{1n}\lambda_n = x_n - b_1 \\ .... \\ a_{m1}\lambda_1 + ... + a_{mn}\lambda_m = x_m - b_m \end{array}\right\}$$

Imponiendo que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A \mid b)$ obtenemos un sistema equivalente en el que no aparecen los parámetros $\lambda_1,...,\lambda_n$. Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones implícitas del sistema.

Consideraciones a tener en cuenta:

- Si en el sistema inicial, $\text{rango}(A) = m$, no podemos eliminar ningún parámetro, ya que, al ser el sistema compatible determinado, no tiene ecuaciones implícitas que lo restrinjan.
- Si $\text{rango}(A) = k < m$ podremos eliminar algunos parámetros; esta eliminación dará lugar a un sistema de $m - k$ ecuaciones.

5. GEOGEBRA

(1) Multiplicación de matrices cuadradas de orden 3.
Autor: Leopoldo Aranda Murcia
Tema: Matrices, Multiplicación
https://www.geogebra.org/m/buacy6cj

(2) Determinante de una matriz 3x3. Dos métodos.
Autor: Leopoldo Aranda Murcia
Tema: Matrices
https://www.geogebra.org/m/v6sfw9bw

(3) Ejercicios de determinantes
Autor: Pepe Muñoz
Tema: Álgebra, Matrices
https://www.geogebra.org/m/egxn7jqf

(4) Rango de una matriz
Autor: José María Arias Cabezas
https://www.geogebra.org/m/ajGRxdNM

(5) Solución gráfica de ecuaciones de 3x3
Autor: Antonio Zavaleta Bautista
Tema: Ecuaciones
https://www.geogebra.org/m/chVQmea4

(6) Resolución sistema de ecuación lineal 3x3
Autor: Edgar Arana
Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales 3x3, método de la matriz Inversa, en el cuadro de la derecha puedes modificar los valores de los coeficientes de las variables de cada ecuación, se mostrarán inmediatamente en la lista de la izquierda que se denomina coeficientes y la solución, si existe, se muestra en orden para X,Y,Z, en la matriz Solución.
https://www.geogebra.org/m/S93qc8Fz

GEOMETRÍA

Unidad 13:
ESPACIO AFÍN

1. ESPACIO AFÍN TRIDIMENSIONAL

1.1. Vectores en el espacio: vectores fijos y libres

Definición:

Un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado que tiene su origen en el punto A y su extremo en el punto B.

Geométricamente se representan con una flecha que empieza en A y acabe en B.

Los *elementos* de un vector fijo son:

- Módulo de $\overrightarrow{AB}$: es la longitud del segmento y se representa por $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
- Dirección de $\overrightarrow{AB}$: es la dirección de la recta que pasa por A y B.
- Sentido de $\overrightarrow{AB}$: es el recorrido de la recta cuando nos trasladamos de A a B. Si dos vectores fijos tienen el mismo sentido escribiremos $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$ y si lo tienen distinto $\overrightarrow{AB} \downarrow \overrightarrow{CD}$. El vector fijo nulo no tiene sentido definido.

Dos vectores fijos no nulos son equipolentes si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido, es decir,

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD} \\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| \end{cases}$$

Apuntillemos que todos los vectores fijos nulos son equipolentes entre sí.

La relación de equipolencia entre vectores fijos verifica claramente las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva:

Reflexiva: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$

Simétrica: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$

Transitiva: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$

es por lo tanto una relación de equivalencia, por lo que el conjunto de todos los vectores fijos del plano queda clasificado en clases de equivalencia (cada clase de equivalencia estará formada por un vector fijo y todos los equipolentes a él). A cada una de estas clases la llamaremos vector libre[10].

[10] Esto no es nada extraño; de hecho ya conoces otro conjunto en el que pasa lo mismo, es el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Recuerda que cuando se trabaja con fracciones se puede elegir la que más nos convenga de todas las que son equivalentes a la que nos dan. Esto mismo es lo que vamos a hacer con los vectores. De todos los que son equipolentes entre sí elegiremos el más apropiado en cada situación.

Definición:

Llamaremos vector libre a cada una de las las clases de equivalencia formada por un vector fijo y todos sus equipolentes. El vector libre determinado por el vector fijo $\overrightarrow{AB}$ lo notaremos $\left[\overrightarrow{AB}\right]$, es decir:

$$\left[\overrightarrow{AB}\right]=\left\{\vec{x}:\vec{x}\sim\overrightarrow{AB}\right\}$$

y al vector fijo $\overrightarrow{AB}$ se le suele llamar representante de la clase.

Al conjunto formado por todos los vectores libres lo representaremos por V^3.

La propiedad fundamental de los vectores libres es que existe un único representante de cada clase con origen en un punto dado.

Dos vectores libres son iguales, cuando sus representantes son equipolentes.

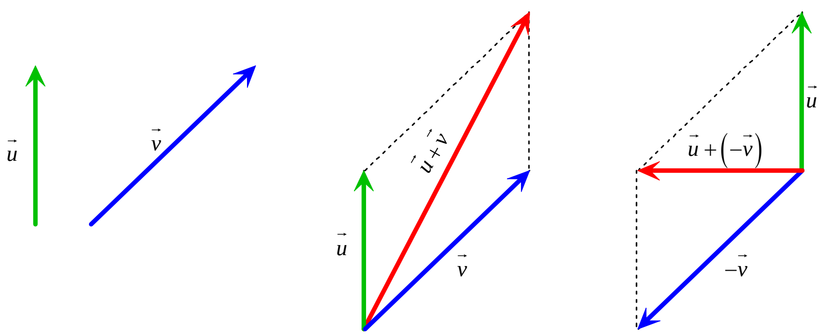
1.2. El espacio vectorial de los vectores libres

El conjunto que acabamos de definir, V^3, puede ser enriquecido con operaciones que lo doten de una estructura (en concreto la de espacio vectorial), que hará su estudio más cómodo, al poder ser identificado con otras estructuras similares más sencillas.
Las operaciones referidas son:

- Suma de vectores libres.
- Producto de un número real por un vector libre.

a) Suma

Para sumar dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se representa el vector $\vec{u}$ y por su extremo se representa un representante del vector $\vec{v}$. El vector que resulta de unir el origen de $\vec{u}$ con el extremo de $\vec{v}$ se denomina vector suma de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



Propiedades de la suma:

(1) Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

(2) Asociativa: $\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}$

(3) Existencia de elemento neutro: $\vec{0}$: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

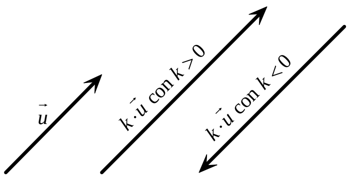
(4) Existencia de elemento opuesto: $\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\vec{0}$

Por verificar estas cuatro propiedades se dice que $\left(V^3,+\right)$ es un grupo abeliano.

Nótese que la suma de vectores libres es una operación interna.

b) ***Multiplicación de un vector por un número real***

El producto del vector $\vec{u}$ por el número real k es el vector $k\vec{u}$ que tiene la misma dirección que $\vec{u}$, igual sentido si $k > 0$, y sentido contrario si $k < 0$, y cuyo módulo es igual a $k\left|\vec{u}\right|$.



Propiedades de la multiplicación por escalares:

(5) $k\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=k\vec{u}+k\vec{v}$

(6) $\left(k+h\right)\vec{u}=k\vec{u}+h\vec{u}$

(7) $\left(kh\right)\vec{u}=k\left(h\vec{u}\right)$

(8) $1\vec{u}=\vec{u}$

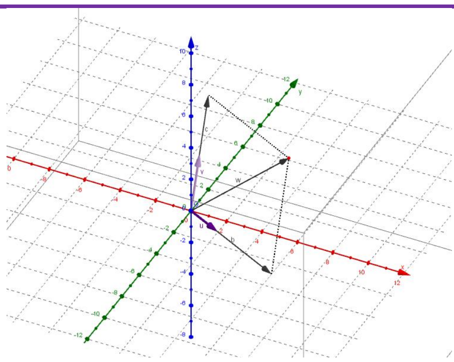
Por verificar estas ocho propiedades se dice que la terna $\left(V^3,+,\cdot_{\mathbb{R}}\right)$ es un espacio vectorial real.

$$\boxed{\left(V^3,+,\cdot_{\mathbb{R}}\right)\text{ es un espacio vectorial real}}$$

1.3. Dependencia e independencia de vectores

Definición:

Una combinación lineal de los vectores $\vec{v_1},\ \vec{v_2},\ \ldots,\ \vec{v_n}$ es una expresión de la forma $\alpha_1\vec{v_1}+\ldots+\alpha_n\vec{v_n}$ con $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$.



Definición:

Diremos que los <u>vectores</u> $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ son <u>linealmente dependientes</u> si $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $\alpha_1\vec{u_1} + \alpha_2\vec{u_2} + \ldots + \alpha_n\vec{u_n} = \vec{0}$. En caso contrario, diremos que los <u>vectores</u> son <u>linealmente</u> <u>independientes</u>, es decir, si la única posibilidad de que la igualdad anterior sea cierta es que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

<u>Definición:</u>

Un conjunto de vectores de un espacio vectorial se dice que forman un <u>sistema de generadores</u> si cualquier vector del espacio se puede escribir como combinación lineal de los vectores de dicho conjunto.

<u>Definición:</u>

Un conjunto de vectores forman una <u>base</u> si son linealmente independientes y además forman un sistema de generadores.

Al número de vectores que forman una cualquiera de las bases (pues todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen el mismo número de elementos) se le llama **<u>dimensión</u>** del espacio vectorial.

Por tanto, la dimensión de V^3 es tres.

Dada una base $B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ de V^3 y dado un vector $\vec{x}$ cualquiera, sabemos que existen tres únicos números reales α_1, α_2 y α_3 que permiten expresar dicho vector $\vec{x}$ como combinación lineal de los vectores básicos, esto es:

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{u_1} + \alpha_2\vec{u_2} + \alpha_3\vec{u_3}$$

A la terna $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ se le llama <u>coordenadas del vector</u> $\underline{\vec{x}}$ <u>en la base</u> $\underline{B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}}$.

<u>Criterio práctico:</u>

En un espacio vectorial tridimensional tres vectores linealmente independientes siempre forman una base.

1.4.<u>El Espacio vectorial $\mathbb{R}^3$</u>

En $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ (conjunto de ternas de números reales) definimos las siguientes operaciones:

Suma: $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

Producto de un número real por una terna: $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Las <u>ternas</u> (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) de $\mathbb{R}^3$ son <u>iguales</u> cuando se verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$$

El conjunto $\mathbb{R}^3$ con las dos operaciones definidas antes, verifica las mismas ocho propiedades que hemos visto que cumplen los vectores libres y, por tanto,

$$\boxed{\left(\mathbb{R}^3,+,\cdot_{\mathbb{R}}\right) \text{ es un espacio vectorial real}}$$

1.5. Espacio afín asociado al espacio vectorial V^3

Sea E el espacio ordinario (conjunto de puntos del espacio) y V^3 el espacio vectorial de los vectores libres en E. El par (E,φ), donde $\varphi: E\times E \to V^3$ definida por $(A,B)\to\left[\overrightarrow{AB}\right]$ verifica las siguientes propiedades, se denomina espacio afín asociado al espacio vectorial V^3:

1) Dado un vector $\vec{v}\in V^3$ y un punto $O\in E$, existe un único punto $P\in E$ tal que $\varphi(O,P)=\vec{v}$
2) $\varphi(A,B)=0 \Leftrightarrow A=B$
3) $\varphi(A,B)+\varphi(B,C)=\varphi(A,C) \qquad \forall A,B,C\in E$

En lo sucesivo lo denotaremos por E^3.

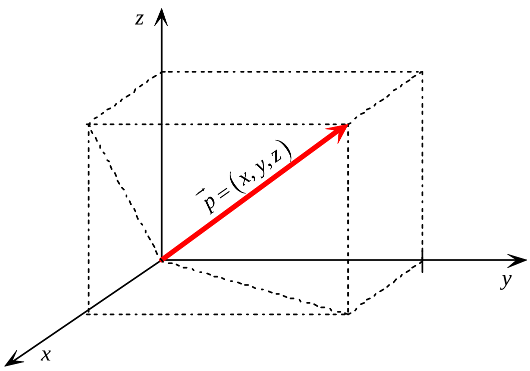
La aplicación anterior es, evidentemente, sobreyectiva, pero no inyectiva.

Sea $O\in E^3$. Entonces, todo punto $P\in E^3$ determina el vector libre $\vec{p}=\left[\overrightarrow{OP}\right]$, que denominaremos vector de posición del punto P respecto del punto O.

Un sistema de referencia en el espacio afín E^3, es una cuaterna de puntos (O,U_1,U_2,U_3) tales que los vectores $\vec{u}_1=\left[\overrightarrow{OU_1}\right]$, $\vec{u}_2=\left[\overrightarrow{OU_2}\right]$, y $\vec{u}_3=\left[\overrightarrow{OU_3}\right]$ forman una base de V^3. Las rectas determinadas por el punto O y cada uno de los puntos U_1, U_2 y U_3 se llaman ejes coordenados. Los planos determinados por cada par de ejes coordenados se llaman planos coordenados. Las coordenadas de un punto $P\in E^3$ son los únicos números reales (x_1,x_2,x_3), tales que:

$$\left[\overrightarrow{OP}\right]=\vec{p}=x\vec{u}_1+y\vec{u}_2+z\vec{u}_3$$

El punto P es la representación gráfica de la terna y lo indicaremos por $P(x,y,z)$.



Como consecuencia, las ternas ordenadas de números reales son una representación algebraica de los vectores libres del espacio. De hecho, permiten identificar V^3 con $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{V^3 \cong \mathbb{R}^3}$$

con lo que toda relación geométrica se traduce en un relación numérica.

Lo anterior nos dice que desde el punto de vista matemático los espacios vectoriales $\left(V^3,+,\cdot_{\mathbb{R}}\right)$ y $\left(\mathbb{R}^3,+,\cdot_{\mathbb{R}}\right)$ son plenamente identificables, e indistinguibles como espacios vectoriales.

Ejercicio:

8. *Sean los vectores* $\vec{x}=(1,-5,2)$, $\vec{y}=(3,4,-1)$, $\vec{z}=(6,3,-5)$ *y* $\vec{w}=(24,26,-6)$. *Halla* a, b y c *para que se cumpla:* $a\vec{x}+b\vec{y}+c\vec{z}=\vec{w}$.

1.6. Criterios de dependencia e indepencia lineal de vectores

- Dos vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ son linealmente dependientes si se verifica la siguiente condición:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}=1$$

- Dos vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ son linealmente independientes si se verifica la siguiente condición:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}=2$$

- Tres vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ son linealmente dependientes si se verifica la siguiente condición:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}=1 \text{ o } 2$$

- Tres vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ son linealmente independientes si se verifica la siguiente condición:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}=3$$

Ejercicios:

9. *Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:*

a) $\vec{u}=(1,2,1)$, $\vec{v}=(-1,0,3)$, $\vec{w}=(1,2,-1)$

b) $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(1,4,11)$, $\vec{c}=(1,1,-1)$, $\vec{d}=(0,1,4)$

c) $\vec{x}=(1,1,0)$, $\vec{y}=(1,0,1)$, $\vec{z}=(5,2,3)$

10. *Determina el valor de* k *para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes:*

a) $\vec{u}=(k,-3,2)$, $\vec{v}=(2,3,k)$, $\vec{w}=(4,6,-4)$ *b)* $\vec{a}=(3,2,5)$, $\vec{b}=(2,4,7)$, $\vec{c}=(1,-1,k)$

11. *¿Cuál de los siguientes conjuntos de vectores forman una base?*

a) $B_1=\{(1,2,1),\ (1,0,1),\ (2,2,2)\}$ *b)* $B_2=\{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0),\ (0,0,1)\}$

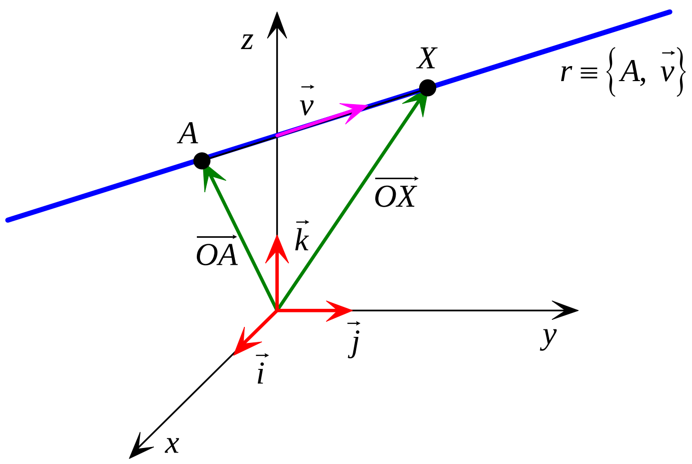
12. *¿Para qué valores de* a *el conjunto de vectores* $S=\{(1,1,1),\ (a,1,1),\ (1,a,0)\}$ *es linealmente independiente? ¿Es una base para dichos valores?*

2. ECUACIONES DE LA RECTA

2.1. Ecuaciones de la recta

Definición:

Se llama **determinación lineal de la recta** r al par $(A,\vec{v})$ formado por un punto A, llamado punto base, y un vector (libre) no nulo $\vec{v}$ que se denomina vector director o de dirección de la recta.



- Ecuación vectorial de la recta

Sea r la recta determinada por el punto A y el vector $\vec{v}$. Si $X\in r$, se tiene que

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AX}$$

y como $\overrightarrow{AX}=\lambda\vec{v}$ resulta:

$$\boxed{\vec{x}=\vec{a}+\lambda\vec{v}\qquad \text{Ecuación vectorial de la recta}}$$

Si $A(a_1,a_2,a_3)$, $X(x,y,z)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ se tiene que:

$$(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+\lambda(v_1,v_2,v_3)$$

Ecuación vectorial de la recta en coordenadas

- Ecuaciones paramétricas de la recta

$$\left\{\begin{array}{l} x=a_1+\lambda v_1\\ y=a_2+\lambda v_2\\ z=a_3+\lambda v_3\end{array}\right.\qquad \text{Ecuaciones paramétricas de la recta}$$

- Ecuación continua de la recta

Eliminando λ de las ecuaciones paramétricas resulta:

$$\boxed{\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}=\frac{z-a_3}{v_3} \quad \text{Ecuación continua de la recta}}$$

En rectas paralelas a los ejes alguno de los denominadores de la ***ecuación continua*** es cero, por lo que dicha ecuación adquiere un ***carácter formal o simbólico***; para obtener en estos casos la ecuación general basta igualar a cero el correspondiente numerador, y obtener la segunda ecuación de la otra igualdad.

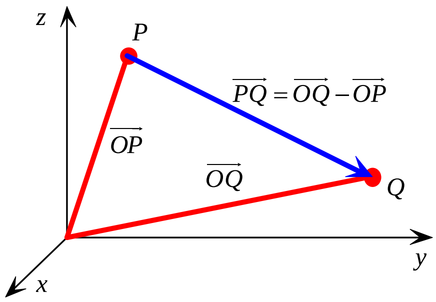
- Ecuación implícita o cartesiana

Desarrollando la ecuación continua se obtiene:

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases} \quad \text{Ecuación implícita}}$$

2.2. Coordenadas del vector determinado por dos puntos. Vectores paralelos

A la vista del siguiente dibujo



se obtiene la siguiente:

Caracterización:

Las coordenadas del vector que une $P(p_1,p_2,p_3)$ y $Q(q_1,q_2,q_3)$ son:

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(q_1-p_1,q_2-p_2,q_3-p_3)$$

Definición / caracterización:

Los vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ son paralelos, $\vec{u}\parallel\vec{v}$, sii tienen la misma dirección, sii son linealmente dependientes, esto es, $\vec{u}=\lambda\vec{v}$ con $\lambda\in\mathbb{R}$, o equivalentemente, cuando

$$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=\frac{u_3}{v_3}$$

Ejercicios:

1. *Expresa, en todas sus formas posibles, la ecuación de la recta que pasa por el punto* $P(1,-2,5)$ *y tiene por vector director* $\vec{v}=(3,1,-2)$.

2. *Expresa, en todas sus formas posibles, la ecuación de la recta que pasa por los puntos* $P(1,-2,5)$ y $Q(-2,1,0)$.

3. *Halla las ecuaciones de la recta* $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x-y-2z=1 \end{cases}$ *en forma paramétrica y continua.*

4. *Expresa cada una de las siguientes rectas de todas las formas vistas en clase:*

a) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-4}{3}$

b) $\begin{cases} x-y-3z=1 \\ x-3y+z=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3+2t \end{cases}$

5. *Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta de ecuación* $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{2}=-z$.

2.3. Ecuaciones de los ejes de coordenadas

Eje OX:

$OX \equiv \left\{O(0,0,0), \vec{i}=(1,0,0)\right\}$

Ecuación vectorial: $(x,y,z)=(0,0,0)+\lambda(1,0,0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

Ecuaciones implícitas: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

Eje *OY*:

$OY \equiv \left\{O(0,0,0), \vec{j}=(0,1,0)\right\}$

Ecuación vectorial: $(x,y,z)=(0,0,0)+\lambda(0,1,0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$

Ecuaciones implícitas: $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$

Eje *OZ*:

$$OZ \equiv \left\{O(0,0,0), \vec{k}=(0,0,1)\right\}$$

Ecuación vectorial: $(x,y,z)=(0,0,0)+\lambda(0,1,0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$

Ecuaciones implícitas: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

3. INCIDENCIA DE PUNTO Y RECTA

3.1. Condición para que tres puntos estén alineados

Caracterizaciones:

Los puntos $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ y $C(c_1,c_2,c_3)$ están alineados si, y solo si,

$$\text{rango}\begin{pmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{pmatrix}<2$$

o equivalentemente, si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son linealmente dependientes ($\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$).

4. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

4.1. Posiciones relativas de dos rectas

Sean $\begin{cases} x=a_1+\lambda v_1 \\ y=a_2+\lambda v_2 \\ z=a_3+\lambda v_3 \end{cases}$ y $\begin{cases} x=a'_1+\mu v'_1 \\ y=a'_2+\mu v'_2 \\ z=a'_3+\mu v'_3 \end{cases}$ dos rectas y llamemos $M=\begin{pmatrix} v_1 & v'_1 \\ v_2 & v'_2 \\ v_3 & v'_3 \end{pmatrix}$ y $\widetilde{M}=\begin{pmatrix} v_1 & v'_1 & a'_1-a_1 \\ v_2 & v'_2 & a'_2-a_2 \\ v_3 & v'_3 & a'_3-a_3 \end{pmatrix}$. Discutiendo el sistema $\begin{cases} a_1+\lambda v_1=a'_1+\mu v'_1 \\ a_2+\lambda v_2=a'_2+\mu v'_2 \\ a_3+\lambda v_3=a'_3+\mu v'_3 \end{cases}$, donde las incógnitas son (λ,μ), se pueden presentar las siguientes posiciones relativas:

* rango $M=2$

- * r y s se cruzan $\Leftrightarrow$ rango $\widetilde{M}=3$
- * r y s se cortan en un punto $\Leftrightarrow$ rango $\widetilde{M}=2$

** rango $M=1$

- * r y s paralelas (y distintas) $\Leftrightarrow$ rango $\widetilde{M}=2$
- * r y s son coincidentes $\Leftrightarrow$ rango $\widetilde{M}=1$

rango M	rango $\widetilde{M}$	Sistema	Posición relativa
2	3	Incompatible	Se cruzan
2	2	Compatible determinado	Se cortan en un punto
1	2	Incompatible	Son paralelas
1	1	Compatible indeterminado	Son coincidentes

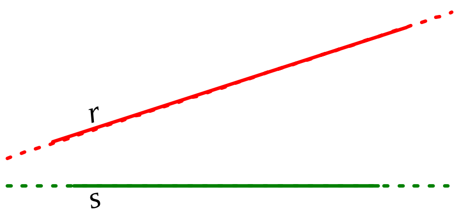
Si las rectas vienen dadas por sus ecuaciones implícitas, entonces:

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

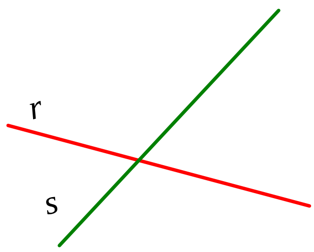
$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \widetilde{M} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

y se pueden presentar las siguientes posiciones relativas:

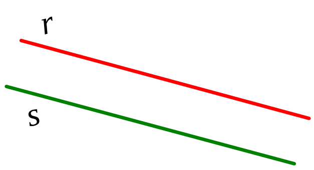
rango M	rango $\widetilde{M}$	Sistema	Posición relativa
3	4	Incompatible	Se cruzan
3	3	Compatible determinado	Se cortan en un punto
2	3	Incompatible	Paralelas
2	2	Compatible indeterminado	Coincidentes



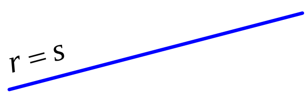
Rectas que se cruzan



Rectas secantes (en un punto)



Rectas paralelas



Rectas coincidentes

Esto, se puede escribir **de otra forma**:

Sean $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ los vectores directores de las rectas r y s, y P_r y P_s puntos cualesquiera de r y de s respectivamente. Se tiene:

Vectores directores			
Proporcionales		No proporcionales	
$\overrightarrow{u_r} \parallel \overrightarrow{u_s}$		$\overrightarrow{u_r} \nparallel \overrightarrow{u_s}$	
Coincidentes	Paralelas	Secantes	Se cruzan
$\overrightarrow{u_r} \parallel \overrightarrow{P_rP_s}$	$\overrightarrow{u_r} \nparallel \overrightarrow{P_rP_s}$	$\det\left(\overrightarrow{u_r},\ \overrightarrow{u_s},\ \overrightarrow{P_rP_s}\right)=0$	$\det\left(\overrightarrow{u_r},\ \overrightarrow{u_s},\ \overrightarrow{P_rP_s}\right)\neq 0$

Ejercicios:

6. *Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de rectas:*

a) $\begin{cases} r_1 \equiv \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases} \\ r_2 \equiv \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-2y-z=3 \end{cases} \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} s_1 \equiv \begin{cases} 2x+y=-5 \\ 4x-z=-10 \end{cases} \\ s_2 \equiv \begin{cases} 2y-z=-7 \\ 2x-3y=8 \end{cases} \end{cases}$

7. *Estudia la posición relativa de las rectas* $r \equiv \begin{cases} x+z=8 \\ y+z=4 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y+z=5 \end{cases}$.

8. *Estudia, según los valores de* k, *la posición relativa de las rectas:*

$$r \equiv (x,y,z)=(1,0,2)+\lambda(-3,1,k) \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x+1}{3}=-y+1=z$$

9. *Estudia las posiciones relativas de los pares de rectas que aparecen a continuación. Cuando se corten, calcula el punto en el que lo hacen:*

a) $r \equiv \begin{cases} x=1-5\lambda \\ y=2+3\lambda \\ z=-5+\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\mu \end{cases}$ *c)* $r \equiv \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=5 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=-1-6\mu \\ y=3+3\mu \\ z=5 \end{cases}$

b) $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=3 \\ y=3 \\ z=\mu \end{cases}$ *d)* $r \equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=-2-\lambda \\ z=1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=-2\mu \\ y=3+2\mu \\ z=-1 \end{cases}$

4.2. Incidencia de punto y recta

Definición / caracterización:

Sea r la recta determinada por el punto $A(a_1,a_2,a_3)$ y el vector $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$. Se tiene:

$$P(p_1,p_2,p_3)\in r \Leftrightarrow \begin{cases} p_1=a_1+\lambda v_1 \\ p_2=a_2+\lambda v_2 \\ p_3=a_3+\lambda v_3 \end{cases} \text{ compatible determinado} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \parallel \vec{v}$$

Ejercicios:

10. *Estudia si los puntos* $P(1,-2,5)$ y $Q(2,2,4)$ *pertenecen a la recta* $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-4}{3}$.

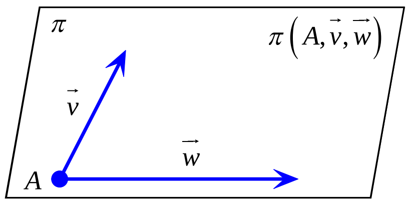
11. *¿Los puntos* $A(3,-4,2)$, $B(1,2,3,)$ y $C(-1,4,6)$ *están alineados?*

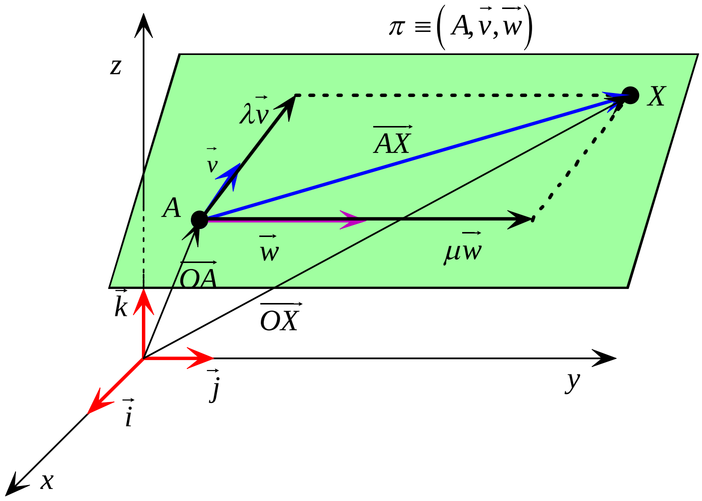
Ejercicios de selectividad

5. ECUACIONES DEL PLANO

Definición:

Un plano π queda determinado por un punto $A(a_1,a_2,a_3)$ (el vector $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ se llama vector de posición) y dos vectores linealmente independientes (no nulos y no proporcionales) $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$, que denominamos vectores directores. A $\pi\left(A,\vec{v},\vec{w}\right)$ se le llama determinación lineal del plano π.





Para obtener la ecuación vectorial, tenemos en cuenta que $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AX}$ y, como $\overrightarrow{AX}=\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}$, resulta que

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}$$

que es la ecuación vectorial del plano determinado por el punto A y los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

- Si $X(x,y,z)\in\pi$ se tiene:

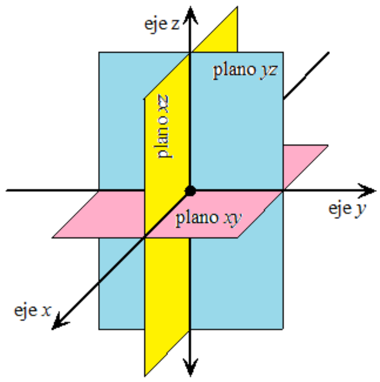
$\vec{x}=\vec{a}+\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}$	Ecuación vectorial del plano

donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+\lambda(v_1,v_2,v_3)+\mu(w_1,w_2,w_3)\\ \text{Ecuación vectorial del plano en coordenadas}\end{array}}$$

- Efectuando las operaciones obtenemos:

$$\boxed{\begin{cases} x = a_1+\lambda v_1+\mu w_1 \\ y = a_2+\lambda v_2+\mu w_2 \\ z = a_3+\lambda v_3+\mu w_3 \end{cases} \quad \text{Ecuaciones paramétricas del plano}}$$



Ejercicios:

12. *Expresa las ecuaciones del plano determinado por el punto* $P(1,2,3)$ *y los vectores* $\vec{u}=(1,1,0)$ y $\vec{v}=(1,0,1)$.

13. *Halla las ecuaciones del plano que contiene a los puntos* $A(3,2,-1)$, $B(0,2,-5)$ *y* y $C(-2,4,-1)$.

14. *Determinar las ecuaciones paramétricas del plano determinado por el punto* P *y los vectores directores* $\vec{u}$ y $\vec{v}$ *en cada uno de los siguientes casos:*

a) $P(-2,3,1)$, $\vec{u}=(2,-3,0)$, $\vec{v}=(1,0,1)$

b) $P(0,1,1)$, $\vec{u}=(2,0,0)$, $\vec{v}=(0,-1,0)$

6. INCIDENCIA DE PUNTO Y PLANO

6.1. Incidencia de punto y plano

Definición / caracterización:

El punto $P(p_1,p_2,p_3)$ pertenece al plano π (es un punto de dicho plano), cuando se cumple la siguiente condición:

$$P(p_1, p_2, p_3) \in \pi \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} p_1 - a_1 & v_1 & w_1 \\ p_2 - a_2 & v_2 & w_2 \\ p_3 - a_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = 0$$

es decir, si los vectores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

6.2. ¿Cuándo 4 puntos son coplanarios?

Caracterizaciones:

Los puntos $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ y $D(d_1, d_2, d_3)$ son coplanarios[11] si, y solo si, los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes si, y solo si, $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 0$

Ejercicios:

15. *Calcula el valor de* a *para que los cuatro puntos estén en el mismo plano:* $(a, 0, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(7, 2, 1)$. *Calcula la ecuación del plano.*

7. ECUACIÓN GENERAL, CARTESIANA O IMPLÍCITA DEL PLANO

7.1. Ecuación general del plano

Sea π el plano determinado por el punto $A(a_1, a_2, a_3)$ y los vectores directores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Sabemos que

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(v_1, v_2, v_3) + \mu(w_1, w_2, w_3)$$

es la ecuación vectorial de π, y que los vectores

$$(x - a_1, y - a_2, z - a_3),\ (v_1, v_2, v_3) \text{ y } (w_1, w_2, w_3)$$

son linealmente dependientes, luego

$$\text{rango}\begin{pmatrix} x - a_1 & v_1 & w_1 \\ y - a_2 & v_2 & w_2 \\ z - a_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = 2$$

(no puede ser 1, ya que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linelamente independientes), lo que equivale a que

$$\det\begin{pmatrix} x - a_1 & v_1 & w_1 \\ y - a_2 & v_2 & w_2 \\ z - a_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = 0$$

Desarrollamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & v_1 & w_1 \\ y - a_2 & v_2 & w_2 \\ z - a_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & v_1 & w_1 \\ a_2 & v_2 & w_2 \\ a_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} =$$

[11] Están en el mismo plano.

$$= x\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & v_1 & w_1 \\ a_2 & v_2 & w_2 \\ a_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Que se puede escribir en el forma:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

con $A = \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$ y $D = -\begin{vmatrix} a_1 & v_1 & w_1 \\ a_2 & v_2 & w_2 \\ a_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$. Dicha ecuación recibe el nombre de *ecuación general, cartesiana o implícita del plano* π.

En general, si a la ecuación implícita de un plano le falta una de sus variables, es porque es paralelo al eje correspondiente a dicha variable. Así:

- Si $A = 0$, el plano que se obtiene es paralelo al eje x.
- Si $B = 0$, el plano que se obtiene es paralelo al eje y.
- Si $C = 0$, el plano que se obtiene es paralelo al eje z.

Ejercicios:

16. *Halla la ecuación general del plano que contiene a los puntos* $P(1,2,-1)$, $Q(3,0,2)$, *y tiene como vector director* $\vec{u} = (1,1,-1)$.

17. *Halla la ecuación general del plano determinado por el punto* $P(1,2,3)$ *y los vectores directores* $\vec{a} = (1-2,-1)$ y $\vec{b} = (2,-1,3)$.

Ejercicios de Selectividad

7.2. Ecuaciones de los planos coordenados

Plano *XY*:

$XY \equiv \{O(0,0,0), \vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0)\}$

Ecuación vectorial: $(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,1,0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$

Ecuación implícita: $z = 0$

Plano *YZ*:

$YZ \equiv \{O(0,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)\}$

Ecuación vectorial: $(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(0,1,0) + \mu(0,0,1)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

Ecuación implícita: $x = 0$

Plano *XZ*:

$XZ \equiv \left\{ O(0,0,0), \vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0) \right\}$

Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,0,1)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}$

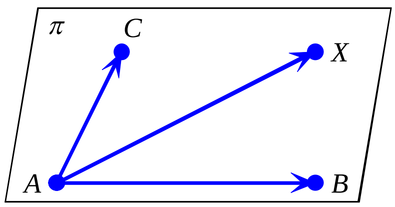
Ecuación implícita: $y = 0$

8. ECUACIÓN DEL PLANO QUE PASA POR TRES PUNTOS

Sabemos que tres puntos distintos y no alineados determinan un plano que pasa por ellos.

El plano π que pasa por tres puntos distintos y no alineados A, B y C tiene la siguiente determinación lineal $\pi\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, y, por tanto, si $X \in \pi$ es un punto genérico, la ecuación de dicho plano es:

$$\pi \equiv \det\left(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$$



9. ECUACIÓN CANÓNICA DEL PLANO

Sea $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ un plano con $D \neq 0$. Entonces, π corta a los tres ejes de coordenadas.. Sean $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ y $C(0,0,c)$ dichos puntos de corte. En la ecuación general dividimos por $-D$:

$$\frac{A}{-D}x + \frac{B}{-D}y + \frac{C}{-D}z - 1 = 0$$

y sustituimos A, B y C en dicha ecuación:

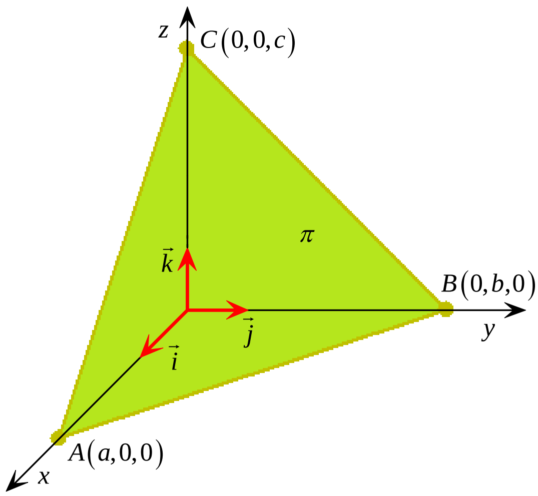
$$\begin{cases} \dfrac{A}{-D}a+\dfrac{B}{-D}0+\dfrac{C}{-D}0-1=0 \Rightarrow \dfrac{A}{-D}=\dfrac{1}{a} \\ \dfrac{A}{-D}0+\dfrac{B}{-D}b+\dfrac{C}{-D}0-1=0 \Rightarrow \dfrac{B}{-D}=\dfrac{1}{b} \\ \dfrac{A}{-D}0+\dfrac{B}{-D}0+\dfrac{C}{-D}c-1=0 \Rightarrow \dfrac{C}{-D}=\dfrac{1}{c} \end{cases}$$

Y como consecuencia, la ecuación del plano se puede escribir en la forma

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0 \quad \text{Ecuación canónica o segmentaria del plano } \pi}$$

donde a, b y c son los puntos en los que el plano corta a los ejes x, y, z respectivamente.

Dicha ecuación también se puede obtener aplicando el apartado anterior con $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ y $C(0,0,c)$.



10. POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Sean $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$, $\pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$ dos planos y llamemos

$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \text{ y } \widetilde{M}=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}.$$

En función del rango, se tienen las siguientes posiciones relativas:

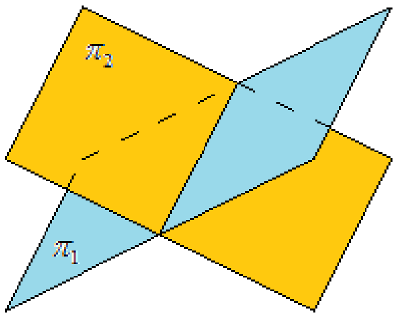
* $\text{rango}M=2=\text{rango}\widetilde{M} \Leftrightarrow \pi$ y π' se cortan en una recta
* $\text{rango}M=1$ y $\text{rango}\widetilde{M}=2 \Leftrightarrow \pi$ y π' son paralelos
* $\text{rango}M=1=\text{rango}\widetilde{M} \Leftrightarrow \pi$ y π' son coincidentes

rango M	rango $\widetilde{M}$	Sistema	Posición relativa
2	2	Compatible indeterminado	Se cortan en una recta
1	2	Incompatible	Son paralelos
1	1	Compatible indeterminado	Son coincidentes

También podemos estudiar dicha posición relativa ***utilizando la proporcionalidad de los coeficientes***:

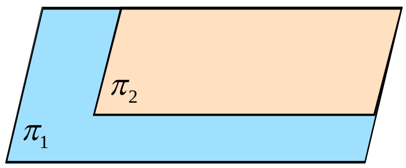
- $\text{rango}M = \text{rango}\widetilde{M} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}$ o $\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{C}{C'}$ o $\dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'} \Rightarrow \pi$ y π' se cortan en una recta
- $\text{rango}M = 1 \neq 2 = \text{rango}\widetilde{M} \Leftrightarrow \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'} \Rightarrow \pi$ y π' son paralelos
- $\text{rango}M = 1 = \text{rango}\widetilde{M} \Leftrightarrow \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'} \Rightarrow \pi$ y π' son coincidentes

Proporcionalidad de los coeficientes	Posición relativa
$\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}$ o $\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{C}{C'}$ o $\dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'}$	Se cortan en una recta
$\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'}$	Son paralelos
$\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'}$	Son coincidentes



Planos secantes
(en una recta)

Planos paralelos



Planos coincidentes

<u>Ejercicios:</u>

18. *Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de planos:*

a) $\begin{cases} \pi_1 \equiv x - 2y + z = 0 \\ \pi_2 \equiv 3x - 6y + 3z = 3 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \pi_1 \equiv x - 2y + z = 0 \\ \pi_2 \equiv x - 2y - z = 3 \end{cases}$

19. *Estudia la posición relativa de* $\pi_1 \equiv mx + 2y - 3z - 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - 4y + 6z + 5 = 0$ *en funcion del parámetro m.*

<u>Ejercicio de selectividad</u>

11. <u>POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UN PLANO</u>

1ª forma: ***dado un punto y un vector director de la recta y la ecuación implícita del plano***

Sea $r \equiv \begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{cases}$ una recta y $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ un plano. Sustituyendo x, y y z (de la recta en la ecuación del plano) se obtiene la siguiente ecuación:

$$A(a_1 + \lambda v_1) + B(a_2 + \lambda v_2) + C(a_3 + \lambda v_3) + D = 0 \Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + (Av_1 + Bv_2 + Cv_3)\lambda = 0$$

y al discutirla (en función de λ, que es la incógnita), obtenemos las siguientes posiciones relativas:

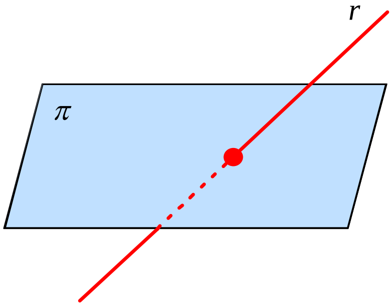
- $Av_1 + Bv_2 + Cv_3 \neq 0$

  La recta y el plano se cortan en un punto, ya que la ecuación tiene una única solución.
- $Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0$

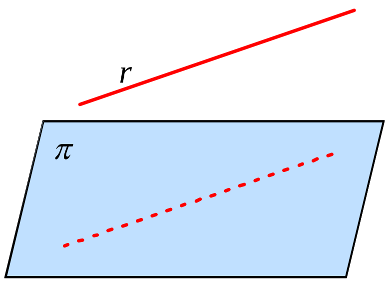
  Se pueden presentar los siguientes dos casos:

  $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D \neq 0 \Rightarrow r$ y π ***paralelos***, ya que la ecuación no tiene solución.

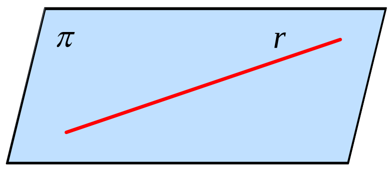
  $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D = 0 \Rightarrow r$ ***contenida*** en π, ya que cualquier valor de λ es solución de la ecuación.



Recta y plano, secantes (en un punto)



Recta paralela al plano



Recta contenida en el plano

2ª forma: ***discutiendo el correspondiente sistema de ecuaciones lineales***

Si la recta viene dada como intersección de dos planos y el plano a través de su ecuación implícita:

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B_2 y + C''z + D'' = 0 \end{cases} \\ \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

consideramos

$$M = \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A & B & C \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \widetilde{M} = \begin{pmatrix} A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$$

y se pueden presentar las siguientes posiciones relativas:

rango M	rango $\widetilde{M}$	Sistema	Posición relativa
3	3	Compatible determinado	Se cortan en un punto
2	3	Incompatible	Son paralelos
2	2	Compatible indeterminado	Recta contenida en el plano

<u>*Ejercicio:*</u>

20. *Estudia la posición relativa de la recta y el plano en cada caso:*

a) $\begin{cases} r \equiv \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{0} \\ \pi \equiv 5x - 7y = -3 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{1} \\ \pi \equiv x + y - 3z = 1 \end{cases}$

<u>Ejercicios de selectividad</u>

12. POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS

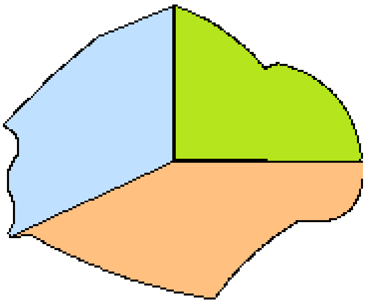
Sean $\begin{cases} \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ \pi \equiv A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$ tres planos y consideremos

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \text{ y } \widetilde{M} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}.$$

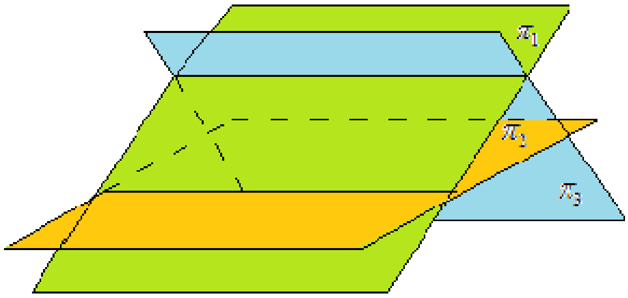
Se tienen las siguientes **posiciones relativas**:

- $\text{rango}M = 3 \Rightarrow$ los tres planos se cortan en un único punto, ya que el sistema es compatible determinado.
- $\text{rango}M = 2$ y $\text{rango}\widetilde{M} = 3$. En este caso el sistema es incompatible, y se pueden presentar las siguientes dos situaciones.
  - Las matrices de orden 2×3 que pueden formarse con las filas de M, tienen rango 2; entonces los planos se cortan dos a dos según tres rectas.
  - Una de las matrices citadas tiene rango 1 y las otras, rango 2. En este caso dos planos son paralelos y el tercero los corta según dos rectas paralelas.
- $\text{rango}M = 2$ y $\text{rango}\widetilde{M} = 2$. En este caso el sistema es compatible indeterminado, y se pueden dar los siguientes dos casos:
  - Las matrices de orden 2×4 que pueden formarse con las filas de $\widetilde{M}$ tienen rango 2. Los tres planos son distintos.
  - Una de esas matrices tiene rango 1. Entonces, dos planos coinciden y el tercero los corta según una recta.
- $\text{rango}M = 1$ y $\text{rango}\widetilde{M} = 2$. En este caso el sistema es incompatible, y se pueden presentar los siguientes dos casos:
  - Si las matrices de orden 2×4 que pueden formarse con las filas de $\widetilde{M}$ son de rango 2, entonces los tres planos son paralelos.
  - Si una de esas matrices tiene rango 1, entonces dos planos coinciden y el otro es paralelo.
- $\text{rango}M = 1$ y $\text{rango}\widetilde{M} = 1 \Rightarrow$ los planos coinciden, ya que el sistema es compatible indeterminado con variables libres.

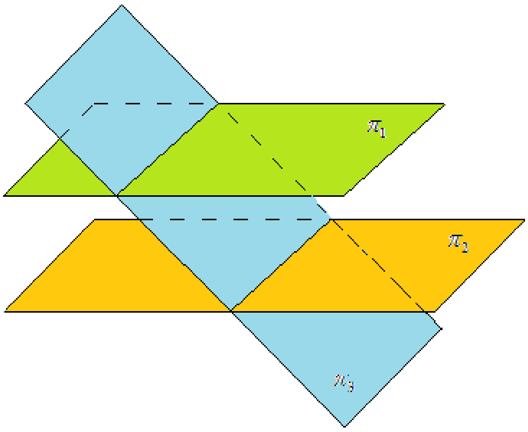
$\text{rg}(M)$	$\text{rg}(\widetilde{M})$	Sistema	Rango de las submatrices de M de orden 2×3	Rango de las submatrices de $\widetilde{M}$ de orden 2×4	Posición relativa
3	3	C.D.	---	---	Secantes en un punto
2	3	I.	2 (todas)	---	Se cortan dos a dos según tres rectas
2	3	I.	1 (una)	---	Dos planos paralelos y el tercero los corta según dos rectas paralelas
2	2	C.I	---	2 (todas)	Distintos y se cortan en una recta
2	2	C.I.	---	1 (una)	Dos planos coinciden y el tercero los corta según una recta
1	2	I.	---	2 (todas)	Paralelos
1	2	I.	---	1 (una)	Dos planos coinciden y el otro es paralelo
1	1	I.	---	---	Coincidentes



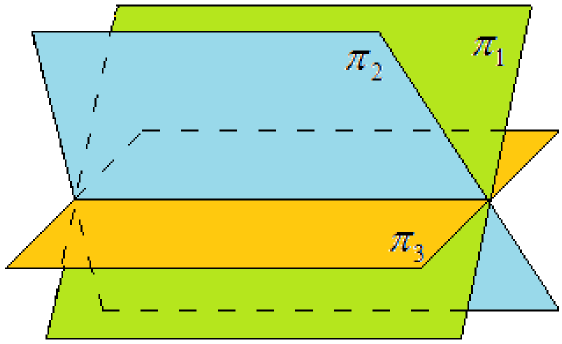
Tres planos secantes en un punto



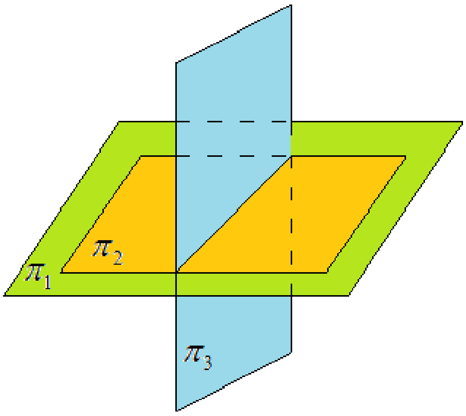
Tres planos secantes dos a dos según 3 rectas



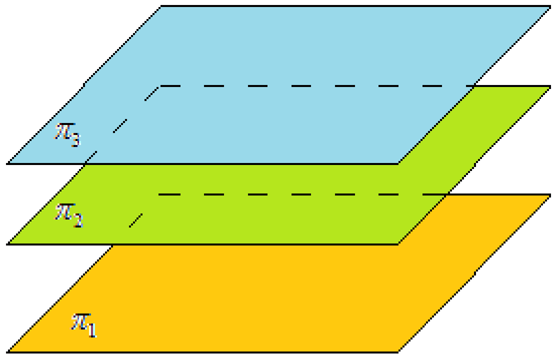
Dos planos paralelos y el tercero los corta según dos rectas



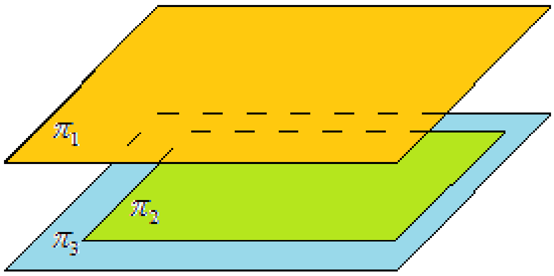
Tres planos distintos, secantes en una recta



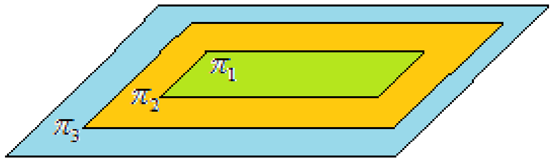
Dos planos coincidentes y el tercero los corta según una recta



Los tres planos son paralelos



Dos planos coinciden y el otro es paralelo



Los tres planos son coincidentes

Ejercicios

21. *Determina la posición relativa de los planos:*

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x+3y+z=1 \\ \pi_2 \equiv x-y+z=-2 \\ \pi_3 \equiv 2x-2y+2z=-3 \end{cases}$$

22. *Estudia para los diferentes valores de* m *la posición relativa de los planos:*

a) $\begin{cases} \pi_1 \equiv mx+y+z=1 \\ \pi_2 \equiv x+my+z=1 \\ \pi_3 \equiv x+y+mz=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \pi_1 \equiv mx-y-z=-m \\ \pi_2 \equiv x-my+mz=m \\ \pi_3 \equiv x+y+z=-1 \end{cases}$

23. *Estudia la posición relativa de los siguientes planos:*

a) $\begin{cases} x+2y-z-3=0 \\ 3y+2z-1=0 \\ x+y+z-2=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 3x+y-2z=0 \\ 2x+2y-3z+4=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x-y+z-2=0 \\ 3x-y+z-4=0 \end{cases}$

Problemas afines:

24. *Halla la ecuación de la recta paralela a* $r \equiv \begin{cases} x+2z=5 \\ y+3z=5 \end{cases}$ *que pase por el punto de intersección de la recta* $s \equiv \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$ *con el plano* $\pi \equiv x-y+z=7$.

25. *Halla la ecuación implícita del plano que pasa por el punto* $P(1,1,1)$ *y es paralelo al plano*

$$\begin{cases} x=1+2\lambda-3\mu \\ y=3+2\mu \\ z=-1-\mu \end{cases}.$$

26. *Dados los puntos* $(1,1,1)$, $(2,3,4)$ y $(-5,0,-2)$, *comprueba si están alineados. En caso afirmativo, halla las ecuaciones paramétricas y continua de la recta que definen y en caso negativo, la ecuación del plano correspondiente.*

27. *Dadas las rectas*

$$r \equiv \frac{x}{3}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1} \quad y \quad s \equiv (x,y,z)=(2,1,1)+t(3,-1,3)$$

encontrar el plano que pasa por r *y es paralelo a* s *y el que pasa por* s *y es paralelo a* r.

28. *Determina la ecuación del plano que contiene a la recta* $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-4}{3}$ *y es paralelo a la recta* $\begin{cases} x=1+3t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases}$.

29. *Consideramos las rectas de ecuaciones*

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ -2x+z-1=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv x+1=\frac{y-3}{n}=\frac{z}{2}$$

a) *Halla* n *para que* r y s *sean paralelas.*
b) *Para el valor de* n *obtenido en el apartado anterior, determina la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.*

30. *Dadas las rectas* $r \equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 4x+5y+7=0 \\ 3y-4z+7-m=0 \end{cases}$:

a) *Calcula el valor de* m, *para que las dos estén en un mismo plano.*
b) *Halla la ecuación de dicho plano.*

31. *Consideramos la recta* r, *el plano* π *y el punto* P, *siendo:*

$$r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+8}{3}=\frac{z-2}{5}; \quad \pi \equiv 2x-y+3z=1; \quad P(1,0,4)$$

a) *Obtener una recta* s *paralela a* r *que pase por el punto* P.
b) *Calcular el punto de intersección de* r y π.

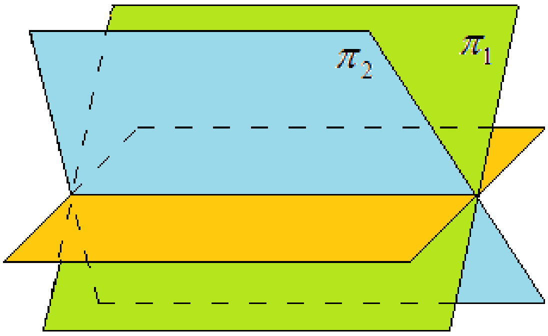
Ejercicio de selectividad

13. HAZ DE PLANOS

13.1. Haz de planos de arista una recta: haz de planos secantes

Sean π y π' dos planos que se cortan en una recta r. El conjunto de todos los planos que pasan por la recta r se denomina haz de planos de arista r y tiene por ecuación:

$$\lambda\left(Ax+By+Cz+D\right)+\mu\left(A'x+B'y+C'z+D'\right)=0$$



Ejemplo:

Determina la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a la recta determinada por los planos:

$$r\equiv\begin{cases}\pi\equiv x+y+z-1=0\\ \pi'\equiv x-y-2=0\end{cases}$$

Sabemos que el haz de planos de arista r tiene por ecuación:

$$\lambda\left(x+y+z-1\right)+\mu\left(x-y-2\right)=0$$

Como además el plano pasa por el origen de coordenadas, se tiene que:

$$\lambda\left(0+0+0-1\right)+\mu\left(0-0-2\right)=0\Rightarrow-\lambda-2\mu=0\Rightarrow\lambda=-2\mu$$

y por tanto:

$$-2\mu\left(x+y+z-1\right)+\mu\left(x-y-2\right)=0\Rightarrow-2\mu x-2\mu y-2\mu z+2\mu+\mu x-\mu y-2\mu=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow-\mu x-3\mu y-2\mu z=0\Rightarrow-\mu\left(x+3y+2z\right)=0$$

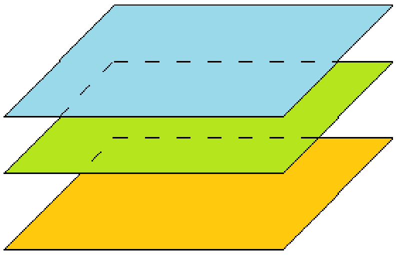
Es decir, el plano que nos piden es: $\pi''\equiv x+3y+2z=0$.

13.2. Haz de planos paralelos

Si en la ecuación del plano $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$ sustituimos los coeficientes A, B y C por las coordenadas de un vector $\vec{n}$ normal al plano, se obtiene la expresión de todos los planos que son paralelos y que tienen vector normal $\vec{n}$:

$$\left.\begin{array}{l}\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0\\ \vec{n}=\left(A_n,B_n,C_n\right)\end{array}\right\}\Rightarrow A_nx+B_ny+C_nz+D=0$$

Dicho conjunto de planos, se llama haz de planos paralelos normales a $\vec{n}$.



Ejemplo:

El haz de planos paralelos normales a $\vec{n}=(3,2,-1)$ tiene por ecuación:

$$3x+2y-z+D=0$$

Dando valores a $D\in\mathbb{R}$ se obtienen los planos del haz.

Ejemplos:

(1) Vamos a determinar un plano π' que pase por $P(3,2,-1)$ y sea paralelo al plano $\pi\equiv 3x-y+2z+1=0$.

Como el vector normal a π es $\vec{n}=(3,-1,2)$, la ecuación del haz de planos paralelos normales a $\vec{n}$ es:

$$3x-y+2z+D=0$$

Sustituyendo las coordenadas de P en π obtenemos:

$$3\cdot 3-2+2\cdot(-1)+D=0\Rightarrow D=-5$$

y, por tanto, la ecuación del plano pedido es: $3x-y+2z-5=0$.

(2) Hallar la ecuación del plano que pasa por $P(2,1,-1)$ y es paralelo al plano

$$\pi\equiv 2x-5y+2z-2=0$$

Para ello, sustituimos las coordenadas de P en la ecuación del haz de planos paralelos a π:

$$H_\pi\equiv 2x-5y+2z+D=0$$

$$2\cdot 2-5\cdot 1+2\cdot(-1)+D=0\Rightarrow D=5$$

Por tanto, el plano pedido es $\pi'\equiv 2x-5y+2z+5=0$.

Ejercicio de selectividad

14. RADIACIÓN DE PLANOS

Supongamos que los planos π, π' y π'' tienen en común un único punto P. Entonces, el conjunto de todos los planos que pasan por P, recibe el nombre de radiación de planos de vértice P, y tiene por ecuación:

$$\lambda(Ax+By+Cz+D)+\mu(A'x+B'y+C'z+D')+\delta(A''x+B''y+C''z+D'')=0$$

Ejercicios de selectividad

Unidad 14:
ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

"El que desdeña la geometría de Euclides
es como el hombre que, al regresar a su casa
de tierras extrañas, menosprecia su casa"
H. G. Forder

1. PRODUCTO ESCALAR

PRODUCTO ESCALAR EN V^3

Definición:

Se define el *producto escalar* de dos vectores por:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\ \left|\vec{b}\right|\ \cos\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)}\quad \forall\vec{a},\vec{b}\in V^3$$

donde $\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ es el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Propiedades:

(1) Conmutativa: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(2) Distributiva: $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

(3) $\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\left(\mu\vec{b}\right)=\lambda\mu\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

(4) $\vec{a}\neq\vec{0}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{a}>0$

(el número real $\vec{a}\cdot\vec{a}$ se llama cuadrado escalar y se representa por $\vec{a}^{\,2}$)

Definición:

Se define el *módulo* de un vector por:

$$\boxed{\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}}\qquad \forall\vec{a}\in V^3$$

Dos propiedades importantes:

- *Desigualdad de Cauchy-Schwarz:* $\boxed{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\leq\left|\vec{a}\right|\ \left|\vec{b}\right|\quad \forall\vec{a},\vec{b}\in V^3}$
- *Desigualdad triangular:* $\boxed{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\leq\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\quad \forall\vec{a},\vec{b}\in V^3}$

Demostraciones:

(1) Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|=\left|\left|\vec{a}\right|\ \left|\vec{b}\right|\ \cos\theta\right|=\left|\left|\vec{a}\right|\right|\ \left|\left|\vec{b}\right|\right|\ \left|\cos\theta\right|\underset{(1)}{\leq}\left|\vec{a}\right|\ \left|\vec{b}\right|$$

donde en (1) hemos tenido en cuenta que $\left|\cos\theta\right|\leq 1\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ y que $\left|\vec{a}\right|\geq 0$ y $\left|\vec{b}\right|\geq 0$.

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2\underset{(1)}{\le}\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|+\left|\vec{b}\right|^2\underset{(2)}{\le}$$

$$\le\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|+\left|\vec{b}\right|^2=\left(\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|\right)^2\overset{(3)}{\Rightarrow}\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$$

Donde en (1) hemos usado que $x\le|x|\quad\forall x\in\mathbb{R}$, en (2) la desigualdad de Cauchy-Schwarz y en (3) hemos tomado raíces cuadradas en ambos miembros (ya que los radicandos son no negativos).

C.Q.D.

Definición:

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares u ortogonales, $\vec{a}\perp\vec{b}$, cuando $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Definición:

El vector $\vec{a}$ es un vector unitario sii $\left|\vec{a}\right|=1$.

Definición:

Una <u>base</u> del espacio vectorial V^3, se dice <u>ortonormal</u> cuando sus vectores son ortogonales dos a dos y unitarios.

A partir de ahora, siempre trabajaremos con la **base usual**, esto es, con la base ortonormal:

$$\mathrm{B}=\left\{\vec{i}=(1,0,0),\vec{j}=(0,1,0),\vec{k}=(0,0,1)\right\}$$

<u>Expresión analítica del producto escalar</u>:

Si $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ respecto de una base ortonormal, entonces:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

En efecto:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\right)\cdot\left(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}\right)=$$

$$=a_1b_1\vec{i}^{\,2}+a_2b_2\vec{j}^{\,2}a_3b_3\vec{k}^{\,2}+\left(a_1b_2+a_2b_1\right)\left(\vec{i}\cdot\vec{j}\right)+\left(a_1b_3+a_3b_1\right)\left(\vec{i}\cdot\vec{k}\right)+\left(a_2b_3+a_3b_2\right)\left(\vec{j}\cdot\vec{k}\right)\underset{[1]}{=}$$

$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

donde eh [1] hemos tenido en cuenta que $\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1$ y que

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$$

por ser ortonormal la base.

<u>Expresión analítica del módulo</u>: Si $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ respecto de una base ortonormal, entonces:

$$\boxed{\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

En efecto:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_1a_1+a_2a+a_3a_3}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

C.Q.D.

<u>Expresión analítica del coseno de ángulo que forman dos vectores</u>: Si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ respecto de una base ortonormal, entonces:

$$\boxed{\cos \measuredangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}\ \sqrt{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + b_3^{\ 2}}}}$$

<u>Vector perpendicular a un plano</u>: Un vector $\vec{n}$ es perpendicular al plano π, y se escribe $\vec{n} \perp \pi$, cuando es perpendicular a cualquier vector contenido en el plano.
Sea $\overrightarrow{PQ} \in \pi \equiv Ax + By + Cz = 0$ cualquiera. Si $P(p_1, p_2, p_3)$ y $Q(q_1, q_2, q_3)$, se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D = 0 \\ Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 + D = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(q_1 - p_1) + B(q_2 - p_2) + C(q_3 - p_3) = 0$$

es decir, el producto escalar del vector $\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$ y del vector $\vec{n} = (A, B, C)$ es cero, luego

$$\boxed{\vec{n} = (A, B, C) \perp \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0}$$

<u>*Ejercicios:*</u>

32. *Sean los vectores* $\vec{x} = (1, -5, 2)$, $\vec{y} = (3, 4, -1)$, $\vec{z} = (6, 3, -5)$ *y* $\vec{w} = (24, 26, -6)$. *Halla los siguientes productos escalares:* $\vec{x} \cdot \vec{y}$, $\vec{x} \cdot \vec{z}$, $\vec{w} \cdot \vec{w}$ y $\vec{w} \cdot \vec{z}$

33. *Halla el ángulo que forman estas parejas de vectores:*
a) $\vec{u} = (4, -1, 3)$ y $\vec{v} = (3, 0, 2)$
b) $\vec{u} = (5, 4, -1)$ y $\vec{v} = (2, -3, -2)$

34. *¿Determina* a *para que el ángulo que forman* $\vec{a} = (1, 2, 2)$ y $\vec{b} = (-3, 1, a)$ *mida 60º?*

35. *Decide si el triángulo de vértices* $A(-2, 4, 0)$, $B(3, -3, 1)$ *y* $C(6, -2, 4)$ *es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.*

36. *Si* $\vec{u}$ y $\vec{v}$ *son vectores ortogonales y unitarios, halla los posibles valores del parámetro real* a *para que los vectores* $\vec{u} + a\vec{v}$ y $\vec{u} - a\vec{v}$ *formen un ángulo de 60º.*
Indicaciones: El producto escalar correspondiente se efectúa «como si fuera un producto de polinomios» y para calcular los módulos hay que tener en cuenta la definición de módulo)

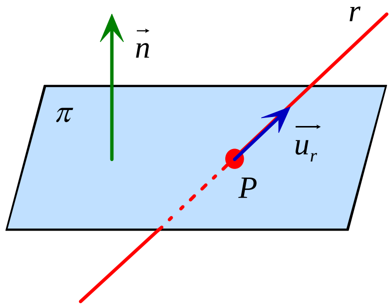
Nota 1: ***posición relativa de una recta y un plano***

Usando el vector normal al plano, se entiende mucho mejor lo visto en el apartado 13 de la unidad anterior (1ª forma de estudiar la posición relativa de una recta y un plano), y que se puede escribir en la forma:
Sea $r \equiv \left\{P, \overrightarrow{u_r}\right\}$ una recta y $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ un plano, con vector normal $\vec{n} = (A, B, C)$.

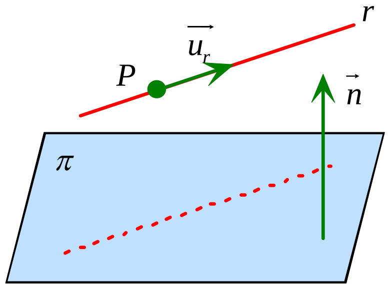
Se pueden presentar las siguientes ***posiciones relativas***:

- $\overrightarrow{u_r} \not\perp \vec{n} \Leftrightarrow r$ y π se cortan en un punto

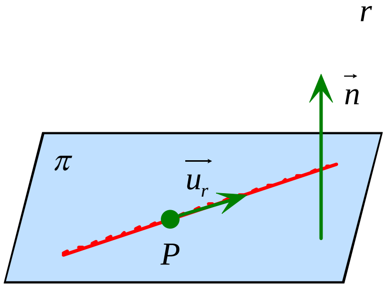
- $\overrightarrow{u_r} \perp \vec{n} \begin{cases} P \in \pi \Rightarrow r \subset \pi \text{ (} r \text{ contenida en } \pi\text{)} \\ P \notin \pi \Rightarrow r \parallel \pi \text{ (} r \text{ y } \pi \text{ paralelos)} \end{cases}$



Recta y plano, secantes (en un punto)



Recta paralela al plano



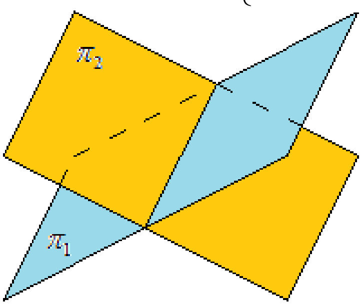
Recta contenida en el plano

Nota 2: ***posición relativa de dos planos***

Sean $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y $\pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$ dos planos con vectores normales $\overrightarrow{n_\pi} = (A, B, C)$ y $\overrightarrow{n_{\pi'}} = (A', B', C')$, respectivcamente.

Se tienen las siguientes ***posiciones relativas***:

- $\overrightarrow{n_\pi} \nparallel \overrightarrow{n_{\pi'}} \Rightarrow$ Planos secantes (en una recta)
- $\overrightarrow{n_\pi} \parallel \overrightarrow{n_{\pi'}} \Rightarrow \begin{cases} \text{Paralelos: } P \in \pi \Rightarrow P \notin \pi' \\ \text{Coincidentes: } P \in \pi \Rightarrow P \in \pi' \end{cases}$

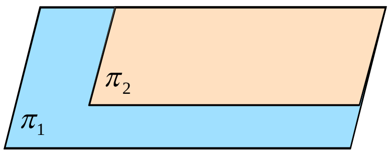


Planos secantes (en una recta)

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

Planos paralelos

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$



Planos coincidentes

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

2. ECUACIÓN NORMAL DEL PLANO

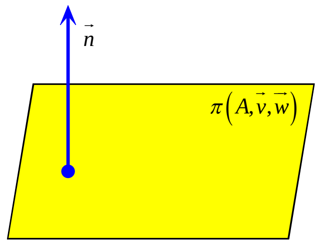
Sea π el plano determinado por el punto A y los vectores directores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, y sea $\vec{n}$ un vector perpendicular al plano. Entonces, la ecuación del plano π se puede escribir en la forma

$$\boxed{\vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \vec{a}\right) = 0}$$

Si además el vector $\vec{n}$ es unitario (o lo dividimos por su módulo), la ecuación anterior recibe el nombre de <u>ecuación normal del plano</u>.

Si $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$, se tiene que $\vec{n}=(A,B,C)$ es un vector perpendicular al plano y, por tanto, la ecuación normal del plano π con vector normal $\vec{n}$ que pasa por el punto $A(a_1,a_2,a_3)$ viene dada por:

$$\boxed{A(x-a_1)+B(y-a_2)+C(z-a_3)=0}$$



Ejercicio:

37. *Halla la ecuación normal del plano* $x-2y+3z+5=0$ *que pasa por el punto* $A(1,-1,2)$.

3. ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO. ESPACIO EUCLÍDEO

El espacio vectorial V^3 dotado con el producto escalar se denomina espacio vectorial euclídeo. El espacio afín E^3 asociado al espacio vectorial euclídeo, se llama espacio euclídeo o espacio afín euclídeo.

Además, dicho espacio se puede convertir en un espacio métrico (espacio en el que hay una métrica, esto es una forma de medir), definiendo la distancia entre dos puntos, a partir del producto escalar.

Definición:

Si $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$ respecto de un sistema de referencia ortonormal, se define la distancia entre A y B por:

$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

***Propiedades*:**

(1) $d(A,B)\geq 0$ y $d(A,B)=0 \Leftrightarrow A=B$

(2) $d(A,B)=d(B,A)$

(3) $d(A,C)\leq d(A,B)+d(B,C) \quad \forall A,B,C\in E^3$

Demostración:

(1) $d(A,B)\geq 0$ por cómo hemos definido la distancia.

Vamos a demostrar que $d(A,B)=0 \Leftrightarrow A=B$:

$\Rightarrow) d(A,B)=0 \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|=0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\vec{0} \Rightarrow A=B$

$\Leftarrow)\ A=B \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\vec{0} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|=0 \Rightarrow d(A,B)=0$

(2) $d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = d(B,A)$

(3) $d(A,C) = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| \underset{(1)}{\leq} \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| = d(A,B) + d(B,C)$

donde en (1) hemos usado la desigualdad triangular.

Ejercicios:

38. *Calcula la distancia entre los puntos* $A(1,-2,-3)$ y $B(-2,-1,3)$.

39. *Halla el valor del parámetro* a *para que la distancia entre los puntos* $A(1,a,2)$ y $B(5,3,2)$ *sea igual a cinco.*

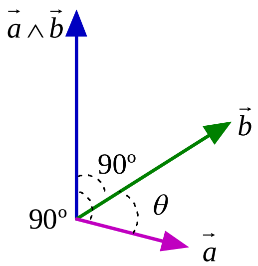
4. PRODUCTO VECTORIAL

Definición:

Si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ respecto de una base ortonormal, se define el producto vectorial[12] de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ por:

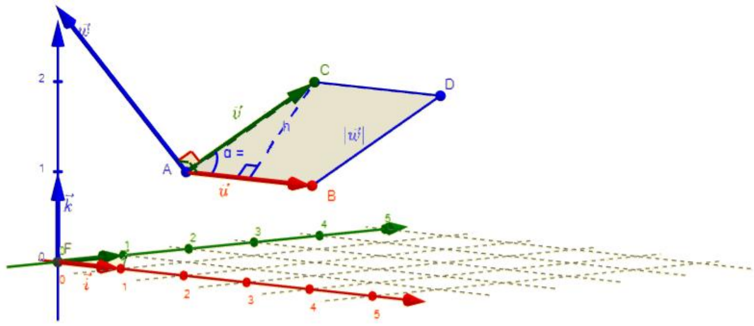
$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \equiv$$

$$\equiv \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$



donde en la «última igualdad» se entiende que estamos calculando el determinante de las coordenadas (escritas por filas) de los vectores respecto de la base ortonormal usual $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

El sentido es el del avance del sacacorchos, que gira de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ siguiendo el camino más corto.



Fuente: https://www.geogebra.org/m/TDsyaheC

Observación:

La igualdad $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ ayuda a visualizar el sentido del producto vectorial.

[12] También se suele representar por $\times$.

Propiedades: $\vec{a},\vec{b}\in V^3$ y $\lambda\in\mathbb{R}$

(1) $\left|\vec{a}\wedge\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\ \left|\vec{b}\right|\ \left|\text{sen}\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|$

(2) $\vec{a}\wedge\vec{b}$ es ortogonal a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$

(3) Si $\vec{a}=\vec{0}$ o $\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{0}$

(4) $\vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{a}$

(5) $\lambda\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{a}\wedge\lambda\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)$

(6) $\vec{a}\wedge\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c}$

(7) $\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\wedge\vec{a}=\vec{b}\wedge\vec{a}+\vec{c}\wedge\vec{a}$

(8) $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}$ y $\vec{b}$ linealmente dependientes

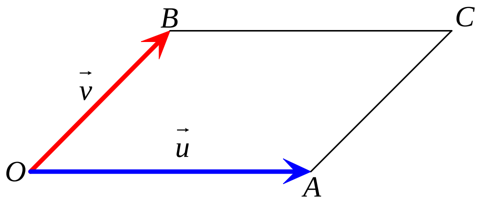
(9) **No verifica la propiedad asociativa**

Ejercicio:

40. *Calcula el producto vectorial de los vectores* $\vec{u}=(1,-2,5)$ *y* $\vec{v}=(3,1,-2)$.

Interpretación geométrica:

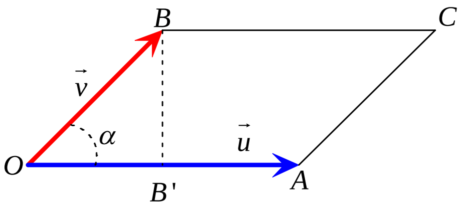
Sean $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ los representantes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con origen en O. Entonces, el módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo $OACB$ determinado por $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$:



$$\boxed{\left|\vec{u}\wedge\vec{v}\right|=\text{Área}\left(OACB\right)}$$

En efecto.

Si consideramos el paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se tiene que:



$$\text{Área}=\left|\vec{u}\right|\left|\overrightarrow{BB'}\right|=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\text{sen}\,\alpha$$

y, por tanto:

$$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\text{sen}\,\alpha=$$

$=$ Área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Ejercicio:

41. *Halla el valor de* a *para que al efectuar el producto vectorial de* $\vec{u}=(1,2,a)$ y $\vec{v}=(a,3,1)$ *se obtenga el vector* $\vec{w}=(-4,3,-1)$.

Aclaración:

El producto vectorial de dos vectores, se define en un sistema de coordenadas **orientado**, como el vector perpendicular al plano generado por los dos vectores definidos con dicha orientación. Su definición viene dada por la expresión

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\ \left|\vec{b}\right|\ \text{sen}\,\theta\ \vec{n}}$$

donde $\theta = \sphericalangle\{\vec{a},\vec{b}\}$ y $\vec{n}$ es un vector unitario ortogonal al plano generado por los mismos.

La dependencia de la orientación, crea un «pequeño» problema cuando uno cambia de sistema de referencia, dado que un «verdadero vector» no debería cambiar de dirección al cambiar de orientación. Por ello, el producto vectorial no es un «verdadero vector», y es lo que se denomina *pseudovector* o *vector axial*, de ahí que su módulo tenga unidades de área y no de longitud, como se deduce de la propiedad (1) y de su interpretación geométrica.

Otra definición alternativa es la siguiente:
Sean $\vec{a},\vec{b} \in V^3$. Se define el producto vectorial de ambos, como el vector libre que verifica:

a) $|\vec{a}\wedge\vec{b}| = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ |\text{sen}\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})|$

b) $\vec{a}\wedge\vec{b}$ es ortogonal a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$

c) El sentido de $\vec{a}\wedge\vec{b}$ es tal que la orientación de la terna $(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\wedge\vec{b})$ es positiva (regla del sacacorchos).

A partir de ésta definición es fácil deducir la que nosotros hemos dado en coordenadas.

Ejercicios de selectividad

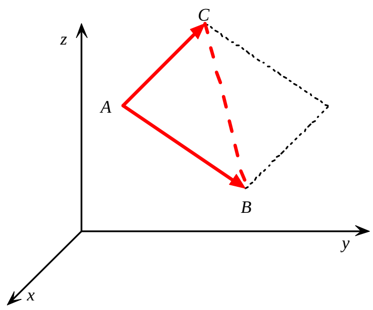
5. ÁREA DEL TRIÁNGULO

Sea ABC el triángulo de vértices

$$A(a_1,a_2,a_3),\ B(b_1,b_2,b_3)\ \text{ y }\ C(c_1,c_2,c_3)$$

Entonces, el área de dicho triángulo viene dada por:

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|} \equiv \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{pmatrix}\right|$$



Ejercicios:

42. *Calcular el área del triángulo de vértices* $A(2,1,0)$, $B(3,2,1)$ y $C(4,2,-1)$.

43. *Dados los vectores* $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=(3,1,0)$, *calcula el área del triángulo que determinan dos representantes suyos, con el mismo origen, al unir sus extremos.*

Ejercicio de selectividad

6. VECTOR DIRECTOR DE UNA RECTA Y VECTOR NORMAL DE UN PLANO

Si la recta r está dada como intersección de los planos π_1 y π_2,

$$r \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

se tiene que

$$\boxed{\vec{v}_r = \overrightarrow{n_{\pi_1}} \times \overrightarrow{n_{\pi_2}}}$$

es un vector director de la recta r, donde $\overrightarrow{n_{\pi_1}} = (A, B, C)$ y $\overrightarrow{n_{\pi_2}} = (A', B', C')$, ya que si $\vec{u}_r$ es un vector director de r, se tiene que $\vec{u}_r$ es perpendicular a $\overrightarrow{n_{\pi_1}}$ y a $\overrightarrow{n_{\pi_2}}$ y, como consecuencia, podemos tomar $\vec{v}_r = \overrightarrow{n_{\pi_1}} \times \overrightarrow{n_{\pi_2}}$ como vector director de la recta r.

Por otra parte, si $\pi \equiv \begin{cases} x = a_1 + u_1\lambda + v_1\mu \\ y = a_2 + u_2\lambda + v_2\mu \\ z = a_3 + u_3\lambda + v_3\mu \end{cases}$ son las ecuaciones paramétricas del plano π, entonces

$$\boxed{\vec{n}_\pi = \vec{u} \times \vec{v}}$$

con $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, es un vector normal a π.

Ejercicio:

44. *Obtener un vector director de cada una de las siguientes rectas, usando el producto vectorial:*

a) $r_1 \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y - 2z = 1 \end{cases}$ *b)* $r_3 \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$ *c)* $r_2 \equiv \begin{cases} x + z = 8 \\ y + z = 4 \end{cases}$

7. PRODUCTO MIXTO

Definición:

El producto mixto de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ se define por:

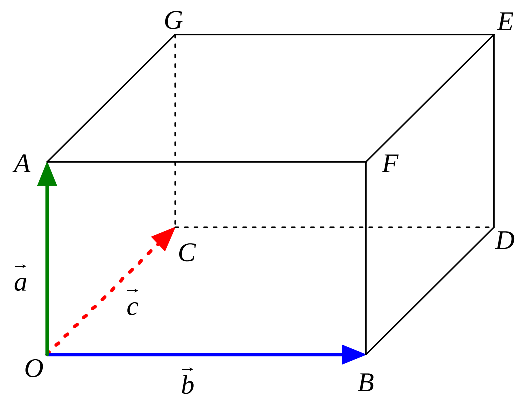
$$\boxed{\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)}$$

Interpretación geométrica:

Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ los representantes de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ con origen en O. Entonces, el valor absoluto del producto mixto de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es igual al volumen del paralelepípedo $OBDCAFEG$ determinado por $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$.

$$\boxed{V\left(\text{paralelepípedo determinado por } \vec{a},\vec{b} \text{ y } \vec{c}\right)=\left|\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right]\right|}$$

$$V\left(OBDCAFEG\right)=\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|$$



ya que

$$V(\text{paralelepípedo}) = A_{\text{base}}\cdot\text{altura} = \left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\cdot\text{altura} =$$

$$=\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\left|\vec{a}\right|\left|\cos\measuredangle\left\{\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}\right\}\right|=\left|\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right]\right|$$

Expresión analítica del producto mixto: Sean $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ y $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$. Entonces:

$$\boxed{\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}}$$

En efecto:

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)=\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\right)\cdot\left(\begin{vmatrix} b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\vec{k}\right)=$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}=\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}=\det\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$$

Propiedades:

(1) Antisimétrica

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right]=-\left[\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right]=-\left[\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right]$$

(2) Trilineal

$$\left[\vec{a}+\vec{a}',\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]+\left[\vec{a}',\vec{b},\vec{c}\right]$$

$$\left[\vec{a},\vec{b}+\vec{b}',\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]+\left[\vec{a},\vec{b}',\vec{c}\right]$$

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}+\vec{c}'\right]=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]+\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}'\right]$$

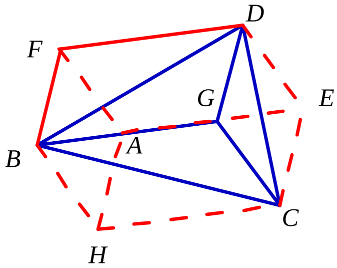
$$\left[\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\lambda\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}\right]=\lambda\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$$

(3) $\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right]=0\Leftrightarrow\vec{a},\ \vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente dependientes (coplanarios o proporcionales)

Ejercicios de selectividad

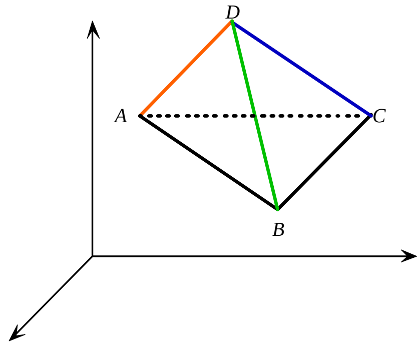
8. VOLUMEN DEL TETRAEDRO

Sea $ABCD$ el tetraedro de vértices A, B, C y D. Trazando por B, C y D, planos paralelos a las caras opuestas, se obtiene un paralelepípedo cuyo volumen es seis veces el del tetraedro, ya que éste es la tercera parte del volumen del prisma triangular $ABCDFE$, que a su vez es la mitad del volumen del paralelepípedo $ABHCFGED$.



Sea $ABCD$ el tetraedro de vértices A, B, C y D. Entonces, el volumen de dicho tetraedro viene dado por:

$$\boxed{V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}$$



es decir, es un sexto del valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

O en coordenadas:

$$V=\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

Ejercicios:

45. *Calcula el volumen del tetraedro que determinan los vectores* $\vec{u}=(2,3,3)$, $\vec{v}=(-2,9,1)$ *y* $\vec{w}=(-1,2,1)$.

46. *Calcula el volumen del tetraedro que determina el plano* $2x+4y+z-8=0$ *al cortar a los planos coordenados.*

Ejercicios de Selectividad

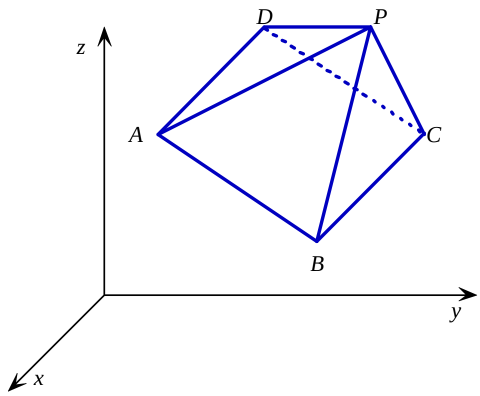
9. VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE

Consideremos la pirámide que tiene por base el cuadrilátero $ABCD$, y otro vértice P no situado en el plano en el que están situados los puntos $A,\ B, C$ y D.

El volumen de la pirámide es:

$$\boxed{V_{pirámide} = \frac{1}{3} S_{base} \cdot h}$$

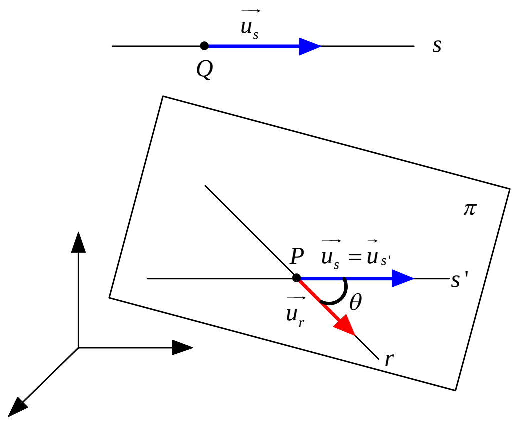
donde la superficie de la base se puede calcular con la fórmula vista en el apartado 4 como el área de un cuadrilátero y la altura es la distancia del vértice al plano de la base, para la que también veremos una fórmula.



10. ÁNGULO ENTRE RECTAS

Sean r y s dos rectas del espacio euclídeo. El ángulo que forman estas dos rectas, tanto si se cortan como si no se cortan (se cruzan), se reduce al caso en el que se cortan, pues si se cruzan podemos tomar el ángulo que forma una de ellas con la paralela a la otra, por un punto de la primera.
El ángulo que forman las rectas r y s coincide con el ángulo que forman las rectas r y s', donde s' es una recta paralela a la recta s que pasa por un punto P de la recta r.

Como las rectas s y s' son paralelas tienen el mismo vector director, luego el ángulo que forman las rectas r y s viene dado por el ángulo que forman sus respectivos vectores directores.



Definición:

Llamamos ***ángulo que forman dos rectas*** (tanto si se cortan como si se cruzan) al menor de los ángulos que forman sus vectores directores:

$$\boxed{\sphericalangle\{r,s\} = \arccos\frac{\left|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s\right|}{\left|\vec{u}_r\right|\left|\vec{u}_s\right|}}$$

Caracterización de la perpendiuclaridad de dos rectas:

$$r \perp s \Leftrightarrow \measuredangle\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\} = 90^\circ$$

Ejercicios:

47. *Estudia la posición de las rectas* r y s, *y halla el ángulo que forman:*

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 15 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -14 + 5t \end{cases}$$

48. *Determina el ángulo que forman las siguientes parejas de rectas:*

a) $r \equiv \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-1}{2} \qquad s \equiv \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$

b) $r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \qquad s \equiv \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z+1}{2}$

c) $r \equiv \begin{cases} x = -t \\ y = 2 - 4t \\ z = 7 + 14t \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x - 2y + z - 6 = 0 \\ -x + 4z = 0 \end{cases}$

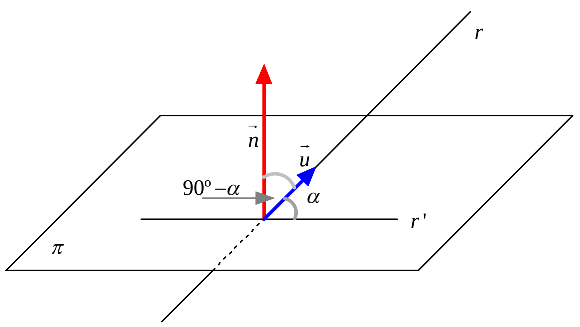
Ejercicios de Selectividad

11. ÁNGULO DE RECTA Y PLANO

Definición:

Sea $r \equiv \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$ una recta, $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ un plano, $\vec{n}$ un vector normal a π y α el ángulo agudo que forman r y π. Dicho ángulo se define como el complementario del ángulo agudo que forman un vector director de la recta y un vector normal del plano:

$$\operatorname{sen}\alpha = \left|\cos\measuredangle(\vec{u}, \vec{n})\right|$$



$$\operatorname{sen}\alpha = \left|\cos(90^\circ - \alpha)\right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}|\,|\vec{n}|}$$

$$\alpha = \operatorname{arcsen}\frac{|Au_1 + Bu_2 + Cu_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Condición de perpendicularidad de recta y plano:

$$r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \frac{u_1}{A} = \frac{u_2}{B} = \frac{u_3}{C}$$

Condición de paralelismo de recta y plano:

$$r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow Au_1 + Bu_2 + Cu_3 = 0$$

Ejercicios:

49. *Halla, en cada caso, el ángulo que forman la recta y el plano:*

a) $r \equiv \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z}{2}$ $\qquad \pi \equiv x - 2y - z + 1 = 0$

b) $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 \end{cases}$ $\qquad \pi \equiv 2x - y - z = 0$

Ejercicios de Selectividad

12. ÁNGULO DE DOS PLANOS

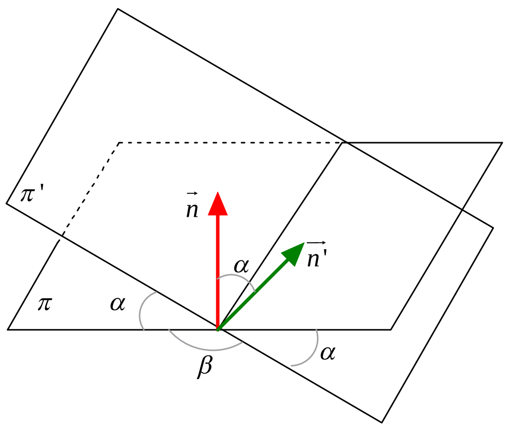
Definición:

Sean $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, $\pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$ dos planos y $\vec{n}$ y $\vec{n'}$ vectores perpendiculares a π y π' respectivamente (por ejemplo, $\vec{n} = (A, B, C)$ y $\vec{n'} = (A', B', C')$). El ángulo agudo formado por los dos planos está determinado por:

$$\boxed{\cos\alpha = \left|\cos \measuredangle\left(\vec{n}, \vec{n'}\right)\right|}$$

O en coordenadas:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{(A')^2 + (B')^2 + (C')^2}}}$$



Condición de perpendicularidad de dos planos:

$$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n'} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0 \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$$

Ejercicio:

50. *Calcula el ángulo que forman los planos:*

a) $\alpha \equiv z = 3$ y $\beta \equiv x - y + 2z + 4 = 0$

b) $\pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0$ y $\pi' \equiv x + z + 3 = 0$

Ejercicios de Selectividad

13. DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO Y DE UN PLANO A UNA RECTA

Definición:

La distancia del punto $P(p_1, p_2, p_3)$ al plano

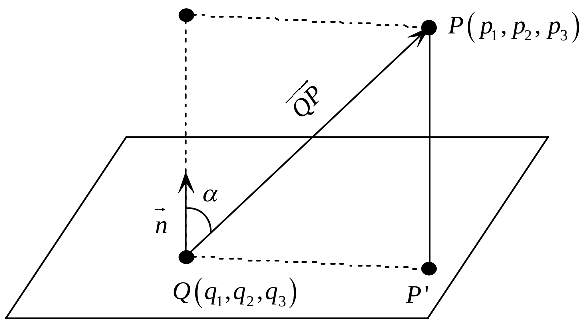
$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

es la distancia del punto P al punto Q, que es el punto de intersección del plano con la perpendicular a π trazada por P.

En coordenadas se tiene:

$$\boxed{d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

En efecto:



Se tiene que $d(P, \pi) = d(P, P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right| = \left|\overrightarrow{QR}\right|$.

Por otra parte, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{QP} = |\vec{n}|\left|\overrightarrow{QP}\right| \cos\alpha$ y $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{QR}\right|}{\left|\overrightarrow{QP}\right|}$, luego $\vec{n} \cdot \overrightarrow{QP} = |\vec{n}|\left|\overrightarrow{QP}\right| \dfrac{\left|\overrightarrow{QR}\right|}{\left|\overrightarrow{QP}\right|} = |\vec{n}|\left|\overrightarrow{QR}\right|$ y, como consecuencia, $\dfrac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{QP}}{|\vec{n}|} = \left|\overrightarrow{QR}\right|$. Así, $d(P, \pi) = \left|\overrightarrow{QR}\right| = \dfrac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{QP}\right|}{|\vec{n}|}$ (hemos tomado el valor absoluto del producto escalar, para asegurar que la distancia sea no negativa).

Escribimos en coordenadas la expresión obtenida:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\left(p_1-q_1,\,p_2-q_2,\,p_3-q_3\right)\\ \vec{n}=\left(A,B,C\right)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{QP}=A\left(p_1-q_1\right)+B\left(p_2-q_2\right)+C\left(p_3-q_3\right)=$$

$$=Ap_1+Bp_2+Cp_3-\left(Aq_1+Bq_2+Cq_3\right)\underset{(1)}{=}Ap_1+Bp_2+Cp_3+D$$

donde en (1) hemos tenido en cuenta que $Q\left(q_1,q_2,q_3\right)\in\pi$ y, por tanto, $Aq_1+Bq_2+Cq_3+D=0$, de donde $Aq_1+Bq_2+Cq_3=-D$. Así,

$$d\left(P,\pi\right)=\frac{\left|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

CQ.D.

Como consecuencia:

Definición:

La <u>distancia de un plano</u> $\underline{\pi}$ <u>a una recta</u> $\underline{r}$ <u>paralela a él</u>, coincide con la distancia de un punto cualquiera $P_r\in r$ al plano π.

$$\boxed{d\left(r,\pi\right)=d\left(P_r,\pi\right)\ \text{ donde } P_r\in r}$$

Ejercicios:

51. *Halla la distancia del punto* $P\left(2,1,0\right)$ *al plano* $\pi\equiv 2x-3y+z-2=0$.

52. *Calcula la altura trazada desde el vértice* D *del tetraedro determinado por los puntos* $A\left(2,0,0\right)$, $B\left(-1,3,2\right)$, $C\left(1,-4,-1\right)$ y $D\left(0,0,0\right)$.

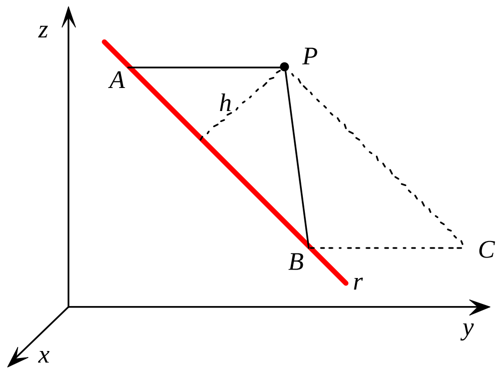
Indicación: Halla el plano determinado por los puntos A, B y C, *y obtén la distancia del punto* D *a ese plano.*

Ejercicios de Selectividad

14. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Definición / caracterización:

Sea $P\left(p_1,p_2,p_3\right)$ un punto y r la recta determinada por un punto $A\left(a_1,a_2,a_3\right)$ y un vector director $\overrightarrow{u_r}=\left(u_1,u_2,u_3\right)$.



La distancia del punto P a la recta r se puede expresar por:

$$\boxed{d\left(P,r\right)=\frac{S\left(ABCP\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}}$$

donde B es un punto arbitrario de la recta distinto de A y $S\left(ABCP\right)$ es el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AB}$.

Caracterización:

La fórmula anterior, se puede escribir como sigue:

$$\boxed{d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|}}$$

En efecto.
El área del paralelogramo $PABC$ es:

$$\text{Área} = \text{Base}\cdot\text{Altura} = \left|\overrightarrow{u_r}\right|\cdot h$$

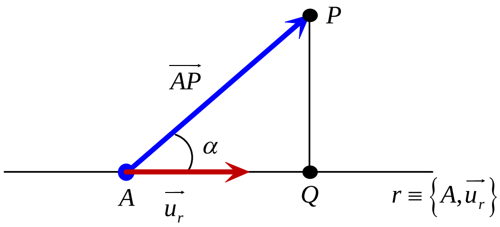
$$\text{Área} = \left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{AP}\right|$$

y como $h=d(P,r)$, igualando y despejando h:

$$\left|\overrightarrow{u_r}\right|\cdot h=\left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{AP}\right| \Rightarrow h=\frac{\left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|}$$

C.Q.D.

De otra forma:



Se tiene que

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{d}{\left|\overrightarrow{AP}\right|}=\frac{d(P,Q)}{\left|\overrightarrow{AP}\right|}=\frac{d(P,r)}{\left|\overrightarrow{AP}\right|} \qquad [1]$$

y como $\left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{AP}\right|=\left|\overrightarrow{u_r}\right|\left|\overrightarrow{AP}\right|\operatorname{sen}\alpha$, resulta que

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|\left|\overrightarrow{AP}\right|} \qquad [2]$$

Como consecuencia de [1] y [2]:

C.Q.D.

Para calcular la distancia del punto P a la recta r, podemos usar, además de la fórmula, los siguientes **métodos**:

(1) Método del plano perpendicular

i) Calculamos un plano π tal que $\begin{cases}\pi\perp r\\ P\in\pi\end{cases}$

ii) Hallamos $P'=\pi\cap r$ (punto de corte de π y de r.

iii) $d(P,r)=d(P,P')=\left|\overrightarrow{PP'}\right|$

(2) Método del punto genérico

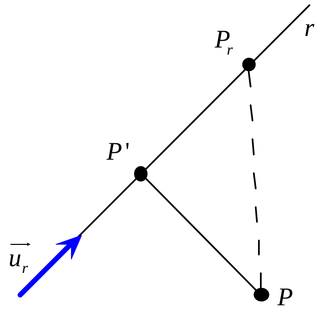
i) Tomamos $P_r \in r$ genérico (que dependerá de λ)

ii) Hallamos $\overrightarrow{PP_r}$ (que dependerá de λ)

iii) Imponemos que $\overrightarrow{PP_r} \perp r$ ($\Leftrightarrow \overrightarrow{PP_r} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0$), de donde se obtendrá un único valor de λ.

iv) Sustituimos el valor de λ obtenido en las ecuaciones paramétricas de la recta, obteniendo el punto P'.

v) $d(P,r) = d(P,P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right|$



Ejemplo:

Calcular $d(P,r)$, donde $P(5,1,6)$ y $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$.

(1) Método del plan perpendicular

i) $\pi \equiv \{P, \overrightarrow{u_r}\} \equiv -2(x-5) - (y+1) + (z-6) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0$

ii) $P' = \pi \cap r \Rightarrow 2(1-2\lambda) + (-\lambda) - (5+\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow P'(3,1,4)$

iii) $d(P,r) = d(P,P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ u

donde $\overrightarrow{PP'} = (3,1,4) - (5,1,6) = (-2,0,-2)$

(2) Método del punto genérico

i) $P_r(1-2\lambda, -\lambda, 5+\lambda) \in r$ genérico

ii) $\overrightarrow{P_rP} = (5,1,6) - (1-2\lambda, -\lambda, 5+\lambda) = (4+2\lambda, -1+\lambda, 1+\lambda)$

iii) $\overrightarrow{P_rP} \perp \overrightarrow{u_r} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_rP} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \Leftrightarrow (4+2\lambda, -1+\lambda, 1+\lambda) \cdot (-2,-1,1) = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

iv) $P'(3,1,4)$

v) $d(P,r) = d(P,P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ u

donde $\overrightarrow{PP'} = (3,1,4) - (5,1,6) = (-2,0,-2)$

Ejercicios:

53. *Halla la distancia del punto* $P(2,1,0)$ *a la recta* $r \equiv x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{1}$.

54. *Halla la distancia del punto* $P(1,1,-1)$ *a la recta* $r \equiv \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{-2}$.

55. *Calcula el área del triángulo que forman los puntos* $A(2,0,0)$, $B(-1,3,2)$ y $C(1,-4,-1)$.
Indicación: Toma, por ejemplo, como base el lado AB *y la altura será la distancia del vértice* C *a la recta que determinan los puntos* A y B.

Ejercicios de Selectividad

15. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

Entre rectas secantes o coincidentes:

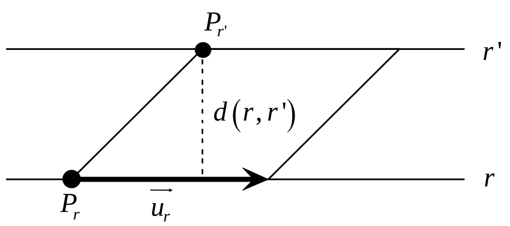
Sean r y r' dos rectas secantes o coincidentes. Se tiene que $\boxed{d(r,r')=0}$

Entre rectas paralelas:

Si r y r' dos rectas paralelas, entonces

$$\boxed{d(r,r') = d(r,P_{r'})} = \frac{\left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{P_r P_{r'}}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|}$$

donde $P_r \in r$ y $P_{r'} \in r'$.



Entre rectas que se cruzan:

Sean r y r' dos rectas que se cruzan. La distancia entre las rectas r y r' es igual a la distancia entre dos planos paralelos π y π' que contengan respectivamente a r y r'.

Si $\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 \end{cases}$ y $\begin{cases} x = a'_1 + \mu u'_1 \\ y = a'_2 + \mu u'_2 \\ z = a'_3 + \mu u'_3 \end{cases}$ se tiene que:

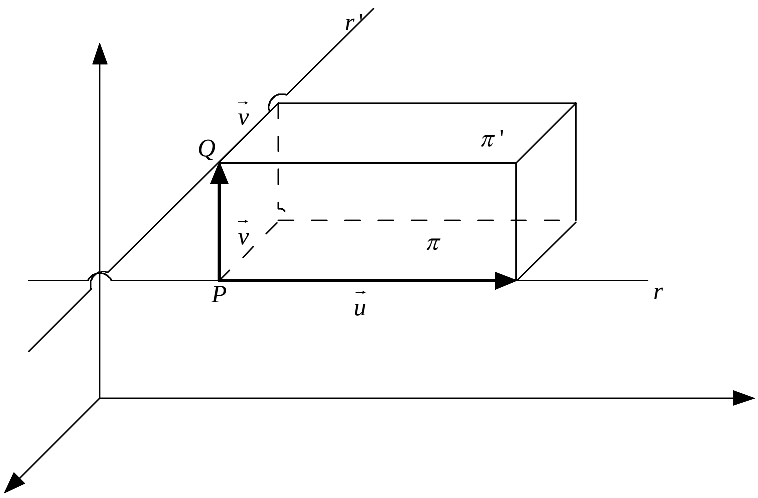
$$\boxed{d(r,r') = \left|\frac{\det\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_{r'}}, \overrightarrow{A_{r'}A_r}\right)}{\left|\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_{r'}}\right|}\right|} = \left| \frac{\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ a'_1 - a_1 & a'_2 - a_2 & a'_3 - a_3 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ u'_2 & u'_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ u'_3 & u'_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{vmatrix}^2}} \right|$$

donde $\overrightarrow{u_r}=(u_1,u_2,u_3)$, $\overrightarrow{u_{r'}}=(u'_1,u'_2,u'_3)$, $A(a_1,a_2a_3)$ es un punto de r y $A'(a_1',a_2',a_3')$ es un punto de r'.

En efecto:
El volumen del paralelepípedo es $V_{\text{paralelepípedo}} = A_{base}\cdot h$ y

$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{paralelepípedo}} = \left|\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{A_{r'}A_r}\right]\right| \\ A_{\text{base}} = \left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_{r'}}\right| \\ h = d(P,Q) = d(r,r') \end{array}\right\} \Rightarrow d(r,r') = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{A_{r'}A_r}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_{r'}}\right|}$$

C.Q.D.



Entre rectas que se cruzan:

La *distancia entre dos rectas que se cruzan*, r y r', coincide también con la distancia de una de ellas, r, al plano que contiene a la otra, r', y es paralelo a r.

Teorema:

Dadas dos rectas que se cruzan, siempre existe un plano que contiene a una de ellas y es paralelo a la otra.

Para calcular la distancia entre dos rectas r y s que se cruzan, podemos usar, además de la fórmula, los siguientes **métodos**:

(1) Método del plano paralelo

$d(r,s)=d(s,\pi)$ donde π es un plano tal que $\begin{cases}\pi \parallel s \\ r\subset\pi\end{cases}$

(2) Método del vector variable

i) $P_r\in r$ punto genérico de r (depende de λ)

ii) $P_s\in s$ punto genérico de s (depende de μ)

iii) Calculamos el vector $\overrightarrow{P_rP_s}$ (con origen en r y extremo en s), que depende de (λ,μ).

iv) Imponemos que $\overrightarrow{P_rP_s}\perp r$ y $\overrightarrow{P_rP_s}\perp s$ ($\overrightarrow{P_rP_s}\cdot\overrightarrow{u_r}=0=\overrightarrow{P_rP_s}\cdot\overrightarrow{u_s}$) y obtenemos (λ,μ).

v) Sustituyendo λ y μ en las ecuaciones de r y s, respectivamente, obtenemos dos puntos $R\in r$ y $S\in s$.

vi) $d(r,s)=d(R,S)=\left|\overrightarrow{RS}\right|$

Ejemplo:

Calcular la distancia entre las rectas $r\equiv\begin{cases}x=5+\lambda\\ y=-1\\ z=8+2\lambda\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}x=4+3\mu\\ y=3-\mu\\ z=5+4\mu\end{cases}$.

(1) Método del plano paralelo

Hallamos un plano π tal que $\begin{cases}\pi\parallel s\\ r\subset\pi\end{cases}$: $\pi\equiv\left\{P_r,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right\}$ o también $\pi\equiv\left\{P_r,\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}\right\}$

$$\pi\equiv\det\begin{pmatrix}x-5 & 1 & 3\\ y+1 & 0 & -1\\ z-8 & 2 & 4\end{pmatrix}=0\Rightarrow\pi\equiv 2x+2y-z=0$$

$$d(r,s)=d(s,\pi)=d(P_s,\pi)=\frac{|2\cdot4+2\cdot3-5|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=3\text{ u}$$

(2) Método del vector variable

i) Punto genérico de $r:P_r(5+\lambda,-1,8+2\lambda)$

ii) Punto genérico de $s:P_s(4+3\mu,3-\mu,5+4\mu)$

iii) Vector genérico:

$\overrightarrow{P_rP_s}=(4+3\mu,3-\mu,5+4\mu)-(5+\lambda,-1,8+2\lambda)=(-1+3\mu-\lambda,4-\mu,-3+4\mu-2\lambda)$

iv) Imponemos que $\overrightarrow{P_rP_s}\perp r$ y $\overrightarrow{P_rP_s}\perp s$:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{P_rP_s}\perp r\Rightarrow 5+5\lambda-11\mu=0\\ \overrightarrow{P_rP_s}\perp s\Rightarrow 19+11\lambda-26\mu=0\end{array}\right\}\Rightarrow(\lambda,\mu)=(3,2)$$

v) Sustituyendo en r y en s obtenemos los puntos:

$R(8,-1,14)$ y $S(10,1,13)$

vi) $d(r,s)=d(R,S)=\left|\overrightarrow{RS}\right|=\sqrt{(10-8)^2+(1+1)^2+(13-14)^2}=3\text{ u}$

Ejercicios:

56. *Halla la distancia entre los siguientes pares de rectas:*

a) $r\equiv\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1}$ y $s\equiv\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{-1}$

b) $r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x-3y=0 \\ 2y-3z=0 \end{cases}$

c) $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$ y $s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$

57. *Halla la distancia entre los siguientes pares de rectas:*

a) $r \equiv \begin{cases} 2x+y-2=0 \\ z=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x-3y=0 \\ 2y-3z=0 \end{cases}$

b) r *es la recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto* $P(-1,2,1)$, *y* s *es la recta que pasa por el punto* $Q(1,1,1)$ *y es perpendicular al plano* $\pi \equiv x = 0$.

Ejercicios de Selectividad

16. DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS

Planos coincidentes o que se cortan:

Si los planos son coincidentes o se cortan, la distancia es cero:

$$\boxed{d(\pi,\pi')=0}$$

Planos paralelos:

Si los planos son paralelos, la distancia entre ambos es igual a la distancia entre cualquier punto P de uno de los planos al otro:

$$\boxed{d(\pi,\pi')=d(P_\pi,\pi') \text{ donde } P_\pi \in \pi}$$

Ejercicio:

58. *Halla la distancia entre los siguientes planos:*

a) $\pi \equiv 2x-2y+3z=0$ y $\pi' \equiv 4x-4y+6z=12$

b) $\pi \equiv 3x-3y=0$ y $\pi' \equiv x-y=1$

Ejercicios de Selectividad

17. PERPENDICULAR COMÚN

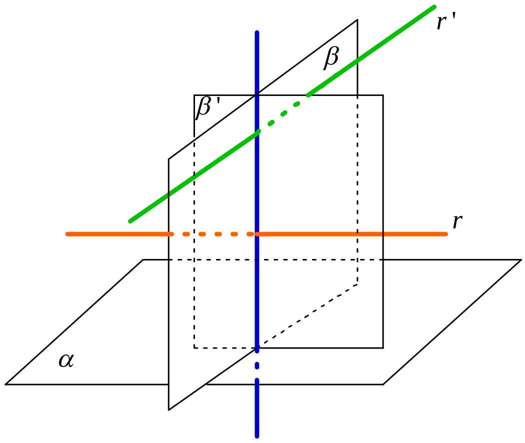
Llamamos perpendicular común a las rectas r y r' a la recta que es perpendicular a ellas y corta a las dos.

Antes de dar un método para calcularla hay que hacer notar que ***para que el problema tenga solución única*** las rectas r y r' tienen que ser secantes o cruzarse en el espacio.

Para hallar la perpendicular común a dos rectas:

(1) Hallamos un plano α paralelo a las dos rectas.

(2) Hallamos un plano β perpendicular a α y que contenga a r.
(3) Hallamos un plano β' perpendicular a α y que contenga a r'.
(4) La recta buscada es la intersección de los planos β y β'.



Perpendicular común

«Otra forma» de hallar la perpendicular común a dos rectas es la siguiente:

$$\boxed{p \equiv \begin{cases} \det\left(\overrightarrow{A_r X}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_{r'}}\right) = 0 \\ \det\left(\overrightarrow{A_{r'} X}, \overrightarrow{u_{r'}}, \overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_{r'}}\right) = 0 \end{cases}}$$

donde A_r es un punto de r, $A_{r'}$ es un punto de r', $\overrightarrow{u_r}$ es un vector director de r, $\overrightarrow{u_{r'}}$ es un vector director de r' y X es un punto genérico de la perpendicular común p.

Ejercicios:

59. *Halla la perpendicular común a los pares de rectas que puedes formar con las rectas:*

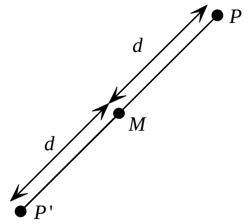
$$r_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2} \qquad r_2 \equiv x-1 = y = \frac{z}{2} \qquad r_3 \equiv x-2 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$$

60. *Halla unas ecuaciones de la recta t perpendicular común a las rectas*

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2} \qquad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

Ejercicios de Selectividad

18. PUNTO SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO DE OTRO PUNTO



El simétrico del punto P respecto de otro punto M es el punto P' tal que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

Dados dos puntos en el espacio $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$, el punto medio del segmento $\overline{AB}$ es:

$$\boxed{M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)}$$

Ejercicios:

61. *Halla el punto simétrico del punto $A(0,2,-1)$ respecto del punto $B(-1,0,2)$.*

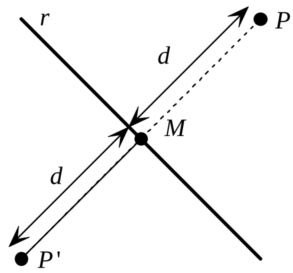
62. *Calcula los vértices del triángulo simétrico al formado por los puntos*

$$A(0,-1,2),\ B(-1,2,0),\ C(2,0,-1)$$

respecto del origen de coordenadas.

19. PUNTO SIMÉTRICO RESPECTO DE UNA RECTA

Dos puntos P y P' son simétricos respecto de una recta r, si la recta r es perpendicular al segmento $\overline{PP'}$ en su punto medio. Dicha recta recibe el nombre de *recta de simetría*.



Dados una recta r y un punto P no perteneciente a ella, para determinar el simétrico de P respecto de r seguimos los siguientes pasos:

1) Obtenemos la ecuación del plano π perpendicular a r y que pasa por P.
2) Hallamos el punto M de intersección de r y π.
3) Determinamos el punto P' simétrico de P respecto de M.

Ejercicios:

63. *Halla el punto simétrico del punto $P(2,1,0)$ respecto de la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$.*

64. *Calcula los vértices del triángulo simétrico al formado por los puntos $A(0,-1,2)$, $B(-1,2,0)$, $C(2,0,-1)$ respecto de la recta.*

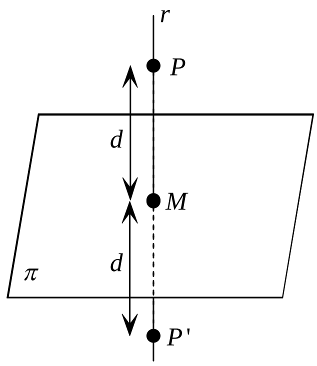
Ejercicios de Selectividad

20. PUNTOS SIMÉTRICOS RESPECTO DE UN PLANO

Dos puntos P y P' son simétricos respecto de un plano π, si el plano π es perpendicular al segmento $\overline{PP'}$ en su punto medio. Dicho plano recibe el nombre de *plano de simetría*.

Dados un plano π y un punto P no perteneciente a él, para determinar el simétrico de P respecto de π seguimos los siguientes pasos:

1) Obtenemos la ecuación de la recta r perpendicular al plano π y que pase por P.
2) Hallamos el punto M de intersección de r y π.
3) Determinamos el punto P' simétrico de P respecto de M.



Ejercicios:

65. *Halla el simétrico del punto* $P(2,1,0)$ *respecto del plano* $\pi \equiv 2x-3y+z-2=0$.

66. *Si los puntos* $A(1,0,5)$ y $A'(3,2,-3)$ *son simétricos, halla una recta y el plano respecto de los cuales dichos puntos son simétricos.*

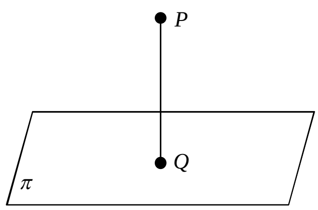
Ejercicios de Selectividad

21. PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UN PLANO

Dados un punto P y un plano π, llamaremos proyección ortogonal de P sobre π, al punto Q que verifica:

$$Q = r \cap \pi$$

donde r es la recta perpendicular a π que pasa por P.



Ejercicios:

67. *Calcula la proyección ortogonal del punto* $P(0,0,0)$ *sobre el plano* $\pi \equiv 2x-3y+z-2=0$.

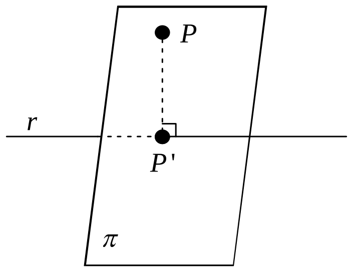
68. *Calcula la proyección ortogonal de los puntos* $A(0,0,0)$, $B(-1,1,1)$ y $C(0,2,0)$ *sobre el plano* π*, determinado por las rectas:*

$$r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1} \qquad s \equiv \begin{cases} x+2z=3 \\ y-2z=0 \end{cases}$$

Ejercicio de selectividad:

22. PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA

La <u>proyección ortogonal de un punto sobre una recta</u> es el punto de intersección de esa recta con el plano perpendicular a ella que contiene al punto.



Para obtenerlo:

- Hallamos el plano π perpendicular a r y que contiene a P
- Hallamos la intersección del plano π con la recta r.
- La solución del sistema anterior es la proyección P'.

Como <u>*consecuencia*</u>:
La distancia de un punto P a una recta r es la distancia entre el punto P y el punto $M \in r$ proyección ortogonal de P sobre r.

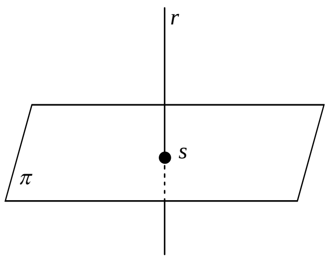
Ejercicio:

69. *Encuentra la proyección ortogonal de los puntos* $A(0,0,0)$, $B(-1,1,1)$ y $C(0,2,0)$ *sobre la recta* $r \equiv \begin{cases} x+2z=3 \\ y-z=0 \end{cases}$.

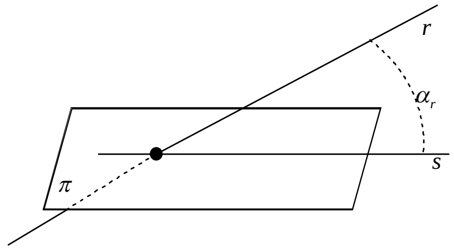
23. PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UNA RECTA SOBRE UN PLANO

Dados una recta r y un plano π, llamaremos <u>proyección ortogonal de r sobre π</u> a la recta s (o punto) que definimos de la siguiente forma:

(i) Si $r \perp \pi$ entonces $s = r \cap \pi$ (en este caso s es un punto en el que se proyectan todos los puntos de la recta)



(ii) Si $r \not\perp \pi$ entonces $s = \alpha_r \cap \pi$, siendo α_r el plano que contiene a la recta r y que verifica $\alpha_r \perp \pi$.



Ejercicios:

70. *Halla el punto donde se cortan las proyecciones de las rectas*

$$r \equiv \begin{cases} x+2y-2=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x=-8+t \\ y=1+t \\ z=-1+t \end{cases}$$

sobre el plano $\pi \equiv x-y+z+2=0$.

71. *Halla la proyección ortogonal de la recta* $r \equiv \frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}$ *sobre el plano de ecuación* $\pi \equiv 2x-3y+z-2=0$.

72. *Calcula la proyección ortogonal de la recta*

$$r \equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{-1}$$

sobre el plano de ecuaciones paramétricas $\pi \equiv \begin{cases} x=\lambda-\mu \\ y=2-\lambda+3\mu \\ z=3+2\lambda-2\mu \end{cases}$.

24. GEOGEBRA

(1) Geometría 3D 2º Bachillerato
Autor:Álvaro Fernández y Pablo Triviño
Tema:Vectores 3D (tres dimensiones), Geometría
https://www.geogebra.org/m/rr7qys9m

(2) Geometria 2º Bachillerato 2020-21
Autor:Fernando Villarrubia Gahete
Tema: Geometría, Matemática
https://www.geogebra.org/m/bJ9EdNpW

(3) Geometría en el espacio. 2º Bachillerato Científico
Autor:Borja Navarro Martínez
Tema:Geometría, Simetría, Simetrías
https://www.geogebra.org/m/nxdztecc

(4) Videoclips para las Matemáticas II de 2º de Bachillerato
Realizados por Manuel Sada Allo
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/videoclips2bach/index.htm

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Unidad 15:
PROBABILIDAD

1. INTRODUCCIÓN

La Teoría de la Probabilidad se interesa por el análisis de la noción intuitiva de “azar” o “aleatoriedad”, la cual como todas las nociones se origina en la experiencia. La idea cuantitativa de azar tomó forma primero con las tablas de juegos y comenzó con **Pascal** y **Fermat** (1645) como teoría de los juegos de azar. Desde entonces, la palabra probabilidad aparece en nuestro lenguaje ordinario en multitud de ocasiones. Así, afirmaciones del tipo de que la probabilidad de obtener dos seises al lanzar dos dados no cargados es uno entre 36, de que hay una probabilidad ligeramente inferior a un medio de que un bebé recién nacido sea varón y de que en los próximos dos años la probabilidad de que se pueda curar el cáncer es pequeña, puede decirse que expresan juicios de probabilidad. Sin embargo, cada uno de los ejemplos anteriores se refiere a un tipo diferente de juicio de probabilidad. El primero se refiere a un juicio de probabilidad que podríamos denominar clásico, en el que los posibles resultados son equiprobables (todos tienen la misma probabilidad de ocurrir). El segundo es una afirmación de tipo frecuentista y se refiere a la frecuencia relativa con la que cierta propiedad aparece entre los miembros de una clase determinada, y el tercero constituye un ejemplo de lo que podríamos llamar un juicio de credibilidad y es una medida del grado de confianza que tenemos en la verdad de una cierta proposición o en el acaecimiento de un suceso determinado.

2. EXPERIMENTOS

En general, llamaremos **experimento** a cualquier procedimiento especificado o conjunto de operaciones que proporcionan unos determinados resultados.

Llamaremos **experimento determinista** a aquel en el que se cumplen las siguientes dos condiciones:

a) se conocen todos los posibles resultados de la experiencia.
b) se sabe con certeza el resultado que se va a obtener al repetir la experiencia en condiciones prefijadas, quedando el fenómeno determinado por ellas.

Ejemplos:

1. Tirar una piedra desde un edificio (sabemos que se va hacia abajo, y se puede calcular el tiempo que tardará en llegar al suelo…).
2. Calentar un cazo de agua (sabemos que la temperatura aumenta).
3. Golpear una pelota (sabemos que se va a mover, e incluso conociendo las fuerzas que actúan, podemos conocer precisamente dónde caerá)

Llamaremos **experimento aleatorio, probabilista o estocástico** a aquel en el que se cumplen las siguientes dos condiciones:

a) se conocen todos los posibles resultados de la experiencia.
b) repetido en igualdad de condiciones puede presentar resultados distintos en cada experiencia particular y al repetir la experiencia en condiciones fijadas no puede predecirse el resultado que se va a obtener.

Ejemplos:

1. Imaginemos que lanzamos un dado al aire (normal, de 6 caras y no trucado). ¿Podemos predecir el resultado que vamos a obtener? Evidentemente no.
2. Tirar una moneda al aire y observar qué cara cae hacia arriba.
3. Rellenar una quiniela de fútbol,
4. Jugar una partida de póker y, en general, cualquier juego en el que intervenga el azar.

La *Teoría de la Probabilidad* se ocupa de asignar un cierto número a cada posible resultado que pueda ocurrir en un experimento aleatorio, con el fin de cuantificar dichos resultados y saber si un suceso tiene más posibilidades de ocurrir que otro o relaciones parecidas. Con este fin, introduciremos algunas definiciones.

3. ESPACIO MUESTRAL. SUCESOS. ESPACIO DE SUCESOS

Definiciones:

Se llama **suceso elemental** a cada uno de los posibles resultados *indescomponibles* que pueden obtenerse al realizar un experimento aleatorio.

Denominamos **espacio muestral** al conjunto de resultados posibles que se obtienen al realizar un experimento aleatorio y lo denotaremos por Ω (aunque también se suele denotar por E).

Llamaremos **suceso** a cualquier subconjunto del espacio muestral, es decir, un suceso es un conjunto de puntos muestrales con alguna propiedad.

Denominamos **espacio de sucesos** al conjunto de todos los sucesos de un experimento aleatorio, y se designa por $\wp(\Omega)$, donde Ω es el espacio muestral asociado al experimento aleatorio.

En todo experimento aleatorio siempre hay, al menos, dos sucesos:
Llamamos **suceso imposible** al suceso que no contiene ningún suceso y lo representaremos por $\varnothing \in \wp(\Omega)$, y llamamos **suceso seguro** al suceso $\Omega \in \wp(\Omega)$, ya que contiene a todos los sucesos elementales del experimento.

Ejercicios:

73. *Obtener el espacio muestral de los puntos obtenidos al tirar un dado.*

74. *¿Y en el caso del lanzamiento de una moneda?*

75. *Describir el espacio muestral del experimento consistente en extraer una bola de una bolsa en la que hay 3 rojas (R), 2 blancas (B) y 4 verdes (V).*

76. *Escribir el espacio muestral asociado al experimento de sacar una carta de entre las diez del palo de copas de una baraja española.*

Operaciones con sucesos:

Definimos la **unión** de los sucesos A y B, $A \cup B$, como el suceso formado por los sucesos elementales que pertenecen a alguno de los sucesos A o B. Este suceso ocurre cuando ocurre A o cuando ocurre B.

Definimos el suceso **intersección** de los sucesos A y B, $A \cap B$, como el suceso que ocurre siempre que ocurren A y B, es decir, está formado por los sucesos elementales que pertenecen a A y a B.

Diremos que los sucesos A y B son:

a) **Compatibles** cuando $A \cap B \neq \varnothing$.
b) **Incompatibles** cuando $A \cap B = \varnothing$.

Definimos el suceso **complementario** de A, $\overline{A} = A^c = A^*$, como el suceso formado por los sucesos elementales que están en Ω y que no están en A, es decir, si A no se realiza se realiza siempre $\overline{A}$.

Definimos la **diferencia** de los sucesos A y B, $A - B$, como el suceso que se presenta cuando lo hace A pero no B, esto es: $A - B = A \cap \overline{B}$.

Ejercicios:

77. *Sean los sucesos: A = {ser oyente de Cadena Dial}, B = {ser oyente de la Europa FM} y C = ={ser oyente de KISS FM}. Expresa mediante las operaciones de sucesos:*

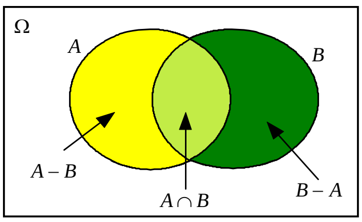
a) Ser oyente de, al menos, una emisora.
b) Ser oyente de Cadena Dial, pero no de Europa FM ni de KISS FM.
c) Oír sólo dos emisoras.
d) Oír alguna emisora, pero no las tres.

78. *En un sorteo de lotería nos fijamos en la cifra en que termina el "gordo".*

a) ¿Cuál es el espacio muestral?
b) Describe los sucesos A = "menor que 3", B = "par" y C = "mayor que 4" escribiendo todos sus elementos.
c) Halla los sucesos $A \cup B$, $B \cap C$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ y $A \cup \overline{C}$

Las leyes de DE MORGAN y otras propiedades:

1) Leyes de De Morgan
$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2) Conmutativas
$A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$
3) Asociativas
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4) Distributivas
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5) $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$



Ejercicios:

79. *Aplicando las leyes de De Morgan, expresar el suceso* $\left(H \cup C\right)^c$*, donde H es el suceso ser hombre y C estar casado.*

80. *Consideremos entre los habitantes de un municipio, los sucesos A = {ser socio del casino}, B = ={ser socio del club de fútbol local} y C = {ser socio de alguna asociación juvenil}. Expresa en función de A, B y C las siguientes situaciones:*

- *a) Ser socio de alguna de esas asociaciones.*
- *b) Ser socio de las tres asociaciones.*
- *c) Ser socio, sólo, del casino.*
- *d) Ser socio de, como máximo, una o dos asociaciones.*
- *e) No ser socio de ninguna de las tres.*
- *f) Ser socio de una sola asociación.*

4. EXPERIMENTOS COMPUESTOS. ESPACIO PRODUCTO

Llamaremos **experimento compuesto** al formado por varios experimentos simples. El espacio muestral asociado a un experimento compuesto se denomina **espacio compuesto o espacio producto**. Si Ω_1 es el espacio muestral asociado al primer experimento y Ω_2 el asociado al segundo experimento, entonces el espacio muestral compuesto es $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

Ejercicios:

81. *Halla los espacios muestrales (producto) de los siguientes experimentos:*

- *a) Tirar dos monedas y apuntar el resultado de su cara superior.*
- *b) Tirar un dado y una moneda.*
- *c) Tirar tres monedas.*
- *d) Tirar dos dados.*

82. *Escribir el espacio muestral asociado al experimento de lanzar dos dados de diferentes colores y observar la pareja de números que se obtiene.*

83. *Escribir el espacio muestral asociado al experimento de lanzar dos dados de diferentes colores y sumar los números que se obtienen.*

84. *Consideremos los sucesos del experimento de lanzar dos monedas:*

A = {sacar una cara y una cruz}

B = {al menos una cruz}

Calcular: $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ y $A - B$.

5. FRECUENCIAS DE UN SUCESO

Repetimos un experimento aleatorio *n* – veces y sea A un suceso cualquiera asociado a dicho experimento.

Se llama **frecuencia absoluta de** A al número

$$f_a(A) = \text{nº de veces que se verifica el suceso } A$$

Se llama **frecuencia relativa de A** al número

$$f_r(A) = \frac{f_a(A)}{n}$$

Propiedades de la frecuencia relativa:

1) $0 \le f_r(A) \le 1$

2) La suma de las frecuencias relativas de todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio es igual a 1.

3) La frecuencia relativa de un suceso es igual a la suma de las frecuencias relativas de los sucesos elementales que lo componen.

4) $f_r(\Omega) = 1$ y $f_r(\varnothing) = 0$

5) Si A y B son sucesos incompatibles, entonces:

$$f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$$

6) Si A y B son sucesos compatibles, entonces:

$$f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B) - f_r(A \cap B)$$

7) La suma de las frecuencias relativas de dos sucesos contrarios es igual a 1:

$$f_r(A) + f_r(\overline{A}) = 1$$

Ejercicio:

85. *Se ha lanzado un dado 100 veces y se han obtenido los siguientes resultados:*

Cara	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
f_a	*13*	*15*	*17*	*16*	*20*	*19*

Calcular las frecuencias relativas de los sucesos siguientes:

a) A = salir par *b) B = salir impar*

c) C = salir 2 o 4 *d)* $A \cup A^c$ *y* $A \cap B^c$

6. DEFINICIÓN EMPÍRICA: VON MISES

La definición empírica de Von Mises está relacionada con el concepto frecuentista de probabilidad, como muestra la siguiente ley.

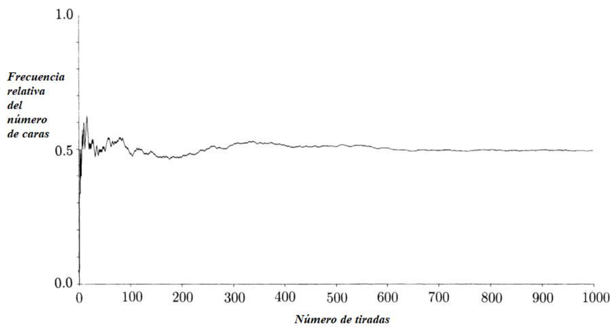
Ley de regularidad de las frecuencias relativas

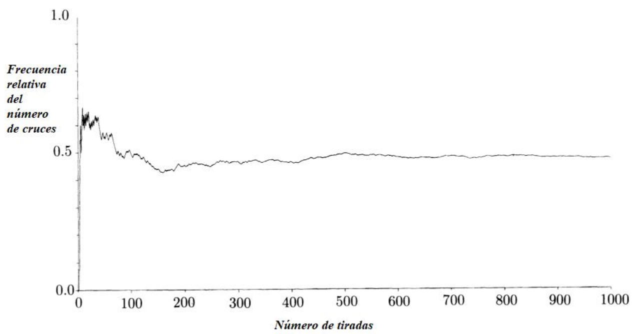
La frecuencia relativa de un suceso se acerca más y más a un valor fijo llamado probabilidad, conforme más veces se repite un experimento aleatorio, esto es:

$$\lim_{n\to\infty} f_r(A) = P(A)$$

Para Von Mises, la probabilidad de un suceso en relación con un experimento aleatorio sólo se puede conocer a través de la experiencia, es decir, la *medida de la incertidumbre* que nos representa la probabilidad del suceso, queda determinada al realizar un gran número de pruebas del experimento y examinar la frecuencia relativa del suceso en cuestión.

Esta concepción de la probabilidad tiene, dentro de la concepción axiomática (que veremos a continuación), una caracterización matemática resultado de las llamadas leyes de los grandes números, que establecen la convergencia de la frecuencia relativa de un suceso a su probabilidad.





7. DEFINICIÓN CLÁSICA: LAPLACE

Está basado en el concepto de resultados igualmente verosímiles y motivado por el *Principio de la razón insuficiente*, el cual postula que, si no existe un fundamento para preferir una entre varias posibilidades, todas deben ser consideradas equiprobables.

Ejemplos

1) Así, en el lanzamiento de una moneda perfecta la probabilidad de cara debe ser igual a la de cruz y, por tanto, ambas iguales a ½.
2) De la misma manera, la probabilidad de cada uno de los seis sucesos elementales asociados al lanzamiento de un dado debe ser igual a 1/6.

Regla de LAPLACE

Si los sucesos elementales del espacio muestral son equiprobables (es decir, tienen la misma probabilidad), entonces la probabilidad de un suceso cualquiera A viene dada por el cociente entre el número de casos favorables de que ocurra A y el número de casos posibles, esto es:

$$\boxed{P(A)=\frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Nº de casos posibles}}}$$

Propiedades de la probabilidad:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$
2) La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio es igual a 1.
3) La probabilidad de un suceso es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.
4) $P(\Omega)=1$ y $P(\varnothing)=0$
5) Si A y B son sucesos incompatibles, entonces:
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$
6) Si A y B son sucesos compatibles, entonces:
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
7) La suma de las probabilidades de dos sucesos contrarios es igual a 1, es decir,

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Problemas:

86. *Se considera un experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado. Se pide la probabilidad de obtener:*

a) Número impar
b) Número primo
c) Múltiplo de 3
d) Múltiplo de 5

87. *Se realiza un experimento aleatorio que consiste en la extracción de una carta de una baraja española. Se pide hallar las siguientes probabilidades:*

a) Obtener un oro
b) Obtener un as

88. *Consideremos el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados y anotar la suma de los puntos de las caras superiores. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) Obtener suma igual a 8
b) Obtener suma menor o igual a 4

89. *Una urna contiene dos bolas blancas y dos rojas. Se hacen cuatro extracciones con reemplazamiento. Encuentra: los sucesos A = {sólo ha salido una bola roja} y B = {la segunda extracción es bola roja} y calcula,* $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$, y $P(A\cup B)$

90. *Se ha encargado la impresión de una encuesta. El impresor informa que cada millar de folios la máquina estropea 12 folios. Hallar la probabilidad de que elegido al azar un folio de la encuesta:*

a) Esté mal impreso
b) Esté correctamente impreso

91. *Hallar la probabilidad de que al lanzar tres monedas se obtenga al menos una cara.*

8. DEFINICIÓN AXIOMÁTICA: KOLMOGOROV

Definición:

Se llama medida de probabilidad a cualquier función que asocie a cada suceso A, del espacio de sucesos (finito), un número real de $[0,1]$ que llamamos **probabilidad de** A y representamos por $P(A)$, que cumple los siguientes axiomas:

1) La probabilidad de un suceso cualquiera es mayor o igual que cero: $P(A)\geq 0$
2) La probabilidad del suceso seguro es igual a la unidad: $P(\Omega)=1$
3) La probabilidad de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos, es decir, si A y B son incompatibles, entonces:
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

Propiedades:

Las mismas que en el apartado anterior.

Problemas:

92. *Un jugador de fútbol, especialista en lanzar penaltis, mete 4 de cada 5 que tira. Para los próximos tres penaltis que tire, se consideran los siguientes sucesos: A = {mete sólo uno de ellos}, B = {mete dos de los tres} y C = {mete el primero}. Halla la probabilidad de los sucesos* $A \cup B$, $A \cap C$ *y* $B \cap C$.

93. *En una joyería hay dos alarmas. La probabilidad de que se active la primera es* $\frac{1}{3}$*, de que se active la segunda es* $\frac{2}{5}$ *y de que se activen las dos a la vez es* $\frac{1}{15}$*. ¿Cuál es la probabilidad de que se active alguna de las dos? ¿Y de que no se active ninguna de ellas?*

9. PROBABILIDAD CONDICIONADA

Sea A un suceso con $P(A) > 0$. Para cualquier otro suceso B se define la **probabilidad de** B **condicionada a** A por:

$$\boxed{P\left(B/A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Como consecuencia:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P\left(B/A\right)$$

Otras propiedades de la probabilidad condicionada que es necesario conocer:

1) $P\left(\overline{B}/A\right) = 1 - P\left(B/A\right)$

Demostración:

$$P\left(\overline{B}/A\right) \underset{[1]}{=} \frac{P\left[A - (A \cap B)\right]}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - P\left(B/A\right)$$

donde en [1] se ha tenido en cuenta que $A \cap \overline{B} = A - (A \cap B)$.

2) Si B_1 y B_2 son sucesos incompatibles, entonces:

$$P\left(B_1 \cup B_2/A\right) = P\left(B_1/A\right) + P\left(B_2/A\right)$$

Demostración:

$$P\left(B_1 \cup B_2/A\right) = \frac{P\left[(B_1 \cup B_2) \cap A\right]}{P(A)} = \frac{P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A)}{P(A)} = P\left(B_1/A\right) + P\left(B_2/A\right)$$

Problemas:

94. *Dos sucesos tienen la misma probabilidad igual a 0.5. La probabilidad de que ocurra uno de los sucesos sabiendo que ha ocurrido el otro es igual a 0.3. ¿Cuál es la probabilidad de que no curra ninguno de los dos sucesos?*

95. *Sean A y B dos sucesos con* $P(A)=0.5,\ P(B)=0.3 y\ P(A\cap B)=0.1$. *Calcular las siguientes probabilidades:*

$$P(A\cup B),\ P\left(A/B\right),\ P\left(A/A\cap B\right) \text{ y } P\left(A/A\cup B\right)$$

96. *A un alumno le lleva en coche a la facultad el 80% de los días un amigo. Cuando le lleva en coche llega tarde el 20% de los días. Cuando el amigo no le lleva, el alumno llega temprano a clase el 10% de los días. Determinar:*

a) La probabilidad de que llegue pronto a clase y le haya llevado el amigo.
b) La probabilidad de que llegue tarde a clase.
c) Si ha llegado pronto a clase calcúlese, ¿Cuál es la probabilidad de que no le haya llevado el amigo?

10. INDEPENDENCIA DE SUCESOS

Se dice que un suceso A **es independiente de** otro suceso B si

$$P\left(A/B\right)=P(A)$$

es decir, la presencia de B no influye en la probabilidad de que A ocurra o no.

Caracterización:

$$A \text{ es independiente de } B \Leftrightarrow P\left(A/B\right)=P(A)\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

Demostración:

$\Rightarrow$) Si A es independiente de B, entonces:

$$P\left(A/B\right)=P(A)\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

$\Leftarrow$) $P(A\cap B)=P(A)P(B)\Rightarrow\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)\Rightarrow P\left(A/B\right)=P(A)$ $\Rightarrow A$ es independiente de B. C.Q.D.

Como consecuencia, la independencia de sucesos es una propiedad recíproca, es decir, si A es independiente de B, entonces B es independiente de A, y por tanto, diremos que A y B son independientes.

Propiedad: Si A y B son independientes, entonces también lo son:

a) $\overline{A}$ y $\overline{B}$
b) $\overline{A}$ y B
c) A y $\overline{B}$

Propiedad: Si A, B y C son independientes, entonces:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

El recíproco no es cierto.

Problemas:

97. *Calcular la probabilidad de obtener tres cuatros al lanzar tres dados.*

98. *Calcular la probabilidad de "ningún seis" al lanzar cuatro dados.*

99. *Calcular la probabilidad de "algún seis" al lanzar cuatro dados. ("Algún seis" es el suceso contrario de "Ningún seis")*

100. *En una clase infantil hay 6 niñas y 10 niños. Si se escoge a 3 alumnos al azar, halla la probabilidad de:*

a) *Seleccionar tres niños.*
b) *Seleccionar 2 niños y una niña.*
c) *Seleccionar, al menos, un niño.*

101. *Se tienen dos sucesos A y B. Si las probabilidades*

$$P(A) = 0.7,\ P(B) = 0.6 \text{ y } P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 0.58$$

a) ¿Son independientes A y B?
b) Halla la probabilidad de que no se cumpla ni A ni B.

102. *En un IES hay organizadas actividades extraescolares de carácter deportivo. De los alumnos de 2º de Bachillerato, participan en esas actividades 14 chicas y 22 chicos. En ese curso hay un total de 51 chicos y 44 chicas. Si se escoge un alumno al azar, calcula la probabilidad de que:*

a) *Sea chico y no participe en dichas actividades.*
b) *Participe en las actividades sabiendo que es chica.*
c) *Sea chica, sabiendo que participa.*

103. *En cierta población laboral, un 80 % son peones sin cualificar (suceso P) y un 50 % son mujeres (suceso M). Se sabe, además, que el 40 % son peones femeninos y que un 45 % de los trabajadores cuyos padres tienen estudios (suceso PE), son mujeres. Di si son independientes los sucesos:*

a) *P y M*
b) *PE y M*
c) P y M^c

11. PROBABILIDAD TOTAL. FÓRMULA DE BAYES

Fórmula de la probabilidad compuesta:

Si $A_1, \ldots, A_n$ son n sucesos ordenados, entonces:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P\left(A_2 / A_1\right)P\left(A_3 / A_1 \cap A_2\right)\cdot \ldots \cdot P\left(A_n / A_1 \cap A_{n-1}\right)$$

Se dice que los sucesos $A_1,...,A_n$ forman una **partición del espacio muestral** cuando

1) $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
2) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Teorema de la Probabilidad Total:
Sea $A_1,...,A_n$ una partición del espacio muestral tal que $P(A_i) > 0$, y sea B otro suceso. Entonces:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P\left(B/A_i \right)$$

Demostración:
Escribimos $B = B \cap \Omega$. Se tiene que $B = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$ y, por tanto,

$$P(B) = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i) \right] = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) \underset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P\left(B/A_i \right)$$

donde en (1) hemos usado la fórmula de la probabilidad compuesta. C.Q.D.

Fórmula de BAYES:
Sea $A_1,...,A_n$ una partición del espacio muestral tal que $P(A_i) > 0$, y sea B otro suceso. Entonces:

$$P\left(A_i/B \right) = \frac{P(A_i) P\left(B/A_i \right)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P\left(B/A_i \right)}$$

Demostración:
Se tiene que

$$P\left(A_i/B \right) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) P\left(B/A_i \right)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P\left(B/A_i \right)}$$

C.Q.D.

Las probabilidades $P(A_i)$ se llaman **probabilidades a priori** por formularse antes de la presencia del suceso B, las probabilidades $P\left(B/A_i \right)$ se llaman **verosimilitudes** y las probabilidades $P\left(A_i/B \right)$ se llaman **probabilidades a posteriori**, pues su cálculo se realiza después de contar con una información adicional suministrada por el suceso B.

Problemas:

104. *De los créditos concedidos por un banco, un 42 % lo son para clientes nacionales, un 33 %, para clientes de la Unión Europea y un 25 % para clientes del resto del mundo. De esos créditos, son destinados a vivienda un 30 %, un 24 % y un l4 %, según sean nacionales, de la UE o del resto del mundo. Elegido un cliente al azar, ¿qué probabilidad hay de que el crédito concedido no sea para vivienda?*

105. *En cierta empresa se producen dos bienes A y B en la proporción 3 a 4. La probabilidad de que un bien de tipo A tenga defecto de fabricación es del 3 %, y del tipo B, del 5 %. Se analiza un bien, elegido al azar, y resulta correcto. ¿Qué probabilidad existe de que sea del tipo A?*

106. *En cierta población, un 20 % de los trabajadores lo hace en la agricultura (A), un 25 % en la industria (I) y el resto en el sector de servicios (S). Un 63 % de los que trabajan en el campo son mayores de 45 años, siendo ese porcentaje del 38 % y el 44 % en los otros sectores. Seleccionado un trabajador al azar, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 45 años?*

107. *En una casa hay tres llaveros A, B y C. El primero con 5 llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero, y de él, una llave para intentar abrir el trastero. Se pide:*

a) *¿Cuál es la probabilidad de que se acierte con la llave?*
b) *¿Cuál es la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?*
c) *Y si la llave escogida es la correcta, ¿cuál será la probabilidad de que pertenezca al llavero A?*

108. *** Una urna contiene 4 bolas (blancas y negras). Se introduce una bola blanca y a continuación se extrae otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?*

109. *Se dispone de tres urnas con las siguientes composiciones en bolas de color blanco (B) y negras (N):*

$$U_1 = \{3B, 7N\};\ U_2 = \{5B, 5N\};\ U_3 = \{8B, 2N\}$$

Lanzamos un dado al aire, de modo que: Si sale 1, 2 o 3, extraemos una bola de la primera urna; si sale 4 o 5 hacemos la extracción una bola de la segunda urna, y, si sale 6, hacemos la extracción de una bola de la tercera. Tras realizar una extracción se verifica que ha salido una bola de color negro. Determinar la probabilidad de que proceda de la tercera urna.

110. *En una bolsa hay 4 bolas negras y 5 blancas. En otra bolsa hay 2 bolas negras y 3 blancas. Se elige al azar una bolsa y de ella extrae una bola, se pide:*

a) *Si la bola extraída es de color blanco, probabilidad de que proceda de la primera urna.*
b) *Si la bola extraída es de color negro, probabilidad de que proceda de la segunda urna.*

111. *Un armario tiene dos cajones. El cajón Nº 1 contiene 4 monedas de oro y 2 de plata. El cajón Nº 2 contiene 3 monedas de oro y 3 de plata. Se abre un cajón al azar y se extrae una moneda. Calcular:*

a) *Probabilidad de que se haya abierto el cajón Nº 2 y se haya extraído una moneda de oro.*
b) *Probabilidad de que se haya abierto el cajón Nº 1, sabiendo que, al extraer una moneda, ésta es de oro.*

112. *Un taller tiene distribuidos los vehículos en tres naves. En la nave A hay 12 vehículos de los cuales 4 están averiados; en la nave B hay 6 vehículos y la mitad están averiados, y en la nace C de los 8 vehículos que contiene, hay 3 averiados. Si se elige una nave y un vehículo al azar, se pide:*

a) *¿Qué probabilidad hay de esté en perfectas condiciones de funcionamiento?*
b) *Si el vehículo está averiado, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la nave B?*

12. PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA SELECTIVIDAD DE MATEMÁTICAS APLICADAS II

113. *En una rifa con 500 papeletas, 75 tienen un premio de 100 euros, 150 tienen un premio de 25 euros y 275 un premio de 10 euros. Elegida una papeleta al azar, calcular la probabilidad de que: 1) Se obtenga un premio de 25 euros. 2) Se obtenga un premio menor de 100 euros.*

114. *Juan es el responsable de un aula de informática en una empresa y no se puede confiar en él pues la probabilidad de que olvide hacer el mantenimiento de un ordenador en ausencia del jefe es 2/3. Si Juan le hace mantenimiento a un ordenador éste tiene la misma probabilidad de estropearse que de funcionar correctamente, pero si no le hace el mantenimiento sólo hay una probabilidad de 0´25 de funcionar correctamente. 1) ¿Cuál es la probabilidad de que un ordenador funcione correctamente a la vuelta del jefe? 2) A su regreso, el jefe se encuentra un ordenador averiado, ¿cuál es la probabilidad de que Juan no le hiciera el mantenimiento?*

115. *Se truca una moneda de forma que la probabilidad de salir cara es doble que la de salir cruz. Si se lanza tres veces esta moneda. 1) Calcula el espacio muestral para este experimento. 2) Calcula la probabilidad de obtener dos cruces y una cara.*

116. *En una oficina trabajan 4 secretarias que archivan documentos. Cada una de ellas archiva el 40%, 10%, 30% y 20%, respectivamente, de los documentos. La probabilidad que tiene cada una de ellas de equivocarse al archivar es 0´01, 0´04, 0´06 y 0´1 respectivamente. 1) ¿Cuál es la probabilidad de que un documento esté mal archivado? 2) Si se ha encontrado un documento mal archivado, ¿cuál es la probabilidad de que sea debido a la tercera secretaria?*

117. *En el botiquín de un equipaje se encuentran dos cajas de pastillas para el dolor de cabeza y tres cajas de pastillas para el tiroides. El botiquín de otro equipaje hay tres cajas de pastillas para el dolor de cabeza, dos cajas de pastillas para el tiroides y una caja de pastillas laxantes. Si se saca una caja de pastillas al azar de cada uno de los equipajes, calcular la probabilidad de que: 1) Las dos cajas sean para el tiroides. 2) las dos cajas sean de pastillas diferentes.*

118. *El 45% de la población española deja su residencia habitual para ir de vacaciones de verano, de éstos sólo el 5% sale al extranjero. No obstante, hay un 1% de españoles que no estando de vacaciones sale al extranjero en el verano. Elegido un español al azar, calcular la probabilidad de que: 1) viaje al extranjero en el verano y 2) encontrándose en el extranjero, esté de vacaciones.*

119. *Tenemos un dado (con sus seis caras numeradas del 1 al 6), trucado en el que es dos veces más probable que salga un número par que un número impar. 1) Calcula la probabilidad de salir par y la de salir impar. 2) Calcula la probabilidad de que, en un solo lanzamiento del dado, salga un número menor que 4.*

120. *En un centro universitario hay matriculados 550 alumnos en primero, 300 en segundo y 150 en tercero. (Se cuenta cada alumno solamente en el curso inferior de todas las asignaturas que tenga). El porcentaje de matriculados en más de 8 asignaturas es: el 70% de los alumnos de primero, el 90% de los alumnos de segundo y el 30% de los alumnos de tercero. Elegido un alumno al azar, halla la probabilidad de que 1) esté matriculado en más de 8 asignaturas y 2) estando matriculado en más de 8 asignaturas sea de primero.*

121. *En una ciudad hay tres lugares de ocio (A, B, C) a los que van habitualmente un grupo de amigos. Las probabilidades de ir un día cualquiera a cada uno de ellos son, respectivamente, 0,4, 0,3 y 0,6. Hallar la probabilidad de que, un día cualquiera dicho grupo 1) solamente vaya a uno de los lugares, 2) vaya únicamente a dos de los lugares.*

122. *En una clase de segundo de Bachillerato compuesta por el 55 % de chicos y el resto de chicas, practica el balonmano el 40% de los chicos y una de cada cuatro chicas. Si elegimos al azar un alumno de la clase, 1) ¿cuál es la probabilidad de que practique balonmano? 2) ¿Cuál es la probabilidad de que practique balonmano y sea chica? 3) Si resulta que no practica balonmano, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?*

123. *En una clase de segundo de bachillerato hay 10 chicos y 10 chicas, la mitad de las chicas y la mitad de los chicos han optado por la asignatura de Biología, calcular la probabilidad de que, elegido un alumno al azar de esa clase, 1) sea chico o haya elegido Biología, 2) sea chica y no haya elegido Biología*

124. *Para superar una oposición se presentan dos modelos de examen A y B, en el modelo A hay 8 preguntas de contenido general y 12 de contenido específico y el modelo B se compone de 9 preguntas de contenido general y 6 de contenido específico (no hay preguntas comunes en los dos modelos de examen). Para elegir una pregunta, primero se elige un modelo de examen al azar y luego, al azar, se elige una pregunta del modelo elegido.1) ¿Cuál es la probabilidad de que la pregunta elegida sea de contenido específico? 2) Si la pregunta elegida es de contenido general, ¿cuál es la probabilidad de que se haya elegido previamente el modelo A?*

125. *En un aula de un colegio, el porcentaje de diestros (sólo utilizan la mano derecha) es el 60%, la de zurdos (sólo utilizan la mano izquierda) el 15% y un 1% que son ambidiestros (utilizan indistintamente ambas manos), 1) ¿cuál es la probabilidad de elegir un alumno de esta clase que sólo utilice una mano? 2) En otra aula de ese colegio con 25 alumnos, los diestros representan el 84 % del a clase y resto son zurdos. Si sacamos dos alumnos de clase, uno a uno y sin devolverlos al aula, ¿cuál es la probabilidad de que ambos utilicen la misma mano?*

126. *En un colegio hay 30 niños no nacidos en España, de los cuales 6 han nacido en el Este de Europa, 15 en el Norte de África y el resto son de origen asiático. Al comenzar el curso, el centro les mide el nivel de español con el fin de proporcionarles clases especiales a los que lo necesiten. Hecha la prueba de nivel se observa que 3 niños del Este de Europa, 9 norteafricanos y 6 asiáticos necesitan clases compensatorias. 1) Si elegimos un niño del colegio al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea asiático y no necesite clases compensatorias? 2) Si elegido un niño al azar resulta que ha tenido que asistir a clases compensatorias, ¿cuál es la probabilidad de que sea de origen norteafricano?*

127. *En un examen teórico para la obtención del permiso de conducir hay 14 preguntas sobre normas, 12 sobre señales y 8 sobre educación vial. Si se eligen dos preguntas al azar. 1) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos preguntas sean de educación vial? 2) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna sea de señales?*

128. *Los porcentajes de contenido violento que emite un determinado canal televisivo autonómico en las diferentes franjas horarias es el siguiente. 1 % por la mañana, 2 % por la tarde y 3 % por la noche. Si un telespectador cualquiera sintoniza un día aleatoriamente este canal con igual probabilidad de franja horaria: 1) ¿Cuál es la probabilidad de que no vea ningún contenido violento?*

2) Si un telespectador ha visto un contenido violento en ese canal, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido por la mañana?

129. *En el arcén de una determinada carretera, las probabilidades de que un coche parado en este arcén tenga los neumáticos muy gastados es de 0,23 y de que tenga los faros defectuosos es de 0,24. También sabemos que la probabilidad de que un coche parado en este arcén tenga los neumáticos muy gastados o bien los faros defectuosos es de 0,38. Calcula la probabilidad de que un coche parado en ese arcén, 1) tenga los neumáticos muy gastados y los faros defectuosos. 2) no tenga ninguna de las dos averías.*

130. *En una determinada granja de patos en la que sólo hay dos tipos, uno con pico rojo y otro con pico amarillo, se observa que: el 40 % son machos y con pico amarillo, el 20 % de todos los patos tienen el pico rojo, el 35 % de los patos que tienen el pico rojo son machos, mientras que sólo el 15 % de los machos tienen el pico rojo. 1) Elegido un pato al azar, calcular la probabilidad de que sea macho. 2) Si el pato elegido ha sido hembra, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el pico rojo?*

131. *Si una persona va un día a su dentista, supongamos que la probabilidad de que sólo le limpie la dentadura es de 0,44, la probabilidad de que sólo le tape una caries es de 0,24 y la probabilidad de que le limpie la dentadura y le tape una caries es de 0'08, calcular la probabilidad de que un día de los que va a su dentista, éste: 1) le limpie la dentadura o bien le tape una caries, 2) ni le limpie la dentadura ni le tape una caries.*

132. *El 42 % de la población activa de cierto país, está formada por mujeres. Se sabe que el 24% de las mujeres y el 16 % de los hombres están en paro.*

- *a) Elegida una persona al azar de la población activa de ese país, calcula la probabilidad de que esté en paro.*
- *b) Si hemos elegido una persona con trabajo, ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre?*

133. *En unas votaciones a consejo escolar de un cierto centro sabemos que la probabilidad de que vote una madre es del 0,28, la probabilidad de que vote un padre es del 0,21 y la probabilidad de que voten los dos es de 0,15.*

- *a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los dos vote?*
- *b) ¿Cuál es la probabilidad de que no vote ninguno de los dos?*

134. *Los viajantes de una empresa alquilan coches a tres agencias de alquiler: 60 % a la agencia A, 30 % a la agencia B y el resto a la agencia C. Si el 9 % de los coches de la agencia A necesitan una revisión, el 20 % de los coches de la agencia B necesitan una revisión y el 6 % de los coches de la agencia C necesitan una revisión.*

- *a) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche alquilado por esa empresa necesite una revisión?*
- *b) Si un coche alquilado ha necesitado una revisión ¿cuál es la probabilidad de que lo hayan alquilado a la agencia B?*

135. *En el Instituto de un determinado barrio se sabe que 1/3 de los alumnos no vive en el barrio. También se sabe que 5/9 de los alumnos han nacido en la ciudad y que 3/4 de los alumnos no han nacido en la ciudad o viven en el barrio. Seleccionado al azar un alumno de ese Instituto, calcular* *la probabilidad de que: 1) viva en el barrio 2) no haya nacido en la ciudad, 3) no haya nacido en la ciudad y viva en el barrio.*

136. *La terminación de un trabajo de construcción se puede retrasar a causa de una huelga. La probabilidad de que habrá huelga es de 0,6, la probabilidad de que se termine a tiempo es de 0,85 si no hay huelga y de 0,35 si hay huelga.*

- *a) ¿Cuál es la probabilidad de que el trabajo se termine a tiempo?*
- *b) Si el trabajo se ha terminado a tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que haya habido huelga?*

Ejercicios de Selectividad

Unidad 16:
DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

0.- INTRODUCCIÓN

Le podemos dar dos significados a la palabra estadística:

(1) Datos numéricos relativos a un conjunto de elementos o colección de datos numéricos.
(2) Ciencia que tiene por objeto dar métodos para el tratamiento de las masas de datos de observación y su aplicación.

A las dos acepciones anteriores podemos añadir una tercera debida a Barnett:

«La estadística es la ciencia que estudia cómo debe emplearse la información y cómo dar una guía de acción en situaciones que entrañan incertidumbre».

Etimológicamente el término «estadística» tiene su raíz en la palabra «estadista», y esta a su vez en el término latín «status». De aquí nace su primera vocación, la de constituirse como la exteriorización cuantitativa de las cosas del estado.

En este sentido, los antecedentes de la «Estadística» son tan remotos como lo puede ser la historia del hombre. Es fácilmente imaginable que las sociedades humanas más primitivas estuvieran interesadas en enumerar sus características más relevantes: familias, hombres aptos para la guerra, utensilios de caza, cabezas de ganado, etc. Las referencias históricas nos proporcionan las primeras evidencias de recuentos, situándolas en el censo del emperador Yao en la China del año 2238 a.C., y en documentos asirios, egipcios y griegos que preceden a los más cercanos del Imperio Romano, en el que la preocupación por la actividad censal de los individuos y bienes del estado tenía una clara finalidad tributaria y militar.

Posteriormente, el avance general del conocimiento cuantitativo de las cosas del estado en sus facetas de recogida de información, descripción y análisis de la misma, adquirió una base más científica a través de las mejoras introducidas por las dos escuelas estadísticas más importantes: la alemana y la inglesa.

Pero en realidad la gran transformación de la Estadística, que la ha convertido en una ciencia susceptible no solamente de discutir la realidad, sino de modelizarla utilizando los métodos del Análisis Matemático, surge precisamente de su vinculación a éste a través del Cálculo de Probabilidades.

El origen del Cálculo de Probabilidades se sitúa en el S. XVII, atribuyéndose a las aportaciones que Pascal realizó sobre algunos problemas clásicos de los juegos de azar. Pero en realidad, ya a partir del S. XV algunos matemáticos notables como Paccioli, Cardano, Kepler y Galileo, habían esbozado unas primeras formalizaciones de algunos esquemas aleatorios.

Esta nueva ciencia fue tomando cuerpo y vinculándose fuertemente a la Teoría de Funciones a lo largo de los siglos XVIII y XIX, y comienzos del XX merced a los logros de figuras tan notables como Bernouilli, Leibniz, Bayes, Laplace, Tchebicheff, Kolmogorof, Markov... El resultado de todo ello ha sido la construcción de un modelo de comportamiento de los llamados fenómenos estocásticos en el que puede encuadrarse toda experiencia o evidencia empírica que revista carácter de aleatoriedad.

La fusión de estas dos vertientes de mejora del conocimiento: la Estadística como recogida, descripción y análisis de la información, y el Cálculo de Probabilidades, se ha plasmado en una nueva rama floreciente de esta disciplina: la Estadística Matemática, surgida en las primeras décadas del siglo XX y cuyo fruto, producto de aportaciones de matemáticos como Yule, Fisher, Neyman, Pearson,..., ha sido la disponibilidad de eficaces instrumentos que permiten poner en relación los datos recogidos con algún modelo ideal de probabilidad, y ayudan a descubrir en la evidencia empírica algún tipo de regularidad estocástica (aleatoria).

Resumiendo, históricamente, la Estadística ha comenzado por ser descriptiva. Ha sido necesario ante todo acumular información, criticarla, ponerla en condiciones, analizarla y sintetizarla. Posteriormente, después de haberse comprobado analogías, descubierto permanencias estadísticas, reconocido un cierto número de distribuciones tipo, observado algunas formas de dependencia estructurales bastante grandes, la Estadística llegó a ser explicativa, gracias en particular al Cálculo de Probabilidades.

La Estadística, por tanto, se configura como la tecnología del método científico que proporciona instrumentos para la toma de decisiones, cuando éstas se adoptan en ambiente de incertidumbre, siempre que ésta incertidumbre pueda ser medida en términos de probabilidad. Por ello la Estadística se preocupa por los métodos de recogida y descripción de datos, así como de generar técnicas para el análisis de esta información.

A raíz de todo lo expuesto, podemos dividir el estudio de esta disciplina en:
- (1) Estadística Descriptiva
- (2) Cálculo de Probabilidades
- (3) Estadística Teórica o Inferencia Estadística

1. VARIABLES ALEATORIAS

Frecuentemente, al realizar un experimento aleatorio nos interesa más que el resultado completo del experimento una función real de los resultados. Por ejemplo, si el experimento aleatorio consiste en lanzar tres veces una moneda, podemos estar interesados en determinar el número de caras obtenidas y para ello definimos una función X que asigna un valor numérico (número de caras) a cada resultado del experimento. De esta manera, si denotamos por C al suceso «salir cara» y por F al suceso «salir cruz», tenemos por ejemplo que $X(\text{FCF}) = 2$ o que $X(\text{FFF}) = 0$. Tales funciones, cuyos valores dependen de los resultados de un experimento aleatorio, se llaman variables aleatorias.

Las variables aleatorias y sus distribuciones de probabilidad, pueden considerarse una generalización del concepto frecuentista de probabilidad. Se introducen como el modelo matemático ideal al que se aproximan las distribuciones de frecuencias que se obtendrían en una repetición indefinida de pruebas de este experimento.

Por ello, nos recuerdan a las variables estadísticas y a sus distribuciones de frecuencia estudiadas en Estadística Descriptiva.

Llamaremos *variable aleatoria* a toda función que asocia a cada elemento del espacio muestral Ω un número real.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \longrightarrow X(\omega) \in \mathbb{R}$$

Las variables aleatorias **se clasifican** en discretas y continuas, dependiendo de si dicha variable toma valores aislados (variable discreta) o los toma en un intervalo (variable continua).

EJEMPLOS:
1) Se tira una moneda tres veces y se observa la sucesión de caras y cruces. El espacio muestral se compone de los 8 siguientes elementos:

$$\Omega = \{ccc, ccx, cxc, xcc, xcx, xxc, cxx, xxx\}$$

Sea X el número de caras que van saliendo. Se tiene que X es una variable aleatoria que toma los siguientes valores:

X(ccc) = 3
X(ccx) = X(cxc) = X(xcc) = 2
X(cxc) = X(xxc) = X(cxx) = 1
X(xxx) = 0

X es por tanto una variable aleatoria discreta que toma los valores 0, 1, 2 y 3.

$$X : \Omega \to \{0,1,2,3\}$$

2) Se escoge un punto al azar en un círculo de radio r. Sea X la distancia del punto al centro del círculo.
Entonces, X es una variable aleatoria continua y su espacio de valores es el intervalo cerrado cuyos extremos son 0 y r, es decir:

$$X : \Omega \to [0, r] \qquad \square$$

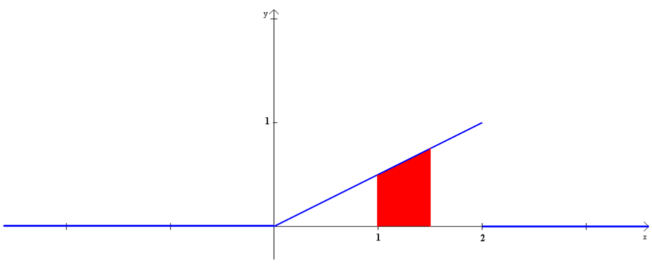
Asociada a una variable aleatoria *X* tenemos una función

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$F(x) = P(X \leq x)$$

que llamaremos **función de distribución** de la variable aleatoria X .

EJEMPLO:
Sea X una variable aleatoria continua con la siguiente función de distribución F:

$$F(x) = \begin{cases} 0,5x & \text{si } \ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



$P(1 \leq X \leq 1,5)$ *=Área de la región sombreada del dibujo* $= \dfrac{5}{16}$

2. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Las distribuciones de probabilidad son modelizaciones de las correspondientes distribuciones estadísticas de frecuencias.

Se clasifican en discretas y continuas, dependiendo de que la correspondiente distribución estadística sea discreta o continua.

2.1. Distribuciones de probabilidad discretas

Se llama **distribución de probabilidad** de una variable aleatoria discreta *X* a la tabla

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n

La aplicación que asocia a cada valor de la variable su correspondiente probabilidad se denomina *función masa de probabilidad*:

$$x_i \longrightarrow P(X = x_i)$$

que está **caracterizada** por las siguientes dos propiedades:

a) $p_i \geq 0 \quad \forall i$

b) $\sum p_i = 1$

EJERCICIO:

137. En una caja hay chinchetas, unas están bien fabricadas y otras tienen algún defecto, con igual probabilidad. Elegimos dos chinchetas, y consideramos la variable aleatoria «número de chinchetas defectuosas». Se pide:

a) El espacio muestral y determinar si la variable aleatoria es discreta.
b) Construir la distribución de probabilidad y comprobar que se cumplen las dos propiedades que la caracterizan.

Los **parámetros** asociados a una distribución de probabilidad son:

Esperanza matemática o media: $\boxed{EX = \sum x_i \cdot p_i}$ (también se representa por μ)

Varianza: $\boxed{Var(X) = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i}$ (también se representa por σ^2)

Desviación típica: $\boxed{\sigma = +\sqrt{Var(X)}}$

EJERCICIOS:

138. *Calcular los parámetros de la distribución del ejercicio anterior.*

139. *Lanzamos tres monedas al aire, y consideramos la variable aleatoria «número de caras obtenidas». Se pide:*

a) El espacio muestral y la variable aleatoria.
b) Construir la distribución de probabilidad.
c) Calcular la esperanza matemáticas, la varianza y la desviación típica.

2.2. Distribuciones de probabilidad continuas

Una variable aleatoria es continua cuando puede tomar un número infinito de valores de la recta real.

La distribución de probabilidad asociada a una variable aleatoria continua se llama *distribución de probabilidad continua*.

En dichas distribuciones de probabilidad, la probabilidad de un valor concreto es cero, y este caso lo que se hace es que **se calculan probabilidades asociadas a intervalos**: $P(a \le X \le b)$

Se define la **función de densidad o curva de probabilidad** $f(x)$, cuya grafica nos dice cuáles son las zonas donde están los valores más probables, es decir, las zonas más densas en probabilidad.

Propiedades que caracterizan a la función de densidad:

(1) Su gráfica junto con el eje de abscisas encierra un área igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

(2) $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$

Relación entre f y F :

► Conocida f :

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt}$$

► Conocida F :

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

EJEMPLO:

Vamos a calcular la función de densidad de la variable aleatoria del ejemplo 2. Para ello, derivamos la función de distribución:

$$F'(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = f(x)$$

En este caso, es inmediato comprobar que se cumplen las propiedades (1) y (2):

$f(x) = 0,5 \ge 0 \quad \forall x \in [0,2]$

$A =$ *área de un rectángulo* $= 2 \cdot 0,5 = 1$

3. LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

La distribución binomial es una de las distribuciones discretas más útiles, ya que su área de aplicación incluye:

- inspección de calidad
- control de defectos
- calidad del servicio de telefonía
- ventas (marketing)
- mercadotecnia
- medicina
- investigación de opiniones…

Supongamos un experimento del que sólo nos interesa la ocurrencia o no ocurrencia de un evento concreto. Sin pérdida de generalidad llamaremos éxito a la ocurrencia de dicho evento y fracaso a la no ocurrencia. La probabilidad de éxito es p y la de fracaso $q = 1 - p$.

Supongamos además que el experimento se realiza n veces y cada una de las realizaciones es independiente de las demás.

Sea X la variable aleatoria que representa el «número de éxitos» obtenidos en las n realizaciones del experimento.

Las dos suposiciones clave para la distribución binomial son las siguientes:

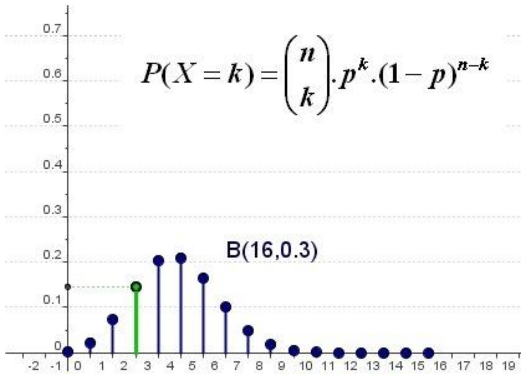
- la probabilidad de éxito p permanece constante para cada ensayo
- las n realizaciones son independientes entre sí.

En las condiciones anteriores se dice que X sigue una ***distribución binomial*** de parámetros n y p, $\boxed{X \longrightarrow \mathrm{B}(n, p)}$, si su función masa de probabilidad es:

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{para } k = 0,1,\ldots,n}$$

donde: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ se denomina número combinatorio y se lee «n sobre k».

$$\left.\begin{array}{l} n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \\ 0! = 1 \end{array}\right\} \text{ se denomina factorial de } n \text{ (donde } n \in \mathbb{N}\text{)}$$



GeoGebra y Wolfram|Alpha

Distribución de probabilidad binomial

Autor: Zulma Elizabeth Zamudio

Tema: Probabilidad

https://www.geogebra.org/m/mymugmwr

Wolfram|Alpha Widgets

Distribución binomial

https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=8b2a1f178ccc4342e354ef7a11801228

EJEMPLO:

La probabilidad de que cierta semilla germine en unas determinadas condiciones es 0,4. Si en dichas condiciones se siembran 30 semillas, y se considera la variable aleatoria X, que expresa el número de semillas que germinan, se observa que X sigue una distribución binomial $\mathrm{B}(30\ ,\ 0{,}4)$. Hallar la probabilidad de que germinen 5 semillas.

$$P(X=5)=\binom{30}{5}0,4^5\cdot 0,6^{30-5}=0,00414$$

¿Y la probabilidad de que germinen como mucho 5 semillas?

$$P(X\le 5)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=0,0056588$$

(en este caso, los cálculos hay que hacerlos con ordenador, o mediante una aproximación de la binomial que no vamos a ver hasta el final de la unidad).

EJEMPLO:

Un examen tipo consta de diez preguntas, cada una de ellas con tres respuestas, de forma que sólo una es correcta. Un estudiante que no ha preparado la materia decide contestar al azar a todas ellas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de acertar seis preguntas?
b) ¿Y la probabilidad de no acertar ninguna?

Sea X = número de respuestas acertadas. Se tiene que $X \longrightarrow \mathrm{B}\left(10,\frac{1}{3}\right)$.

a) $P(X=6)=\binom{10}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4=0,0569$

b) $P(X=0)=\binom{10}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{10}=0,0173$

EJERCICIOS:

140. *Un arquero tiene una probabilidad de hacer blanco. Si realiza cuatro disparos, calcula:*

a) La probabilidad de hacer dos blancos.
b) La probabilidad de hacer dos o más blancos.

141. *La probabilidad de nacimientos de niños varones en España es de 51,7%. Halla la probabilidad de que una familia de 5 hijos tenga:*

a) Por lo menos una niña.
b) Por lo menos un niño.

142. *La probabilidad de que un estudiante obtenga el título de arquitecto es de 0,3. Calcula la probabilidad de que de un grupo de siete estudiantes matriculados en primer curso:*

a) Los siete finalicen la carrera.
b) Al menos dos acaben la carrera.

Los **parámetros** (media, varianza y desviación típica) de una distribución binomial son:

Esperanza matemática (media): $\boxed{EX=np}$

Varianza: $\boxed{\sigma^2=npq}$

Desviación típica: $\boxed{\sigma=+\sqrt{npq}}$

EJEMPLO:

La probabilidad de que un libro salga defectuoso en una determinada imprenta es del 3 %. Calcular:

a) El número de libros defectuosos esperados en un lote de 10 000.
b) La varianza y la desviación típica de esta distribución.

Sea X = el libro es defectuoso. Se tiene que $B(10\,000\ ,\ 0{,}03)$.

a) El número de libros defectuosos esperados es igual a la media de la distribución:

$$EX = np = 10000 \cdot 0,03 = 300$$

es decir, se espera que haya 300 defectuosos en el lote.

b) Varianza:

$$Var(X) = npq = 10000 \cdot 0,03 \cdot 0,97 = 291$$

c) Desviación típica:

$$\sigma = +\sqrt{npq} = \sqrt{291} = 17,05$$

Ejercicio:

143. *Calcular la esperanza matemática, la varianza y la desviación típica de los ejercicios 4 y 5.*

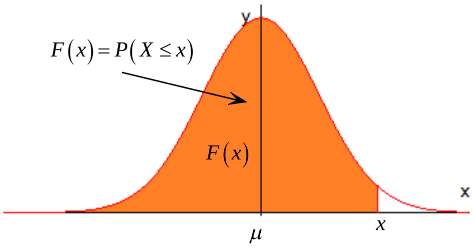
Ejercicios de Selectividad

4. LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Una **distribución** correspondiente a una variable continua se dice **normal** si su función de densidad es:

$$\boxed{\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \end{array}}$$

y se representa por $\boxed{X \longrightarrow N(\mu,\sigma)}$, con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$, donde μ representa la media (esperanza matemática) y σ la desviación típica.



Se llama Normal porque es muy frecuente, apareciendo en circunstancias muy inesperadas (antes se creía que todas eran así). Otras veces aparece una distribución muy parecida a la normal, que puede tratarse como si lo fuera.

En el caso $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ se denomina **distribución normal tipificada** y su función de distribución correspondiente está tabulada, por lo que *siempre hay que pasar a una* $N(0,1)$:

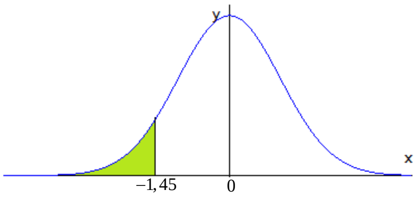
$$\boxed{X \to N(\mu,\sigma) \longrightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \to N(0,1)}$$

5. USO DE TABLAS

(1) $P(Z \le 1,45) = 0,9265$

Para calcular esta probabilidad, basta con mirar en la tabla: $P(Z \le 1,45) = 0,9265$

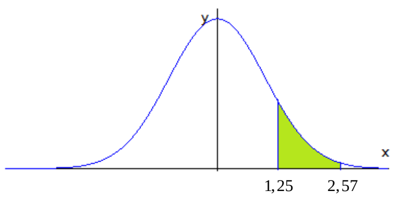
(2) $P(Z \le -1,45)$



Para calcular esta probabilidad hay que tener en cuenta la simetría de la distribución normal y aplicar la propiedad que relaciona la probabilidad de un suceso con su contrario ($P(\overline{A}) = 1 - P(A)$):

$$P(Z \le -1,45) = P(Z \ge 1,45) = 1 - P(Z \le 1,45) =$$
$$= 1 - 0,9265 = 0,0735$$

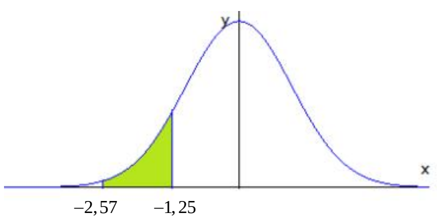
(3) $P(1,25 \le Z \le 2,57)$



Interpretando esta probabilidad como áreas se tiene la siguiente igualdad:

$$P(1,25 \le Z \le 2,57) =$$
$$= P(Z \le 2,57) - P(Z \le 1,25) =$$
$$= 0,9949 - 0,8944 = 0,1005$$

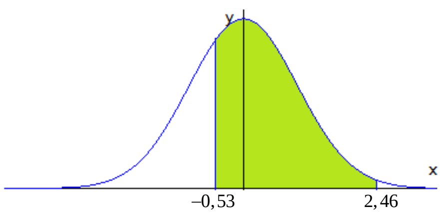
(4) $P(1,25 \le Z \le 2,57)$



Para calcular esta probabilidad tenemos en cuenta la simetría de la distribución:

$$P(-1,25 \le Z \le -2,57) = P(1,25 \le Z \le 2,57)$$
$$= P(Z \le 2,57) - P(Z \le 1,25) =$$
$$= 0,9949 - 0,8944 = 0,1005$$

(5) $P(-0,53 \le Z \le 2,46)$



Aplicaremos lo visto en los apartados anteriores:

$$P(-0,53 \le Z \le 2,46) =$$
$$= P(Z \le 2,46) - P(Z \le -0,53) =$$
$$= P(Z \le 2,46) - [1 - P(Z \le 0,53)] = 0,695$$

EJERCICIOS:

144. *Halla las siguientes probabilidades:*

a) $P(Z \le 0,84)$ *c)* $P(Z < 2)$

b) $P(Z < 1,5)$ *d)* $P(Z < 1,87)$

145. *Halla:*

a) $P(Z>1,3)$ d) $P(1,3<Z<1,96)$

b) $P(Z<-1,3)$ e) $P(-1,96<Z<-1,3)$

c) $P(Z>-1,3)$ f) $P(-1,96<Z<1,96)$

146. *En una distribución normal N(110, 10), calcula:*

a) $P(X>110)$

b) $P(110<X<120)$

c) $P(X<130)$

147. *Calcula el valor de k en cada caso:*

a) $P(Z\le k)=0,719$ b) $P(Z<k)=0,8997$ c) $P(Z<k)=0,5040$

GeoGebra y Wolfram|Alpha

Distribución de probabilidad normal
Autor: Zulma Elizabeth Zamudio
Tema: Probabilidad
https://www.geogebra.org/m/mymugmwr

Wolfram|Alpha Widgets
Cálculo de probabilidades: distribución normal
https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=36e1bfaccafd20fc4b1619f84d2f9eac

PROBLEMAS:

148. *En un centro hay 500 alumnos cuyas estaturas se distribuyen según la curva normal, de media 170 cm y desviación típica 8 cm.*

a) ¿Cuántos alumnos tienen su estatura comprendida entre 162 y 178 cm?
b) ¿Cuántos medirán más de 186 cm?

149. *Una máquina realiza piezas de precisión con un diámetro medio de 8 mm y una desviación de 0,5 mm. Suponiendo que la distribución es normal, calcula la probabilidad de que una pieza tomada al azar tenga un diámetro:*

a) Mayor que 8,5 mm.
b) Menor que 7,5 mm.
c) Comprendido entre 7 y 9 mm.

150. *Para aprobar un examen de ingreso en una escuela, se necesita obtener 50 puntos o más. Por experiencia de años anteriores, sabemos que la distribución de puntos obtenidos por los alumnos es normal, con media 55 puntos y desviación típica 10.*

a) ¿Qué probabilidad hay de que un alumno apruebe?
b) Si se presentan al examen 400 alumnos, ¿cuántos cabe esperar que ingresen en esa escuela?

151. *En una ciudad, las temperaturas máximas diarias durante el mes de julio se distribuyen normalmente con una media de 26 °C y una desviación típica de* $4\ °\mathrm{C}$. *¿Cuántos días se puede esperar que tengan una temperatura máxima comprendida entre 22 °C y 28 °C?*

6. APROXIMACIÓN DE LA BINOMIAL POR LA NORMAL

La variable aleatoria $X \longrightarrow \mathrm{B}(n,p)$ la aproximaremos por una normal, cuando

$$\boxed{\begin{array}{c} np>5 \ \text{ y } \ p>0,05 \\ X \longrightarrow \mathrm{B}(n,p) \simeq N\left(np, \sqrt{npq}\right) \longleftarrow X' \end{array}}$$

Ahora bien, como estamos aproximando una distribución discreta por una continua, hay que hacer un ajuste que se denomina ***corrección de Yates***:

$$P(X=k)=P(k-0,5\le X'\le k+0,5)$$
$$P(X\le k)=P(X'\le k+0,5)$$
$$P(X<k)=P(X'<k-0,5)$$
$$P(X\ge k)=P(X'\ge k-0,5)$$
$$P(X>k)=P(X'>k+0,5)$$

EJEMPLO:

El 2 % de los tornillos fabricados por una máquina son defectuosos. Si se estudia un lote de 2000 tornillos, ¿cuál es la probabilidad de que haya menos de 50 tornillos defectuosos?

Si X = número de tornillos defectuosos, se tiene que $X \longrightarrow \mathrm{B}(200\ ,\ 0{,}02)$ y por tanto aproximamos X por $X' \longrightarrow N\left(2000\cdot 0,02\ ,\ \sqrt{2000\cdot 0,02\cdot 0,98}\right)=N(40\ ,\ 6{,}26)$.

Así,

$$P(X<50)=P(X'<50-0,5)=P(X'<49,5)=P\left(Z<\frac{49,5-40}{6,26}\right)=P(Z<1,52)=0,9357$$

Es decir, la probabilidad de que en el lote hay menos de 50 tornillos defectuosos es del 93,57 %.

Ejercicios de Selectividad

7. GEOGEBRA

(1) Matemáticas II, 2º bachillerato. Tema 14: Probabilidad
Autor: José M. Melián
Tema: Matemática

https://www.geogebra.org/m/hk8zhfnx#chapter/357934

(2) Matemáticas II, 2º bachillerato. Tema 15: Estadística
Autor: José M. Melián
Tema: Matemática

https://www.geogebra.org/m/hk8zhfnx#chapter/357938

(3) Estadística y Probabilidad. Actividades para el aula.
Autor: Rafael Pérez Laserna
Tema: Probabilidad, Estadística
https://www.geogebra.org/m/nuqcczxm#chapter/328118

(4) Relación entre la Distribución Binomial y la Normal.
Autor: Rafael Pérez Laserna
Tema: Distribución binomial
https://www.geogebra.org/m/nuqcczxm#material/gzqy9pqe

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

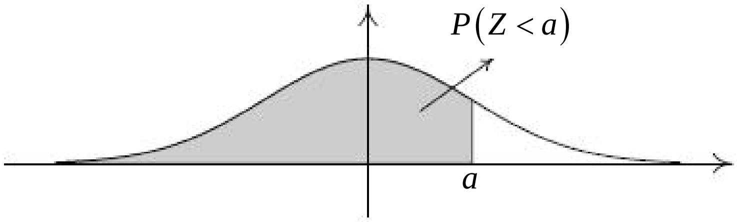
Probabilidad de obtener k éxitos
$X \rightarrow \mathrm{B}(n, p)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n \ r	p	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	1/3	.35	.40	.45	.49	.50
2	0	.9801	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4444	.4225	.3600	.3025	.2601	.2500
	1	.0198	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4444	.4550	.4800	.4950	.4998	.5000
	2	.0001	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1111	.1225	.1600	.2025	.2401	.2500
3	0	.9703	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2963	.2746	.2160	.1664	.1327	.1250
	1	.0294	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4444	.4436	.4320	.4084	.3823	.3750
	2	.0003	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890.	.2222	.2389	.2880	.3341	3674	.3750
	3	.0000	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0370	.0429	.0640	.0911	.1176	.1250
4	0	.9606	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1975	.1785	.1296	.0915	.0677	.0625
	1	.0388	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3951	.3845	.3456	.2995	.2600	.2500
	2	.0006	.0135	.0486	.0975	.1636	.2109	.2646	.2963	.3105	.3456	.3675	.3747	.3750
	3	.0000	.0005	.0036	.0115	.0256	.4609	.0756	.0988	.1115	.1536	.2005	.2400	.2500
	4	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0123	.0150	.0256	.0410	.0576	.0625
5	0	.9510	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1317	.1160	.0778	.0503	.0345	.0312
	1	.0480	.2036	.3280	.3915	.4096	.3855	.3602	.3292	.3124	.2592	.2059	.1657	.1562
	2	.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3292	.3364	.3456	.3369	.3185	.3125
	3	.0000	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1646	.1811	.2304	.2757	.3060	.3125
	4	.0000	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0412	.0488	.0768	.1128	.1470	.1562
	5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0041	.0053	.0102	.0185	.0283	.0312
6	0	.9415	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0878	.0754	.0467	.0277	.0176	.0156
	1	.0571	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2634	.2437	.1866	.1359	.1014	.0938
	2	.0014	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3292	.3280	.3110	.2780	.2437	.2344
	3	.0000	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2195	.2355	.2765	.3032	.3121	.3125
	4	.0000	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0823	.0951	.1382	.1861	.2249	.2344
	5	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0165	.0205	.0369	.0609	.0864	.0938
	6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0014	.0018	.0041	.0083	.0139	.0156
7	0	.9321	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0585	.0490	.0280	.0152	.0090	.0078
	1	.0659	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.2048	.1848	.1306	.0872	.0603	.0574
	2	.0020	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.3073	.2985	.2613	.2140	.1740	.1641
	3	.0000	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2561	.2679	.2903	.2918	.2786	.2734
	4	.0000	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1280	.1442	.1935	.2388	.2676	.2734
	5	.0000	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0384	.0466	.0774	.1172	.1543	.1641
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0064	.0084	.0172	.0320	.0494	.0547
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0006	.0016	.0037	.0068	.0078
8	0	.9227	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0390	.0319	.0168	.0084	.0046	.0039
	1	.0746	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1561	.1373	.0896	.0548	.0352	.0312
	2	.0026	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2731	.2587	.2090	.1569	.1183	.1094
	3	.0001	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2731	.2786	.2787	.2568	.2273	.2188
	4	.0000	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1707	.1875	.2322	.2627	.2730	.2734
	5	.0000	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0683	.0808	.1239	.1719	.2098	.2188
	6	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0171	.0217	.0413	.0703	.1008	.1094
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0024	.0033	.0079	.0164	.0277	.0312
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0002	.0007	.0017	.0033	.0039

	p	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	1/3	.35	.40	.45	.49	.50
n	r													
9	0	.9135	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0260	.0207	.0101	.0046	.0023	.0020
	1	.0830	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1171	.1004	.0605	.0339	.0202	.0176
	2	.0034	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2688	.2341	.2162	.1612	.1110	.0776	.0703
	3	.0001	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2731	.2716	.2508	.2119	.1739	.1641
	4	.0000	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2048	.2194	.2508	.2600	.2506	.2461
	5	.0000	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1024	.1181	.1672	.2128	.2408	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0341	.0424	.0743	.1160	.1542	.1641
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0073	.0098	.0212	.0407	.0635	.0703
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0009	.0013	.0035	.0083	.0153	.0176
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0003	.0008	.0016	.0020
10	0	.9044	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0173	.0135	.0060	.0025	.0012	.0010
	1	.0914	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0867	.0725	.0403	.0207	.0114	.0098
	2	.0042	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1951	.1757	.1209	.0763	.0495	.0439
	3	.0001	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2601	.2522	.2150	.1665	.1267	.1172
	4	.0000	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2276	.2377	.2508	.2384	.2130	.2051
	5	.0000	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1366	.1536	.2007	.2340	.2456	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0596	.0689	.1115	.1596	.1966	.2051
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0163	.0212	.0425	.0746	.1080	.1172
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0030	.0043	.0106	.0229	.0389	.0439
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0005	.0016	.0042	.0083	.0098
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0010

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.500000	0.503989	0.507978	0.511966	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555670	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345
0.2	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092
0.3	0.617911	0.621720	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.4	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933
0.5	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.8	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802337	0.805105	0.807850	0.810570	0.813267
0.9	0.815940	0.818589	0.821214	0.823814	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1.0	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.1	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.879000	0.881000	0.882977
1.2	0.884930	0.886861	0.888768	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.3	0.903200	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.4	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.5	0.933193	0.934478	0.935745	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083
1.6	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.7	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959070	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273
1.8	0.964070	0.964852	0.965620	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621
1.9	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705
2.0	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691
2.1	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738
2.2	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.3	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576
2.4	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.5	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201
2.6	0.995339	0.995473	0.995604	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427
2.7	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365
2.8	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074
2.9	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605
3.0	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999
3.1	0.999032	0.999065	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.2	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.3	0.999517	0.999534	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999651
3.4	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999758
3.5	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999822	0.999828	0.999835
3.6	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999888
3.7	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999925
3.8	0.999928	0.999931	0.999933	0.999936	0.999938	0.999941	0.999943	0.999946	0.999948	0.999950
3.9	0.999952	0.999954	0.999956	0.999958	0.999959	0.999961	0.999963	0.999964	0.999966	0.999967
4.0	0.999968	0.999970	0.999971	0.999972	0.999973	0.999974	0.999975	0.999976	0.999977	0.999978