1. 问题描述

笔记本:	算法分析		
创建时间:	2021/6/14 13:40	**更新时间:**	2021/6/14 15:37
作者:	134exetj717		
URL:	https://www.cnblogs.com/RB26DETT/p/10982687.html		

1. 问题描述

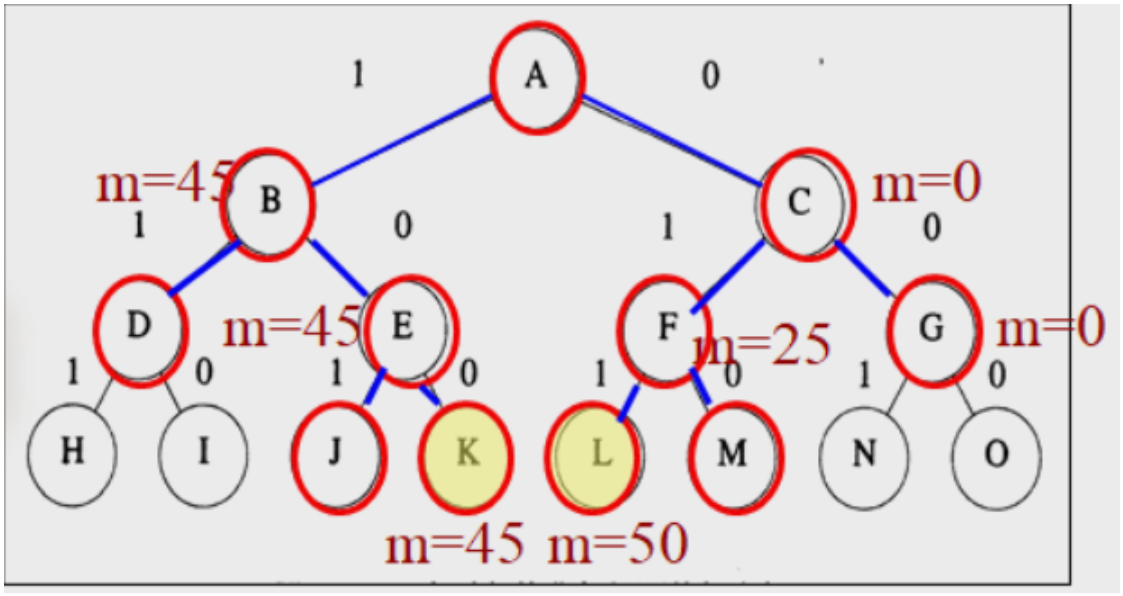
设有n个物体和一个背包,物体i的重量为wi价值为pi ,背包的载荷为M, 若将物体i（1<= i <=n）装入背包,则有价值为pi . 目标是找到一个方案, 使得能放入背包的物体总价值最高.

设N=3, W=(16,15,15), P=(45,25,25), C=30（背包容量）

2. 队列式分支限界法

可以通过画分支限界法状态空间树的搜索图来理解具体思想和流程

每一层按顺序对应一个物品放入背包（1）还是不放入背包（0）



步骤:

① 用一个队列存储活结点表，初始为空

② A为当前扩展结点，其儿子结点B和C均为可行结点，将其按从左到右顺序加入活结点队列，并舍弃A。

③ 按FIFO原则，下一扩展结点为B，其儿子结点D不可行，舍弃；E可行，加入。舍弃B

④ C为当前扩展结点，儿子结点F、G均为可行结点，加入活结点表，舍弃C

⑤ 扩展结点E的儿子结点J不可行而舍弃；K为可行的叶结点，是问题的一个可行解，价值为45

⑥ 当前活结点队列的队首为F, 儿子结点L、M为可行叶结点，价值为50、25

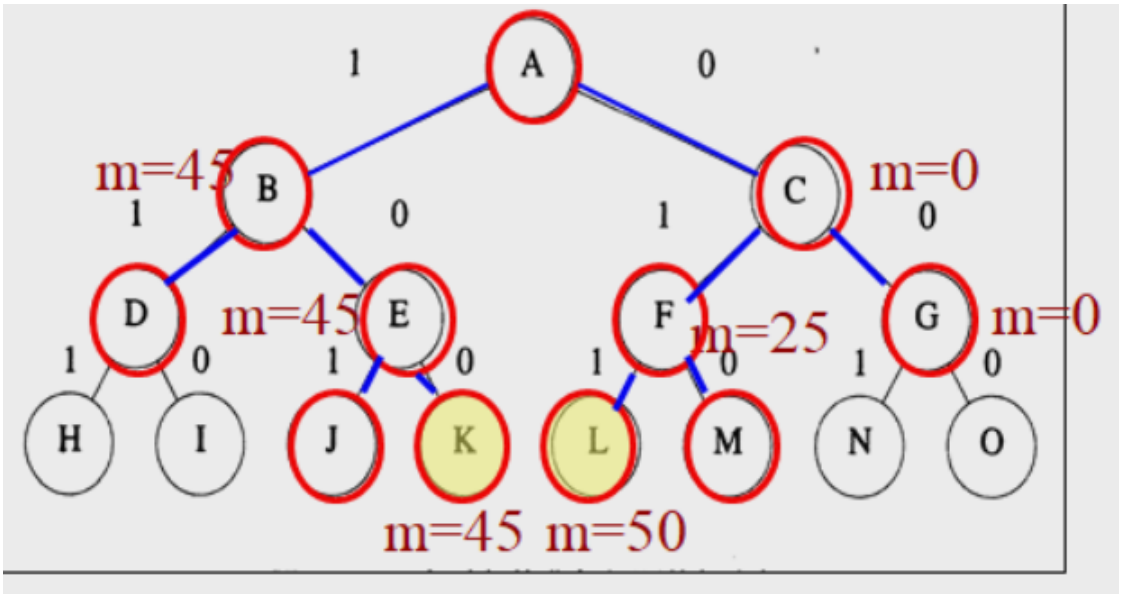
⑦ G为最后一个扩展结点，儿子结点N、O均为可行叶结点，其价值为25和0

⑧ 活结点队列为空，算法结束，其最优值为50

注：活结点就是不可再进行扩展的节点，也就是两个儿子还没有全部生成的节点

3. 优先队列式分支限界法

3.1 以活结点价值为优先级准则



步骤：

① 用一个极大堆表示活结点表的优先队列，其优先级定义为活结点所获得的价值。初始为空。

② 由A开始搜索解空间树，其儿子结点B、C为可行结点，加入堆中，舍弃A。

③ B获得价值45，C为0. B为堆中价值最大元素，并成为下一扩展结点。

④ B的儿子结点D是不可行结点，舍弃。E是可行结点，加入到堆中。舍弃B。

⑤ E的价值为45，是堆中最大元素，为当前扩展结点。

⑥ E的儿子J是不可行叶结点，舍弃。K是可行叶结点，为问题的一个可行解价值为45。

⑦ 继续扩展堆中唯一活结点C，直至存储活结点的堆为空，算法结束。

⑧ 算法搜索得到最优值为50，最优解为从根结点A到叶结点L的路径（0，1，1）。

3.2 以限界函数为优先级准则

例：0/1背包问题。假设有4个物品，其重量分别为(4, 7, 5, 3)，价值分别为(40, 42, 25, 12)，背包容量W=10。首先，将给定物品按单位重量价值从大到小排序，结果如下：

物品	重量(w)	价值(v)	价值/重量(v/w)
1	4	40	10
2	7	42	6
3	5	25	5
4	3	12	4

应用贪心法求得近似解为(1, 0, 0, 0)，获得的价值为40，这可以作为0/1背包问题的下界。

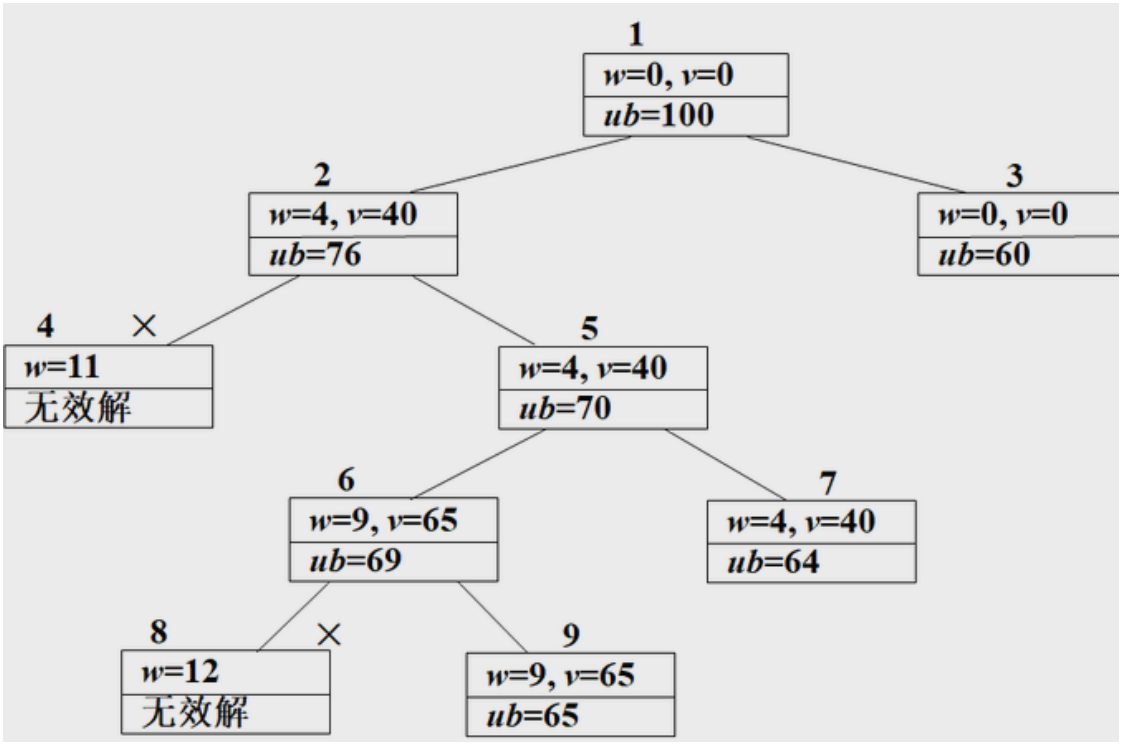
如何求得0/1背包问题的一个合理的上界呢？考虑最好情况，背包中装入的全部是第1个物品且可以将背包装满，则可以得到一个非常简单的上界的计算方法：

b=W×(v1/w1)=10×10=100。于是，得到了目标函数的界[40, 100]。

所以我们定义限界函数为：

$$ub = v + (W - w) \times (v_{i+1} / w_{i+1})$$

再来画状态空间树的搜索图：



步骤：

① 在根结点1，没有将任何物品装入背包，因此，背包的重量和获得的价值均为0，根据限界函数计算结点1的目标函数值为10×10=100；

② 在结点2，将物品1装入背包，因此，背包的重量为4，获得的价值为40，目标函数值为40 + (10-4)×6=76，将结点2加入待处理结点表PT中；在结点3，没有将物品1装入背包，因此，背包的重量和获得的价值仍为0，目标函数值为10×6＝60，将结点3加入表PT中；

③ 在表PT中选取目标函数值取得极大的结点2优先进行搜索；

④ 在结点4，将物品2装入背包，因此，背包的重量为11，不满足约束条件，将结点4丢弃；在结点5，没有将物品2装入背包，因此，背包的重量和获得的价值与结点2相同，目标函数值为40 + (10-4)×5=70，将结点5加入表PT中；

⑤ 在表PT中选取目标函数值取得极大的结点5优先进行搜索；

⑥ 在结点6，将物品3装入背包，因此，背包的重量为9，获得的价值为65，目标函数值为65 + (10-9)×4=69，将结点6加入表PT中；在结点7，没有将物品3装入背包，因此，背包的重量和获得的价值与结点5相同，目标函数值为40 + (10-4)×4＝64，将结点6加入表PT中；

⑦ 在表PT中选取目标函数值取得极大的结点6优先进行搜索；

⑧ 在结点8，将物品4装入背包，因此，背包的重量为12，不满足约束条件，将结点8丢弃；在结点9，没有将物品4装入背包，因此，背包的重量和获得的价值与结点6相同，目标函数值为65；

⑨ 由于结点9是叶子结点，同时结点9的目标函数值是表PT中的极大值，所以，结点9对应的解即是问题的最优解，搜索结束。

总结：

★ 剪枝函数给出每个可行结点相应的子树可能获得的最大价值的上界。

★ 如这个上界不会比当前最优值更大，则可以剪去相应的子树。

★ 也可将上界函数确定的每个结点的上界值作为优先级，以该优先级的非增序抽取当前扩展结点。由此可快速获得最优解。