浙江大学

课程名称 机器人学

任课教师 熊蓉、刘山、周春琳

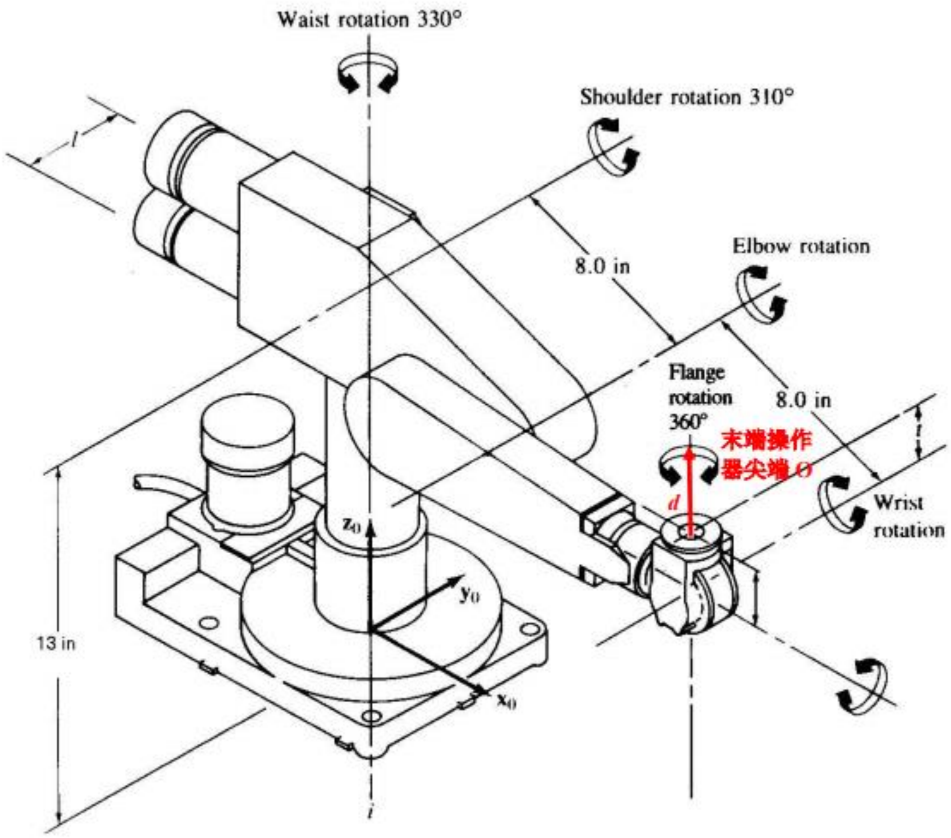
姓名学号 王宇琪 3160103829

所在学院 控制科学与工程学院

作业题目 机械臂的运动规划与仿真

机器人学——大作业题目 1

机械臂图示：



作业内容：

如图所示操作臂，在机械臂末端有一末端操作器，其长度为 d，尖端为 O，请规划机械臂各关节的轨迹，使其绕末端操作器尖端 O 定点转动，即机械臂末端操作器尖端位置不变，机械臂末端姿态变化，并利用 matlab robotics toolbox 进行验证和演示。

即需完成当末端点姿态变化时，相应各关节变量的位置、速度、加速度的轨迹规划。

作业要求：

1.作业中参数 l 和 d 的具体值请同学自行设定。

2.需提供完整的报告文档，内容包括：

①问题分析

②算法设计与求解

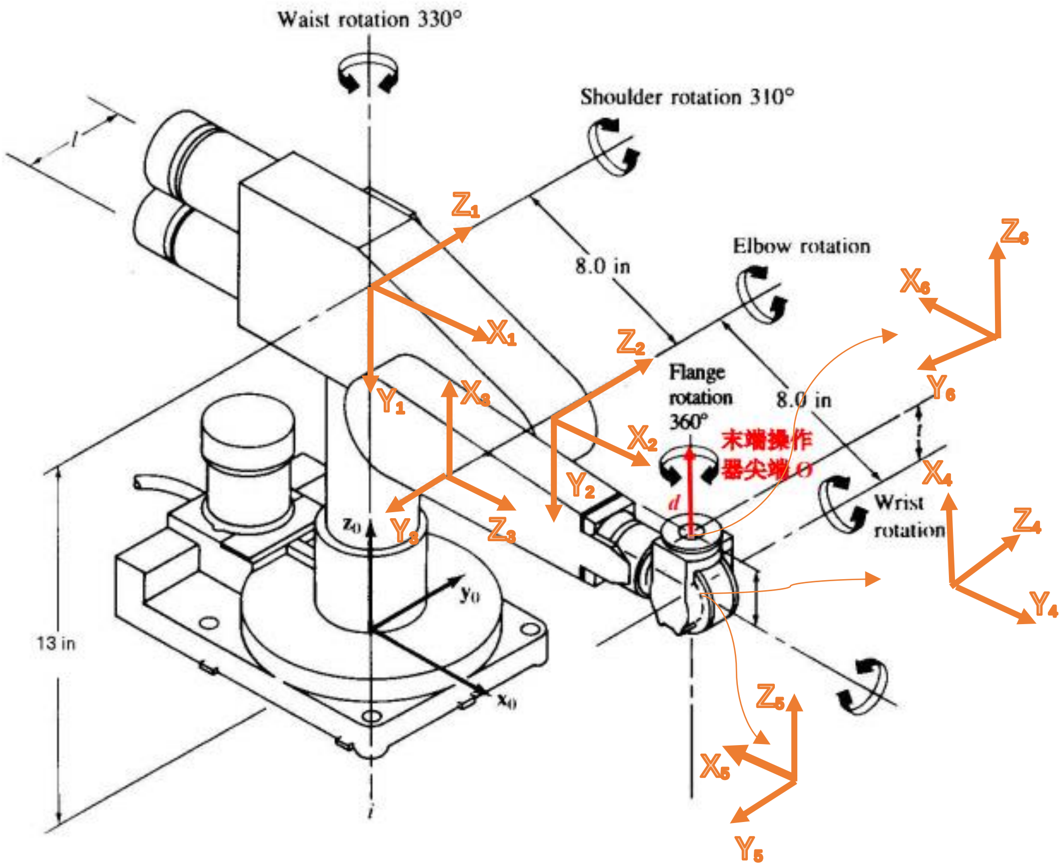
③仿真及结果分析

3.报告文档要求层次清晰，格式规范

4.提交 MATLAB 仿真的源程序，程序需要有注释

一、问题分析

1.建立 D-H 参数表



1.1 建系说明

可以看到机械臂总共有 6 个运动关节，为 **RRRRRR** 型的机械臂。这个机械臂有点类似于 PUMA-560 这款工业机器人，是由一系列刚性连杆通过一系列柔性关节交替连接而成的开式链。机械臂共有 6 个自由度，大臂部分包含腰关节、肩关节、肘关节三个关节量，而末端的腕关节有 3 个旋转量，末端操作器是一个长度为 d 的工具。

采用标准 D-H 建系，建立Z_0~$Z_6$7个坐标系。这里采用标准 D-H 建系的原因主要是仿真时标准的机械臂更加美观，方便仿真。如上图所示，{0}为基准坐标系，{1}为腰部旋转关节，{2}为肩部旋转关节，{3}为肘部旋转关节，{4}为腕部旋转关节，{5}为腕部旋转关节，{6}为末端关节坐标系。

1.2 标准 DH 参数建系规则

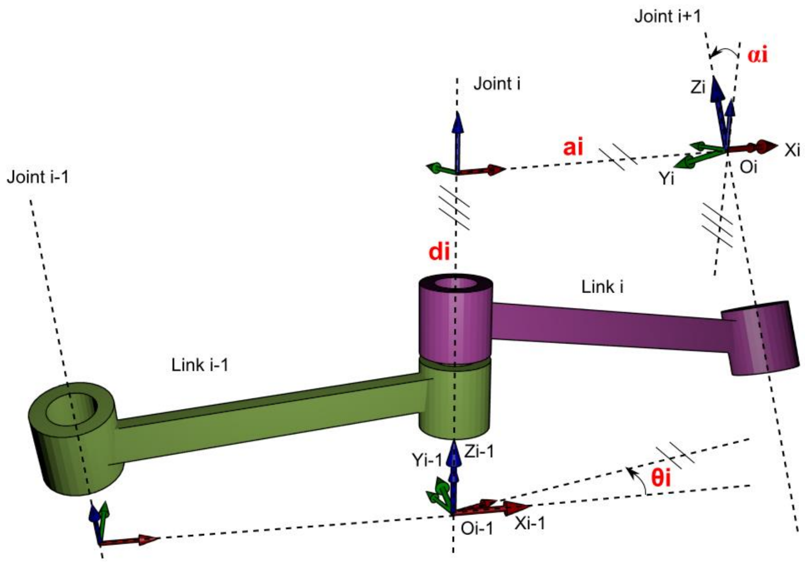
1.所有关节，均用 z 轴表示。如果是关节是旋转的，z 轴位于按右手定则选装的方向，如果关节是滑动的，z 轴为沿运动的方向。

2.在每一种情况下，关节 i 处的 z 轴（以及该关节的本地参考坐标系）的下标为 i-1。

3.在关节轴不平行或相交的时候，两条 z 轴之间总有一条最短的公垂线。通常在公垂线方向上定义 x 轴，α_i表示Z_{i-1}到Z_i之间的公垂线。

4.如果两个关节的 z 轴平行，选取与前一关节的公垂线共线的一条公垂线可简化模型。如果相邻的两个 z 轴是相交的，那么选取当前 z 轴叉乘前一 z 轴的方向作为 x 轴。

1.3 标准 DH 建系步骤



θ:表示绕 z 轴的旋转角

d:在 z 轴上两条相邻的公垂线之间的距离

a:表示关节间公垂线的长度

α:两个相邻 z 轴之间的角度

1.绕Z_{i-1}轴旋转θ_i，它使得x_{i-1}和x_i互相平行。

2.沿Z_{i-1}轴平移d_i距离，使得x_{i-1}和x_i共线。

3.沿x_i平移a_i距离，使得x_{i-1}和x_i的原点重合。

4.将Z_{i-1}轴绕x_i旋转α_i，使得Z_{i-1}轴与Z_i轴对准。

数学上通过右乘四个运动的四个矩阵就可以得到变换矩阵${}^{i-1}_{i}T$

$$ {}^{i-1}_{i}T = Rot(z_{i-1},\theta_i) \times Trans(z_{i-1},d_i) \times Trans(x_i,a_i) \times Rot(x_i,\alpha_i) $$

$$ {}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

1.4 标准 DH 参数表

D-H 参数表

关节 i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	-90°	0	13	$\boldsymbol{\theta_1}$
2	0°	8	0	$\boldsymbol{\theta_2}$
3	-90°	0	$-l$	$\boldsymbol{\theta_3}$
4	90°	0	8	$\boldsymbol{\theta_4}$
5	-90°	0	0	$\boldsymbol{\theta_5}$
6	0°	0	d	$\boldsymbol{\theta_6}$

仿真时参数选择：

$\boldsymbol{l}$	d	$\boldsymbol{\theta_1}$	$\boldsymbol{\theta_2}$
5	6	0-330°	0-310°
θ_3	$\boldsymbol{\theta_4}$	$\boldsymbol{\theta_5}$	$\boldsymbol{\theta_6}$
0-360°	0-360°	0-360°	0-360°

二、算法设计与求解

1.逆运动学求解

根据对应的齐次变换公式：

$$ {}^{i-1}_{i}T=\begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

将上表的 DH 参数代入可求得以下六个齐次变换矩阵：

$$ {}^{0}_{1}T=\begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^{1}_{2}T=\begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 8c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 8s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}_{3}T=\begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & -s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & 0 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^{3}_{4}T=\begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & -c\theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{4}_{5}T=\begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & -s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & c\theta_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^{5}_{6}T=\begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

思路分析：

对于本问题，题目要求**末端位置不变**，需要求解**末端姿态变化**时的对应的关节变量。那么对于本问题，首先需要给定的输入是末端的位置P_x、P_y、P_z。

其次需要给出一定规律变化的末端姿态，由于任意的姿态都可以用三个欧拉角表示，因此考虑输入欧拉角α、β、γ，选择 Z-Y-X 的欧拉角组合方式控制末端姿态。

① 求解腕部坐标

$$ {}^{A}_{B}R_{Z'Y'X'}=R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)=\begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\alpha & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} $$

$$ =\begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} $$

因此将 R 与末端位置P_x、P_y、P_z联立起来后可以得到末端的齐次变换矩阵为：

$$ {}^{0}_{6}T=\begin{bmatrix} n_x & O_x & a_x & p_x \\ n_y & O_y & a_y & p_y \\ n_z & O_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

由机械臂的构型可以知道末端的三个坐标轴是相交的，考虑腕部的坐标位置与末端位置的关系。对于腕部的齐次变换矩阵为：

$$ {}^{0}_{4}T={}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{2}T\,{}^{2}_{3}T\,{}^{3}_{4}T=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_{ax} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_{ay} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_{az} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

可以知道它们存在如下的关系：

$$ p_{ax}=p_x-d_6a_x $$
$$ p_{ay}=p_y-d_6a_y $$

$$p_{az} = p_z - d_6 a_z$$

这里d_6是已知的，因此当末端位置姿态定了的时候，即可解出腕部的位置坐标。

② **求解$\boldsymbol{\theta_1}$、$\boldsymbol{\theta_2}$、$\boldsymbol{\theta_3}$**

写出腕部的齐次变换矩阵可得：

$${}^0_4T = {}^0_1T\,{}^1_2T\,{}^2_3T\,{}^3_4T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_{ax} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_{ay} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_{az} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$r_{11} = s\theta_1 s\theta_4 + c\theta_4(c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3)$

$r_{12} = -c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - c\theta_1 c\theta_3 s\theta_2$

$r_{13} = s\theta_4(c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3) - c\theta_4 s\theta_1$

$r_{21} = c\theta_4(c\theta_2 c\theta_3 s\theta_1 - s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3) - c\theta_1 s\theta_4$

$r_{22} = -c\theta_2 s\theta_1 s\theta_3 - c\theta_3 s\theta_1 s\theta_2$

$r_{23} = s\theta_4(c\theta_2 c\theta_3 s\theta_1 - s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3) + c\theta_1 c\theta_4$

$r_{31} = -c\theta_4(c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_3 s\theta_2)$

$r_{32} = s\theta_2 s\theta_3 - c\theta_2 c\theta_3$

$r_{33} = -s\theta_4(c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_3 s\theta_2)$

$P_{ax} = 5s\theta_1 + 8c\theta_1 c\theta_2 - 8c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - 8c\theta_1 c\theta_3 s\theta_2$

$P_{ay} = -5c\theta_1 + 8s\theta_1 c\theta_2 - 8c\theta_2 s\theta_1 s\theta_3 - 8c\theta_3 s\theta_1 s\theta_2$

$P_{az} = 13 - 8s\theta_2 - 8c\theta_2 c\theta_3 + 8s\theta_2 s\theta_3$

经过观察可以发现腕部位置是与$\boldsymbol{\theta_4}$、$\boldsymbol{\theta_5}$、$\boldsymbol{\theta_6}$无关的，因此可以通过腕部的位置求解出此时的$\boldsymbol{\theta_1}$、$\boldsymbol{\theta_2}$、$\boldsymbol{\theta_3}$的值。

$$({}^0_1T)^{-1}\,{}^0_4T = {}^1_2T\,{}^2_3T\,{}^3_4T$$

$$P_{ax} = d_4 c_1 s_{23} - d_3 s_1 + a_1 c_1 + a_2 c_1 c_2$$

$$P_{ay} = d_4 s_1 s_{23} + d_3 s_1 + a_1 s_1 + a_2 s_1 c_2$$

$$P_{az} = d_4 c_{23} - a_2 s_2$$

比较矩阵两边对应项可得$\boldsymbol{-s_1 P_{ax} + c_1 P_{ay} = d_3}$

据此可求得：

$$\boldsymbol{\theta_1 = Atan2(P_{ay}, P_{ax}) - Atan2\left(d_3, \pm\sqrt{{P_{ax}}^2 + {P_{ay}}^2 - {d_3}^2}\right)}$$

这里可以看到$\boldsymbol{\theta_1}$是有两组解的。

接下来求解$\boldsymbol{\theta_3}$，计算$\mathrm{L} = {P_{ax}}^2 + {P_{ay}}^2 + {P_{az}}^2$

$$\mathrm{L} = 322 - 208s\theta_2 - 208c\theta_2 c\theta_3 + 208s\theta_2 s\theta_3 - 128s\theta_3$$

发现通过与P_{az}的消元恰好可以解出$s\theta_3$

$$s\theta_3 = \frac{26P_{az} - 16 - L}{128}$$

$$\boldsymbol{\theta_3 = arcsin\left(\frac{26P_{az} - 16 - L}{128}\right)}$$

由于 arcsinx 函数是定义在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$上的，因此它只解出了一个解，但是实际上，**$\boldsymbol{\theta_3}$也是有两组解的。**

如果仔细看这个式子还可以发现，因为$\sin x \in [-1,1]$，所以

$$-1 \le \frac{26P_{az} - 16 - L}{128} \le 1$$

这就说明机械臂可达的工作空间内，并非都是灵巧的工作空间，即有的位置下，很多姿

态都是不可行的，因此在后续的数值分析中会更深入地探讨有关工作空间的问题。

接下来根据求得的四组$(\boldsymbol{\theta_1},\boldsymbol{\theta_3})$，来求解$\boldsymbol{\theta_2}$。

$$P_{ax}=5s\theta_1+8c\theta_1c\theta_2-8c\theta_1c\theta_2s\theta_3-8c\theta_1c\theta_3s\theta_2$$
$$P_{ay}=-5c\theta_1+8s\theta_1c\theta_2-8c\theta_2s\theta_1s\theta_3-8c\theta_3s\theta_1s\theta_2$$

将求得的(θ_1,θ_3)代入有:

$$(8-8s\theta_3)s\theta_2+8c\theta_3c\theta_2=13-P_{az}$$
$$(-8c\theta_1c\theta_3)s\theta_2+(8c\theta_1-8c\theta_1s\theta_3)c\theta_2=P_{ax}-5s\theta_1$$

因此**可解出四个**

$$\boldsymbol{\theta_2}=\boldsymbol{Atan2}\left(\frac{(13-P_{az})(8c\theta_1-8c\theta_1s\theta_3)-(P_{ax}-5s\theta_1)8c\theta_3}{(8-8s\theta_3)(8c\theta_1-8c\theta_1s\theta_3)+64c\theta_3c\theta_1c\theta_3},\frac{(13-P_{az})(-8c\theta_1c\theta_3)-(P_{ax}-5s\theta_1)(8-8s\theta_3)}{64c\theta_3c\theta_1c\theta_3-(8-8s\theta_3)(8c\theta_1-8c\theta_1s\theta_3)}\right)$$

通常连杆的非零参数越多，到达某一特定目标的方式也越多。以一个具有 6 个旋转关节的操作臂为例，就像本题的机械臂。

$\boldsymbol{a_i}$	**解的个数**
$a_1=a_3=a_5=0$	≤4
$a_3=a_5=0$	≤8
$a_3=0$	≤16
所有$a_i\neq 0$	≤16

因此可知理论上，本题的解的个数≤4。该结论会在后续的数值分析中验证。

选择一组解$(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$代入前三个其次变换矩阵后可以据此继续求解出$\boldsymbol{\theta_4}$、$\boldsymbol{\theta_5}$、$\boldsymbol{\theta_6}$

③ **求解**$\boldsymbol{\theta_4}$、$\boldsymbol{\theta_5}$、$\boldsymbol{\theta_6}$

$${}^0_6R={}^0_3R\,{}^3_6R$$
$${}^3_6R={}^0_3R^{-1}\,{}^0_6R$$

因为此时末端的姿态${}^0_6R$和$(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$都是已知的，因此等式右边已知，可以以下列矩阵代替：

$$\begin{bmatrix} c_4c_5c_6-s_4s_6 & -c_6s_4-c_4c_5s_6 & -c_4s_5 \\ c_4s_6+c_5c_6s_4 & c_4c_6-c_5s_4s_6 & -s_4s_5 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n_{wx} & o_{wx} & a_{wx} \\ n_{wy} & o_{wy} & a_{wy} \\ n_{wz} & o_{wz} & a_{wz} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta_5}=\boldsymbol{Atan2}\left(\pm\sqrt{\boldsymbol{a_{wx}}^2+\boldsymbol{a_{wy}}^2},\boldsymbol{a_{wz}}\right)$$

且当$\boldsymbol{\theta_5}\neq\boldsymbol{0}$**时**

$$\boldsymbol{\theta_4}=\boldsymbol{Atan2}\left(\frac{-\boldsymbol{a_{wy}}}{\boldsymbol{s_5}},\frac{-\boldsymbol{a_{wx}}}{\boldsymbol{s_5}}\right)$$

$$\boldsymbol{\theta_6}=\boldsymbol{Atan2}\left(\frac{-\boldsymbol{o_{wz}}}{\boldsymbol{s_5}},\frac{\boldsymbol{n_{wz}}}{\boldsymbol{s_5}}\right)$$

到此完成了逆运动学的求解过程，即给定一组末端位置后，同时给出任意的姿态，都可以通过上述闭式求解出对应的一组关节变量$\mathbf{q}=[\boldsymbol{\theta_1}\quad\boldsymbol{\theta_2}\quad\boldsymbol{\theta_3}\quad\boldsymbol{\theta_4}\quad\boldsymbol{\theta_5}\quad\boldsymbol{\theta_6}]$。

2.轨迹规划

2.1 理论分析

之前的工作已经求解出了当给定末端位置与姿态后对应的关节变量

$$\mathbf{q}_{init}=[\boldsymbol{\theta_1}\quad\boldsymbol{\theta_2}\quad\boldsymbol{\theta_3}\quad\boldsymbol{\theta_4}\quad\boldsymbol{\theta_5}\quad\boldsymbol{\theta_6}]$$

假设末端姿态绕某个轴旋转一定的角度：

$${}^0_6T\xrightarrow{\alpha}{}^0_6T'$$

在这个旋转过程中均匀取采样点，用**微元法**的思想即假设每个时间转动一个非常小的

Δα，在每个采样点通过之前的逆运动学求解出对应的：

$$\mathbf{q}_{curent} = [\boldsymbol{\theta_1}' \quad \boldsymbol{\theta_2}' \quad \boldsymbol{\theta_3}' \quad \boldsymbol{\theta_4}' \quad \boldsymbol{\theta_5}' \quad \boldsymbol{\theta_6}']$$

通过 MATLAB 数值求解的思想，可以实现在从$\mathbf{q}_{init}$到$\mathbf{q}_{final}$得到采样点个数的解，这些解构成了这个转动过程的**解空间 W**。

接下来考虑对于机械臂的转动而言，起始的速度和末端的速度肯定不能太大，应该尽量为 0 才行，同时对于每个关节，由于关节电机驱动的局限性，它应该会存在一个最大的加速度$\boldsymbol{a}_{max}$。因此轨迹规划时需要用户输入每个关节的$\boldsymbol{a}_{max}$，本题为了简便考虑，假设机械臂的每个关节的最大加速度$\boldsymbol{a}_{max}$都是一样的。数值仿真的时候只输入一个$\boldsymbol{a}_{max}$量。

对于任意的关节 i，它存在着下列的**约束条件 T**：

$$\boldsymbol{v}_{i-init} \approx \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{v}_{i-final} \approx \mathbf{0}$$

$$-\boldsymbol{a}_{max} \le \boldsymbol{a}_{i-current} \le \boldsymbol{a}_{max}$$

那么问题就转化为了如何在当前已经得到的解空间下，根据当前输入的约束规划出一条合适的速度曲线。

由于在解空间存在着许多的数值离散解，那么这个问题就转化为了如何在解空间中选择合适的解集作为最终的规划解，**本质上是在规划每个可行解到下一个可行解的时间**。

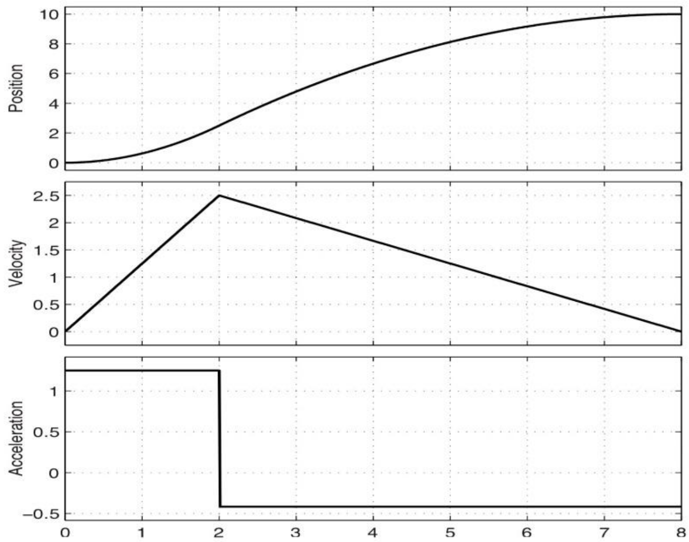
$$\mathbf{W}_{guihua} = \{\boldsymbol{w} \to \boldsymbol{T} | \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}\}$$

同时你也可以增加自己想要的约束条件，对想得到的轨迹进行规划，以上分析提供了理论的任何轨迹的规划可能，接下来讨论一种最简单的规划过程。

2.2 匀加速运动

自然界中很多简单的运动是匀加速运动，因此在这个问题中，不妨假设机械臂的每个关节都是以匀加速运动转动的。

并且考虑到对**时间因素**的控制，因此期望的关节转动规律如下图所示：



那么对于一个从 0 开始加速的关节来说，先看前半段的加速过程，假设我们均匀选取了$\Delta\mathbf{t}$的时间，那么从t_i时间到t_{i+1}这段时间内，变化的角度为：

$$t_{i+1} - t_i = \Delta\mathbf{t}$$

$$\frac{(at_i + at_{i+1})\Delta\mathbf{t}}{2} = \Delta q$$

同时假设时间间隔选取均匀，因此$t_i = \mathrm{i} * \Delta\mathbf{t}$

$$所以可得：\Delta q=\frac{a(2*i+1)\Delta t^2}{2}$$

因此在数值求解时，可以给定Δt和a，采用两重循环，i 是当前位置，j 是搜索的后续位置，当第一次满足：

$$q_j-q_i\geq\Delta q=\frac{a(2*i+1)\Delta t^2}{2}$$

将当前的q_j加入到规划的路径点之中，同时 i 的位置变到 j 的位置，重复上述操作。具体看后续的数值代码分析。

2.3 多关节规划

上述的规划方法只适用于单关节为主导的轨迹规划，**因为多关节联动时无法保证所有的关节运动规律都是类似的**。

一个简单的思想就是寻找核心关节，通过比对从起始姿态到末端姿态的变化量

$$\Delta \mathbf{q}=q_{init}-q_{final}$$

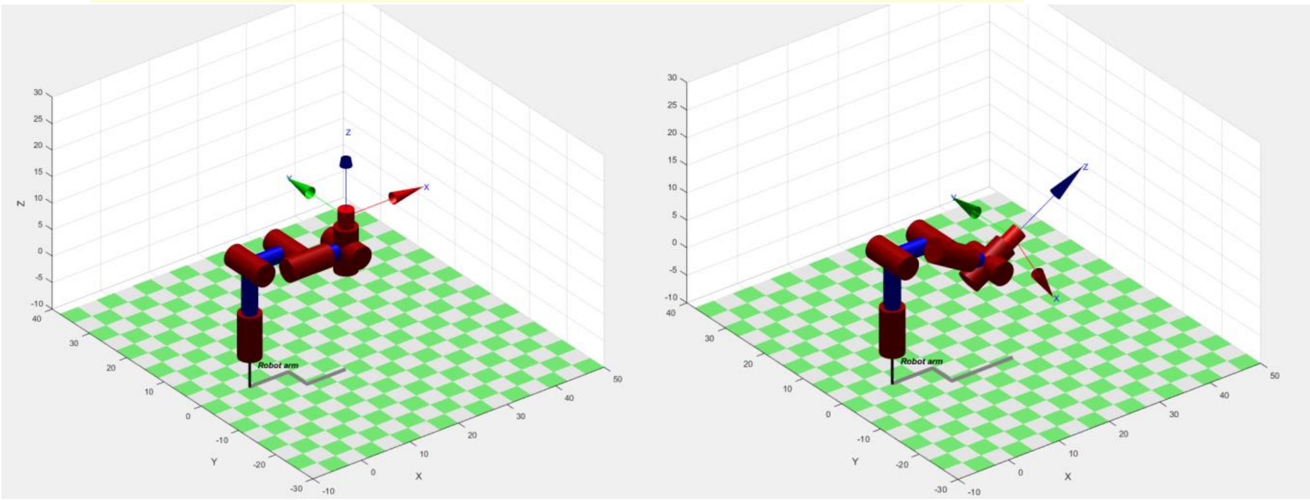
选取变化最大的关节作为核心关节来规划，期望其它关节的运动规律与该关节类似（这里的运动规律主要指加速减速的时刻），其它的关节只需加一层判断满足最大加速度的限制即可。

三、仿真及结果分析

1.机械臂的构建（DH）

实际仿真时采取下列 DH 参数在 MATLAB 的 ROBOTIC TOOLBOX 中构建机械臂：

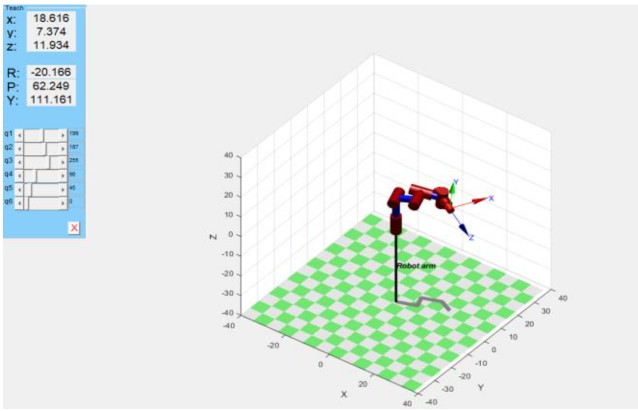
```
%DH参数表        th      d       a      alpha     type
L(1) = Link([ 0       13      0      -pi/2      0]);%旋转关节
L(2) = Link([ 0       0       8      0          0]);%旋转关节
L(3) = Link([ pi/2    -5      0      -pi/2      0]);%旋转关节
L(4) = Link([ 0       8       0      pi/2       0]);%旋转关节
L(5) = Link([ pi/2    0       0      -pi/2      0]);%旋转关节
L(6) = Link([ 0       6       0      0          0]);%旋转关节
```



$$Q_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & -\frac{\pi}{2} & \pi & \frac{\pi}{2} & 0\end{bmatrix}\qquad Q_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & -\frac{\pi}{3} & \pi & \frac{\pi}{3} & 0\end{bmatrix}$$

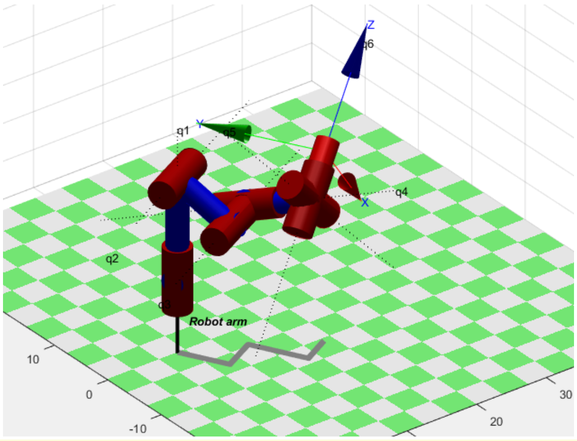
上图展示了两种初始姿态下的机械臂图像。

为了寻找一些合适的角度及末端的姿态，可以利用函数 **teach（robot）**来进行示教：



可以看到在左上角给出了末端的位置与姿态，然后可以通过左边的六个角度调节机械臂的位置。

同时在展示机械臂时有一些基本的关键字可以使用：



```
robot.plot(guihua_q(i,:),'workspace',w,'jaxes','jointdiam',1.3);
```

Workspace： 定义了机器人的工作空间，$w = [x_{min} \quad x_{max} \quad y_{min} \quad y_{max} \quad z_{min} \quad z_{max}]$。

Jaxes： 显示每个关节的轴线。

Jointdiam： 控制每个关节的半径大小。

L.qlim： 可以限定旋转量的空间区域。

2.逆运动学的求解

ROBOTIC TOOLBOX 本身自带了正运动学求解机械臂的末端齐次变化的函数以及求解逆运动学关节量的函数。

```
Qinit=[0 0 0 0 0 0];%初始关节角度
T=robot.fkine(Qinit);%机器人末端的齐次变化矩阵
q=robot.ikine(T);%根据末端姿态求取关节角
```

然而在利用逆运动求解的 ikine 时，由于数值求解，很容易出现奇异值的问题，并且对于多解的情况，它只能给出一组解的情况。

因此根据之前的分析过程，自己编写函数采取闭式求解。

本题需要给定末端的位置及姿态矩阵，以欧拉角的方式给定姿态矩阵：

```
%输入末端的位置：
final_x=15;
final_y=-8;
final_z=15;
%输入末端的姿态  采用Z-Y-X的欧拉角表示
for t=0.2:0.001:pi*3/4
theta1=0.5;
theta2=t;
theta3=0;
```

2.1 验证逆运动学求解的正确性

为了验证逆运动学求解是否正确，给定初始值先正运动学计算，再通过逆运动学求解，同时观察可能存在的多解的情况。

当给定初始**init** = [0.19　-0.26　-0.58　0.22　-0.59　0.29]时

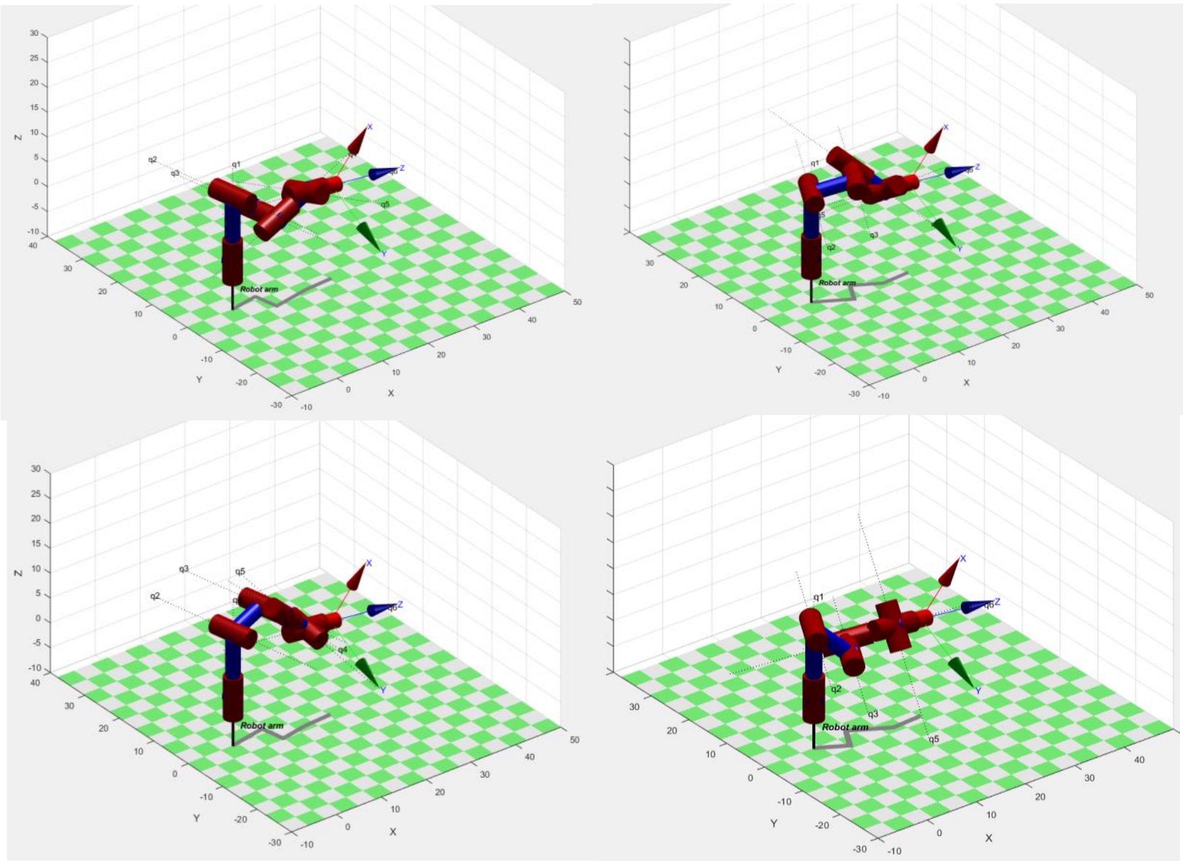
可以求得末端齐次变换矩阵为：

$$T = \begin{matrix} 0.1641 & -0.0059 & 0.9864 & 20.3 \\ -0.4296 & -0.9006 & 0.0661 & -1.928 \\ 0.8880 & -0.4346 & -0.1503 & 8.815 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

利用闭式求解可解出以下四组结果：

$$\begin{bmatrix} 0.19 & -0.26 & -0.58 & 0.22 & -0.59 & 0.29 \\ 2.63 & 2.41 & -0.58 & 0.98 & -0.70 & 2.64 \\ 2.63 & -2.88 & 3.72 & 2.26 & -0.77 & 1.08 \\ 0.19 & 0.73 & 3.72 & 2.84 & -0.43 & -2.39 \end{bmatrix}$$

利用 MATLAB 观察机械臂：



从图中可以证实这四组解的合理性，同一位置，不同的关节角度。

2.2 逆运动学求解 解空间

给定末端的位置，姿态如下：

P_x	P_y	P_z
15	-8	15
α	**β**	**γ**
0.5	t	0

注：t 从弧度 0.2 转到 2.35，间隔是 0.001

```
%定义末端的齐次变换矩阵为B
%输入末端的位置：
final_x=15;
final_y=-8;
final_z=15;
%输入末端的姿态  采用Z-Y-X的欧拉角表示
for t=0.2:0.001:pi*3/4
theta1=0.5;%绕Z轴旋转
theta2=t;%绕Y轴旋转
theta3=0;%绕X轴旋转
RZ=[cos(theta1) -sin(theta1) 0;
    sin(theta1) cos(theta1)  0;
    0           0            1];
RY=[cos(theta2) 0 sin(theta2);
    0           1          0 ;
    -sin(theta2) 0  cos(theta2)];
RX=[1  0  0;
    0  cos(theta3)  -sin(theta3);
    0  sin(theta3)  cos(theta3)];
Final_R=RZ*RY*RX;%获取到最终的旋转矩阵
B=[Final_R(1,:) final_x;
   Final_R(2,:) final_y;
   Final_R(3,:) final_z;
   0 0 0 1];%最终的齐次矩阵
```

① **求解θ_1、θ_2、θ_3**

```
%先求解 r1 r2 r3
px=T(1,4)-6*T(1,3);%腕部px
py=T(2,4)-6*T(2,3);%腕部py
pz=T(3,4)-6*T(3,3);%腕部pz
L=px^2+py^2+pz^2;%腕部距离基准点的距离平方
r1=atan2(py,px)-atan2(-5,sqrt(px^2+py^2-25));%求解r1
K=(26*pz-16-L)/128;%有关于是否姿态可达的参数
display(K);
if abs((26*pz-16-L)/128)>1
    r3=-1.57;
else
    r3=real(asin((26*pz-16-L)/128));%求解r3
end
a=real(8-8*sin(r3));
b=real(8*cos(r3));
c=real(-8*cos(r1)*cos(r3));
d=real(8*cos(r1)-8*cos(r1)*sin(r3));
e=real(13-pz);
f=real(px-5*sin(r1));
if abs(b)<0.001 || abs(c)<0.001
    r2=0;
else
    r2=atan2((e*d-f*b)/(a*d-b*c),(e*c-f*a)/(b*c-a*d));%求解r2
end
```

接下来将它们求出来的值代入对应的齐次变换矩阵计算出${}^0_3R$

② **求解θ_4、θ_5、θ_6**

```
T11=[cos(r1) 0 -sin(r1) 0;
    sin(r1) 0 cos(r1)  0;
    0      -1  0       13;
    0       0    0      1];
T22=[cos(r2) -sin(r2) 0  8*cos(r2);
    sin(r2) cos(r2)  0  8*sin(r2);
    0       0    1      0;
    0       0    0      1];
T33=[cos(r3) 0 -sin(r3) 0;
    sin(r3) 0 cos(r3)  0;
    0      -1    0      -5;
    0       0    0      1];
R3=(T11*T22*T33)^-1;% 逆矩阵
R=R3*B;
r5=atan2(-sqrt(R(1,3)^2+R(2,3)^2),R(3,3));%求解r5
r4=atan2(-R(2,3)/sin(r5),-R(1,3)/sin(r5));%求解r4
r6=atan2(R(3,2)/-sin(r5),R(3,1)/sin(r5));%求解r6
```

③ 结果

由于是数值求解，解对应的末端位置不可能一点点都不动，顶多是显示的完全一致，因此考虑定义一个误差$e=\sqrt{(p_x{'}-p_x)^2+\left(p_y{'}-p_y\right)^2+(p_z{'}-p_z)^2}$，当它小于一个阈值的时候将结果保存。

```
QQ=[r1 r2 r3 r4 r5 r6];
q=[];
M=T11*T22*T33*T44*T55*T66;
N=M(1:3,4)-B(1:3,4);
e=N'*N;%计算平方误差
display(e);
    if e<=0.001 && r3~=-1.57
        q=[q;QQ];%将计算得到的关节解保存起来
    end
end
```

运算过程截图：

```
e =

    1.3411e-29


e =

    1.5777e-29


e =

    1.6566e-29


e =

    1.2622e-29
```

```
q =

   -0.2462    0.2282   -1.5407   -0.1507   -1.6638   -2.4219
   -0.2464    0.2180   -1.5205   -0.1515   -1.6730   -2.4232
   -0.2467    0.2109   -1.5063   -0.1524   -1.6792   -2.4241
   -0.2470    0.2051   -1.4948   -0.1532   -1.6842   -2.4248
   -0.2472    0.2001   -1.4848   -0.1540   -1.6884   -2.4254
   -0.2475    0.1955   -1.4758   -0.1547   -1.6921   -2.4259
   -0.2477    0.1914   -1.4676   -0.1555   -1.6954   -2.4264
   -0.2480    0.1876   -1.4600   -0.1563   -1.6983   -2.4268
   -0.2482    0.1840   -1.4529   -0.1571   -1.7011   -2.4272
   -0.2485    0.1806   -1.4463   -0.1578   -1.7036   -2.4276
   -0.2487    0.1774   -1.4399   -0.1586   -1.7060   -2.4279
   -0.2490    0.1743   -1.4339   -0.1594   -1.7082   -2.4283
   -0.2493    0.1714   -1.4281   -0.1602   -1.7104   -2.4286
   -0.2495    0.1686   -1.4225   -0.1609   -1.7123   -2.4289
   -0.2498    0.1659   -1.4171   -0.1617   -1.7142   -2.4291
   -0.2500    0.1632   -1.4120   -0.1625   -1.7160   -2.4294
   -0.2503    0.1607   -1.4069   -0.1632   -1.7177   -2.4297
   -0.2505    0.1582   -1.4021   -0.1640   -1.7194   -2.4299
   -0.2508    0.1558   -1.3973   -0.1648   -1.7210   -2.4301
   -0.2511    0.1535   -1.3927   -0.1655   -1.7225   -2.4304
   -0.2513    0.1512   -1.3883   -0.1663   -1.7239   -2.4306
   -0.2516    0.1489   -1.3839   -0.1670   -1.7253   -2.4308
   -0.2518    0.1468   -1.3796   -0.1678   -1.7267   -2.4310
   -0.2521    0.1446   -1.3754   -0.1686   -1.7280   -2.4312
```

最终一共得到了 2135 组解，保存在了 q[]中。接下来在解空间内通过轨迹的规划选择合适的解构成规划的解空间。

```
>> size(q)

ans =

        2135           6
```

3.轨迹规划

给定输入的最大加速度以及每个关节的最大速度：

```
% 参数输入
vmax=0.01;%输入关节的最大速度
amax=0.1;%输入关节的最大加速度
```

计算每个关节的变化量，确定主导的关节变量：

$\Delta\boldsymbol{\theta}_1$	$\Delta\boldsymbol{\theta}_2$	$\Delta\boldsymbol{\theta}_3$	$\Delta\boldsymbol{\theta}_4$	$\Delta\boldsymbol{\theta}_5$	$\Delta\boldsymbol{\theta}_6$
-0.1434	-0.8790	0.4454	-2.3735	0.4137	1.4845

可以发现主导的关节变化量是θ_4，同时将最终运动的过程分为前半程和后半程，按照理论分析中做一个**匀加速的运动规划**。并在解空间中选择合适的解放进规划的空间 **guihua_q[]** 中。

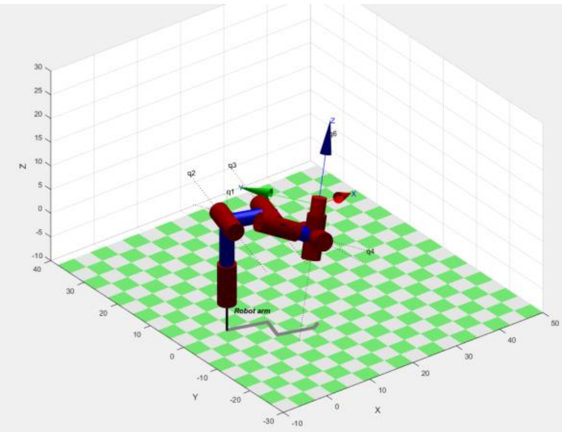
```
guihua_q=q(1,:);
k=1;
for i=k:(2135-1)/2%前半段轨迹规划
    for j=k+1:2135/2
        if(abs(q(j,4)-q(k,4))>0.0006*amax*k)
            guihua_q=[guihua_q;q(j,:)];
            k=j;
        end
    end
end
```

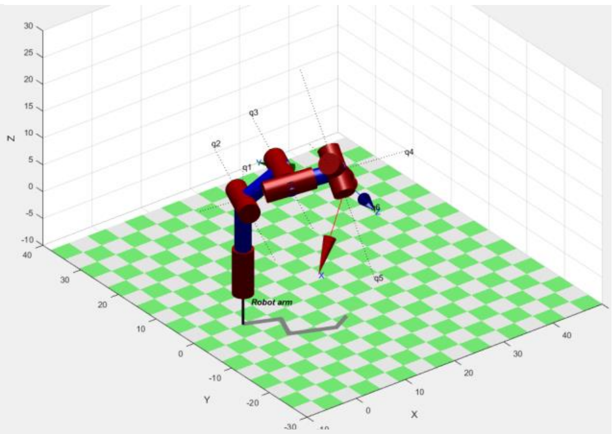
同时考虑最大速度：当速度过大的时候，重新选择合适的解来进行规划。

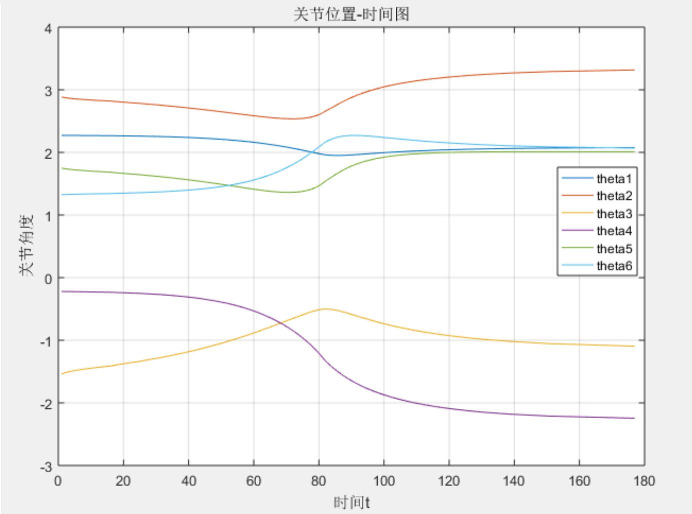
```
if(guihua_v(i,1)<vmax && guihua_v(i,2) <vmax && guihua_v(i,3)<vmax&&guihua_v(i,4)<vmax&&guihua_v(i,5)<vmax&&guihua_v(i,6)<vmax)
```

最终轨迹规划：

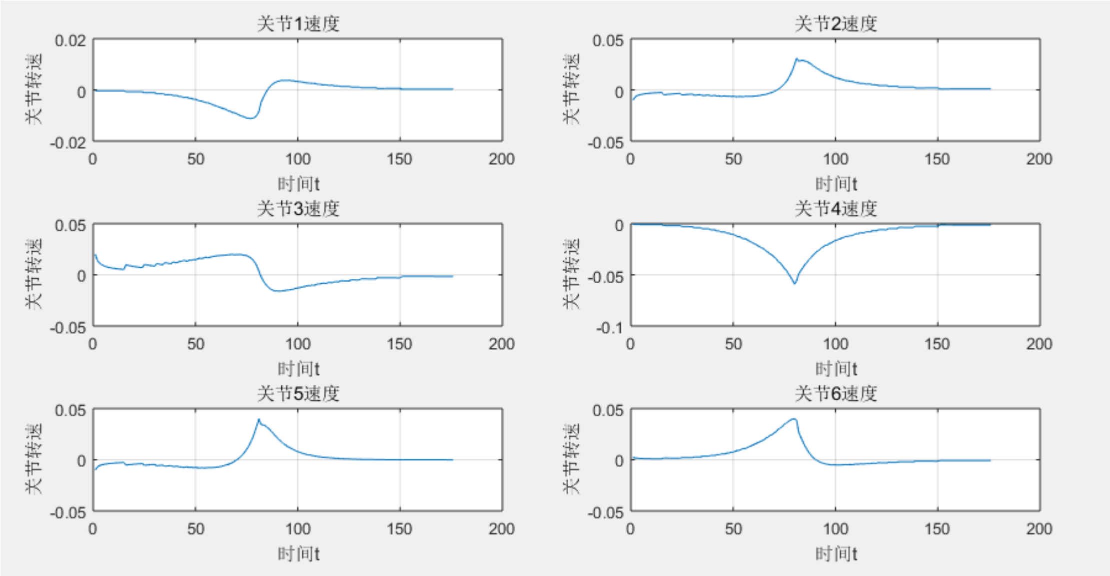
起始位置 **终止位置**





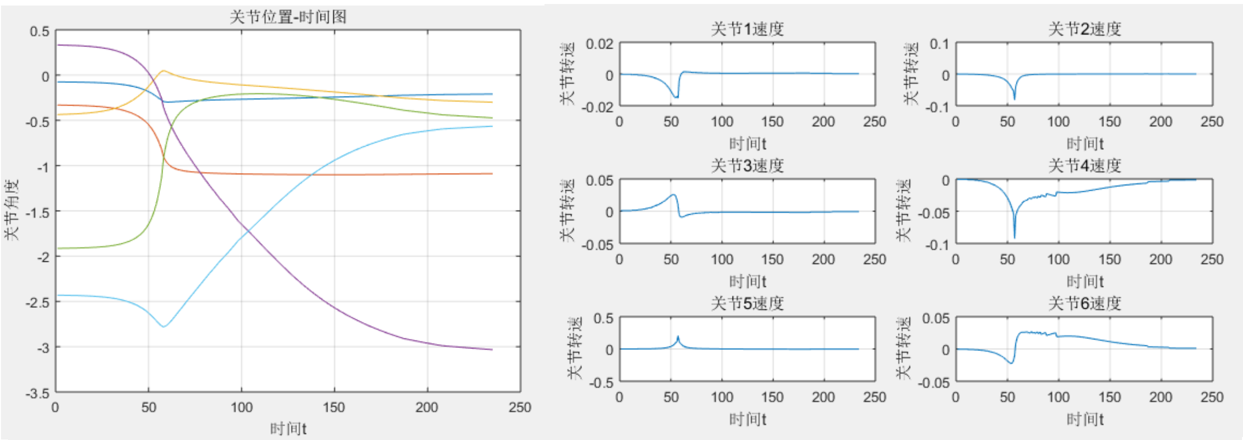


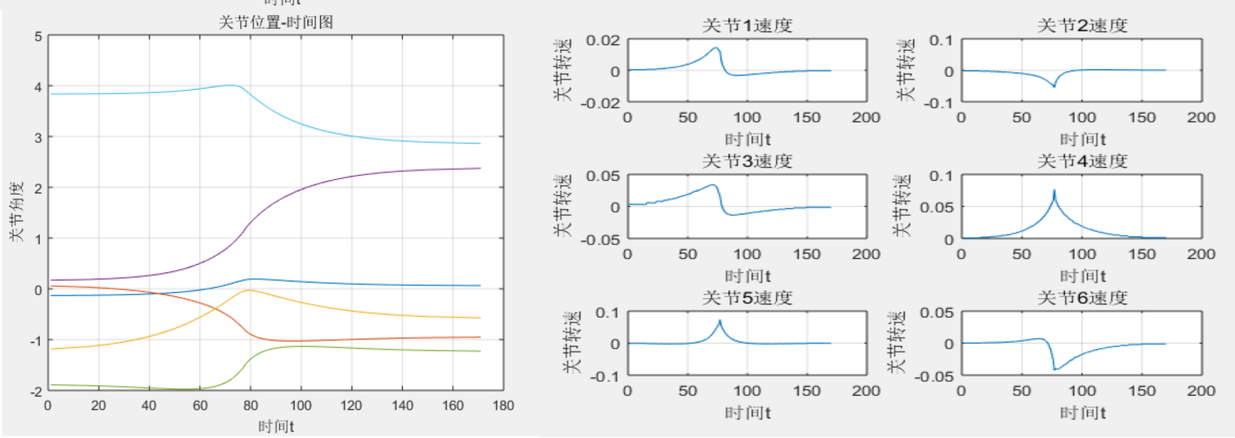
输出末端的速度曲线：



可以看到得到的速度曲线基本上符合了我们的规划目标。在初始和终止位置的速度接近于 0。且中间过程都是先加速再减速，接近于线性变化，最大的速度都在规定的 0.1 之内。个别时间的速度会有轻微的波动，这是由于采样得到的解空间还不够大的原因，同时因为不同的关节其运动规律会有轻微的差异，因此局部可能会有抖动的情况，但**整体得到的轨迹规划还是符合预期的**。

其它位置姿态的求解结果：





四、结论与心得

在本次做大作业的过程中，我将课本学到的知识在实践中得到了应用。比如练习了标准 D-H 与改进 D-H 参数的构建方法，并体会了它们的区别与联系。同时对正运动学的齐次变换矩阵以及逆运动学的三轴 PIEPER 的解法都进行了实践，比较了 ROBOTIC TOOLBOX 的函数数值求解与理论的闭式求解的区别，最终选择了自己的闭式求解进行运算。

在轨迹规划的过程中也复习了有关机械臂运动规划的一些知识，了解了机械臂工作空间与灵巧工作空间，最终选择了最简单的匀加速运动进行轨迹规划，并保证每个机械臂的始末速度近乎为 0。

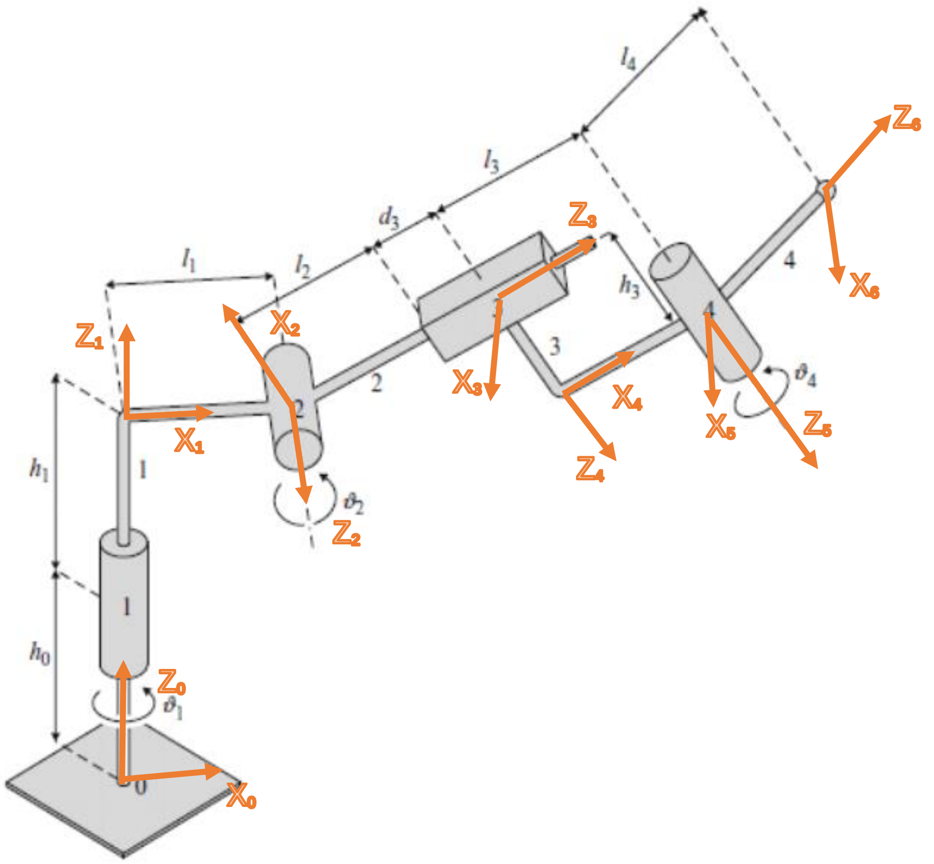
总的来说，这次的大作业是非常有收获的。在用 MATLAB 进行仿真的过程中，从 DH 参数的构建到齐次变换矩阵的书写，再到逆运动学的求解，再到解空间以及轨迹点的规划，基本上都是使用的自己写的函数，虽然花费了很多的时间，但对于很多理论知识上都有了更好的理解。

五、参考文献

[1]约翰 J.克雷格 机器人导论
[2]http://petercorke.com/wordpress/toolboxes/robotics-toolbox

六、附录（之前思考的题目二）

1.建立 D-H 参数表



1.1 建系说明

可以看到机械臂总共有 **4** 个运动关节，为 **RRPR** 型的机械臂，因此先在四个关节处建立坐标系，之后考虑构建基准坐标系与末端坐标系，以及带转折直角处的更合理表示，构建Z_0~$Z_6$7个坐标系。

转折处构建坐标系主要是为了仿真时的更优雅表现，选用不可移动的移动关节进行代替。如上图所示，{0}为基准坐标系，{1}为旋转关节，{2}为旋转关节，{3}为移动关节，{4}为连杆转折，{5}为旋转关节，{6}为末端坐标系

1.2 坐标轴定义

在 DH 参数体系里，通常把关节的轴定义为 z 轴，而把 x 轴的方向定为从本关节指向下一个关节的方向。

找出关节轴 i 与 i+1 之间的公垂线或关节轴 i 和 i+1 的交点，以关节轴 i 和 i+1 的交点或公垂线与关节轴的交点作为连杆坐标系{i}的原点。

规定 x 轴沿公垂线的指向，如果关节轴 i 和 i+1 相交，则规定 x 轴垂直于关节轴 i 和 i+1 所在的平面。选取时尽量使得连杆参数为 0。

改进 DH 参数说明：

① a_{i-1} = 沿x_{i-1}轴，从Z_{i-1}轴移动到Z_i轴的距离

② α_{i-1} = 绕x_{i-1}轴，从Z_{i-1}轴旋转到Z_i轴的角度

③ d_i = 沿Z_i轴，从x_{i-1}轴移动到X_i轴的距离

④ θ_i = 绕Z_i轴，从x_{i-1}轴旋转到到X_i轴的角度

1.3D-H 参数表

D-H 参数表

关节 i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0°	0	$h_0 + h_1$	$\boldsymbol{\theta_1}$
2	90°	l_1	0	$\boldsymbol{\theta_2}$
3	90°	0	$l_2 + \boldsymbol{d_3}$	90°
4	-90°	0	h_3	-90°
5	0°	l_3	0	$\boldsymbol{\theta_5}$
6	90°	0	l_4	0

如参数表所示，其中有 4 个关节变量：$\boldsymbol{\theta_1}$、$\boldsymbol{\theta_2}$、$\boldsymbol{\theta_5}$和$\boldsymbol{d_3}$

1.4 仿真时数据

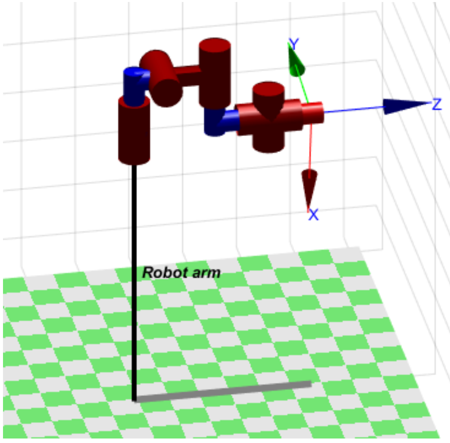
利用 matlab 中的 robotics toolbox 进行验证和演示时，需要给出实际参数，因此建立如下参数表：

$\boldsymbol{l_1}$	$\boldsymbol{l_2}$	$\boldsymbol{l_3}$	$\boldsymbol{l_4}$
5	3	10	8
$\boldsymbol{h_0}$	$\boldsymbol{h_1}$	$\boldsymbol{h_3}$	
5	5	5	
$\boldsymbol{\theta_1}$	$\boldsymbol{\theta_2}$	$\boldsymbol{\theta_5}$	$\boldsymbol{d_3}$
-170°-170°	-170°-170°	-170°-170°	0-10

仿真使用的原 DH 参数表

关节 i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	90°	l_1	h_0+h_1	$\boldsymbol{\theta_1}$
2	90°	0	0	$\boldsymbol{\theta_2}$
3	-90°	0	$l_2+\boldsymbol{d_3}$	90°
4	0°	l_3	h_3	-90°
5	90°	0	0	$\boldsymbol{\theta_5}$
6	0°	0	l_4	0

1.5 仿真结果



但在进行运动学规划的过程中，由于可供选择的关节变量太少了，最终的姿态会非常有限，使得机械臂无法做平滑的轨迹规划。