Department of Signal Processing
Institute of Information Theory and Automation
Czech Academy of Sciences, Prague

INTERNÍ ZPRÁVA

Tomáš Mazanec

ADSL - rešeršní zpráva

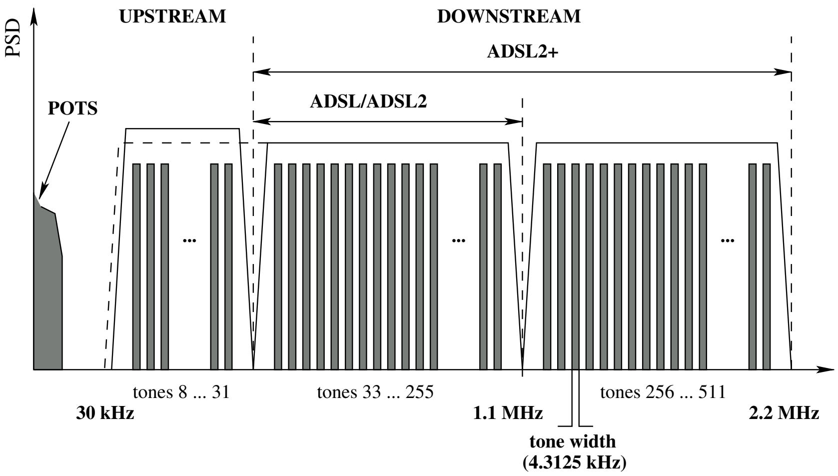
Září 2005

ÚTIA AV ČR, P. O. Box 18, 182 08 Prague, Czech Republic
Phone: +420-2-6605 2472
Fax: +420-2-6605 2511
E-mail: mazanec@utia.cas.cz

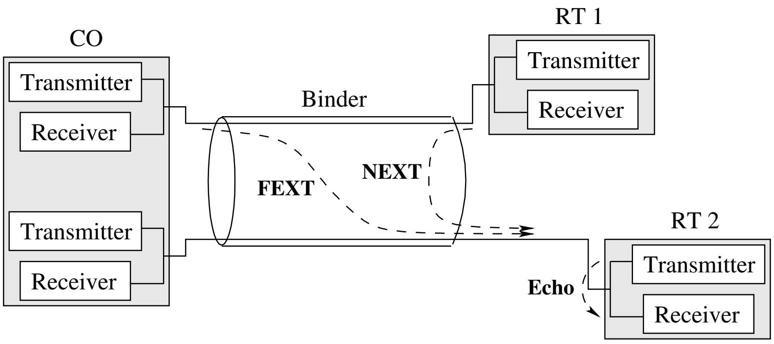
Obsah

1 ADSL - Asymetric Digital Subscriber Line

- Slouží k přenosu dat po telefonních TP přípojkách (xDSL technologie).
- Potýká se s nízkou kvalitou přípojek, rádiovým rušením (RFI) a také s přeslechy (obr. 2).
- Použitelné frekvenční pásmo omezené (obr. 1).
- Přenos dat je duplexní a řeší se frekvenčním oddělením (FDD) nebo vyhýbkou (hybridem). Datový tok "downstream" je několikrát větší než upstream.
- Duplex s vyhýbkou vyžaduje potlačení echa (obr. 2).
- Dosahuje dostačujících parametrů (tab. 1), ale nároky rostou.



Obrázek 1: Schema frekvenčních pásem na účastnických přípojkách.



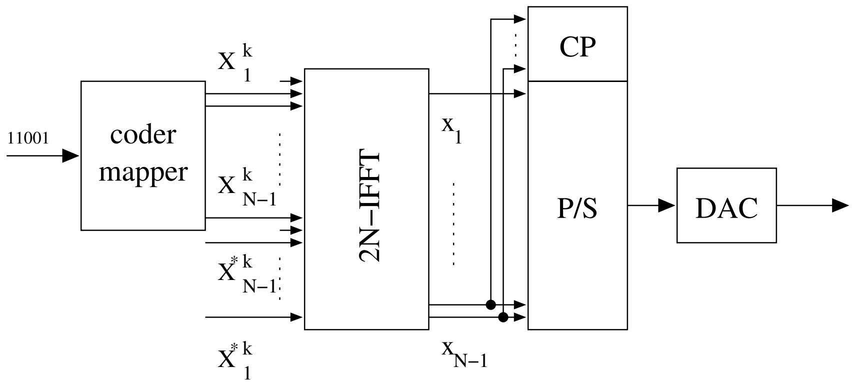
Obrázek 2: Znázornění přeslechů a echa v typickém zapojení stanic.

typ	pásmo	datový tok			poznámka
		down	up	délka TP	
	[MHz]	[Mb/s]	[Mb/s]	[km]	
POTS	4 k	56kb/s	-	-	
ISDN	80 k	160kb/s sym.		< 5,5	
HDSL	200 k	2 sym.		-	2x TP
SDSL	200 k	2 sym.		-	
ADSL	1,1	6	640 kb/s	4	
ADSL2	1,1	6 (8)	640 kb/s	4	snížená režie, ADM
ADSL2+	2,2	15	1,5	< 1,8	
ADSL2++	3,75	13-52	1,5-2,3	-	není standard.
VDSL	12 (30)	13-52	1,6-6,4	0,3-1,5	fibre to cab., FDD
VDSL2	30	100		<76,2m	250 ft., ITU-T

Tabulka 1: Vybrané technologie přenosu dat po TP přípojkách

1.1 DMT - Discrete Multitone Modulation

- V ADSL se používá DMT modulace, kt. je založena na systému více subnosných frekvencích (až 255 subnosných).
- Data se přenáší v DMT symbolech, kt. jsou uspořádány do rámce. Symbol je skupina modulovaných subnosných.
- Subnosné (tzv. tóny) jsou vůči sobě ortogonální (OFDM), to uspoří frekv. pásmo.
- Na každou ze subnosných se kóduje N-bitů pomocí N-stavové QAM. V ADSL se navíc řídí zesílení každé subnosné.
- Proměnný počet modulovaných bitů na každé subnosné (bitload) je výhodný pro přenos na vedení s nevyrovnanou charakteristikou a proti úzkopásmovému rušení.
- Modulace a demodulace s DMT se realizuje pomocí FFT a IFFT (obr. 3).
- Přechodový jev a zpoždění přenosového kanálu (tzv. délka kanálu) způsobují interference mezi vysílanými symboly (ISI) a také interference mezi subnosnými (ICI).
- Vysílač s DMT přidává ke každému symbolu cyklický prefix (CP), potlačí se tím vliv přechodového jevu a částečně i délky kanálu (viz. dále).



Obrázek 3: Blokové schéma DMT vysílače.

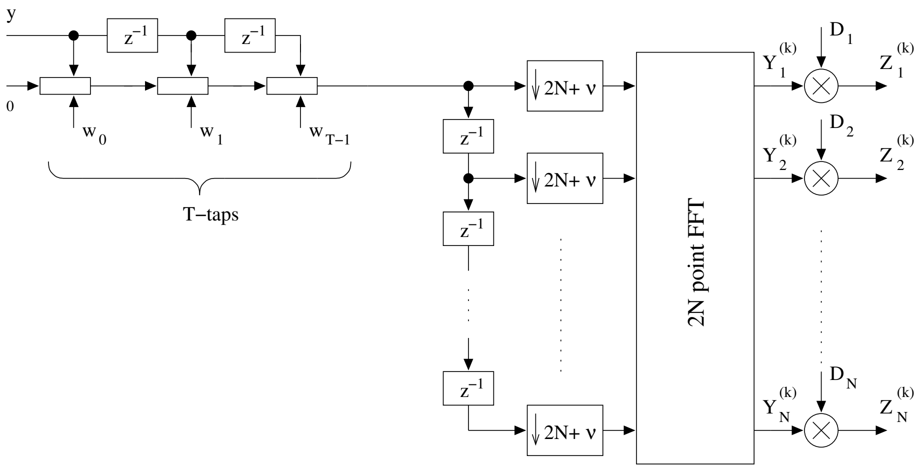
2 Ekvalizace ADSL kanálu

2.1 Cyklický prefix - CP

- `Motivace`: potlačit interference (ICI, ISI) vzniklé průchodem přenosovým kanálem.
- Jeho přidaní k (před) DMT symbolu způsobí:
  - potlačení vlivu přechodového jevu kanálu,
  - pseudo-periodicitu symbolu (lepší pro zpracování FFT),
  - zajištění ortogonality tónů,
  - zjednodušení ekvalizéru v přijímači.
- `Cílem:` principiálně zachovat vlastnost, že lze spektrum přijatého signálu FFT$\{x\}$ zjistit podělením spektra signálu na vstupu přijímače FFT$\{y\}$ spektrem odezvy kanálu FFT$\{h\}$, tj.:
$$\mathrm{FFT}\{x\} = \frac{\mathrm{FFT}\{y\}}{\mathrm{FFT}\{h\}}.$$
- Délka kanálu u ADSL je několikrát vetší než délka vhodného CP. Použití CP proto není dostačujícím řešením potlačení ISI a ICI.
- Prodlužování CP na délku kanálu není vhodné, hlavně proto, že delší CP zabere více přenosové kapacity kanálu - sníží se užitečný datový tok.
- Další možností jak více potlačovat interference je za DMT symbol přidat cyklický sufix CS (CP zůstává) a po té váhovat vhodným oknem. Celkově to ale vede ke složité situaci a k možnému porušení ortogonality tónů. Přesto existují metody, které CS a váhování výhodně používají.

2.2 Princip ekvalizace

- Ekvalizace v DMT přijímači je nutná pro lepší využití přenosové kapacity kanálu a je dalším krokem po použití cyklického prefixu. Situaci ukazuje obrázek č. 4.
- Adaptivní filtr s konečnou impulsovou odezvou TEQ (Time domain EQualizer) zkracuje efektivní délku přenosového kanálu, respektive zkracuje délku kanálu a modifikuje ho tak, aby splňoval požadované vlastnosti.
- TEQ se nastavuje během inicializace spojení, při optimálním nastavení potlačuje ICI a ISI.
- Ekvalizaci korektně přijatých tónů (bez ICI a ISI) zařizuje filtr ve frekvenční oblasti FEQ. Za předpokladu optimálního TEQ je nejjednodušší formou FEQ komplexní násobička s jedním koeficientem a provádí tzv. inverzi kanálu.



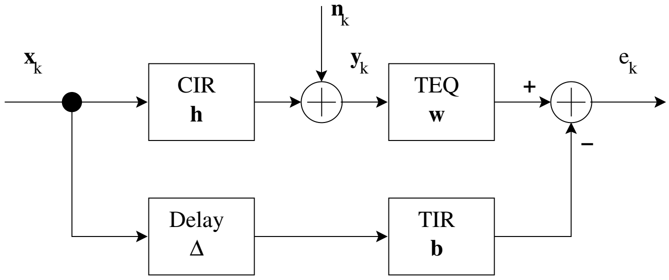
Obrázek 4: Princip ekvalizace v přijímači DMT (TEQ, převod S/P, FFT, FEQ).

2.3 TEQ - Time domain EQualizer

- TEQ upravuje výslednou efektivní odezvu kanálu ADSL podle určitého kritéria tak, aby při optimálním nastavení splňovala požadované vlastnosti.
- Efektivní odezva kanálu je dána konvolucí odezvy kanálu CIR **h** a koeficientů TEQ **w**.
- Otázka je jaké kritérium zvolit, resp. jakou metodou (na jakou vlastnost) TEQ optimalizovat. Existuje více metod a kritérií, např.:
  - Minimum mean square error
  - Maximum shortening SNR
  - Minimum ISI
  - Minimum delay spread
  - Maximum geometric SNR
  - Maximum bit rate

2.4 Optimalizace TEQ kritériem MMSE

- `Motivace`: zkrátit efektivní délku kanálu ADSL na délku CP - channel shortening.
- `Cíl`: dle modelu kanálu ADSL a jeho MMSE ekvalizace (obr. 5) najít optimální koeficienty filtru **w**.
- Návrh TEQ závisí na více parametrech - zpoždění Δ a tzv. požadované odezvě TIR **b**.
- Optimální návrh TEQ se určí jako minimum kvadrátu chyby e_k, tj. pomocí kritéria MMSE.



Obrázek 5: Model ekvalizace TEQ.

2.5 Určení optimálních koeficientů TEQ (MMSE)

- Dle modelu (obr. 5) lze napsat vztah pro chybový signál e_k:

$$e_k = w_k \star y_k - b_k \star x_k = \mathbf{w}^T \mathbf{y}_k - \mathbf{b}^T \mathbf{x}_k \ ,$$

  kde

$$\mathbf{x}_k = [x_{k-\Delta} \dots x_{k-\Delta-\nu}]^T \ , \ \mathbf{y}_k = [y_k \dots y_{k-T+1}]^T \ ,$$
$$\mathbf{w} = [w_0 \dots w_{T-1}]^T \ , \ \mathbf{b} = [b_0 \dots b_\nu]^T \ ,$$

  T je délka TEQ a ν je délka CP (délka TIR je $\nu + 1$).

- Účelová funkce MSE je:

$$\begin{aligned} J_{MSE} &= \mathcal{E}\left[||\mathbf{w}^T \mathbf{y}_k - \mathbf{b}^T \mathbf{x}_k||_2^2 \right] \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{yy} \mathbf{w} + \mathbf{b}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{b} - 2\mathbf{b}^T \mathbf{R}_{xy} \mathbf{w} \end{aligned} \qquad (1)$$

  kde $\mathcal{E}[\cdot]$ značí operátor střední hodnoty a $\mathbf{R}_{xx}, \mathbf{R}_{yy}, \mathbf{R}_{xy}$ jsou korelační matice indexovaných signálů.

- Nyní hledáme minimum účelové funkce, tj:

$$\min_{\mathbf{w},\mathbf{b}} J_{MSE}(\mathbf{w}, \mathbf{b}) \ . \qquad (2)$$

- Aby se zamezilo triviálnímu řešení, je nutné použít nějaké doplňující podmínky (constraint).

- V následujících odstavcích jsou rozebrány některé z algoritmů, kterými lze určit optimální koeficienty ADSL ekvalizéru, a jejich vlastnosti.

2.5.1 Podmínka jednotkové normy TIR (Unit norm constraint)

- Za podmínky jednotkové normy TIR:

$$\mathbf{b}^T\mathbf{b} = 1 \quad \text{tj.: } \|\mathbf{b}\|_2^2 = 1 \tag{3}$$

hledáme minimum účelové funkce (1) Lagrangeovou metodou:

$$\min_{\mathbf{w},\mathbf{b}} \mathcal{L}$$
$$\min_{\mathbf{w},\mathbf{b}} \mathbf{w}^T\mathbf{R}_{yy}\mathbf{w} + \mathbf{b}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{b} - 2\mathbf{b}^T\mathbf{R}_{xy}\mathbf{w} + \lambda(1 - \mathbf{b}^T\mathbf{b}) \tag{4}$$

- Jednotlivé gradienty $\mathcal{L}$ položíme rovny nule:

$$\nabla_{\mathbf{w}}\mathcal{L} = \mathbf{R}_{yy}\mathbf{w} - \mathbf{R}_{yx}\mathbf{b} = 0 \tag{5}$$
$$\nabla_{\mathbf{b}}\mathcal{L} = \mathbf{R}_{xx}\mathbf{b} - \mathbf{R}_{xy}\mathbf{w} - \lambda\mathbf{b} = 0 \tag{6}$$
$$\nabla_{\lambda}\mathcal{L} = \mathbf{b}^T\mathbf{b} - 1 = 0 \tag{7}$$

- Z rovnice (5) vyjádříme $\mathbf{w}$

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}_{yy}^{-1}\mathbf{R}_{yx}\mathbf{b} \tag{8}$$

a dosadíme do (6)

$$\underbrace{\left(\mathbf{R}_{xx} - \mathbf{R}_{xy}\mathbf{R}_{yy}^{-1}\mathbf{R}_{yx}\right)}_{\mathbf{R}_{\Delta}}\mathbf{b} = \lambda\mathbf{b} \tag{9}$$
$$\mathbf{R}_{\Delta}\mathbf{b} = \lambda\mathbf{b} \tag{10}$$

- Tím dostáváme řešení pro optimální TIR, kdy je vektor koeficientů $\mathbf{b}_{opt}$ roven vlastnímu vektoru, který odpovídá nejmenšímu vlastnímu číslu λ_{min} matice $\mathbf{R}_{\Delta}$. Nejmenší vlastní číslo, takto definované úlohy, totiž odpovídá, dle [1] a [4], minimální střední hodnotě kvadrátu chyby MSE kritéria.

- Optimální koeficienty TEQ pak získáme dle rovnice (8)

$$\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}_{yy}^{-1}\mathbf{R}_{yx}\mathbf{b}_{opt} \tag{11}$$

2.5.2 Podmínka jednotkové normy TEQ (Unit norm constraint)

- Za podmínky jednotkové normy na TEQ (12) postupujeme Lagrangeovou metodou jako v předchozím případě.

$$\mathbf{w}^T\mathbf{w} = 1 \tag{12}$$

- Z gradientu $\nabla_{\mathbf{b}}\mathcal{L}$ vyjádříme koeficienty TIR $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{b} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\mathbf{w} \tag{13}$$

- Dosazením (13) do gradientu $\nabla_{\mathbf{w}}\mathcal{L}$ dostáváme rovnici (15). Vektor optimálních koeficientů TEQ $\mathbf{w}_{opt}$ je roven vlastnímu vektoru $\mathbf{R}_{\Delta}$, který odpovídá jejímu minimálnímu vlastnímu číslu λ_{min}.

$$\underbrace{\left(\mathbf{R}_{yy} - \mathbf{R}_{yx}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\right)}_{\mathbf{R}_{\Delta}}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} \tag{14}$$

$$\mathbf{R}_{\Delta}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} \tag{15}$$

- Optimální koeficienty TEQ pak získáme dle rovnice (13):

$$\mathbf{b}_{opt} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\mathbf{w}_{opt} \tag{16}$$

2.5.3 Podmínka jednotkového koeficientu TEQ (Unit tap constraint)

- Podle podmínky jednotkového koeficientu filtru TEQ

$$\mathbf{e}_i^T\mathbf{w} = 1 \tag{17}$$

  kde e_i je jednotkový vektor s jednou jedničkou na i-té pozici.

- sestavíme rovnici pro Lagrangeovu metodu

$$\min_{\mathbf{w},\mathbf{b}} \mathbf{w}^T\mathbf{R}_{yy}\mathbf{w} + \mathbf{b}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{b} - 2\mathbf{b}^T\mathbf{R}_{xy}\mathbf{w} + \lambda(1 - \mathbf{e}_i^T\mathbf{w}) \tag{18}$$

- Gradienty $\nabla\mathcal{L}$ položíme rovny nule

$$\nabla_{\mathbf{w}}\mathcal{L} = 2\mathbf{R}_{yy}\mathbf{w} - 2\mathbf{R}_{yx}\mathbf{b} - \lambda\mathbf{e}_i = 0 \tag{19}$$

$$\nabla_{\mathbf{b}}\mathcal{L} = \mathbf{R}_{xx}\mathbf{b} - \mathbf{R}_{xy}\mathbf{w} = 0 \tag{20}$$

$$\nabla_{\lambda}\mathcal{L} = \mathbf{e}_i^T\mathbf{w} - 1 = 0 \tag{21}$$

- Vyjádřením $\mathbf{b}$ z (20)

$$\mathbf{b} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\mathbf{w} \tag{22}$$

  a dosazením do (19) dostáváme:

$$2\underbrace{\left(\mathbf{R}_{yy} - \mathbf{R}_{yx}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\right)}_{\mathbf{R}_{\Delta}}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{e}_i \tag{23}$$

$$2\mathbf{R}_{\Delta}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{e}_i \tag{24}$$

- Vynásobením pravé strany (24) jedničkou ($\mathbf{e}_i^T\mathbf{w}$) získáme rovnici, kterou lze řešit zobecněnými vlastními čísly (generalized eigenvalue):

$$2\underbrace{\mathbf{R}_\Delta}_{\mathbf{B}}\mathbf{w} = \lambda\underbrace{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T}_{\mathbf{A}}\mathbf{w} \tag{25}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{A}\mathbf{w} \tag{26}$$

- Nyní lze situaci zjednodušit přeformulováním (25), za předpokladu invertovatelnosti $\mathbf{R}_\Delta$:

$$\mathbf{B}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{A}\mathbf{w} \qquad / \times \mathbf{B}^{-1} \tag{27}$$

$$\underbrace{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}}_{\mathcal{I}}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{w} \tag{28}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{w} = \lambda^{-1}\mathbf{w} \tag{29}$$

λ^{-1} nahradíme $\lambda^{'}$ a místo největšího vlastního čísla λ budeme hledat nejmenší $\lambda^{'}$ matice $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{w} = \lambda^{'}\mathbf{w} \tag{30}$$

$$2\mathbf{R}_\Delta^{-1}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T\mathbf{w} = \lambda^{'}\mathbf{w} \tag{31}$$

- Vzhledem k tomu, že velikost hodnot jednotlivých tónů upravuje až FEQ, lze v rovnici (31) dále zanedbat násobení dvojkou. Na funkci TEQ nemá toto zanedbání vliv. Pro přehlednost nadefinujeme matici $\mathbf{G}$ a upravíme (31):

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}_\Delta^{-1}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T \tag{32}$$

$$\mathbf{G}\mathbf{w} = \lambda^{'}\mathbf{w} \tag{33}$$

- Hledáme tedy vektor optimálních koeficientů $\mathbf{w}_{opt}$, který je roven vlastnímu vektoru matice $\mathbf{G}$, který přísluší nejmenšímu vlastnímu číslu $\lambda^{'}$ této matice.
- Díky hodnotám vektoru $\mathbf{e}_i$ (viz. podmínka 17) je matice $\mathbf{G}$ tvořena jen i-tým sloupcem matice $\mathbf{R}_\Delta^{-1}$ a to na i-té pozici matice $\mathbf{G}$. Hledaný vlastní vektor matice $\mathbf{G}$ je pak určen právě tímto sloupcem, tj. je to vektor popisující stejnou basi.
- Optimální koeficienty TEQ $\mathbf{w}_{opt}$ lze podle [4] analyticky vyjádřit:

$$\mathbf{w}_{opt} = \frac{\mathbf{R}_\Delta^{-1}\mathbf{e}_{iopt}}{\mathbf{e}_{iopt}^T\mathbf{R}_\Delta^{-1}\mathbf{e}_{iopt}} \tag{34}$$

kde $i_{opt} = \max\arg_{0<i<T}\{\mathbf{R}_\Delta^{-1}(i,i)\}$

- Z výrazu (34) je patrné, že vektor optimálních koeficientů TEQ odpovídá i_{opt}-tému sloupci matice $\mathbf{R}_\Delta^{-1}$. Násobnost vektoru pak upravuje jmenovatel výrazu $(\mathbf{R}_\Delta^{-1}(i,i))$, který odpovídá vlastnímu číslu matice. Podmínka i_{opt}-tého jednotkového koeficientu je tak splněna.

- Optimální koeficienty TIR pak dle (20):

$$\mathbf{b}_{opt} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\mathbf{w}_{opt} \tag{35}$$

2.5.4 Podmínka jednotkového koeficientu TIR (Unit tap constraint)

- Podle podmínky jednotkového koeficientu filtru TIR (36) postupujeme jako v předchozím případě.

$$\mathbf{e}_i^T\mathbf{b} = 1 \tag{36}$$

kde e_i je jednotkový vektor s jednou jedničkou na i-té pozici.

- Matice $\mathbf{R}_\Delta$ bude nyní ve tvaru:

$$\mathbf{R}_\Delta = \mathbf{R}_{xx} - \mathbf{R}_{xy}\mathbf{R}_{yy}^{-1}\mathbf{R}_{yx} \tag{37}$$

a rovnice pro koeficienty TEQ $\mathbf{w}$, analogicky i pro $\mathbf{w}_{opt}$, bude:

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}_{yy}^{-1}\mathbf{R}_{yx}\mathbf{b} \tag{38}$$

- Výraz pro optimální koeficienty TIR $\mathbf{b}_{opt}$, stejně jako v případě podmínky jednotkového koeficientu TEQ, bude:

$$\mathbf{b}_{opt} = \frac{\mathbf{R}_\Delta^{-1}\mathbf{e}_{iopt}}{\mathbf{e}_{iopt}^T\mathbf{R}_\Delta^{-1}\mathbf{e}_{iopt}} \tag{39}$$

kde $i_{opt} = \max\arg_{0<i<\nu+1}\{\mathbf{R}_\Delta^{-1}(i,i)\}$

2.5.5 Podmínka jednotkové energie - TIR a TEQ (Unit energy constraint)

- Pro TIR a TEQ lze napsat tři různé podmínky jednotkové energie:

$$\text{TIR: } \mathbf{b}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{b} = 1 \tag{40}$$
$$\text{TEQ: } \mathbf{w}^T\mathbf{R}_{yy}\mathbf{w} = 1 \tag{41}$$
$$\text{TIR + TEQ: } \mathbf{b}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{b} = 1 \ \text{ a } \ \mathbf{w}^T\mathbf{R}_{yy}\mathbf{w} = 1 \tag{42}$$

- Podmínka pro TIR znamená jednotkovou energii vstupní, podmínka pro TEQ pak energii výstupní. Jak dokazuje [1], jsou výsledné optimální koeficienty, až na násobek, stejné, tj.:

$$\mathbf{w}_{1,opt} = \sigma \mathbf{w}_{2,opt} \tag{43}$$
$$\mathbf{b}_{1,opt} = \sigma^{-1} \mathbf{b}_{2,opt} \tag{44}$$
$$\mathbf{w}_{2,opt} = \mathbf{w}_{3,opt} \tag{45}$$
$$\mathbf{b}_{1,opt} = \mathbf{b}_{3,opt} \tag{46}$$

kde σ je skalární násobek a indexy vektorů značí jednotlivé případy podmínky (1 ... TIR, 2 ... TEQ a 3 ... TIR a TEQ).

podmínka jednotkové energie - TIR

- Pro určení optimálních koeficientů TIR hledáme minimum účelové funkce (1) za podmínky $\mathbf{b}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{b} = 1$.

- Gradient účelové funkce $\nabla_{\mathbf{w}} J$ položíme rovno nule a vyjádříme koeficienty TEQ:

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}_{yy}^{-1} \mathbf{R}_{yx} \mathbf{b} \tag{47}$$

- Výraz (47) dosadíme do (1), tím eliminujeme $\mathbf{w}$.

- Minimum účelové funkce (2) pak přepíšeme do tvaru:

$$\min_{\mathbf{b}} J = \min_{\mathbf{b}} \mathbf{b}^T \left(\mathbf{R}_{xx} - \mathbf{R}_{xy} \mathbf{R}_{yy}^{-1} \mathbf{R}_{yx} \right) \mathbf{b}, \quad \text{za podm.: } \mathbf{b}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{b} = 1 \tag{48}$$

- Aby se řešení vyhnulo složitému problému vlastních čísel upravíme (48) tak, aby se zjednodušila podmínka jednotkové energie (viz. [1]).

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{b}} J &= 1 - \max_{\tilde{\mathbf{b}}} \tilde{\mathbf{b}}^T \left(\mathbf{R}_{xx}^{-T/2} \mathbf{R}_{xy} \mathbf{R}_{yy}^{-1} \mathbf{R}_{yx} \mathbf{R}_{xx}^{-1/2} \right) \tilde{\mathbf{b}} \\ &= 1 - \max_{\tilde{\mathbf{b}}} \tilde{\mathbf{b}}^T \left(\mathbf{P}^T \mathbf{P} \right) \tilde{\mathbf{b}}\ , \quad \text{za podm.: } \tilde{\mathbf{b}}^T \tilde{\mathbf{b}} = 1 \end{aligned} \tag{49}$$

kde $\tilde{\mathbf{b}}$ je transformovaný vektor $\mathbf{b}$:

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{R}_{xx}^{1/2} \mathbf{b} \tag{50}$$

a matice $\mathbf{P}$ je definována jako:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_{yy}^{-T/2} \mathbf{R}_{yx} \mathbf{R}_{xx}^{-1/2} \tag{51}$$

- Dle [1] je pak vektor optimálních $\tilde{\mathbf{b}}$ roven vlastnímu vektoru matice $\mathbf{P}^T \mathbf{P}$, který odpovídá největšímu vlastnímu číslu této matice.

- Optimální koeficienty TIR určíme z (50).

podmínka jednotkové energie - TEQ

- Pro nalezení optimálních koeficientů TEQ postupujeme podobně jako v případě TIR. G. Ysebaert v [1] ukazuje, že optimální koeficienty TEQ jsou řešením (52 a 53), kde odpovídají vektoru vlastních čísel s největším vlastním číslem matice $\mathbf{P}\mathbf{P}^T$.
$$\min_{\mathbf{w}} J = 1 - \max_{\tilde{\mathbf{w}}} \tilde{\mathbf{w}}^T \left(\mathbf{P}\mathbf{P}^T\right) \tilde{\mathbf{w}} \ , \quad \text{za podm.: } \tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{w}} = 1 \tag{52}$$
kde $\tilde{\mathbf{w}}$ je transformovaný vektor $\mathbf{w}$:
$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_{yy}^{1/2} \mathbf{w} \tag{53}$$
Matice $\mathbf{P}$ je stejně jako pro TIR definována:
$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_{yy}^{-T/2} \mathbf{R}_{yx} \mathbf{R}_{xx}^{-1/2} \tag{54}$$

podmínky jednotkové energie - TIR, TEQ - pokračování

- Na základě řešení TIR $\tilde{\mathbf{b}}$ a TEQ $\tilde{\mathbf{w}}$, tj. hledáme největší vlastní číslo $\mathbf{P}^T\mathbf{P}$ nebo $\mathbf{P}\mathbf{P}^T$, G. Ysebaert [1] dokazuje ze existuje jednodušší řešení. V obou případech lze optimální koeficienty TEQ $\mathbf{w}$ určit jako vektor s největším vlastním číslem matice $\mathbf{Q}$, kde
$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}_{yy}^{-1} \mathbf{R}_{yx} \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{R}_{xy} \tag{55}$$
tj. že platí:
$$\text{za podm. na TIR: } \ \mathbf{Q}\mathbf{w} = \lambda_{max} \mathbf{w} \tag{56}$$
a
$$\text{za podm. na TEQ: } \ \mathbf{Q}\mathbf{w} = \lambda_{max} \mathbf{w} \tag{57}$$

podmínka jednotkové energie - TIR a TEQ

- Lze odhadnout, že za obou podmínek uvažovaných současně
$$\mathbf{b}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{b} = 1 \ \text{ a } \ \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{yy} \mathbf{w} = 1 \ , \tag{58}$$
bude k nalezení optimálních koeficientů třeba řešit zobecněná vlastní čísla.

- Optimum z účelové funkce, za daných podmínek, tedy hledáme Lagrangeovou metodou a dle [1] dostáváme:
$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R}_{yx} \\ \mathbf{R}_{xy} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} (1-\alpha) \ , \tag{59}$$
kde $(1-\alpha)$ je zobecněné vlastní číslo.

- Účelová funkce (1) může být zjednodušena:
$$J(\mathbf{w}, \mathbf{b}) = 2 - 2\mathbf{b}^T \mathbf{R}_{xy} \mathbf{w} = 2\alpha \tag{60}$$

- Vyplývá tedy (59, 60), že minimum účelové funkce odpovídá největšímu zobecněnému vlastnímu číslu $(1-\alpha)$ z výrazu (59), tím i optimální koeficienty TEQ $\mathbf{w}$.

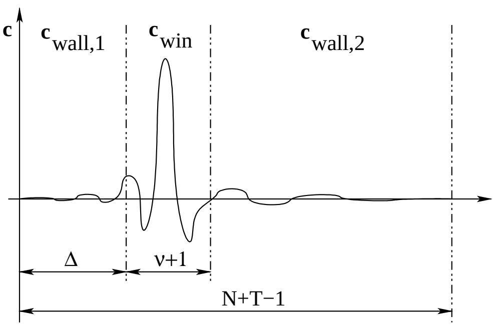
2.5.6 Shrnutí MMSE TEQ

- Kritérium MSE nemá přímý vztah s maximalizací přenosové kapacity kanálu.
- Zvětšení délky TEQ nevede nutně ke zvýšení přenosové kapacity kanálu.
- Vždy je potřeba několikrát, pro různá zpoždění Δ, určit optima TEQ (b_{opt}) a z nich pak vybrat to s největší přenosovou kapacitou. Důvodem je, že vztah mezi zpožděním a přenosovou kapacitou lze popsat jen nehladkou funkcí.
- MMSE optimalizace TEQ nebere ohled na nepoužité tóny v DMT symbolech, to vede ke zbytečnému přesunu energie na jejich kmitočty. Situaci lze zlepšit váhovaným MMSE ekvalizérem (weighted MMSE-TEQ).
- Podmínky jednotkové normy TIR nebo TEQ vedou k nejmenší chybě (MSE). Ostatní podmínky dávají větší chybu (MSE), ale některé zároveň vedou k větší přenosové kapacitě. Není tedy jednoznačné kterou z uvedených podmínek preferovat.

2.6 Další metody optimalizace TEQ

2.6.1 Maximum shortening SNR (MSSNR)

- Kritérium je založeno na zkrácení odezvy kanálu (CIR) tak, aby se minimalizovaly interference mezi symboly (ISI).
- Přesněji lze říci, že se MSSNR optimalizace TEQ snaží minimalizovat energii vně jistého okna, které je položeno přes CIR. Toto okno je obdélníkové a délky $\nu + 1$ (délky jako cyklický prefix) [1].



Obrázek 6: Vnější a vnitřní části okna přes CIR.

- Oknem (obr. 6) vybranou část CIR vyjádříme maticí:

$$\mathbf{H}_{win} = \begin{bmatrix} h_{\Delta} & \cdots & h_{\Delta-T+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\Delta+\nu} & \cdots & h_{\Delta+\nu-T+1} \end{bmatrix}, \tag{61}$$

kde Δ je posun okna od začátku CIR, $\nu + 1$ je délka okna a celková délka CIR je $N + T + 1$.

- Zbývající část CIR vlevo od okna bude:

$$\mathbf{H}_{wall,1} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ h_{\Delta-1} & \cdots & & h_{\Delta-T} \end{bmatrix} \tag{62}$$

a od okna vpravo bude:

$$\mathbf{H}_{wall,2} = \begin{bmatrix} h_{\Delta+\nu+1} & \cdots & & h_{\Delta+\nu-T+2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_{N-1} \end{bmatrix} . \tag{63}$$

- Celkově lze napsat vnější část okna takto:

$$\mathbf{H}_{wall} = \left[\mathbf{H}_{wall,1}^T \, \mathbf{H}_{wall,2}^T\right]^T . \tag{64}$$

- Jak bylo napsáno výše, minimalizujeme energii vně okna:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \mathbf{H}_{wall}^T \mathbf{H}_{wall} \mathbf{w} \;,\; \text{za podm.: } \mathbf{w}^T \mathbf{H}_{win}^T \mathbf{H}_{win} \mathbf{w} = 1 \;. \tag{65}$$

- Kvůli možným komplikacím při řešení rce (65) doporučuje [1] opačné pojetí kritéria, a to maximalizovat energii uvnitř okna. Dále uvádí, že pro kanály ADSL je vždy $\mathbf{H}_{wall}^T \mathbf{H}_{wall}$ pozitivně semidefinitní a proto je výhodnější tato maximalizující alternativa (66).

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \mathbf{H}_{win}^T \mathbf{H}_{win} \mathbf{w} \;,\; \text{za podm.: } \mathbf{w}^T \mathbf{H}_{wall}^T \mathbf{H}_{wall} \mathbf{w} = 1 \;. \tag{66}$$

- Výše popsané MSSNR kritérium předpokládá, že vstupní signál je bílý.

2.6.2 Minimum delay spread (MDS)

- Víme, že část odezvy kanálu CIR, která přesahuje délku cyklického prefixu (CP) způsobuje interferencí (ISI, ICI). Tato optimalizace TEQ vychází z faktu, že míra ISI a ICI závisí na energii ve zmiňované části CIR a na její vzdálenosti od prefixu CP.

- Schur a kolektiv definovali rozptyl zpoždění D efektivního kanálu $\mathbf{c} = \mathbf{h} \star \mathbf{w}$ (67). Optima TEQ se, dle autorů, dosáhne minimalizací D^2.

$$D = \sqrt{\frac{1}{E} \sum_{l=0}^{N+T-2} (l - \bar{l})^2 \left|\mathbf{c}[l]\right|^2}\ , \tag{67}$$

kde

$$E = \sum_{l=0}^{N+T-2} \left|\mathbf{c}[l]\right|^2 , \qquad \bar{l} = \frac{1}{E} \sum_{l=0}^{N+T-2} l \left|\mathbf{c}[l]\right|^2\ . \tag{68}$$

- V maticovém zápisu (dle [1]) pak řešení odpovídá problému s obecnými vlastními čísly (jako MMSE kritéria jednotkových koef.)

$$\mathbf{Bw} = \lambda \mathbf{Aw}\ , \tag{69}$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{H}^T \mathbf{QH}\ , \tag{70}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{H}^T \mathbf{H}\ , \tag{71}$$

kde $\mathbf{Q} = \mathrm{diag}[(0 - \bar{l}) \ldots (N + T - 2 - \bar{l})]^T$ je diagonální váhovací matice.

- Ohledně vlastností je toto kritérium je celkem podobné kritériu MSSNR.

2.6.3 Maximum geometric SNR (MGSNR)

- Návrh metodou MGSNR byl jedním z prvních návrhů k maximalizaci přenosové kapacity. Zatím co optimalizace popsané v předchozí části lze zahrnout mezi úlohy návrhu filtru s jedním Rayleighovým kvocientem, optimalizace maxima geometrického SNR spadá do úloh návrhu s více kvocienty. Pro výpočet optimalizace to znamená zejména iterace přes všechny, použité nebo nepoužité tóny.

- Na základě vztahu pro celkový počet vyslaných bitů v DMT symbolu:

$$b_{DMT} = \sum_{i \in \mathcal{S}} \log_2 \left(1 + \frac{\mathrm{SNR}_i}{\Gamma_i}\right) = \log_2 \prod_{i \in \mathcal{S}} \left(1 + \frac{\mathrm{SNR}_i}{\Gamma_i}\right)\ , \tag{72}$$

kde $\mathcal{S}$ je vektor obsahující indexy použitých tónů, SNR_i je SNR pro i-tý tón a Γ_i je SNR mezi tóny (předp. stejné pro všechny tóny, tzn.: $\Gamma_i = \Gamma, \forall_i$),

napíšeme definici geometrického SNR:

$$\mathrm{GSNR}(\mathbf{w}) = \Gamma \left(\left[\prod_{i \in \mathcal{S}} \left(1 + \frac{\mathrm{SNR}_i}{\Gamma}\right) \right]^{1/Nu} - 1 \right)\ . \tag{73}$$

- Vztah pro celkový počet bitů (72) se pak zjednoduší na:

$$b_{\mathrm{GSNR}}(\mathbf{w}) = N_u \log_2\left(1 + \frac{\mathrm{GSNR}}{\Gamma}\right) , \tag{74}$$

  kde N_u je počet použitých tónů.

- Výraz pro celkový počet bitů (74) popisuje přímou úměrnost mezi přenosovou kapacitou a geometrickým SNR. Za předpokladu vysokých hodnot SNR_i a s určitou chybou lze výpočet GSNR (73) aproximovat:

$$\mathrm{GSNR}(\mathbf{w}) \approx \left(\prod_{i\in\mathcal{S}} \mathrm{SNR}_i\right)^{1/Nu} . \tag{75}$$

- Dle [1] lze pomocí SNR modelu přenosového kanálu dojít k požadované úloze návrhu s více Rayleighovými kvocienty. Pro definici SNR modelu kanálu vyjádříme koeficienty TIR, TEQ a odezvy kanálu ve frekvenční oblasti pro i-tý tón:

$$\begin{aligned} B_i &= \mathcal{F}_N[i,:][\mathbf{b}^T \ \mathbf{0}_{1\times(N-\nu-1)}]^T , \\ W_i &= \mathcal{F}_N[i,:][\mathbf{w}^T \ \mathbf{0}_{1\times(N-T)}]^T , \\ H_i &= \mathcal{F}_N[i,:]\mathbf{h}^T . \end{aligned}$$

  Model kanálu, za předpokladu $B_i \approx H_i W_i$, bude tedy ve tvaru:

$$\mathrm{SNR}_i(\mathbf{w},\mathbf{b}) = \frac{\sigma_{x,i}^2 \left|H_i\right|^2}{\sigma_{n,i}^2} = \frac{\sigma_{x,i}^2 \left|H_i\right|^2 \left|W_i\right|^2}{\sigma_{n,i}^2 \left|W_i\right|^2} \approx \frac{\sigma_{x,i}^2 \left|B_i\right|^2}{\sigma_{n,i}^2 \left|W_i\right|^2} \tag{76}$$

  kde $\sigma_{x,i}^2$ je výkon vysílaného signálu a $\sigma_{n,i}^2$ je výkon šumu na příjmu pro i-tý tón.

- Dosazením SNR modelu (76) do zjednodušeného vztahu pro GSNR (75) dostaneme přibližný vztah

$$\mathrm{GSNR}(\mathbf{w},\mathbf{b}) \approx \sigma_x^2 \left(\prod_{i\in\mathcal{S}} \frac{\left|B_i\right|^2}{\sigma_{n,i}^2 \left|W_i\right|^2}\right)^{1/N_u} , \tag{77}$$

  kdy předpokládáme stejný výkon na jednotlivých tónech ($\sigma_{x,i}^2 = \sigma_x^2, \forall_i$).

- Za předpokladu nezávislosti šumu na výstupu ekvalizéru a koeficientů TIR, $\mathbf{b}$, je maximalizace (76) ekvivalentní maximalizaci funkce

$$\begin{aligned} J(\mathbf{b}) &= \frac{1}{N_u} \sum_{i\in\mathcal{S}} \ln\left|B_i\right|^2 && (78) \\ &= \frac{1}{N_u} \sum_{i\in\mathcal{S}} \ln(\mathbf{b}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{b}) , && (79) \end{aligned}$$

  kde $\mathbf{Q}_i = \mathcal{F}_N[i, 1:\nu+1]^H \mathcal{F}_N[i, 1:\nu+1]$.

- Za podmínky zabraňující triviálnímu řešení $\mathbf{b}^T\mathbf{b} = 1$ řešíme (79) jako požadovanou úlohu s více Rayleighovými kvocienty

$$\mathbf{b}_{opt} = \arg\max_{\mathbf{b}} \prod_{i\in\mathcal{S}} \frac{\mathbf{b}^T\mathbf{B}_i\mathbf{b}}{\mathbf{b}^T\mathbf{A}_i\mathbf{b}} \tag{80}$$

pro matice

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{I}_{\nu+1} \ ,$$
$$\mathbf{B}_i = \mathbf{Q}_i \ .$$

2.6.4 Carrier nulling algorithm (CNA)

- Carrier nulling (CNA) je slepá metoda ekvalizace pro OFDM/DMT systémy. Vychází z předpokladu, že některé nosné v DMT symbolu nejsou použity (jsou nulové) pro přenos informace, což je typická situace v DMT/OFDM systémech.
- CNA ekvalizér se adaptuje tak, aby minimalizoval (nuloval) energii nepoužitých nosných v přijímaných symbolech a tím při příjmu potlačil interferenční vlivy kanálu.
- Nulování nepoužitých nosných se při adaptaci CNA ekvalizéru dosahuje minimalizací účelové funkce:

$$J = \sum_{i\in\mathcal{S}} \mathcal{E}\left[|\mathcal{F}_N[i,:]\mathbf{Y}^k\mathbf{w}|^2\right] , \tag{81}$$

kde $\mathcal{F}_N[i,:]$ reprezentuje i-tý řádek DFT matice, $\mathcal{S}$ je množina nulových nosných a $\mathbf{Y}^k$ je matice $T \times N_{FFT}$ (Toeplitz) přijímaných symbolů ve tvaru:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_0 & y_{-1} & \cdots & y_{-T+1} \\ y_1 & y_0 & \cdots & y_{-T+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_{N-T} \end{bmatrix}$$

- K zamezení triviálnímu řešení je třeba přidat nějakou podmínku (constraint), např.: $\mathbf{w}^T\mathbf{w} = 1$.
- Přeformulováním účelové funkce (81) do maticového tvaru dostáváme matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ vhodné pro metodu s jedním Rayleighovým kvocientem:

$$\mathbf{A} = \sum_{i\in\mathcal{S}} \mathcal{E}\left[(\mathbf{Y}^k)^T\mathcal{F}_N[i,:]^H\mathcal{F}_N[i,:]\mathbf{Y}^k\right] , \tag{82}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{I}_T$$

- Jelikož CNA uvažuje pouze nulové nosné, nevede CNA prokazatelně ke zkrácení kanálu (ekvalizaci). To je zjevná nevýhoda slepé (********* slepých???) metod.

2.7 Shrnutí

- V literatuře bylo popsáno mnoho různých metod optimalizací ekvalizéru ADSL kanálu v časové oblasti. Díky srozumitelnému odvození MMSE ekvalizéru bylo MMSE-TEQ výchozím bodem pro studium dalších metod optimalizací.

- Metody založené na MMSE-TEQ patří mezi ty, které lze řešit jako úlohu návrhu filtru s jedním Rayleighovým kvocientem. Takové úlohy vedou k řešení pomocí vlastních čísel. Složitější metody optimalizace TEQ (např.: MGSNR) jsou řešeny úlohami s více kvocienty a stejně tak i metody optimalizací Per-Tone ekvalizérů (PT-EQ).

- Optimalizace TEQ na bázi úloh s jedním Rayleighovým kvocientem nabízí suboptimální řešení, a to proto, že neoptimalizují přímo na přenosovou kapacitu. Jejich výhodou je srozumitelnost odvození či implementace a menší výpočetní náročnost. Matematické řešení vlastních čísel, obsažené v optimalizacích, se pak provádí iteračními metodami (např.: výkonová nebo inverzní iterační metoda).

- Přímo na přenosovou kapacitu optimalizující metody, založené na úlohách s více Rayleighovými kvocienty, jsou preciznějším řešením. Nevýhoda je nutnost častého řešení nelineárních optimalizačních úloh.

2.8 Ekvalizace ve frekvenci - FEQ

- Jak bylo uvedeno v sekci Princip ekvalizace (str. 5), slouží FEQ k ekvalizaci korektně přijatých tónů, tj. za předpokladu optimální funkce TEQ.
- V reálných případech FEQ jako komplexní násobička (obr. 4) nemusí být dostačující. Vývoj ekvalizace ADSL kanálu ukázal jinou cestu, a to použití tzv. per-tone ekvalizérů (PT-EQ) na místo kombinace TEQ a FEQ.

2.9 Ekvalizace ve frekvenci (PT-EQ)

- Ekvalizace po jednotlivých tónech (per tone) ve frekvenční oblasti je z principu preciznější metoda než ekvalizace v časové oblasti. Hlavní příčinou je podstata DMT, tj. ortogonální řazení ve frekvenci po sobě jdoucích signálů.
- Na rozdíl od FEQ zajišťuje kompletní ekvalizaci, tj. bez TEQ. Funkce TEQ je transformována do frekvenční oblasti, čili za operaci DFT v přijímači.
- Základní nevýhodou může být větší náročnost na realizaci.

2.9.1 Základní provedení PT-EQ

- Demodulovaný signál po ekvalizaci může být definován takto:

$$[Z_1^k \dots Z_N^k]^T = \mathrm{diag}\{D_1 \dots D_N\} \cdot \underbrace{\mathcal{F}_N(\mathbf{Yw})}_{1\,\mathrm{FFT}} , \tag{83}$$

  kde $D_1 \dots D_N$ jsou komplexní korektory signálu na výstupu kanálu (toeplitzovská matice $\mathbf{Y}$).

- Výstup pro jeden i-tý tón lze podle (83) napsat

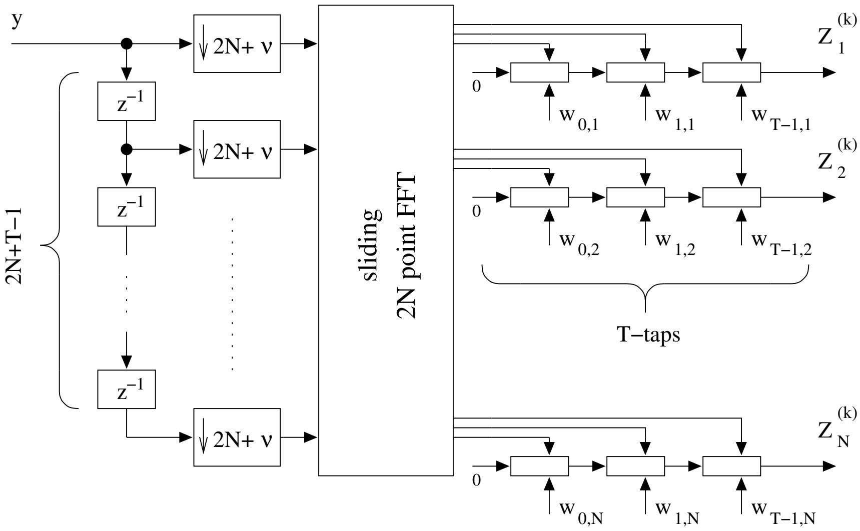
$$Z_i = D_i \cdot \mathrm{row}_i(\mathcal{F}_N) \cdot (\mathbf{Yw}) . \tag{84}$$

- Na signál jednoho tónu po DFT transformaci lze pohlížet jako na výstup filtru, jehož koeficienty jsou rovny koeficientům odpovídající řádky DFT matice $\mathcal{F}_N$. Výstup pro jeden tón tedy přepíšeme do tvaru:

$$Z_i = \mathrm{row}_i \underbrace{(\mathcal{F}_N \mathbf{Y})}_{T\,\mathrm{FFT's}} \cdot \mathbf{w} D_i . \tag{85}$$

  Dostáváme tím vyjádření popisující tyto filtry délky T.

- Pro výpočet ekvalizace jednoho symbolu musíme provést T DFT operací (jedna pro každý sloupec sig. matice $\mathbf{Y}$). Dle uvedených poznatků dostáváme strukturu základního per-tone ekvalizéru (obr. 7). Vidíme, že každý tón je ekvalizován svým TEQ.



Obrázek 7: Základní provedení per-tone ekvalizéru (PT-EQ)

2.9.2 PT-EQ s optimalizací MMSE (MMSE-FEQ)

- Pro optimální návrh jednotlivých TEQ napíšeme účelovou funkci dle kritéria nejmenších středních čtverců (MMSE):

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}_i} J(\mathbf{w}_i) &= \min_{\mathbf{w}_i} \mathrm{E}\left[\left|Z_i^{(k)} - X_i^{(k)}\right|^2\right] \qquad (86) \\ &= \min_{\mathbf{w}_i} \mathrm{E}\left[\left|\mathbf{w}_i^T \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{F}_N[i,:] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_N[i,:]) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathcal{F}_N[i,:] \end{bmatrix} \cdot \mathbf{y} - X_i^{(k)}\right|^2\right] \end{aligned}$$

  kde $\mathcal{F}_N[i,:]$ je i-tý řádek DFT matice.

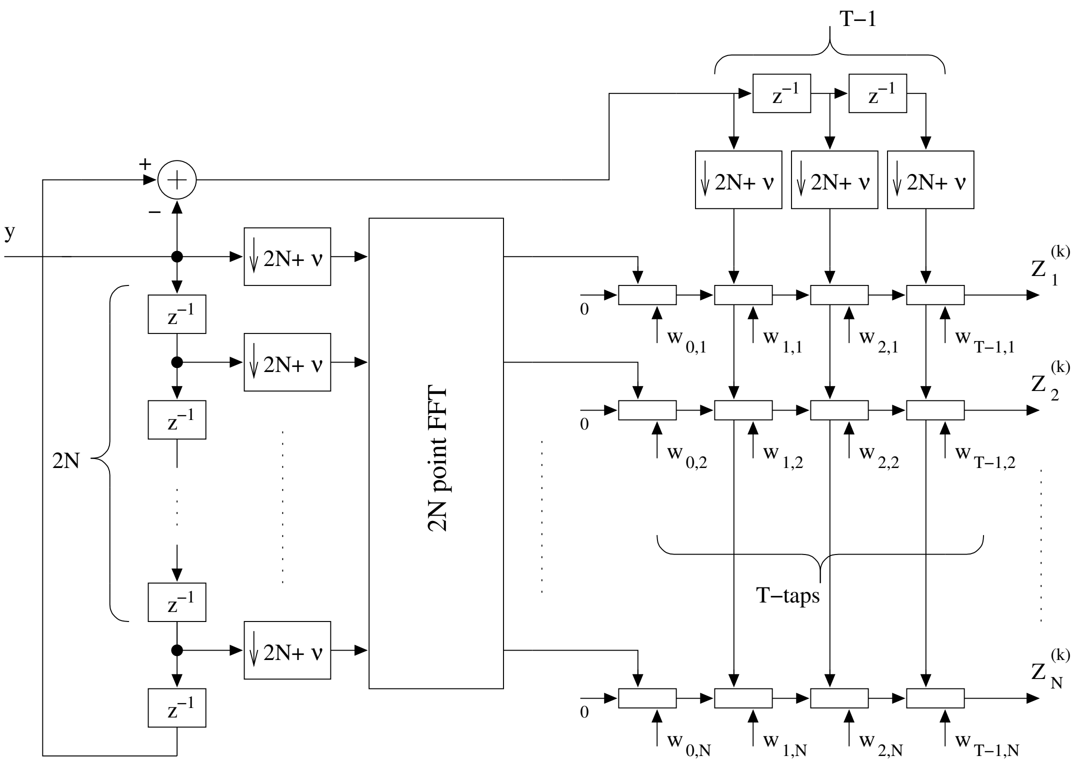
- Zde je vidět jak MMSE-FEQ optimalizuje každý tón separátně. Tento fakt vede ke hladké funkci mezi přenosovou kapacitou a zpožděním Δ (viz. model optimalizace MMSE-TEQ) a tím je, oproti MMSE-TEQ snadnější nalézt optima filtrů.

- Ekvalizér MMSE-FEQ také odstraňuje druhou nevýhodu MMSE-TEQ. Zvýšení řádu filtrů u MMSE-FEQ totiž vede ke zvýšení přenosové kapacity, v případě MMSE-TEQ to nebylo zaručeno.

2.9.3 Modifikace PT-EQ

- Kvůli podstatně zvýšeným výpočetním nárokům MMSE-FEQ, jako je T výpočtů operace DFT, je třeba zjednodušit strukturu uvedeného základního ekvalizéru.

- Signálová matice $\mathbf{Y}$ má z definice strukturu Toeplitzovy matice a lze dokázat, že je, díky tomu, možné nahradit výpočet T DFT operací (sliding window FFT) za jednu DFT operaci. Takto modifikovanou strukturu ekvalizéru ukazuje obrázek č. 8.



Obrázek 8: Náhrada sliding window FFT v ekvalizéru

- Princip upraveného ekvalizéru lze vyložit následovně. Nejprve je ekvalizován příslušný tón a po té jsou provedeny operace k výpočtu sliding window FFT.

- K. Van Acker, ve své práci [2], uvádí účelovou funkci pro tento modifikovaný ekvalizér. Odvození se opírá o základní vyjádření účelové funkce (86), ta, resp. její hledané minimum, v souladu s úpravami filtru nabývá tvaru:

$$\min_{\mathbf{v}_i} J(\mathbf{v}_i) = \min_{\mathbf{v}_i} \mathrm{E}\left[\left|\mathbf{v}_i^T \cdot \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I}_T & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{0} & \multicolumn{2}{c}{\mathcal{F}_N[i,:]} \end{array}\right] \cdot \mathbf{y} - X_i^{(k)}\right|^2\right], \qquad (87)$$

kde $\mathbf{v}_i^T = [v_{i,T-1} \ \dots \ v_{i,0}]$ jsou koeficienty ekvalizéru pro i-tý tón v obráceném pořadí.

3 Shrnutí

- Současná práce na projektu obsahuje popis základních metod optimalizace TEQ. Metody založené na optimalizaci MMSE, resp. algoritmy optimalizací, byly implementovány v prostředí Matlab a byly aplikovány v modelu přenosové cesty ADSL komunikace.

- Další popsané optimalizace TEQ, včetně těch na bázi úloh s více Rayleighovými kvocienty, budou také implementovány v prostředí Matlab. Jako shrnutí ekvalizace v časové oblasti bude potom provedeno srovnání výsledků simulací pro vybrané metody.

- Aktuální řešené téma je ekvalizace kanálu po jednotlivých tónech (Per-Tone EQ). Základní metoda a její realizace byla již popsána a bude implementována. Podle předběžného studia bude pravděpodobné předmětem zájmu jednak metoda maximalizující přenosovou kapacitu (Bitrate Maximizing) a metody využívající váhování oknem, jako například používá nedávno publikovaný ekvalizér WiPTEQ (autora G. Ysebaerta).

Reference

[1] G. Ysebaert, Equalization and echo cancellation in DMT-based systems, SISTA-ESAT K.U. Leuven, Belgium, April 2004

[2] K. Van Acker, Equalization and echo cancellation for DMT modems, SISTA-ESAT K.U. Leuven, Belgium, January 2001

[3] John A. C. Bingham, ADSL, VDSL and multicarrier modulation, John Wiley & Sons, inc., 2000

[4] Cioffi J. M., Al-Dhahir N. M. W., Efficiently-computed reduced-parameter input-aided MMSE equalizers fo ML detection: A unified approach, IEEE Trans. on information theory, 42(3):p. 903-915, May 1996