Inatel

C209 – Computação Gráfica e Multimídia

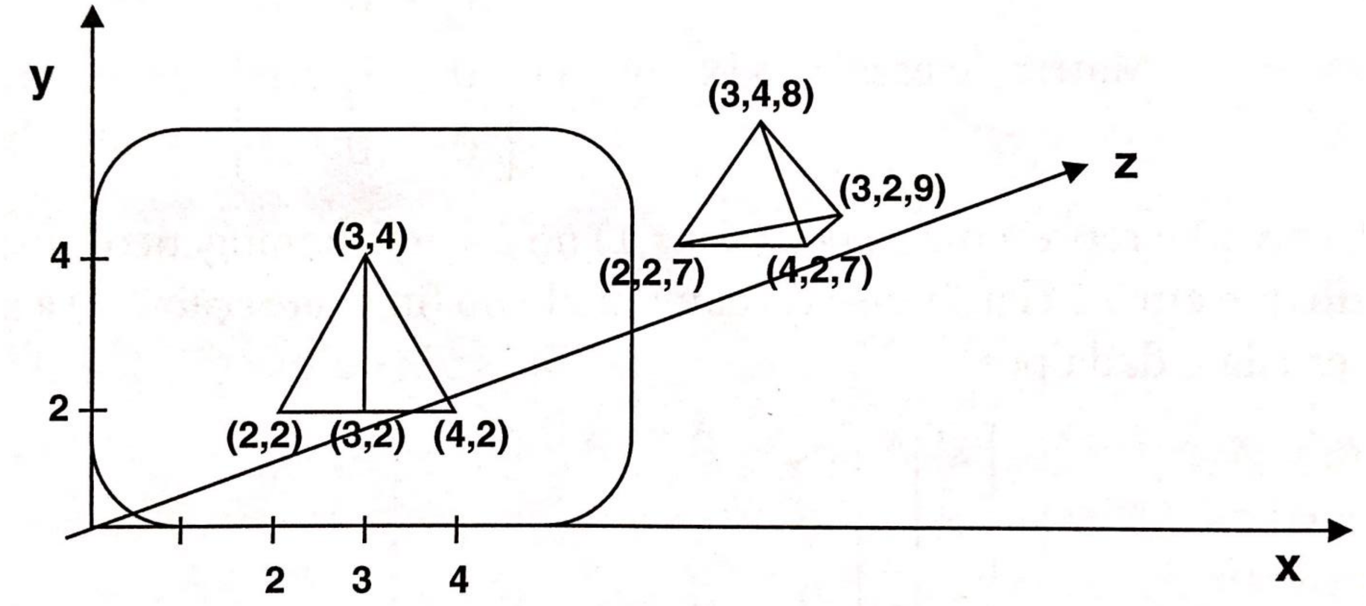
Transformações Geométricas
Parte 3/3

Marcelo Vinícius Cysneiros Aragão

marcelovca90@inatel.br

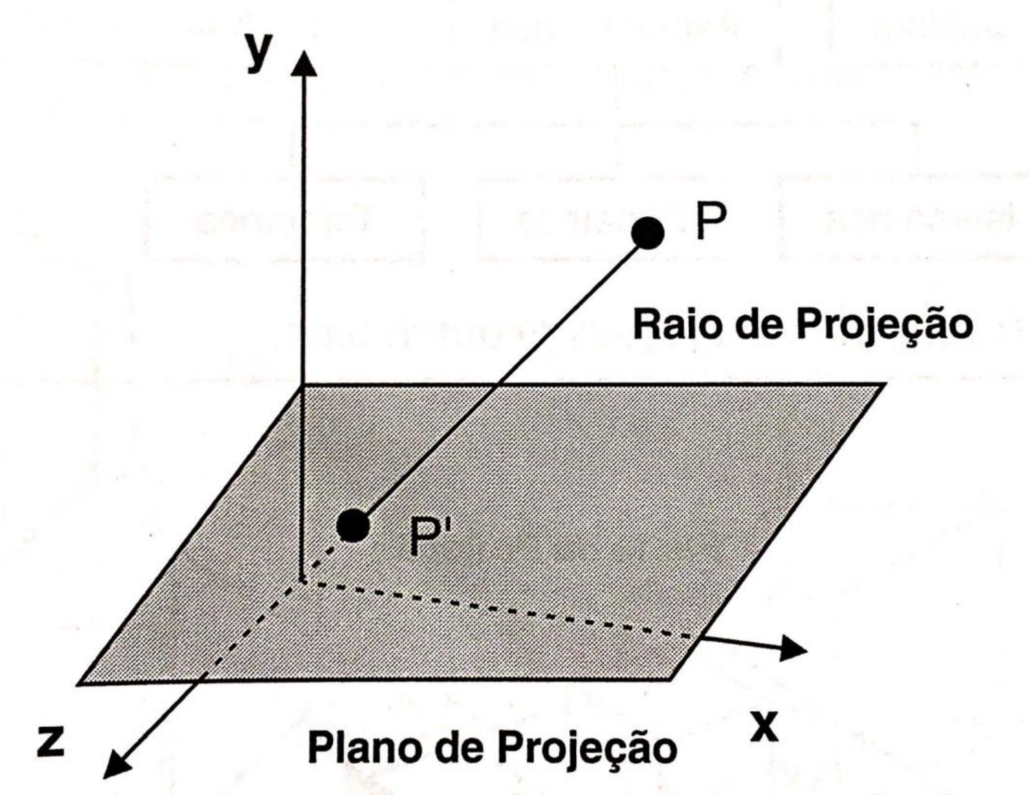
Projeções Geométricas

- Projeções permitem a visualização planar de objetos tridimensionais.
- Para gerar a imagem de um objeto 3D, precisamos converter as coordenadas 3D em coordenadas 2D, que correspondem a uma visão do objeto de uma posição específica.



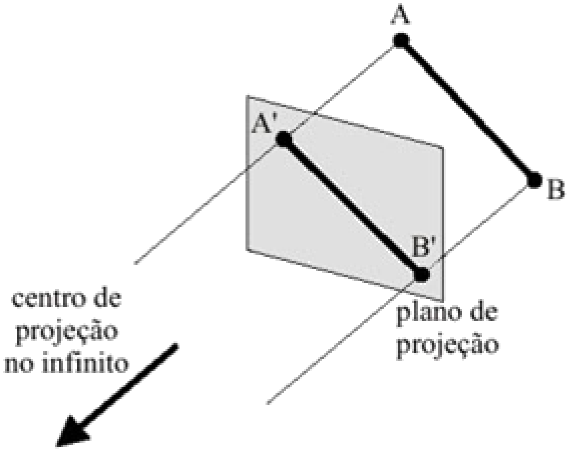
Projeções Geométricas

- Elementos básicos:
  - Plano de projeção: superfície onde o objeto será projetado (ou seja, representado em 2D)
  - Raio de projeção: retas que passam pelos pontos do objeto e pelo centro de projeção
  - Centro de projeção: ponto fixo de onde os raios de projeção partem

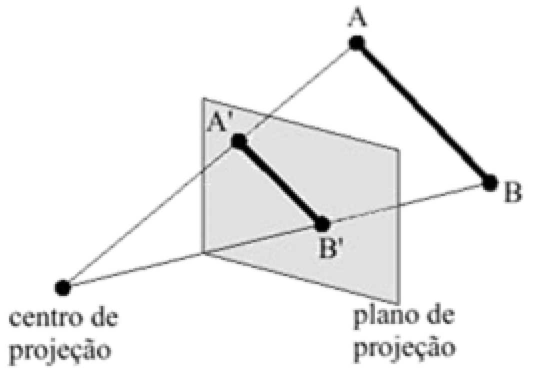


Classificação das Projeções Geométricas

- As classificações das projeções geométricas dependem das relações entre o centro, o plano e as direções dos raios de projeção.
  - Nas projeções paralelas, o centro de projeção é localizado no infinito, e todas as linhas de projeção são paralelas entre si.
  - A projeção perspectiva é uma transformação dentro do espaço tridimensional e suas projeções representam a cena vista de um ponto de observação a uma distância finita.

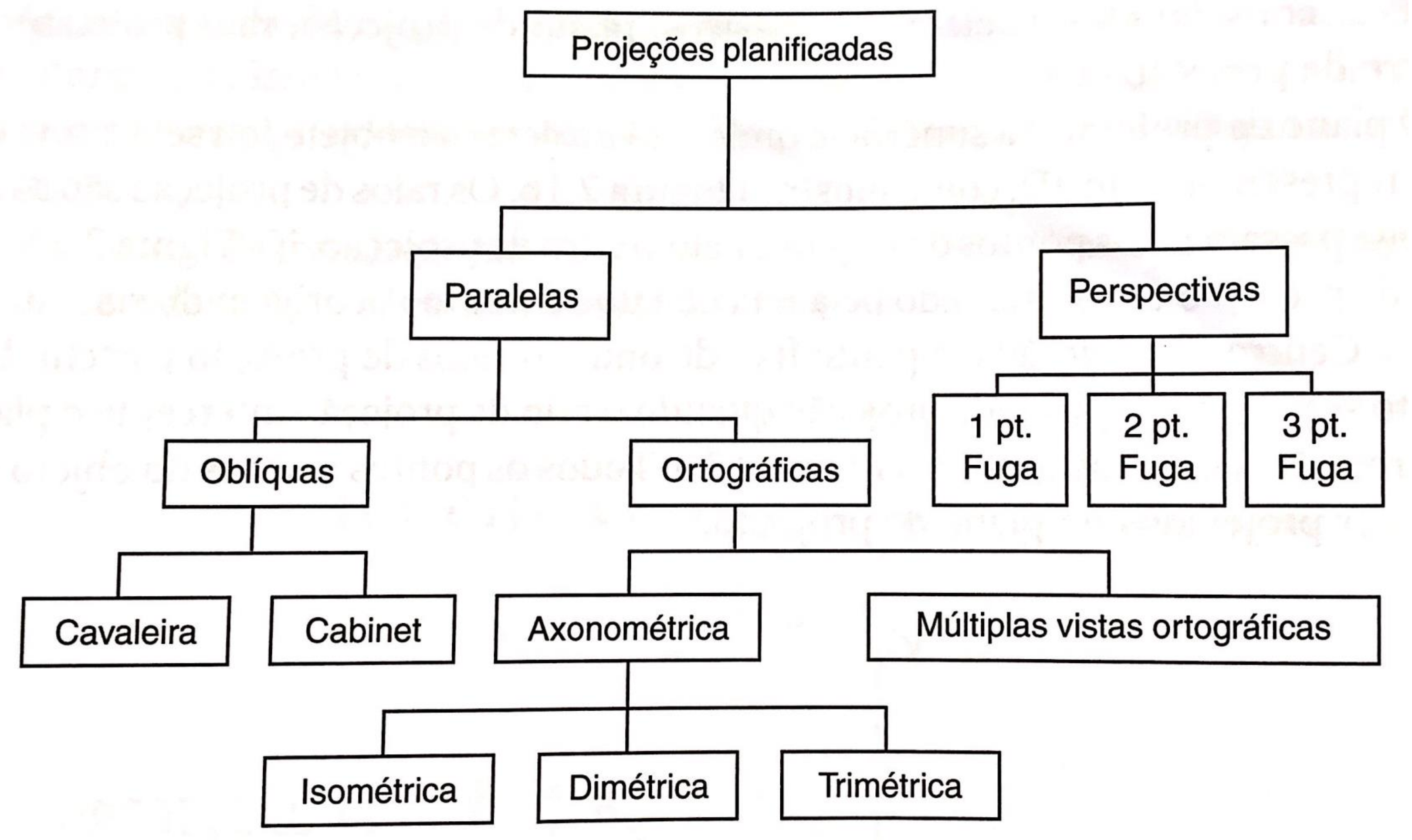


Projeção Paralela



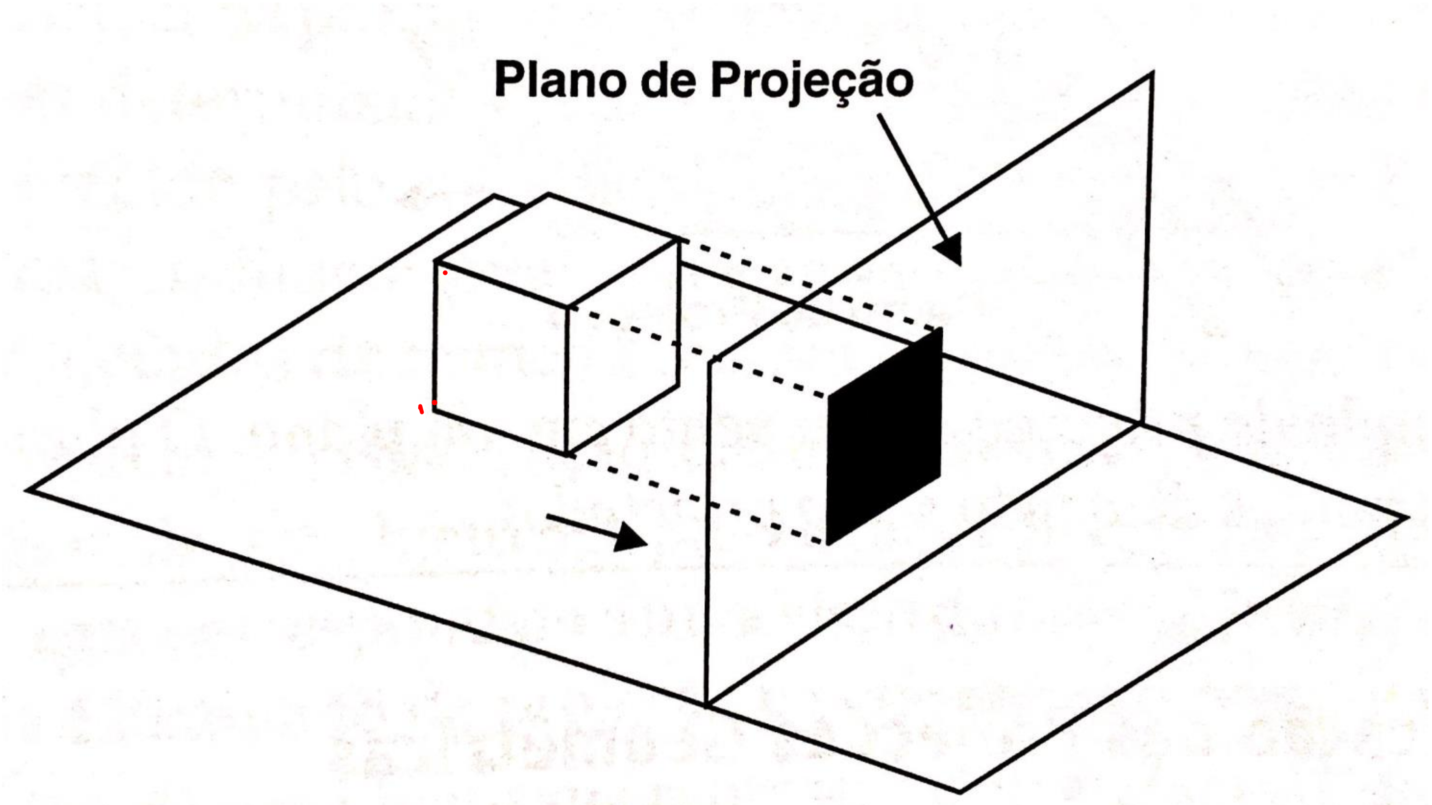
Projeção Perspectiva

Classificação das Projeções Geométricas



Projeção Paralela Ortográfica

- Linhas de projeção são paralelas entre si e perpendiculares ao plano de projeção.



Projeção Paralela Ortográfica

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção em relação ao plano yz (ou $x = T_x$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & T_y & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

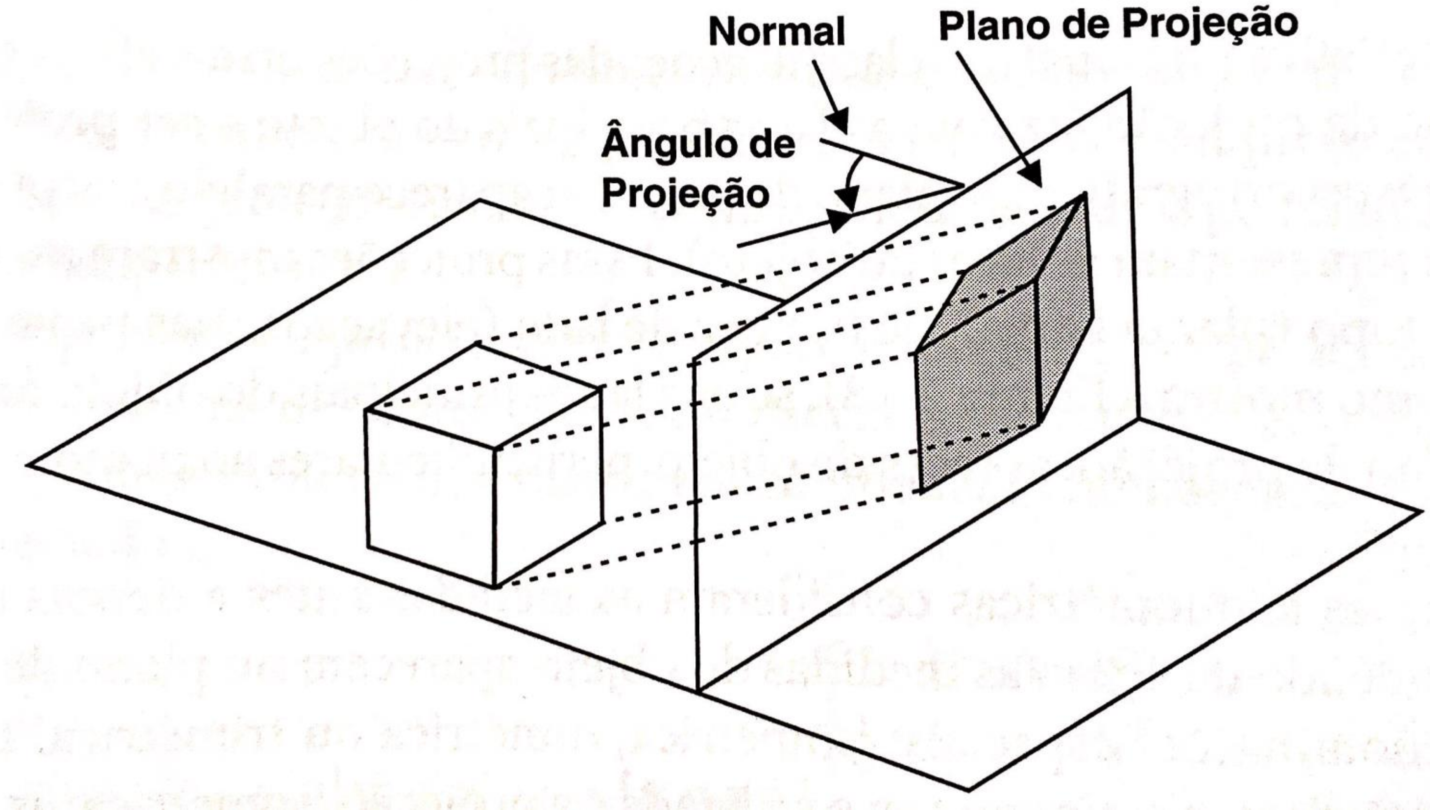
Projeção em relação ao plano xz (ou $y = T_y$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_z & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção em relação ao plano xy (ou $z = T_z$)

Projeção Paralela Oblíqua

- Linhas de projeção inclinadas em relação ao plano de projeção de qualquer ângulo.



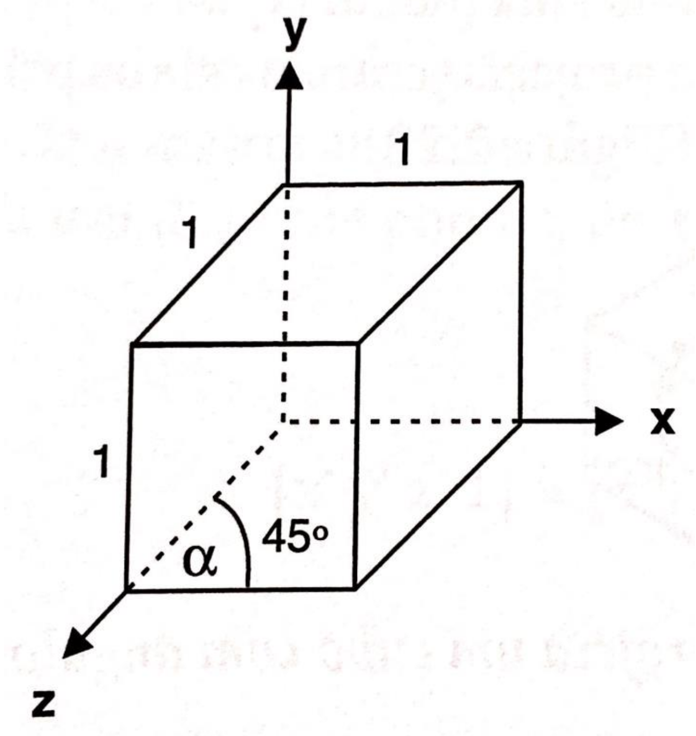
Projeção Paralela Oblíqua

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l\cos\alpha & l\sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

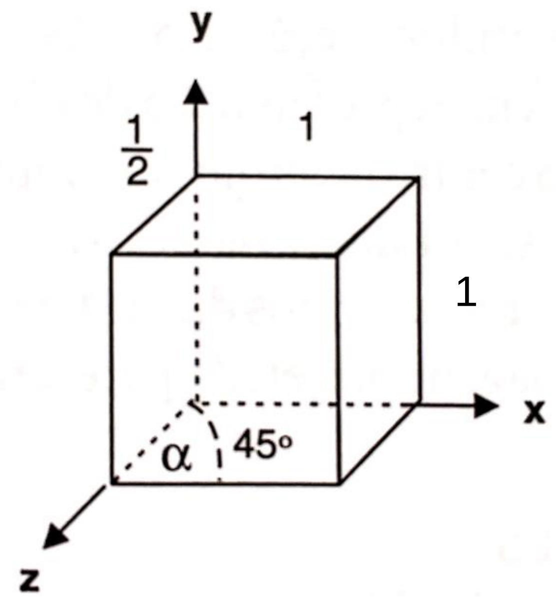
l é a distância do objeto ao plano de projeção
α é o ângulo de projeção

Projeção Paralela Oblíqua

Cavaleira ($l = 1$ e $\alpha = 45°$):
Preserva medidas originais

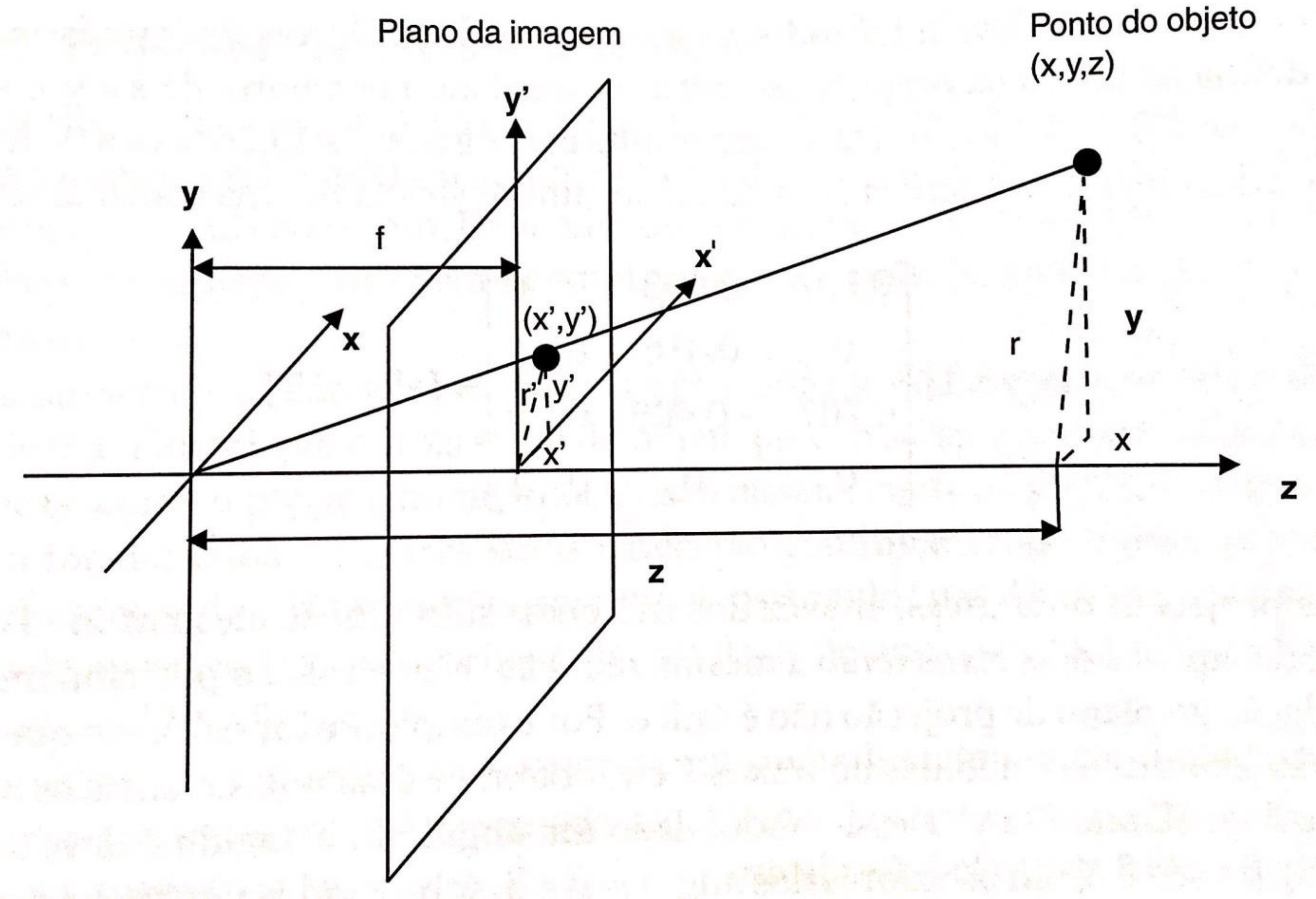


Gabinete ($l = 0{,}5$ e $\alpha = 45°$):
Somente a face do objeto paralela ao plano de projeção permanece com seu tamanho original;
Demais arestas ficam com metade do tamanho



Projeção Perspectiva ou Cônica

- Representação do espaço tridimensional (3D), da forma vista pelo olho humano, em um plano bidimensional (2D).
- As coordenadas dos pontos projetados em perspectivas são obtidas pela interseção dos raios projetores com o plano de projeção.



Calculando o ponto P_p

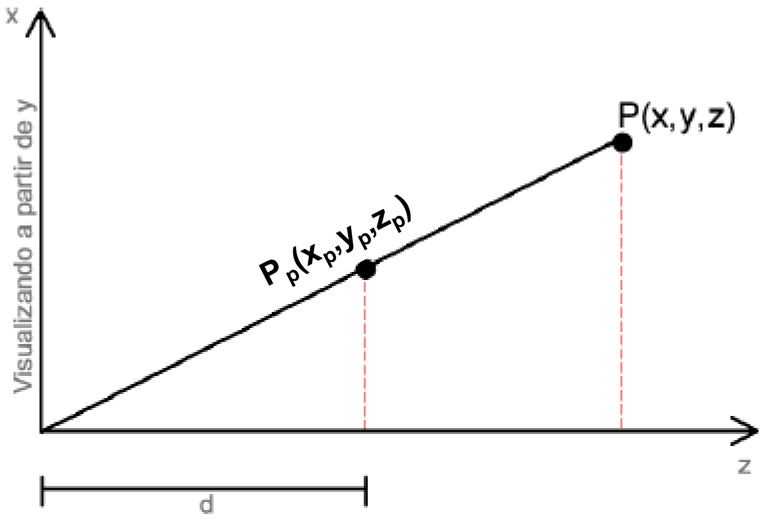
- Usando semelhança de triângulos, podemos calcular o valor do ponto x_p.

- Podemos considerar que $\frac{x_p}{x} = \frac{d}{z}$

- Isolando x_p, temos: $x_p = \frac{d}{z}.x$

- Observe que $\frac{d}{z}$ apresenta um fator de escala para as transformações entre as coordenadas. Isso explica porque cada ponto do objeto em perspectiva parece reduzido por um fator de escala próprio.

- Podemos fazer a mesma coisa para y, de forma análoga $y_p = \frac{d}{z}.y$



Definindo o ponto P_p

- O ponto P_p é definido como:

$$P_p = \left(x.\frac{d}{z}, y.\frac{d}{z}, d \right) \quad (1)$$

- A partir de (1) e considerando $\mathrm{W} = \frac{z}{d}$, chegamos à matriz 4x4 capaz de calcular P_p:

$$P_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ z/d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot \frac{d}{z} \\ y \cdot \frac{d}{z} \\ d \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

- Olhando de "trás pra frente", ao dividirmos a última matriz por W, chegamos na penúltima matriz que por sua vez é produto da multiplicação da matriz de perspectiva pela matriz com os pontos "normalizados".

Matriz de projeção perspectiva

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Projeção perspectiva em x

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/d & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Projeção perspectiva em y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix}$$

Projeção perspectiva em z

Exemplo

- Para calcular um ponto qualquer $\mathrm{P}(x, y, z)$ projetado em perspectiva com centro de projeção em $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$, deve-se:
- (A) transladar o objeto para o centro de perspectiva (origem) $P_0(-x_0, -y_0, -z_0)$,
- (B) empregar a matriz de projeção perspectiva
- (C) retornar o objeto para a posição original (x_0, y_0, z_0)

Exemplo

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_o \\ 0 & 1 & 0 & y_o \\ 0 & 0 & 1 & z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_o \\ 0 & 1 & 0 & -y_o \\ 0 & 0 & 1 & -z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

- Dica: Monta-se na ordem inversa ($C \cdot B \cdot A \cdot P$). A sequência de cálculo das matrizes é definida por ($C \cdot (B \cdot (A \cdot P))$). Faz-se ($A \cdot P$), depois multiplica-se (B) pelo resultado obtido, e (C) pelo resultado obtido.

Um ponto qualquer $\mathrm{P}(x, y, z)$ projetado em perspectiva no eixo z com centro de projeção em $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & +x_0 \\ 0 & 1 & 0 & +y_0 \\ 0 & 0 & 1 & +z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & +x_0 \\ 0 & 1 & 0 & +y_0 \\ 0 & 0 & 1 & +z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & +x_0 \\ 0 & 1 & 0 & +y_0 \\ 0 & 0 & 1 & +z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \\ \boxed{(z - z_0)/d} \end{bmatrix} \rightarrow \mathrm{W}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_0 + x_0 W \\ y - y_0 + y_0 W \\ z - z_0 + z_0 W \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x - x_0 + x_0 W)/W \\ (y - y_0 + y_0 W)/W \\ (z - z_0 + z_0 W)/W \\ W/W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x - x_0}{W} + x_0 \\ \frac{y - y_0}{W} + y_0 \\ \frac{z - z_0}{W} + z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x - x_0}{z - z_0} d + x_0 \\ \frac{y - y_0}{z - z_0} d + y_0 \\ \frac{z - z_0}{z - z_0} d + z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x - x_0}{z - z_0} d + x_0 \\ \frac{y - y_0}{z - z_0} d + y_0 \\ d + z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Um ponto qualquer $\mathrm{P}(2,1,4)$ projetado em perspectiva no eixo z com centro de projeção em $\mathrm{P}_0(0,0,0)$ e $d = 2$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x-x_0}{z-z_0} d + x_0 \\ \frac{y-y_0}{z-z_0} d + y_0 \\ d + z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2-0}{4-0} 2 + 0 \\ \frac{1-0}{4-0} 2 + 0 \\ 2 + 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resultado

- Resolvendo a matriz de projeção perspectiva (4) para um ponto (x, y, z) com relação a um centro de projeção (x_0, y_0, z_0), e sendo $z \neq 0$, temos:

Matriz de projeção perspectiva

$$P_p = \begin{bmatrix} x - x_o + x_o \cdot \frac{z - z_o}{d} \\ y - y_o + y_o \cdot \frac{z - z_o}{d} \\ z - z_o + z_o \cdot \frac{z - z_o}{d} \\ \frac{z - z_o}{d} \end{bmatrix} \tag{5}$$

- Ou ainda, a Matriz R:

Matriz R

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{x_o}{d} & -x_o - x_o \cdot \frac{z_o}{d} \\ 0 & 1 & \frac{y_o}{d} & -y_o - y_o \cdot \frac{z_o}{d} \\ 0 & 0 & 1 + \frac{z_o}{d} & -z_o - z_o \cdot \frac{z_o}{d} \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & -\frac{z_o}{d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

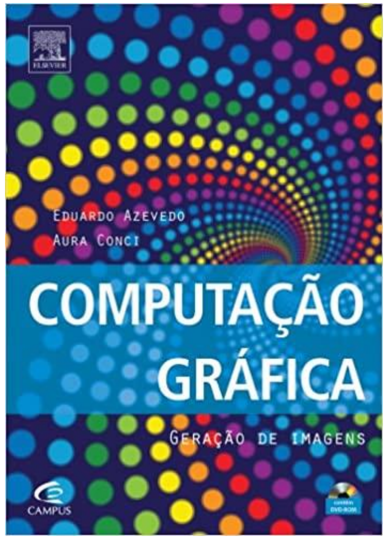
Aplicação

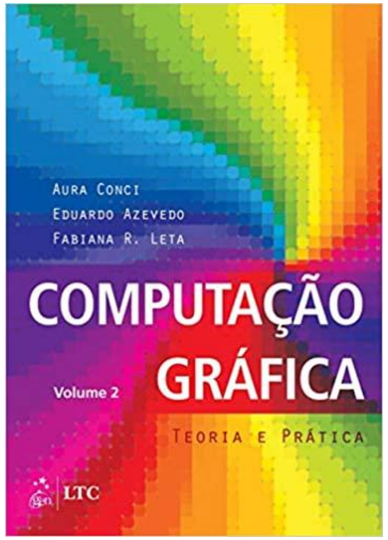
- Aplicando a matriz de projeção perspectiva resultante (6) para o ponto $\mathrm{P} = (2, 1, 4)$, considerando o centro de projeção na origem e $\mathrm{d} = 2$, temos, respectivamente, o resultado da matriz e o ponto "normalizado“:

Ponto

$$P' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Referências & Links Interessantes





- AZEVEDO, Eduardo; CONCI, Aura, Computação gráfica volume 1: geração de imagens. Rio de Janeiro, RJ. Editora Campus, 2003, 353 p. ISBN 85-352-1252-3.

- AZEVEDO, Eduardo; CONCI, Aura; LETA, Fabiana R. Computação gráfica volume 2: teoria e prática. Rio de Janeiro, RJ: Editora Elsevier, 2007, 384 p. ISBN 85-352-2329-0.

- PAULA FILHO, Wilson de Pádua, Multimídia: Conceitos e aplicações. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2000, 321 p. ISBN 978-85-216-1222-3.