核方法

前言

我们之前介绍了核函数，在 SVM 和 SVR，总会出现 $\kappa(\cdot,\cdot)$ 的线性组合。事实上，我们有以下表示定理，更一般的结论（来自西瓜书）：

定理 6.2（表示定理）令 $\mathbb{H}$ 为核函数 κ 对应的再生希尔伯特空间，$\|h\|_{\mathbb{H}}$ 表示为 $\mathbb{H}$ 空间中关于 h 的范数，对于任意单调函数 $\Omega:[0,\infty]\mapsto\mathbb{R}$ 和任意非损失函数 $\ell:\mathbb{R}^m\mapsto[0,\infty]$，优化问题

$$\min_{h\in\mathbb{H}}\ F(h)=\Omega(\|h\|_{\mathbb{H}})+\ell\big(h(x_1),h(x_2),...,h(x_m)\big),\quad (6.57)$$

的解总可写成

$$h^*(x)=\sum_{i=1}^m\alpha_i\kappa(x,x_i),\quad (6.58)$$

核方法

上述定理对损失函数没有限制，正则化项 Ω 仅要求递增即可，甚至不是凸函数，这意味着一般的损失函数和正则化项，优化问题(6.57)的最优解 $h^*(x)$ 都可以表示为核函数 κ 的线性组合。也就是与正则化项无关，解仅关注损失函数。

基于一系列核函数，我们拥有了一个统一的方法，也就是核方法(Kernel methods)。最常见的是引入核函数来实现核化，将线性学习变为非线性。

西瓜书以 线性判别分析（LDA） 作为基础，推导了核函数下的 LDA $\rightarrow$ KLDA，详细内容参考西瓜书P137-139即可。