

# 雅可比矩阵、黑塞矩阵

## 前言

什么年代了还百度？我们都用AI大模型！AI不会拒绝你，AI会给你基本正确的答案，AI不会对你不耐烦，AI可以给你举例子，可以让你从一个只知道名词到深入理解，这就是AI！

**prompt 提示词：**我是一个有大学数学基础的白痴大学生，向我解释什么是雅可比矩阵和黑塞矩阵，并给出简单易于理解的例子，全程用到公式的地方使用Latex公式描述

## 来自ChatGPT4.5：

非常好，咱们就按你说的，从一个**白痴大学生的视角**，深入浅出地说清楚：

### 1 雅可比矩阵 (Jacobian matrix)

直觉：

当你有一个多元向量值函数

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

比如

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \tag{1}$$

时，雅可比矩阵就是把这些分量函数  $f_i$  对每一个变量的偏导数排成一个矩阵。

换句话说，Jacobian 矩阵记录了 **每个输出对每个输入的偏导信息**，非常像多元函数的一阶导数的向量化版本。

定义：

$$J(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

简单例子：

考虑

$$f(x, y) = [f_1(x, y), f_2(x, y)] = \begin{bmatrix} x^2 + y \\ \sin(xy) \end{bmatrix}$$

那么

$$J(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

计算一下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= y \cos(xy), & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= x \cos(xy) \end{aligned}$$

所以

$$J(f) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ y \cos(xy) & x \cos(xy) \end{bmatrix}$$

这就是多元向量函数的一阶偏导数信息表。

## 2 黑塞矩阵 (Hessian matrix)

直觉：

- 黑塞矩阵是**多元标量函数**二阶偏导的矩阵
- 你可以看成是多元标量函数的“二阶导数”，描述曲率信息

定义：

如果

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

那么

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

简单例子：

考虑

$$f(x, y) = x^3 + 3xy + y^2$$

先计算一阶偏导：

$$f_x = 3x^2 + 3y, \quad f_y = 3x + 2y$$

然后计算二阶偏导：

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6x, & f_{xy} &= 3 \\ f_{yy} &= 2, & f_{yx} &= 3 \end{aligned}$$

所以

$$H(f) = \begin{bmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

这个矩阵就告诉你在每一点  $(x, y)$  处的局部二阶弯曲信息。