Домашняя работа. Квасный Алексей М16-401

① Найти формулы для моделирования случайной величины с плотностью распределения:

а) $P(x) = nx^{n-1}$, $n \geq 1$, $0 < x < 1$

$$F(x) = \int_0^x n x'^{n-1} dx' = \frac{n}{n} x'^n \Big|_{x'=0}^{x} = x^n \qquad \xi^n = \gamma \qquad \xi = \sqrt[n]{\gamma}$$

Ответ: $\xi = \sqrt[n]{\gamma}$, где γ - р.р. случ. вел. на $(0,1)$

б) $P(x) = \dfrac{a e^{-ax}}{1 - e^{-a}}$, $a > 0$, $0 < x < 1$

$$F(x) = \int_0^x \frac{a e^{-at}}{1 - e^{-a}} dt = -\frac{e^{-at}}{1 - e^{-a}} \Big|_{t=0}^{x} = \frac{1 - e^{-ax}}{1 - e^{-a}}$$

$$F(\xi) = \frac{1 - e^{-a\xi}}{1 - e^{-a}} = \gamma \Rightarrow 1 - e^{-a\xi} = \gamma(1 - e^{-a})$$

$$e^{-a\xi} = 1 - \gamma(1 - e^{-a}) \Rightarrow -a\xi = \ln(1 - \gamma(1 - e^{-a}))$$

$$\xi = -\frac{1}{a} \ln[1 - \gamma(1 - e^{-a})]$$

~~в) P(x) =~~

Ответ: $\xi = -\frac{1}{a} \ln[1 - \gamma(1 - e^{-a})]$

в) $P(x) = \frac{2}{3} e^{-x} + \frac{5}{3} e^{-5x}$

$$F(x) = \int_0^x \frac{2}{3} e^{-t} dt + \int_0^x \frac{5}{3} e^{-5t} dt = -\frac{2}{3} e^{-t} \Big|_{t=0}^{x} - \frac{1}{3} e^{-5t} \Big|_{t=0}^{x} =$$

$$= \frac{2}{3}(1 - e^{-x}) + \frac{1}{3}(1 - e^{-5x}) = 1 - \frac{2}{3} e^{-x} - \frac{1}{3} e^{-5x} = \frac{2}{3}(1 - e^{-x}) + \frac{1}{3}(1 - e^{-5x})$$

сумма = 1

$F_2(x) = 1 - e^{-x}$, $F_1(x) = 1 - e^{-5x}$

$F(x) = \frac{2}{3} \cdot F_2(x) + \frac{1}{3} F_1(x)$ Воспользуем принцип суперпозиции:

Вводим дискретную случайную величину:

$$\gamma_1: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

1) если $\gamma_1 < \frac{1}{3}$, то $F_1(\xi_2) = \gamma_2 \Leftrightarrow 1 - e^{-\xi_2} = \gamma_2$

$$\xi_2 = -\ln(1 - \gamma_2) = -\ln \tilde{\gamma}_2$$

2) если $\gamma_1 \geq \frac{1}{3}$, то $F_2(\xi_3) = \gamma_3 \Leftrightarrow 1 - e^{-5\xi_3} = \gamma_3$

$$\xi_3 = -\frac{1}{5} \ln(1 - \gamma_3) = -\frac{1}{5} \ln \tilde{\gamma}_3$$

Ответ: $\xi = \begin{cases} -\ln \gamma_2, & \gamma_1 < \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} \ln \gamma_2, & \gamma_1 \geq \frac{1}{3} \end{cases}$, γ_1 и γ_2 - р.р. сл. вел на $(0,1)$

2) $P(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x|<1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$ $\quad P(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 1+x, & -1<x\leq 0 \\ 1-x, & 0<x\leq 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} P(t)\,dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt = 0, & x \leq -1 \\ \int_{-1}^{x}(1+t)\,dt = \frac{(1+t)^2}{2}\Big|_{t=-1}^{x} = \frac{(1+x)^2}{2}, & -1<x\leq 0 \\ \frac{(1+x)^2}{2}\Big|_0 + \int_0^x (1-t)\,dt = \frac{1}{2} - \frac{(1-t)^2}{2}\Big|_{t=0}^{x} = 1 - \frac{(1-x)^2}{2}, & 0<x\leq 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

$F(\xi) = \gamma$ $\quad$ 1) $\gamma < \frac{1}{2}$ $\quad \frac{(1+\xi)^2}{2} = \gamma \Rightarrow \xi = \sqrt{2\gamma} - 1$

2) $\gamma \geq \frac{1}{2}$ $\quad 1 - \frac{(1-\xi)^2}{2} = \gamma \Rightarrow (1-\xi)^2 = 2(1-\gamma)$

$1-\xi = \sqrt{2(1-\gamma)}$

$\xi = 1 - \sqrt{2(1-\gamma)}$

Ответ: $\xi = \begin{cases} \sqrt{2\gamma} - 1, & \gamma < \frac{1}{2} \\ 1 - \sqrt{2(1-\gamma)}, & \gamma \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

8) $P(x) = \cos^2(2\pi n x)$, $n \geq 1$, $0 < x < 2$

$$F(x) = \int_0^x \cos^2(2\pi n t)\,dt = \int_0^x \frac{1+\cos(4\pi n t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{\sin(4\pi n t)}{4\pi n}\Big|_{t=0}^{x} =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{\sin 4\pi n x}{8\pi n} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{\sin 4\pi n x}{4\pi n}$$

$$\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\frac{\sin 4\pi n \xi}{4\pi n} = \gamma \quad (1)$$

Ответ: ξ находится из ур-ния (1).

e) $p(x) = \dfrac{A\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sqrt{x}}$, $0<x<1$

$\sqrt{t} = s$

$t = s^2$

$$F(x) = A\int_0^x \frac{\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\sqrt{t}}\,dt = A\,2\int_0^x \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)d\sqrt{t} = 2A\int_0^{\sqrt{x}} \cos\frac{\pi s^2}{2}\,ds$$

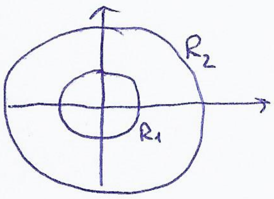
$$F(\xi) = 2A\int_0^{\sqrt{\xi}} \cos\frac{\pi s^2}{2}\,ds = \gamma = C(\sqrt{\xi})\cdot 2A \qquad \frac{2A\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\xi}} \cos\frac{\pi s^2}{2}\,d\left(\frac{\sqrt{\pi}s}{\sqrt{2}}\right) = \qquad t = \frac{\sqrt{\pi}s}{\sqrt{2}}$$

$$= 2A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi\xi}{2}}} \cos t^2\,dt = 2A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,C'\left(\sqrt{\frac{\pi\xi}{2}}\right)$$

Ответ: ξ - решение интеграла Френеля: $C(\sqrt{\xi}) = \dfrac{\gamma}{2A}$

2) Вывести явные формулы для расчёта случайных точек.

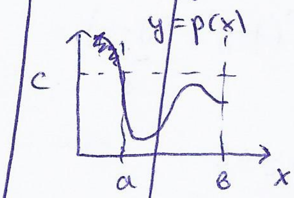
a) р-р в кольце $R_1^2 < x^2+y^2 < R_2^2$



$p(x,y) = \dfrac{1}{\pi(R_2^2-R_1^2)}$ $\qquad p_1(x) = \int$

Лекция 4. 28.09.16

II. Метод Неймана.



$p(x)$ - пл-ть вер-ти случ. вел. ξ

$a<x<b$.

$p(x)\leq c$

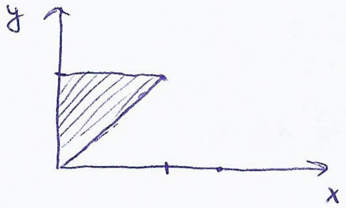
$$F_\xi(x) = \int_a^x p(z)\,dz = \int_a^x dz\int_0^{p(z)} dy$$

Введём равн. расп. случ. вел. на прямоугольнике $a<x<b$, $0<y<c$

(ξ', η') - р.р в $(a,b)\times(0,c)$

$\xi' = a+\gamma_1(b-a)$, $\eta' = \gamma_2 c$

б) ~~рр~~ в треугольнике: $\{x>0,\ x<y<1\}$ с плотностью вер. $p(x,y)=3y$



~~Бро~~ $p_1(x)=\int_x^1 p(x,y)\,dy=\int_x^1 3y\,dy=$

$=\frac{3y^2}{2}\Big|_{y=x}^{1}=\frac{3}{2}(1-x^2)$

$$p_2(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_1(x)}=\frac{3y}{\frac{3}{2}(1-x^2)}=\frac{2y}{1-x^2}$$

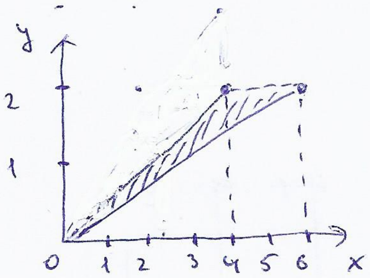
$$F_1(x)=\int_0^x p_1(x')\,dx'=\frac{3}{2}\int_0^x(1-x'^2)\,dx'=\frac{3}{2}x'-\frac{3x'^3}{2\cdot 3}\Big|_{x'=0}^{x}=\frac{3}{2}x-\frac{x^3}{2}\quad,\ 0<x<1$$

$$F_2(y|x)=\int_0^y\frac{2y'}{1-x^2}\,dy'=\frac{y'^2}{1-x^2}\Big|_{y'=0}^{y}=\frac{y^2}{1-x^2}\quad,\ x<y<1$$

$$F_1(\xi_1)=\frac{3}{2}\xi_1-\frac{\xi_1^3}{2}=\gamma_1\quad \cancel{\Rightarrow \xi_1=}$$

$$F_2(\xi_2|\xi_1)=\frac{\xi_2^2}{1-\xi_1^2}=\gamma_2\quad\Rightarrow\ \xi_2=\sqrt{\gamma_2}\,\sqrt{1-\xi_1^2}$$

в) в треугольнике: $\{0<y<2,\ 2y<x<3y\}$ с пл-тью $p(x,y)=\frac{3}{68}x(1+y^2)$



$p_1(y)=\int_{2y}^{3y}\frac{3}{68}x(1+y^2)\,dx=$

$=\frac{3}{68}\frac{x^2}{2}(1+y^2)\Big|_{x=2y}^{3y}=\frac{3}{136}y^2(1+y^2)\underbrace{(9-4)}_{5}=$

$=\frac{15}{136}y^2(1+y^2)\qquad 0<y<2$

$\cancel{F_2(x|y)=\int_0^{x}}$ $p_2(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_1(y)}=\frac{\frac{3}{68}x\cancel{(1+y^2)}}{\frac{3\cdot5}{68\cdot2}y^2\cancel{(1+y^2)}}=\frac{2}{5}\frac{x}{y^2}$

$F_2(x|y)=\int_0^x p_2(y')y'=\frac{2}{5}x\int_0^x\frac{1}{y'^2}dy''=-\frac{2}{5}\frac{x}{y'}\Big|_{y'=0}^{x}=$

$F_2(x|y)=\int_0^x p_2(x'|y)\,dx'=\frac{2}{5}\int_0^x\frac{x'}{y^2}dx'=\frac{2}{5}\frac{x'^2}{2y^2}\Big|_{x'=0}^{x}=\frac{2}{5}\frac{x^2}{2y^2}=\frac{x^2}{5y^2}$

$F_1(\xi_2)=$ ~~$\frac{15}{136}(\xi_2^3+\xi_2^4)$~~ $\int_0^y\frac{15}{136}y^2(1+y^2)\,dy=\frac{15}{136}\frac{y^3}{3}+\frac{15}{136}\frac{y^5}{5}$

$F_2(\xi_1|\xi_2)=$