Программа-прототип для решения одномерных задач методом RKDG

Семинар лаборатории механики сплошных сред ИСП РАН

Лукин В.В., Марчевский И.К.,

Галепова В.Д., Фуфаев И.Н.

Москва — 2017

Решаемые задачи

Линейное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (cu)}{\partial x} = 0, \quad c = \mathrm{const}$$

Квазилинейное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$$

Система уравнений газовой динамики

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0,\\
&\frac{\partial \rho \boldsymbol{v}}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} + p\hat{\boldsymbol{I}}\right) = \boldsymbol{0},\\
&\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}\left[(e+p)\,\boldsymbol{v}\right] = 0
\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})}{\partial x} = \boldsymbol{0},$$

ρ — плотность; $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости; p — давление; $e = \rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho\|\boldsymbol{v}\|^2$ — полная энергия единицы объема.

Линейное и квазилинейное уравнение переноса

Схема «против потока»

$$\boldsymbol{F}_{i+1/2}^{upwind} = \begin{cases} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_i), & \text{если } u > 0, \\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_{i+1}), & \text{если } u < 0. \end{cases}$$

- первый порядок
- монотонная

Схема с центральными разностями

$$\boldsymbol{F}_{i+1/2}^{cendiff} = \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_i) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_{i+1})}{2}$$

- второй порядок
- немонотонная

Нелинейные схемы второго порядка

$$\boldsymbol{F}_{i+1/2} = f_i \boldsymbol{F}_{i+1/2}^{upwind} + (1 - f_i) \boldsymbol{F}_{i+1/2}^{cendiff}$$

Схемы ван-Лира, minmod, superbee...

- второй порядок
- монотонная

Система уравнений газовой динамики

Задача Римана

Задача Римана для одномерной гиперболической системы уравнений в неограниченной области:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})}{\partial x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + A\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = \mathbf{0},$$

$$A = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}} = \Omega_R \Lambda \Omega_L, \quad \Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}.$$

Начальные условия:

$$\boldsymbol{U}_0(x) = \begin{cases} \boldsymbol{U}_1 & \text{при} \quad x < 0, \\ \boldsymbol{U}_2 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

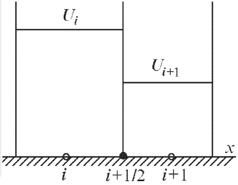
Численные потоки

Поток КИР (Куранта — Изаксона — Риса)

$$\frac{\boldsymbol{U}_j^{k+1}-\boldsymbol{U}_j^k}{\tau}+\frac{\boldsymbol{F}_{j+1/2}-\boldsymbol{F}_{j-1/2}}{h}=\boldsymbol{0},$$

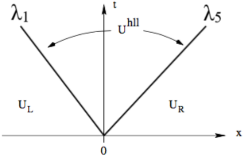
$$\boldsymbol{F}_{m+1/2}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}_m^k+\boldsymbol{F}_{m+1}^k)+\frac{1}{2}|A|_{m+1/2}^k(\boldsymbol{U}_m^k-\boldsymbol{U}_{m+1}^k),$$

$$|A|=\Omega_R|\Lambda|\Omega_L.$$



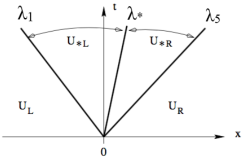
Поток HLL (Хартена — Лакса — ван-Лира)

$$\boldsymbol{F}_{i+1/2}^{hll}=\begin{cases}\boldsymbol{F}_L & \text{при} \quad 0\le\lambda_1,\\ \dfrac{\lambda_5\boldsymbol{F}_L-\lambda_1\boldsymbol{F}_R+\lambda_1\lambda_5(\boldsymbol{U}_R-\boldsymbol{U}_L)}{\lambda_5-\lambda_1}, & \lambda_1\le 0\le\lambda_5,\\ \boldsymbol{F}_R & \text{при} \quad 0\ge\lambda_5.\end{cases}$$



Поток HLLC (HLL + Contact)

$$\boldsymbol{F}_{i+1/2}^{hllc}=\begin{cases}\boldsymbol{F}_L & \text{при} \quad 0\le\lambda_1,\\ \boldsymbol{F}_{*L} & \text{при} \quad \lambda_1\le 0\le\lambda_*,\\ \boldsymbol{F}_{*R} & \text{при} \quad \lambda_*\le 0\le\lambda_5,\\ \boldsymbol{F}_R & \text{при} \quad 0\ge\lambda_5.\end{cases}$$



Выбор базисных функций

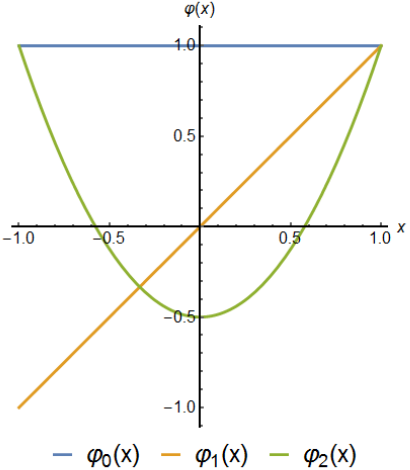
Приближенное решение

Приближенное решение U_h на каждой ячейке будем искать в виде разложения по некоторому базису:

$$\boldsymbol{U}_j^k(x) = \sum_{s=0}^{m} \boldsymbol{U}_j^{(s),k} \varphi_j^{(s)}(x)$$

$\varphi_j^{(s)}(x)$ — полиномы Лежандра

$\varphi_j^{(s)}(-1) = (-1)^s,$
$\varphi_j^{(s)}(1) = 1,$
$(\varphi_j^{(s)}, \varphi_j^{(p)}) = 0, \quad s \neq p.$



Граничные начальные условия

Граничные условия

Вводятся «фиктивные» ячейки с номерами 0 и $(n+1)$.

- Условие свободного вытекания (выход потока)

$$\boldsymbol{U}_0^k = \boldsymbol{U}_1^k\big|_{left}, \quad \boldsymbol{U}_{n+1}^k = \boldsymbol{U}_n^k\big|_{right}.$$

  Возможно появление «паразитных» отраженных волн.

- Условие отражения (твердая стенка).
- Условия периодичности: $\boldsymbol{U}_0^k = \boldsymbol{U}_1^k, \quad \boldsymbol{U}_{n+1}^k = \boldsymbol{U}_n^k$.

Начальные условия

$$\rho(x)\big|_{t=0}, \quad \boldsymbol{v}(x)\big|_{t=0}, \quad p(x)\big|_{t=0}$$

$$e(x) = \frac{p(x)}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(x)\boldsymbol{v}(x)^2.$$

Монотонизация решения

Применение ограничителей (лимитеров)

Решение на каждой ячейке представляется в виде

$$\boldsymbol{U}_j^k(x) = \boldsymbol{U}_j^{(0),k}\varphi_j^{(0)}(x) + \boldsymbol{U}_j^{(1),k}\varphi_j^{(1)}(x) + \boldsymbol{U}_j^{(1),k}\varphi_j^{(2)}(x).$$

Для подавления нефизичных осцилляций решения были использованы ограничители:

$$\boldsymbol{U}_j^k(x) = \boldsymbol{U}_j^{(0),k}\varphi_j^{(0)}(x) + \Lambda\Pi_h\Big(\boldsymbol{U}_j^{(1),k}\varphi_j^{(1)}(x) + \boldsymbol{U}_j^{(2),k}\varphi_j^{(2)}(x)\Big).$$

Применение индикаторов

Применять ограничители следует лишь на тех ячейках, где нарушается монотонность решения и возникают нефизичные осцилляции. Для выявления таких ячеек были использованы специальные функции-индикаторы.

Интегрирование по времени

Реализованы следующие схемы интегрирования ОДУ по времени:

Схемы, не обладающие свойством TVD

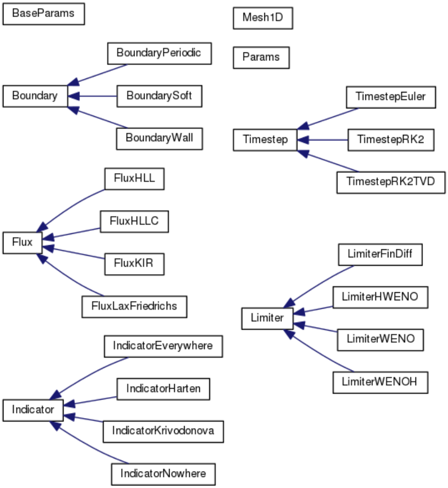
- Явный метод Эйлера
- Метод Эйлера с коррекцией (метод Рунге — Кутты 2-го порядка)

Схемы, обладающие свойством TVD

- Метод Рунге — Кутты 2-го порядка
- Метод Рунге — Кутты 3-го порядка

Программная реализация

- Программа написана на языке C++ и построена на основе парадигмы объектно-ориентированного программирования.
- Модульное построение программы позволяет сделать ее легко расширяемой в смысле добавления новых численных потоков, индикаторов, ограничителей.
- Графическое отображение результатов расчетов, сохраняемых в текстовый файл, реализовано в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.



Структура классов

Общие классы

`Mesh1D, Integrator, Params, BaseParams`

Численные потоки (методы) `Fluxes`

`GodunovType, KIR, LaxFriedrichs, HLL, HLLC`

Вычисление скорости звука на разрыве: по полусумме; по Роу; по Эйнфельду.

Схемы интегрирования по времени `Limiters`

`Euler, RK2, RK2TVD, RK3TVD`

Лимитеры `Timesteps`

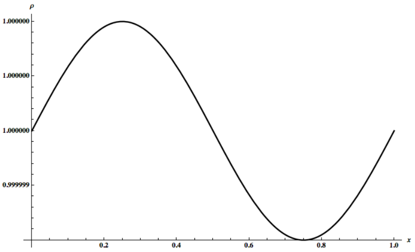
`FinDiff, HWENO, WENO, WENO_S, HWENO_SC`

Индикаторы `Indicators`

`Everywhere, Nowhere, Krivodonova, Harten`

Порядок аппроксимации RKDG-метода

Акустическая волна, кусочно-линейная аппроксимация



Параметры расчета:

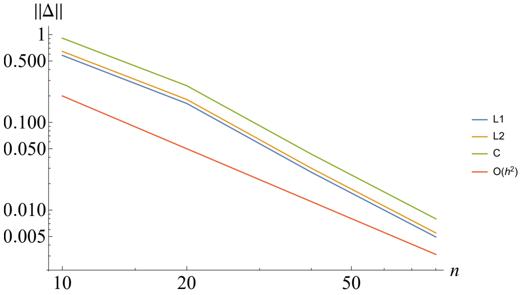
$$L = 1.0,\ T = 100.0,\ \frac{\tau}{h} = 0.1.$$

Начальные параметры газа:

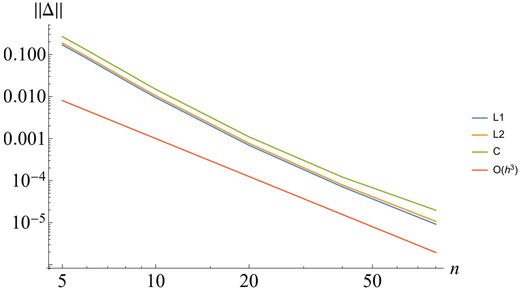
$$\rho = 1 + 10^{-6}\sin(2\pi x)),$$
$$u = -1, \quad p = 1/\gamma.$$

Ошибка оценивается в нормах $\|\cdot\|_{L_1}$, $\|\cdot\|_{L_2}$ и $\|\cdot\|_C$

Зависимость ошибки от числа панелей



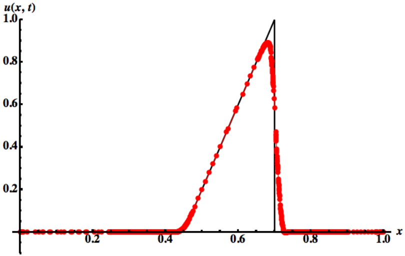
2 базисные функции



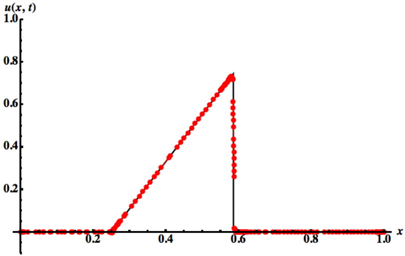
3 базисные функции

Результаты приведены для линейного и квазилинейного уравнений переноса при $L = 1.0$, $T = 0.2$, $\dfrac{\tau}{h} = 0.01$, использован поток ван-Лира, начальное условие вида «левый треугольник»:

$$u_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 0.25}{0.25}, & \text{при} \quad x \in (0.25,\, 0.5) \\ 0, \quad \text{при} & x \notin (0.25,\, 0.5) \end{cases}$$



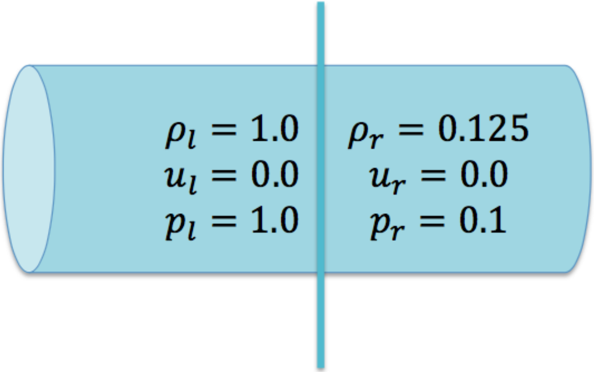
Линейное уравнение переноса



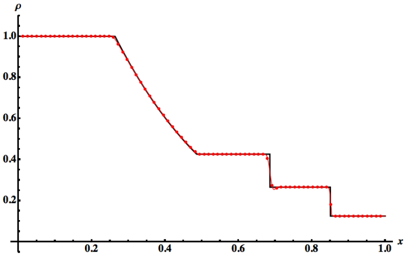
Квазилинейное уравнение переноса

Задача Сода

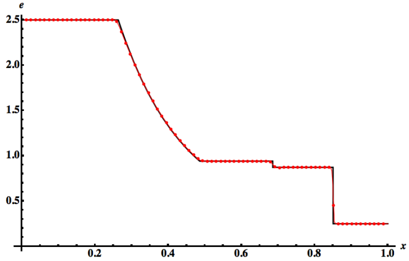
Результаты приведены для $L = 1.0$, $T = 0.2$, $\dfrac{\tau}{h} = 0.1$; использовалась кусочно-линейная аппроксимация решения на ячейках. Начальные параметры для левого и правого состояния идеального газа следующие:



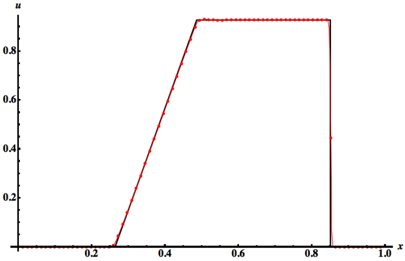
Задача Сода



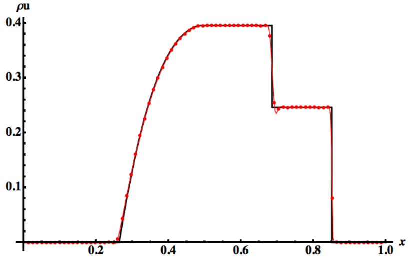
Плотность газа, поток HLLC



Полная энергия, поток HLLE



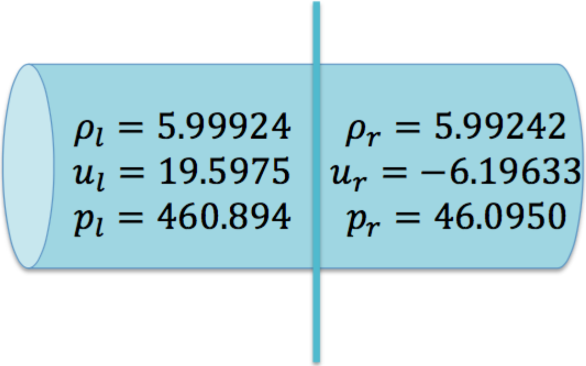
Скорость газа, поток HLL



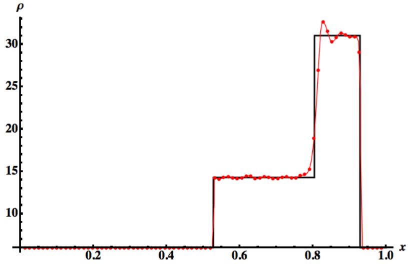
Плотность импульса газа, поток KIR

Задача двух ударных волн

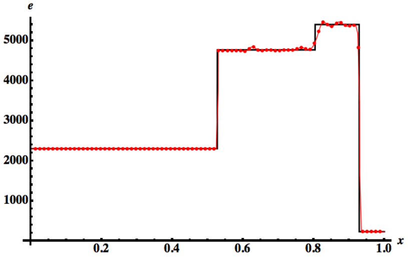
Результаты приведены для $L = 1.0$, $T = 0.035$, $\dfrac{\tau}{h} = 0.001$; использовалась кусочно-линейная аппроксимация решения на ячейках. Начальные параметры для левого и правого состояния идеального газа следующие:



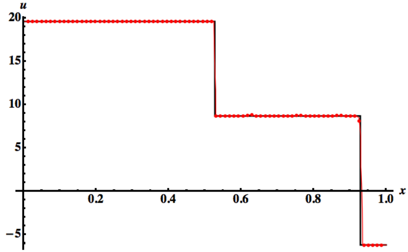
Задача двух ударных волн



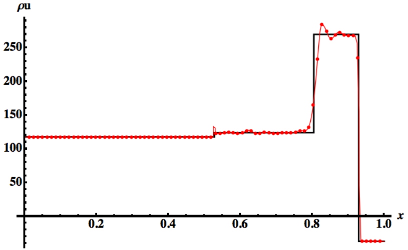
Плотность газа, поток HLLC



Полная энергия, поток HLLC



Скорость газа, поток HLL



Плотность импульса газа, поток HLL