Le traitement du signal - La transformée de Fourier, la transformée de Fourier discrète et la transformée en cosinus discret

Marc Chaumont

20 janvier 2008

Plan

Sources

- Polycopié de Joël Le Roux (Professeur à l'Ecole Supérieure en Sciences Informatiques de l'Université de Nice, http ://www.essi.fr/˜leroux) : "Techniques numériques pour le traitement du signal",
- Paul Bourke (University of Western Australia, http ://local.wasp.uwa.edu.au/˜pbourke/)

Quelques mots sur Jean-Baptiste Fourier

Les transparents de présentation des applications de TF sont ceux de Joël Le Roux et extraits de son site web.

Jean-Baptiste Fourier 1768 - 1830

Quelques applications de la transformée de Fourier

- Historique
- Les points fondamentaux
- Applications monodimensionnelles
    - signaux temporels
    - fonctions de transfert
    - radiodiffusion, transmissions
    - sons
- Applications multidimensionnelles
    - images
    - propagation d 'ondes interférométrie,holographie
    - imagerie médicale
        - Tomographie X
        - Imagerie RMN

Quelques applications de la transformée de Fourier

1768 (21 Mars) Naissance à Auxerre Famille modeste, très doué
1793 Comité Révolutionnaire
1794 Ecole Normale, Ecole Centrale (Polytechnique)
1798 Campagne d 'Egypte avec Bonaparte, Monge
(excellent organisateur)
1801 Retour à Polytechnique
1802 Nommé préfet de l'Isère (Champollion)
1804-1807 commence (?) à travailler
sur la propagation de la chaleur
mal reçu par la communauté scientifique
(n'a pas cité le travail de Jean Baptiste Biot...)
1810 Ouvrage : Description de l 'Egypte
1811 Prix (mitigé) pour son travail
sur la propagation de la chaleur,
le manuscrit n'est pas publié
1815 Préfet à Lyon, retour à Paris
(évite Napoléon au retour de l'île d 'Elbe)
1817 Académie des sciences
1822 Secrétaire de l'Académie des sciences;
Publication de la '*théorie analytique de la chaleur*'
1830 (16 Mai) Décès à Paris

J. Dhombes, J. B. Robert, Fourier, créateur de la physique-mathématique Ed. Belin, 1998

Quelques applications de la transformée de Fourier

Le problème étudié par J. B. Fourier

- Résoudre une équation aux dérivées partielles :

  trouver $v(x,y)$ satisfaisant

  $$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

  et des conditions aux limites

- L'idée : décomposer la fonction en une somme de sinusoïdes

  $$f(x) = \sum_k a_k \sin(2\pi k \frac{x}{L})$$

- Comment trouver les a_k ?

$\longrightarrow$ Orthogonalité entre fonctions

$$\int_0^L \sin(2\pi p \frac{x}{L}) \sin(2\pi q \frac{x}{L}) dx = 0$$

$$a_k = \int_0^L \sin(2\pi k \frac{x}{L}) f(x) dx$$

Quelques applications de la transformée de Fourier

THÉORIE

ANALYTIQUE

DE LA CHALEUR,

PAR M. FOURIER.

A PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,

LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE HYDRAULIQUE ET LA MARINE, RUE JACOB, N° 24.

1822.

on parvient de cette manière à un résultat très-remarquable exprimé par l'équation suivante :

$$\tfrac{1}{2}\pi\varphi x = \sin.x\, S(\sin.x.\varphi x.dx) + \sin.2x\, S(\sin.2x\varphi x\, dx) + \sin.3x\, S(\sin.3x.\varphi x\, dx) \ldots + \sin.ix\, S(\sin.ix\varphi x\, dx) + \text{etc.}; \quad \text{(D)}$$

le second membre donnera toujours le développement cherché de la fonction φx, si l'on effectue les intégrations depuis $x=0$, jusqu'à $x=\pi$.

On peut aussi vérifier l'équation précédente (D) (art. 220), en déterminant immédiatement les quantités $a_1 a_2 a_3 \ldots a_i$ etc., dans l'équation

$$\varphi x = a_1 \sin.x + a_2 \sin.2x + a_3 \sin.3x + \ldots a_j \sin.jx + \ldots \text{etc.};$$

pour cela on multipliera chacun des membres de la dernière équation, par $\sin.ix.dx$, i étant un nombre entier, et l'on prendra l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, on aura

$$S(\varphi x \sin.ix.dx) = a_1 S(\sin.x \sin.ix dx) + a_2 S(\sin.2x.\sin.ixdx) + \ldots a_j S(\sin.jx.\sin.ix.dx) + \ldots \text{etc.}$$

Or on peut facilement prouver, 1° que toutes les intégrales qui entrent dans le second membre, ont une valeur nulle, excepté le seul terme $a_i S(\sin.ix.\sin.ix\, dx)$; 2° que la valeur de $S(\sin.ix.\sin.ix.dx)$ est $\tfrac{1}{2}\pi$;

Quelques applications de la transformée de Fourier

Les travaux qui s'en déduisent

- Transformée de Fourier Laplace

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

- Transformée Inverse

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

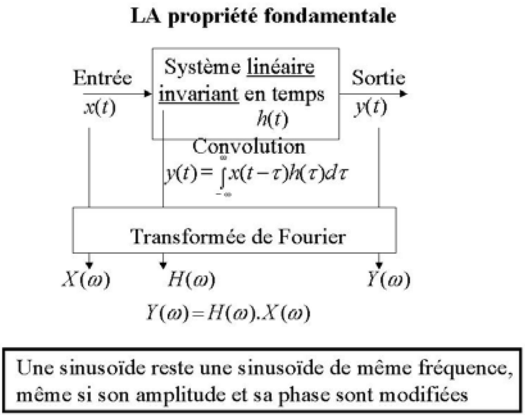
- Extension aux signaux échantillonnés

$$F(k)=\sum_{t=0}^{T-1} f(t)e^{-j2\pi\frac{kt}{T}}$$

- 1965: Invention de la transformée de Fourier rapide
  Cooley, Tukey, IBM

- Extension aux signaux multidimensionnels
(images, 3D,etc..) $F(u,v)=\iint f(x,y)e^{-j(ux+vy)}dxdy$

Quelques applications de la transformée de Fourier



Quelques applications de la transformée de Fourier

Applications Signaux temporels (liste non exhaustive)

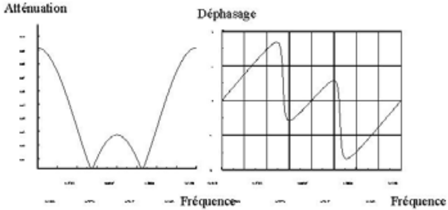
- Equations différentielles et filtrage
- Transmissions analogiques et numériques
- Interprétation de l 'échantillonnage des signaux en vue du traitement numérique
- Analyse, synthèse et reconnaissance de la parole
- Analyse en fréquence des sons, de la musique (cf. cochlée)
  MP3= analyse de Fourier + filtrage numérique
- Identification des caractéristiques d'un système linéaire
  par exemple suppression d 'échos, sismographie
  signaux biologiques déformés
- Nouveaux procédés de radiodiffusion et télédiffusion numérique (OFDM)

http://www.eskimo.com/~miyaguch/mp3info.html

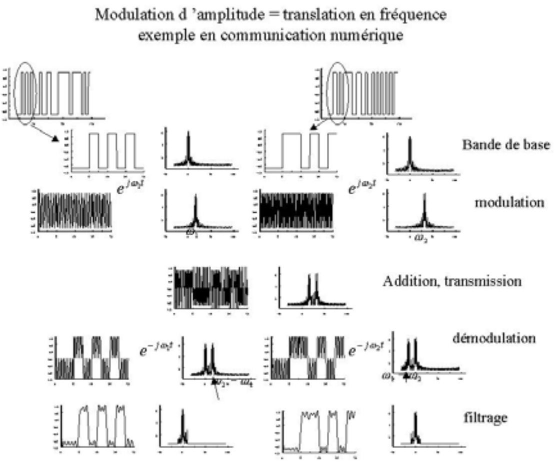
Quelques applications de la transformée de Fourier

Filtrage, annulation d 'écho, etc ... :
déformation linéaire par un canal de transmission

Une composante sinusoïdale est amplifiée et déphasée différemment suivant la fréquence :
→ trouver cette déformation et la compenser



Quelques applications de la transformée de Fourier

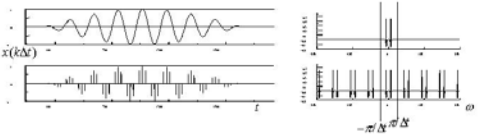


Quelques applications de la transformée de Fourier

Interprétation de l'échantillonnage

Echantillonner un signal au pas Δt

$x(t)$ c'est périodiser sa transformée de Fourier $2\pi / \Delta t$

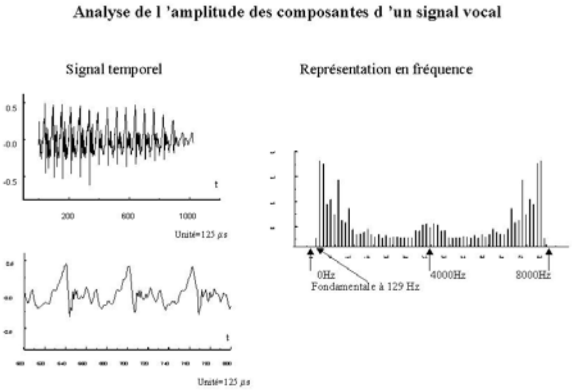


Pour un échantillonnage correct, pas de composantes fréquentielles pour $|\omega| \geq \pi / \Delta t$

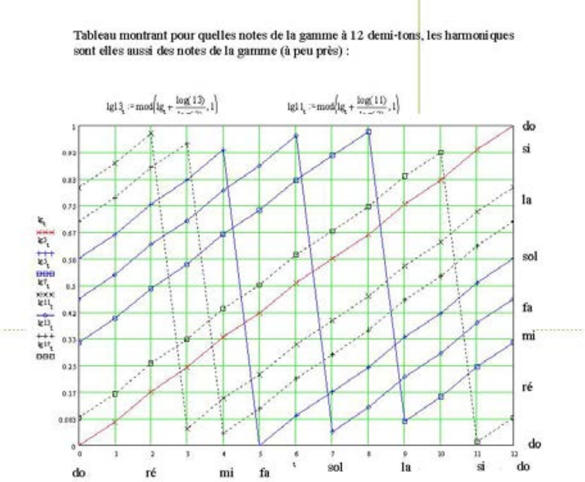
Reconstruire le signal, c'est éliminer les hautes fréquences par filtrage passe bas

$$x(t) = \sum_k x(k\Delta t) \frac{\sin \pi(\frac{t - k\Delta t}{\Delta t})}{\pi(\frac{t - k\Delta t}{\Delta t})}$$

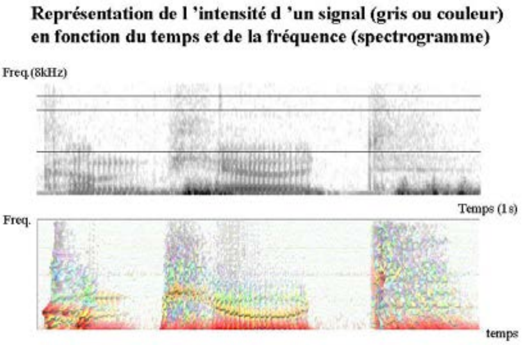
Quelques applications de la transformée de Fourier



Quelques applications de la transformée de Fourier

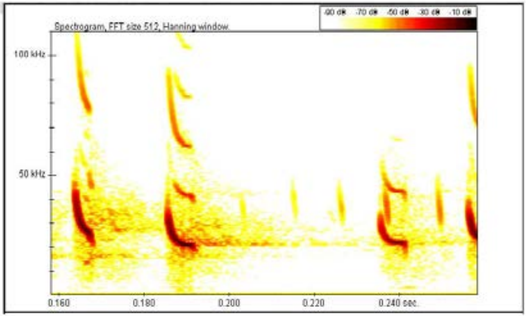


Quelques applications de la transformée de Fourier



Quelques applications de la transformée de Fourier

Représentation temps fréquence: cri de chauve-souris (ultrasons)



Quelques applications de la transformée de Fourier

Quelques applications de la transformée de Fourier discrète

Codage MP3

Décomposition du signal en différentes bandes de fréquences (filtrage numérique et transformée de Fourier discrète) et prise en compte de phénomènes psycho-acoustiques: suppression ou codage moins fin des composantes fréquentielles moins utiles

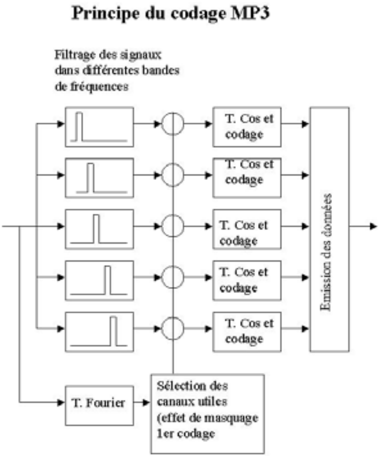
Diffusion numérique radio télé : OFDM

Codes correcteurs d'erreurs de Reed Solomon
(transmissions numériques, téléphone mobile, CD…)

$$F(k)=\sum_t a^{kt} f(t)$$

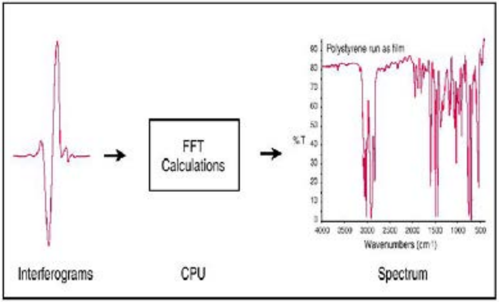
a : générateur d 'un corps de Galois (corps fini)

Quelques applications de la transformée de Fourier

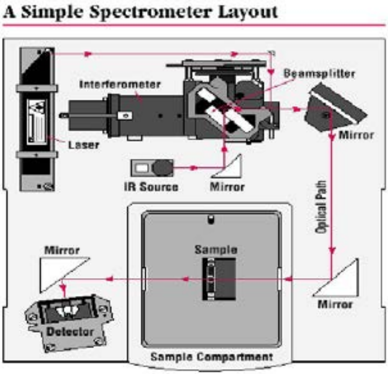


Quelques applications de la transformée de Fourier

Interférométrie et spectroscopie



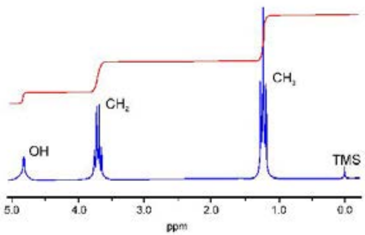
Quelques applications de la transformée de Fourier



http://www.nicolet.com/labsys/

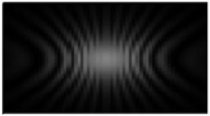
Quelques applications de la transformée de Fourier

Résultat de l 'analyse spectrale d 'un signal RMN
(résonance magnétique nucléaire)
pour une molécule d 'alcool éthylique



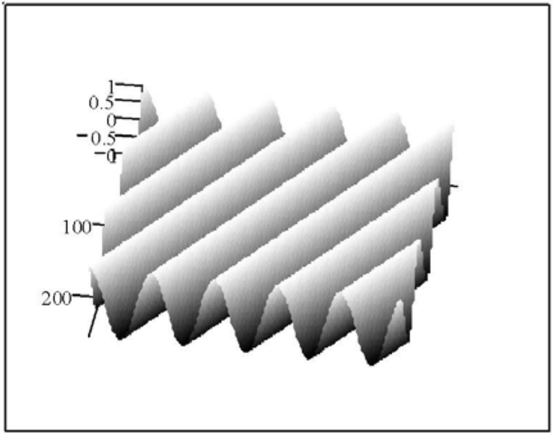
Quelques applications de la transformée de Fourier

Fonctions multidimensionnelles (images)

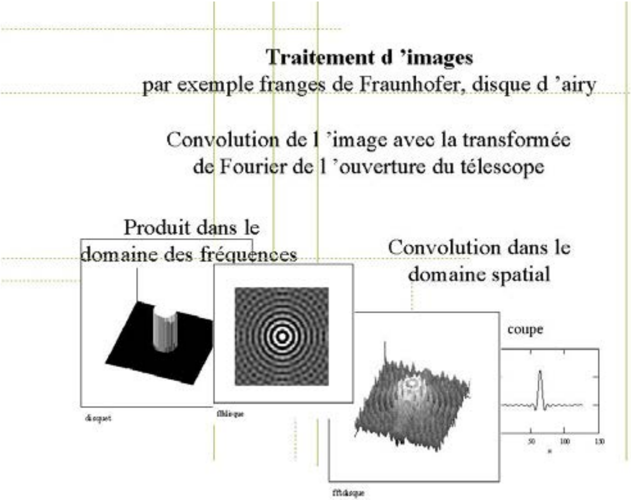


(Optique de Fourier)
Traitement d'images
Propagation d'ondes, interférométrie
Tomographie par rayons x
Imagerie par résonance magnétique nucléaire
Cristallographie, analyse des structures moléculaires

Quelques applications de la transformée de Fourier



Quelques applications de la transformée de Fourier



Quelques applications de la transformée de Fourier

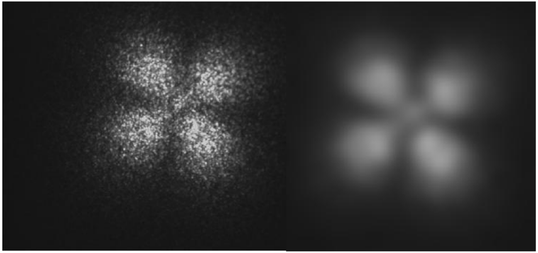
Quelques exemples de traitement

(Amplification des hautes fréquences
c 'est à dire des variations rapides)

- Correction d'effet de flou, de bougé
- Mise en évidence des contours
- Codage d'images JPEG et MPEG
(une variante de la transformée de Fourier, la transformée en cosinus)
+ élimination ou codage plus sommaire des hautes fréquences

Quelques applications de la transformée de Fourier

Filtrage des bruits (par exemple lorsque le signal intéressant est dans les basses fréquences)

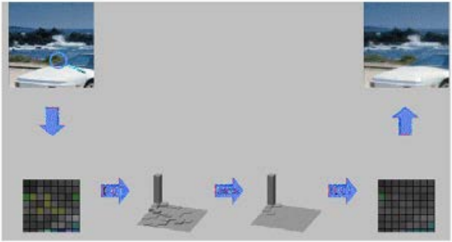


Quelques applications de la transformée de Fourier

Quelques applications de la transformée de Fourier

Quelques applications de la transformée de Fourier

Transformée en cosinus et réduction de débit
en transmission d 'images JPEG MPEG

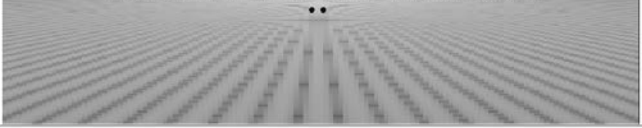


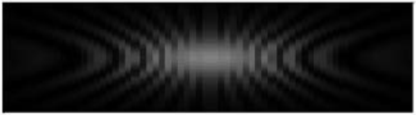
Quelques applications de la transformée de Fourier

Electromagnétisme, optique ondulatoire
l 'onde transmise 'porte' la transformée 2D de la source
(équations de Maxwell)

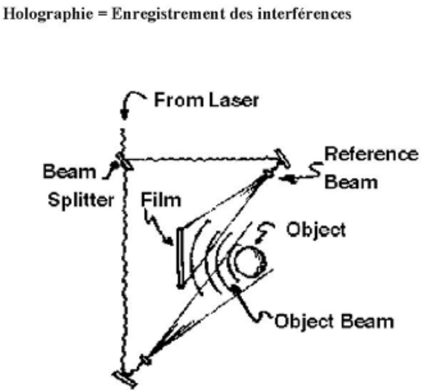
(Analyse des appareils d 'optique p.ex. lentilles, optique de Fourier)

Application en interférométrie et en holographie

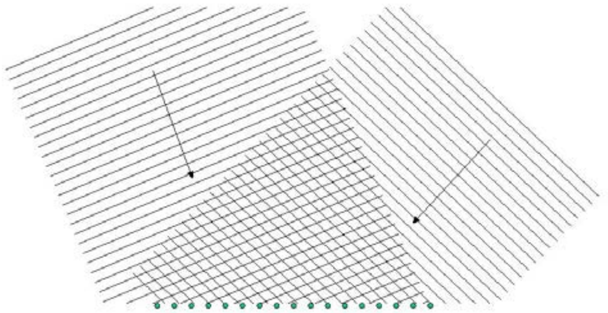




Quelques applications de la transformée de Fourier



Quelques applications de la transformée de Fourier



Traitement d 'antennes :

Retrouver par un réseau de capteurs (antenne)
la direction de propagation des ondes sonores ou électromagnétiques

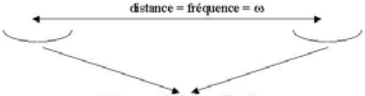
Quelques applications de la transformée de Fourier

Interférométrie en imagerie astronomique

Antoine Labeyrie au plateau de Calern

Télescopes de l 'ESO à La Silla au Chili

Limitation du diamètre $\Rightarrow$ faire interférer les signaux provenant de deux télescopes



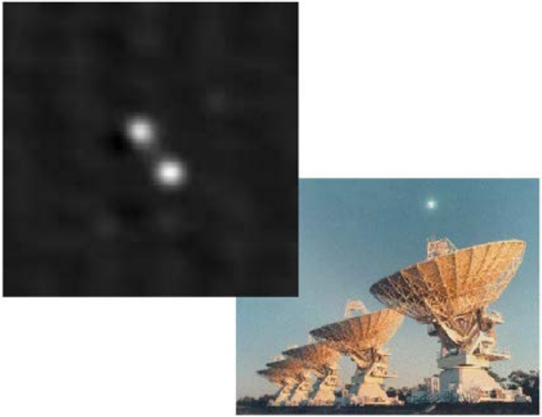
Mesure de l 'amplitude
et de la phase des interférences F(ω)

Déplacement des télescopes: Modification de ω

Transformée de Fourier inverse f(x)

Problème : turbulence atmosphérique

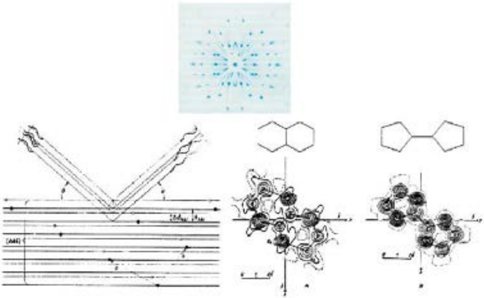
Quelques applications de la transformée de Fourier



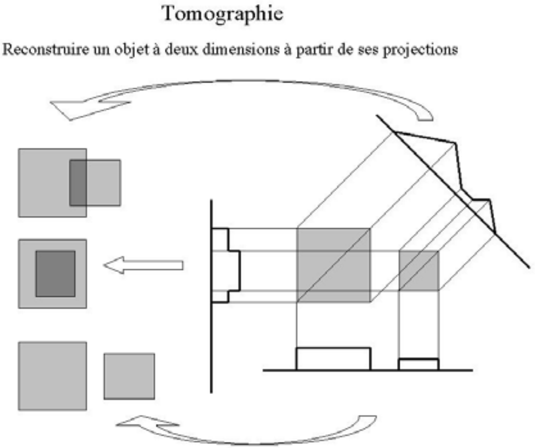
Quelques applications de la transformée de Fourier

Cristallographie

Un motif de diffraction des rayons X par un cristal est une photographie du module de la transformée de Fourier de la distribution de la densité des électrons dans le cristal; on retrouve des informations sur la structure du cristal en effectuant une transformée inverse

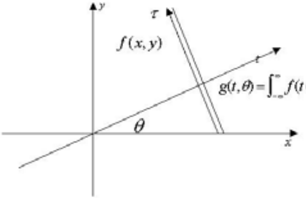


Quelques applications de la transformée de Fourier



Quelques applications de la transformée de Fourier

Tomographie : formulation dans le domaine spatial

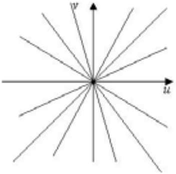


$$g(t,\theta)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t\cos\theta-\tau\sin\theta, t\sin\theta+\tau\cos\theta)\,d\tau$$

Dans le domaine des fréquences

$$F(\omega\cos\theta,\omega\sin\theta)=G(\omega,\theta)$$

Transformée de Fourier mono-dimensionnelle de $g(t,\theta)$

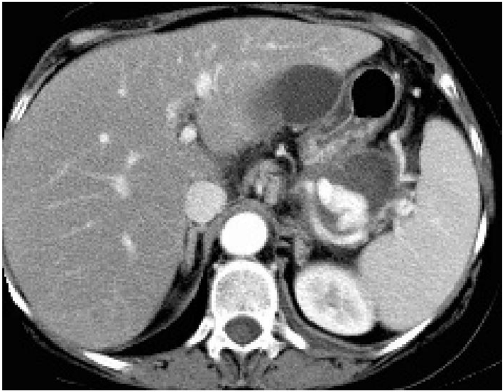


On reconstruit $F(u,v)$ à partir de $G(\omega,\theta)$ pour différentes valeurs de θ

Puis on effectue une transformée inverse

Quelques applications de la transformée de Fourier

Tomographie



Quelques applications de la transformée de Fourier

Résonance magnétique nucléaire

Champ magnétique:

Faible aimantation du noyau

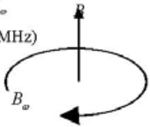
Possibilité d'utiliser les phénomène de résonance

A. Champ magnétique fixe B + champ tournant B_ω
à la fréquence ω (Onde radiofréquence 20 à 50 MHz)

B. Evolution libre, retour à l 'équilibre

Décroissance exponentielle oscillante de
l 'aimantation (~100ms) mesurée par une antenne

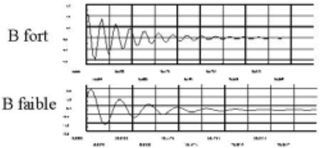
La fréquence des oscillations (quelques Hz) dépend de B



Quelques applications de la transformée de Fourier

Imagerie par RMN

Fréquence du retour à l'équilibre (exponentielle amortie) de l'ordre du Hz



On choisit B(x,y,z) fonction <u>linaire</u> de la position, variable d 'une mesure à l 'autre

Le signal capté par une antenne est

$$s_B(t) = \iiint m(x,y,z)\exp\left(\frac{-t}{T}\right)\exp j\gamma t(\vec{G}_B.\vec{r})\,dxdydz$$

$$\text{avec} \quad \vec{G}_B.\vec{r} = x\frac{\partial B}{\partial x} + y\frac{\partial B}{\partial y} + z\frac{\partial B}{\partial z}$$

Quelques applications de la transformée de Fourier

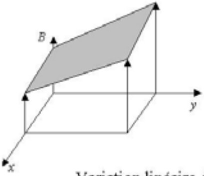
Imagerie par RMN

t fixé : une valeur de la transformée de Fourier tridimensionnelle

$$s_B(t)\exp\left(\frac{t}{T}\right) = \iiint m(x,y,z)\exp j\gamma t(\vec{G}_B.\vec{r})dxdydz$$

(t varie: valeur suivant un axe : même formulation que la tomographie)

Une image ou un volume complet : plusieurs mesures avec des directions de gradient différentes

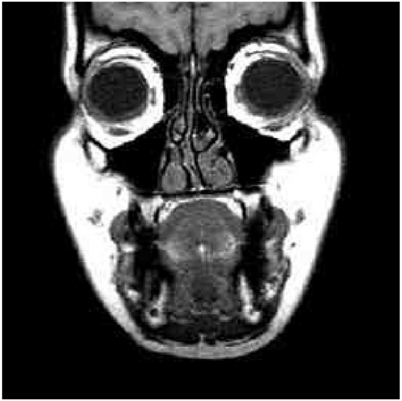


Variation linéaire du champ ‘fixe’ dans l’espace

Reconstruction par transformée inverse (précision du mm)

Quelques applications de la transformée de Fourier

Image rmn



Quelques applications de la transformée de Fourier

Conclusion

- Vaste champ d 'application
  - Grâce au traitement numérique
  - Grâce à l 'invention de la transformée de Fourier rapide
- Du point de vue mathématique
  - Importance des systèmes linéaires invariants et de leur effet sur les signaux sinusoïdaux
  - Orthogonalité des fonction sinusoïdales
  - Sans oublier la théorie des distributions (en particulier la distribution de Dirac)

Rappel sur les transformations complexes

On utilise la représentation en nombre complexe[1] pour représenter une grandeur, fonction sinusoïdale du temps. Ainsi, à une grandeur $f(t)$, fonction sinusoïdale du temps d'expression :

$$f(t) = \hat{a}.\sin(\omega t + \varphi),$$

on fait correspondre un nombre complexe s :

$$s(t) = m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)},$$

- de module : m,
- d'argument : φ,

La représentation en nombre complexe permet de dériver, d'intégrer ou d'appliquer facilement des opérations arithmétiques ($+$, $-$, $\times$ et $/$) à des grandeurs fonctions sinusoïdales du temps. Elle remplace avantageusement la représentation de Fresnel.

[1] wikipedia

Représentation des signaux dans le domaine des fréquences

La transformée de Fourier a été développée initialement pour étudier les fonctions de durée finie, et étendue aux fonctions périodiques.

Nous donnerons les résultats principaux dans ce cas, avant de donner les formules les plus utiles en traitement des signaux à temps continu.

Plan

Représentation des signaux périodiques sous la forme de séries de Fourier

Un signal $x(t)$ périodique de période T_0 peut se décomposer sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux appelées les harmoniques.

Rappel sur les nombres complexes :

- j est est l'unité imaginaire : $j^2 = -1$
- $\exp(j\theta) = cos(\theta) + j.sin(\theta)$
- Soit z le nombre imaginaire tel que $z = a + b.j$, où a et b sont réels. Le conjugué de z est $\overline{z} = a - b.j$.

Représentation des signaux périodiques sous la forme de séries de Fourier

Soit un signal $x(t)$ périodique de période T_0 :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) \exp(jn\omega_0 t)$$

avec $\omega_0 = 2\pi / T_0$ est la pulsation fondamentale $(\omega_0 = 2\pi f_0)$

Dans la plupart des ouvrages anglosaxons, on ne fait pas la différence entre "pulsation" et fréquence, qui représentent des données identiques avec des unités différentes : les radians par seconde dans le premier cas ou le nombre de périodes ou de tours par seconde dans le second cas.

Représentation des signaux périodiques sous la forme de **séries** de Fourier

L'amplitude **complexe** $X(n\omega_0)$ (= coefficient de Fourier) se calcule de la manière suivante :

$$X(n\omega_0) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\exp(-jn\omega_0 t)dt$$

On appelle harmonique de rang $n > 0$ la fonction sinusoïdale obtenue en tenant compte des coefficients de Fourier d'indice n et -n, donnée par :

$$t \mapsto X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t} + X(-n\omega_0)e^{-jn\omega_0 t}$$

... en sommant sur n variant de 0 à ∞ les harmoniques on retrouve $x(t)$

Représentation des signaux périodiques sous la forme de **séries** de Fourier : Illustration

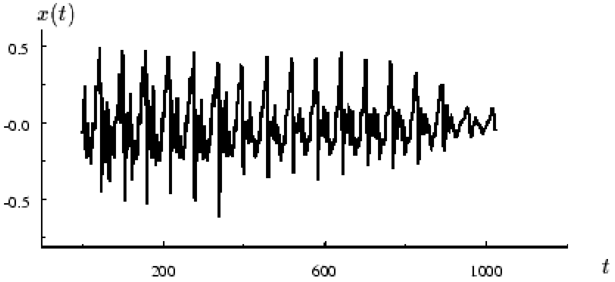


Fig.: Représentation graphique d'un signal de parole, faisant apparaître une quasi-périodicité dans les périodes successives du signal ; la durée 1000 (echantillons) correspond à 125 ms (il y a 8000 echantillons /s).

Représentation des signaux périodiques sous la forme de **séries** de Fourier : Illustration

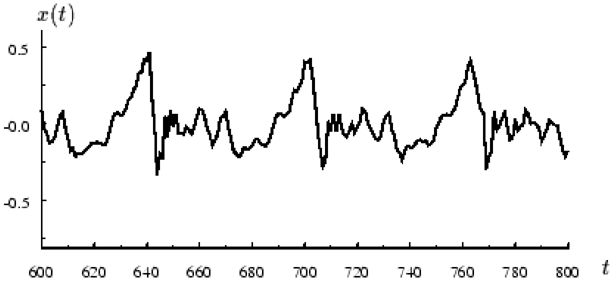


Fig.: Grossissement d'une portion du signal précédent, 64 échantillons correspondent à une durée de 8 ms. Si ce signal est périodisé alors sa période est de 8 ms et donc sa fréquence de 125 Hz

Représentation des signaux périodiques sous la forme de **séries** de Fourier : Illustration

$$X(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt$$

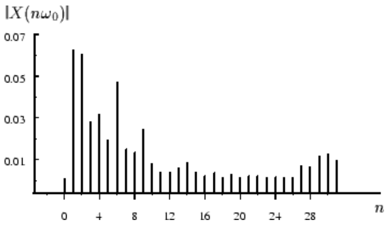


Fig.: Amplitude des harmoniques calculées sur une période du signal de parole (les fréquences des harmoniques sont des multiples de la fréquence fondamentale qui est ici de 125 Hz. Chacune de ces harmoniques a une amplitude, mais aussi une **phase** dont la représentation n'est **pas donnée** parce qu'elle n'est pas très explicite).

Représentation des signaux périodiques sous la forme de **séries** de Fourier : Illustration

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0)\exp(jn\omega_0 t)$$

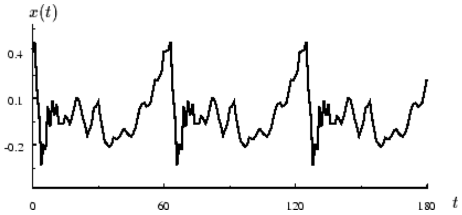


Fig.: Reconstruction du signal utilisant toutes les 32 harmoniques visibles dans ce signal, la reconstruction du signal original est parfaite sur la première période. Les autres périodes reconstituées sont identiques à la première et donc légèrement différentes des périodes correspondantes du signal initial

Représentation des signaux périodiques sous la forme de **séries** de Fourier : Illustration

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) \exp(jn\omega_0 t)$$

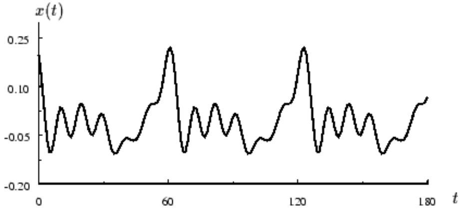


Fig.: Reconstruction du signal n'utilisant que les 16 harmoniques de plus basse fréquences, les fluctuations rapides du signal ont disparu

Quelques propriétés des séries de Fourier

Si un signal est réel :

$$X(-n\omega_0) = \overline{X(n\omega_0)}$$

Si de plus on a les symétries

$$x(-t) = x(t) \Rightarrow X(n\omega_0) = \overline{X(n\omega_0)} \text{ (réel)} \tag{1}$$

$$x(-t) = -x(t) \Rightarrow X(n\omega_0) = -\overline{X(n\omega_0)} \text{ (imaginaire pur)} \tag{2}$$

Remarque 1 : La plupart des propriétés importantes se retrouvent dans le cas des transformées de Fourier.

Remarque 2 : Les propriétés de symétries 1 et 2 sont souvent utilisées de deux manières : soit pour réduire la quantité de calculs à effectuer soit, ce qui est parfois plus utile, pour vérifier que les calculs sont corrects et que les programmes les ont bien transcrits.

Plan

La transformée de Fourier

La décomposition en séries de Fourier peut s'étendre aux fonctions non périodiques. Dans ce cas nous aurons une décomposition sous la forme

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

où l'amplitude complexe à la fréquence ω est donnée par

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$$

Plan

Translation dans le domaine temporel

Soit la fonction $x_\tau(t) = x(t-\tau)$. Sa transformée de Fourier est :

$$X_\tau(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\exp(-j\omega t)dt$$

En effectuant le changement de variable $u = t - \tau$

$$\begin{aligned} X_\tau(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\exp(-j\omega(u+\tau))du \\ &= exp(j\omega\tau)\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\exp(-j\omega u)du \\ &= \exp(-j\omega\tau)X(\omega) \end{aligned}$$

La **translation dans le domaine temporel** se traduit par un terme correspondant à un déphasage linéaire en fonction de la fréquence ($\exp(-j\omega t)$). Cette opération **ne modifie pas le module de la transformée de Fourier**.

Multiplication par une sinusoïde, translation en fréquence

Soit la fonction $x(t)$ multipliée par une sinusoïde $\exp(j\omega_0 t)$:

$$x_{\omega_0}(t) = x(t)\exp(j\omega_0 t)$$

La transformée de Fourier de $x_{\omega_0}(t)$ est

$$\begin{aligned} X_{\omega_0}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{\omega_0}(t)\exp(-j\omega t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j(\omega-\omega_0)t)dt \\ &= X(\omega-\omega_0) \end{aligned}$$

La **multiplication par une sinusoide dans le domaine temporel** se traduit par une **translation des termes de Fourier**.

Multiplexage de signaux ; modulation ; porteuses

Cette propriété est fondamentale pour l'interprétation de la modulation des signaux en télécommunications. De manière à transmettre simultanément plusieurs signaux, $x_a(t)$, $x_b(t)$, $x_c(t)$, on leur applique l'opération de modulation (multiplication par une sinusoide $\exp(j\omega_x t)$ de fréquence ω_x), en choisissant pour chacun des trois signaux des fréquences porteuses différentes, ω_a, ω_b et ω_c. Dans le domaine des fréquences, le récepteur reçoit la somme des trois signaux :

$$Y(\omega) = X_a(\omega - \omega_a) + X_b(\omega - \omega_b) + X_c(\omega - \omega_c)$$

Multiplexage de signaux ; modulation ; porteuses

Pour retrouver un des signaux, par exemple $x_b(t)$, le récepteur (qui connait les fréquences porteuse ω_a, ω_b et ω_c) doit réaliser l'opération inverse de la modulation, la démodulation :

$$Y_b(\omega) = X_a(\omega - \omega_a + \omega_b) + X_b(\omega - \omega_b + \omega_b) + X_c(\omega - \omega_c + \omega_b)$$

et éliminer, par filtrage, les composantes indésirables $X_a(\omega - \omega_a + \omega_b)$ et $X_c(\omega - \omega_c + \omega_b)$, ce qui permet de retrouver $X_b(\omega)$, soit, dans le domaine temporel, le signal émis $x_b(t)$.

Illustration des effets d'une modulation d'amplitude

- colonne de gauche : domaine temporel,
- colonne de droite : domaine fréquentiel (amplitude de la TF, les phases ne sont pas représentées)

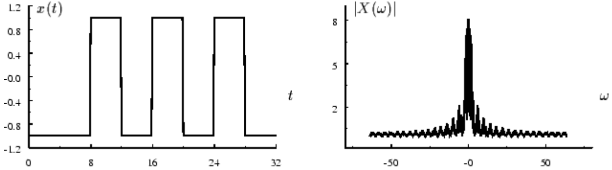


Fig.: Signal $x(t)$ avant modulation

Illustration des effets d'une modulation d'amplitude

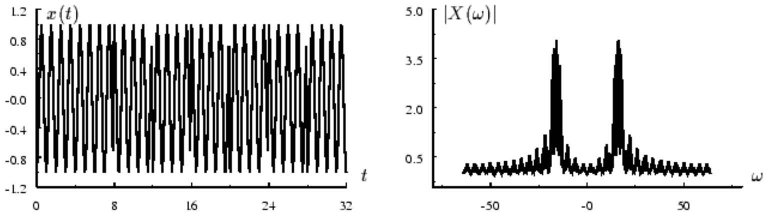


Fig.: Signal après modulation par une porteuse $\cos \omega_0 t$

On a multiplié le signal $x(t)$ par une fonction porteuse sinusoidale $\cos(\omega_0 t)$, ce qui introduit une translation dans le domaine de Fourier. De plus, comme la porteuse est un signal réel (donc $x(t).\cos(\omega_0 t)$ est un signal réel), il y a symétrie par rapport à l'axe des ordonnées dans le domaine de Fourier.

Illustration des effets d'une modulation d'amplitude

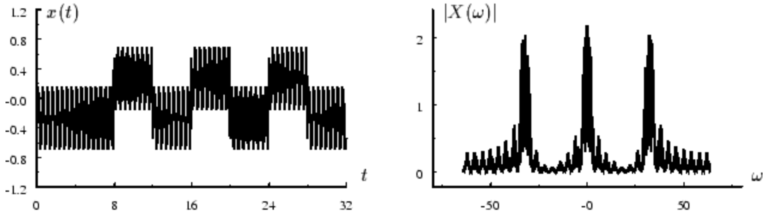


Fig.: Signal après démodulation par une porteuse $\cos(-\omega_0 t)$

À la reception, pour retrouver le signal $x(t)$ on démodule en multipliant par $\cos(-\omega_0 t)$. Les deux pics dans le domaine de Fourier sont translatés et symétrisés par cette démodulation ce qui fait quatre pics dont deux se superposent. Le pic à conserver est celui où a lieu la superposition.

Illustration des effets d'une modulation d'amplitude

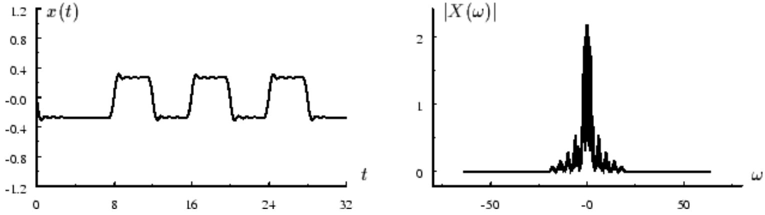


Fig.: Signal filtré passe bas éliminant les composantes hautes fréquences

Transformée de Fourier d'une convolution

Soit $y(t) = x(t) \star h(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

qui a pour transformée de Fourier :

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right] \exp(-j\omega t)dt$$

Transformée de Fourier d'une convolution

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right] \exp(-j\omega t)dt$$

En supposant qu'il est possible de changer l'ordre des intégrations

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\exp(-j\omega t)dt \right] d\tau$$

et en introduisant artificiellement

$$1 = \exp(j\omega\tau)\exp(-j\omega\tau)$$

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\exp(-j\omega\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\exp(-j\omega t)\exp(j\omega\tau)dt \right] d\tau$$

Transformée de Fourier d'une convolution

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\exp(-j\omega\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\exp(-j\omega t)\exp(j\omega\tau)dt\right]d\tau$$

et en effectuant le changement de variable $t - \tau = u$:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\exp -j\omega\tau\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\exp(-j\omega u)du\right]d\tau \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\exp(-j\omega u)du\right] \end{aligned}$$

On y reconnait les transformées de Fourier $X(\omega)$ et $H(\omega)$ des fonctions $x(t)$ et $h(t)$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

Transformée de Fourier d'une convolution

La **transformée de Fourier d'une convolution** de deux fonctions est un **produit des transformées de Fourier** de ces deux fonctions. Ce résultat est un des résultats les plus importants en traitement du signal aussi bien dans les aspects théoriques que dans les applications.

Transformée de Fourier d'un produit de fonctions

La transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse ont des formulations identiques à une constante et un changement de signe près. Par conséquent la transformée d'un produit de fonctions dans le domaine temporel est une convolution dans le domaine des fréquences ; démonstration :

$$y(t) = x(t)h(t)$$

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h(t)\exp(-j\omega t)dt$$

Transformée de Fourier d'un produit de fonctions

En écrivant $x(t)$ comme une transformée de Fourier inverse

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \exp(j\nu t) d\nu \right] h(t) \exp(-j\omega t) dt$$

En admettant qu'on peut changer l'ordre des intégrations

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp[-j(\omega - \nu)t] dt \right] d\nu$$

où on reconnait la transformée $H(\omega - \nu)$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) H(\omega - \nu) d\nu$$

Transformée de Fourier d'un produit de fonctions

La transformée d'un produit de fonctions dans le domaine temporel est une convolution dans le domaine des fréquences :

$$y(t) = x(t)h(t)$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \star H(\omega)$$

Représentation simultanée des transformées de Fourier des signaux périodiques et des signaux quelconques

On peut être amené à représenter simultanément les transformées de Fourier de signaux périodiques et de signaux quelconques, par exemple dans le cas de l'analyse d'un signal musical enregistré en présence d'un bruit de fond. Dans ce cas nous représenterons la transformée de Fourier des signaux périodiques sous la forme d'une suite d'impulsions de Dirac aux fréquences ω_k d'amplitude $X(\omega_k)/2\pi$. Rappel : $y(t) = x(t)h(t)$; $Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \star H(\omega)$

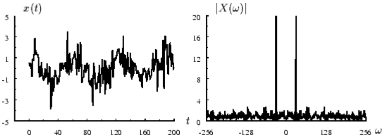


Fig.: Analyse spectrale d'un signal composé d'un signal non périodique et d'un signal pur à 1 fréquence : la composante périodique apparait comme une impulsion dans le domaine des fréquences

Récapitulatif des propriétés

2.2.2 Propriétés

	s(t)	S(F)
Linéarité	$\alpha.s(t) + \beta.r(t)$	$\alpha.S(f) + \beta.R(f)$
Translation	$s(t-t_0)$	$e^{-2j\pi f t_0} S(f)$
	$e^{2j\pi f_0 t} s(t)$	$S(f-f_0)$
Conjugaison	$s^*(t)$	$S^*(-f)$
Dérivation	$\frac{d^n s(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n S(f)$
Dilatation	$s(at)$ avec $a \neq 0$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} S(\frac{f}{a})$
Convolution	$s(t) * r(t)$	$S(f) \cdot R(f)$
	$s(t) \cdot r(t)$	$S(f) * R(f)$
Dualité	$S(t)$	$s(-f)$

Transformée de Fourier

Non traité dans ce cours :

- le lien avec l'échantillonnage et la quantification,
- la transformée en z,
- le filtrage.

Plan

La transformée de Fourier Discrète TFD (en anglais DFT)

Les représentations de signaux et de filtres sous la forme de transformées de Fourier sont des outils **théoriques**. Ils ne peuvent être utilisés que si les données étudiées ont une **représentation formelle**. C'est le cas d'un filtre linéaire non récursif ou d'un signal sinusoïdal.

Dans les études en **traitement du signal**, on est amené à représenter des signaux dont la transformée ne peut pas s'écrire comme une formule dépendant d'un **petit nombre de paramètres**. Même dans le cas où une écriture formelle existe, on a souvent besoin de représenter la transformée de Fourier d'un signal où la réponse en fréquence d'un filtre. On utilisera pour cela les **outils informatiques**.

La transformée de Fourier Discrète TFD (en anglais DFT)

L'utilisation de techniques numériques pour effectuer un calcul de transformée de Fourier suppose que le **nombre de données** à traiter soit **fini** et que le nombre de fréquences pour lesquelles on calcule la transformée soit aussi fini. Pour conserver la même quantité d'informations, on calculera autant de données dans le domaine des fréquences qu'il y a d'échantillons du signal dans le domaine temporel. **C'est l'objectif de la transformée de Fourier discrète.**

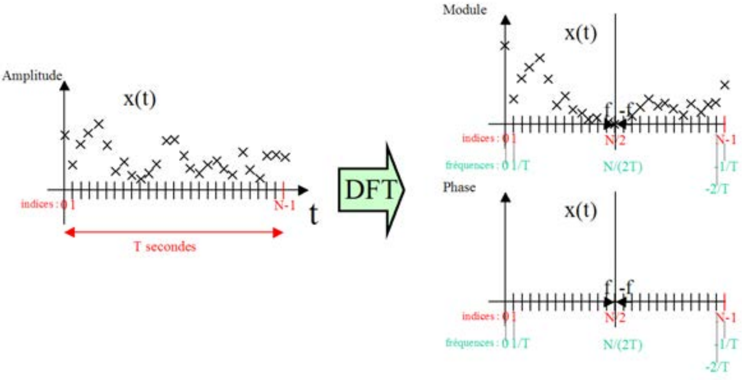
La transformée de Fourier Discrète TFD

Soit le signal échantillonné $x(t)$ nul en dehors de l'intervalle $0, \cdots, T-1$. On rend ce signal périodique en le reproduisant après translation de T, $2T$, $3T$, etc... Pour tout n pour tout $0 \leq t \leq T-1$

$$y(t + nT) = x(t)$$

La transformée de Fourier $Y(\omega)$ de $y(t)$ est nulle sauf aux pulsations multiples de $2\pi/T$. La connaissance de $Y(\omega)$ aux pulsations multiples de $2\pi/T$ suffit donc pour caractériser le signal périodisé $y(t)$ et donc le signal original $x(t)$.

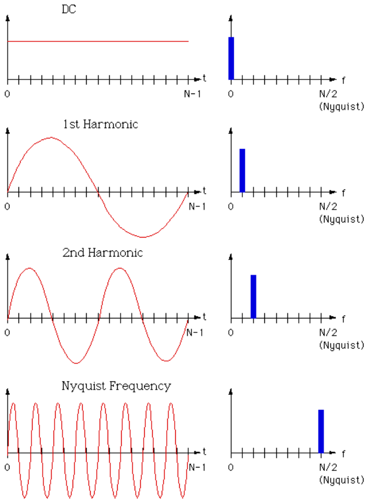
Illustration de la transformée de Fourier Discrète TFD



Représentation graphique des résultats de la transformée de Fourier discrète

Bien souvent, pour une visualisation plus intuitive des fréquences (ordre croissant !), on décale les coefficients de sorte que le coefficient représentant la fréquence nulle soit au centre du tableau stockant les coefficients de Fourier.

Illustration de la transformée de Fourier Discrète TFD



La transformée de Fourier Discrète TFD

La transformée de Fourier d'un signal $x(t)$ est :

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}t} dt \end{aligned}$$

La transformée de Fourier **Discrète** d'un signal $x(t)$ est :

$$X(k) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}k.t}$$

C'est le produit d'une matrice par un vecteur qui transforme le vecteur $x(t)$ en un vecteur $X(k)$ de même dimension.

La transformée de Fourier Discrète TFD

Pour T échantillons, la transformée de Fourier Discrète de $x(t)$ est

$$X(k) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x(t) e^{-j \frac{2\pi}{T} k.t}$$

$$\overbrace{(x(0),\ x(1),\ \ldots,\ x(T\text{-}1))}^{\textit{signal}} \times \frac{1}{T} \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi/T} & . & e^{-j2\pi(T-1)/T} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 1 & e^{-j2\pi(T-1)/T} & . & e^{-j2\pi(T-1)^2/T} \end{bmatrix} = \overbrace{(X(0),\ X(1),\ \ldots,\ X(T\text{-}1))}^{\textit{signal transformé}}$$

La transformée inverse

À partir de l'amplitude complexe des harmoniques on peut reconstituer le signal périodique $y(t)$ et donc le signal $x(t)$ pour $0 \leq t \leq T-1$. On a donc

$$x(t) = \sum_{k=0}^{T-1} X(k) e^{2\pi j \frac{kt}{T}}$$

Complexité de la DFT

La **DFT (Discret Fourier Transform)** est une transformée coûteuse en temps de calcul ; sa complexité est (avec N le nombre d'échantillons traités) :

- $N \times N$ calcul de sinus, $N \times N$ calcul de cosinus,
- $4 \times N \times N$ produits, $4 \times N \times N$ somme,
- plus quelques termes négligeables.

ce qui fait une complexité en $O(N^2)$.

La **FFT (Fast Transform Fourier)** développée par Cooley et Tukey en 1965 est en $O(N \times log_2(N))$. La seule contrainte de l'implémentation la plus populaire (Radix-2 Cooley-Tukey) est que le nombre d'échantillons soit une puissance de 2.

PS : Nous ne verrons que la DFT en TD et en TP (mais pas la FFT)...

La transformée de Fourier en 2D

Transformée de Fourier Discrète 2D :

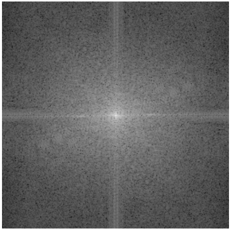
$$F(u,v) = \frac{1}{M \times N} \sum_{x=0}^{M} \sum_{y=0}^{N} f(x,y) e^{-j2\pi\left(\frac{u \times x}{M} + \frac{v \times y}{N}\right)}$$

Transformée de Fourier Discrète 2D inverse :

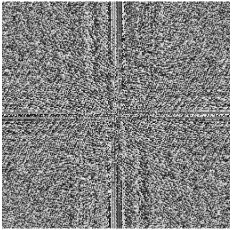
$$f(u,v) = \sum_{x=0}^{M} \sum_{y=0}^{N} F(x,y) e^{j2\pi\left(\frac{u \times x}{M} + \frac{v \times y}{N}\right)}$$

Illustration de la transformée de Fourier en 2D

image originale



module de la DFT



phase de la DFT

Légende des images module et phase :

- noir = faible valeur,
- blanc = grande valeur,
- une échelle logarithmique est utilisée.

Les propriétés de la transformée de Fourier discrète

Toutes les **propriétés de la transformée de Fourier** sont conservées, en particulier la transformée d'une convolution discrète est un produit.

Toutefois l'utilisation de cette propriété (convolution discrète est un produit) nécessite **quelques précautions**. En effet il ne faut pas oublier que les séquences pour lesquelles on calcule les transformées de Fourier discrètes sont périodiques et tenir compte de ce fait dans les calculs.

Il faut s'assurer que la somme des durées T_x et T_h pendant lesquelles les deux signaux $x(t)$ et $h(t)$ sont non nuls est inférieure à T (le nombre d'échantillon). En effet, dans ce cas la durée T_y du résultat de la convolution sera égale à $T_x + T_h - 1$.

Récapitulatif des propriétés

2.2.2 Propriétés

	s(t)	S(F)
Linéarité	$\alpha.s(t) + \beta.r(t)$	$\alpha.S(f) + \beta.R(f)$
Translation	$s(t-t_0)$	$e^{-2j\pi f t_0} S(f)$
	$e^{2j\pi f_0 t} s(t)$	$S(f-f_0)$
Conjugaison	$s^*(t)$	$S^*(-f)$
Dérivation	$\frac{d^n s(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n S(f)$
Dilatation	$s(at)$ avec $a \neq 0$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} S(\frac{f}{a})$
Convolution	$s(t) * r(t)$	$S(f) \cdot R(f)$
	$s(t) \cdot r(t)$	$S(f) * R(f)$
Dualité	S(t)	s(-f)

Plan

La transformée en cosinus

La transformée en cosinus, utilisée en codage de sons et d'images, n'est qu'un **cas particulier de la transformée de Fourier** où on construit à partir d'un signal $x(t)$ de longueur T un signal $y(t)$ de longueur $4T$ symétrique dont les échantillons d'ordre pair sont nuls, ce qui se traduit par les formules suivantes : Pour $k = 0, \cdots, N-1$:

$$\begin{array}{lclcl} \text{y(2k)} & = & \text{y(-2k)} & = & 0 \\ \text{y(2k+1)} & = & \text{y(-2k-1)} & = & \text{x(k)} \end{array}$$

DCT

Dans ce cas le calcul de la transformée de Fourier discrète de $y(t)$ se réduit au calcul de T valeurs. Pour $k = 0, \cdots, N-1$:

$$X(k) = \frac{2}{T} c(k) \sum_{t=0}^{T-1} x(t) \cos\left(\pi \frac{(2t+1)k}{2N}\right)$$

La transformée inverse est pour $t = 0, \cdots, N-1$:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{T-1} c(k) X(k) \cos\left(\pi \frac{(2t+1)k}{2N}\right)$$

où $c(k) = 2^{-1/2}$ si $k = 0$ et $c(k) = 1$ si $k \neq 0$.

DCT-II

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left[\frac{\pi}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)k\right]$$

Cette variante DCT est la plus courante et la plus utilisée. Elle est généralement simplement appelée "la DCT". On peut rendre cette transformation **orthogonale** en multipliant X0 par $1/\sqrt{2}$. Cette forme normalisée est très utilisée en pratique mais casse la correspondance avec la DFT.[2]

$$x_n = \frac{1}{2}X_0 + \sum_{k=1}^{N-1} X_k \cos\left[\frac{\pi}{N}k\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]$$

La DCT-III est la transformée inverse de la DCT-II. Elle est plus connue sous le nom de "DCT Inverse" et son acronyme (anglais) "IDCT".

[2] Source Wikipedia

Calcul de la DCT 2D :

La transformation DCT **pour un bloc** $N \times N$ est une fonction T telle que pour un pixel ayant la valeur $f_{i,j}$ et étant à la position (i,j) **dans le bloc** on a :

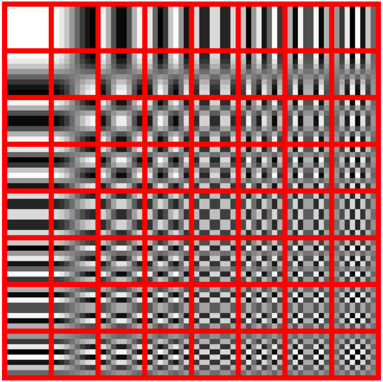
$$F_{i,j} = \frac{c(i) \times c(j)}{N} \times \sum_{k=0}^{k=N-1} \sum_{l=0}^{l=N-1} \left[\cos\left(\frac{(2k+1)j\pi}{2N}\right) \times \cos\left(\frac{(2k+1)i\pi}{2N}\right) \times f_{l,k} \right]$$

la transformation IDCT vaut :

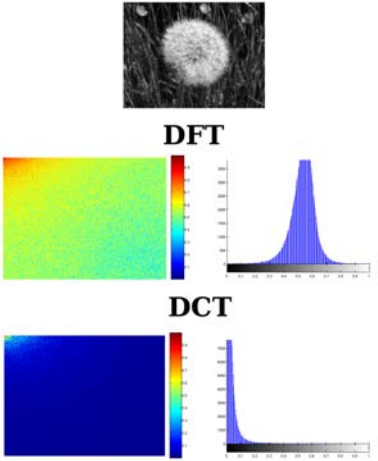
$$f_{i,j} = \frac{1}{N} \times \sum_{k=0}^{k=N-1} \sum_{l=0}^{l=N-1} \left[c(k) \times c(l) \times \cos\left(\frac{(2j+1)k\pi}{2N}\right) \times \cos\left(\frac{(2i+1)l\pi}{2N}\right) \times F_{l,k} \right]$$

DCT 8x8 : Décomposition du signal et une combinaison linéaire de 64 signaux

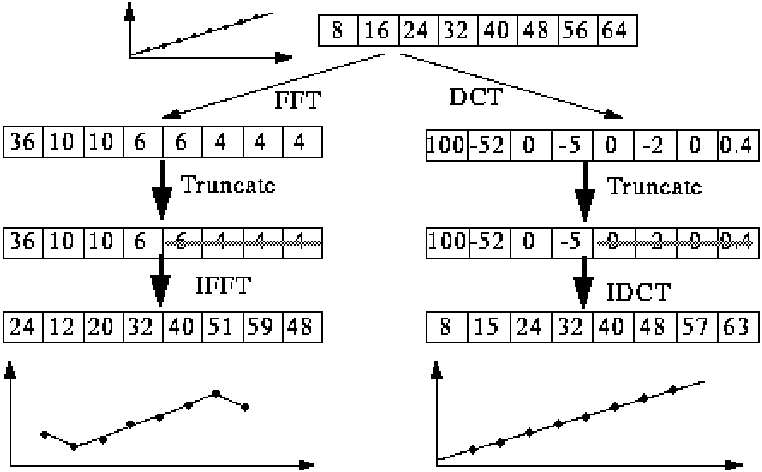
The source data (8x8) is transformed to a linear combination of these 64 frequency squares.



Comparaison pouvoir de concentration d'energie DFT et DCT



Intérêt de la DCT pour la compression avec pertes



Accélération du calcul de la transformée en cosinus DCT :

Un développement optimisé de cette transformée pour le cas N=8 (utilisé dans JPEG et MPEG) est obtenu en réécrivant la transformée sous forme matricielle et en factorisant la décomposition, pour réduire le nombre de multiplications scalaires nécessaires. Par exemple la décomposition est utilisée pour la factorisation par l'algorithme de Chen et al.

W. Chen, C.H. Smith, and S.C. Fralick, "A fast computational algorithm for the discrete cosine transform," IEEE Trans. Commun., Vol. COM-25, pp 1004-1009, Sep. 1977.

Algorithme de Chen et al. pour le cas où N=8

Coefficients constants de calcul :

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{16} \\ \cos \frac{2\pi}{16} \\ \cos \frac{3\pi}{16} \\ \cos \frac{4\pi}{16} \\ \cos \frac{5\pi}{16} \\ \cos \frac{6\pi}{16} \\ \cos \frac{7\pi}{16} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,49039 \\ 0,46194 \\ 0,41573 \\ 0,35355 \\ 0,27779 \\ 0,19134 \\ 0,09755 \end{pmatrix}$$

DCT(8) (méthode de calcul rapide)

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_2 \\ X_4 \\ X_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_4 & C_4 & C_4 & C_4 \\ C_2 & C_6 & -C_6 & -C_2 \\ C_4 & -C_4 & -C_4 & C_4 \\ C_6 & -C_2 & C_2 & -C_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 + x_7 \\ x_1 + x_6 \\ x_2 + x_5 \\ x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \\ X_5 \\ X_7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_3 & C_5 & C_7 \\ C_3 & -C_7 & -C_1 & -C_5 \\ C_5 & -C_1 & C_7 & C_3 \\ C_7 & -C_5 & C_3 & -C_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 - x_7 \\ x_1 - x_6 \\ x_2 - x_5 \\ x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

Remarque sur la complexité

La formule optimisée pour une DCT unidimensionnelle est souvent utilisée telle quelle pour son utilisation dans l'espace bidimensionnel (par transposition et composition) ; cette formule permet de réduire de façon spectaculaire le calcul de 1024 multiplications (formule de base) à 256 multiplications seulement dans le traitement d'un bloc image 8x8 (deux passes de 32 multiplications pour chaque ligne de 8 valeurs) ;

Des optimisations sont encore possibles ; de nombreuses études ont montré comment cette transformée peut être optimisée en fonction des contraintes, notamment quand la transformée est utilisée pour la compression, car la transformée permet de concentrer l'essentiel de l'énergie dans les coefficients d'indice faible, les autres concentrant peu d'énergie ont une contribution faible sur le signal spatial initial et sont réduits à zéro lors des étapes de quantification.

Algorithme rapide inverse

IDCT(8) (méthode de calcul rapide)

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_4 & C_2 & C_4 & C_6 \\ C_4 & C_6 & -C_4 & -C_2 \\ C_4 & -C_6 & -C_4 & C_2 \\ C_4 & -C_2 & C_4 & -C_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ X_2 \\ X_4 \\ X_6 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & C_3 & C_5 & C_7 \\ C_3 & -C_7 & -C_1 & -C_5 \\ C_5 & -C_1 & C_7 & C_3 \\ C_7 & -C_5 & C_3 & -C_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \\ X_5 \\ X_7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_4 & C_2 & C_4 & C_6 \\ C_4 & C_6 & -C_4 & -C_2 \\ C_4 & -C_6 & -C_4 & C_2 \\ C_4 & -C_2 & C_4 & -C_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ X_2 \\ X_4 \\ X_6 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} C_1 & C_3 & C_5 & C_7 \\ C_3 & -C_7 & -C_1 & -C_5 \\ C_5 & -C_1 & C_7 & C_3 \\ C_7 & -C_5 & C_3 & -C_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \\ X_5 \\ X_7 \end{pmatrix}$$