西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第三章 微分中值定理与导数的应用

3.8 函数曲线的凹凸性

数学与统计学院
吴慧卓

主要内容

1. 曲线凹凸性的定义和几何解释
2. 曲线凹凸性的判别法
3. 拐点的定义和几何解释
4. 拐点的判别法

主要内容

1 曲线凹凸性的定义和几何解释

2 曲线凹凸性的判别法

3 拐点的定义和几何解释

4 拐点的判别法

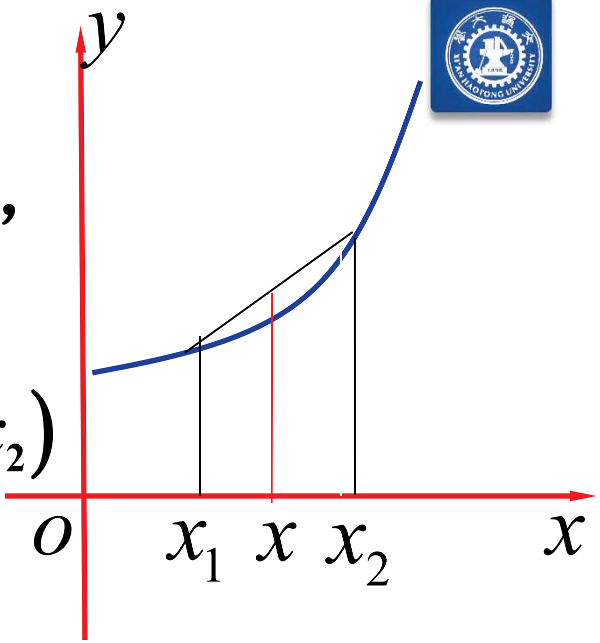
1 曲线凹凸性的定义和几何解释

定义(凸函数） 设 $f: I \to R$, f在I上连续，

(1) 若 $\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in [0,1]$，有

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\right) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

则称 f 为 I 上的凸函数



(2) 若 $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \ne x_2, \forall \lambda \in (0,1)$ 有

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\right) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

则称 f 为 I 上严格凸函数. 不等号反向时，称为凹函数.

主要内容

1 曲线凹凸性的定义和几何解释

2 曲线凹凸性的判别法

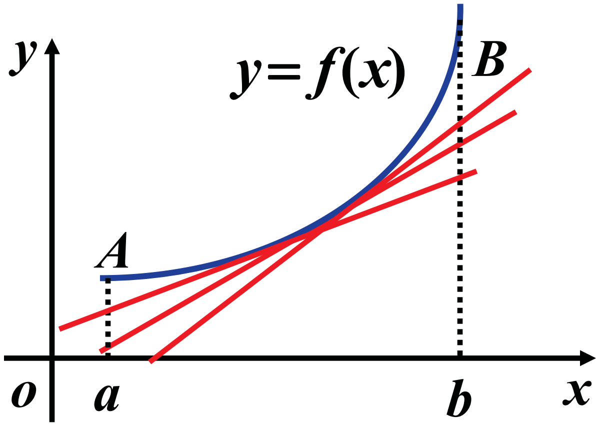
3 拐点的定义和几何解释

4 拐点的判别法

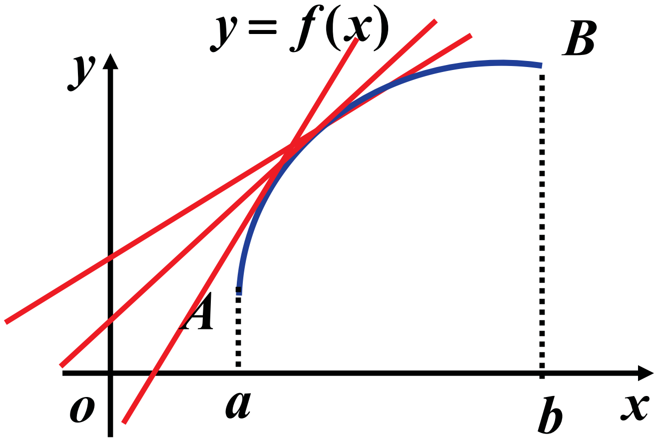
2 函数凹凸性的判别法

定理 设 f 在区间 I 上可导，若 $f'(x)$ 在 I 上严格单调增（单调增），则 f 在 I 上是严格凸（凸）的.

推论 若在区间 I 上 $f''(x)>0$,则 f 在 I 上是严格凸的.



$f'(x)$ 递增



$f'(x)$ 递减

例1 研究下列函数 的凸性.

$$(1)\, y = x^3; \quad (2) y = e^{-x^2}$$

例2 证明下列不等式.

$$\forall x_1, x_2 > 0, \qquad \ln \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{1}{2}(\ln x_1 + \ln x_2)$$

f严格凸：$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

主要内容

1 曲线凹凸性的定义和几何解释

2 曲线凹凸性的判别法

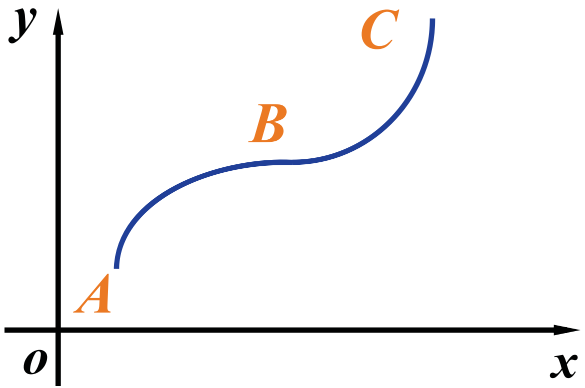
3 拐点的定义和几何解释

4 拐点的判别法

3 拐点的定义和几何解释

设函数 $f(x)$ 在定义区间 I 内的点 x_0 处连续，若在 x_0 处的两侧，f 的凸性发生改变，从而曲线 $y=f(x)$（即 f 的图像)的凸性在 x_0 的两侧也发生变化，则称曲线上的点 $(x_0,f(x_0))$ 为该曲线的一个拐点.

拐点就是曲线上凹凸区间的分界点.



主要内容

1 曲线凹凸性的定义和几何解释

2 曲线凹凸性的判别法

3 拐点的定义和几何解释

4 拐点的判别法

4 拐点的判别法

定理1 如果 $f(x)$ 在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内二阶可导，则点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点的必要条件是 $f''(x_0)=0.$

方法1： 设函数$f(x)$在x_0的邻域内二阶可导, 且$f''(x_0)=0$,

(1) x_0两近旁$f''(x)$变号, 点$(x_0, f(x_0))$即为拐点;

(2) x_0两近旁$f''(x)$不变号, 点$(x_0, f(x_0))$不是拐点.

例3 求曲线 $y=e^{-x^2}$ 的拐点.

方法2： 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内三阶可导, 且 $f''(x_0)=0$,

而 $f'''(x_0)\neq 0$, 那末 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

注意： 若 $f''(x_0)$ 不存在, 点 $(x_0, f(x_0))$ 也可能是连续曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

例4 研究函数 $y=\sin x+\cos x \quad (x\in[0,2\pi])$ 的凸性并求拐点

例5 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.