西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第三章　微分中值定理与导数的应用

3.11 平面曲线的曲率

数学与统计学院
吴慧卓

主要内容

1 弧微分及其计算公式

2 曲率的概念

3 曲率的计算公式

4 曲率圆与曲率半径

5 曲率的应用举例

主要内容

1 弧微分及其计算公式

2 曲率的概念

3 曲率的计算公式

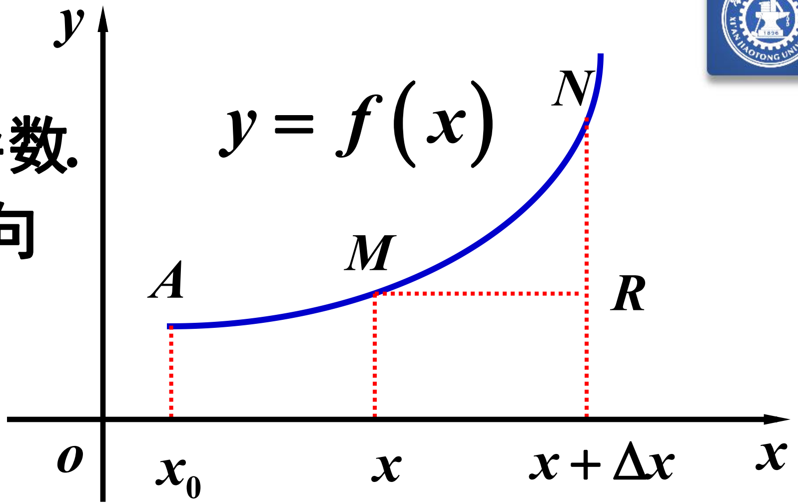
4 曲率圆与曲率半径

5 曲率的应用举例

1 弧微分及其计算公式

设函数$f(x)$在区间(a,b)内具有连续导数.

规定：曲线的正向为参数增加的方向



单调增函数 $s=s(x)$.

$$\Delta s=\overset{\frown}{MN}=s(x+\Delta x)-s(x)$$

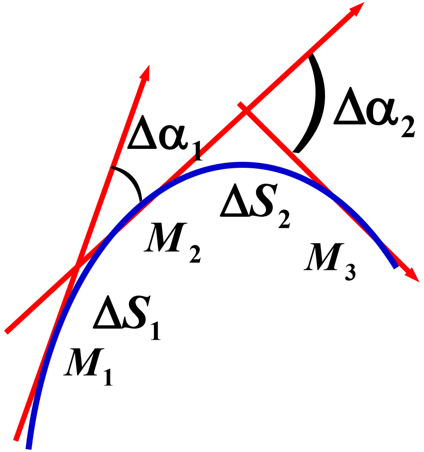
$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=\left(\frac{\overset{\frown}{MN}}{\Delta x}\right)^2=\left(\frac{\overset{\frown}{MN}}{|MN|}\right)^2\left(\frac{|MN|}{\Delta x}\right)^2=\left(\frac{\overset{\frown}{MN}}{|MN|}\right)^2\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$$

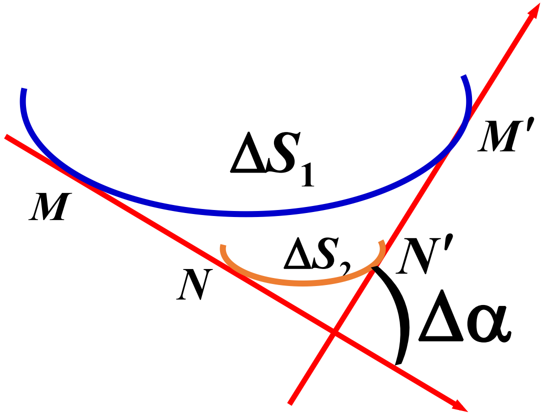
$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\frac{\overset{\frown}{MN}}{|MN|}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

当$\Delta x\to 0$时，$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ 故 $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

主要内容

2 曲率的概念





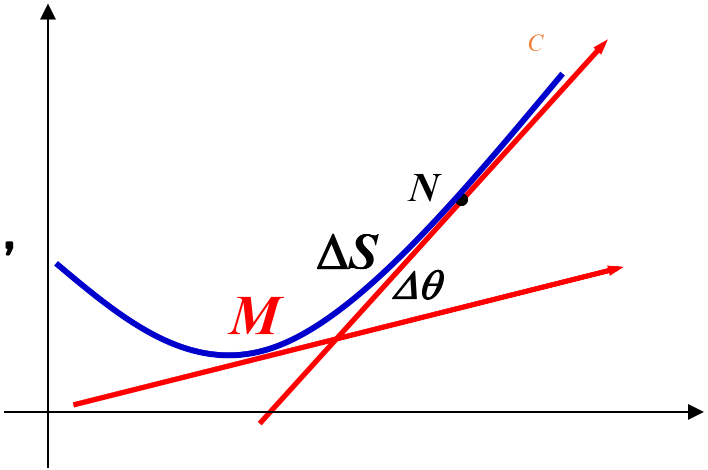
弧段弯曲程度越大转角越大

转角相同弧段越短弯曲程度越大

曲率与切线的转角成正比与弧长成反比.

定义1 （曲率） 设 M 与 N 为光滑平面曲线 C 上的两点，

曲线C在点M处的曲率 $\kappa=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|=\left|\dfrac{d\theta}{ds}\right|.$



(1) 直线的曲率处处为零；

(2) 圆上各点处的曲率等于半径的倒数，且半径越小曲率越大.

主要内容

3 曲率的计算公式

（1） 由直角坐标方程表示的平面曲线曲率的计算公式

设曲线 C 的直角坐标方程为 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数.

曲线 C 在点 $M(x,y)$ 处曲率的计算公式：

$$\kappa=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}$$

(2) 由参数方程表示的平面曲线曲率的计算公式

设光滑曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta],$

其中 $x(t)$ 与 $y(t)$ 二阶可导，且 $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0.$

曲线 C 在点 $M(x, y)$ 处曲率的计算公式：

$$\kappa = \frac{\left|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}\right|}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}$$

(3) 由极坐标表示的平面曲线曲率的计算

设光滑曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=\rho(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]$,

$$\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta, \\ y=\rho(\theta)\sin\theta, \end{cases} \theta\in[\alpha,\beta],$$

$$\kappa=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{3/2}}$$

主要内容

1 弧微分及其计算公式

2 曲率的概念

3 曲率的计算公式

4 曲率圆与曲率半径

5 曲率的应用举例

4 曲率圆与曲率半径

设曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $\kappa(\kappa\neq 0)$

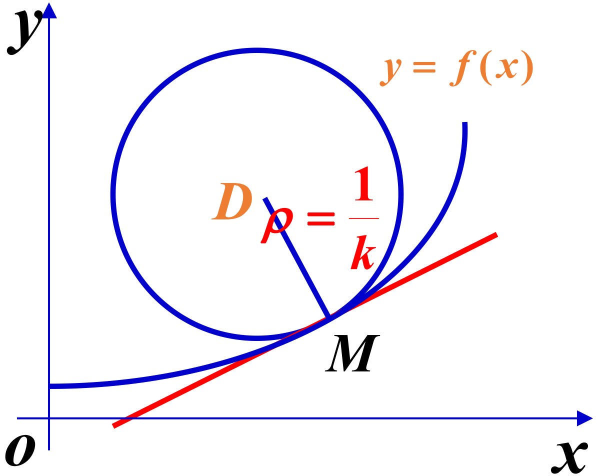
在点 M 处的曲线的法线上，在凹的一侧取一点 D 使

$|DM|=\dfrac{1}{\kappa}=R.$ 以 D 为圆心，R 为半径作圆，

称此圆为曲线在点 M 处的曲率圆，

R 称为曲线 C 在点 M 处的曲率半径，

圆心 D 称为曲线 C 在点 M 处的曲率中心



主要内容

1 弧微分及其计算公式

2 曲率的概念

3 曲率的计算公式

4 曲率圆与曲率半径

5 曲率的应用举例

5 曲率的应用举例

例1 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在顶点$(a,0)$和（$0,b$)处的曲率.

例2 求曲线 $y=ax^3(a>0)$在点$(0,0)$处的曲率.

例3 列车从直道进入弯道时，为什么常会产生摇晃震动？怎样去减小这种晃动？