西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第三章 微分中值定理与导数的应用

3.6 函数的单调性

数学与统计学院
吴慧卓

主要内容

1 函数单调性的判别法

2 函数单调性的应用举例

主要内容

1 函数单调性的判别法

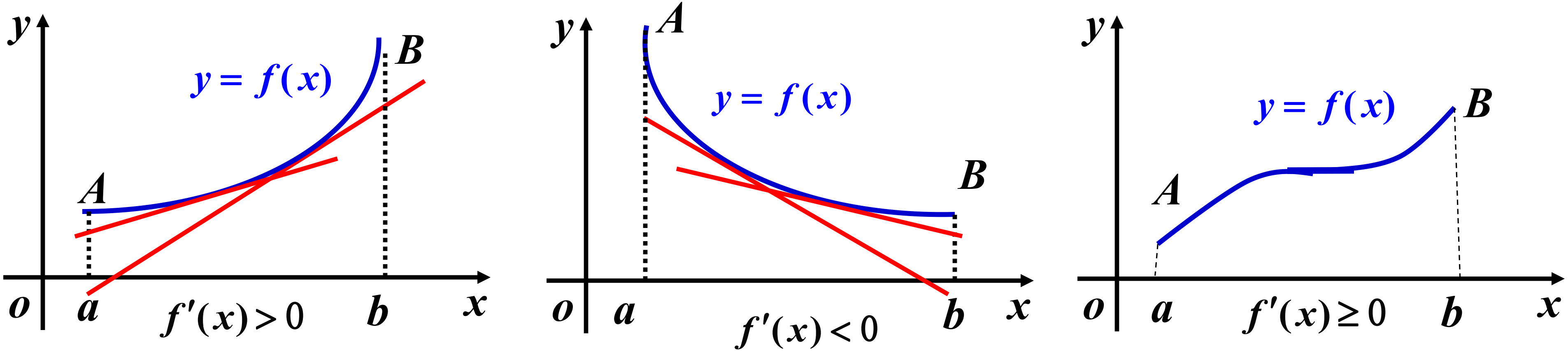
2 函数单调性的应用举例

1 函数单调性的判别法

定理 设 $f: I \to R$ 在 I 上连续，在 I 内可导，则

（1）在 I 内 $f'(x) > 0 (< 0) \not\Leftarrow\Rightarrow f(x)$ 在 I 上严格单调增（减）;

（2）在 I 内 $f'(x) \geq 0 (\leq 0) \rightleftarrows f(x)$ 在 I 上单调增（减）.



主要内容

1 函数单调性的判别法

2 函数单调性的应用举例

2 函数单调性的应用举例

例1 讨论函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的单调性

例2 证明：当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$\tan x>x$

例3 证明：当 $0<x<1$ 时，$e^{2x}<\dfrac{1+x}{1-x}$

西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第三章 微分中值定理与导数的应用

3.7 函数的极值

数学与统计学院
吴慧卓

主要内容

1 函数极值的概念

2 函数极值点的必要条件

3 函数极值点的第一充分条件

4 函数极值点的第二充分条件

主要内容

1 函数极值的概念

2 函数极值点的必要条件

3 函数极值点的第一充分条件

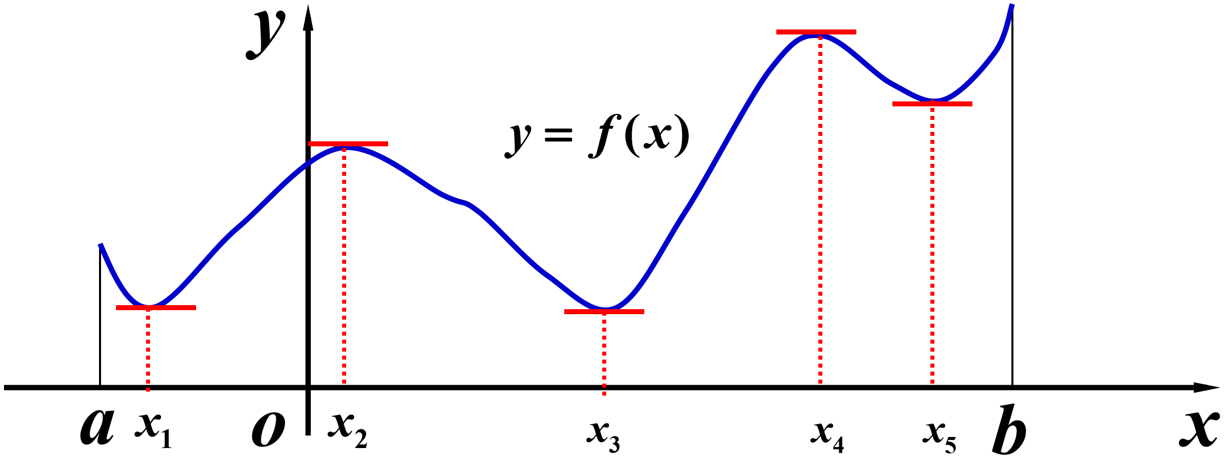
4 函数极值点的第二充分条件

1 函数极值的概念

定义（极值）若 $\exists\delta>0$，使得

$\forall x\in U(x_0,\delta)$恒有$f(x)\geq f(x_0)$，则称$f(x)$在 x_0取得极小值.

$\forall x\in U(x_0,\delta)$恒有 $f(x)\leq f(x_0)$，则称 $f(x)$在 x_0取得极大值.



例1 $x=0$ 既是 $y=\sqrt{x}$ 的极小值点也是最小值点，这种正确吗？

例2 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，问在点 $x=0$ 处函数是否取得极值？若取得极值，是极大值还是极小值？

主要内容

1 函数极值的概念

2 函数极值点的必要条件

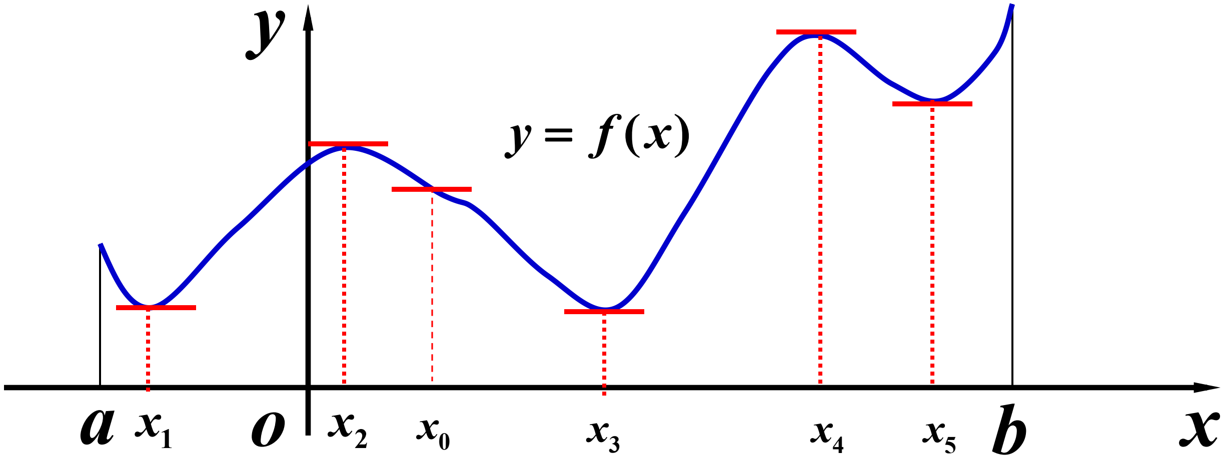
3 函数极值点的第一充分条件

4 函数极值点的第二充分条件

2 函数极值点的必要条件

定理（Fermat定理） 若 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值，且 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f'(x_0)=0$

即**可导函数的极值点为驻点**（极值的必要条件）.



主要内容

1 函数极值的概念
2 函数极值点的必要条件
3 函数极值点的第一充分条件
4 函数极值点的第二充分条件

3 函数极值点的第一充分条件

定理1（第一充分条件）

设 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内可导，且 $f'(x_0)=0$

(1) 若 $x<x_0$ 时，$f'(x)\geq 0; x>x_0$ 时，$f'(x)\leq 0$ 则 f 在 x_0 处取极大值.

(2) 若 $x<x_0$ 时，$f'(x)\leq 0; x>x_0$ 时，$f'(x)\geq 0$ 则 f 在 x_0 处取极小值.

（3）若 $f'(x)$ 在 x_0 的两侧不变号，则 f 在 x_0 无极值.

注意：若函数在 x_0 处连续但不可导，定理的结论仍成立.

例3 求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.

例4 求函数 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.

主要内容

1 函数极值的概念

2 函数极值点的必要条件

3 函数极值点的第一充分条件

4 函数极值点的第二充分条件

4 函数极值点的第二充分条件

定理2（第二充分条件） 设 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$

(1) 当 $f''(x_0)>0, f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

(2) 当 $f''(x_0)<0, f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

例5 求函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的极值.

定理3（第三充分条件）

若 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, 而 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, 则

(1) 当 n 为偶数时，$f(x)$在 x_0 处有极值.

$f^{(n)}(x_0)>0$ 时极小，$f^{(n)}(x_0)<0$ 时极大.

(2) 当 n 为奇数时 $f(x)$在 x_0 处无极值.

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第三章　微分中值定理与导数的应用

3.9 函数的最值

数学与统计学院
吴慧卓

主要内容

1 函数最大值最小值的求法

2 函数最值的应用举例

主要内容

1 函数最大值最小值的求法

2 函数最值的应用举例

1 函数最大值最小值的求法

求连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最值

1.求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内可能取得极值的点（驻点和不可导点） $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

2. 比较

$$\max_{a \le x \le b} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$$

$$\min_{a \le x \le b} f(x) = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$$

主要内容

1 函数最大值最小值的求法

2 函数最值的应用举例

例1 求 $f(x)=2x^3-3x^2$ 在 $[-1,2]$ 上最大值和最小值

例2 证明不等式

$$\frac{1}{2^{p-1}} \le x^p + (1-x)^p \le 1\left(x \in [0,1], p>1\right)$$

例3 在半径为 R 的球中内接一直圆锥,试求圆锥的最大体积.