Calcul différentiel et intégral

R. Petit

année académique 2015 - 2016

Contents

1 Intuitions

1.1 Les dérivées

1.1.1 Définition

Alors que l'analyse nait au XVII^e siècle, ce n'est que pendant le XIX^e que les outils nécessaires à une expression rigoureuse ont été à disposition des mathématiciens. L'analyse a pour notion centrale celle de *variation*. Intuitivement, la notion de variation instantanée d'une quantité $f(t)$ peut être décrite de la sorte :

$$V(t, \Delta t) = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

pour une valeur Δt étant *de plus en petite*. On dit donc que Δt *tend vers 0*. Attention cependant car le manque de rigueur et le manque d'outils adaptés à la manipulation de données infinitésimales amènent à des paradoxes et des résultats illogiques voire inexplicables.

Selon la définition de variation vue ci-dessus, nous pouvons exprimer la dérivée comme étant la variation instantanée d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que nous notons $f'(t)$. Plus précisément, la variation *instantanée* implique que Δt soit *infiniment petit*, ce qui s'écrit ainsi :

$$f'(x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Remarque. Pour des *petites valeurs* de Δt, l'approximation suivante est admissible :

$$f(t + \Delta t) \simeq f(t) + f'(t)\Delta t$$

1.1.2 Exemples

Fonction affine Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$. La dérivée de f est l'expression suivante :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a$$

Il *doit* sembler intuitif qu'étant donné que la fonction f est une fonction dont le graphe est une droite, sa dérivée (donc sa variation instantanée) est constante sur tout son domaine du fait que la variation d'une fonction uniformément (dé)croissante est constante.

Plus spécifiquement, si $a = 0$, la fonction est une fonction *constante* : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto b$. De ce fait, sa dérivée doit être nulle car une fonction croissante n'a pas de variation (par définition). La quantification de cette variation doit donc être représentée par 0. Cela peut se montrer également aisément depuis la définition de la dérivée :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{b - b}{h} = 0$$

Fonction du second degré Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Sa dérivée peut être calculée ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c - ax^2 - bx - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2axh + ah^2 + bh}{h} = \lim_{h \to 0} 2ax + ah + b = 2ax + b \end{aligned}$$

Ici, la dérivée est une fonction de x, ce qui indique que selon la valeur de x à laquelle nous voulons évaluer la dérivée, la variation représentée est susceptible de différer.

Fonction valeur absolue Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} +x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$. Afin de déterminer l'accroissement instantané de f au point d'abscisse $x = 0$, il faut repasser par la définition :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} V_f(a, h)$$

Donc $f'(0)$ peut être déterminé de la manière suivante :

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} V_f(0, h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$$

Les cas $h < 0$ et $h \geq 0$ doivent être traités séparément de par la définition de la fonction. Pour le premier cas, la dérivée est :

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Et pour le second cas,

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

Le résultat est tout à fait cohérent par rapport au graphique de la fonction $x \mapsto |x|$ car cette fonction a deux accroissements différents : l'un à gauche de 0, l'autre à droite de 0. Cependant, il est impossible d'exprimer la valeur de la dérivée de f au point 0. On dit de f qu'elle n'est pas dérivable en 0.

Fonction exponentielle Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$ avec $a \in \mathbb{R}_0^+$. À nouveau, pour définir sa dérivée, il nous faut repasser par la définition :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h \to 0} V(0, h) = a^x f'(0)$$

Ce développement nous indique que pour connaitre la dérivée de f au point x, il nous faut connaitre la dérivée de f au point 0. Il est possible d'observer sur des esquisses de graphique que $f'(0)$ dépend de a de manière croissante. Faire croître a impliquera une croissance de $f'(0)$. Il existe cependant un nombre $\in \mathbb{R}$ tel que $f'(0) = 1$. Ce nombre est $e \simeq 2.718$, ce qui implique $f'(x) = e^x f'(0) = e^x = f(x)$. La fonction $x \mapsto e^x$ (et ses multiples) sont leur propre dérivée.

1.1.3 Dérivée d'ordre supérieur

Étant donné que la dérivée d'une fonction quelconque f (en supposant qu'elle est dérivable) est également une fonction
$(f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x))$, nous pouvons à nouveau dériver cette fonction (en supposant que la dérivée soit toujours dérivable). Il est alors question de *dérivée seconde*, telle que $f''(x) = (f')'(x) = ((f)')'(x)$. Pour noter la k^e dérivée, il existe la notation suivante : $f^{(k)}$ (car répéter k fois le symbole *prime* (') est contre-productif en temps de lecture **et** d'écriture).

Ces mêmes dérivées d'ordre supérieur à 1 ont leur importance et leur cohérence : tant $f'(x)$ est la variation de la quantité $f(x)$, tant $f''(x)$ est la variation de $f'(x)$. La dérivée seconde représente donc l'accroissement de l'accroissement (ou la variation de la variation). Elle nous donne donc une information sur comment la variation évolue (en dynamique, si on représente la position d'un mobile par la fonction $x(t)$, $x'(t)$ représente la variation de la position, à savoir la vitesse (donc $x'(t) = v(t)$). Cependant, $x''(t)$ représente la variation de la vitesse, à savoir l'accélération, d'où $x''(t) = v'(t) = a(t)$).

De plus, la dérivée seconde a une autre interprétation graphique : si $f''(x) > 0$, nous savons que $f'(x)$ a une pente positive donc $f'(x)$ est croissante. Cela implique que $f(x)$ est croissante aussi mais de plus en plus croissante. Autrement dit, le graphe de $f(x)$ est *concave* aux alentours de $(x, f(x))$. De manière similaire, lorsque $f''(x) < 0$, $f(x)$ est de moins en moins décroissante et donc le graphe de $f(x)$ est *convexe* aux alentours de $(x, f(x))$.

1.1.4 Notation de Leibniz

En reprenant la définition de la variation donnée plus haut, nous pouvons définir δf et δx comme étant respectivement la variation de la quantité $f(x)$ et la variation de la quantité x. Nous avons donc :

$$V(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\delta f}{\delta x}$$

Cela implique que nous ayons $\delta f = f(x+h) - f(x)$, ce qui est bien la variation de la quantité $f(x)$, et que nous ayons $\delta x = h = (x+h) - (x)$, ce qui est bien la variation de la quantité x.

Or, nous avions défini la dérivée comme étant la variation instantanée, à savoir $f'(x) = \lim_{h\to 0} V(x,h)$, qui selon la notation de Leibniz correspond à $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\delta f}{\delta x}$. Leibniz a cependant instauré une seconde notation correspondant non plus à la variation comme la notation δ mais bien à la dérivée. Cette notation est :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0} \frac{\delta f}{\delta x}$$

Attention cependant à ne pas utiliser cette valeur comme étant un quotient de nombres réels : la notation $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ n'a de sens que lorsque la limite a été faite. Et comme $\lim_0 \frac{F(h)}{G(h)} \neq \frac{\lim_0 F(h)}{\lim_0 G(h)}$, nous ne pouvons pas séparer $\mathrm{d}f$ et $\mathrm{d}x$[1].

Leibniz a également eu besoin d'une notation pour la k^e dérivée. Ayant considéré $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ comme étant une opération à réaliser k fois, il a noté la k^e dérivée de la sorte :

$$\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$$

1.2 Règles de dérivation

Somme Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fonction dérivables en a. De manière intuitive, nous pouvons dire que $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ car l'accroissement de la fonction de somme est la somme des accroissements : au point a, la fonction $(f+g)$ *subit* un accroissement égal à l'accroissement de f plus l'accroissement de g.

Produit Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fonction dérivables en a. Contrairement à ce que nous serions tentés de dire naïvement, nous ne pouvons pas définir $(fg)'(a) = f'(a)g'(a)$. C'est à Leibniz que l'on doit cette démonstration.

Considérons un rectangle de dimensions $f(a)$ et $g(a)$. La quantité $(fg)(a)$ correspond à l'aire de ce rectangle. Si on passe de a à $a+h$, nous obtenons un nouveau rectangle de dimensions $f(a+h)$ et $g(a+h)$. Selon l'approximation vue au point 1.1.1., nous savons que $f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h$. L'aire du nouveau rectangle est

[1] Du moins pas dans le cas d'une dérivée.

donc $A = f(a+h)g(a+h) \simeq (f(a)+f'(a)h)(g(a)+g'(a)h) = f(a)g(a)+f'(a)g(a)h+f(a)g'(a)h+f'(a)g'(a)h^2$. Rappelons tout de même que la dérivée ici est égale à :

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(a)g(a)h+f(a)g'(a)h+f'(a)g'(a)h^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} f'(a)g(a)+f(a)g'(a)+f'(a)g'(a)h = f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\end{aligned}$$

Nous avons donc la variation instantanée de la fonction (fg) au point a : $(fg)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.

Composition Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fonctions telles que g est dérivable en a, et f est dérivable en $g(a)$. Il est toujours possible de trouver la dérivée de la fonction composée $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ à l'aide de l'approximation $f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h$ tant que h est *petit*. Notre dérivation devient donc :

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f\circ g)(a+h)-(f\circ g)(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(a)+g'(a)h)-f(g(a))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(a))+f'(g(a))g'(a)h-f(g(a))}{h} = f'(g(a))g'(a)\end{aligned}$$

Réciproque Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f est bijective, nous pouvons définir sa fonction réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si en plus, nous supposons que $f'(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, nous pouvons exprimer la dérivée de la fonction réciproque comme suit :

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

selon le développement suivant (nécessitant la dérivée d'une composée) : en sachant que la dérivée de la fonction identité est 1 ($(x \mapsto x)'(x) = 1$) et que la composée d'une fonction f avec sa réciproque (f^{-1}) correspond à la fonction identité, nous pouvons trouver la dérivée de la réciproque.

$$\begin{aligned}id'(x) &= 1\\ (f^{-1}\circ f)'(x) &= 1\\ (f^{-1})'(f(x))f'(x) &= 1\\ (f^{-1})'(f(x)) &= \frac{1}{f'(x)}\end{aligned}$$

Ou encore :

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'((f^{-1})(a))}$$

Remarque. De manière graphique, ce résultat peut s'interpréter de la manière suivante : la réciproque d'une fonction bijective est son image par symétrie orthogonale d'axe $y = x$. En traçant cet axe de symétrie, on peut observer qu'aux points $(a, f(a)) \in \Gamma_f$ et $(b, (f^{-1})(b)) \in \Gamma_{f^{-1}}$ tel que $b = f(a)$, nous avons un rapport entre les pentes des tangentes. Plus précisément, nous pouvons observer que la pente de la tangente au second point $((f^{-1})'(b) = (f^{-1})'(f(a)))$ correspond à l'inverse de la pente de la tangente au second point. Donc nous avons bien la même égalité : $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Exemple des fonctions exponentielles et logarithmiques Il a été vu plus haut que la fonction $x \mapsto \exp(x)$ admettait pour dérivée elle-même. Nous avons également vu ci-dessus que $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'((f^{-1})(a))}$. En étant tenté de trouver $f(x)$ telle que $f'(x) = f(x) \forall x \in \operatorname{dom} f$, nous aurions donc $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f((f^{-1})(a))} = \frac{1}{a}$. Cependant, nous connaissons une fonction de ce genre : la fonction exponentielle de base e. Sa fonction inverse, la fonction logarithmique de base e a sa dérivée calculée de la sorte :

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}$$

1.3 Les intégrales

1.3.1 Définition

En analyse, il existe un outil permettant de calculer l'aire en dessous d'une courbe. Cet outil s'appelle *intégrale*. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous définissons l'aire entre la courbe de f et l'axe horizontal $y = 0$ définie entre les droites $x = a$ et $x = b$ de la manière suivante :

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque. Cette aire est dite *signée*. C'est à dire que les parties *en dessous* de l'axe $y = 0$ sont représentés par une valeur réelle négative alors que les parties *au dessus* de l'axe $y = 0$ sont représentés par une valeur réelle positive.

Afin d'approximer l'aire que nous tentons de déterminer, nous découpons l'intervalle $[a, b]$ en n *morceaux* $[x_{i-1}, x_i]\, 1 \leq i \leq n$ avec $x_i = a + (b - a)\frac{i}{n}$. Ces *arrêtes* nous permettent d'obtenir des rectangles de hauteur respective $f(x_{i-1})$. L'aire de chacun de ces rectangles est donc $b \times h = (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1})$. L'approximation de l'aire recherchée (donc de l'intégrale) est la somme des aires de ces rectangles.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \simeq \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1})$$

Pour obtenir l'aire exacte, il faut faire tendre n vers $+\infty$.

Exemple de la fonction carrée Si nous désirons trouver l'aire sous la courbe de $x \mapsto x^2$ sur $[0, t]$, nous la déterminons ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^t x^2\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})(x_{i-1})^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{t}{n}\left(t\frac{i-1}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{t^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{t^3}{n^3}\frac{n(2n-1)(n-1)}{6} = \lim_{n\to\infty}\frac{t^3(2n-1)(n-1)}{6n^2} = t^3\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1-3n}{n^2} \\
&= t^3\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n}\right) = t^3\frac{2}{6} = \frac{t^3}{3}
\end{aligned}$$

1.4 Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

1.4.1 1ère version

En analyse, il existe un théorème (parfois appelé *théorème fondamental de l'analyse* qui définit la dérivation et l'intégration comme deux opérations inverses l'une de l'autre. Avant d'exprimer le théorème, tentons de donner un peu d'intuition au rapport entre dérivation et intégration.

Soit $F(x)$, une fonction réelle définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ telle que f est une fonction réelle continue. Admettons que $F(x)$ est dérivable sur l'intégralité de son domaine. Nous pouvons donc déterminer sa dérivée comme étant l'accroissement instantané :

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} V_F(x, h) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ce que représente $\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire en dessous de la courbe de f entre les points d'abscisse x et $x + h$. h étant tout petit (tendant vers l'infini), nous pouvons approximer $f(t)$ constant entre x et $x + h$. L'aire représentée par l'intégrale est donc $\simeq hf(x)$. Nous pouvons donc poursuivre le calcul de la dérivée de F :

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} hf(x) = f(x)$$

Nous avons donc $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $f = F'(x)$. Nous pouvons dès à présent énoncer une première version du théorème :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $F(x)$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur l'intégralité de son domaine tel que $F'(x) = f(x)$.

1.4.2 2nde version

Il existe une deuxième manière d'énoncer ce théorème. À nouveau, tentons de le trouver intuitivement. En ayant une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en tout point de son domaine, nous pouvons considérer l'intégrale de a en b de $f'(x)$ comme étant la somme des variations instantanées de f sur l'intervalle $[a, b]$. Tentons maintenant de définir plus précisément ce que vaut cette intégrale.

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f'(x_{i-1})$$

Rappel Au point 1.1.1., nous avons vu l'approximation suivante : $f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h$. En réorganisant cette approximation, nous avons $f'(a)h \simeq f(a+h) - f(a)$. Dans notre cas, si nous posons $h = \frac{b-a}{n}$, nous pouvons poursuivre notre intégrale.

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} hf'(x_{i-1}) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1} + h) - f(x_i) \\ &= \lim_{n \to \infty} f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)\end{aligned}$$

Nous avons considéré cette intégrale comme étant la somme des variations instantanées de f entre a et b, et le résultat de ce développement est que la somme des variations instantanées est égale à la variation totale pour aller de a à b.

Le théorème peut donc être exprimé d'une deuxième manière :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction réelle dérivable, alors

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

1.5 Primitives

En analyse, il est fréquent de devoir trouver F tel que $F'(x) = f(x)$. C'est donc une recherche de fonction. Cependant, comme nous venons de le voir, trouver une fonction en connaissant sa dérivée revient à réaliser une intégrale (version 1 du théorème fondamental de l'analyse). Une solution F satisfaisant $F'(x) = f(x)$

est appelée une *primitive* de f. $\int f$ ou $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ sont les manières les plus courantes d'écrire *primitive de* f[2]. Cependant, comme le laisse comprendre la seconde version du théorème fondamental de l'analyse, il existe une infinité de primitives, toutes définies à *une constante près*. Nous généralisons donc « la » primitive de f en $\int f + C$, $C \in \mathbb{R}$.

1.6 Règles d'intégration

Tout comme il y a des règles de dérivation (point 1.1.5.), il existe des règles d'intégration.

Produit Tout comme $(fg)'(x) \neq f'(x)g'(x)$, $\int (fg)(x)\,\mathrm{d}x \neq \int f(x)\,\mathrm{d}x \int g(x)\,\mathrm{d}x$. Pour réussir à intégrer un produit, il faut partir de la règle de Leibniz pour la dérivation :

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
\int_a^b (fg)'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,\mathrm{d}x \\
[(fg)(x)]_a^b &= \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,\mathrm{d}x \\
[(fg)(x)]_a^b &= \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \\
\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= [(fg)(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Il faut donc, pour pouvoir intégrer un produit, considérer un des deux facteurs comme étant une dérivée (qu'il faudra donc intégrer pour avancer).

Composition La règle *d'intégration en chaine* est également appelée *changement de variable*. Elle peut être exprimée comme suit. Soient f et g, deux fonctions continûment dérivables, $g(\alpha) = a$ et $g(\beta) = b$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cela veut dire qu'une intégration peut être résolue en *transformant* l'intégrale de manière à faire apparaitre une composition. La justification de cette formule peut être donnée comme suit :

$$(F(g(t)))'(x) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

Donc :

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.7 Les équation différentielles

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction f et dans laquelle les dérivées de f apparaissent.

[2]On parle parfois également d'intégrale indéfinie.

1.7.1 équation différentielle linéaire d'ordre 1

Comme le dit la pseudo-définition ci-dessus, une équadiff est une équation où l'inconnue est une fonction. Le cas de $F = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est un cas particulier d'une grande famille d'équadiffs que l'on appelle *équation différentielle linéaire d'ordre 1.* Cette famille est caractérisée par la forme suivante :

$$f'(x) + p(x)f(x) = q(x).$$

Une manière de résoudre une telle équation est de déterminer une fonction auxiliaire $a(x)$ que l'on va multiplier de part et d'autre de l'égalité :

$$a(x)f'(x) + a(x)p(x)f(x) = q(x)a(x)$$

Le but de cette manipulation est de pouvoir faire ressortir $a(x)f'(x) + a'(x)f(x)$, ce qui est égal à $(af)'(x)$. Cependant, pour cela, il faut choisir $a(x)$ telle que $a'(x) = a(x)p(x)$. Il existe une solution :

$$a(x) : x \mapsto e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

Maintenant que nous avons cette fonction, il suffit de résoudre $(af)'(x) = (aq)(x)$. Si (aq) est continue, le théorème fondamental de l'analyse assure l'existence d'une primitive $b(x) = \int a(x)q(x)\,\mathrm{d}x$. À présent, nous savons que si $(af)'(x) = (aq)(x)$, alors $(af)(x) = b(x)$, ou encore $f(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$.

Nous avons donc une solution à l'équation de départ :

$$f(x) = \frac{\int \left(e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\right) q(x)\,\mathrm{d}x}{e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}}.$$

1.7.2 Unicité de la solution et problème de Cauchy

Lorsque l'on *transforme* le problème initial (équadiff linéaire d'ordre 1) en un problème conditionné (en précisant $f(x_0) = y_0$), nous limitons le nombre de solutions à 1. Si nous avons deux fonctions f_1 et f_2, solutions d'une équadiff linéaire d'ordre 1, et que nous définissons une autre fonction g telle que $g(x) = (f_1 - f_2)(x)$, ladite fonction g est une solution de l'équation suivante :

$$g'(x) + p(x)g'(x) = 0$$

respectant, de plus $g(x_0) = 0$.

Dans l'équation ci-dessus, le fait que $q(x) = 0 \forall x$ implique que $(ag)'(x) = 0 \forall x$ également, donc $(ag)(x) = C \forall x$. Autrement dit, $(ag)(x)$ est une fonction constante telle que $(ag)(x) = C \forall x$. Comme on sait que $g(x_0) = 0$, on sait que $e^{P(x_0)}g(x_0) = 0$ (où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$), donc $C = 0$. Cependant, comme $(e^P)(x)$ ne peut s'annuler, il faut $g(x) = 0 \forall x$.

Ce qui veut donc dire que f_1 et f_2, les deux fonctions solutions trouvées pour une équadiff linéaire d'ordre 1, sont les mêmes (vu que leur différence est la fonction nulle). Il existe donc **une et une seule** solution à l'équadiff linéaire d'ordre 1 conditionnée (problème de Cauchy).

1.7.3 équadiffs linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Une équadiff d'ordre 2 est sous la forme suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x) + a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) + bf(x) = 0$$

avec deux paramètres réels $a, b \in \mathbb{R}$. Le terme *linéaire* vient du fait que si $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont deux solutions de cette équation, alors $c_1 f_1 + c_2 f_2$ en est également une (avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$). Le fait que cette équation soit d'ordre 2 veut également dire que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

Pour résoudre une telle équation, il faut d'abord passer par ce que l'on appelle l'*équation caractéristique*. Cette équation est la suivante :

$$\lambda^2 + a\lambda + c = 0.$$

Cette équation étant du second degré, il faut séparer trois cas possibles :

- l'équation admet deux solutions réelles distinctes λ_1 et λ_2 ;
- l'équation admet une seule solution réelle λ ;
- l'équation n'admet aucune solution réelle.

Dans le premier cas (deux solutions distinctes), l'équation différentielle peut être réécrite sous la forme factorisée suivante :

$$\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_1\right)\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_2\right) f = 0.$$

Les solutions $f_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ et $f_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sont possible à *deviner*. le principe de linéarité exprimé juste au-dessus permet d'affirmer donc que $f(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ représente la famille des solutions paramétrées par C_1 et C_2.

Dans le second cas (solution unique), l'équadiff peut être réécrite sous la forme factorisée suivante :

$$\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda\right)^2 f = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f + \lambda^2 f - 2\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f = 0.$$

En posant $g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) - \lambda f(x)$, nous avons $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x) - \lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$. Cela nous permet de réécrire (encore une fois l'équadiff sous la forme suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x) - \lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) - \lambda\left(\lambda\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) - \lambda f(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) - \lambda(g(x)) = 0.$$

La solution est $g(x) = Ke^{\lambda x}$. Or $g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) - \lambda f(x)$. Donc il faut encore résoudre l'équation à l'aide de la méthode vue ci-dessus (ordre 1) afin de trouver la solution suivante. La solution finale est :

$$f(x) = \frac{\int \left(e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\right) q(x)\,\mathrm{d}x}{e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}}$$

avec $p(x) = -\lambda$ et $q(x) = g(x) = K_1 e^{\lambda x}$. D'où :

$$f(x) = \frac{\int \left(e^{\int -\lambda\,\mathrm{d}x}\right) K_1 e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x}{e^{\int -\lambda x\,\mathrm{d}x}} = \frac{\int K_2 e^{-\lambda x} K_1 e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x}{K_3 e^{-\lambda x}} = \left(K\int \mathrm{d}x\right) e^{\lambda x} K_3^{-1} = K_3^{-1}K(x+C)e^{\lambda x} = (C_1 x + C_2)e^{\lambda x}.$$

Dans le dernier cas, l'équation caractéristique n'a pas de solution réelle. Il faut donc aller chercher du côté des nombres complexes. Les coefficients étant réels, les deux solutions complexes doivent être conjuguées l'une de l'autre (si $z = \alpha + \beta i$ et $\overline{z} = \alpha - \beta i$, alors $z\overline{z} = \alpha^2 + \beta^2 \in \mathbb{R}$ et $z + \overline{z} = 2\beta \in \mathbb{R}$). L'équadiff devient donc :

$$\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - z\right)\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \overline{z}\right) f = 0.$$

L'équation ressemble fortement à celle du premier cas, donc la solution générale est $f(x) = b_1 e^{zx} + b_2 e^{\overline{z}x}$ avec $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$. Cependant, comme $\exp(zx) = \exp(\alpha x + i\beta x) = e^{\alpha x}\exp(i\beta x) = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$ (et donc $\exp(\overline{z}) = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x))$), en choisissant respectivement $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$ et $b_1 = -b_2 = -\frac{i}{2}$, on obtient respectivement $f(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $f(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$. Nous avons donc deux solutions, et à nouveau, par linéarité, nous pouvons exprimer la famille des solutions paramétrée par $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Ici, notre solution ne fait plus intervenir quoi que ce soit de complexe ($\in \mathbb{C}$), tous les coefficients sont réels (α et β sont des *constantes* dépendantes de l'équation caractéristique).

1.7.4 équations de Newton

Après avoir étudié des équations linéaires, regardons une autre famille d'équations : les **équations de Newton**. Cette famille est représentée par la forme suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) = f(x(t))$$

avec $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto x(t)$, l'inconnue et f, la fonction **continue** de *force*. Une telle équation représente la position $x(t)$ en fonction du temps d'un mobile (de masse unitaire) soumis à une force f dépendant de la position. Si on multiplie l'équation de part et d'autre par la quantité $x'(t)$, on obtient

$$x^{(2)}(x)x'(t) - f(x(t))x'(t) = 0$$

Ce que l'on peut intégrer afin d'avoir

$$\frac{1}{2}(x'(t))^2 - F(x(t)) - K = 0,$$

avec F, une primitive de f, ou encore

$$(x'(t))^2 - 2F(x(t)) = E$$

avec E, la constante d'intégration. Si l'équation différentielle est conditionnée (problème de Cauchy) telle que $x(0) = x_0$ et $x'(0) = v_0$, alors une solution pour cette équation est $x'(t) = \sqrt{E_0 + 2F(x(t))}$ avec $E_0 = v_0^2 - 2F(x_0)$.

Exemple : les équations de Fisher Les équations de Fisher sont sous la forme suivante : $u''(t) = (u - u^3)(t)$. La fonction f de force est ici $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : u(t) \mapsto u(t) - u^3(t)$, et a pour primitive $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \frac{1}{2}u^2(t) - \frac{1}{4}u^4(t) + C$. Pour des raisons de simplicité, ici, C se verra attribuer la valeur $-\frac{1}{4}$. Donc $F(u(t)) = -\frac{1}{4}(u^2(t) - 1)^2$.

Étant donné les solutions constantes à l'équation $u : t \mapsto K_u$ avec $K_u \in \{-1, 0, 1\}$, nous cherchons u telle que :

$$\lim_{t \to \pm\infty} u(t) = \pm 1,$$

et :

$$\lim_{t \to \pm\infty} u'(t) = 0.$$

L'intégration première nous donne $u'(t)^2 = \frac{1}{2}(u^2(t) - 1)^2$, ou encore :

$$u'(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(u^2(t) - 1).$$

Dans les intervalles de temps tels que $u'(t) > 0$ et $-1 \neq u(t) \neq 1$, nous avons :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{u^2 - 1}\,\mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(t - t_0)$$
$$\operatorname{arctanh}(u(t)) - \operatorname{arctanh}(u(t_0)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(t - t_0)$$

Cependant, nous savons qu'$\exists t_0$ tel que $u(t_0) = 0$ vu que nous cherchons $-1 < u(t) < 1$. Supposons $t_0 = 0$, de manière à ce que l'équation devienne $\operatorname{arctanh}(u(t)) = \frac{\sqrt{2}}{2}t$ d'où $u(t) = \tanh(\frac{t}{\sqrt{2}})$.

1.8 Problèmes et paradoxes

La majeure partie de l'analyse mathématique est basée sur la notion de limite, et surtout de limite infinie. Si cette notion est utilisée sans suffisamment de rigueur, un certain nombre de paradoxes peuvent apparaitre. Par exemple, soit la série $x, x^2, x^3, ...$ telle que $x_i = x^i$. Pour en connaitre la limite infinie, nous pouvons faire $L = \lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{m\to\infty} x^{m+1} = x \lim_{m\to\infty} x^m = xL$. Nous avons donc $L = xL$, ou encore, $\forall x \neq 1, L = 0$. Ce qui peut sembler contre-intuitif pour $x = 2$ ou $x = 3$ par exemple. Pareillement, si l'on désire mesurer l'hypoténuse d'un triangle ABC avec $A = (0,0), B = (1,0), C = (0,1)$, on peut approximer la longueur de l'hypoténuse comme la longueur d'un « escalier » de N marches. Chaque marche est composée de deux segments de longueur $\frac{1}{N}$. La longueur de l'escalier est donc $\frac{2N}{N}$, ou encore 2. Alors que le théorème de Pythagore nous dit que l'hypoténuse est de longueur $\sqrt{2}$.

2 Les nombres réels

Le traitement de l'analyse peut être très puissant, cependant comme vu ci-dessus, un manque de rigueur peut amener à des contradictions voire à des résultats insensés. C'est pour cette raison qu'il faut instaurer cette rigueur dès les notions élémentaires telles que les nombres.

2.1 Axiomatique des nombres

Rappel Les nombres sont organisés de la sorte : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Il faut savoir que chaque ensemble est défini selon des axiomes, et que c'est à partir de ces axiomes et de déductions logiques que sont construits les ensembles *plus gros*. Ici, les axiomes correspondant aux ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont considérés comme *évidents* et seuls ceux de $\mathbb{R}$ sont explicités.

2.1.1 Axiomes de $\mathbb{R}$

Avant de citer les axiomes de $\mathbb{R}$, il faut introduire la notion de majorant et de minorant (pour l'axiome de complétude).

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est majoré $\iff \exists M \in \mathbb{R} \,|\forall a \in A, a \leq M$.

De manière similaire, on dit que A est minoré $\iff \exists m \in \mathbb{R} \,|\forall a \in A, a \geq m$.
Remarque. Le minorant/majorant ne doit pas nécessairement appartenir à A.

1. $\mathbb{R}$ est un *corps*
   - $(\mathbb{R}, +)$ est un *groupe commutatif*, donc la loi d'addition satisfait les conditions suivantes : associativité, commutativité, existence d'un élément neutre et existence d'un inverse ;
   - $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, .)$ est un *groupe commutatif* ;
   - La multiplication est distributive sur l'addition.
2. $(\mathbb{R}, \leq)$ est un corps entièrement ordonné
   - la relation d'ordre $\leq$ satisfait les propriétés suivantes : réflexivité, transitivité, antisymétrie et ordre total ;
   - $a \leq b \Rightarrow a + z \leq b + z \, \forall z \in \mathbb{R}$;
   - $a, b \leq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
3. $\mathbb{R}$ satisfait l'axiome de complétude. C'est cet axiome qui différencie grandement $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$. Cet axiome de complétude dit ceci :
   - $\forall A \subset \mathbb{R}$, si A est non-vide et majoré, alors A possède un majorant minimum appelé *supremum* de A et noté $\sup A$.
   - $\forall A \subset \mathbb{R}$, si A est non-vide et minoré, alors A possède un minorant maximum appelé *infimum* de A et noté $\inf A$.

   Et l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ ne respecte pas cet axiome.

2.1.2 Résultat de l'axiome : les racines

Commençons par énoncer la propriété d'Archimède qui dit que $\forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \,|\, n > y$. La preuve de ce principe fait intervenir la notion de majorant vue ci-dessus.

Soit $S = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \leq y\}$ avec $y \in \mathbb{R}$. Par définition, y majore S. Il faut différencier les cas où $\#S = 0$ et $\#S > 0$. Dans le premier cas, $0 > y$, donc $n = 0$ est le nombre naturel recherché. Dans le second, posons $s = \sup S$. Comme $s \in S$, $s - 1$ n'est pas un majorant de S, $\Rightarrow \exists m \in S \,|\, s - 1 < m$, ou encore $m + 1 > s$. Or s majore S donc $m + 1 \notin S$. Si $m + 1 \notin S$, alors $m + 1 > y$. Donc $n = m + 1$ est le nombre naturel recherché.

S'en suit le corollaire suivant : $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N} \,|\, y > \frac{1}{n}$. La preuve repose sur le lemme précédent : soient $y \in \mathbb{R}^+, x = \frac{1}{y}$. Le lemme d'Archimède dit qu'$\exists n \in \mathbb{N} \,|\, x < n$. Donc $\frac{1}{y} < n$, ou encore $\frac{1}{n} < y$. Il faut effectivement $y > 0$ car sinon lors de la dernière étape, nous avons $\frac{1}{n} > y$, ce qui n'est pas possible pour $n \in \mathbb{N}$.

Maintenant, intéressons-nous aux racines carrées et à l'affirmation de leur existence. Tentons de démontrer qu' $\exists x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 = N \forall N \in \mathbb{R}$. Afin de démontrer ceci, procédons par l'absurde. Soient $S = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y^2 \leq N\}$ et $x = \sup S$. Prouvons maintenant que $x^2 = N$.

Si $x^2 < N$, posons $x_n = x + \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}_0$. Donc $x_n^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{2x+1}{n} \, \forall n \in \mathbb{N}_0$. Comme $N - x^2 > 0$ et $2x + 1 > 0$ (vu que $x \geq 0$ du fait que $0 \in S$), la quantité $\frac{N-x^2}{2x+1}$ est strictement positive également, donc $\exists n \in \mathbb{N} \,|\, \frac{1}{n} \leq \frac{N-x^2}{2x+1}$. Pour ce même n, nous avons $x_n^2 < N$ car $x_n^2 < x^2 + (2x+1)\frac{1}{n} < x^2 + (2x+1)\frac{N-x^2}{2x+1} = x^2 + N - x^2 = N$. Donc $x_n^2 \in S$, cependant $x_n = x + \frac{1}{n} > x$, ce qui n'est pas possible.

Inversement, si $x^2 > N$, on définit $x_n = x - \frac{1}{n}$. D'où $x_n^2 > x^2 - \frac{2x+1}{x^2-N}$. De plus, les quantités $x^2 - N$ et $2x + 1$ sont toutes deux strictement positives, donc $\exists n \in \mathbb{N} \,|\, \frac{1}{n} < \frac{x^2-N}{2x+1}$. Ce qui mène à $x_n^2 > N$. Or $x_n = x - \frac{1}{n} < x$. Donc x_n ne peut être un majorant de S. Cela implique qu'$\exists y \in S \,|\, y \geq x_n$, ou encore $y^2 \geq x_n^2 > N$, ce qui n'est pas possible car $y \in S \Rightarrow y^2 \leq N$.

Donc si $x^2 \not< N$ et $x^2 \not> N$, alors $x^2 = N$. De plus, nous avons une définition d'une racine carrée (que l'on peut étendre à la racine n^e) :

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} = \sup\{y \in \mathbb{R}^+ \,|\, y^n \leq x\}.$$

Lemme 2.1. *Il s'en déduit que* $\forall q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, x^q = (x^{\frac{1}{n}})^m$.

Remarque. Ici, les puissances irrationnelles ne sont pas définies. Une telle définition viendra par la suite.

2.2 Densité des rationnels

Nous avons vu l'ensemble $\mathbb{R}$ et sa partie rationnelle ($\mathbb{Q}$). Cependant, quelle est la proportion de ces nombres rationnels et donc quelle est la proportion de nombres irrationnels étant donné le résultat suivant : $\forall x < y \in \mathbb{R}, \exists q \in \mathbb{Q} \,|\, x < q < y$?

Commençons par prouver ce résultat. Séparons le problème en deux: le cas où $y - x > 1$ et le cas où $x < y$ quelconque. Dans le premier cas, $\exists n \in \mathbb{N} \,|\, n > x$ où n est le plus petit entier plus grand que x. On en déduit que $n - 1 \leq x$, ou encore $n \leq x + 1 < y$, ou encore $x < n < y$, prenons $q = n$. Dans le second cas, Archimède dit qu'$\exists m \in \mathbb{N} \,|\, m > \frac{1}{y-x}$. Cette inégalité peut se réécrire $my - mx > 1$, ce qui correspond au cas précédent. Prenons $q = \frac{n}{m}$, et nous avons $x < q < y$.

Cela permet de se dire qu'il n'y a pas trop de points qui ont été ajoutés pour passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$. Cependant, il faut savoir que $\# \mathbb{R} > \#\mathbb{Q}$, bien que ces deux ensembles soient infinis.

2.3 Inégalité triangulaire

L'inégalité triangulaire dit que $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$. Pour le prouver, il faut savoir que $ab \geq 0 \Rightarrow |a + b| = |a| + |b|$. Cependant, quand $a \leq 0 \leq b$, alors $a - |b| = -|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + b = |a| + |b|$. Or, pour avoir $x \leq -y$ et $x \geq y$, il faut $|x| \leq |y|$. Donc $|a + b| \leq ||a| + |b|| = |a| + |b|$.

De manière similaire, on peut dire que $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| \geq |x|-|y|$. Il suffit pour le prouver de poser $x = a-b$ et $y = b$. De là, le lemme précédent s'applique de manière à ce que $|a| \leq |a - b| + |b|$, ce qui peut se réécrire comme suit : $|a - b| \geq |a| - |b|$.

2.4 Autres corps

Avant tout, il faut définir ce qu'est un corps.

L'ensemble $\mathbb{K}$ est un corps si, muni des opérations d'addition et de produit, il respecte les trois propriétés suivantes :

- $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe commutatif ;
- $(\mathbb{K}\backslash\{0\}, .)$ est un groupe commutatif ;
- le produit est distributif sur l'addition.

C'est principalement le corps des nombres réels qui sera étudié dans ce cours, cependant il en existe plein d'autres.

3 Les suites

Après avoir utilisé la notion de « limite » pour *définir* les notions de dérivée et d'intégrale, il est nécessaire de définir précisément cette notion de limite (ou de *convergence*).

Une suite réelle (dans $\mathbb{R}$) est une liste infinie de $x_i \in \mathbb{R}$ indexés par $i \in \mathbb{N}$. Cette suite se note (x_n), $(x_n)_n$, ou encore $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.1 Convergence et divergence

On dit d'une suite (x_n) qu'elle converge en $a \in \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$. Cela se note :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Il reste cependant à prouver qu'une suite convergente n'a qu'une seule limite. Pour ce faire, procédons par l'absurde. Supposons que $x_n \to a$ et $x_n \to b$ quand $n \to \infty$ et supposons que $a \neq b$. Selon la définition ci-dessus, $\exists N_1 \in \mathbb{N} \mid n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$ et $\exists N_2 \in \mathbb{N} \mid n \geq N_2 \Rightarrow |x_n - b| < \epsilon$. En prenant $\epsilon = \frac{1}{2}|a - b| > 0$ car $a \neq b$ et $N = \max\{N_1, N_2\}$, l'inégalité triangulaire dit que $|a - x_N + x_N - b| \leq |a - x_N| + |x_N - b| < 2\epsilon$. Donc $|a - b| < |a - b|$. L'hypothèse disant $\epsilon > 0$ est fausse, ce qui implique $\epsilon = 0$, ou encore $a = b$.

Pour définir une convergence en l'infini positif, on procède de la sorte : $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \iff \forall K \in \mathbb{R}^+, \exists N \in \mathbb{N} \mid n \geq N \Rightarrow x_n > K$. De manière similaire, pour l'infini négatif : $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall K \in \mathbb{R}^+, \exists N \in \mathbb{N} \mid n \geq N \Rightarrow x_n < K$.

On dit d'une suite qui ne converge en aucun réel qu'elle est divergente ($\infty \notin \mathbb{R}$!).

3.1.1 Techniques de démonstration de divergence ou de convergence

Soit (x_n), une suite convergente. Alors (x_n) est bornée. Autrement dit, $\exists K \in \mathbb{R}^+ \mid \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq K$.

Pour prouver ceci, il faut d'abord montrer que pour $a = \lim x_n$, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$. Donc $|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < \epsilon + |a|$. Autrement dit, à partir de $n = N$, (x_n) est borné par $\epsilon + |a|$. Il reste donc un nombre fini d'éléments à traiter. Donc $K = \max\{|x_0|, ..., |x_{N-1}|, \epsilon + |a|\}$ borne l'entièreté de (x_n).

De plus, les opérations sur suites sont définies telles que, pour (x_n) et (y_n) convergentes respectivement en a et b :

- $(x_n + y_n)$ est convergente en $a + b$;
- $(x_n y_n)$ est convergente en ab ;
- $b \neq 0 \Rightarrow (\exists M \mid n \geq M \Rightarrow y_n \neq 0) \wedge (x_n/y_n)_{n\geq M}$ est convergente en $\frac{a}{b}$.

Ces assertions se démontrent comme suit.

Somme de suites Soit $\epsilon > 0$, $\exists N_1 \mid \forall n \geq N_1, |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$. Pareillement pour $N_2 \mid \forall n \geq N_2, |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$. En prenant $N = \max\{N_1, N_2\}$, on a $|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \epsilon$.

Produit de suites La suite $(x_n y_n)$ est bornée, donc $\exists K \,|\, |x_n| \leq K$. Donc $|x_n y_n - ab| = |x_n(y_n - b) - b(x_n - a)|$. Autrement dit, $|x_n y_n - ab| \leq |x_n||y_n - b| + |b||x_n - a| = K|y_n - b| + |b||y_n - b|$. Avec $\epsilon > 0$, $\exists N_1 \,|\, \forall n \geq N_1, |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2K}$ et $\exists N_2 \,|\, \forall n \geq N_2, |x_n - a| l \frac{\epsilon}{|b|+1}$ (il faut mettre $|b| + 1$ dans le cas où $b = 0$. Avec $N = \max\{N_1, N_2\}$, $\forall n \geq N$, on a :

$$|x_n y_n - ab| \leq K|y_n - b| + |b||x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Quotient de suites En prouvant que $(\frac{1}{y_n}) \to \frac{1}{b}$, le quotient découle du produit. Soit $\epsilon = \frac{|b|}{2} > 0$, $\exists M \,|\, n \geq M \Rightarrow |y_n - b| < \epsilon$. Donc, par l'inégalité triangulaire, $|y_n| \geq |b| - |y_n - b| > |b| - \epsilon = \frac{|b|}{2}$. La suite $(y_n)_{n \geq M}$ est bien définie.Maintenant prouvons sa convergence en $\frac{1}{b}$:

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - y_n}{by_n}\right| \leq \frac{2}{|b|^2}|b - y_n|.$$

Pour $\epsilon > 0$ fixé, $\exists N \geq M \,|\, \forall n \geq N, |y_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\epsilon$. Donc $|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}| < \frac{2}{|b|^2}\frac{|b|^2}{2}\epsilon = \epsilon$.

Exemple du quotient de polynômes de degré k Soient $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq i \leq k$. La suite (x_n) définie par $x_n = \frac{\sum_{i=0}^k a_i n^i}{\sum_{i=0}^k b_i n^i}$ converge en $\frac{a_k}{b_k}$. Pour le prouver, il faut diviser le numérateur et le dénominateur par n^k. La suite devient $x_n = \frac{\sum_{i=0}^k a_i n^{i-k}}{\sum_{i=0}^k b_i n^{i-k}}$. Or $\frac{1}{n^K}$ converge en 0 $\forall K > 0$. Donc $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^k a_i n^{i-k}}{\sum_{i=0}^k b_i n^{i-k}} = \frac{a_k}{b_k}$.

Théorème du sandwich Soient (a_n) et (b_n), deux suites réelles convergentes vers l. Si (x_n) est une suite satisfaisant $a_n \leq x_n \leq b_n \forall n \geq N_0$, alors $x_n \to l$.

Soit $\epsilon > 0$. Par définition, on sait :

$$\exists N_1, N_2 \,|\, (n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon) \wedge (n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - l| < \epsilon).$$

Donc $\forall n \geq N = \max\{N_0, N_1, N_2\}, -\epsilon < a_n - l \leq x_n - l \leq b_n - l < \epsilon$. Autrement dit, $|x_n - l| < \epsilon$.

Il en découle un corollaire disant que si (y_n) est une suite bornée (pas forcément convergente) et $z_n \to 0$, alors $y_n z_n \to 0$. Pour le prouver, on sait qu'$\exists K > 0 \,|\, |y_n| < K$. Autrement dit, $-K < |y_n| < K$, d'où $-K|z_n| \leq |y_n||z_n| \leq K|z_n|$. Puisque $|y_n||z_n| = |y_n z_n|$ et $z_n \to 0$, alors $|y_n z_n| \to 0$.

Règle de l'exponentielle Cette règle dit que si (a_n) est une suite réelle positive convergent en 0, alors (a_n^p) avec $p \in \mathbb{R}$ converge également en 0. Pour le prouver, il faut prendre $\epsilon > 0$ et $\epsilon' = \epsilon^{p^{-1}}$. Par définition, $\exists N \,|\, n \geq N \Rightarrow |a_n| < \epsilon'$. Cependant, $a_n \geq 0$, donc $0 \leq a_n < \epsilon' = \epsilon^{p^{-1}}$. D'où $0 \leq a_n^p < \epsilon$.

Suites convergentes en 0 Les suites suivantes convergent en 0, la plupart se démontrent avec le binôme de Newton et/ou le théorème du sandwich.

- $(\frac{1}{n^p})$ avec $p > 0$;
- (c_n) avec $|c| < 1$;
- $(n^p c^n)$ avec $p \in \mathbb{R}, |c| < 1$;
- $(\frac{c^n}{n!})$ avec $p \in \mathbb{R}$;
- $\frac{n^p}{n!}$ avec $p \in \mathbb{R}$.

La première proposition se démontre avec la règle de l'exponentielle vu que $(n^{-1}) \to 0$. La seconde se démontre avec le théorème du sandwich en posant $c = \frac{1}{1+a}$ avec $a > 0$. La troisième se démontre de manière similaire. La quatrième se démontre avec le principe d'Archimède et le théorème du sandwich. La dernière se réécrit $\frac{n^p}{n!} = \frac{n^p}{2^n}\frac{2^n}{n!}$ et est donc un produit de deux suites convergentes en 0.

Le procédé pour déterminer la convergence d'une suite est donc de trouver un maximum de suites convergentes en 0 puis d'appliquer les opérations sur les limites de suite. Regardons maintenant du côté des suites divergentes.

Soit $x_n \to \infty$ et $(y_n) \subset \mathbb{R}$. S'il $\exists A \in \mathbb{R} \,|\, \forall n, y_n > A$, alors $x_n + y_n \to \infty$. Également, si $A > 0$, alors $x_n y_n \to \infty$. La première affirmation se démontre comme suit : soit $K > 0$, $\exists N \,|\, \forall n \geq N, x_n > K - A$, donc $x_n + y_n > K$. Pour le produit, $\exists N \,|\, \forall n \geq N, x_n > \frac{K}{A}$ donc $x_n y_n > K$.

Règle de la réciproque Soit (x_n) une suite réelle qui tend vers $\pm\infty$. Alors $\frac{1}{x_n} \to 0$. De plus, soit (x_n), une suite réelle non-nulle. S'$\exists M \,|\, n \geq M \Rightarrow x_n > 0$, alors $x_n \to \infty$. Similairement, s'$\exists M \,|\, n \geq M \Rightarrow x_n < 0$, alors $x_n \to -\infty$. Pour démontrer la première affirmation, il faut avoir $\epsilon > 0$, donc $\frac{1}{\epsilon} > 0$. On sait qu'$\exists N \,|\, n \geq N \Rightarrow x_n > \frac{1}{\epsilon}$. ou encore $0 < \frac{1}{x_n} < \epsilon$ (car $x_n > \frac{1}{\epsilon} > 0$). Pour démontrer la seconde, il faut avoir $K > 0$. On sait qu'$\exists N \,|\, n \geq N \Rightarrow x_n < \frac{1}{K}$. Ou encore $\frac{1}{x_n} > K$.

Soient (x_n), une suite réelle et une suite strictement croissante $n_1 < n_2 < \ldots$. La suite (x_{n_k}) est une *sous-suite* de (x_n).

Il en découle le lemme suivant : Soit (x_n), une suite réelle convergente en a. Alors toute sous-suite de (x_n) converge également en a. Pour le démontrer, il faut repartir de la définition et donc, puisque $x_n \to a$, alors $\exists n \,|\, n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$ avec $\epsilon \in \mathbb{R}_0^+$. Or, comme (n_k) est une série naturelle, $n_k \geq k \; \forall k$ (preuve par récurrence). Si $k \geq N$, alors $|x_{n_k} - a| < \epsilon$. Donc $x_{n_k} \to a$.

On peut en déduire le corollaire suivant : si (x_n) a deux sous-suites convergentes mais ayant des limites différentes, alors (x_n) ne converge pas.

3.1.2 Les suites monotones

Une suite est dite *croissante* si $x_n \leq x_{n+1} \; \forall n$ et est dite *décroissante* si $x_n \geq x_{n+1} \; \forall n$. Si une suite est soit croissante, soit décroissante, elle est dite *monotone*. Sur base de cette définition, il existe un théorème important, celui de la convergence des suites monotones :

Soit (x_n), une suite monotone bornée. (x_n) est convergente telle que quand (x_n) est croissante, $\lim x_n = \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ et quand (x_n) est décroissante, $\lim x_n = \inf\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Pour le démontrer, il faut définir $S = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, borné par hypothèse. De là, il faut supposer (x_n) soit croissante soit décroissante (la démonstration est similaire) et prouver que $a = \sup\{x_n \,|\, x \in \mathbb{N}\}$ si $x_n \to a$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition, a est le majorant minimal de S. Donc $a - \epsilon$ ne majore pas S, donc $\exists x_N > a - \epsilon$. Or, comme (x_n) est croissante, $n \geq N \Rightarrow x_n \geq x_N > a - \epsilon$. Mais $x_n \leq a$ car a majore S. Donc $a - \epsilon < x_n \leq a$. Ou encore $-\epsilon < x_n - a < 0$, d'où $|x_n - a| < \epsilon$.

On sait donc qu'une suite monotone non bornée diverge en $\pm\infty$ et qu'une suite bornée converge en $\sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ou en $\inf\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

3.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Regardons comment construire deux suites monotones à partir d'une suite quelconque. Soit une suite (x_n), commençons par définir :

$$S_m := \{x_n | m \leq n\}.$$

Si (x_n) est majorée, alors $s_n = \sup S_n$ est fini pour tout n et (s_n) est une suite décroissante car $m \geq n \Rightarrow S_m \subseteq S_n \Rightarrow \sup S_m \leq \sup S_n$. De même, si (x_n) est minorée, alors $i_n = \inf S_n$ est fini pour tout n et (i_n) est une suite croissante.

Définition 3.1. Soit $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$.

- Si (x_n) est majorée, alors (s_n) est bien définie, et on écrit :

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} s_n$$

  que l'on appelle la *limite supérieure* de (x_n).
- Si (x_n) n'est pas majorée, alors on écrit $\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty$.
- Si (x_n) est minorée, alors (i_n) est bien définie, et on écrit :

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} i_n$$

  que l'on appelle la *limite inférieure* de (x_n).
- Si (x_n) n'est pas minorée, alors on écrit $\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$.
- Constatons donc que pour une suite (x_n) bornée, $\limsup_{n\to\infty} x_n$ et $\liminf_{n\to\infty} x_n$ sont tous les deux finis.

Théorème 3.2 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Soit (x_n) une suite bornée. Alors il existe une sous-suite de (x_n) qui converge en $\limsup_{n\to\infty} x_n$ et une autre qui converge en $\liminf_{n\to\infty} x_n$.*

De plus, pour une sous-suite convergente (x_{n_k}) quelconque, $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$.

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Démonstration. Soit (x_n) une suite bornée. Montrons qu'il existe un sous-suite convergent en $\limsup_{n\to\infty} x_n$. La démonstration pour la sous-suite convergent en $\liminf_{n\to\infty} x_n$ étant similaire. Définissons cette suite (x_{n_k}) terme à terme.

Prenons $n_0 = 0$. C'est à dire que la sous-suite (x_{n_k}) débute en x_0. Regardons maintenant l'ensemble $S_{0+1} = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Comme s_1 est le suprémum de S_1, il doit exister $x_m \in S_1$ tel que $s_1 - 1 < x_m \leq s_1$. Prenons alors pour n_1 le plus petit m satisfaisant cette condition. Comme $\forall \alpha \in S_1, \alpha > x_0 = n_0$, il est évident que $n_1 > n_0$.

Regardons maintenant l'ensemble $S_{1+n_1} = \{x_{1+n_1}, x_{2+n_1}, \ldots\}$. De manière similaire au point précédent, il est possible de trouver pour n_2 un m tel que $x_m \in S_{1+n_1}$ et $s_{1+n_1} - \frac{1}{2} < x_m \leq s_{1+n_1}$. Il est tout aussi évident que $n_2 > n_1$.

En réitérant ce procédé k fois, on obtient $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ satisfaisant : $s_{1+n_i} - \frac{1}{i+1} < x_{n_{i+1}} \leq s_{1+n_i}$.

On obtient donc au final une sous-suite (x_{n_k}) de (x_n) telle que $s_{1+n_k} - \frac{1}{k+1} < x_{n_{k+1}} \leq s_{1+n_k}$. De plus, la suite (s_{1+k_k}) est une sous-suite de (s_n). On a donc $s_{1+n_k} \to \limsup_{n\to\infty} x_n$ et $s_{1+n_k} - \frac{1}{k+1} \to \limsup_{n\to\infty} x_n$. Par le théorème du sandwich, on peut déterminer que $x_{n_k} \to \limsup_{n\to\infty} x_n$ également.

De plus (en admettant l'existence de (i_{n_k}) car la preuve est similaire à celle de (s_{n_k})), on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, i_{n_k} \leq x_{n_k} \leq s_{n_k}.$$

Et comme (i_{n_k}) et (s_{n_k}) sont des sous-suites d'une suite convergente, elles sont elles-mêmes convergentes. Donc par un résultat précédent, $\lim_{k\to\infty} i_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} s_{n_k}$, ou encore $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$. Ce qui prouve la deuxième partie du théorème. □

Corollaire 3.3. *On peut établir un corollaire de ce théorème : une suite $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ converge si et seulement si :*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = L \in \mathbb{R},$$

en quel cas, $x_n \to L$.

Démonstration. La démonstration se fait par le théorème du sandwich dans un sens et par le théorème de Bolzano-Weierstrass dans l'autre sens. □

Remarque. Nous avons donc maintenant trois résultats primordiaux sur la convergence des suites :

1. Toute suite convergente est bornée ;
2. toute suite monotone et bornée est convergente ;
3. Toute suite bornée possède une sous-suite convergente.

3.3 Le critère de Cauchy

Jusqu'ici, la notion de convergence fait intervenir *directement* la notion de limite, ce qui sous-entend qu'il faut connaitre la limite avent de commencer la preuve de la convergence. Il existe donc une notion permettant de prouver la convergence sans expliciter la limite.

Définition 3.4. Une suite (x_n) est dite *de Cauchy* si $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \mid m, n \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \epsilon$.

Cette définition n'implique pas uniquement qu'il faut que $|x_n - x_{n+1}|$ tende vers zéro mais bien qu'il faut que **pour tout** $m, n \geq N$, ces deux éléments tendent vers zéro.

Lemme 3.5. *Soit $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ une suite convergente. (x_n) est de Cauchy.*

Démonstration. Soit une suite (x_n) convergente en $a \in \mathbb{R}$. Par définition, $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 | n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$. Soit $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$. Soit ce N découlant de la définition de convergence. Prenons $m, n \geq N$. On a donc $|x_m - x_n| = |x_m - a + a - x_n| < |x_m - a| + |x_n - a| = \epsilon'$. □

Théorème 3.6 (Critère de Cauchy)**.** *Une suite (x_n) converge si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration. L'implication $\Rightarrow$ est donnée par le lemme précédent. Il faut encore prouver l'implication $\Leftarrow$.

Commençons par montrer que (x_n) est bornée et puis appliquons Bolzano-Weierstrass. Par hypothèse, (x_n) est de Cauchy. Donc $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \mid m, n \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \epsilon$. Soit ϵ, prenons ce N qui découle de la définition de suite de Cauchy. On a donc $\forall n \geq N, |x_n| = |x_n + x_N - x_N| \leq |x_n - x_N| + |x_N| < \epsilon + |x_N|$. Construisons $K = \max(\{|x_0|, |x_1|, |x_2|, \ldots, \epsilon + |x_N|\})$. On a donc $|x_n| < K \forall n \geq N$, ce qui implique que (x_n) est bornée.

Appliquons maintenant le théorème de Bolzano-Weierstrass qui dit qu'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge en une valeur $a \in \mathbb{R}$ quand $k \to \infty$. Par la convergence, il existe N_1 tel que $\forall k \geq N_1, |x_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}$. Et par la définition de suite de Cauchy, il existe N_2 tel que $m, n \geq N_2 \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$. Soit δ tel que $\delta \geq N_1$ et $n_\delta \geq N_2$. On a alors $\forall n \geq N_2, |x_n - a| = |x_n - x_\delta + x_\delta - a| \leq |x_n - x_\delta| + |x_\delta - a| < \epsilon$.

Il y a donc également convergence de la suite (x_n) en $a \in \mathbb{R}$ quand $n \to \infty$. □

4 Fonctions continues

4.1 Limite d'une fonction en un point

Définition 4.1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On note :

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\
]a,b] &:= \{y \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\
[a,b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\
]a,b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\
[a,\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\
]a,\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\
]-\infty,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\
]-\infty,b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \\
]-\infty,\infty[&:= \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Ces ensembles sont appelés *intervalles.*

Définition 4.2. Soit $U \subseteq \mathbb{R}$. U est dit ouvert $\iff \forall x \in U, \exists \epsilon > 0 \,|\,]x-\epsilon, x+\epsilon[\subseteq U$. U est dit fermé $\iff \mathbb{R} \setminus U$ est ouvert.

Définition 4.3. Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in A$. a est dit intérieur à A s'$\exists \delta > 0 \,|\,]a-\delta, a+\delta[\subseteq A$. L'ensemble des points a tels que a est intérieur à A est noté $\operatorname{int} A$.

Remarque. $\forall A \subseteq \mathbb{R}$, $\operatorname{int} A \subseteq A$. De plus, un ensemble peut être simultanément ouvert et fermé : $]-\infty,\infty[$ est ouvert car $\forall x \in R, \exists \epsilon > 0 \,|\,]x-\epsilon, x+\epsilon[\in \mathbb{R}$ et est fermé car $\mathbb{R} \setminus]-\infty,\infty[=]0,0[$ est ouvert.

Définition 4.4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Un voisinage de a est un ensemble contenant un intervalle de la forme $]c,d[$ avec $c < a < d$.

Définition 4.5. Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. a est adhérent à A si $\forall \delta > 0,]a-\delta, a+\delta[\cap A \neq \emptyset$. On note $\operatorname{adh} A$ l'ensemble des points adhérents à A.

Définition 4.6. Soient $f : U \subseteq\to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{adh}(U \cap B)$. La limite de f dans B lorsque x tend vers a existe dans $\mathbb{R}$ et vaut $L \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \,|\, \forall x \in (U \cap B), |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Cela se note $f(x) \to L$ lorsque $x \to a$ dans B ou :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) = L.$$

Remarque. Ici, ϵ permet de déterminer un voisinage autour de L, la limite, alors que δ permet de déterminer un voisinage autour de a.

Théorème 4.7 (Unicité de la limite)**.** *Soient $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{adh}(B \cap U)$. Soient $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$*

tels que :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) = L_1$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) = L_2.$$

Alors $L_1 = L_2$.

Démonstration. Soient $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \text{adh}(U \cap B)$. Prenons $\epsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{3}$. Par hypothèse, on sait qu'il existe $\delta_1 \mid \forall x \in U \cap B, |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \epsilon$ et $\delta_2 \mid \forall x \in U \cap B, |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \epsilon$.

Soit $x_0 \in U \cap B$ tel que $|x_0 - a| < \min(\{L_1, L_2\})$. On sait alors que $f(x_0) \in]L_1 - \epsilon, L_1 + \epsilon[$ et $f(x_0) \in]L_2 - \epsilon, L_2 + \epsilon[$. Or, par choix de ϵ, ces deux ensembles sont d'intersection vide. Il y a donc contradiction et $L_1 = L_2$. □

Définition 4.8. La limite de $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $x \to a$ existe et vaut $L \in \mathbb{R}$ si la limite de f en $x \to a$ dans $B = \mathbb{R}$ existe et vaut L. On note cela :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}\,.$$

4.1.1 Limites pointées, gauches et droites

Voyons dans quels contextes il est intéressant de manipuler le $B \subseteq \mathbb{R}$.

Définition 4.9. Soit $a \in \mathbb{R}$. Un voisinage de a est pointé s'il contient un intervalle $]c, d[\backslash\{a\}$. Un voisinage de a est *de droite* s'il contient un intervalle $[a, d[$ et peut être pointé si l'intervalle est sous la forme $]a, d[$. De manière similaire, un voisinage est *de gauche* si l'intervalle est sous la forme $]c, a]$ et peut également être pointé.

Définition 4.10 (Définition des limites à gauche, à droite et pointées)**.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un intervalle contenant un voisinage pointé de a. La limite à gauche, respectivement à droite, respectivement pointée de f en $x \to a$ existe et vaut $L \in \mathbb{R}$ si la limite de f dans $B =]-\infty, a[$, respectivement $]a, \infty[$, respectivement $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ en $x \to a$ existe et vaut L.

Cela se note respectivement :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = L, \quad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = L, \quad \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x) = L.$$

Remarque. Pour pouvoir parler de limites de f soit à gauche, soit à droite, soit pointée, il faut impérativement que f soit définie dans les alentours de a. Plus précisément, il faut $a \in \text{adh}(A \cap B)$ avec B défini selon le cas.

Lemme 4.11. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ tels que U définit un voisinage pointé de a. Alors f possède une limite pointée en a si et seulement si f possède une limite à gauche en a et une limite à droite en a telles que* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$. *Dans ce cas, on a* $\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x) = L$.

Proposition 4.12. *Soient $f : U \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \text{adh}(U \cap B)$. La limite de f dans B en $x \to a$ existe et vaut $L \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\forall A \subseteq B$, la limite de f dans A en $x \to a$ existe et vaut L.*

Démonstration. Pour la condition suffisante ($\Leftarrow$), on sait que pour **tout** $A \subseteq B$, la limite existe. En prenant $A = B$, on sait que la limite existe également dans B et vaut $L \in \mathbb{R}$.

Pour la condition nécessaire ($\Rightarrow$), observons que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \,|\, x \in (B \cap U) \wedge (|x-a| < \delta) \Rightarrow (|f(x)-L| < \epsilon)$. On sait alors que pour $\epsilon \in \mathbb{R}_0^+$ fixé et pour $A \subseteq B$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_0^+$ tel que $x \in A \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$. $\square$

Proposition 4.13. *Soient $f : U \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{adh}(U \cap B)$. La limite de f dans B en $x \to a$ existe et vaut $L \in \mathbb{R}$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ telle que $x_n \to a$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ converge en L.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. On sait par hypothèse qu'$\exists \delta > 0$ tel que $x \in (B \cap U) \wedge |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$. Soit $(x_n) \subseteq B$ telle que $x_n \to a$. On sait donc qu'$\exists N > 0$ tel que $n > N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$. Si ceci est vrai pour tout ϵ, ça l'est plus précisément pour δ déterminé par l'hypothèse. On a donc $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \,|\, n > N \Rightarrow |f(x_n) - L| < \epsilon$ ou encore $f(x_n) \to L$ pour $n \to \infty$.

Montrons maintenant que si toutes les suites de B convergentes en a implique $f(x_n) \to L$, alors la limite de f en a existe et vaut L. Fonctionnons par l'absurde : soit $(x_n) \subseteq B$ une suite dans B telle que $x_n \to a$ quand $n \to \infty$ et $(f(x_n)) \to L \in \mathbb{R}$ mais alors que $f(x) \not\to L$ pour $x \to a$. On sait alors qu'$\exists \epsilon_0 > 0 \,|\, \forall \delta > 0$ il n'y a pas de convergence de $f(x)$ en L. Soit ϵ_0. Prenons $\delta = \frac{1}{n}$. On en déduit que $\forall n \geq 1$, il existe $x_n \in U$ tel que $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - L| \geq \epsilon_0$ donc tel que $x_n \to a$ mais $f(x_n) \not\to L$ lorsque $n \to \infty$. Or par hypothèse, on sait que $(f(x_n)) \to L$. Ce qui est une contradiction avec $|f(x_n) - L| \geq \epsilon_0$. Donc $f(x) \to L$ pour $x \to a$. $\square$

4.1.2 Règles de calcul de limite de fonctions

Théorème 4.14. *Soient $f, g : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que f et g sont définies dans le voisinage de a. Soient L_f et L_g tels que $\lim_{x\to a} f(x) = L_f$ et $\lim_{x\to a} g(x) = L_g$. alors :*

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = L_f + L_g$$
$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = L_f L_g.$$

Si $L_g \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}(x)$ existe dans le voisinage de a telle que :

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{L_f}{L_g}.$$

Démonstration. Soient $f, g : U \to \mathbb{R}$ convergents respectivement en L_f et L_g quand $x \to a$.

Addition Montrons que la limite de la somme vaut la somme des limites. Soit $\epsilon > 0$. On sait par la définition des limites de f et g qu'il existe δ_1 tel que $\forall x \in U, |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_f| < \frac{\epsilon}{2}$ et δ_2 tel que $\forall x \in U, |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_g| < \frac{\epsilon}{2}$. Prenons alors $\delta = \min(\{\delta_1, \delta_2\})$. On sait dès lors que $\forall x \in U, |f(x) + g(x) - L_f - L_g| = |f(x) - L_f + g(x) - L_g| \leq |f(x) - L_f| + |g(x) - L_g| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Multiplication Montrons que le produit des limite vaut le produit des limites. Montrons tout d'abord qu'il existe un voisinage autour de a tel que $f(x)$ est bornée.

Soit $\epsilon = 1$. On sait alors qu'il existe δ_1 tel que $\forall x \in U, |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_f| < 1$. Ce δ_1 définit un voisinage de a où $|f(x)| < |L_f| + 1 \forall x$.

Montrons ensuite que $\lim_{x\to a}(fg)(x) = L_f L_g$.

Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_0^+$. On sait qu'il existe δ_2 tel que $\forall x \in U, |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_f| < \frac{\epsilon}{2(|L_g|+1)}$ et δ_3 tel que $\forall x \in U, |x-a| < \delta_3 \Rightarrow |g(x) - L_g| < \frac{\epsilon}{2|L_f|}$. Prenons alors $\delta = \min(\{\delta_i | i \in [3]\})$. On a alors $\forall x \in U$ tel que $|x-a| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - L_f L_g| &= |f(x)(g(x) - L_g) + L_g(f(x) - L_f)| \leq |f(x)||g(x) - L_g| + |L_g||f(x) - L_f| \\ &< (|L_f| + 1)\frac{\epsilon}{2(|L_f|+1)} + |L_g|\frac{\epsilon}{2|L_g|} = 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Quotient Montrons que la limite du quotient vaut le quotient des limites. Commençons par montrer qu'il existe un voisinage de a où $g(x) \neq 0$.

Soit $\epsilon = \frac{|L_g|}{2}$. On sait alors qu'il existe δ_V tel que $\forall x \in U, |x-a| < \delta_V \Rightarrow |g(x) - L_g| < \frac{|L_g|}{2}$. Ou encore pour ce même δ_V, $|g(x)| > \frac{|L_g|}{2}$. Donc $|g(x)|$ est strictement positif. Définissons alors $V := U \cap]a - \delta_V, a + \delta_V[$, un voisinage de a sur lequel la fonction $\frac{f}{g}(x)$ est bien définie.

Prouvons maintenant que $\frac{1}{g}(x) \to \frac{1}{L_g}$ quand $x \to a$, et le résultat découlera de la proposition précédente.

Soit $\epsilon > 0$. On sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in U, |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - L_g| < \frac{|L_g|^2\epsilon}{2}$. On sait dès lors :

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_g}\right| = \frac{|g(x) - L_g|}{|g(x)||L_g|} < \frac{|g(x) - L_g|}{\frac{|L_g|}{2}|L_g|} = \frac{2|g(x) - L_g|}{|L_g|^2} < \frac{2(\frac{|L_g|^2\epsilon}{2})}{|L_g|^2} = \epsilon.$$

□

Théorème 4.15. *le théorème du sandwich des suites a un homologue pour les fonctions : soient $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fonctions telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ avec $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{x\to a} g(x) = L$.*

Démonstration. Définissons les suites $(f(x_n))_n, (g(x_n))_n$ et $(h(x_n))_n$. On sait que $\forall k \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \lim_{x\to a} k(x)$ existe et vaut L_k si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ convergente en $a \in \mathbb{R}$, on a $k(x_n) \to L_k$ quand $n \to \infty$.

On sait dès lors que $f(x_n) \to L$ et $h(x_n) \to L$. Par le théorème du sandwich, on sait que $g(x_n) \to L$ également. □

Théorème 4.16 (Conservation des inégalités)**.** *Soient $f, g : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{adh}(U \cap B)$. Si $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in]a-\delta, a+\delta[\cap U \cap B, f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)$ existent dans $\mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim x \to ag(x)$.*

4.1.3 Limites infinies et limites à l'infini

Définition 4.17. Soient $f, g : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{adh}(U \cap B)$. La limite de f dans B en a existe et vaut $+\infty$ si $\forall K > 0, \exists \delta > 0 \,|\, \forall x \in (U \cap B), |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > K$. Cela se note :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

De manière similaire, la limite de f dans B en a vaut $-\infty$ si $\forall K > 0, \exists \delta > 0 \,|\, \forall x \in (U \cap B), |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -K$. Ce la se note :

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Remarque. les cas particuliers où $B = \mathbb{R}, B =]-\infty, a], B = [a, +\infty[, B = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ donnent les définitions de limite standard infinie, limite à gauche, limite à droite et limite pointée infinies.

Définition 4.18. Soit $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où U n'est pas majoré. La limite de f en « l'infini » vaut $L \in \mathbb{R}$ si $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0 \,|\, \forall x \in U, x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$. Cela se note :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

De manière similaire, si U n'est pas minoré, la limite de f en « moins l'infini » vaut $L \in \mathbb{R}$ si $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0 \,|\, \forall x \in U, x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$. Cela se note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

4.2 Définition de la continuité

Définition 4.19. Soient $a \in \mathbb{R}$, $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage de a. La fonction f est continue en a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Ou encore si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \,\text{t. q.} |x - a| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(a)\big| < \epsilon.$$

Cette définition comporte trois points importants : il faut que la limite de f en a existe, que f soit définie en a et que la fonction prenne la valeur de sa limite en a.

Proposition 4.20. *Venant de la définition de limite de fonction sur base des suites, il est possible d'exprimer la continuité d'une fonction en terme de suites. Soient $a \in \mathbb{R}$, $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage de a. Alors la fonction f est continue en a si et seulement si pour toute suite (x_n) convergente en a, la suite $(f(x_n))$ converge en $f(a)$.*

Proposition 4.21. *Les règles de calcul concernant la continuité sont assez évidents. Soient $a \ni \mathbb{R}$, $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un voisinage dea et continues en a. Alors $f + g$ est également continue en a, fg est également continue en a et si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a. De plus soit $h : V \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage de $f(a)$ et contenant $f(I)$, l'image de f. Si h est continue en $f(a)$, alors $h \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue en a.*

Démonstration. Les premières propositions viennent directement des règles sur les limites. Pour la composée, prenons (x_n) une suite convergent en a. Par continuité de f, on sait que $f(x_n)$ converge en $f(a)$ et par continuité de h, on sait que $h(f(x_n))$ converge en $h(f(a))$. Dès lors, on sait que $h \circ f$ est continue en a. □

Définition 4.22. Tout comme pour les limites, on parle de continuité à gauche (respectivement à droite) si la limite de x tendant vers a à gauche (respectivement à droite) vaut $f(a)$.

Définition 4.23. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *continue* si elle est continue en tout point $c \in]a, b[$, continue à droite en a et à gauche en b.

4.3 Théorème des bornes atteintes

Théorème 4.24. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée* **et** *f atteint ses bornes. Dès lors :*

$$\exists m, M \in [a, b] \,\text{t. q.}\, \forall x \in [a, b] : f(m) \leq f(x) \leq f(M).$$

Démonstration. Montrons d'abord que f est bornée et puis montrons qu'elle atteint ses bornes.

Supposons par l'absurde que f n'est pas majorée. Dès lors, $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in [a, b]\,\text{t. q.}\, f(x_n) > n$. La suite (x_n) est bornée car $\forall n : x_n \in [a, b]$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on sait qu'il existe $(x_{n_k})_k$ une sous-suite de (x_n) convergeant en $x \in \mathbb{R}$. Par la continuité de f en x (hypothèse), la suite $(f(x_{n_k}))_k$ converge en $f(x)$. Or par construction de (x_n), la suite $(f(x_{n_k}))_k$ diverge vers $+\infty$. Il y a donc contradiction. Idem pour le minorant.

Montrons maintenant que f atteint ses bornes. Par l'absurde, supposons que f n'atteint pas ses bornes. Prenons $M \coloneqq \sup\{f(x)\,\text{t. q.}\, x \in [a, b]\}$ qui existe et est fini. Supposons que $\nexists c \in [a, b]\,\text{t. q.}\, f(c) = M$. Posons alors :

$$g(x) \coloneqq \frac{1}{M - f(x)}.$$

g est continue et donc bornée par $K \in \mathbb{R}$. Dès lors,

$$\forall x \in [a, b] : \frac{1}{M - f(x)} \leq K.$$

Ce qui implique (du fait que $f(x) < A$ et $K > 0$) que $M - f(x) \geq \frac{1}{K}$ ou encore $f(x) \leq M - \frac{1}{K}$. Ce qui contredit le fait que M est le majorant de $\{f(x)\,\text{t. q.}\, x \in [a, b]\}$. Idem pour la borne inférieure. $\square$

4.4 Théorème de la valeur intermédiaire

Théorème 4.25. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit γ strictement entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors $\exists c \in]a, b[\,\text{t. q.}\, f(x) = \gamma$.*

Démonstration. Supposons $f(a) < \gamma < f(b)$, le cas $f(b) < \gamma f(a)$ se montre de la même manière.

Soit $S \coloneqq \{x \in [a, b]\,\text{t. q.}\, f(x) < \gamma\} \subseteq \operatorname{dom} f$. Par définition de S, on sait que $a \in S$ et que S est majoré par b. Il existe une suite (x_n) dans S telle que $x_n \to \sup S$. Donc $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in S$ donc $f(x_n) < \gamma$. De plus, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\sup S) \leq \gamma$. Notons $c \coloneqq \sup S$. On sait donc que $f(c) \leq \gamma$.

Supposons par l'absurde $f(c) < \gamma$. Soit $\epsilon \coloneqq \gamma - f(x) > 0$. Par la continuité de f en c, on sait qu'$\exists \delta > 0\,\text{t. q.} |x - c| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(c)\big| < \epsilon = \gamma - f(c)$. On sait que $a < c < b$.

Prenons $x \coloneqq c + \frac{\min\{\delta, b-c\}}{2}$. Alors $x \in [a, b], |x - c| < \delta$ et $x > c$. Donc $\big|f(x) - f(c)\big| < \epsilon$, ou encore :

$$f(c) - \gamma < f(x) - f(c) < \gamma - f(c).$$

On sait donc $f(x) - f(c) < \gamma - f(c)$ ce qui implique $f(x) < \gamma$. Ce qui veut dire que $x \in S$. Or, par construction de x, $x > c = \sup S$. Il y a une contradiction. Donc l'hypothèse $f(c) < \gamma$ est fausse. Dès lors, $f(c) = \gamma$. $\square$

Exemple On peut, par ce théorème, montrer que tout polynôme de degré n impair admet au moins une racine réelle : soit $P(x) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$. Prenons $Q(x) \coloneqq \frac{P(x)}{a_n}$. Dès lors, les limites en les infinis de Q sont ces mêmes infinis : $\lim_{x\to\pm\infty} Q(x) = \pm\infty$. On sait dès lors qu'il existe deux réels a et b tels que $Q(a) < 0$ et $Q(b) > 0$. Par le théorème, on sait qu'il existe un $c \in]a, b[$ tel que $Q(c) = 0$. Si $Q(c) = 0$, alors $P(c) = 0$ par définition de Q.

4.5 Théorème de l'intervalle et de la réciproque

Proposition 4.26. *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. Alors I est un intervalle si et seulement si $\forall \alpha, \beta \in I : [\alpha, \beta] \subset I$.*

Théorème 4.27 (de l'intervalle)**.** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et I est un intervalle, alors $f(I)$ est un intervalle. De plus, si I est fermé borné, $f(I)$ l'est aussi.*

Définition 4.28. Soit $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble U f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) si pour tout $x, y \in U : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (respectivement $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$). f est simplement croissante (respectivement simplement décroissante) si pour tout $x, y \in U : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (respectivement $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$). De plus, f est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante et est simplement monotone si elle est simplement croissante ou simplement décroissante.

Théorème 4.29 (de la réciproque)**.** *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone définie sur un intervalle I. Alors f est injective et sa réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est aussi continue.*

Démonstration. Soient $x, y \in I$ tels que $x \neq y$. Soit $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ la réciproque de f. Supposons f strictement croissante (le cas strictement décroissant est similaire). Soit $p \in \operatorname{int} f(I)$ (on sait que $f(I)$ est un intervalle). Montrons que f^{-1} est continue en p. Prenons $q \in I$ tel que $f(q) = p$. On sait que q n'est pas une extrémité de I car les extrémités de I correspondent aux extrémités de $f(I)$ (par la monotonie stricte de f) et que p est dans l'intérieur de $f(I)$. Prenons $\epsilon > 0$ tel que $]q - \epsilon, q + \epsilon[\subset I$. Posons $c \coloneqq f(q - \epsilon)$ et $d \coloneqq f(q + \epsilon)$. On sait $c < p < d$ par la monotonie stricte de f. Soit $\delta \coloneqq \min(pc, d - p)$. Dès lors, $\delta > 0$ et $[p - \delta, p + \delta] \subset f([q - \epsilon, q + \epsilon])$, ou encore $f^{-1}([p - \delta, p + \delta]) \subset [q - \epsilon, q + \epsilon]$. Nous avons donc δ tel que $|x - p| < \delta \Rightarrow \left|f^{-1}(x) - f^{-1}(p)\right| < \epsilon$. Ce qui montre que f^{-1}, la réciproque de f est continue en p. La continuité à droite et à gauche de f^{-1} aux extrémités de $f(I)$ se montrent de la même manière. □

4.6 Continuité uniforme

La notion de continuité de f en a est une notion locale. Il en existe une version globale : la continuité uniforme.

Définition 4.30. Soit $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble réel U. f est uniformément continue sur U si :

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 \,\text{t. q.}\, \forall x, y \in U : |x - y| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(y)\right| < \epsilon.$$

Cette définition englobe la continuité simple mais requiert en plus que la valeur de δ trouvée ne dépende pas du point a choisi. Comme cette définition englobe l'autre, une fonction uniformément continue est également continue.

Définition 4.31. Deux suites $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ sont équivalentes si $|x_n - y_n| \to 0$ pour $n \to +\infty$. Donc si l'une de des suites converge en L, l'autre converge également en L.

Proposition 4.32. *Soit $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La fonction f est uniformément continue si et seulement si $\forall (x_n), (y_n) \subset U$ équivalentes, les suites $(f(x_n)), (f(y_n))$ sont équivalentes.*

Démonstration. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Soient $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ deux suites équivalentes. Soit $\epsilon > 0$. On sait qu'il existe δ tel que $\forall x, y \in U : |x - y| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(y)\right| < \epsilon$ par l'uniforme continuité de f. De plus, par l'équivalence des suites, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - y_n| < \delta$. On a donc

$|x_n - y_n| < \delta \Rightarrow \big|f(x_n) - f(y_n)\big| < \epsilon$. Les deux suites sont bien équivalentes. Montrons maintenant que l'équivalence de $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ implique l'uniforme continuité de f.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel qu'il n'existe pas de $\delta_0 > 0$. En particulier, $\delta_0 = \frac{1}{n}$ ne convient pas, quel que soit $n > 0$. Prenons donc $n > 0$. Alors il existe $x_n, y_n \in U$ tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $\big|f(x_n) - f(y_n)\big| \geq \epsilon_0$. On a donc les suites $(x_n), (y_n)$ équivalentes mais pas les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ ce qui est une contradiction avec l'hypothèse. □

Théorème 4.33. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors f est uniformément continue.*

version 1. Reprenons le format de démonstration précédente : supposons par l'absurde que f n'est pas continue. Dès lors, on sait qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel qu'il n'existe pas de δ satisfaisant la définition. Plus précisément, $\forall n > 0 : \exists x_n, y_n \in [a, b]$ tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $\big|f(x_n) - f(y_n)\big| \geq \epsilon_0$. Maintenant, prenons deux sous-suites (x_{n_k}) et (y_{n_k}). Puisque (x_n) et (y_n) sont des suites bornées, les sous-suites (x_{n_k}) et (y_{n_k}) sont convergentes par le théorème de Bolzano-Weierstrass. Comme $|x_n - y_n| \to 0$, on sait que les sous-suites convergentes convergent vers la même valeur : $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} y_{n_k}$. Posons $p \coloneqq \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}$. Comme les suites considérées sont dans $[a, b]$, on sait que $p \in [a, b]$ également. Or par la continuité de f, on sait que $f(x_{n_k}) \to f(p)$ et $f(y_{n_k}) \to f(p)$. Dès lors, $\big|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\big| \to 0$. Or $\big|f(x_n) - f(y_n)\big| \geq \epsilon_0 \forall n$. Il y a donc contradiction. □

Lemme 4.34. *Soit (x_n) une suite bornée. Si $\forall (x_{n_k})$ sous-suite de $(x_n) : x_{n_k} \to L$, alors $x_n \to L$.*

Démonstration. Par Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \to \liminf(x_n) = L$ et une sous-suite (x_{m_k}) telle que $x_{m_k} \to \limsup(x_n) = L$. Si $\liminf(x_n) = \limsup(x_n) = L$, alors $x_n \to L$. □

version 2. Montrons que si $x_n - y_n \to 0$, alors $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. Comme $f(x_n) - f(y_n)$ est bornée, prenons $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})$, une sous-suite convergente et nommons la limite L. Par Bolzano-Weierstrass, on sait qu'il existe deux sous-suites $(x_{n_{k_l}})$ et $(y_{n_{k_l}})$ qui convergent (respectivement en u et v). Alors on peut dire que $f(x_{n_{k_l}}) - f(x_{n_{k_l}}) \to f(u) - f(v) = L$. Or, comme $x_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}} \to 0$, on sait que $u = v$. Dès lors, on peut dire que $L = 0$. □

Théorème 4.35. *Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Alors il existe un prolongement continu $\bar{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ de f.*

Démonstration. Prenons la fonction

$$\bar{f} : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) & \text{si } x = a \\ f(x) & \text{si } x \in]a, b[\\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x) & \text{si } x = b \end{cases}$$

Dès lors, la fonction $\bar{f}$ est uniformément continue. □

Remarque. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. $\forall E \subset A$, $f_{|_E}$ est également uniformément continue.

4.7 Fonctions à valeur vectorielle

Définition 4.36. Soient $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit la distance entre x et y par :

$$\|x - y\| = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2.$$

De plus, la *norme* d'un vecteur x est la distance entre lui-même et l'origine. Donc $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Définition 4.37. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. On définit le produit scalaire de x et y par :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Remarque. $\sqrt{\|x\|} = \langle x, x\rangle$.

Proposition 4.38. *Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :*

1. $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle$;
2. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
3. $\langle x, x\rangle \geq 0$ *et* $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Théorème 4.39 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)**.** *Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Alors $\left|\langle x, y\rangle\right| \leq \|x\|\|y\|$ avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.*

Théorème 4.40 (Inégalité triangulaire)**.** *Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Alors :*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Démonstration.

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

□

Définition 4.41. Soient $r > 0$ et $a \in \mathbb{R}^n$. On définit la boule ouverte en a de rayon r par :

$$B(a, r) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}.$$

Définition 4.42. Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$. $a \in \operatorname{adh} A$ si et seulement si $\forall \epsilon > 0 : B(a, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Définition 4.43. Soient $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{adh} A$ et $L \in \mathbb{R}^n$. On définit la limite de f pour $x \to a$ par :

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 \,\text{t. q.}\, \forall x \in A : \|x - a\| < \delta \Rightarrow \left\|f(x) - L\right\| < \epsilon.$$

Remarque.

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}^n \iff \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 \,\text{t. q.}\, f(A \cap B(a, \delta)) \subseteq B(L, \epsilon).$$

Définition 4.44. Soient $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $a \in A$. f est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Définition 4.45. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Les composantes de f sont les fonctions $f_i : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ telles que $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$.

Lemme 4.46. *Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}$. La fonction f possède une limite en $x \to a$ si et seulement si toutes les composantes $f_i : A \to \mathbb{R}^n$ possèdent une limite en $x \to a$. Alors :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \left(\lim_{x \to a} f_1(x), \lim_{x \to a} f_2(x), \ldots, \lim_{x \to a} f_n(x)\right).$$

Démonstration. Montrons d'abord que $f(x) \to L \Rightarrow \forall i : f_i(x) \to L_i$. Montrons ensuite l'autre sens de l'implication.

Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction convergent en $L = (L_1, \ldots, L_n) \in \mathbb{R}^n$ en $x \to a$. Soit $\epsilon > 0$. On sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in A, |x - a| < \delta \Rightarrow \left\|f(x) - L\right\| < \epsilon$. Dès lors :

$$\left|f_i(x) - L_i\right| = \sqrt{(f_i(x) - L_i)^2} \leq \left\|f(x) - L\right\| < \epsilon.$$

Pour montrer l'implication dans l'autre sens, prenons $\epsilon > 0$. $\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ : \exists \delta_i \text{ t. q.} |x - a| < \delta_i \Rightarrow \left|f_i(x) - L_i\right| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$. On définit $\delta \coloneqq \min\{\{\delta_i\}_i\}$. Dès lors, si $|x - a| < \delta$, on a :

$$\left\|f(x) - L\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i(x) - L_i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \sqrt{n\frac{\epsilon^2}{n}} = \epsilon.$$

□

Lemme 4.47. *La fonction $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est continue en a si et seulement si toutes ses composantes sont continues en a.*

Démonstration. Par le lemme précédent, la démonstration est triviale. □

Lemme 4.48. *Soient $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions continues en $a \in A$. Alors les fonctions $\|f\|$, $f + g$ et fg sont également continues en a.*

Remarque. Étant donné que la continuité d'une fonction à valeur vectorielle est équivalente à la continuité de ses composantes, les théorèmes sur les fonctions les fonctions réelles s'appliquent facilement aux fonctions à valeur vectorielle.

Proposition 4.49. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ continue. Alors il existe $p, q \in [a, b]$ tels que $\forall x \in [a, b]\ : \left\|f(q)\right\| \leq \left\|f(x)\right\| \leq \left\|f(p)\right\|$.*

Démonstration. Par le le lemme précédent, on sait que $\|f\|$ est continue. En appliquant le théorème des bornes atteintes sur chaque composante, la proposition est démontrée. □

5 Fonctions dérivables

5.1 Définitions

Définition 5.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a. La focntion f est dérivable en a si la limite suivante existe :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Si la limite existe, on la note $f'(a)$. Si la fonction f est dérivable sur tout point a de son domaine, f est dérivable. On définit la fonction dérivée de f par $f' : I \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)$.

Définition 5.2. Il existe des classes de dérivabilité notées C^k pour $k \in \mathbb{N}$. Si f est continue, alors $f \in C^0$. De plus, si f est dérivable et f' est C^k, alors $f \in C^{k+1}$. Et si $\forall k \in \mathbb{N} : f \in C^k$, alors on note $f \in C^\infty$.

Proposition 5.3. *Soit $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en a. Alors f est continue en a.*

Démonstration.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = f(a) + f'(a)\cdot 0 = f(a).$$

□

Théorème 5.4 (Règles de calcul)**.** *Soient $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et dérivables en $a \in I$. Alors :*

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
2. $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
3. *si* $g(a) \neq 0$, *alors* $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Démonstration. Le premier point découle directement des règles de calcul sur la somme de limites. Le second point se montre en réécrivant la limite :

$$\lim_{x\to a} \frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Le dernier se montre d'abord par $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$:

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{g(a)-g(x)}{(x-a)g(a)g(x)} = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

En utilisant le point 2 et cette propriété, le quotient est démontré. □

Théorème 5.5. *Soient f, g deux fonctions telles que f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$. Alors la composée $g \circ f$ est dérivable en a et vaut :*

$$g'(f(a))f'(a).$$

Démonstration. Soient les fonctions suivantes :

$$F(x) \coloneqq \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq 0 \\ f\prime(a) & \text{si } x = a \end{array} \right\},$$

et :

$$G(x) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(f(a))}{x - f(a)} & \text{si } x \neq f(a) \\ g\prime(f(a)) & \text{si } x = f(a) \end{cases}$$

Les fonctions F et G sont respectivement continues en a et $f(a)$. De plus, $\forall x \in \operatorname{dom} f : f(x) = f(a) + (x - a)F(x)$ et $\forall x \in \operatorname{dom} g : g(x) = g(f(a)) + (x - f(a))G(x)$. Dès lors, on peut calculer $g \circ f$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(a) + (x - a)F(x)) = g(f(a)) + (f(a) + (x - a)F(x) - f(a))G(f(a) + (x - a)F(x)) \\ = (g \circ f)(a) + (x - a)F(x)G(f(x)).\end{aligned}$$

On peut dès lors calculer la dérivée en faisant :

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x - a)F(x)G(f(x))}{x - a} = \lim_{x \to a} F(x)G(f(x)).$$

Et puisque le produit de fonctions continues est toujours une fonction continue, par la continuité, cette valeur vaut $F(a)G(f(a)) = f'(a)g'(f(a))$. □

Théorème 5.6 (de la réciproque)**.** *Soit $f : I \to J$ une bijection continue réelle entre deux intervalles ouverts. Si f est dérivable en $a \in I$ telle que $f'(a) \neq 0$, alors la réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et vaut :*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration. Puisque f est une bijection continue, elle est strictement monotone. Donc par un théorème précédent, on sait que $f^{-1} : J \to I$ est également continue. Posons :

$$G(y) \coloneqq \frac{f^{-1}(y) - a}{y - f(a)}.$$

Dès lors :

$$\lim_{y \to f(a)} G(y) = \lim_{y \to f(a))} G(f(f^{-1}(y))) = \lim_{x \to \lim_{y \to f(a)} f^{-1}(y)} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

5.2 Extrema

Définition 5.7. Soient $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. Le point a est un minimum local de f si $\exists \epsilon > 0 \,\text{t.q.}\, \forall x \in U : |x - a| < \epsilon \Rightarrow f(a) \leq f(x)$. De même, a et un maximum local si $\exists \epsilon > 0 \,\text{t.q.}\, \forall x \in U : |x - a| < \epsilon \Rightarrow f(a) \geq f(x)$. Si a est un minimum local ou un maximum local, alors a est un extremum local.

Proposition 5.8. *Soit $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $a \in \operatorname{int} U$ un extremum de f. Alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. Montrons le cas où a est un minimum local (le cas du maximum est identique). Par la définition du minimum, on sait qu'il existe ϵ tel que $\forall x \in U : |x-a| < \epsilon \Rightarrow f(a) \leq f(x)$. Dès lors :

$$\forall x \in U \text{ t. q. } x < a : \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0,$$
$$\forall x \in U \text{ t. q. } x > a : \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0.$$

Or, comme par hypothèse f est dérivable en a, la limite pour $x \to a$ existe. Il faut donc $f'(a) = 0$. □

Définition 5.9. Soit f une fonction dérivable. Un point $a \in \operatorname{dom} f$ tel que $f'(a) = 0$ est appelé point critique.

5.3 Théorème de la moyenne

Lemme 5.10 (Théorème de Rolle)**.** *Soit $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a,b[\text{t. q. } f'(c) = 0$.*

Démonstration. La fonction f est définie sur un intervalle fermé borné. Donc par le théorème des bornes atteintes, on sait qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $f(m)$ est le minimum de f et $f(M)$ est le maximum de f. Si $f(m) = f(M)$, alors la fonction est constante. Alors prenons $c = \frac{a+b}{2}$. Sinon, si $m \neq a$ et $m \neq b$, prenons $c = m$ car m est un extremum. Par la proposition précédente, $f'(c) = 0$. □

Théorème 5.11 (de la moyenne/eds accroissements finis)**.** *Soit $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Démonstration. Soit $G(x)$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ définie par :

$$G(x) \coloneqq f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x.$$

Dès lors, $G(b) - G(a) = 0$. Donc par le théorème de Rolle, on sait qu'il existe c tel que $G'(c) = 0$. Or

$$G'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

On a donc bien $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Proposition 5.12. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*

(i) Si $\forall x \in]a,b[: f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $]a,b[$;

(ii) Si $\forall x \in]a,b[: f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur $]a,b[$;

(iii) Si $\forall x \in]a,b[: f'(x) = 0$, alors f est constante sur $]a,b[$.

Démonstration. Puisque f est définie et continue sur un intervalle borné fermé, pour tout $x_1 < x_2 \in]a,b[$, on sait que :

$$\exists c \in]a,b[\text{t. q. } f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Donc si $f'(c) > 0$ (premier cas), il faut $f(x_2) > f(x_1)$, si $f'(c) < 0$ (second cas), il faut $f(x_2) < f(x_1)$ et si $f'(c) = 0$ (dernier cas), il faut $f(x_1 = f(x_2)$. On a donc f soit strictement croissante, soit strictement décroissante soit constante. □

Théorème 5.13 (Comparatif de la moyenne)**.** *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Si pour tout $x \in]a,b[$, on a $g(x) \neq 0$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

5.4 Règle de l'Hospital

Théorème 5.14. *Soient $f, g : [c,d] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[c,d]$ et dérivables sur $]c,d[$. Soit $a \in]c,d[$. Si $f(a) = g(a) = 0$, alors :*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si cette limite existe.

Démonstration. Calculons d'abord la limite à droite, puis la limite à gauche. Soit $x \in]a,d]$. Dès lors, par le théorème comparatif de la moyenne sur des fonctions f et g réduites au domaine $[a,x]$, on sait qu'il existe $\xi(x) \in]a,x[$ tel que :

$$\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

De plus, quand $x \to a^+$, il faut $\xi(x) \to a^+$ car $a < \xi(x) < x$. On sait donc que :

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi(x)\to a^+} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}.$$

De manière similaire, en prenant $x \in [c,a[$, on trouve $\xi(x) \in]x,a[$ tel que :

$$\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

À nouveau, quand $x \to a^-$, il faut $\xi(x) \to a^-$. Dès lors :

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi(x)\to a^-} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}.$$

Donc si les deux limites existent et sont égales, on a :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Proposition 5.15. *Soient $f, g : [c,d] \to \mathbb{R}$ continues sur $[c,d]$ et dérivables sur $]c,d[$. Si $\lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$, $\forall x : x \in]a,d[\Rightarrow g'(x) \neq 0$, et si $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$ alors :*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Démonstration. Soient $x < y \in]a,d[$. Il existe $\xi \in]x,y[$ tel que :

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Comme $g(x) \to \pm\infty$ quand $x \to a$, on sait qu'il existe un voisinage de a où $g(x) \neq 0$. De plus, en réécrivant :

$$f(x) = f(y) + (f(x)-f(y)) = f(y) + (g(x)-g(y))\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = f(y) + (g(x)-g(y))\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

on peut trouver :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g(x)}\left[f(y) + (g(x)-g(y))\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right] = \frac{f(y)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Soit $\epsilon > 0$. Prenons $\delta_1 > 0$ tel que $\forall \chi \in]a, a+\delta_1[: \left|\frac{f'(\chi)}{g'(\chi)} - L\right| < \epsilon_1$. Fixons $y = a + \delta_1$. On a $\frac{g(y)}{g(x)} \to 0$ quand $x \to a$ car $g(y)$ est fixé et $g(x) \to +\infty$ (pareil pour $\frac{f(y)}{g(x)} \to 0$). Dès lors, il existe δ_2 tel que $\forall x : x \in]a, a+\delta_2[\Rightarrow \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \epsilon_2$ et $\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \epsilon_3$. Prenons $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = \left(\frac{\epsilon}{6}, \min\left\{\frac{\epsilon}{3|L|+1}, \frac{1}{2}\right\}, \frac{\epsilon}{3}\right)$. Prenons $\delta \coloneqq \min\{\delta_1, \delta_2\}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\forall x : x \in]a, a+\delta[: \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| &= \left|\frac{f(y)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)\left(\frac{f'(\chi)}{g'(\chi)} - L + L\right) - L\right| \\
&= \left|\frac{f(y)}{g(x)} + \left(\frac{f'(\chi)}{g'(\chi)} - L\right) - \frac{g(y)}{g(x)}\left(\frac{f'(\chi)}{g'(\chi)} - L\right) + L - \frac{g(y)}{g(x)}L - L\right| \\
&< \epsilon_3 + \epsilon_1 + \epsilon_2\epsilon_1 + |L|\,\epsilon_2 \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

5.5 Dérivées de fonctions à valeur dans $\mathbb{R}^n$

Définition 5.16. Soit $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Soit $a \in \operatorname{int} A$. f est dérivable en a si :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe dans $\mathbb{R}^n$ cet élément.

Lemme 5.17. *La fonction $r : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est dérivable en $a \in \operatorname{int} A$ si et seulement si toutes ses composantes sont dérivables. En ce cas, $f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_n'(a))$.*

Théorème 5.18. *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivable en $f(a)$. Alors $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.*

Démonstration. Par le lemme précédent et la règle de dérivation de composée pour les fonctions réelles. □

Théorème 5.19. *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que f, g, h sont dérivables en a. Alors :*

1. $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
2. $(\langle g, h\rangle)'(a) = \big\langle h'(a), g(a)\big\rangle + \big\langle h(a), g'(a)\big\rangle$;
3. $\left(\frac{g}{f}\right)'(a) = \frac{g'(a)f(a)-g(a)f'(a)}{f(a)^2}$;
4. $(g + h)'(a) = g'(a) + h'(a)$.

5.6 Dérivées de fonctions vectorielles

Définition 5.20. Le graphe d'une fonction $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples :

$$\Gamma_f \coloneqq \{((x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+1} \text{ t. q. } x \in A\}.$$

Définition 5.21. Soit $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \operatorname{int} A$. La $j$ème dérivée partielle de f (pour $1 \leq j < m$) est donnée par :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + he_j) - f(a)}{h}.$$

si cette limite existe et se note $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ ou $(\partial_j f)(a)$. Si la limite n'existe pas, alors f n'est pas dérivable en a.

Définition 5.22. On définit le gradient de $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ en a par le vecteur des dérivées partielles :

$$(\nabla f)(a) = ((\partial_1 f)(a), \ldots, (\partial_m f)(a)) = ((\partial_i f)(a))_i \in \mathbb{R}^m .$$

Définition 5.23. e_j est le $j$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition 5.24. Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^m$ et $v \in \mathbb{R}^m$. f est dérivable en a dans la direction v si la limite suivante existe dans $\mathbb{R}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h}.$$

On note $(\partial_v f)(a)$ ce réel et on l'appelle dérivée directionnelle de la fonction f dans la direction v au point a.

Remarque. Comme e_j est un vecteur de la base de $\mathbb{R}^m$, $(\partial_j f)(a) = (\partial_{e_j} f)(a)$ est une dérivée directionnelle.

Définition 5.25. Soient $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^m$. La fonction f est différentiable s'il existe $u \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - \langle u, x - a\rangle}{\|x - a\|} = 0 \in \mathbb{R} .$$

Proposition 5.26. *Soient $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^m$. Si f est différentiable en a, alors la fonction $\partial_\cdot f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} : v \mapsto (\partial_v f)(a)$ est définie pour tout vecteur v et est linéaire. De plus, $\forall v \in \mathbb{R}^m : (\partial_v f)(a) = \big\langle (\nabla f)(a), v\big\rangle$.*

Démonstration. Soit $x(t) \coloneqq a + tv$. Donc, $x(t) \to a$ si $t \to 0$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - (f(a) + \langle u, tv\rangle)}{|t|} &= 0 \\
\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{|t|} - \lim_{t\to 0} \frac{\langle u, tv\rangle}{|t|} &= 0 \\
(\partial_v f)(a) - \langle u, v\rangle \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} &= 0 \\
(\partial_v f)(a) &= \langle u, v\rangle.
\end{aligned}$$

Dès lors, pour $v = e_j$, on a $(\partial_{e_j} f)(a) = (\partial_j f)(a) = \langle u, v\rangle = \left\langle u, e_j \right\rangle = u_j$. Donc $u = ((\partial_1 f)(a), \ldots, (\partial_m f)(a)) = (\nabla f)(a)$. $\square$

6 Intégrales de Riemann

6.1 Définitions

Définition 6.1. une partition de $[a, b]$ est la donnée $\{x_i \text{ t. q. } 0 \leq i \leq n\} \subset [a, b]$ telle que $a = x_0 < \ldots < x_n = b$.

Définition 6.2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée. Soit $P = \{x_i\}_{i \in [n]}$ une partition de $[a, b]$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on définit :

$$\begin{aligned} m_i &\coloneqq \inf\{f(x) \text{ t. q. } x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ M_i &\coloneqq \sup\{f(x) \text{ t. q. } x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{aligned}$$

On définit ensuite :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f, P) &\coloneqq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i, \\ \mathcal{U}(f, P) &\coloneqq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i. \end{aligned}$$

Qui sont respectivement l'aire signée de la somme des rectangles inférieurs et supérieurs. À partir de cela, on définit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &\coloneqq \sup\{\mathcal{L}(f, P) \text{ t. q. } P \text{ est une partition de } [a, b]\}, \\ \mathcal{U}(f) &\coloneqq \inf\{\mathcal{U}(f, P) \text{ t. q. } P \text{ est une partition de } [a, b]\}. \end{aligned}$$

Définition 6.3. une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée est intégrale si $\mathcal{U}(f) = \mathcal{L}(f)$. On note cette valeur $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ou encore $\int_a^b f$.

Lemme 6.4. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée et P est une partition de $[a, b]$, $y \in [a, b]$. On définit $P' \coloneqq P \cup \{y\}$. Alors :*

$$\mathcal{L}(f, P) \leq \mathcal{L}(f, P) \leq \mathcal{U}(f, P) \leq \mathcal{U}(f, P').$$

Démonstration. Soit $r \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x_{r-1} < y < x_r$. On sait que $\mathcal{L}(f, P) = m_1(x_1 - x_0) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1})$ et on sait que $\mathcal{L}(f, P') = m_1(x_1 - x_0) + \ldots + \alpha(y - x_{r-1}) + \beta(x_r - y) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1})$ où $\alpha = \inf\{f(x) \text{ t. q. } x \in [x_{r-1}, y]\}$ et $\beta = \inf\{f(x) \text{ t. q. } x \in [y, x_r]\}$. Dès lors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f, P') - \mathcal{L}(f, P) &= \alpha(y - x_{r-1}) + \beta(x_r - y) - m_r(x_r - x_{r-1}) = x_{r-1}(-\alpha + m_r) + x_r(\beta - m_r) + \alpha y - \beta y + m_r y - m_r y \\ &= (\alpha - m_r)(y - x_{r-1}) + (\beta - m_r)(x_r - y). \end{aligned}$$

Étant donné que $x_{r-1} < y < x_r$, on sait que les secondes parenthèses sont positives. De plus, comme les intervalles dont α et β sont les minima sont inclus dans l'intervalle dont m_r est le minimum, il est nécessaire que $\alpha \geq m_r$ et $\beta \geq m_r$. Les premières parenthèses sont dès lors également positives. Si $\mathcal{L}(f, P') - \mathcal{L}(f, P) \geq 0$, alors $\mathcal{L}(f, P') \geq \mathcal{L}(f, P)$. La partie pour les aires supérieures est identique. $\square$

Corollaire 6.5. *Soient P, P' deux partitions de $[a, b]$ telles que $P \subset P'$, alors $\mathcal{L}(f, P') \leq \mathcal{L}(f, P) \leq \mathcal{U}(f, P) \leq \mathcal{U}(f, P')$.*

Démonstration. En écrivant $P' = P \cup \{y_1, \ldots, y_k\}$ et en appliquant k fois le lemme précédent. □

Lemme 6.6. *Soient P et P' deux partitions quelconques du même intervalle $[a, b]$. Alors :*

$$\mathcal{L}(f, P) \leq \mathcal{U}(f, P').$$

Démonstration. Soit $P'' = P \cup P'$. Dès lors, on sait $P'' \subset P'$ et $P'' \subset P$. Donc :

$$\mathcal{L}(f, P) \leq \mathcal{L}(f, P'') \leq \mathcal{U}(f, P'') \leq \mathcal{U}(f, P').$$

□

Proposition 6.7. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée. Alors $\mathcal{L}(f) \leq \mathcal{U}(f)$.*

Démonstration. On sait que pour tout P, P' partitions de $[a, b]$, $\mathcal{L}(f, P) \leq \mathcal{U}(f, P')$. En particulier, en prenant le sup à gauche et l'inf à droite, l'inégalité reste vraie. Donc :

$$\sup\{\mathcal{L}(f, P) \,\text{t. q.}\, P \text{ est une partition de } [a, b]\} \leq \inf\{\mathcal{U}(f, P) \,\text{t. q.}\, P \text{ est une partition de } [a, b]\}$$
$$\mathcal{L}(f) \leq \mathcal{U}(f)$$

□

6.2 Fonctions intégrables

Proposition 6.8 (Critère de Riemann)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée. Alors f est intégrable si et seulement $\forall \epsilon > 0 : \exists P$ une partition de $[a, b]$ telle que $\mathcal{U}(f, P) - \mathcal{L}(f, P) < \epsilon$.*

Démonstration. Montrons d'abord l'implication $\Rightarrow$. On sait par hypothèse que $\mathcal{L}(f) = \mathcal{U}(f)$. Soit $\epsilon > 0$. On sait qu'il existe P_1, P_2 partitions de $[a, b]$ tels que $\mathcal{U}(f, P_1) < \mathcal{U}(f) + \frac{\epsilon}{2}$ et $\mathcal{L}(f, P_2) > \mathcal{L}(f) + \frac{\epsilon}{2}$. Posons $P \coloneqq P_1 \cup P_2$. Dès lors :

$$\mathcal{L}(f) - \frac{\epsilon}{2} \leq \mathcal{L}(f, P_2) \leq \mathcal{L}(f, P) \leq \mathcal{L}(f) \overset{\text{par hypothèse}}{=} \mathcal{U}(f) \leq \mathcal{U}(f, P) \leq \mathcal{U}(f, P_1) \leq \mathcal{U}(f) + \frac{\epsilon}{2}.$$

On sait donc $\mathcal{U}(f, P) < \mathcal{U}(f, P_1) < \mathcal{U}(f) + \frac{\epsilon}{2}$ et $-\mathcal{L}(f, P) < -\mathcal{L}(f, P_2) < -\mathcal{L}(f) + \frac{\epsilon}{2}$. Donc :

$$\mathcal{U}(f, P) - \mathcal{L}(f, P) < \mathcal{U}(f) + \frac{\epsilon}{2} - \mathcal{L}(f) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Montrons maintenant l'autre sens de l'implication $\Leftarrow$. Soit $\epsilon > 0$. On sait qu'il existe P une partition de $[a, b]$ telle que $\mathcal{U}(f, P) - \mathcal{L}(f, P) < \epsilon$. De plus, on sait $0 \leq \mathcal{U}(f) - \mathcal{L}(f) \leq \mathcal{U}(f, P) - \mathcal{L}(f, P) < \epsilon$. On a donc une quantité $\mathcal{U}(f) - \mathcal{L}(f)$ ne dépendant pas de ϵ mais étant plus petite qu'ϵ pour tout $\epsilon > 0$. Il faut dès lors $\mathcal{U}(f) - \mathcal{L}(f) = 0$. □

Théorème 6.9. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est intégrable.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Si f est continue, alors elle est uniformément continue. Donc il existe δ tel que :

$$\forall x, y : |x - y| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(y)\right| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

On construit P telle que $\forall 1 \leq 1 \leq n : x_i - x_{i-1} < \delta$. Pour tout i, on sait qu'il existe x_* et x^* tels que $M_i = f(x^*)$ et $m_i = f(x_*)$ par le théorème des bornes atteintes. Donc :

$$\mathcal{U}(f,P) - \mathcal{L}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(f(x^*) - f(x_*))(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon.$$

□

6.3 Propriétés des intégrales

Définition 6.10. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable. On définit :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 6.11. *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $c \in [a,b]$. Alors :*

1. $\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *;*
2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *;*
3. *Si* $\forall x \in [a,b] : f(x) \leq g(x)$*, alors* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *;*
4. $|f|$ *est intégrable et* $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x\right|$.

6.4 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 6.12 (Théorème fondamental du calcul et intégral)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue (donc intégrable). Alors la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en a.*

Démonstration. Soit $c \in [a,b]$. Soit $\epsilon > 0$. Par la continuité(uniforme) de f en c, il existe δ tel que $|x - c| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(c)\right| < \epsilon$. De plus, notons que :

$$\left|\frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c)\right| = \left|\frac{\int_a^x f - \int_a^c f}{x - c} - f(x)\right| = \left|\frac{\int_c^x f - f(c)(x-c)}{x - c}\right| = \left|\frac{\left|\int_c^x (f(t) - f(c))\,\mathrm{d}t\right|}{x - c}\right| \leq \frac{1}{|x-c|}\left|\int_c^x \left|f(t) - f(c)\right|\mathrm{d}t\right|$$

Et si $|x - c| < \delta$, alors $\forall t \in [c,x] : |t - c| < \delta$. Et donc $\left|f(t) - f(c)\right| < \epsilon$. Donc :

$$\frac{1}{|x-c|}\left|\int_c^x \left|f(t) - f(c)\right|\mathrm{d}t\right| < \frac{1}{|x-c|}\left|\int_c^x \epsilon\,\mathrm{d}t\right| = \epsilon.$$

On a donc montré que pour $x \to c$, on a $\frac{F(x)-F(c)}{x-c} = F'(c) \to f(c)$.

Montrons maintenant que F est l'**unique** primitive s'annulant en a. Soit $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $G' = f$ et $G(a) = 0$. Montrons que $G = F$:

$$(G - F)' = (f - f)' = 0.$$

On sait donc que $G - F$ est une fonction constante. Et comme $G(a) = F(a) = 0$, on sait que $\forall x \in [a,b]$: $(G - F)(x) = 0$. $\square$

Corollaire 6.13. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable. Sois $F \coloneqq \int f$. On a :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \left[F\left(x\right)\right]_{x=a}^{x=b}.$$

Démonstration. Les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} x &\mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \\ x &\mapsto F(x) - F(a), \end{aligned}$$

sont deux primitives de f s'annulant en a et donc sont égales. $\square$

Proposition 6.14. *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R} \in C^1$. Alors :*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\left(fg\right)\left(x\right)\right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Soit $h(x) \coloneqq (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Par le théorème fondamental, on sait :

$$\int_a^b h'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,\mathrm{d}x = \left[h\left(x\right)\right]_{x=a}^{x=b}.$$

Ou encore :

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \left[h\left(x\right)\right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

Proposition 6.15. *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : [a,b] \to \mathbb{R} \in C^1$. Posons $\alpha \coloneqq g(a), \beta \coloneqq g(b)$. Alors :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f \circ g)(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soient $F(x) \coloneqq \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(t) \coloneqq (F \circ g)(t)$. Dès lors, on sait que $G'(t) = (f \circ g)(t)g'(t)$. De plus, l'intégration bornée donne :

$$\int_\alpha^\beta (f \circ g)(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta G'(t)\,\mathrm{d}t = \left[G\left(t\right)\right]_{t=\alpha}^{t=\beta} = (F \circ g)(\beta) - (F \circ g)(\alpha) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

6.5 Les intégrales impropres

Définition 6.16. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction bornée et intégrable sur tout $[a, b]$ pour $b > a$. Alors si la limite suivante existe :

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

on dit que $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. On appelle une telle limite une intégrale impropre. Si la limite n'existe pas, on dit que $\int_a^{\infty}$ diverge. De manière similaire, soit $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et intégrable sur tout $[a, b]$ pour $a < b$. Alors si la limite suivante existe :

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

on dit que $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bornée, si les deux intégrales impropres suivantes existent :

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

alors on définit l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Définition 6.17. De manière similaire, pour des fonctions non bornées, on a les définitions suivantes. Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$. Si f est intégrable sur tout $[c, b]$ avec $c \in]a, b]$, alors on définit :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to a} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

De même, soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ intégrable sur tout $[a, c]$ pour $c \in [a, b[$. On définit alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to b} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Et finalement soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$. Si les deux intégrales impropres existent, on définit :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 6.18 (Critère de comparaison)**.** *Soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ intégrables sur $[a, b]$ pour tout $b > a$. Si $\forall x > a : 0 \leq f(x) \leq g(x)$ et $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge également telle que :*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Comme $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x > a$, on sait que pour tout $b > a$, on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

De plus, les fonctions suivantes sont croissantes car f et g sont toujours positives :

$$F : b \mapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$G : b \mapsto \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dès lors, F est majorée et bornée par $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$. La limite de $F(b)$ pour $b \to +\infty$ existe. $\square$

6.6 Longueur de courbes

Définition 6.19. Une courbe différentiable est une application $\gamma[a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que $\forall t : t \in [a,b] \Rightarrow \gamma'(t) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.

Définition 6.20. L'ensemble $C \coloneqq \operatorname{Im}\gamma$ est la courbe différentiable associée à γ.

Définition 6.21. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe différentiable. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, alors γ est un lacet. Et si γ est un lacet tel que $\gamma'(a) = \gamma'(b)$ (dérivées respectivement « à droite » et « à gauche »), alors γ est un lacet différentiable.

Définition 6.22. Si γ est une courbe injective sur $]a,b[$, alors γ est dite simple.

Définition 6.23. Soit γ une courbe paramétrée simple et différentiable. On définit sa longueur par :

$$L(\gamma) \coloneqq \int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\|\mathrm{d}t.$$

Proposition 6.24. *Soient $f : [a,b] \to [c,d] \in C^1$ bijective, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ et $\eta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ deux courbes paramétrées différentiables. Supposons que $\gamma = (\eta \circ f)$ (que γ est une reparamétrisation de η). Alors $L(\gamma) = L(\eta)$.*

Démonstration. Supposons f croissante. Dès lors (en posant $u \coloneqq f(t)$) :

$$\begin{aligned} L(\gamma) = L(\eta \circ f) &= \int_a^b \left\|(\eta \circ f)'(t)\right\|\mathrm{d}t = \int_a^b \left\|(\eta' \circ f)(t) f'(t)\right\|\mathrm{d}t = \int_a^b \left\|(\eta' \circ f)(t)\right\|\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \left\|(\eta' \circ f)(t)\right\| f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{f(a)}^{f(b)} \left\|\eta'(u)\right\|\mathrm{d}u = \int_c^d \left\|\eta'(u)\right\|\mathrm{d}u = L(\eta). \end{aligned}$$

Si f était décroissant, il aurait fallu mettre un $-$ en sortant $f'(t)$ de la valeur absolue mais les bornes d'intégration $f(a)$ et $f(b)$ auraient respectivement donné d et c. Donc en rentrant le moins dans les bornes d'intégration, on obtient le même résultat. $\square$

Définition 6.25. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée différentiable telle que $\forall t : \left\|\gamma'(t)\right\| = 1$. Alors γ est une paramétrisation par longueur.

Remarque. La longueur d'une telle courbe est $b-a$ et la distance entre deux points p, q quelconques est $|p-q|$.

Lemme 6.26. *Toute courbe paramétrée différentiable possède une paramétrisation par longueur.*

Démonstration. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée différentiable. Définissons $\ell : [a,b] \to \mathbb{R}^+ : t \mapsto \int_a^t \gamma'(u)\,\mathrm{d}u$. ℓ est une fonction strictement croissante et une bijection $\in C^1$. Soit $\eta = (\gamma \circ \ell^{-1})$. On a :

$$\left\|\eta'(t)\right\| = \left\|\gamma((\ell^{-1})(t))(\ell^{-1})'(t)\right\| = \left\|\gamma'((\ell^{-1})(t))\right\| \frac{1}{\left|\ell'((\ell^{-1})(t))\right|}.$$

Et comme, par définition, $\ell'(t) = \left\|\gamma'(t)\right\|$, on a $\left\|\eta'(t)\right\| = 1$. □

6.7 Intégrales curvilignes

Définition 6.27. Soient $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ avec $\operatorname{Im}\gamma \subseteq E$. On définit l'intégrale de f le long de la courbe γ par :

$$\in_\gamma f\,\mathrm{d}s \coloneqq \int_a^b f(\gamma(t))\left\|f'(t)\right\|\mathrm{d}t.$$

Définition 6.28. Un champ de vecteurs est une application $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Définition 6.29. Soient $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu et $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée différentiable. On définit le travail de f le long de γ par :

$$\int_\gamma \langle f, \mathrm{d}s\rangle \coloneqq \int_a^b \left\langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\right\rangle \mathrm{d}t.$$

Proposition 6.30. *Soient γ et η deux paramétrisations d'une même courbe. Alors $\int_\gamma \langle f, \mathrm{d}s\rangle = \pm \int_\eta \langle f, \mathrm{d}s\rangle$. Le signe moins peut apparaitre si γ et η dont d'orientation opposée.*

6.8 Champs conservatifs

Définition 6.31. Soit $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs. f est conservatif si il existe $F : E \to \mathbb{R}$ tel que $f = \nabla F$.

Proposition 6.32. *Soit $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ conservatif. Alors $\int_\gamma \langle f, \mathrm{d}s\rangle$ ne dépend que des extrémités de γ.*

Démonstration. Soit $F = \nabla f$.

$$\int_\gamma \langle f, \mathrm{d}s\rangle = \int_a^b \left\langle \nabla F(\gamma(t)), \gamma'(t)\right\rangle \mathrm{d}t = \int_a^b (F(\gamma(t)))'(t)\,\mathrm{d}t = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

□