Modélisation et simulation — INFOF-305

R. Petit

Année académique 2016 - 2017

Table des matières

1 Introduction aux systèmes dynamiques

1.1 Généralités

Définition 1.1. Soit T, *l'ensemble de temps*. Selon la nature de T, on parle de *système à temps discret*, ou de *système à temps continu*. Les applications :

$$u : T \to U \subseteq \mathbb{R}^n \qquad \text{et} \qquad y : T \to Y \subseteq \mathbb{R}^m$$

sont respectivement appelées *fonction d'entrée* et *fonction de sortie*. L'application u correspond aux apports que subit le système, alors que l'application y correspond à l'observation du système.

Le couple d'applications (u, y) appartient à $\Omega \times \Gamma$, où Ω est l'ensemble des fonctions d'entrées acceptables et Γ est l'ensemble des fonctions de sortie acceptables.
Remarque. $\forall (u, y) \in \Omega \times \Gamma : \forall t \in T : \big(u(t), y(t)\big) \in U \times Y$.
Définition 1.2. On appelle variable d'état la variable $x : T \to X \subseteq \mathbb{R}^d$ représentant l'*état interne du système* en fonction du temps.

L'évolution du système sera décrite comme un système d'équations différentielles ou d'équations aux différences par rapport à la variable d'état.
Remarque. Le fait qu'une variable supplémentaire soit introduite induit que la connaissance de $(t_0, u, y) \in T \times \Omega \times \Gamma$ ne permet pas de prédire $y(t)$ pour $T \ni t > t_0$. Pour cela, il faut également connaître $x^0 \coloneqq x(t_0) \in \mathbb{R}^d$. Alors les théorèmes de Cauchy-Lipschitz sont applicables (habituellement) pour affirmer que $t \mapsto x(t)$ est une solution.
Définition 1.3. Un système est dit *statique* (ou *memoryless*) lorsque la sortie ne dépend que de l'entrée, et pas de la variable d'état.
Remarque. Dans un tel système, connaitre (t_0, u, y) est suffisant pour connaitre $y(t)$ pour tout $t > t_0$.
Définition 1.4. L'application :

$$\varphi : T \times T \times X \times \Omega \to \mathbb{R}^d$$

telle que $\forall t \in T : x(t) = \varphi(t_0, t, x^0, u)$ est appelée *fonction d'état*.

L'application :

$$\eta : T \times X \to Y$$

telle que $\forall t \in T : y(t) = \eta(t, x(t))$ est appelée *fonction de transformation de sortie*.
Définition 1.5. Un système dynamique se définit alors par le 8-uple suivant :

$$S = (T, U, \Omega, X, Y, \Gamma, \varphi, \eta)\,.$$

Remarque. On peut donc synthétiser un système dynamique par :

$$u(t) \xrightarrow{\varphi(t)} x(t) \xrightarrow{\eta(t)} y(t).$$

Proposition 1.6. *L'application φ admet les propriétés suivantes :*
- *consistance :* $\forall (t, x, u) \in T \times X \times \Omega : \varphi(t, t, x, u) = x$;
- *irréversibilité : φ est définie sur* $[t_0, +\infty) \cap T$;
- *composition :* $\forall t_0 < t_1 < t_2 \in T : \forall (u, x) \in \Omega \times X : \varphi(t_2, t_0, x, u) = \varphi\left(t_2, t_1, \varphi\left(t_1, t_0, x, u\right), u\right)$;
- *causalité :* $\forall t_0 \in T : \forall u_1, u_2 \in \Omega : \big(\forall t \in T : u_1(t) = u_2(t)\big) \Rightarrow \Big(\forall t \in T : \varphi(t, t_0, x, u_)) = \varphi(t, t_0, x, u_2)\Big)$.

Définition 1.7. Soit un système dynamique régi par :

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u).$$

On appelle le *mouvement du système* l'ensemble $\big\{(t, x(t)) \text{ t.q. } t \geqslant t_0\big\}$.

On appelle la *trajectoire du système* l'ensemble $\big\{x(t) \text{ t.q. } t \geqslant t_0\big\}$.

Remarque. La trajectoire est donc la projection du mouvement parallèlement au temps.
Définition 1.8. Soit $\overline{x} \in X$. On dit que $\overline{x}$ est un *état d'équilibre (en temps infini)* lorsque :

$$\exists u \in \Omega \text{ t.q. } \forall (t, t_0) \in T^2 : t \geqslant t_0 \Rightarrow \varphi(t, t_0, \overline{x}, u) = \overline{x}.$$

Définition 1.9. Soit $\overline{y} \in Y$. On dit que $\overline{y}$ est une *sortie d'équilibre (en temps infini)* lorsque :

$$\forall t_0 \in T : \exists (x, u) \in X \times \Omega \text{ t.q. } \forall t \geqslant t_0 : \eta\left(t, \varphi(t, t_0, x, u)\right) = \overline{y}.$$

Définition 1.10. Un système est dit *invariant* lorsque :

1. T est stable par l'addition ;
2. $\forall (u, \delta) \in \Omega \times T : \Omega \ni u^{(\delta)} : T \to U : t \mapsto u(t - \delta)$;
3. $\forall (t_0, \delta, x^0) \in T \times T \times X : \forall t \geqslant t_0 : \varphi\left(t, t_0, x^0, u\right) = \varphi\left(t + \delta, t_0 + \delta, x^0, u^{(\delta)}\right)$;
4. y est indépendante de t, c-à-d : $y(t) = (\eta \circ x)(t))$.

Définition 1.11. Soient $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$. On dit que $x^{(2)}$ est *accessible* à l'instant $t_2 \in T$ à partir de $x^{(1)}$ lorsque :

$$\exists (t_1, u) \in T \times \Omega \text{ t.q. } t_1 < t_2 \text{ et } \varphi(t_2, t_1, x^{(1)}, u) = x^{(2)}.$$

Définition 1.12. Un système est dit *connexe à l'instant* $t \in T$ lorsque $\forall (x^{(1)}, x^{(2)}) \in X^2 : x^{(2)}$ est accessible à l'instant t à partir de $x^{(1)}$.

Si un système est connexe pour tout $t \in T$, alors il est dit connexe.
Définition 1.13. Soient $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$. On dit que $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ sont équivalents à l'instant $t_0 \in T$ lorsque :

$$\forall u \in \Omega : \forall t \geqslant t_0 : \eta\left(t, \varphi\left(t, t_0, x^{(1)}, u\right)\right) = \eta\left(t, \varphi\left(t, t_0, x^{(2)}, u\right)\right).$$

Définition 1.14. Un système est dit en *forme réduite* si $\forall (x^{(1)}, x^{(2)}) \in X^2 : x^{(1)} \neq x^{(2)} \Rightarrow x^{(1)}$ n'est pas équivalent à $x^{(2)}$.
Définition 1.15. Soit $\hat{x} \in X$. L'état $\hat{x}$ est dit observable à l'instant $t_0 \in T$ lorsque $\exists (t, u) \in T \times \Omega$ t.q. $x(t_0)$ peut être retrouvé de manière univoque à l'aide de $u\Big|_{[t_0, t)}$ et $y\Big|_{[t, t_0)}$.

1.2 Systèmes dynamiques complexes

Définition 1.16. Un *sous-système dynamique* est un système dynamique faisant partie d'un système dynamique complexe.
Définition 1.17. Soient S_1 et S_2 deux systèmes dynamiques. S_1 et S_2 sont dits *connectés en cascade* lorsque :

$$y_1 = u_2,$$

c-à-d lorsque la sortie du premier système sert d'entrée au second.
Remarque. Pour que deux systèmes S_1 et S_2 soient connectés en cascade, il est nécessaire que $T_1 = T_2, \Gamma_1 \subseteq \Omega_2$ (et donc $Y_1 \subseteq U_2$).

Proposition 1.18. *Soient les deux systèmes dynamiques suivants :*

$$S_1 = (T, U_1, \Omega_1, X_1, Y_1, \Gamma_1, \varphi_1, \eta_1),$$
$$S_2 = (T, U_2, \Omega_2, X_2, Y_2, \Gamma_2, \varphi_2, \eta_2).$$

Le système dynamique résultant de la cascade de S_1 et S_2 est donné par :

$$S = (T, U_1, \Omega_1, X_1 \times X_2, Y_2, \Gamma_2, \varphi, \eta_2),$$

où :

$$
\begin{aligned}
&T = T_1 = T_2 \\
&\varphi : T \times T \times (X_1 \times X_2) \times \Omega_1 \to X : \\
&\qquad \Big((t, t_0, \big(x_1(t_0), x_2(t_0)\big)\, , u \Big) \mapsto \Big(\varphi_1 \left(t, t_0, x_1(t_0), u\right), \varphi_2 \left(t, t_0, x_2(t_0), y_1(t_0, x_1, u)\right) \Big), \\
&y_1(t_0, x_1, u) : T \to Y_1 \subseteq U_2 : t \mapsto \eta_1 \Big(t, \varphi_1 \left(t, t_0 x_1(t_0), u\right) \Big).
\end{aligned}
$$

Définition 1.19. Soient S_1 et S_2 deux systèmes dynamiques. S_1 et S_2 sont dits *connectés en parallèle* lorsque :

$$u_1 = u_2,$$

c-à-d lorsqu'ils ont la même fonction d'entrée.

Remarque. Pour que deux systèmes dynamiques soient connectés en parallèle, il est nécessaire que $T_1 = T_2$, $\Omega_1 = \Omega_2$ (et donc $U_1 = U_2$).

Proposition 1.20. *Soient les deux systèmes dynamiques suivants :*

$$
\begin{aligned}
S_1 &= (T, U_1, \Omega_1, X_1, Y_1, \Gamma_1, \varphi_1, \eta_1), \\
S_2 &= (T, U_2, \Omega_2, X_2, Y_2, \Gamma_2, \varphi_2, \eta_2).
\end{aligned}
$$

Le système dynamique résultant des systèmes S_1 et S_2 en parallèle est donné par :

$$S = (T, U, \Omega, X_1 \times X_2, Y_1 \times Y_2, \Gamma_1 \times \Gamma_2, \varphi, \eta),$$

où :

$$
\begin{aligned}
&T = T_1 = T_2 \\
&U = U_1 = U_2 \\
&\Omega = \Omega_1 = \Omega_2 \\
&\varphi : (t, t_0, x, u) \mapsto \big(\varphi_1(t, t_0, x, u), \varphi_2(t, t_0, x, u)\big) \\
&\eta : \big(t, (x_1, x_2)\big) \mapsto \big(\eta_1(t, x_1), \eta_2(t, x_2)\big)
\end{aligned}
$$

1.3 Rétroaction