

Calcul différentiel et intégral II

R. Petit

année académique 2016 - 2017

Table des matières

1	Suites et séries de fonctions	1
1.1	Rappels	1
1.1.1	Topologie métrique	1
1.1.1.1	Espaces métriques	1
1.1.1.2	Espaces vectoriels	2
1.1.1.3	Ouverts, fermés, compacts	3
1.1.1.4	Suites de Cauchy	4
1.1.1.5	Continuité	4
1.2	Convergence de suites de fonctions	5
1.2.1	Convergence simple	5
1.2.2	Convergence uniforme	6

Chapitre 1

Suites et séries de fonctions

1.1 Rappels

1.1.1 Topologie métrique

1.1.1.1 Espaces métriques

Définition 1.1. Soit X un ensemble. Une *distance* sur X est une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

1. $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;
2. $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire) ;
3. $\forall x, y \in X : (d(x, y) = 0 \iff x = y)$ (séparation¹).

Définition 1.2. On appelle *espace métrique* (X, d) un espace X muni d'une distance d sur X .

Définition 1.3. Soient (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $x \in X$. La suite (x_n) converge vers x dans (X, d) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Cela se note :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} x.$$

Proposition 1.4. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans (X, d) , un espace métrique. Soient $x, y \in X$. Si :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} x \quad \text{et} \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} y,$$

alors $x = y$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $x_n \rightarrow x$ et $x_n \rightarrow y$, on sait qu'il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq N_1 : d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2 : d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dès lors, soit $N := \max\{N_1, N_2\}$. On peut dire :

$$\forall n \geq N : d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

1. Également appelé *principe d'identité des indiscernables*.

On en déduit $d(x, y) = 0$ et donc $x = y$ par séparation. \square

1.1.1.2 Espaces vectoriels

Définition 1.5. Soit \mathbb{K} , un sous-corps de \mathbb{C} . On appelle *norme* sur le \mathbb{K} -e.v. E toute application $n : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

1. $\forall x \in E : (n(x) = 0 \iff x = 0)$;
2. $\forall x \in E : \forall \lambda \in \mathbb{K} : n(\lambda x) = |\lambda| n(x)$;
3. $\forall x, y \in E : n(x + y) \leq n(x) + n(y)$.

Proposition 1.6. Soit (E, n) un \mathbb{K} -espace vectoriel normé. L'application d suivante est une distance sur E (on l'appelle la distance associée à la norme n) :

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+ : (x, y) \mapsto n(y - x).$$

Démonstration. EXERCICE. \square

Remarque. Si (E, n) est un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de E , et si $x \in E$, alors on dit :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{n} x$$

lorsque :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$$

au sens de la distance associée à la norme n .

Exemple 1.1. \mathbb{R} est un \mathbb{R} -e.v. normé avec pour norme $n : x \mapsto |x|$.

Exemple 1.2. Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $p \in [1, +\infty)$. Pour $x = (x_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{C}^d$, on définit :

$$n(x) = \|x\|_p := \left(\sum_{k=0}^d |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On a alors (\mathbb{C}^d, n) est un \mathbb{C} -espace vectoriel normé. Également (\mathbb{C}^d, n) et (\mathbb{R}^d, n) sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels normés.

Définition 1.7. Soit $x \in \mathbb{C}^d$. On définit la *norme infinie* de x dans \mathbb{C}^d par :

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|.$$

Exemple 1.3. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_\infty)$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel normé. Également, $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ et $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_\infty)$ sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels normés.

Démonstration. EXERCICE. \square

Définition 1.8. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On dit que la suite (x_n) est *presque nulle* s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N : x_n = 0$.

Exemple 1.4. Soient $P \in \mathbb{C}[x]$ et $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite presque nulle des coefficients de P . On pose :

$$\|P\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

Alors $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{C}[x]$.

Démonstration. EXERCICE. \square

1.1.1.3 Ouverts, fermés, compacts

Définition 1.9. Soit (X, d) un espace métrique. On appelle *boule ouverte* de centre $x \in X$ et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble :

$$B(x, r) := \{y \in X \text{ t.q. } d(x, y) < r\}.$$

On définit également la *boule fermée* de centre x et de rayon r l'ensemble :

$$B(x, r) := \{y \in X \text{ t.q. } d(x, y) \leq r\}.$$

Définition 1.10. Soit (X, d) un espace métrique et soit $O \subset X$. On dit que O est une partie *ouvert* dans X lorsque :

$$\forall x \in O : \exists r \geq 0 \text{ t.q. } B(x, r) \subset O.$$

Remarque. Pour tout X , les ensembles \emptyset et X sont tous deux des ouverts de X .

Définition 1.11. Soit (X, d) un espace métrique. Une partie $F \subset X$ de X est dite *fermée* dans X lorsque $X \setminus F$ est ouvert.

Proposition 1.12. Dans un espace métrique (X, d) , soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de X indicés par un ensemble $I \neq \emptyset$. Alors $(\bigcup_{i \in I} O_i)$ est un ouvert de X . Si de plus I est fini, alors $(\bigcap_{i \in I} O_i)$ est un ouvert de X .

Exemple 1.5. Prenons $X = \mathbb{R}$ et $O_i = (-1 - \frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{i})$. Alors $(\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} O_i) = [-1, 1]$ qui n'est pas un ouvert de X .

Démonstration. EXERCICE. □

Définition 1.13 (Compacts par Borel-Lebesgue). Soit (X, d) un espace métrique. Une partie $K \subset X$ est dite *compacte* si $K \neq \emptyset$ et si, de tout recouvrement de K par des ouverts de X , on peut extraire un sous-recouvrement fini.

C'est-à-dire lorsque :

1. $K \neq \emptyset$;
2. $\forall I \neq \emptyset : \forall (O_i)_{i \in I}$ ouverts de X t.q. $K \subset (\bigcup_{i \in I} O_i) : \exists J \subset I$ fini t.q. $K \subset (\bigcup_{j \in J} O_j)$.

Proposition 1.14 (Compacts par Bolzano-Weierstrass). Soit (X, d) un espace métrique. Une partie K de X est compacte si et seulement si :

1. $K \neq \emptyset$;
2. de toute suite de points de K , on peut extraire une sous-suite convergente dans K .

Démonstration. Admis. □

Exemple 1.6. L'ensemble $[0, 1]$ est un compact de \mathbb{R} .

Proposition 1.15. Soit (X, d) , un espace métrique et $K \subset X$, une partie compacte. Alors K est fermé et borné.

Démonstration. EXERCICE. (Absurde) □

Proposition 1.16. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{K} -e.v. normé de dimension finie. Alors les parties compactes de E sont les parties fermées bornées non nulles.

Démonstration. Admis. □

1.1.1.4 Suites de Cauchy

Définition 1.17. Soit (X, d) , un espace métrique. On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m, n \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Proposition 1.18. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans l'espace métrique (X, d) , alors elle est de Cauchy.

Démonstration. Si x est la limite de la suite (x_n) , on pose $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N : d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc $\forall m, n \geq N : d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon$. □

Définition 1.19. Un espace métrique (M, d) est dit *complet* quand toute suite de Cauchy de points de X converge dans X .

Définition 1.20. Un espace vectoriel E est dit *de Banach* lorsque toute suite de Cauchy de vecteurs de E converge dans E .

Remarque. On remarque que dans un espace métrique complet, une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy (ce qui est entre autres le cas de \mathbb{R}).

De plus, les suites de Cauchy permettent, dans des espaces complets, de montrer que des suites convergent sans connaître leur limite.

Exemple 1.7. Les espaces métriques $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sont des espaces de Banach. Et pour tout $p \in [1, +\infty)$ et $q \in \mathbb{N}$, les espaces métriques $(\mathbb{R}^q, \|\cdot\|_p)$ et $(\mathbb{C}^q, \|\cdot\|_p)$ sont des espaces de Banach.

1.1.1.5 Continuité

Définition 1.21. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Une application $f : X \rightarrow Y$ est dite continue en $x_0 \in X$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta \geq 0 \text{ t.q. } \forall x \in X : (d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon).$$

On dit que f est continue sur $A \subset X$ lorsque f est continue en tout $a \in A$.

Proposition 1.22. Une fonction $f : (X, d) \rightarrow (Y, d)$ est continue sur X lorsque l'image réciproque par f de (Y, d) est un ouvert de (X, d) .

Démonstration. Admis. □

Proposition 1.23. Une fonction $f : (X, d) \rightarrow (Y, d)$ est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si l'image par f de toute suite de points de X convergente en x_0 est une suite convergente en $f(x_0)$.

Démonstration. Admis. □

Définition 1.24. Soit $f : (X, d) \rightarrow (Y, d)$. f est dite *lipschitzienne* de constante $K \geq 0$ lorsque

$$\forall (x, y) \in X^2 : d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y).$$

Proposition 1.25. Si $f : (X, d) \rightarrow (Y, d)$ est lipschitzienne, alors elle est continue sur X .

Démonstration. EXERCICE. □

Définition 1.26. Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, une suite dans un espace métrique (X, d) . On dit que (a_k) est *presque nulle* lorsqu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N : a_n = 0$.

Exemple 1.8.

- Pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'application $c_i : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C} : P = \sum_{k=0}^+ \infty a_k x^k \mapsto a_i$ est continue de $(\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. En effet, pour $i \in \mathbb{N}$, $P = \sum_{k=0}^+ \infty a_k x^k$, et $Q = \sum_{k=0}^+ \infty b_k x^k$, on a :

$$|c_i(P) - c_i(Q)| = |a_i - b_i| \leq \|P - Q\|_\infty = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k - b_k|.$$

On en déduit que c_i est lipschitzienne sur $\mathbb{C}[x]$ et donc continue sur $\mathbb{C}[x]$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons :

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \in \mathbb{C}[x].$$

On observe que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$ car :

$$\|P_n - P_m\|_\infty = \left\| \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} x^k \right\|_\infty.$$

On a alors :

$$\|P_n - P_m\|_\infty = \left\| \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}} \frac{1}{k!} x^k \right\|_\infty = \max_{\min\{m,n\}+1 \leq k \leq \max\{m,n\}} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(\min\{m,n\} + 1)!}.$$

Montrons que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Supposons (par l'absurde) que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $P \in (\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$. Notons $(a_k) \subset \mathbb{C}$, la suite presque nulle des coefficients de P . Pour $i \in \mathbb{N}$, on a $c_i(P) = \frac{1}{i!}$ quand $n \geq i$. Or par la propriété de Lipschitz, on sait que $c_i(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c_i(P) = a_i$. Or (a_k) est presque nulle et $a_i = \frac{1}{i!}$. Il y a donc contradiction. Donc (P_n) ne converge pas dans $(\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$. Dès lors, $(\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.

1.2 Convergence de suites de fonctions

1.2.1 Convergence simple²

Définition 1.27. Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. On dit que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ où $f_n : X \rightarrow (Y, d)$ converge simplement sur X lorsque :

$$\forall x \in X : (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge dans } (Y, d).$$

Définition 1.28. Dans ce cas, la suite a pour limite simple la fonction :

$$f : X \rightarrow (Y, d) : x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

et est bien définie. Cela se note :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS}} f \quad \text{ou} \quad f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS sur } X} f.$$

Exemple 1.9. Soient $X = [0, 1]$ et $Y = \mathbb{R}$. On pose $f_n(x) = x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Si $x \in [0, 1)$, alors la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison x avec $|x| < 1$ donc la suite converge vers 0 ;

2. La convergence simple est la notion de convergence « minimale » que l'on va exiger. Il existe des convergences encore plus élémentaires (voir théorie de l'intégration de Lebesgue), mais qui se trouvent en dehors des objectifs du cours.

- si $x = 1$, alors $f_n(x) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction :

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

Remarque.

- On a « perdu » la continuité des fonctions f_n par passage à la limite ;
- ici, la convergence simple peut s'écrire ainsi, à l'aide de quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall x \in X : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

On remarque donc que N dépend de x (ordre des quantificateurs).

1.2.2 Convergence uniforme

Définition 1.29. Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique, et $f_n : X \rightarrow (Y, d)$. On dit que (f_n) converge uniformément sur X vers $f : X \rightarrow (Y, d)$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : \forall x \in X : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Cela se note :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } X} f.$$

Remarque. La définition est très proche de la convergence simple. La différence étant que pour une convergence uniforme, il faut que $N \in \mathbb{N}$ ne dépende pas de la valeur de x .

Proposition 1.30. Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans (Y, d) et $f : X \rightarrow (Y, d)$. Si (f_n) converge uniformément sur X vers f , alors (f_n) converge simplement sur X vers f .

Démonstration. EXERCICE. □

Exemple 1.10. Prenons $X = \mathbb{R} = Y$ et pour tout $n \geq 1$, définissons $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Fixons $x \in \mathbb{R}$. On trouve alors :

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \sqrt{x^2} = |x|.$$

Donc :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS sur } X} |\cdot|.$$