

Statistiques mathématiques

R. Petit

année académique 2016 - 2017

Table des matières

1	Théorie de l'échantillonnage	2
1.1	Terminologie et définitions	2
1.2	Moments	3
1.2.1	Indicateurs	4
1.3	Quantile	4
1.3.1	Lemme de Fisher	6

Introduction

En probabilités, une variable aléatoire X donnée est entièrement définie par sa loi. On peut l'exprimer par la fonction de répartition F^X ou par la fonction de densité $f^X = \frac{d}{dx} F^X$. Ces fonctions permettent de déterminer :

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f^X(x) dx = F^X(b) - F^X(a).$$

Ou encore :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f^X(x) dx.$$

Cependant, les fonctions f^X et F^X ne sont jamais connues précisément. Elles peuvent être approchées par des modélisations, mais les modèles ne sont jamais exacts. En probabilités, on cherche donc les observations sur base de la loi qui est connue, alors qu'en statistiques, on cherche à retrouver la loi sur base de n observations X_1, \dots, X_n .

Nous allons nous intéresser à des *modèles statistiques* sous la forme $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{P}^{(n)})$ où :

$$\mathcal{P}^{(n)} = \{P^{(n)}\} = \{P_{\theta}^{(n)} \text{ t.q. } \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\},$$

et donc les $P^{(i)}$ sont chacun une loi possible pour (X_1, \dots, X_n) .

Ces modèles sont dits *paramétriques* car les différentes lois sont les mêmes au paramètre θ près. Nous n'étudierons que des modèles paramétriques où Θ est un espace de dimension $d \in \mathbb{N}$ finie.

Exemple 0.1. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires iid (indépendantes et identiquement distribuées).

— Si les X_i sont de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors le paramètre θ est donné par :

$$\theta = \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^2;$$

— si les X_i sont de loi uniforme $\text{Unif}(0, \theta)$, le paramètre θ est donné par $\theta \in \Theta = \mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}$;

— si les X_i sont de loi Bern(p), le paramètre θ est donné par $\theta = p \in \Theta = [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Remarque. Une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est déraisonnable car les valeurs observables ne vont empiriquement pas vers les infinis alors que la distribution le permet théoriquement mais n'est pas **complètement** déraisonnable car ces probabilités sont négligeables grâce à l'exponentielle de $(-x^2)$ dans la formule de la densité.

Chapitre 1

Théorie de l'échantillonnage

1.1 Terminologie et définitions

Définition 1.1. On appelle *modèle d'échantillonnage* un modèle d'observations iid.

Définition 1.2. Soit un modèle statistique $(E^n, \mathcal{B}(E^n), \mathcal{P}^{(n)})$ où $\mathcal{P}^{(n)} = \{P_\theta^{(n)} \text{ t.q. } \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}$. On note ici $P_\theta^{(n)}$ une loi possible pour (X_1, \dots, X_n) et P_θ une loi possible pour X_i avec i fixé. On dit alors que $P_\theta^{(n)}$ est déterminé par P_θ .

Remarque. Ici, deux visions vont s'opposer et se compléter : la vision *population* qui est associée à P_θ et la version *échantillonnage* (ou *empirique*), qui, elle, est associée à $P_\theta^{(n)}$.

Définition 1.3. On définit la fonction indicatrice $I_{[\cdot]}$ qui vaut 1 quand l'expression entre crochets est vraie et 0 sinon.

Définition 1.4. Soit X_1, \dots, X_n une suite de n observations. On définit la *ième statistique d'ordre* par $X_{(i)} = X_k$ t.q. $|\{X_j \text{ t.q. } X_j < X_k, 1 \leq j \leq n\}| = i$. On définit également la *statistique d'ordre* par $(X_{(i)})_i$.

Définition 1.5. On définit les fonctions de répartition comme suit :

— la fonction de répartition population :

$$F_\theta(x) = P_\theta[X_i \leq x] ;$$

— la fonction de répartition empirique :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[X_i \leq x]}.$$

Remarque. La fonction F_n empirique est une fonction en escaliers. Elle fait des sauts de hauteur $\frac{1}{n}$, et est telle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F_n(x) = 0.$$

On peut également remarquer que $F_n(X_{(i)}) = \frac{i}{n}$. En effet, par définition de $X_{(i)}$, il y a exactement i observations inférieures à $X_{(i)}$. Dès lors, la fonction indicatrice donnera i fois la valeur 1 et $(n - i)$ fois la valeur 0. La somme donne donc i et la fonction donne $\frac{i}{n}$.

Définition 1.6. On appelle *statistique* toute fonction mesurable faisant intervenir **uniquement** des observations.

Exemple 1.1. Par exemple F_n est une statistique car seules les valeurs X_i sont utilisées, mais F_θ n'est pas une statistique car la valeur du paramètre θ apparaît et n'est pas une observation.

Remarque. Une statistique peut être à valeur scalaire ($X_{(i)}$ par exemple), à valeur vectorielle ($(X_{(i)})_{1 \leq i \leq n}$ par exemple), à valeur ensembliste ($[X_i \pm \bar{X}]$ avec i fixé par exemple), ou encore à valeur fonctionnelle (F_n par exemple).

Remarque. L'objectif est de pouvoir approximer la loi régissant les populations (F_θ) à l'aide de la loi observée empiriquement. Par la loi des grands nombres, on a :

$$F_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s. par } P_\theta} .$$

Théorème 1.7 (Théorème de Glivenko-Cantelli). Si F_n et F_θ sont respectivement une fonction de répartition empirique et de population, alors :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F_\theta(x)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 0$$

1.2 Moments

Définition 1.8 (Moments pour populations). On définit $\mu'_r(\theta)$ le *moment non-centré* d'ordre r avec $r \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\mu'_r(\theta) := E_\theta[X_1^r].$$

On définit également $\mu_r(\theta)$, le *moment centré* d'ordre r avec $r \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\mu_r(\theta) := E_\theta \left[(X_1 - \mu'_r(\theta))^r \right].$$

Définition 1.9 (Moments pour échantillon). On définit m'_r , le *moment non-centré* d'ordre r avec $r \in \mathbb{N}^*$ par :

$$m'_r := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r.$$

On définit également le *moment centré* d'ordre r avec $r \in \mathbb{N}^*$ par :

$$m_r := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m'_r)^r.$$

Remarque. La loi des grands nombres dit que :

$$m'_r \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \mu'_r(\theta),$$

mais on ne peut pas dire que :

$$m_r \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \mu_r(\theta).$$

Ce n'est donc pas possible car pour m'_r , il y a une somme de variables iid alors que pour m_r , les variables sommées ne sont pas iid (mais dépendent toutes de tous les X_i).

En réalité, il y a convergence, mais on ne peut pas l'exprimer de manière triviale par la loi des grands nombres.

1.2.1 Indicateurs

On peut observer que $\mu'_1(\theta) = E_\theta[X_1]$. Pareil pour $m'_1 = \bar{X}$. Le moment d'ordre 1 est donc un indice de position. On a alors $\mu := \mu_1(\theta) = E[(X - E[X_1])] = E[X_1] - E[X_1] = 0$. Cette valeur n'est donc pas intéressante. Par contre :

$$\mu_2(\theta) = E[(X_1 - E[X_1])^2] =: \text{Var}(X) \quad \text{si} \quad m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 =: s^2.$$

Le moment d'ordre 2 est donc un indice de dispersion.

Définition 1.10. On appelle le *coefficient d'asymétrie de Fisher* la quantité :

$$\gamma_1 := \mu_3(\theta) \cdot (\mu_2(\theta))^{-\frac{3}{2}}.$$

Remarque. Le dénominateur $\mu_2(\theta)^{\frac{3}{2}}$ apparait afin de rendre invariant le coefficient d'asymétrie de Fisher aux transformations affines.

Définition 1.11. Le coefficient d'asymétrie de Fisher *empirique* est donné par :

$$m_3 \cdot m_2^{-\frac{3}{2}}.$$

Définition 1.12. On appelle *coefficient d'aplatissement de Fisher* la quantité :

$$\gamma_2 := \mu_4(\theta) \cdot (\mu_2(\theta))^{-2} - 3.$$

Définition 1.13. Le coefficient d'aplatissement de Fisher *empirique* est donné par :

$$m_4 \cdot m_2^{-2} - 3.$$

Remarque. Si $\gamma_2 \geq 0$, c'est que les événements extrêmes sont de plus haute probabilité et si $\gamma_2 \leq 0$, c'est que les événements extrêmes sont de moins haute probabilité.

À nouveau, le dénominateur γ a été ajouté afin de rendre le coefficient invariant aux transformations affines. Et le terme -3 sert à annuler le coefficient d'aplatissement de Fisher pour une normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1.3 Quantile

Définition 1.14. Si F_θ est inversible, alors on définit $x_\alpha(\theta) := F_\theta^{-1}(\alpha)$, et on appelle $x_\alpha(\theta)$ un *quantile*.

Remarque. Il faut cependant faire attention car on peut avoir le cas de F_θ discontinue où on choisit $\alpha = F_\theta^{-1}$ (point de discontinuité) ou alors le cas de F_θ admettant un plateau et où on choisit α sur le plateau.

Définition 1.15. On définit alors :

$$x_\alpha(\theta) := \inf \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } F_\theta(x) \geq \alpha\}.$$

Remarque. On donne les noms de *médiane*, *quartile*, *décile*, *percentile* pour α valant, avec k entier, respectivement $\frac{1}{2}$, $\frac{k}{4}$ avec $k < 4$, $\frac{k}{10}$ avec $k < 10$, et $\frac{k}{100}$ avec $k < 100$.

Définition 1.16. Pour les échantillons, on définit le *quantile empirique d'ordre α* par :

$$x_\alpha^{(n)} := \inf \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } F_n(x) \geq \alpha\}.$$

Remarque. On peut également définir des indices de position, dispersion, asymétrie, aplatissement, etc. sur les quantiles plutôt que sur les moments. Ils auront des propriétés différentes et une robustesse différente aux valeurs aberrantes.

Définition 1.17. La loi échantillonnée de $T(X^{(n)})$ est la loi déterminée par :

$$P_{\theta}^{(n)} \left[T(X^{(n)}) \in B \right] = P_{\theta}^{(n)} \left[\left\{ x^{(n)} \in X^{(n)} \text{ t.q. } T(x^{(n)}) \in B \right\} \right], B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m).$$

Exemple 1.2 (Bernoulli). $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ où les X_i sont iid $\text{Bern}(p)$. On a alors : $T(X^{(n)}) = \sum_{i=1}^n X_i$, sous $P_{\theta}^{(n)}$, est de loi $\text{Bin}(n, p)$.

Exemple 1.3 (Normale). $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ où les X_i sont iid $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et où $\theta = \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}^2$.

La statistique $T_1(X^{(n)}) = \sum_{i=1}^n X_i$, sous $P_{\theta}^{(n)}$, est de loi $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.

La statistique $T_2(X^{(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, sous $P_{\theta}^{(n)}$, est de loi $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Exemple 1.4 (Uniforme). $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ où les X_i sont iid $\text{Unif}(0, \theta)$, pour $\theta \in \Theta = \mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}$. On a donc $f_{\theta}^{X_i}(x) = \theta^{-1} I_{[0 \leq x \leq \theta]}$. Et donc :

$$F_{\theta}^{X_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La statistique $T(X^{(n)}) = X_{(n)} = \max_{1 \leq k \leq n} \{X_k\}$ a pour fonction de répartition, sous $P_{\theta}^{(n)}$:

$$F_{\theta}^{(n)}(x) = P[X_{(n)} \leq x] = P[X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x].$$

La seconde forme est plus agréable car on a une intersection d'événements indépendants. Donc :

$$F_{\theta}^{(n)}(x) = \prod_{i=1}^n P[X_i \leq x] = \prod_{i=1}^n F - \theta^{X_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a alors la fonction de densité :

$$\begin{aligned} f_{\theta}^{X_{(n)}}(x) &= \frac{d}{dx} F_{\theta}^{X_{(n)}} \Big|_x = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} I_{[0 \leq x \leq \theta]} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} I_{[0 \leq x \leq \theta]}. \end{aligned}$$

Remarque. La loi échantillonnée n'est pas toujours possible à déterminer exactement analytiquement. Dans ce cas, on donne :

- (i) les/des moments de la loi échantillonnée exacte ;
- (ii) la loi échantillonnée asymptotique.

Et pour de grandes valeurs de n , la loi asymptotique donne une assez bonne approximation de la loi exacte.

Remarque. Ici, les termes *exact* et *asymptotique* s'opposent : on parle d'objet *exact* lorsque l'objet est connu pour n fixé, et d'objet *asymptotique* lorsque l'objet n'est connu que pour $n \rightarrow +\infty$.

Exemple 1.5. Voici un cas où on ne peut exprimer de loi exacte mais où il est possible d'exprimer une loi asymptotique. Soit $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ où les X_i sont iid F avec la fonction F telle que $\text{Var}_F(X_i) = \sigma^2 < +\infty$ et donc $E_F(X_i) = \mu < +\infty$. On peut dès lors appliquer le théorème central limite (TCL) :

$$\sqrt{n}(\bar{X}^{(n)} - \mu) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Pour $n \gg$, on peut alors dire :

$$\bar{X}^{(n)} \approx \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

où le symbole \approx se lit *est à peu près de même loi*.

On en conclut donc qu'avec n suffisamment grand, on peut approximer $\bar{X}^{(n)}$, même sans connaître sa loi exacte.

1.3.1 Lemme de Fisher

Définition 1.18. La variable aléatoire Q est de loi χ^2 (chi-carrée) à $k(\in \mathbb{N}^*)$ degrés de liberté lorsque :

$$Q \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^k Z_i^2,$$

où les Z_i sont iid $\mathcal{N}(0, 1)$ et où « $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$ » veut dire *à la même distribution que*. Cela se note :

$$Q \sim \chi_k^2$$

Remarque. Si $Q \sim \chi_k^2$, alors :

$$f^Q(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) I_{[x>0]},$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt.$$

De plus, $\text{Var}(Q) = 2k$, et $E(Q) = k$.

On peut également noter que les χ^2 sont stables par la somme : si $Q_1 \sim \chi_{k_1}^2$ et $Q_2 \sim \chi_{k_2}^2$, alors :

$$Q_1 + Q_2 \sim \chi_{k_1+k_2}^2.$$

Lemme 1.19. Soit $W = (W_1, \dots, W_k)$ un vecteur de variables aléatoires, où $f^W : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^+$ est la fonction de densité du vecteur W . Alors :

1. $P[W \in B] = \int_B f^W(x) dx$;
2. si $V = AW + b$ où A est une matrice $k \times k$ inversible, alors :

$$f^V(v) = \left| \det A^{-1} \right| f^W\left(A^{-1}(v - b)\right).$$

Théorème 1.20 (Lemme de Fisher). Soient X_1, \dots, X_n iid $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où $n \geq 2$. Alors :

- (i) $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$;
- (ii) $\frac{ns^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$;
- (iii) $\bar{X} \perp s^2$.

Démonstration. Posons $Z_i := \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque les X_i sont iid, les Z_i le sont également (même transformation appliquée à tous les X_i et chaque Z_i ne fait intervenir que le X_i correspondant). Notons que :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma Z_i + \mu) = \sigma \bar{Z} + \mu,$$

où \bar{Z} est la moyenne empirique des Z_i . Notons également que :

$$ns^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n \left((\sigma Z_i + \mu) - (\sigma \bar{Z} + \mu) \right)^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 = n\sigma^2 s_Z^2.$$

Il nous faut alors montrer que $\bar{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $ns_Z^2 \sim \chi_{n-1}^2$, avec $\bar{Z} \sqcup s_Z^2$.

Pour cela, on sait que le vecteur $Z^{(n)} = (Z_1, \dots, Z_n)$ a pour densité :

$$f^{Z^{(n)}}(z^{(n)}) = \prod_{i=1}^n f^{Z_i}(z_i) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{z_i^2}{2} \right) \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left(-\sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{2} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left(-\frac{1}{2} \|z^{(n)}\|^2 \right).$$

Soit O une matrice orthogonale de dimension $n \times n$ telle que $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket : O_{1j} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. On pose alors :

$$(Y_1, \dots, Y_n) = Y^{(n)} = OZ^{(n)}.$$

Puisque la matrice O est orthogonale, on sait que O^{-1} existe et que $|\det O| = |\det O^{-1}| = 1$. Par le lemme 1.19, on peut dire :

$$f^{Y^{(n)}}(y^{(n)}) = |\det O^{-1}| f^{Z^{(n)}}(O^{-1}y^{(n)}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left(-\frac{1}{2} \|O^{-1}y^{(n)}\|^2 \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left(-\frac{1}{2} \|y^{(n)}\|^2 \right).$$

On a donc $f^{Y^{(n)}} = f^{Z^{(n)}}$, ce qui implique que les Y_i sont iid $\mathcal{N}(0, 1)$.

En particulier, $Y_1 = (Y^{(n)})_1 = (OZ^{(n)})_1 = \sum_{i=1}^n O_{1i}Z_i = \sum_{i=1}^n \frac{Z_i}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\bar{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On peut alors en déduire que $\bar{Z} \sim \mathcal{N}(0, n^{-1})$.

Montrons alors que $ns_Z^2 \sim \chi_{n-1}^2$:

$$ns_Z^2 = \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2 - n(\bar{Z})^2 = \|Z^{(n)}\|^2 - (\sqrt{n}\bar{Z})^2 = \|Y^{(n)}\|^2 - Y_1^2 = \sum_{i=2}^n Y_i^2.$$

Or, les Y_i sont $\mathcal{N}(0, 1)$. On a alors bien $ns_Z^2 \sim \chi_{n-1}^2$ (car la somme sur i commence à 2, il y a donc $(n-1)$ variables sommées).

De plus, puisque les Y_i sont indépendantes deux à deux, que \bar{Z} ne dépend que de Y_1 et que ns_Z^2 ne dépend pas de Y_1 , on sait que $\bar{Z} \sqcup ns_Z^2$. \square