

Espaces fonctionnels et séries de Fourier — Notes de cours de Pr.  
P. Godin

Robin Petit

Année académique 2017-2018

# Contents

<b>1</b>	<b>Transformation de Fourier</b>	<b>2</b>
1.1	Définitions . . . . .	2
1.2	Formule d'inversion . . . . .	5
1.3	Discussion sur la définition de la transformée . . . . .	8
1.4	Extension de la transformée à $L^1 \cap L^2$ . . . . .	8
1.5	Exemple d'application de la théorie de Fourier . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Espaces de Hilbert</b>	<b>12</b>
2.1	Orthogonalité . . . . .	14
2.2	Systèmes orthonormaux . . . . .	17
2.3	Applications linéaires entre espaces vectoriels normés . . . . .	22

# Chapter 1

## Transformation de Fourier

### 1.1 Définitions

On considère  $\mathbb{R}^n$  à  $n$  fixé en tant qu'espace de mesure  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \lambda)$  avec  $\mathcal{M}$  la famille des ensembles Lebesgue-mesurables et  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.1.** Pour  $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , on définit sa *transformée de Fourier* par :

$$\hat{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \xi \mapsto \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) dx. \quad (1.1)$$

Cette fonction est bien définie car  $x \mapsto e^{-i\langle x, \xi \rangle}$  est continue (et donc  $L^\infty$ ), et  $u$  est intégrable, donc  $x \mapsto e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x)$  est intégrable par Hölder.

**Proposition 1.2.** Pour  $u \in L^1$ ,  $\hat{u}$  est continue.

*Proof.* Soient  $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{n\mathbb{N}}$  t.q.  $h_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ .

$$\hat{f}(\xi_0 + h_k) = \int e^{-i\langle x, \xi_0 \rangle} e^{-i\langle x, h_k \rangle} f(x) dx.$$

Puisque  $\left| e^{-i\langle x, \xi_0 \rangle} e^{-i\langle x, h_k \rangle} f(x) \right| = |f(x)|$  et  $x \mapsto e^{-i\langle x, \xi_0 \rangle} e^{-i\langle x, h_k \rangle} f(x)$  converge partout (en particulier presque partout), par le théorème de la convergence dominée :

$$\hat{f}(\xi_0 + h_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \int e^{-i\langle x, \xi_0 \rangle} f(x) dx = \hat{f}(\xi_0).$$

□

**Proposition 1.3.** Soit  $u \in L^1$ . Si  $\forall j \in [[1, n]] : x_j f \in L^1$ , alors :  $\hat{u} \in C^1$  et :

$$\forall j \in [[1, n]] : \left. \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi_j} \right|_{\xi} = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-ix_j) u(x) dx. \quad (1.2)$$

*Proof.* Soit  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{n\mathbb{N}}$  t.q.  $h_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ , et prenons  $\{e_j\}_{j=1}^n$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

$$\frac{\hat{u}(\xi + h_k e_j) - \hat{u}(\xi)}{h_k} = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \underbrace{\frac{e^{-ih_k x_j} - 1}{h_k}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} -ix_j} u(x) dx.$$

En module :

$$\left| e^{-i\langle x, \xi \rangle} \frac{e^{-ih_k x_j} - 1}{h_k} f(x) \right| = \left| e^{-i\langle x, \xi \rangle} \right| \left| \frac{e^{-ih_k x_j} - 1}{h_k} \right| |f(x)| \leq C |x_j| |f(x)|,$$

qui est intégrable par hypothèse.

En effet, si  $x_j = 0$ , alors tout est nul et l'inégalité devient une égalité ; et si  $x_j \neq 0$ , alors  $\left| \frac{e^{-ih_k x_j} - 1}{|x_j h_k|} \right|$  est borné.

Dès lors, par le théorème de convergence dominée, la limite passe sous l'intégrale et on a (1.2).  $\square$

**Corollaire 1.4.** Pour  $m \in \mathbb{N}^*$ , si  $(1 + |x|)^m u \in L^1$ , alors  $u \in C^m$  et on peut dériver  $m$  fois sous le signe :

$$\partial^\alpha \hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-i)^{|\alpha|} x^\alpha u(x) dx$$

*Proof.* Exercice (récurrence sur  $m$ ).  $\square$

**Définition 1.5.** On définit l'ensemble de Schwartz :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &:= \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : x^\alpha \partial^\beta u \text{ est borné dans } \mathbb{R}^n \right\} \\ &= \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : x^\alpha \partial^\beta u \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \right\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Dans l'idée,  $\mathcal{S}$  est l'ensemble dont toutes les dérivées décroissent plus vite vers 0 que tout polynôme.

**Proposition 1.6.**  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

*Proof.* Immédiat par le fait que  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  sont des  $\mathbb{R}$ -evs.  $\square$

**Proposition 1.7.** Si  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  désigne l'ensemble des fonctions  $C^\infty$  à support compact, alors :

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \bigcap_{1 \leq p \leq +\infty} L^p(\mathbb{R}^n).$$

*Proof.*

(i) Pour  $u \in \mathcal{S}$  et  $+\infty > p \geq 1$  :

$$\int |u|^p dx = \int \left( \underbrace{|u| (1 + |x|)^N}_{\text{borné pour tout } N} \right)^p (1 + |x|)^{-Np} dx \leq \int (C_N)^p \underbrace{(1 + |x|)^{-Np}}_{\text{intégrable pour } Np > n} dx.$$

Dès lors, pour  $N$  suffisamment grand ( $Np > n$ ), on a  $\int |u| dx \leq c^{\text{ste}}$

Le cas  $p = +\infty$  vient uniquement du fait que pour  $u \in \mathcal{S}$ , pour  $\alpha = \beta = (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n$  :

$$u = x^\alpha \partial^\beta u \in L^\infty.$$

(ii) Soit  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  :  $x^\alpha \partial^\beta u \neq 0 \subseteq \text{supp } u$  compact. Par Heine-Cantor,  $u$  est uniformément continue sur  $\text{supp } u$ .  $\square$

**Proposition 1.8.** Pour  $u \in \mathcal{S}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ , alors :  $x^\alpha \partial^\beta u \in \mathcal{S}$ .

*Proof.* Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{N}^n$ . Par Leibniz :

$$\partial^\mu(fg) = \sum_{\sigma \leq \mu} \binom{\mu}{\sigma} \partial^\sigma f \partial^{\mu-\sigma} g.$$

Donc :

$$x^\lambda \partial^\mu (x^\alpha \partial^\beta u) = \sum_{\sigma \leq \mu} \binom{\mu}{\sigma} x^\lambda \partial^\sigma (x^\alpha) \partial^{\mu-\sigma} u,$$

où  $x^\lambda \partial^\sigma (x^\alpha) \leq c^{\text{ste}} x^\gamma$ . On en déduit que  $x^\lambda \partial^\mu (x^\alpha \partial^\beta u)$  est une somme finie de termes bornés et est donc bornée.  $\square$

À défaut de définir une topologie sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on définit uniquement une notion de convergence.

**Définition 1.9.** Soit  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ ,  $u \in \mathcal{S}$ , on dit que  $u_k$  converge vers  $u$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$  (noté  $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{S}} u$ ) lorsque :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta (u - u_k) \right| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0. \quad (1.4)$$

**Théorème 1.10.** Soit  $u \in \mathcal{S}$ . Alors :

1.  $\hat{u} \in \mathcal{S}$ . De plus si  $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{S}} u$ , alors  $\hat{u}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{S}} \hat{u}$ .
2.  $\widehat{D_j u}(\xi) = \xi_j \hat{u}(\xi)$  (de plus  $\widehat{x_j u} = D_j \hat{u}$ ).

*Proof.* Pour le premier point, on calcule :

$$D_\xi \hat{u}(\xi) = \int D_\xi^\alpha (e^{-i\langle x, \xi \rangle}) u(x) dx = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-x)^\alpha u(x) dx.$$

Donc :

$$\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \int \xi^\beta e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-x)^\alpha u(x) dx = \int (-D_x)^\beta (e^{-i\langle x, \xi \rangle}) (-x)^\alpha u(x) dx = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} D_x^\beta ((-x)^\alpha u(x)) dx.$$

Pour montrer cette dernière égalité, intégrons par partie. D'abord observons pour  $\phi \in \mathcal{S}$  et  $j \in [[1, n]]$  :

$$\int \partial_j \phi dx = \int \dots \int \left( \int \partial_j \phi dx_j \right) dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n.$$

Or :

$$\int \partial_j \phi dx_j = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N \partial_j \phi(x) dx_j = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \underbrace{\phi(x_1, \dots, x_{j-1}, N, x_{j+1}, \dots, x_n)}_{\xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0} - \underbrace{\phi(x_1, \dots, x_{j-1}, N, x_{j+1}, \dots, x_n)}_{\xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0} \right) = 0,$$

puisque  $\phi \in \mathcal{S}$ .

On en déduit donc que  $\int \partial_j \phi dx = 0$ .

Dès lors, puisque  $e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-x)^\alpha u(x) \in \mathcal{S}$  et par récurrence :

$$\int (-D_x)^\beta (e^{-i\langle x, \xi \rangle}) (-x)^\alpha u(x) dx = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} D_x^\beta ((-x)^\alpha u(x)) dx.$$

Montrons alors que  $\forall N \in \mathbb{N} : \exists C_N \geq 0$  t.q.  $|D_x^\beta((-x)^\alpha u(x))| \leq C_N(1+|x|)^{-N}$ . Par Leibniz :

$$(1+|x|)^N \partial^\beta (x^\alpha u(x)) = (1+|x|)^N \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial^\gamma x^\alpha \partial^{\beta-\gamma} u(x)$$

est borné car  $u \in \mathcal{S}$ . Dès lors :

$$|\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x)| \leq C_N \int (1+|x|)^{-N} dx.$$

Pour  $N$  suffisamment grand ( $N > n$ ), on a  $|\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x)| \leq c^{\text{ste}}$ .

Dès lors, on trouve :

$$|\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-N} |D_x^\beta((-x)^\alpha (u - u_k))| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On en déduit donc  $\hat{u}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{S}} \hat{u}$ .

Pour le second point, la seconde formule découle directement du premier pour  $\alpha = e_j$  :

$$D_j \hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-x_j) u(x) dx = \widehat{x_j u}(\xi).$$

La première égalité se démontre par :

$$\widehat{D_j u}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} D_j u(x) dx = - \int D_{x,j} \left( e^{-i\langle x, \xi \rangle} \right) u(x) dx = \xi_j \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) dx = \xi_j \hat{u}(\xi).$$

□

## 1.2 Formule d'inversion

**Théorème 1.11.** *Soit  $u \in \mathcal{S}$ . Alors :*

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(\xi) d\xi. \quad (1.5)$$

La fonction  $(y, \xi) \mapsto e^{i\langle x, \xi \rangle} e^{-i\langle y, \xi \rangle} u(y)$  n'est pas intégrable pour  $(y, \xi)$ . On ne va donc pas pouvoir appliquer Fubini.

*Proof.* Pour  $\chi \in \mathcal{S}$ ,  $(y, \xi) \mapsto e^{-i\langle y, \xi \rangle} e^{i\langle x, \xi \rangle} \chi(\xi) u(y)$  est intégrable. Donc par Fubini :

$$\int e^{i\langle x, \xi \rangle} \chi(\xi) \hat{u}(\xi) d\xi = \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \chi(\xi) \int e^{-i\langle y, \xi \rangle} u(y) dy d\xi = \int u(y) \int e^{-i\langle y-x, \xi \rangle} \chi(\xi) d\xi dy = \int u(y) \hat{\chi}(y-x) dy.$$

Pour  $\psi \in \mathcal{S}$ ,  $\delta > 0$  tels que  $\chi(\xi) = \psi(\delta\xi)$  :

$$\hat{\chi}(\xi) = \int e^{-i\langle y, \xi \rangle} \psi(\delta\xi) d\xi = \delta^{-n} \hat{\psi}(\xi/\delta).$$

Alors :

$$\int e^{i\langle x, \xi \rangle} \psi(\delta\xi) \hat{u}(\xi) d\xi = \int u(x+y) \delta^{-n} \psi(y/\delta) dy = \int u(x+\delta y) \hat{\psi}(y) dy.$$

Par le théorème de convergence dominée :

$$\int u(x + \delta y) \hat{\psi}(y) \, dy \xrightarrow{\delta \rightarrow +\infty} u(x) \int \hat{\psi}(y) \, dy,$$

or :

$$\int e^{i\langle x, \xi \rangle} \psi(\delta \xi) \hat{u}(\xi) \, d\xi \xrightarrow{\delta \rightarrow +\infty} \psi(0) \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(\xi) \, d\xi.$$

Par unicité de la limite, si  $\int \hat{\psi} \, dy \neq 0$  :

$$u(x) = \frac{\psi(0)}{\int \hat{\psi}(y) \, dy} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(\xi) \, d\xi$$

Dans le cas  $n = 1$ , on prend  $\psi_1 : x \mapsto e^{-x^2/2}$ . En intégrant  $z \mapsto e^{-z^2/2}$  sur un chemin rectangulaire  $[a, b, c, d] \subset \mathbb{C}$ , on trouve :

$$\int_a^b e^{-x^2/2} \, dx + \int_b^c e^{-z^2/2} \, dz + \int_c^d e^{-z^2/2} \, dz + \int_d^a e^{-z^2/2} \, dz = 0$$

par Cauchy. Pour  $(a, b) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ , on trouve que  $\int_b^c e^{-z^2/2} \, dz$  et  $\int_d^a e^{-z^2/2} \, dz$  tendent vers 0. Donc à la limite :

$$\int_a^b e^{-x^2/2} \, dx = \int_{\Im z = t} e^{-z^2/2} \, dz = \int e^{(x^2 - t^2)/2} e^{-itx} \, dx.$$

Donc  $\hat{\psi}(t) = \psi(t) \int \psi \, dx$ . On en déduit :

$$\int \hat{\psi}(t) \, dt = \left( \int \psi(x) \, dx \right)^2 = \left( \int e^{-x^2/2} \right)^2 = 2\pi.$$

Dès lors  $\psi(0) = 1$  et  $\int \hat{\psi} \, dx = 2\pi$ , qui donne bien la formule.

Dans le cas général  $n > 1$ , on prend  $\psi(x) = e^{-|x|^2/2} = \prod_{j=1}^n \psi_1(x_j)$ . Donc :

$$\hat{\psi}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \psi(x) \, dx = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2} \, dx = \int \prod_{j=1}^n e^{-ix_j \xi_j} \prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2} \, dx = \int \prod_{j=1}^n \left( e^{-ix_j \xi_j} e^{-x_j^2/2} \right) \, dx.$$

Par Fubini :

$$\hat{\psi}(\xi) = \prod_{j=1}^n \int e^{-ix_j \xi_j} e^{-x_j^2/2} \, dx = \prod_{j=1}^n \hat{\psi}_1(\xi_j).$$

On trouve alors :

$$\int \hat{\psi}(\xi) \, d\xi = \int \prod_{j=1}^n \hat{\psi}_j(\xi_j) \, d\xi = \prod_{j=1}^n \int \hat{\psi}_1(\xi_j) \, d\xi_j = (2\pi)^{-n},$$

où l'avant dernière égalité s'obtient en appliquant Fubini.

Puisque  $\hat{\psi}(0) = 1$ , on a bien (1.5). □

On définit une application transformée de Fourier  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} : u \mapsto \mathcal{F}u := \hat{u}$ .

**Proposition 1.12.**  $\mathcal{F}$  est une bijection linéaire.

*Proof.* Par la formule d'inversion,  $\mathcal{F}$  est injective : si  $\mathcal{F}u = 0$ , alors  $u = 0$ .

De plus,  $\mathcal{F}$  est surjective. Pour  $f \in \mathcal{S}$ , montrons qu'il existe  $u \in \mathcal{S}$  t.q.  $\mathcal{F}u = f$ . Prenons  $u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} f(\xi) d\xi$ . Alors :

$$\mathcal{F}f(x) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(\xi) d\xi = (2\pi)^n u(-x).$$

De plus :

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(x) dx = (2\pi)^n (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(x) dx = (2\pi)^n u(-\xi),$$

donc  $\hat{f} = \hat{u}$  pour tout  $x$ , et puisque  $\mathcal{F}$  est injective,  $f = \hat{u}$ . Donc  $\mathcal{F}$  est surjective, et donc surjective.

La linéarité est triviale :

$$\mathcal{F}(f + \lambda g)(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} (f + \lambda g)(x) dx = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx + \lambda \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} g(x) dx = (\hat{f} + \lambda \hat{g})(\xi).$$

□

En posant  $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} : u \mapsto \tilde{\mathcal{F}}u$  où  $\tilde{\mathcal{F}}u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} u(\xi) d\xi$ . Par un raisonnement similaire à la Proposition précédente, on trouve  $\tilde{\mathcal{F}}$  est une bijection linéaire. De plus  $\mathcal{F}^{-1} = \tilde{\mathcal{F}}$ .

De plus, puisque  $\mathcal{F}$  transforme des suites convergentes en suites convergentes sur  $\mathcal{S}$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}$  fait de même.

Cela veut dire que  $\mathcal{F}$  est un homéomorphisme linéaire de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}$  pour la topologie non définie ici.

**Proposition 1.13.** Pour  $u, v \in \mathcal{S}$  :

1.  $\int u \hat{v} = \int \hat{u} v$  ;
2.  $\int u \bar{v} = (2\pi)^{-n} \int \hat{u} \hat{\bar{v}}$ . Cette égalité est appelée identité de Parseval.

*Proof.* Le premier point se montre par la formule de la preuve du Théorème 1.11 pour  $u, \chi \in \mathcal{S}$  :

$$\int e^{i\langle x, \xi \rangle} \chi(\xi) \hat{u}(\xi) d\xi = \int u(x + y) \hat{\chi}(y) dy$$

en  $x = 0$ .

Le second point, prenons  $u, w \in \mathcal{S}$  et posons  $v := (2\pi)^{-n} \bar{\hat{w}}$ . Par le premier point :

$$\int \hat{u} v = \int u \hat{v} = \int u (2\pi)^{-n} \hat{\hat{w}}.$$

On peut voir que :

$$(2\pi)^{-n} \hat{\hat{w}}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \bar{\hat{w}}(x) dx = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{w}(x) dx = \overline{\hat{w}(\xi)}.$$

Dès lors :

$$\int \hat{u} (2\pi)^{-n} \bar{\hat{w}} = \int u \bar{w}.$$

□

**Corollaire 1.14** (Formule de Plancherel). Pour  $u \in \mathcal{S}$ , on a :

$$\int |u|^2 dx = (2\pi)^{-n} \int |\hat{u}|^2 d\xi \tag{1.6}$$



### 1.3 Discussion sur la définition de la transformée

On peut définir la transformée de Fourier de plusieurs manières, paramétrisé par  $a, b \in \mathbb{R}$  :

$$\mathcal{F}_{a,b}u(\xi) = a \int e^{-ib\langle x, \xi \rangle} u(x) dx.$$

La théorie reste la même à homothétie près puisque :

$$\mathcal{F}u(\xi) = \frac{1}{a} \mathcal{F}_{a,b}u(\xi/b).$$

$$(2\pi)^{-n} \int \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}}(\xi) d\xi = \frac{(2\pi)^{-n} b^n}{a^n} \int \mathcal{F}_{a,b}u(\eta) \overline{\mathcal{F}_{a,b}v(\eta)} d\eta.$$

Donc on peut choisir  $a = 1$  et  $b = 2\pi$  ou encore  $a = (2\pi)^{n/2}$  et  $b = 1$  afin de simplifier la formule de Parseval qui devient :

$$\int u \overline{v} = \int \mathcal{F}u \overline{\mathcal{F}v}.$$

Cependant le choix  $a = b = 1$  permet de ne pas avoir de terme  $b^k$  lors des dérivations sous le signe intégral.

### 1.4 Extension de la transformée à $L^1 \cap L^2$

**Proposition 1.15.** *Il existe une unique application linéaire continue  $\mathbb{F} : L^2 \rightarrow L^2$  tel que  $\mathbb{F}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}$  et :*

$$\int u \overline{v} = (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}u \overline{\mathbb{F}v} d\xi,$$

*i.e.  $\mathbb{F}$  préserve l'identité de Parseval.*

*Proof.* Admettons que  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Puisque  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dense dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Par cette densité, pour  $u \in \mathcal{S}$ , il existe  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^\mathbb{N}$  tel que  $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} u$ , et donc  $(u_k)$  est de Cauchy pour cette norme.  $(\hat{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est également de Cauchy car :

$$\|\hat{u}_k - \hat{u}_m\| = (2\pi)^{n/2} \|u_k - u_m\|.$$

Par cette complétude, il existe  $z \in \mathcal{S}$  t.q.  $\hat{u}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} z$ . On pose alors  $\mathbb{F}u := z$ . Montrons que  $z$  ne dépend pas de la suite  $(\hat{u}_k)$  choisie pour montrer que  $\mathbb{F}$  est bien définie.

Soit  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  t.q.  $v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} z$ . Alors  $v_k - u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} 0$ . Par Plancherel,  $\hat{v}_k - \hat{u}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} 0$ . Dès lors  $\hat{v}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} z$ .

Montrons alors que  $\mathbb{F}$  est linéaire.

Soient  $u, v \in L^2$ . Soient  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}, (v_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^\mathbb{N}$  telles que  $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} u$  et  $v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} v$ . Alors  $u_k + v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} u + v$ . Par linéarité de  $\mathcal{F}$ ,  $\hat{u}_k + \hat{v}_k = \widehat{u_k + v_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \mathbb{F}(u + v)$ .

Donc  $\hat{u}_k + \hat{v}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \mathbb{F}u + \mathbb{F}v$  et  $\hat{u}_k + \hat{v}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \mathbb{F}(u+v)$ . On en déduit  $\mathbb{F}u + \mathbb{F}v = \mathbb{F}(u+v)$ . Il est également trivial que pour  $\lambda \in \mathbb{R} : \mathbb{F}(\lambda u) = \lambda \mathbb{F}u$ .

Pour montrer que  $\mathbb{F}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}$ , prenons  $u \in \mathcal{S}$ , et la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  constante  $u_k = u$ . Par définition de  $\mathbb{F}$ , on a  $\mathbb{F}u = \hat{u}$  car  $\forall k \in \mathbb{N} : \hat{u}_k = \hat{u}$ , donc  $\hat{u}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \hat{u}$ .

Montrons finalement que  $\mathbb{F}$  vérifie Parseval.

Premier cas :  $u \in L^2$  et  $v \in \mathcal{S}$ . Il existe  $\mathcal{S}^{\mathbb{N}} \ni (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} u$ . Donc :

$$\int u \bar{v} = \int u_k \bar{v} + \int (u - u_k) \bar{v}.$$

Puisque :

$$\left| \int (u - u_k) \bar{v} \right| \leq \underbrace{\|u - u_k\|_{L^2}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0} \|v\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0,$$

on sait :

$$\int u_k \bar{v} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \int u \bar{v}.$$

Or  $u_k, v \in \mathcal{S}$ . Donc pour  $k \rightarrow +\infty$ , par Cauchy-Schwarz et par Parseval pour  $\mathcal{F}$  :

$$\int u \bar{v} = \int u_k \bar{v} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}u \bar{\mathbb{F}v}.$$

Dans le cas général  $u, v \in L^2$ , par le premier point pour  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  t.q.  $v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} v$  :

$$\int u \bar{v}_k = (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}u \bar{\mathbb{F}v}_k.$$

Or  $v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \mathbb{F}v$ . Par Cauchy-Schwarz, on a :

1.  $\int u \bar{v}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \int u \bar{v}$  ;
2. et  $\int \mathbb{F}u \bar{\mathbb{F}v}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \int \mathbb{F}u \bar{\mathbb{F}v}$ .

L'identité de Parseval est donc bien vérifiée pour  $\mathbb{F}$ . Il reste à vérifier que  $\mathbb{F}$  est continue et qu'elle est unique.

La continuité découle de Parseval :

$$\|u\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2} \|\mathbb{F}u\|_{L^2},$$

donc pour  $\varepsilon > 0$ , pour  $\delta = (2\pi)^{-n/2}\varepsilon$ , on a que si  $\|u - v\|_{L^2} < \delta$ , alors  $\|\mathbb{F}u - \mathbb{F}v\|_{L^2} < \varepsilon$ .

Si il existe  $\mathbb{F}_1 : L^2 \rightarrow L^2$  continue et linéaire telle que  $\mathbb{F}_1|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}$ , alors par densité, pour  $u \in L^2$ , il existe  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$  t.q.  $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u$ , et donc, par continuité :

$$\underbrace{\mathbb{F}(u_k)}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mathbb{F}(u)} = \underbrace{\mathbb{F}_1(u_k)}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mathbb{F}_1(u)}.$$

Donc puisque deux application continues qui coïncident sur une sous-ensemble dense coïncident partout, on a bien que  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1$ .  $\square$

De la même manière,  $\tilde{\mathcal{F}}$  se prolonge sur  $L^2$  en  $\tilde{\mathbb{F}}$

**Proposition 1.16.**  $\mathbb{F} \circ \tilde{\mathbb{F}} = \text{Id}_{L^2} = \tilde{\mathbb{F}} \circ \mathbb{F}$ .

*Proof.* Ceci vient directement de la même propriété sur  $\mathcal{F}$  et  $\tilde{\mathbb{F}}$ . Soit  $u \in L^2$  et soit  $\mathcal{S}^{\mathbb{N}} \ni (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} u$ .

On sait :

$$\mathcal{S} \ni \tilde{\mathcal{F}}(u_k) = \tilde{\mathbb{F}}(u_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \tilde{\mathbb{F}}(u)$$

par continuité de  $\tilde{\mathbb{F}}$ . Par continuité de  $\mathbb{F}$ , on a :

$$\mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}}(u_k) = \mathbb{F} \circ \tilde{\mathbb{F}}(u_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \mathbb{F} \circ \tilde{\mathbb{F}}(u).$$

Or  $\mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}}(u_k) = u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} u$ . Par unicité de la limite, on a  $\mathbb{F} \circ \tilde{\mathbb{F}}(u)$ . L'autre égalité se démontre de la même manière.  $\square$

À ce stade, il est légitime de se demander si les définitions que l'on a sur  $L^1$  (la formule intégrale définie depuis  $\mathcal{S}$ ) et sur  $L^2$  (la définition de  $\mathbb{F}$ ) sont compatibles, i.e. si pour  $u \in L^1 \cap L^2$  on a bien  $\hat{u} = \mathbb{F}u$ . Cette égalité tient bien (démonstration à venir).

## 1.5 Exemple d'application de la théorie de Fourier

Pour  $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$  le Laplacien sur  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in \mathcal{S}$ , soit la PDE suivante :

$$(1 + \sum_{j=1}^n D_j^2)u = u - \Delta u = f, \quad (1.7)$$

ou plus généralement, pour des  $a_\alpha \in \mathbb{C}$  :

$$\underbrace{\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha}_{P(D) \text{ polynôme}} u = f, \quad (1.8)$$

dans le cas du Laplacien, ce polynôme est  $P(\xi) = 1 + |\xi|^2$ .

Sous l'hypothèse  $\inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} |P(\xi)| \gtrsim 0$ , trouvons  $u$  t.q.  $P(D)u = f$ .

Formellement :

$$\begin{aligned} \widehat{P(D)u}(\xi) &= \hat{f}(\xi) \\ P(\xi)\hat{u}(\xi) &= \hat{f}(\xi) \\ \hat{u}(\xi) &= \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} \\ u(x) &= (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Plus rigoureusement, puisque  $f \in \mathcal{S}$ , on sait  $\hat{f} \in \mathcal{S}$ . De plus,  $P$  est borné par dessous. Donc  $|\hat{f}/P| \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N}$ , et du coup la fonction sous l'intégrale ( $\xi \mapsto e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)}$ ) est  $L^1$ , et cette intégrale est bien définie pour  $N > n$ .

De plus, puisque la dérivation selon  $x$  sur  $u$  fait juste descendre du  $\xi$  de l'exponentielle, par récurrence avec le théorème de convergence dominée et par la borne supérieure ci-dessus, on trouve que  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . On peut alors vérifier que la fonction  $u$  ainsi trouvée est bien une solution de (1.8) :

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha}_{=P(\xi)} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} d\xi = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi = f(x).$$

## Chapter 2

# Espaces de Hilbert

**Définition 2.1.** Soit  $H$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Un produit scalaire (forme hermitienne définie positive) sur  $H$  est une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  t.q. :

- (i) à  $y \in \mathbb{C}$  fixé :  $x \mapsto \langle x, y \rangle$  est une application linéaire de  $H$  dans  $\mathbb{C}$  ;
- (ii) pour  $x, y \in \mathbb{C}$  :  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  ;
- (iii) pour  $x \in \mathbb{C}$  :  $\langle x, x \rangle \geq 0$  où  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ .

Sur un produit scalaire, on peut définir une norme  $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$ .

*Remarque.* Une forme hermitienne définie positive est donc anti-linéaire pour le 2e paramètre :  $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$ .

**Proposition 2.2.**  $\|\cdot\| : H \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une norme.

**Proposition 2.3.**  $\|\cdot\|$  vérifie Cauchy-Schwarz, i.e. :

$$\forall x, y \in H : |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

*Proof.* Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  t.q.  $|\alpha| = 1$  et  $\alpha \langle y, x \rangle \in \mathbb{R}^+$  (i.e.  $\alpha \langle y, x \rangle = |\langle x, y \rangle|$ ). Soit  $r \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x - r\alpha y, x - r\alpha y \rangle = \langle x, x \rangle - r\alpha \langle y, x \rangle - r\overline{\alpha} \langle x, y \rangle + r^2 \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - r \underbrace{\alpha \langle y, x \rangle}_{=|\langle y, x \rangle|} - r \underbrace{\overline{\alpha} \langle x, y \rangle}_{=|\langle y, x \rangle|} + r^2 \underbrace{\langle y, y \rangle}_{=|\alpha|=1} = A - 2Br + Cr^2, \end{aligned}$$

pour  $A = \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$ ,  $B = \alpha \langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle| \in \mathbb{R}^+$ ,  $C = \langle y, y \rangle \in \mathbb{R}^+$ .

Si  $C = 0$ , alors  $B = 0$ , et donc  $\langle y, x \rangle = 0$  et Cauchy-Schwarz est vérifié.

Si  $C \geq 0$ , alors pour  $r = B/C$  :  $0 \leq A - 2Br + Cr^2 = \frac{AC - B^2}{C}$ , donc  $B^2 \leq AC$ , donc Cauchy-Schwarz est vérifié.  $\square$

**Proposition 2.4.**  $\|\cdot\|$  vérifie l'inégalité triangulaire, i.e. :

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

*Proof.*  $\|x + y\|^2 = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ .  $\square$

On a donc  $(H, \|\cdot\|)$  un e.v. normé, depuis lequel on peut alors définir une distance :  $d(x, y) := \|x - y\|$ .

**Définition 2.5.** Si  $H$  est complet pour  $d$ , on dit que  $H$  est un espace de Hilbert.

Quelques exemples d'espaces de Hilbert :

- (0)  $\mathbb{C}^n$  pour  $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$  ;
- (1) Pour  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espace de mesure,  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  muni du produit scalaire  $\langle f, g \rangle := \int f \overline{g} d\mu$  ;
- (2) Pour  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$  comme espace de mesure, on a l'équivalent dénombrable de l'exemple (0) :

$$\langle f, g \rangle_{\ell^2} := \int f \overline{g} d\# = \sum_{k \geq 1} f_k \overline{g_k}.$$

On note  $\ell^2(\mathbb{N}) := L^2(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ .

Un dernière exemple bien moins trivial : les espaces de Sobolev.

**Définition 2.6.** Soit  $s \geq 0$  un paramètre, on définit l'espace de Sobolev d'ordre  $s$  sur  $\mathbb{R}^n$  par :

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } (2\pi)^{-n} \int |\mathbb{F}u(\xi)|^2 (1+|\xi|)^s d\xi < +\infty \right\}. \quad (2.1)$$

On y définit le produit scalaire suivante pour  $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$  :

$$\langle u, v \rangle_s := (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}u \overline{\mathbb{F}v} (1+|\xi|)^s d\xi. \quad (2.2)$$

*Remarque.* Remarquons que  $u \in H^s \iff \xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{s/2} \mathbb{F}u(\xi)$  est dans  $L^2$ .

**Proposition 2.7.**  $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_s$  est un produit scalaire.

*Proof.* À  $v$  fixé,  $u \mapsto \langle u, v \rangle_s$  est linéaire par linéarité de  $\mathbb{F}$  et par linéarité de l'intégrale.

Soient  $u, v \in H^s$ .

$$\langle u, v \rangle_s = (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}u \overline{\mathbb{F}v} \underbrace{(1+|\xi|)^s}_{\in \mathbb{R}^+} d\xi = (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}v \overline{\mathbb{F}u} (1+|\xi|)^s d\xi = \overline{\langle v, u \rangle_s}.$$

Finalement, pour  $u \in H^s$  :

$$\langle u, u \rangle_s = (2\pi)^{-n} \int \underbrace{|\mathbb{F}u|^2}_{\geq 0} \underbrace{(1+|\xi|)^s}_{\geq 0} d\xi \geq 0,$$

et de plus, il est évident que  $\langle u, u \rangle_s = 0 \iff u = 0$  puisque  $\hat{u} = 0 \iff u = 0$ . □

Par linéarité de Fourier,  $H^s(\mathbb{R}^n)$  est un espace vectoriel, et de plus il est normé par le produit scalaire défini ci-dessus. Montrons alors que c'est un espace de Hilbert.

Soit  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in H^s$  une suite de Cauchy.  $(1+|\xi|^2)^{s/2} \mathbb{F}u_k$  est de Cauchy dans  $L^2$ , qui est complet. Donc il en existe une limite  $V \in L^2$  t.q.  $(1+|\xi|^2)^{s/2} \mathbb{F}u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} V$ . Il existe  $u \in L^2$  t.q.  $(1+|\xi|^2)^{s/2} \mathbb{F}u = V$  car  $(1+|\xi|^2)^{-s/2} V \in L^2$ , et  $\mathbb{F}$  est une bijection sur  $L^2$ . De plus,  $u \in H^s$  car  $V = (1+|\xi|^2)^{s/2} \mathbb{F}u \in L^2$ . Puisque  $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{H^s} u$ , on a que  $H^s$  est complet.

Pour un contre-exemple, on a  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  muni du produit scalaire  $\langle f, g \rangle := \int f \overline{g} dx$  n'est pas un Hilbert. En effet, pour  $f \in L^2 \setminus C_0^\infty$ , par densité de  $C_0^\infty$  dans  $L^2$ ,  $\exists (f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C_0^\infty$  t.q.  $f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} f$ . De plus,  $(f_k)$

est de Cauchy dans  $C_0^\infty$ . Par l'absurde, si  $\exists g \in C_0^\infty$  t.q.  $f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} g$ , par unicité de la limite,  $g = f$ , or  $f \notin C_0^\infty$ .

À partir d'ici,  $H$  désigne un espace de Hilbert quelconque.

**Définition 2.8.** Soit  $y \in H$ . On définit :

$$\begin{cases} f_1 : x \mapsto \langle x, y \rangle \\ f_2 : x \mapsto \langle y, x \rangle \\ f_3 : x \mapsto \|x\| \end{cases}$$

**Proposition 2.9.**  $f_i$  est continue pour  $i = 1, 2, 3$ .

*Proof.* 1.  $|f_1(x_1) - f_1(x_2)| = |\langle x_1 - x_2, y \rangle| \leq \|x_1 - x_2\| \|y\| \xrightarrow[x_1 \rightarrow x_2]{} 0$ . ( $f_1$  est même uniformément continue et Lipschitzienne).

2. Idem pour  $f_2$ , à permutation près.

3. La continuité vient directement de  $|\|x\| - \|z\|| \leq \|x - z\|$ .

□

**Proposition 2.10.** Pour  $F \leq H$ ,  $\overline{F} \leq H$ .

*Proof.* Pour  $x, y \in \overline{F}$ , il existe  $(x_k), (y_k) \in F^\mathbb{N}$  t.q.  $x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x$  et  $y_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y$ .

Donc  $F \ni x_k + y_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x + y$ . De plus, pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\underbrace{\lambda x_k}_{\in F} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \lambda x \in \overline{F}$ .

□

*Remarque.* Contrairement aux e.v. de dimension finie, en dimension infinie, il est possible d'avoir un sous-e.v. strict dense (e.g.  $C_0^\infty$  dans  $L^2$ ).

**Proposition 2.11.**  $F := \{f \in L^2 \text{ t.q. } f = 0 \text{ sur } x_n > 0\}$  est un e.v. fermé dans  $L^2$ .

*Proof.* Soit  $g \in \overline{F}$ . Il existe  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in F^\mathbb{N}$  t.q.  $f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} g$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\int_{x_n > 0} |g|^2 dx = \int_{x_n > 0} |g - f_k|^2 dx \leq \|g - f_k\|_{L^2}^2 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

car  $f_k \in F$  et  $f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} g$ . Dès lors  $\int_{x_n > 0} |g|^2 dx = 0$ , i.e.  $g \in F$ . Donc  $\overline{F} = F$ .

□

## 2.1 Orthogonalité

**Définition 2.12.** Pour  $x, y \in H$ ,  $x$  et  $y$  sont *orthogonaux*, noté  $x \perp y$  lorsque  $\langle x, y \rangle = 0$ .

Pour  $x \in H$ , on définit  $x^\perp := \{y \in H \text{ t.q. } \langle x, y \rangle = 0\}$ , et pour  $M \subset H$ , on définit  $M^\perp := \{y \in H \text{ t.q. } \forall x \in M : \langle x, y \rangle = 0\} = \bigcap_{x \in M} x^\perp$ .

**Proposition 2.13.** Pour  $x \in H$ ,  $x^\perp \leq H$ , et  $x^\perp$  est fermé.

*Proof.* À  $x \in H$  fixé, on remarque que  $x^\perp = f_1^{-1}(\{0\})$ , or  $f_2$  est continue. Donc  $x^\perp$  est fermé. Vérifier que  $x^\perp$  est un sous-e.v. est trivial.

□

**Corollaire 2.14.** Pour  $M \leq H$ ,  $M^\perp$  est un sous-e.v. fermé de  $H$ .

Ce résultat découle directement du fait que  $M^\perp$  est une intersection d'e.v. fermés.

**Définition 2.15.**  $E \subseteq H$  est dit *convexe* lorsque  $\forall x, y \in E : \forall t \in [0, 1] : (1-t)x + ty \in E$ .

*Exemple 2.1.*

- tout sous-e.v. de  $H$  est convexe ;
- toute boule (ouverte ou fermée) dans  $H$  est convexe ;
- pour  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, u \in L^2(\Omega), E = \{v \in L^2 \text{ t.q. } u = v \text{ sur } \Omega\}$  est convexe.

Montrons également que  $E$  est fermé dans  $L^2$ . Soit  $f \in \overline{E}$ . Il existe  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E^\mathbb{N}$  t.q.  $f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} f$ .

$$\int_{\Omega} |u - f|^2 dx = \int_{\Omega} |f_k - f|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f|^2 dx \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

**Théorème 2.16.** Soit  $E \neq \emptyset$  convexe fermé dans  $H$ . Alors  $\exists ! x \in E$  t.q.  $\|x\| = \min_{z \in E} \|z\| = \inf_{z \in E} \|z\| =: \delta$ .

*Proof.* **unicité :** soient  $x, y \in E$  t.q.  $\|x\| = \|y\| = \delta$ . Par la formule du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Par convexité de  $E$ ,  $\frac{1}{2}(x + y) \in E$ . Donc  $\|\frac{1}{2}(x + y)\| \geq \delta$ . On trouve alors :

$$\|x - y\|^2 \leq 2(\underbrace{\|x\|^2 + \|y\|^2}_{=2\delta^2}) - 4\delta^2 = 0.$$

On en déduit  $\|x - y\| = 0$ , i.e.  $x = y$ .

**existence :** Soit  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E^\mathbb{N}$  t.q.  $\|y_k\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \delta$  qui existe par définition de l'infimum. Par la règle du parallélogramme :

$$\|y_k - y_m\|^2 \leq 2(\underbrace{\|y_k\|^2 + \|y_m\|^2}_{\xrightarrow[k, m \rightarrow +\infty]{} 2\delta^2}) - 4\delta^2 \xrightarrow[k, m \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Donc  $(y_k)$  est de Cauchy. Par complétude de  $H$ ,  $\exists x_0 \in H$  t.q.  $y_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x_0$ , et par fermeture de  $E$ ,  $x_0 \in E$ .

De plus, par continuité de la norme,  $\|y_k\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \|x_0\|$ , et par unicité de la limite,  $\|x_0\| = \delta$ .  $\square$

*Exemple 2.2.* Si  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  est un ouvert,  $u \in L^2(\Omega)$ ,  $E = \{v \in L^2 \text{ t.q. } u = v \text{ sur } \Omega\}$  est un convexe fermé, donc par ce théorème, il existe un unique  $u^* \in E$  qui minimise la norme :  $u^* = u$  sur  $\Omega$  et  $u^* = 0$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ .

**Théorème 2.17** (Décomposition orthogonale). Soit  $M \leq H$  fermé. Alors :

1.  $\forall x \in H : \exists ! (y, z) \in M \times M^\perp$  t.q.  $x = y + z$  ;
2. ces valeurs  $y, z$  sont les points les plus proches de  $x$  dans  $M$  et  $M^\perp$  respectivement ;
3. Les applications  $P : x \mapsto y$  et  $Q : x \mapsto z$  sont linéaires ;
4.  $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$  (et donc  $P, Q$  sont continues) ;
5.  $P$  et  $Q$  sont les projections orthogonales de  $x$  sur  $M$  et  $M^\perp$  respectivement.

*Proof.*



1. **unicité** : si  $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$ , pour  $y_1, y_2 \in M$  et  $z_1, z_2 \in M^\perp$ , on a  $\underbrace{y_1 - y_2}_{\in M} = \underbrace{z_2 - z_1}_{\in M^\perp}$ . Or

$M \cap M^\perp = \{0\}$ . Donc  $y_1 = y_2$  et  $z_1 = z_2$ .

**existence** :  $x + M$  est convexe (trivial par le fait que  $M \leq H$ ). Montrons que  $x + M$  est fermé. Soit  $u \in \overline{x + M}$ . Il existe  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (x + M)^\mathbb{N}$  t.q.  $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u$ .  $\forall k \in \mathbb{N} : x + M \ni u_k = x + y_k$ . On en déduit  $y_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u - x$ . Par fermeture de  $M$ , on a  $u - x \in M$ , et donc  $u \in x + M$  (i.e.  $x + M$  est fermé).

Soit  $z \in x + M$  l'élément qui minimise la norme. On pose  $y := x - z \in M$ . Montrons alors que  $z \in x + M$ . Soit  $w \in M$  ; WLOG, supposons  $\|w\| = 1$ . Puisque  $z \in x + M$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{C} : z - \alpha w \in x + M$ . Donc :

$$\|z\|^2 \leq \|z - \alpha w\|^2 = \|z\|^2 - 2\Re \alpha \langle w, z \rangle + |\alpha|^2.$$

$0 = 2\Re \alpha \langle w, z \rangle - |\alpha|^2$ . En particulier, pour  $\alpha = \langle z, w \rangle$  :  $0 = \|\langle z, w \rangle\|^2$ , donc  $\langle z, w \rangle = 0$ . Dès lors  $z \in M^\perp$ .

2. Soit  $Y \in M$ . Montrons que  $\|x - Y\| \geq \|x - y\| = \|z\|$ . Par Pythagore :

$$\|x - Y\|^2 = \|y + z - Y\|^2 = \|(y - Y) + z\|^2 = \|y - Y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2.$$

Idem pour  $Z \in M^\perp$  :  $\|x - Z\| \geq \|x - z\| = y$ .

3. Soient  $x_1, x_2 \in H, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ . On a  $\alpha_1 x_1 = \alpha_1 P x_1 + \alpha_1 Q x_1$ , et  $\alpha_2 x_2 = \alpha_2 P x_2 + \alpha_2 Q x_2$ . Donc :

$$P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + Q(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 P x_1 + \alpha_1 Q x_1 + \alpha_2 P x_2 + \alpha_2 Q x_2,$$

et donc :

$$\underbrace{P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \alpha_1 P x_1 - \alpha_2 P x_2}_{\in M} = \underbrace{\alpha_1 Q x_1 + \alpha_2 Q x_2 - Q(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}_{\in M^\perp}.$$

Or  $M \cap M^\perp = \{0\}$ , donc  $P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 P x_1 - \alpha_2 P x_2$ , et  $\alpha_1 Q x_1 + \alpha_2 Q x_2 = Q(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$ .

4. Par Pythagore  $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ . Donc  $\|Px\| \leq \|x\|$  et  $\|Qx\| \leq \|x\|$ , i.e.  $P$  et  $Q$  sont Lipschitziennes, donc en particulier continues.

□

**Corollaire 2.18.** Si  $M \leq H$ , avec  $M \neq H$ , il existe  $y \in H \setminus \{0\}$  t.q.  $y \perp M$ .

*Proof.* Pour  $x \in H \setminus M$ ,  $x = Px + Qx$ , où  $Qx \neq 0$ , et  $Qx \perp M$ .

□

**Corollaire 2.19.** Si  $M \leq H$  est fermé, alors  $M = M^{\perp\perp}$ .

*Proof.* La première inclusion est triviale : si  $x \in M$ , alors  $x \perp M^\perp$ .

La seconde inclusion se démontre comme suit : soit  $x \in M^{\perp\perp} \subseteq H$ .  $x = y + z$  où  $y \in M$  et  $z \in M^\perp$ . Or  $0 = \langle x, z \rangle = \langle y + z, z \rangle = \langle y, z \rangle + \|z\|^2$ , et  $\langle y, z \rangle = 0$  par définition d'orthogonalité. Donc  $\|z\| = 0$  et  $z = 0$ , i.e.  $x = y \in M$ .

□

**Lemme 2.20** (Lemme de Riesz). Soit  $L : H \rightarrow \mathbb{C}$ , une forme linéaire continue. Alors  $\exists ! y \in H$  t.q.  $L = \langle \cdot, y \rangle$ .

*Proof.* **unicité :** pour  $y_1, y_2 \in H$  t.q.  $\forall x \in H : \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$ , on a  $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0$ , donc  $y_1 - y_2 \in H^\perp = \{0\}$ , i.e.  $y_1 = y_2$ .

**existence :** si  $L \equiv 0$ , alors  $y = 0$ . Supposons alors que  $L$  n'est pas identiquement nulle.  $\text{Ker } L \subsetneq H$  et est fermé par continuité de  $L$ . Dès lors, il existe  $z \in H$ ,  $z \neq 0$  t.q.  $z \perp \text{Ker } L$ . WLOG, supposons  $\|z\| = 1$ . Posons  $y := (\overline{Lz})z$  et  $u := (Lx)z - (Lz)x$ . Calculons :

$$Lu = (Lx)Lz - (Lz)Lx = 0,$$

donc  $u \in \text{Ker } L$ , et donc  $0 = \langle u, z \rangle = (Lx) \langle z, z \rangle - (Lz) \langle x, z \rangle = Lx - (Lz) \langle x, z \rangle$ . Dès lors,  $Lx = (Lz) \langle x, z \rangle = \langle x, y \rangle$ .  $\square$

## 2.2 Systèmes orthonormaux

**Définition 2.21.** Pour  $V$  un e.v. et  $S \subseteq V$ , on note  $\text{Vect } S = \text{Span } S$  l'e.v. engendré par  $S$ .

$(e_\alpha)_{\alpha \in A} \subset V$  est appelé *orthonormal* lorsque  $\forall \alpha, \beta \in A : \langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha, \beta}$ .

Pour  $x \in H$ , on définit  $\hat{x}(\alpha) := \langle x, e_\alpha \rangle$ .

Les  $\hat{x}(\alpha)$  sont les coefficients de Fourier relativement au système  $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ .

*Exemple 2.3.* Sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , les  $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}}$  sont les  $e_\alpha : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto \frac{e^{i\alpha t}}{\sqrt{2\pi}}$ .

**Théorème 2.22.** Pour  $H$  un espace de Hilbert et  $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$  un système orthonormal,  $F \subset A$  fini, et  $M_F := \text{Vect } \{e_\alpha\}_{\alpha \in F}$ , on a :

1. si  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$  est nulle sur  $A \setminus F$ , pour  $y = \sum_{\alpha \in F} \varphi(\alpha) e_\alpha$ , alors :

$$\forall \alpha \in A : \varphi(\alpha) = \hat{y}(\alpha).$$

$$\text{De plus, } \|y\|^2 = \sum_{\alpha \in F} |\varphi(\alpha)|^2.$$

2. Si  $x \in H$ ,  $s_F(x) := \sum_{\alpha \in F} \hat{x}(\alpha) e_\alpha \in M_F$ . Si  $s \in M_F \setminus \{s_F(x)\}$ , alors :

$$\|x - s_F(x)\| \leq \|x - s\|.$$

$$\text{De plus : } \sum_{\alpha \in F} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2 \text{ (inégalité de Bessel).}$$

*Proof.*

1.  $\hat{y}(\alpha) = \langle y, e_\alpha \rangle = \sum_{\beta \in F} \varphi(\beta) \langle e_\beta, e_\alpha \rangle = \varphi(\alpha)$  et :

$$\|y\|^2 = \left\| \sum_{\beta \in F} \varphi(\beta) e_\beta \right\|^2 \stackrel{\text{Pythagore}}{=} \sum_{\beta \in F} |\varphi(\beta)|^2 \|e_\beta\|^2 = \sum_{\beta \in F} |\varphi(\beta)|^2.$$

2. Soit  $s \in M_F$ .  $\forall \alpha \in F : x - s_F(x) \perp e_\alpha$  et  $x - s_F(x) \perp s_F(x) - s \in M_F$ . En effet :

$$\langle x - s_F(x), e_\alpha \rangle = \langle x, e_\alpha \rangle - \langle s_F(x), e_\alpha \rangle = \hat{x}(\alpha) - \hat{x}(\alpha) = 0.$$

Dès lors :

$$x - s = (x - s_F(x)) + (s_F(x) - s),$$

et donc, par Pythagore :

$$\|x - s\|^2 = \|x - s_F(x)\|^2 + \|s_F(x) - s\|^2. \quad (2.3)$$

Cette norme est minimisée (strictement) en  $s = s_F(x)$  et donc :

$$\|x - s_F(x)\| \leq \|x - s\|$$

si  $s \neq s_F(x)$ . Ensuite :

$$\|s_F(x)\|^2 \leq \|s_F(x)\|^2 + \|x - s_F(x)\|^2.$$

Par l'équation 2.3 : si  $s = 0$  :

$$\|s_F(x)\|^2 \leq \|s_F(x)\|^2 \leq \|s_F(x)\|^2 + \|x - s_F(x)\|^2 = \|x\|^2.$$

Or :

$$\|s_F(x)\|^2 = \sum_{\alpha \in F} |\hat{x}(\alpha)|^2.$$

Dès lors  $\|s_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ .

□

*Remarque.* Sur  $A$ , on a un espace mesuré canonique :  $(A, \mathcal{P}(A), \#)$  pour lequel on adopte les notations :

$$\forall B \in \mathcal{P}(A) : \int_B \varphi \, d\# =: \sum_{\alpha \in B} \varphi(\alpha).$$

Remarquons également que par définition de l'intégrale, si  $\varphi : A \rightarrow [0, +\infty]$  :

$$\sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha) = \sup_{\substack{B \subset A \\ |B| \leq +\infty}} \sum_{\alpha \in B} \varphi(\alpha).$$

Et si  $\varphi \in \ell^1(A)$  et  $\varphi \geq 0$ , alors pour  $A_k = \{\varphi \geq k^{-1}\}$  ( $k \geq 1$ ), on a  $|A_k| \leq +\infty$  puisque  $\varphi \in \ell^1(A)$ . Or  $\bigcup_{k \geq 1} A_k = \{\varphi \geq 0\}$ , et donc  $\{\varphi \neq 0\}$  est au plus dénombrable.

Dans le cas général, pour  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ , alors  $(\Re \varphi)^\pm$  et  $(\Im \varphi)^\pm$  sont non-nulles sur un ensemble au plus dénombrable, et donc  $\{\varphi \neq 0\}$  est au plus dénombrable.

**Lemme 2.23.** *Pour  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré, l'ensemble des fonctions simples mesurables nulles hors d'un ensemble de mesure finie est dense dans  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  pour  $p \in [1, +\infty)$ .*

**Lemme 2.24.** *Soient  $X$  un espace métrique complet,  $Y$  un espace métrique, et  $X_0 \subset X$ , un sous-ensemble dense. Si  $f \in C^0(X, Y)$  telle que  $f|_{X_0}$  une isométrie et  $f(X_0)$  est dense dans  $Y$ , alors  $f$  est surjective et est une isométrie.*

*Proof.* Fixons  $x, y \in X$ . Il existe  $(x_k)_{k \geq 0}, (y_k)_{k \geq 0} \in X_0^{\mathbb{N}}$  telles que  $x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x$  et  $y_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y$ . Pour  $k \geq 0$  :

$$d(x_k, y_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} d(x, y)$$

car la distance est continue sur un espace métrique. De plus :

$$d(x_k, y_k) = d(f(x_k), f(y_k)) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} d(f(x), f(y)),$$

à nouveau par continuité de la métrique, et par continuité de  $f$ . Donc par unicité de la limite, on a  $d(x, y) = d(f(x), f(y))$ , et donc  $f$  est une isométrie.

Il reste à montrer que  $f$  est surjective. Soit  $y \in Y$ .  $f(X_0)$  est dense dans  $Y$ , et donc par continuité de  $f$ , on sait :  $\exists (x_k)_{k \geq 0} \in X_0^{\mathbb{N}}$  telle que  $f(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y$ .  $(f(x_k))_k$  est de Cauchy dans  $Y$ , et puisque  $f$  est une isométrie,  $(x_k)_k$  est de Cauchy dans  $X$ . Par complétude, on sait que  $\exists x \in X$  t.q.  $x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x$ .

Finalement, par continuité de  $f : f(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} f(x)$ , et par construction  $f(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y$ . Par unicité de la limite dans les espaces métriques, on a  $f(x) = y$ , et donc  $y$  admet une préimage par  $f$ .  $\square$

**Théorème 2.25.** Soit  $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ , un système orthonormal dans  $H$ . Soit  $P = \text{Span}\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ . Alors :

1.  $\forall x \in H : \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$  (inégalité de Bessel généralisée) ;
2.  $f : H \rightarrow \ell^2(A) : x \mapsto \hat{x}$  est linéaire, continue, et surjective ;
3.  $f|_{\overline{P}}$  est une isométrie surjective  $\overline{P} \rightarrow \ell^2(A)$ .

*Proof.*

1. Pour tout  $F \subset A$  fini, on a :

$$\sum_{\alpha \in F} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Or par la remarque précédente :

$$\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \sup_{\substack{B \subset A \\ |B| \leq +\infty}} \sum_{\alpha \in B} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$$

par passage au supremum (à la limite) et par l'inégalité de Bessel finie.

2. Soit  $x \in H$ . Puisque  $\|x\|^2 \leq +\infty$ , par l'inégalité de Bessel, on sait  $\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq +\infty$ , i.e.  $\hat{x} \in \ell^2(A)$ .  
 $f$  est linéaire par linéarité de  $x \mapsto \langle x, e_\alpha \rangle$  pour tout  $\alpha \in A$ .  
 $f$  est continue car Lipschitzienne :

$$\|f(x) - f(y)\|_{\ell^2(A)}^2 = \sum_{\alpha \in A} |\widehat{x - y}(\alpha)|^2 \leq \|x - y\|_H^2.$$

La surjectivité vient du point 3 : si  $f|_{\overline{P}}$  est surjective, alors en particulier  $f$  est surjective.

3. Pour  $X = \overline{P}$ ,  $X_0 = P$ ,  $Y = \ell^2(A)$ , remarquons que :

$$\underbrace{\left\{ \chi \in \ell^2(A) \text{ t.q. } \chi(\alpha) = 0 \text{ si } \alpha \notin F \subset A \text{ fini} \right\}}_{\text{dense dans } \ell^2(A)} \subset f(P).$$

De plus  $f|_P$  est une isométrie. En effet, pour  $x \in P$ , on sait qu'il existe  $F \subset A$  fini et  $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}$  ( $\alpha \in F$ ) tels que  $x = \sum_{\alpha \in F} \lambda_\alpha e_\alpha$ . Dès lors :

$$\|f(x)\|_{\ell^2(A)}^2 = \|x\|_{\ell^2(A)}^2 = \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \sum_{\alpha \in F} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \sum_{\alpha \in A} \left| \sum_{\beta \in F} \lambda_\beta \langle e_\beta, e_\alpha \rangle \right|^2 = \sum_{\alpha \in F} |\lambda_\alpha|^2,$$

et :

$$\|x\|_H^2 = \langle x, x \rangle_H = \left\langle \sum_{\alpha \in F} \lambda_\alpha e_\alpha, \sum_{\beta \in F} \lambda_\beta e_\beta \right\rangle = \sum_{\alpha \in F} \sum_{\beta \in F} \lambda_\alpha \overline{\lambda_\beta} \langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \sum_{\alpha \in F} |\lambda_\alpha|^2.$$

Finalement, puisque  $\overline{P}$  est complet (car sous-ensemble fermé de  $H$ ), on peut ensuite appliquer le lemme 2.24 qui affirme que  $f|_{\overline{P}}$  est une isométrie surjective sur  $Y$ .

□

**Définition 2.26.** Un système orthonormal maximal (SOM) est un système orthonormal qui est maximal au sens de l'inclusion.

**Théorème 2.27.** Soit  $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$  un système orthonormal dans  $H$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $(e_\alpha)_\alpha$  est un SOM.
2.  $M := \text{Span}\{e_\alpha\}_\alpha$  est dense dans  $H$ .
3.  $\forall x \in H : \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \|x\|^2$ .
4.  $\forall x, y \in H : \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha) \overline{\hat{y}(\alpha)} = \langle x, y \rangle$  (Identité de Parseval).
5.  $\forall x \in H : \forall \varepsilon > 0 : \exists A_0 \subset A$  fini tel que  $\forall A_1 \supset A_0$  : si  $A_1$  est fini, alors  $\left\| x - \sum_{\alpha \in A_1} \hat{x}(\alpha) e_\alpha \right\| \leq \varepsilon$ .

*Proof.*

1  $\Rightarrow$  2 Par l'absurde, supposons que  $M \subsetneq A$ . Alors il existe  $y \in A \setminus \{0\}$  tel que  $y \perp M$  et donc le système n'est pas maximal car on peut lui ajouter  $\frac{y}{\|y\|_H}$ .

2  $\Rightarrow$  3 Par le Théorème 2.25 (point 3), on sait que  $\overline{M} \rightarrow \ell^2(A) : x \mapsto \hat{x}$  est une isométrie, ce qui revient à dire que si  $x \in \overline{M}$ , alors l'inégalité de Bessel est une égalité, i.e. :

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2.$$

3  $\Rightarrow$  4 On veut montrer que  $\|\cdot\|_{\ell^2(A)} = \|\cdot\|_H \Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2(A)} = \langle \cdot, \cdot \rangle_H$ . Dans  $\mathcal{H}$ , un espace de Hilbert quelconque (e.g.  $\mathcal{H} = H$  ou  $\mathcal{H} = \ell^2(A)$ ), on a :

$$4 \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} = \|x + y\|_{\mathcal{H}}^2 - \|x - y\|_{\mathcal{H}}^2 + i\|x + iy\|_{\mathcal{H}}^2 - i\|x - iy\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Or par hypothèse,  $\|\cdot\|_H = \|\cdot\|_{\ell^2(A)}$ . Donc :

$$\begin{aligned} 4 \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_{\ell^2(A)} &= \|\hat{x} + \hat{y}\|_{\ell^2(A)}^2 - \|\hat{x} - \hat{y}\|_{\ell^2(A)}^2 + i\|\hat{x} + i\hat{y}\|_{\ell^2(A)}^2 - i\|\hat{x} - i\hat{y}\|_{\ell^2(A)}^2 \\ &= \|x + y\|_H^2 - \|x - y\|_H^2 + i\|x + iy\|_H^2 - i\|x - iy\|_H^2 = 4 \langle x, y \rangle_H. \end{aligned}$$

4  $\Rightarrow$  1 Par l'absurde, supposons qu'il existe  $u \neq 0$  tel que  $\forall \alpha \in A : u \perp e_\alpha$ . Alors  $\forall \alpha \in A : \hat{u}(\alpha) = 0$ . Or  $0 \neq \|u\|^2 = \sum_{\alpha \in A} \hat{u}(\alpha) \overline{\hat{u}(\alpha)} = \sum_{\alpha \in A} |\hat{u}(\alpha)|^2 = 0$ , ce qui est une contradiction.

5  $\Rightarrow$  2 Fixons  $x \in H$  et  $\varepsilon = \frac{1}{k}$ . Pour tout  $k$ , il existe  $x_k = \sum_{\alpha \in A_1} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha \in M$  tel que  $\|x - x_k\| \leq \frac{1}{k} = \varepsilon$

3  $\Rightarrow$  5

$$\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \sup_{B \subset A \text{ fini}} \sum_{\beta \in B} |\hat{x}(\beta)|^2.$$

Par définition du sup :  $\forall \varepsilon > 0 : \exists A_0$  fini  $\subset A$  t.q.  $\forall A_1$  fini  $\supset A_0$  :

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in A_1} \hat{x}(\alpha) e_\alpha \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in A_1} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \varepsilon^2.$$

□

**Théorème 2.28.** *Tout espace de Hilbert possède un système orthonormal maximal.*

*Proof.* Soit  $A$  l'ensemble des SOMs de  $H$ .  $(A, \subseteq)$  est ordonné. Soit  $\mathcal{S} \subset A$  une partie totalement ordonnée. On pose :

$$\hat{S} := \bigcup_{s \in \mathcal{S}} s.$$

Mq  $\hat{S} \in A$ .

Soient  $a_1, a_2 \in \hat{S}$ . Il existe  $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$  tels que  $a_1 \in s_1$  et  $a_2 \in s_2$ , or  $\mathcal{S}$  est totalement ordonné. Donc soit  $s_1 \subseteq s_2$ , soit  $s_2 \subseteq s_1$ , donc  $a_1, a_2 \in s_1$  ou  $a_1, a_2 \in s_2$ . En particulier, ils sont orthogonaux, et de plus  $\hat{S}$  majore tout  $s \in \mathcal{S}$ .

Par le lemme de Zorn, on a l'existence d'un élément maximal pour l'inclusion, i.e. un SOM. □

**Théorème 2.29** (Gram-Schmidt). *Soit  $\{x_1, x_2, \dots\} \subseteq H$  une suite finie ou dénombrable de vecteurs linéairement indépendants. Alors il existe un système orthonormal  $\{u_1, u_2, \dots\}$  fini et de même cardinalité que  $\{x_1, \dots\}$  si ce dernier est fini ou dénombrable si  $\{x_1, x_2, \dots\}$  est dénombrable tel que  $\text{Span}\{u_1, \dots\} = \text{Span}\{x_1, \dots\}$ .*

*Proof.* Les  $x_j$  sont non-nuls car  $\{x_1, x_2, \dots\}$  est linéairement indépendant. Posons  $y_1 := x_1$  et  $u_1 := \frac{y_1}{\|y_1\|}$  et pour tout  $n > 1$  posons  $y_n := x_n - \sum_{j=1}^n \langle x_n, u_j \rangle u_j$  et  $u_n := \frac{y_n}{\|y_n\|}$ .

Il faut maintenant s'assurer que pour tout  $n \geq 1$  :  $y_n \neq 0$  afin que les  $u_n$  soient bien définis. Par l'absurde, supposons qu'il existe  $n \geq 1$  tel que  $y_n = 0$ . Alors :

$$x_n \in \text{Span}\{u_1, \dots, u_{n-1}\} \subseteq \text{Span}\{y_1, \dots, y_{n-1}\} \subseteq \text{Span}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}.$$

Or les  $x_j$  sont linéairement indépendants.

Il est évident que  $u_n \in \text{Span}\{x_1, \dots, x_n\}$  et  $x_n \in \text{Span}\{u_1, \dots, u_n\}$  pour tout  $n \geq 1$ . Il reste alors uniquement à montrer que  $u_n \perp u_j$  ( $j < n$ ), ou de manière équivalente  $y_n \perp u_j$ , et cette dernière formulation est évidente par définition de  $y_n$ . □

**Définition 2.30.** Un espace topologique  $E$  est dit *séparable* s'il admet une partie dense dénombrable.

**Théorème 2.31.** *Un espace de Hilbert est séparable ssi il possède un système orthonormal maximal.*

*Proof.*  $\Rightarrow$  : Soit  $\{a_1, a_2, \dots\}$  une suite dense dans  $H$ . Soit  $\{a'_1, a'_2, \dots\}$  la suite partielle (possiblement finie) de  $\{a_1, \dots\}$  constituée des  $a_i \notin \text{Span}\{a_1, \dots, a_{i-1}\}$ . Par définition, on a que les  $a'_i$  sont indépendants et tous les  $a_j$  sont combinaisons linéaires des  $a'_i$ , i.e.  $\{a_1, a_2, \dots\} \subset \text{Span}\{a'_1, a'_2, \dots\}$ .

On en déduit alors que  $\text{Span}\{a'_1, a'_2, \dots\}$  est dense dans  $H$ . Par Gram-Schmidt sur  $\{a'_1, a'_2, \dots\}$ , on a un système orthonormal  $\{u_1, \dots\}$  tel que  $\text{Span}\{u_1, \dots\}$  est dense dans  $H$ . Dès lors, par le Théorème 2.27,  $\{u_1, \dots\}$  est un SOM.

$\Leftarrow$  : Soit  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  un SOM. Pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$E_N := \left\{ \sum_{j=1}^N q_j e_j \text{ t.q. } q_j \in \mathbb{Q}[i] \right\}.$$

$E_N$  est dénombrable, et donc  $E := \bigcup_{N > 0} E_N$  est également dénombrable. Par le théorème 2.27, on a  $\forall \varepsilon > 0 : \exists A_0 \subset A$  fini tel que :

$$\forall A_1 \supset A_0 : \left\| x - \sum_{\alpha \in A_1} \hat{x}(\alpha) e_\alpha \right\| \leq \varepsilon.$$

Montrons que  $\forall \varepsilon > 0 : \exists y \in E$  t.q.  $\|x - y\| \leq \varepsilon$ . Soit  $(q_\alpha)_{\alpha \in A_1} \subset \mathbb{Q}[i]$  t.q.  $\sum_{\alpha \in A_1} \|q_\alpha - \hat{x}(\alpha)\|^2 \leq \varepsilon^2$ . De tels  $q_\alpha$  existent bien par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ , et donc par densité de  $\mathbb{Q}[i]$  dans  $\mathbb{C}$ .

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in A_1} q_\alpha e_\alpha \right\|^2 = \left\| x - \sum_{\alpha \in A_1} \hat{x}(\alpha) e_\alpha \right\|^2 + \sum_{\alpha \in A_1} \|q_\alpha - \hat{x}(\alpha)\|^2 \leq 2\varepsilon^2.$$

Donc pour  $y = \sum_{\alpha \in A_1} q_\alpha e_\alpha$ , on a bien le résultat.  $\square$

*Exemple 2.4.*

- (0)  $\mathbb{C}^N$  muni du produit scalaire usuel admet une base canonique. Cette dernière est orthonormale et maximale.
- (1) Dans  $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ , posons les suites  $e_k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) telles que  $e_{k,j} = 1$  si  $k = j$  et 0 sinon.  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est un système orthonormal maximal car :

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{j \geq 1} x_j \overline{x_j} = \sum_{j \geq 1} |x_j|^2.$$

Par le point 3 du Théorème 2.27, on a que  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est un SOM.

- (2) Dans  $L^2[0, 2\pi)$ , on définit (pour  $k \in \mathbb{Z}$ ) :

$$e_k : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Pour le produit scalaire usuel de  $L^2$ , on a :

$$\langle e_k, e_\ell \rangle_{L^2} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(k-\ell)t}}{2\pi} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } k - \ell = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour montrer que  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est maximal, prenons  $f \in L^2[0, 2\pi)$ .  $S_k f := \sum_{m=-k}^k \langle f, e_m \rangle e_m$ . Montrons que  $S_k f \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} f$ . Pour  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \varphi \in C_0^\infty((0, 2\pi)) : \|f - \varphi\|_{L^2} \leq \varepsilon$  (par densité de  $C_0^\infty$  dans  $L^2$ ).

On a  $S_k \varphi \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{CVU} \varphi$  (théorème de Dirichlet global), ce qui implique  $S_k \varphi \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \varphi$ . Finalement, remarquons :

$$\|f - S_k f\|_{L^2} \leq \|f - S_k \varphi\|_{L^2} \leq \|f - \varphi\|_{L^2} + \|\varphi - S_k \varphi\| \leq 2\varepsilon$$

si  $k$  est assez grand.

Attention,  $\{e_k\}_k$  n'est **pas** une base au sens algébrique car  $\forall k \in \mathbb{Z} : e_k \in C^\infty$ . Donc si  $\{e_k\}_k$  est une base, toute fonction  $f \in L^2$  est égale à  $\sum_{j=1}^N c_j e_{k_j} \in C^\infty$ . Or  $L^2 \not\subset C^\infty$ .

## 2.3 Applications linéaires entre espaces vectoriels normés

Soient  $E, F$  deux espaces de Banach. Pour  $T : E \rightarrow F$  linéaire, on dit que  $T$  est *bornée* lorsque :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \leq +\infty.$$

*Remarque.* *borné* doit se comprendre *borné sur la boule unité* car  $T$  n'est pas borné puisque linéaire.

**Proposition 2.32.** Soit  $T : E \rightarrow F$  linéaire.

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

*Proof.* On note  $A = \{\|Tx\|\}_{\|x\| \leq 1}$ ,  $B = \{\|Tx\|\}_{\|x\| < 1}$ , et  $C = \{\|Tx\|\}_{\|x\|=1}$ . Notons également  $a = \sup A$ ,  $b = \sup B$  et  $c = \sup C$ .

Puisque  $A \supset B \cup C$ , on sait que  $a \geq b$  et  $a \geq c$ . Maintenant, si  $x \neq 0$  t.q.  $\|x\| \leq 1$ , alors  $B \ni T \frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|} Tx \geq \|Tx\|$ . En particulier,  $c \geq a$ , et donc  $c = a$ .

Si  $a < +\infty$ , alors  $\forall \delta > 0 : \exists x$  t.q.  $\|x\| = 1$  et  $\|Tx\| \geq a - \delta$  (par définition du sup et puisque  $a = c$ ). Pour  $\varepsilon \in (0, 1)$  :

$$\|T((1 - \varepsilon)x)\| = (1 - \varepsilon)\|Tx\| \geq (1 - \varepsilon)(a - \delta) \geq a - \eta,$$

pour  $\eta = \varepsilon a - \varepsilon \delta + \delta$ . Pour  $\delta, \varepsilon \rightarrow 0$ , on a  $\eta \rightarrow 0$  et donc  $b \geq a$ .

Finalement, si  $a = +\infty$ , alors  $\forall M > 0 : \exists x_M$  t.q.  $\|x_M\| \leq 1$  et  $\|Tx_M\| \geq M$ . Or par linéarité de  $T$ , on a  $\|x_{M/2}\| \leq 1$ , et finalement :

$$\forall M > 0 : \exists \tilde{x}_M (= x_{M/2}) \text{ t.q. } \|\tilde{x}_M\| \leq 1 \text{ et } \|T\tilde{x}_M\| \geq M.$$

On en déduit également que  $a = b$ .

Dès lors, on a bien  $a = b = c$ . □

**Définition 2.33.** L'ensemble des applications linéaires bornées de  $E$  dans  $F$  est noté  $\mathcal{L}(E, F)$ . On munit cet ensemble de la norme :

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)} : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathbb{R}^+ : T \mapsto \|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

On note également  $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$ .

*Remarque.* Il est à noter que cette norme sur  $\mathcal{L}(E, F)$  dépend des normes sur  $E$  et sur  $F$  !

**Proposition 2.34.**  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)}$  est une norme.

*Proof.* TODO: Exercice □

**Proposition 2.35.** Soit  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Pour tout  $y \in E$ , on a  $\|Ty\| \leq \|T\|\|y\|$ .

*Proof.* Si  $y = 0$ , alors  $Ty = 0$ , et donc ok. Sinon,  $Ty = \|y\| T \frac{y}{\|y\|}$ . Par passage à la norme dans  $F$  :

$$\|Ty\| = \|y\| \underbrace{\left\| T \frac{y}{\|y\|} \right\|}_{\leq \|T\|} \leq \|y\| \|T\|.$$

□

On remarque également que  $\|(T_2 \circ T_1)(x)\| \leq \|T_2\| \|T_1 x\| \leq \|T_2\| \|T_1\| \|x\|$ , et donc  $\|T_2 T_1\| \leq \|T_2\| \|T_1\|$ . Dès lors si  $T_1 \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $T_2 \in \mathcal{L}(F, G)$ , alors  $T_2 T_1 \in \mathcal{L}(E, G)$ .

**Théorème 2.36.** Soit  $T : E \rightarrow F$  linéaire. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $T$  est bornée ;
- (ii)  $T$  est continue en tous points ;
- (iii)  $\exists x_0 \in E$  t.q.  $T$  est continue en  $x_0$ .



*Proof.*

- (i)  $\Rightarrow$  (ii) Soit  $y \in E$ .  $\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq \|T\| \|x - y\|$ . Dès lors,  $T$  est Lipschitzienne et donc continue.
- (ii)  $\Rightarrow$  (iii) Trivial (je cite : *Si vous avez un problème ici, je crois qu'il y a un sérieux problème dans l'enseignement*).
- (iii)  $\Rightarrow$  (i) Pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que si  $\|x - x_0\| < \delta$ , alors  $\|T(x - x_0)\| < \varepsilon$ . En posant  $y := x - x_0$ , si  $\|y\| < \delta$ , alors  $\|Ty\| < \varepsilon$ . Autrement dit,  $T(B(0, \delta)) \subset B(0, \varepsilon)$ . Pour  $z \in B(0, 1)$  (i.e.  $\|z\| < 1$ ), on a :

$$\|Tz\| = \frac{1}{\delta} \|T(\delta z)\| < \frac{1}{\delta} \varepsilon.$$

Dès lors  $\forall z : \|z\| < 1 \Rightarrow \|Tz\| < \varepsilon/\delta$ , et donc  $\|T\| \not\leq +\infty$ , i.e.  $T$  est bornée.

□

*Exemple 2.5.*

- (0) Un opérateur linéaire  $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  est déterminé par une matrice  $(T_{k\ell})_{k,\ell}$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{C}^m$  et  $\mathbb{C}^n$ .  $T$  est continue<sup>1</sup> donc bornée.
- (1)  $T : L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{C} : f \mapsto \int f d\mu$  est borné car :

$$|Tf| = \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu = \|f\|_{L^1}.$$

Dès lors l'opérateur  $T$  d'intégration est continue.

- (2) Si  $1 \leq p, q \leq +\infty$  sont conjugués, pour  $g \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  on définit :

$$T_g : L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{C} : f \mapsto \int fg d\mu.$$

$T_g$  est bien défini par l'inégalité de Hölder. De plus :  $|T_g f| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ , et donc  $\|T_g\| \leq \|g\|_{L^q}$ .

- (3)  $\mathbb{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  est un opérateur linéaire. De plus, par Plancherel, on a  $\|\mathbb{F}f\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2} \|f\|_{L^2}$ , et donc  $\|\mathbb{F}\| = (2\pi)^{n/2}$ , i.e. la transformée de Fourier est un opérateur borné (donc continu).
- (4) Pour  $H$ , un espace de Hilbert quelconque et  $M$  un sous-espace vectoriel fermé,  $P : H \rightarrow M$ , la projection orthogonale sur  $M$  est bornée car Lipschitzienne (et donc également continue).
- (5) Dans  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré, on fixe  $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu)$ , et on pose :

$$T : L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) : f \mapsto \int_{\Omega} K(\cdot, y) f(y) d\mu(y).$$

Par Fubini,  $\forall x \in \Omega : \int_{\Omega} |K(x, y)|^2 d\mu(y)$  est bien défini, et pour presque tout  $x \in \Omega : |K(x, \cdot)|^2 \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . En particulier,  $|K(x, \cdot)| \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ .

Dès lors, à  $x \in \Omega$  fixé,  $y \mapsto K(x, y) f(y)$  est  $L^1$  par Hölder. Donc il existe  $N \in \mathcal{A}$  t.q.  $\mu(N) = 0$  et  $\forall x \notin N : K(x, \cdot) f(\cdot) \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . On pose alors :

$$g : x \mapsto \begin{cases} \int_{\Omega} K(x, y) f(y) d\mu(y) & \text{si } x \notin N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>En dimension finie, toute application linéaire entre espaces vectoriels est continue.

Montrons que  $g = Tf \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . Si  $x \notin N$ , alors par Cauchy-Schwarz :

$$|g(x)|^2 \leq \left( \int_{\Omega} |K(x, y)| |f(y)| d\mu(y) \right)^2 \leq \int_{\Omega} |K(x, y)|^2 d\mu(y) \int_{\Omega} |f(y)|^2 d\mu(y).$$

Or le second facteur ne dépend pas de  $x$  (notons le  $C$ ) et est fini puisque  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . Dès lors :

$$\int_{\Omega} |g(x)|^2 d\mu(x) = C \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} |K(x, y)|^2 d\mu(y) \right) d\mu(x).$$

Par Fubini (puisque  $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu)$ ), on a finalement :

$$\int_{\Omega} |g(x)|^2 d\mu(x) \leq C \int_{\Omega \times \Omega} |K(x, y)|^2 d(\mu \otimes \mu)(x, y) < +\infty.$$

On en déduit également  $\|g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|K\|_{L^2}$ , et donc  $\|T\| \leq \|K\|_{L^2}$ .

**Définition 2.37.** Un opérateur de la forme suivante :

$$T : L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) : f \mapsto \int_{\Omega} K(\cdot, y) f(y) d\mu(y),$$

pour  $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu)$  est appelé *opérateur intégral de Hilbert-Schmidt*.

Soient  $T \in \mathcal{L}(H)$ ,  $x \in H$  et  $\Phi : H \rightarrow \mathbb{C} : y \mapsto \langle Ty, x \rangle$ , une forme linéaire bornée. Par Cauchy-Schwarz :  $|\Phi y| \leq \|Ty\| \|x\| \leq \|T\| \|y\| \|x\|$ .

Par le lemme de Riesz, on sait qu'il existe un unique  $z_x \in H$  tel que  $\forall y \in H : \Phi y = \langle y, z_x \rangle$ . On a alors une application  $x \mapsto z_x$ . Notons-la  $T^*$ .

**Proposition 2.38.**  $T^*$  est une application linéaire.

*Proof.* Soient  $x_1, x_2 \in H, \lambda \in \mathbb{C}$ . Alors :

$$\langle y, T^*(\lambda x_1 + x_2) \rangle = \langle Ty, \lambda x_1 + x_2 \rangle = \bar{\lambda} \langle Ty, x_1 \rangle + \langle Ty, x_2 \rangle = \bar{\lambda} \langle y, T^* x_1 \rangle + \langle y, T^* x_2 \rangle = \langle y, \lambda T^* x_1 + T^* x_2 \rangle.$$

Or cette égalité vaut pour tous  $x_1, x_2 \in H$ , donc  $T^*(\lambda x_1 + x_2) = \lambda T^* x_1 + T^* x_2$ . □

**Lemme 2.39.**  $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |\langle Tx, y \rangle|$ .

*Proof.* Par Cauchy-Schwarz, si  $\|y\| \leq 1 : |\langle Tx, y \rangle| \leq \|Tx\| \|y\| \leq \|Tx\|$ . En particulier, par passage au sup, on a l'inégalité  $\geq$ .

Pour l'autre inégalité, Si  $T \equiv 0$ , le résultat est trivial. Donc supposons  $T \neq 0$ . On sait alors que  $\text{Ker } T \neq H$ , et donc  $\exists x \in H \setminus \text{Ker } T$ . En posant  $z := \frac{Tx}{\|Tx\|}$ , on observe :

$$\sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |\langle Tx, y \rangle| \geq \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, z \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Tx\|^2}{\|Tx\|}.$$

□

**Théorème 2.40.** Pour  $T \in \mathcal{L}(H)$ , on a  $\|T\| = \|T^*\|$ .

*Proof.* Par le lemme précédent :

$$\|T^*\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T^* x\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |\langle T^* x, y \rangle| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |\langle y, T^* x \rangle| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |\langle Ty, x \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|$$

□

**Définition 2.41.** Cet opérateur  $T^*$  est appelé *l'opérateur adjoint de  $T$* .

**Proposition 2.42.** Soient  $S, T \in \mathcal{L}(H)$ . Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , on a :

1.  $(\alpha S + \beta T)^* x = \bar{\alpha} S^* + \bar{\beta} T^*$  ;
2.  $(ST)^* = T^* S^*$ .

*Proof.*

1. Fixons  $x, y \in H$ .

$$\langle x, (\alpha S + \beta T)^* y \rangle = \langle (\alpha S + \beta T)x, y \rangle = \alpha \langle Sx, y \rangle + \beta \langle Tx, y \rangle = \alpha \langle x, S^* y \rangle + \beta \langle x, T^* y \rangle = \langle x, \bar{\alpha} S^* y + \bar{\beta} T^* y \rangle.$$

2. Montrons que  $\forall x \in H : (ST)^* x = T^* S^* x$ . Soient  $x, y \in H$ .

$$\langle y, (ST)^* x \rangle = \langle STy, x \rangle = \langle Ty, S^* x \rangle = \langle y, T^* S^* x \rangle.$$

□

**Définition 2.43.** Si  $T = T^*$ , on dit que  $T$  est auto-adjoint.

*Exemple 2.6.*

- (1) Soit un opérateur linéaire  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ .  $T$  est défini par une matrice  $(T_{k\ell})_{k,\ell} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . L'adjoint  $T^*$  de  $T$  est également un opérateur linéaire de  $\mathbb{C}^n$  et est donc également défini par une matrice  $(T^*_{k\ell})_{k,\ell}$ . Fixons  $z, w \in \mathbb{C}^n$  et calculons :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n T^*_{jk} z_k \bar{w}_j = \langle T^* z, w \rangle = \langle z, Tw \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n z_k \overline{T_{kj} w_j}.$$

Cette égalité étant vraie  $\forall z, w \in \mathbb{C}^n$ , on en déduit  $T^*_{jk} = \overline{T_{kj}}$ , i.e. la matrice adjointe est la conjuguée de la transposée.

D'ailleurs, si  $T = T^*$ , alors  $(T_{jk})_{jk}$  est une matrice hermitienne.

- (2) Pour un opérateur intégral de Hilbert-Schmidt, fixons  $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu)$  et considérons :

$$T_K : L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) : f \mapsto \int K(\cdot, y) f(y) d\mu(y).$$

Soient  $f, g \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . Partons de  $\langle T_K f, g \rangle = \langle f, T_K^* g \rangle$  et calculons :

$$\langle T_K f, g \rangle = \int_{\Omega} \bar{g}(x) \int_{\Omega} K(x, y) f(y) d\mu(y) d\mu(x) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\Omega} f(y) \int_{\Omega} K(x, y) \bar{g}(x) d\mu(x) d\mu(y) = \langle f, T_K^* g \rangle.$$

Donc :

$$T_K^* g(y) = \overline{\int_{\Omega} K(x, y) \bar{g}(x) d\mu(x)},$$

ou en changeant simplement les variables  $x$  et  $y$  :

$$T_K^* g(x) = \int_{\Omega} \bar{K}(y, x) g(y) d\mu(y).$$

$T_K^*$  est donc également un opérateur intégral de Hilbert-Schmidt et on a bien *transposé/conjugué* le noyau  $K$  de  $T_K$  pour trouver celui de  $T_K^*$ .

- (2) Reconsidérons  $M$  un sous-espace fermé de  $H$  et la projection orthogonale  $P : H \rightarrow M$ . Montrons que  $P = P^*$ .

Soient  $x_1, x_2 \in H$  et soit  $Q$  la projection orthogonale sur  $M^\perp$ . Calculons :

$$\langle Px_1, x_2 \rangle = \langle Px_1, Px_2 + Qx_2 \rangle = \langle Px_1, Px_2 \rangle + \underbrace{\langle Px_1, Qx_2 \rangle}_{=0} = \langle Px_1, Px_2 \rangle.$$

Et :

$$\langle x_1, Px_2 \rangle = \langle Px_1 + Qx_1, Px_2 \rangle = \langle Px_1, Px_2 \rangle + \underbrace{\langle Qx_1, Px_2 \rangle}_{=0} = \langle Px_1, Px_2 \rangle.$$

On a donc  $\forall x_1, x_2 \in H : \langle x_1, P^*x_2 \rangle = \langle Px_1, x_2 \rangle = \langle x_1, Px_2 \rangle$ . Dès lors  $P = P^*$ . La projection orthogonale est donc auto-adjointe.

Pour  $E, F$  espaces vectoriels normés, plusieurs normes semblent canoniques. À  $p \geq 1$  fixé, on peut définir :

$$\|(e, f)\|_{E \times F; p} := (\|e\|_E^p + \|f\|_F^p)^{1/p}.$$

De même, si  $E$  et  $F$  sont munis d'un produit scalaire, on a un produit scalaire canonique sur  $E \times F$  :

$$\langle (e_1, f_1), (e_2, f_2) \rangle_{E \times F} := \langle e_1, e_2 \rangle_E + \langle f_1, f_2 \rangle_F,$$

et donc la norme  $\|\cdot\|_{E \times F; 2}$  semble particulièrement intuitive.

Il est cependant à noter que les normes  $\|\cdot\|_{E \times F; p}$  sont équivalentes pour toutes les valeurs de  $p \geq 1$ , et donc que les topologies induites par ces normes sont homéomorphes (elles sont même strictement identiques, et cette topologie est la topologie produit). Dès lors, la norme  $\|\cdot\|_{E \times F; 1}$  va être posée canoniquement sur  $E \times F$ , mais les résultats qui suivront seront également valables pour toute valeur de  $p > 1$ .

**Définition 2.44.** Pour un opérateur linéaire  $T : E \rightarrow F$ , on note  $\Gamma_T = \{(x, Tx)\}_{x \in E} \subset E \times F$  le graphe de  $T$ .

**Théorème 2.45.** Si  $T$  est bornée, alors  $\Gamma_T$  est fermé dans  $E \times F$ .

*Proof.* Soit  $(x, y) \in \overline{\Gamma_T}$ . Prenons une suite  $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Gamma_T$  telle que  $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x, y)$ . De plus  $T$  est continue car bornée. Dès lors :

$$\begin{cases} Tx_n = y_n \\ Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Tx \\ y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y. \end{cases}$$

Or  $x \in E$  et par unicité de la limite,  $Tx = y$ . Dès lors,  $(x, y) \in \Gamma_T$ . □

**Définition 2.46.** Une application  $f : E \rightarrow F$  est *ouverte* si l'image de tout ouvert de  $E$  par  $f$  est un ouvert de  $F$ .

**Théorème 2.47** (de l'application ouverte, Banach). Soient  $E, F$  espaces de Banach,  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $T$  est surjective, alors  $T$  est ouverte.

*Proof.* Notons  $B_E$  (resp.  $B_F$ ) la boule unité dans  $E$  (resp. dans  $F$ ). Il suffit de montrer que  $\exists \delta > 0$  t.q.  $T(B_E) \supset \delta B_F$ . En effet, en supposant que cette inclusion est vérifiée, on a  $T(x_0 + \lambda E) = Tx_0 + \lambda T(B_E)$ . Dès lors, si  $U$  est un voisinage de  $x_0$  dans  $E$ , alors  $T(U)$  est un voisinage de  $Tx_0$  dans  $F$ . Si de plus  $U$  est ouvert,  $U$  est un voisinage de tout  $y \in U$ , et donc  $T(U)$  est un voisinage de tout  $Ty \in T(U)$ , et donc  $T(U)$  est ouvert dans  $F$ .

TODO: Montrer que l'inclusion est bien vérifiée. □

**Théorème 2.48** (du graphe fermé, Banach). *Soient  $E, F$  espaces de Banach,  $T : E \rightarrow F$  linéaire. Si  $\Gamma_T$  est fermé dans  $E \times F$ , alors  $T$  est bornée.*

*Proof.*  $\Gamma_T$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $E \times F$ . Or  $E \times F$  est un espace de Banach puisque le produit d'espaces de Banach en est un. Dès lors  $\Gamma_T$  est un espace de Banach également. On décompose  $T$  en  $T_1 : E \rightarrow \Gamma_T : x \mapsto (x, Tx)$  et  $T_2 : E \times F \rightarrow F : (x, y) \mapsto y$  ( $T = T_2 T_1$ ).  $T_1$  est bijective par définition du graphe d'une application et  $T_1^{-1} : (x, Tx) \mapsto x$  est bornée (donc continue). Par le théorème de l'application ouverte de Banach, on déduit que  $T_1^{-1}$  est ouverte, i.e.  $T_2$  est continue.

De plus,  $T_2$  est continue car les projections sont toujours continues pour la topologie produit. Donc  $T = T_2 T_1$  est composition d'applications continues, et est donc continue.  $\square$