

Espaces fonctionnels et séries de Fourier — Notes de cours de Pr. P. Godin

Robin Petit

Année académique 2017-2018

Table des matières

1	Transformation de Fourier	2
1.1	Définitions	2
1.2	Formule d'inversion	5
1.3	Discussion sur la définition de la transformée	8
1.4	Extension de la transformée à $L^1 \cap L^2$	8
1.5	Exemple d'application de la théorie de Fourier	10
2	Espaces de Hilbert	12
2.1	Orthogonalité	14
2.2	Systèmes orthonormaux	16

Chapitre 1

Transformation de Fourier

1.1 Définitions

On considère \mathbb{R}^n à n fixé en tant qu'espace de mesure $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \lambda)$ avec \mathcal{M} la famille des ensembles Lebesgue-mesurables et λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n .

Définition 1.1. Pour $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on définit sa *transformée de Fourier* par :

$$\hat{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \xi \mapsto \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) dx. \quad (1.1)$$

Cette fonction est bien définie car $x \mapsto e^{-i\langle x, \xi \rangle}$ est continue (et donc L^∞), et u est intégrable, donc $x \mapsto e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x)$ est intégrable par Hölder.

Proposition 1.2. Pour $u \in L^1$, \hat{u} est continue.

Démonstration. Soient $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ et $(h_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{n\mathbb{N}}$ t.q. $h_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$.

$$\hat{f}(\xi_0 + h_k) = \int e^{-i\langle x, \xi_0 \rangle} e^{-i\langle x, h_k \rangle} f(x) dx.$$

Puisque $\left| e^{-i\langle x, \xi_0 \rangle} e^{-i\langle x, h_k \rangle} f(x) \right| = |f(x)|$ et $x \mapsto e^{-i\langle x, \xi_0 \rangle} e^{-i\langle x, h_k \rangle} f(x)$ converge partout (en particulier presque partout), par le théorème de la convergence dominée :

$$\hat{f}(\xi_0 + h_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \int e^{-i\langle x, \xi_0 \rangle} f(x) dx = \hat{f}(\xi_0).$$

□

Proposition 1.3. Soit $u \in L^1$. Si $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket : x_j f \in L^1$, alors : $\hat{u} \in C^1$ et :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket : \left. \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi_j} \right|_{\xi} = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-ix_j) u(x) dx. \quad (1.2)$$

Démonstration. Soit $(h_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{n\mathbb{N}}$ t.q. $h_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, et prenons $\{e_j\}_{j=1}^n$ la base canonique de \mathbb{R}^n .

$$\frac{\hat{u}(\xi + h_k e_j) - \hat{u}(\xi)}{h_k} = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \underbrace{\frac{e^{-ih_k x_j} - 1}{h_k}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} -ix_j} u(x) dx.$$

En module :

$$\left| e^{-i\langle x, \xi \rangle} \frac{e^{-ih_k x_j} - 1}{h_k} f(x) \right| = \left| e^{-i\langle x, \xi \rangle} \right| \left| \frac{e^{-ih_k x_j} - 1}{h_k} \right| |f(x)| \leq C |x_j| |f(x)|,$$

qui est intégrable par hypothèse.

En effet, si $x_j = 0$, alors tout est nul et l'inégalité devient une égalité ; et si $x_j \neq 0$, alors $\left| \frac{e^{-ih_k x_j} - 1}{|x_j| h_k} \right|$ est borné.

Dès lors, par le théorème de convergence dominée, la limite passe sous l'intégrale et on a (1.2). □

Corollaire 1.4. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, si $(1 + |x|)^m u \in L^1$, alors $u \in C^m$ et on peut dériver m fois sous le signe :

$$\partial^\alpha \hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-i)^{|\alpha|} x^\alpha u(x) dx$$

Démonstration. Exercice (récurrence sur m). □

Définition 1.5. On définit l'ensemble de Schwartz :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &:= \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : x^\alpha \partial^\beta u \text{ est borné dans } \mathbb{R}^n \right\} \\ &= \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : x^\alpha \partial^\beta u \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \right\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Dans l'idée, \mathcal{S} est l'ensemble dont toutes les dérivées décroissent plus vite vers 0 que tout polynôme.

Proposition 1.6. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Démonstration. Immédiat par le fait que $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ sont des \mathbb{R} -evs. □

Proposition 1.7. Si $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact, alors :

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \bigcap_{1 \leq p \leq +\infty} L^p(\mathbb{R}^n).$$

Démonstration.

(i) Pour $u \in \mathcal{S}$ et $+\infty > p \geq 1$:

$$\int |u|^p dx = \int \left(\underbrace{|u| (1 + |x|)^N}_{\text{borné pour tout } N} \right)^p (1 + |x|)^{-Np} dx \leq \int (C_N)^p \underbrace{(1 + |x|)^{-Np}}_{\text{intégrable pour } Np > n} dx.$$

Dès lors, pour N suffisamment grand ($Np > n$), on a $\int |u|^p dx \leq c^{ste}$

Le cas $p = +\infty$ vient uniquement du fait que pour $u \in \mathcal{S}$, pour $\alpha = \beta = (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n$:

$$u = x^\alpha \partial^\beta u \in L^\infty.$$

(ii) Soit $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : x^\alpha \partial^\beta u \neq 0 \subseteq \text{supp } u$ compact. Par Heine-Cantor, u est uniformément continue sur $\text{supp } u$. □

Proposition 1.8. Pour $u \in \mathcal{S}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, alors : $x^\alpha \partial^\beta u \in \mathcal{S}$.

Démonstration. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{N}^n$. Par Leibniz :

$$\partial^\mu(fg) = \sum_{\sigma \leq \mu} \binom{\mu}{\sigma} \partial^\sigma f \partial^{\mu-\sigma} g.$$

Donc :

$$x^\lambda \partial^\mu (x^\alpha \partial^\beta u) = \sum_{\sigma \leq \mu} \binom{\mu}{\sigma} x^\lambda \partial^\sigma (x^\alpha) \partial^{\mu-\sigma} u,$$

où $x^\lambda \partial^\sigma (x^\alpha) \leq c^{\text{ste}} x^\gamma$. On en déduit que $x^\lambda \partial^\mu (x^\alpha \partial^\beta u)$ est une somme finie de termes bornés et est donc bornée. \square

À défaut de définir une topologie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on définit uniquement une notion de convergence.

Définition 1.9. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$, $u \in \mathcal{S}$, on dit que u_k converge vers u lorsque $k \rightarrow +\infty$ (noté $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{S}} u$) lorsque :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta (u - u_k)| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0. \quad (1.4)$$

Théorème 1.10. Soit $u \in \mathcal{S}$. Alors :

1. $\hat{u} \in \mathcal{S}$. De plus si $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{S}} u$, alors $\hat{u}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{S}} \hat{u}$.
2. $\widehat{D_j u}(\xi) = \xi_j \hat{u}(\xi)$ (de plus $\widehat{x_j u} = D_j \hat{u}$).

Démonstration. Pour le premier point, on calcule :

$$D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \int D_\xi^\alpha (e^{-i\langle x, \xi \rangle}) u(x) dx = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-x)^\alpha u(x) dx.$$

Donc :

$$\xi_j^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \int \xi_j^\beta e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-x)^\alpha u(x) dx = \int (-D_x)^\beta (e^{-i\langle x, \xi \rangle}) (-x)^\alpha u(x) dx = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} D_x^\beta ((-x)^\alpha u(x)) dx.$$

Pour montrer cette dernière égalité, intégrons par partie. D'abord observons pour $\phi \in \mathcal{S}$ et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\int \partial_j \phi dx = \int \dots \int \left(\int \partial_j \phi dx_j \right) dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n.$$

Or :

$$\int \partial_j \phi dx_j = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N \partial_j \phi(x) dx_j = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\phi(x_1, \dots, x_{j-1}, N, x_{j+1}, \dots, x_n)}_{\xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0} - \underbrace{\phi(x_1, \dots, x_{j-1}, N, x_{j+1}, \dots, x_n)}_{\xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0} \right) = 0,$$

puisque $\phi \in \mathcal{S}$.

On en déduit donc que $\int \partial_j \phi dx = 0$.

Dès lors, puisque $e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-x)^\alpha u(x) \in \mathcal{S}$ et par récurrence :

$$\int (-D_x)^\beta (e^{-i\langle x, \xi \rangle}) (-x)^\alpha u(x) dx = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} D_x^\beta ((-x)^\alpha u(x)) dx.$$

Montrons alors que $\forall N \in \mathbb{N} : \exists C_N \geq 0$ t.q. $\left| D_x^\beta ((-x)^\alpha u(x)) \right| \leq C_N (1 + |x|)^{-N}$. Par Leibniz :

$$(1 + |x|)^N \partial^\beta (x^\alpha u(x)) = (1 + |x|)^N \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial^\gamma x^\alpha \partial^{\beta-\gamma} u(x)$$

est borné car $u \in \mathcal{S}$. Dès lors :

$$\left| \xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x) \right| \leq C_N \int (1 + |x|)^{-N} dx.$$

Pour N suffisamment grand ($N > n$), on a $\left| \xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x) \right| \leq c^{ste}$.

Dès lors, on trouve :

$$\left| \xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x) \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-N} \left| D_x^\beta ((-x)^\alpha (u - u_k)) \right| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On en déduit donc $\hat{u}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{S}} \hat{u}$.

Pour le second point, la seconde formule découle directement du premier pour $\alpha = e_j$:

$$D_j \hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-x_j) u(x) dx = \widehat{x_j u}(\xi).$$

La première égalité se démontre par :

$$\widehat{D_j u}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} D_j u(x) dx = - \int D_{x,j} \left(e^{-i\langle x, \xi \rangle} \right) u(x) dx = \xi_j \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) dx = \xi_j \hat{u}(\xi).$$

□

1.2 Formule d'inversion

Théorème 1.11. Soit $u \in \mathcal{S}$. Alors :

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(\xi) d\xi. \quad (1.5)$$

La fonction $(y, \xi) \mapsto e^{i\langle x, \xi \rangle} e^{-i\langle y, \xi \rangle} u(y)$ n'est pas intégrable pour (y, ξ) . On ne va donc pas pouvoir appliquer Fubini.

Démonstration. Pour $\chi \in \mathcal{S}$, $(y, \xi) \mapsto e^{-i\langle y, \xi \rangle} e^{i\langle x, \xi \rangle} \chi(\xi) u(y)$ est intégrable. Donc par Fubini :

$$\int e^{i\langle x, \xi \rangle} \chi(\xi) \hat{u}(\xi) d\xi = \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \chi(\xi) \int e^{-i\langle y, \xi \rangle} u(y) dy d\xi = \int u(y) \int e^{-i\langle y-x, \xi \rangle} \chi(\xi) d\xi dy = \int u(y) \hat{\chi}(y-x) dy.$$

Pour $\psi \in \mathcal{S}$, $\delta > 0$ tels que $\chi(\xi) = \psi(\delta\xi)$:

$$\hat{\chi}(\xi) = \int e^{-i\langle y, \xi \rangle} \psi(\delta\xi) d\xi = \delta^{-n} \hat{\psi}(\xi/\delta).$$

Alors :

$$\int e^{i\langle x, \xi \rangle} \psi(\delta\xi) \hat{u}(\xi) d\xi = \int u(x+y) \delta^{-n} \psi(y/\delta) dy = \int u(x+\delta y) \hat{\psi}(y) dy.$$

Par le théorème de convergence dominée :

$$\int u(x + \delta y) \hat{\psi}(y) dy \xrightarrow{\delta \rightarrow +\infty} u(x) \int \hat{\psi}(y) dy,$$

or :

$$\int e^{i\langle x, \xi \rangle} \psi(\delta \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \xrightarrow{\delta \rightarrow +\infty} \psi(0) \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(\xi) d\xi.$$

Par unicité de la limite, si $\int \hat{\psi} dy \neq 0$:

$$u(x) = \frac{\psi(0)}{\int \hat{\psi}(y) dy} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(\xi) d\xi$$

Dans le cas $n = 1$, on prend $\psi_1 : x \mapsto e^{-x^2/2}$. En intégrant $z \mapsto e^{-z^2/2}$ sur un chemin rectangulaire $[a, b, c, d] \subset \mathbb{C}$, on trouve :

$$\int_a^b e^{-x^2/2} dx + \int_b^c e^{-z^2/2} dz + \int_c^d e^{-z^2/2} dz + \int_d^a e^{-z^2/2} dz = 0$$

par Cauchy. Pour $(a, b) \rightarrow (-\infty, +\infty)$, on trouve que $\int_b^c e^{-z^2/2} dz$ et $\int_d^a e^{-z^2/2} dz$ tendent vers 0. Donc à la limite :

$$\int_a^b e^{-x^2/2} dx = \int_{\gamma_{z=t}} e^{-z^2/2} dz = \int e^{(x^2-t^2)/2} e^{-itx} dx.$$

Donc $\hat{\psi}(t) = \psi(t) \int \psi dx$. On en déduit :

$$\int \hat{\psi}(t) dt = \left(\int \psi(x) dx \right)^2 = \left(\int e^{-x^2/2} dx \right)^2 = 2\pi.$$

Dès lors $\psi(0) = 1$ et $\int \hat{\psi} dx = 2\pi$, qui donne bien la formule.

Dans le cas général $n > 1$, on prend $\psi(x) = e^{-|x|^2/2} = \prod_{j=1}^n \psi_1(x_j)$. Donc :

$$\hat{\psi}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \psi(x) dx = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2} dx = \int \prod_{j=1}^n e^{-ix_j \xi_j} \prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2} dx = \int \prod_{j=1}^n \left(e^{-ix_j \xi_j} e^{-x_j^2/2} \right) dx.$$

Par Fubini :

$$\hat{\psi}(\xi) = \prod_{j=1}^n \int e^{-ix_j \xi_j} e^{-x_j^2/2} dx = \prod_{j=1}^n \hat{\psi}_1(\xi_j).$$

On trouve alors :

$$\int \hat{\psi}(\xi) d\xi = \int \prod_{j=1}^n \hat{\psi}_j(\xi_j) d\xi = \prod_{j=1}^n \int \hat{\psi}_1(\xi_j) d\xi_j = (2\pi)^{-n},$$

où l'avant dernière égalité s'obtient en appliquant Fubini.

Puisque $\hat{\psi}(0) = 1$, on a bien (1.5). □

On définit une application *transformée de Fourier* $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} : u \mapsto \mathcal{F}u := \hat{u}$.

Proposition 1.12. \mathcal{F} est une bijection linéaire.

Démonstration. Par la formule d'inversion, \mathcal{F} est injective : si $\mathcal{F}u = 0$, alors $u = 0$.

De plus, \mathcal{F} est surjective. Pour $f \in \mathcal{S}$, montrons qu'il existe $u \in \mathcal{S}$ t.q. $\mathcal{F}u = f$. Prenons $u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} f(\xi) d\xi$. Alors :

$$\mathcal{F}f(x) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(\xi) d\xi = (2\pi)^n u(-x).$$

De plus :

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(x) dx = (2\pi)^n (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(x) dx = (2\pi)^n u(-\xi),$$

donc $\hat{f} = \hat{u}$ pour tout x , et puisque \mathcal{F} est injective, $f = \hat{u}$. Donc \mathcal{F} est surjective, et donc surjective.

La linéarité est triviale :

$$\mathcal{F}(f + \lambda g)(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} (f + \lambda g)(x) dx = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx + \lambda \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} g(x) dx = (\hat{f} + \lambda \hat{g})(\xi).$$

□

En posant $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} : u \mapsto \tilde{\mathcal{F}}u$ où $\tilde{\mathcal{F}}u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} u(\xi) d\xi$. Par un raisonnement similaire à la Proposition précédente, on trouve $\tilde{\mathcal{F}}$ est une bijection linéaire. De plus $\mathcal{F}^{-1} = \tilde{\mathcal{F}}$.

De plus, puisque \mathcal{F} transforme des suites convergentes en suites convergentes sur \mathcal{S} , $\tilde{\mathcal{F}}$ fait de même.

Cela veut dire que \mathcal{F} est un homéomorphisme linéaire de \mathcal{S} dans \mathcal{S} pour la topologie non définie ici.

Proposition 1.13. Pour $u, v \in \mathcal{S}$:

1. $\int u \hat{v} = \int \hat{u} v$;
2. $\int u \bar{v} = (2\pi)^{-n} \int \hat{u} \hat{\bar{v}}$. Cette égalité est appelée identité de Parseval.

Démonstration. Le premier point se montre par la formule de la preuve du Théorème 1.11 pour $u, \chi \in \mathcal{S}$:

$$\int e^{i\langle x, \xi \rangle} \chi(\xi) \hat{u}(\xi) d\xi = \int u(x + y) \hat{\chi}(y) dy$$

en $x = 0$.

Le second point, prenons $u, w \in \mathcal{S}$ et posons $v := (2\pi)^{-n} \bar{\hat{w}}$. Par le premier point :

$$\int \hat{u} v = \int u \hat{v} = \int u (2\pi)^{-n} \hat{\bar{\hat{w}}}.$$

On peut voir que :

$$(2\pi)^{-n} \hat{\bar{\hat{w}}}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \bar{\hat{w}}(x) dx = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{w}(x) dx = \overline{\hat{w}(\xi)}.$$

Dès lors :

$$\int \hat{u} (2\pi)^{-n} \bar{\hat{w}} = \int u \bar{w}.$$

□

Corollaire 1.14 (Formule de Plancherel). Pour $u \in \mathcal{S}$, on a :

$$\int |u|^2 dx = (2\pi)^{-n} \int |\hat{u}|^2 d\xi \tag{1.6}$$

1.3 Discussion sur la définition de la transformée

On peut définir la transformée de Fourier de plusieurs manières, paramétrisé par $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}_{a,b}u(\xi) = a \int e^{-ib\langle x, \xi \rangle} u(x) dx.$$

La théorie reste la même à homothétie près puisque :

$$\mathcal{F}u(\xi) = \frac{1}{a} \mathcal{F}_{a,b}u(\xi/b).$$

$$(2\pi)^{-n} \int \hat{u}(\xi) \bar{\hat{v}}(\xi) d\xi = \frac{(2\pi)^{-n} b^n}{a^n} \int \mathcal{F}_{a,b}u(\eta) \overline{\mathcal{F}_{a,b}v(\eta)} d\eta.$$

Donc on peut choisir $a = 1$ et $b = 2\pi$ ou encore $a = (2\pi)^{n/2}$ et $b = 1$ afin de simplifier la formule de Parseval qui devient :

$$\int u \bar{v} = \int \mathcal{F}u \overline{\mathcal{F}v}.$$

Cependant le choix $a = b = 1$ permet de ne pas avoir de terme b^k lors des dérivations sous le signe intégral.

1.4 Extension de la transformée à $L^1 \cap L^2$

Proposition 1.15. *Il existe une unique application linéaire continue $\mathbb{F} : L^2 \rightarrow L^2$ tel que $\mathbb{F}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}$ et :*

$$\int u \bar{v} = (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}u \overline{\mathbb{F}v} d\xi,$$

i.e. \mathbb{F} préserve l'identité de Parseval.

Démonstration. Admettons que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Puisque $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Par cette densité, pour $u \in \mathcal{S}$, il existe $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^\mathbb{N}$ tel que $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} u$, et donc (u_k) est de Cauchy pour cette norme. $(\hat{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est également de Cauchy car :

$$\|\hat{u}_k - \hat{u}_m\| = (2\pi)^{n/2} \|u_k - u_m\|.$$

Par cette complétude, il existe $z \in \mathcal{S}$ t.q. $\hat{u}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} z$. On pose alors $\mathbb{F}u := z$. Montrons que z ne dépend pas de la suite (\hat{u}_k) choisie pour montrer que \mathbb{F} est bien définie.

Soit $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ t.q. $v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} z$. Alors $v_k - u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} 0$. Par Plancherel, $\hat{v}_k - \hat{u}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} 0$. Dès lors $\hat{v}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} z$.

Montrons alors que \mathbb{F} est linéaire.

Soient $u, v \in L^2$. Soient $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}, (v_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^\mathbb{N}$ telles que $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} u$ et $v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} v$. Alors $u_k + v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} u + v$. Par linéarité de \mathcal{F} , $\hat{u}_k + \hat{v}_k = \widehat{u_k + v_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \mathbb{F}(u + v)$.

Donc $\hat{u}_k + \hat{v}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \mathbb{F}u + \mathbb{F}v$ et $\hat{u}_k + \hat{v}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \mathbb{F}(u+v)$. On en déduit $\mathbb{F}u + \mathbb{F}v = \mathbb{F}(u+v)$. Il est également trivial que pour $\lambda \in \mathbb{R} : \mathbb{F}(\lambda u) = \lambda \mathbb{F}u$.

Pour montrer que $\mathbb{F} \Big|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}$, prenons $u \in \mathcal{S}$, et la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ constante $u_k = u$. Par définition de \mathbb{F} , on a $\mathbb{F}u = \hat{u}$ car $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket : \hat{u}_k = \hat{u}$, donc $\hat{u}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \hat{u}$.

Montrons finalement que \mathbb{F} vérifie Parseval.

Premier cas : $u \in L^2$ et $v \in \mathcal{S}$. Il existe $\mathcal{S}^{\mathbb{N}} \ni (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} u$. Donc :

$$\int u \bar{v} = \int u_k \bar{v} + \int (u - u_k) \bar{v}.$$

Puisque :

$$\left| \int (u - u_k) \bar{v} \right| \leq \underbrace{\|u - u_k\|_{L^2}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0} \|v\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0,$$

on sait :

$$\int u_k \bar{v} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \int u \bar{v}.$$

Or $u_k, v \in \mathcal{S}$. Donc pour $k \rightarrow +\infty$, par Cauchy-Schwartz et par Parseval pour \mathcal{F} :

$$\int u \bar{v} = \int u_k \bar{v} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}u \bar{\mathbb{F}v}.$$

Dans le cas général $u, v \in L^2$, par le premier point pour $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ t.q. $v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} v$:

$$\int u \bar{v}_k = (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}u \bar{\mathbb{F}v}_k.$$

Or $v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \mathbb{F}v$. Par Cauchy-Schwartz, on a :

1. $\int u \bar{v}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \int u \bar{v}$;
2. et $\int \mathbb{F}u \bar{\mathbb{F}v}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \int \mathbb{F}u \bar{\mathbb{F}v}$.

L'identité de Parseval est donc bien vérifiée pour \mathbb{F} . Il reste à vérifier que \mathbb{F} est continue et qu'elle est unique.

La continuité découle de Parseval :

$$\|u\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2} \|\mathbb{F}u\|_{L^2},$$

donc pour $\varepsilon > 0$, pour $\delta = (2\pi)^{-n/2} \varepsilon$, on a que si $\|u - v\|_{L^2} < \delta$, alors $\|\mathbb{F}u - \mathbb{F}v\|_{L^2} < \varepsilon$.

Si il existe $\mathbb{F}_1 : L^2 \rightarrow L^2$ continue et linéaire telle que $\mathbb{F}_1 \Big|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}$, alors par densité, pour $u \in L^2$, il existe $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u$, et donc, par continuité :

$$\underbrace{\mathbb{F}(u_k)}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mathbb{F}(u)} = \underbrace{\mathbb{F}_1(u_k)}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mathbb{F}_1(u)}.$$

Donc puisque deux application continues qui coïncident sur une sous-ensemble dense coïncident partout, on a bien que $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1$. □

De la même manière, $\tilde{\mathcal{F}}$ se prolonge sur L^2 en $\tilde{\mathbb{F}}$

Proposition 1.16. $\mathbb{F} \circ \tilde{\mathbb{F}} = \text{Id}_{L^2} = \tilde{\mathbb{F}} \circ \mathbb{F}$.

Démonstration. Ceci vient directement de la même propriété sur \mathcal{F} et $\tilde{\mathbb{F}}$. Soit $u \in L^2$ et soit $\mathcal{S}^{\mathbb{N}} \ni (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} u$. On sait :

$$\mathcal{S} \ni \tilde{\mathcal{F}}(u_k) = \tilde{\mathbb{F}}(u_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \tilde{\mathbb{F}}(u)$$

par continuité de $\tilde{\mathbb{F}}$. Par continuité de \mathbb{F} , on a :

$$\mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}}(u_k) = \mathbb{F} \circ \tilde{\mathbb{F}}(u_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \mathbb{F} \circ \tilde{\mathbb{F}}(u).$$

Or $\mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}}(u_k) = u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} u$. Par unicité de la limite, on a $\mathbb{F} \circ \tilde{\mathbb{F}}(u)$. L'autre égalité se démontre de la même manière. \square

À ce stade, il est légitime de se demander si les définitions que l'on a sur L^1 (la formule intégrale définie depuis \mathcal{S}) et sur L^2 (la définition de \mathbb{F}) sont compatibles, i.e. si pour $u \in L^1 \cap L^2$ on a bien $\hat{u} = \mathbb{F}u$. Cette égalité tient bien (démonstration à venir).

1.5 Exemple d'application de la théorie de Fourier

Pour $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$ le Laplacien sur \mathbb{R}^n et $f \in \mathcal{S}$, soit la PDE suivante :

$$(1 + \sum_{j=1}^n D_j^2)u = u - \Delta u = f, \quad (1.7)$$

ou plus généralement, pour des $a_\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\underbrace{\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha}_{P(D) \text{ polynôme}} u = f, \quad (1.8)$$

dans le cas du Laplacien, ce polynôme est $P(\xi) = 1 + |\xi|^2$.

Sous l'hypothèse $\inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} |P(\xi)| \gtrsim 0$, trouvons u t.q. $P(D)u = f$.

Formellement :

$$\begin{aligned} \widehat{P(D)u}(\xi) &= \hat{f}(\xi) \\ P(\xi)\hat{u}(\xi) &= \hat{f}(\xi) \\ \hat{u}(\xi) &= \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} \\ u(x) &= (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Plus rigoureusement, puisque $f \in \mathcal{S}$, on sait $\hat{f} \in \mathcal{S}$. De plus, P est borné par dessous. Donc $|\hat{f}/P| \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N}$, et du coup la fonction sous l'intégrale ($\xi \mapsto e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)}$) est L^1 , et cette intégrale est bien définie pour $N > n$.

De plus, puisque la dérivation selon x sur u fait juste descendre du ξ , de l'exponentielle, par récurrence avec le théorème de convergence dominée et par la borne supérieure ci-dessus, on trouve que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On peut alors vérifier que la fonction u ainsi trouvée est bien une solution de (1.8) :

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha}_{=P(\xi)} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} d\xi = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi = f(x).$$

Chapitre 2

Espaces de Hilbert

Définition 2.1. Soit H un \mathbb{C} -espace vectoriel. Un produit scalaire (forme hermitienne définie positive) sur H est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ t.q. :

- (i) à $y \in \mathbb{C}$ fixé : $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est une application linéaire de H dans \mathbb{C} ;
- (ii) pour $x, y \in \mathbb{C}$: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
- (iii) pour $x \in \mathbb{C}$: $\langle x, x \rangle \geq 0$ où $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Sur un produit scalaire, on peut définir une norme $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$.

Remarque. Une forme hermitienne définie positive est donc anti-linéaire pour le 2e paramètre : $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$.

Proposition 2.2. $\|\cdot\| : H \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une norme.

Proposition 2.3. $\|\cdot\|$ vérifie Cauchy-Schwartz, i.e. :

$$\forall x, y \in H : |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ t.q. $|\alpha| = 1$ et $\alpha \langle y, x \rangle \in \mathbb{R}^+$ (i.e. $\alpha \langle y, x \rangle = |\langle x, y \rangle|$). Soit $r \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x - r\alpha y, x - r\alpha y \rangle = \langle x, x \rangle - r\alpha \langle y, x \rangle - r\bar{\alpha} \langle x, y \rangle + r^2 \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - r \underbrace{\alpha \langle y, x \rangle}_{=|\langle y, x \rangle|} - r \underbrace{\bar{\alpha} \langle x, y \rangle}_{=|\langle y, x \rangle|} + r^2 \underbrace{\langle y, y \rangle}_{=|\alpha|=1} = A - 2Br + Cr^2, \end{aligned}$$

pour $A = \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$, $B = \alpha \langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle| \in \mathbb{R}^+$, $C = \langle y, y \rangle \in \mathbb{R}^+$.

Si $C = 0$, alors $B = 0$, et donc $\langle y, x \rangle = 0$ et Cauchy-Schwartz est vérifié.

Si $C \geq 0$, alors pour $r = B/C$: $0 \leq A - 2Br + Cr^2 = \frac{AC - B^2}{C}$, donc $B^2 \leq AC$, donc Cauchy-Schwartz est vérifié. \square

Proposition 2.4. $\|\cdot\|$ vérifie l'inégalité triangulaire, i.e. :

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration. $\|x + y\|^2 = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$. \square

On a donc $(H, \|\cdot\|)$ un e.v. normé, depuis lequel on peut alors définir une distance : $d(x, y) := \|x - y\|$.

Définition 2.5. Si H est complet pour d , on dit que H est un espace de Hilbert.

Quelques exemples d'espaces de Hilbert :

- (0) \mathbb{C}^n pour $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$;
- (1) Pour $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure, $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle := \int f \overline{g} d\mu$;
- (2) Pour $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ comme espace de mesure, on a l'équivalent dénombrable de l'exemple (0) :

$$\langle f, g \rangle_{\ell^2} := \int f \overline{g} d\# = \sum_{k \geq 1} f_k \overline{g_k}.$$

On note $\ell^2(\mathbb{N}) := L^2(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$.

Un dernière exemple bien moins trivial : les espaces de Sobolev.

Définition 2.6. Soit $s \geq 0$ un paramètre, on définit l'espace de Sobolev d'ordre s sur \mathbb{R}^n par :

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } (2\pi)^{-n} \int |\mathbb{F}u(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^s d\xi < +\infty \right\}. \quad (2.1)$$

On y définit le produit scalaire suivante pour $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle u, v \rangle_s := (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}u \overline{\mathbb{F}v} (1 + |\xi|)^s d\xi. \quad (2.2)$$

Remarque. Remarquons que $u \in H^s \iff \xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathbb{F}u(\xi)$ est dans L^2 .

Proposition 2.7. $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_s$ est un produit scalaire.

Démonstration. À v fixé, $u \mapsto \langle u, v \rangle_s$ est linéaire par linéarité de \mathbb{F} et par linéarité de l'intégrale.

Soient $u, v \in H^s$.

$$\langle u, v \rangle_s = (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}u \overline{\mathbb{F}v} \underbrace{(1 + |\xi|)^s}_{\in \mathbb{R}^+} d\xi = (2\pi)^{-n} \int \overline{\mathbb{F}v \mathbb{F}u} (1 + |\xi|)^s d\xi = \overline{\langle v, u \rangle_s}.$$

Finalement, pour $u \in H^s$:

$$\langle u, u \rangle_s = (2\pi)^{-n} \int \underbrace{|\mathbb{F}u|^2}_{\geq 0} \underbrace{(1 + |\xi|)^s}_{\geq 0} d\xi \geq 0,$$

et de plus, il est évident que $\langle u, u \rangle_s = 0 \iff u = 0$ puisque $\hat{u} = 0 \iff u = 0$. □

Par linéarité de Fourier, $H^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel, et de plus il est normé par le produit scalaire défini ci-dessus. Montrons alors que c'est un espace de Hilbert.

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in H^s$ une suite de Cauchy. $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathbb{F}u_k$ est de Cauchy dans L^2 , qui est complet. Donc il en existe une limite $V \in L^2$ t.q. $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathbb{F}u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} V$. Il existe $u \in L^2$ t.q. $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathbb{F}u = V$ car $(1 + |\xi|^2)^{-s/2} V \in L^2$, et \mathbb{F} est une bijection sur L^2 . De plus, $u \in H^s$ car $V = (1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathbb{F}u \in L^2$. Puisque $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{H^s} u$, on a que H^s est complet.

Pour un contre-exemple, on a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle := \int f \overline{g} dx$ n'est pas un Hilbert. En effet, pour $f \in L^2 \setminus C_0^\infty$, par densité de C_0^∞ dans L^2 , $\exists (f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C_0^\infty$ t.q. $f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} f$. De plus, (f_k) est de Cauchy dans C_0^∞ . Par l'absurde, si $\exists g \in C_0^\infty$ t.q. $f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} g$, par unicité de la limite, $g = f$, or $f \notin C_0^\infty$.

À partir d'ici, H désigne un espace de Hilbert quelconque.

Définition 2.8. Soit $y \in H$. On définit :

$$\begin{cases} f_1 : x \mapsto \langle x, y \rangle \\ f_2 : x \mapsto \langle y, x \rangle \\ f_3 : x \mapsto \|x\| \end{cases}$$

Proposition 2.9. f_i est continue pour $i = 1, 2, 3$.

Démonstration. 1. $|f_1(x_1) - f_1(x_2)| = |\langle x_1 - x_2, y \rangle| \leq \|x_1 - x_2\| \|y\| \xrightarrow{x_1 \rightarrow x_2} 0$. (f_1 est même uniformément continue et Lipschitzienne).

2. Idem pour f_2 , à permutation près.

3. La continuité vient directement de $|\|x\| - \|z\|| \leq \|x - z\|$.

□

Proposition 2.10. Pour $F \leq H$, $\bar{F} \leq H$.

Démonstration. Pour $x, y \in \bar{F}$, il existe $(x_k), (y_k) \in F^{\mathbb{N}}$ t.q. $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x$ et $y_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} y$.

Donc $F \ni x_k + y_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x + y$. De plus, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\underbrace{\lambda x_k}_{\in F} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \lambda x \in \bar{F}$.

□

Remarque. Contrairement aux e.v. de dimension finie, en dimension infinie, il est possible d'avoir un sous-e.v. strict dense (e.g. C_0^∞ dans L^2).

Proposition 2.11. $F := \{f \in L^2 \text{ t.q. } f = 0 \text{ sur } x_n > 0\}$ est un e.v. fermé dans L^2 .

Démonstration. Soit $g \in \bar{F}$. Il existe $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ t.q. $f_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} g$. Pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_{x_n > 0} |g|^2 dx = \int_{x_n > 0} |g - f_k|^2 dx \leq \|g - f_k\|_{L^2}^2 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

car $f_k \in F$ et $f_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} g$. Dès lors $\int_{x_n > 0} |g|^2 dx = 0$, i.e. $g \in F$. Donc $\bar{F} = F$.

□

2.1 Orthogonalité

Définition 2.12. Pour $x, y \in H$, x et y sont *orthogonaux*, noté $x \perp y$ lorsque $\langle x, y \rangle = 0$.

Pour $x \in H$, on définit $x^\perp := \{y \in H \text{ t.q. } \langle x, y \rangle = 0\}$, et pour $M \subset H$, on définit $M^\perp := \{y \in H \text{ t.q. } \forall x \in M : \langle x, y \rangle = 0\} = \bigcap_{x \in M} x^\perp$.

Proposition 2.13. Pour $x \in H$, $x^\perp \leq H$, et x^\perp est fermé.

Démonstration. À $x \in H$ fixé, on remarque que $x^\perp = f_1^{-1}(\{0\})$, or f_2 est continue. Donc x^\perp est fermé. Vérifier que x^\perp est un sous-e.v. est trivial.

□

Corollaire 2.14. Pour $M \leq H$, M^\perp est un sous-e.v. fermé de H .

Ce résultat découle directement du fait que M^\perp est une intersection d'e.v. fermés.

Définition 2.15. $E \subseteq H$ est dit *convexe* lorsque $\forall x, y \in E : \forall t \in [0, 1] : (1 - t)x + ty \in E$.

Exemple 2.1.

- tout sous-e.v. de H est convexe ;
- toute boule (ouverte ou fermée) dans H est convexe ;

— pour $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, u \in L^2(\Omega), E = \{v \in L^2 \text{ t.q. } u = v \text{ sur } \Omega\}$ est convexe.

Montrons également que E est fermé dans L^2 . Soit $f \in \bar{E}$. Il existe $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ t.q. $f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} f$.

$$\int_{\Omega} |u - f|^2 dx = \int_{\Omega} |f_k - f|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f|^2 dx \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Théorème 2.16. Soit $E \neq \emptyset$ convexe fermé dans H . Alors $\exists ! x \in E$ t.q. $\|x\| = \min_{z \in E} \|z\| = \inf_{z \in E} \|z\| =: \delta$.

Démonstration. **unicité :** soient $x, y \in E$ t.q. $\|x\| = \|y\| = \delta$. Par la formule du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Par convexité de E , $\frac{1}{2}(x + y) \in E$. Donc $\left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| \geq \delta$. On trouve alors :

$$\|x - y\|^2 \leq 2(\underbrace{\|x\|^2 + \|y\|^2}_{=2\delta^2}) - 4\delta^2 = 0.$$

On en déduit $\|x - y\| = 0$, i.e. $x = y$.

existence : Soit $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ t.q. $\|y_k\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \delta$ qui existe par définition de l'infimum. Par la règle du parallélogramme :

$$\|y_k - y_m\|^2 \leq 2(\underbrace{\|y_k\|^2 + \|y_m\|^2}_{\xrightarrow[k, m \rightarrow +\infty]{2\delta^2}}) - 4\delta^2 \xrightarrow[k, m \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Donc (y_k) est de Cauchy. Par complétude de H , $\exists x_0 \in H$ t.q. $y_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x_0$, et par fermeture de E , $x_0 \in E$.

De plus, par continuité de la norme, $\|y_k\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \|x_0\|$, et par unicité de la limite, $\|x_0\| = \delta$. \square

Exemple 2.2. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert, $u \in L^2(\Omega)$, $E = \{v \in L^2 \text{ t.q. } u = v \text{ sur } \Omega\}$ est un convexe fermé, donc par ce théorème, il existe un unique $u^* \in E$ qui minimise la norme : $u^* = u$ sur Ω et $u^* = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Théorème 2.17 (Décomposition orthogonale). Soit $M \leq H$ fermé. Alors :

1. $\forall x \in H : \exists ! (y, z) \in M \times M^\perp$ t.q. $x = y + z$;
2. ces valeurs y, z sont les points les plus proches de x dans M et M^\perp respectivement ;
3. Les applications $P : x \mapsto y$ et $Q : x \mapsto z$ sont linéaires ;
4. $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ (et donc P, Q sont continues) ;
5. P et Q sont les projections orthogonales de x sur M et M^\perp respectivement.

Démonstration.

1. **unicité :** si $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, pour $y_1, y_2 \in M$ et $z_1, z_2 \in M^\perp$, on a $\underbrace{y_1 - y_2}_{\in M} = \underbrace{z_2 - z_1}_{\in M^\perp}$. Or

$M \cap M^\perp = \{0\}$. Donc $y_1 = y_2$ et $z_1 = z_2$.

existence : $x + M$ est convexe (trivial par le fait que $M \leq H$). Montrons que $x + M$ est fermé. Soit $u \in \overline{x + M}$. Il existe $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (x + M)^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u$. $\forall k \in \mathbb{N} : x + M \ni u_k = x + y_k$. On en déduit $y_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u - x$. Par fermeture de M , on a $u - x \in M$, et donc $u \in x + M$ (i.e. $x + M$ est fermé).

Soit $z \in x + M$ l'élément qui minimise la norme. On pose $y := x - z \in M$. Montrons alors que $z \in x + M$. Soit $w \in M$; WLOG, supposons $\|w\| = 1$. Puisque $z \in x + M$, $\forall \alpha \in \mathbb{C} : z - \alpha w \in x + M$. Donc :

$$\|z\|^2 \leq \|z - \alpha w\|^2 = \|z\|^2 - 2\Re \alpha \langle w, z \rangle + |\alpha|^2.$$

$0 = 2\Re \alpha \langle w, z \rangle - |\alpha|^2$. En particulier, pour $\alpha = \langle z, w \rangle : 0 = \|\langle z, w \rangle\|^2$, donc $\langle z, w \rangle = 0$. Dès lors $z \in M^\perp$.

2. Soit $Y \in M$. Montrons que $\|x - Y\| \geq \|x - y\| = \|z\|$:

$$\|x - Y\| = \|y + z - Y\| = \|(y - Y) + z\| = \|y - Y\| + \|z\| \geq \|z\|.$$

Idem pour $Z \in M^\perp$: $\|x - Z\| \geq \|x - y\| = \|z\|$.

3. Soient $x_1, x_2 \in H$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. On a $\alpha_1 x_1 = \alpha_1 P x_1 + \alpha_1 Q x_1$, et $\alpha_2 x_2 = \alpha_2 P x_2 + \alpha_2 Q x_2$. Donc :

$$P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + Q(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 P x_1 + \alpha_1 Q x_1 + \alpha_2 P x_2 + \alpha_2 Q x_2,$$

et donc :

$$\underbrace{P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \alpha_1 P x_1 - \alpha_2 P x_2}_{\in M} = \underbrace{\alpha_1 Q x_1 + \alpha_2 Q x_2 - Q(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}_{\in M^\perp}.$$

Or $M \cap M^\perp = \{0\}$, donc $P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 P x_1 + \alpha_2 P x_2$, et $\alpha_1 Q x_1 + \alpha_2 Q x_2 = Q(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$.

4. Par Pythagore $\|x\|^2 = \|P x\|^2 + \|Q x\|^2$. Donc $\|P x\| \leq \|x\|$ et $\|Q x\| \leq \|x\|$, i.e. P et Q sont Lipschitziennes, donc en particulier continues. □

Corollaire 2.18. Si $M \leq H$, avec $M \neq H$, il existe $y \in H$ t.q. $y \perp M$.

Démonstration. Pour $x \in H \setminus M$, $x = P x + Q x$, où $Q x \neq 0$, et $Q x \perp M$. □

Corollaire 2.19. Si $M \leq H$ est fermé, alors $M = M^{\perp\perp}$.

Démonstration. La première inclusion est triviale : si $x \in M$, alors $x \perp M^\perp$.

La seconde inclusion se démontre comme suit : soit $x \in M^{\perp\perp} \subseteq H$. $x = y + z$ où $y \in M$ et $z \in M^\perp$. Or $0 = \langle x, z \rangle = \langle y + z, z \rangle = \langle y, z \rangle + \|z\|^2$, et $\langle y, z \rangle = 0$ par définition d'orthogonalité. Donc $\|z\| = 0$ et $z = 0$, i.e. $x = y \in M$. □

Lemme 2.20 (Lemme de Riesz). Soit $L : H \rightarrow \mathbb{C}$, une forme linéaire continue. Alors $\exists! y \in H$ t.q. $L = \langle \cdot, y \rangle$.

Démonstration. **unicité :** pour $y_1, y_2 \in H$ t.q. $\forall x \in H : \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$, on a $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0$, donc $y_1 - y_2 \in H^\perp = \{0\}$, i.e. $y_1 = y_2$.

existence : si $L \equiv 0$, alors $y = 0$. Supposons alors que L n'est pas identiquement nulle. $\text{Ker } L \subsetneq H$ et est fermé par continuité de L . Dès lors, il existe $z \in H$, $z \neq 0$ t.q. $z \perp \text{Ker } L$. WLOG, supposons $\|z\| = 1$. Posons $y := \overline{L z}$ et $u := (L x)z - (L z)x$. Calculons :

$$L u = (L x)L z - (L z)L x = 0,$$

donc $u \in \text{Ker } L$, et donc $0 = \langle u, z \rangle = (L x) \langle z, z \rangle - (L z) \langle x, z \rangle = L x - (L z) \langle x, z \rangle$. Dès lors, $L x = (L z) \langle x, z \rangle = \langle x, y \rangle$. □

2.2 Systèmes orthonormaux

Définition 2.21. Pour V un e.v. et $S \subseteq V$, on note $\text{Vect } S$ l'e.v. engendré par S .

$(e_\alpha)_{\alpha \in A} \subset V$ est appelé *orthonormal* lorsque $\forall \alpha, \beta \in A : \langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha, \beta}$.

Pour $x \in H$, on définit $\hat{x}(\alpha) := \langle x, e_\alpha \rangle$.

Les $\hat{x}(\alpha)$ sont les coefficients de Fourier relativement au système $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Exemple 2.3. Sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, les $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}}$ sont les $e_\alpha : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto \frac{e^{i\alpha t}}{\sqrt{2\pi}}$.

Théorème 2.22. Pour H un espace de Hilbert et $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ un système orthonormal, $F \subset A$ fini, et $M_F := \text{Vect } e_\alpha_{\alpha \in F}$, on a :

1. si $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ est nulle sur $A \setminus F$, pour $y = \sum_{\alpha \in F} \varphi(\alpha) e_\alpha$, alors :

$$\forall \alpha \in A : \varphi(\alpha) = \hat{y}(\alpha).$$

$$\text{De plus, } \|y\|^2 = \sum_{\alpha \in F} |\varphi(\alpha)|^2.$$

2. Si $x \in H$, $s_F(x) := \sum_{\alpha \in F} \hat{x}(\alpha) e_\alpha \in M_F$. Si $s \in M_F \setminus \{s_F(x)\}$, alors :

$$\|x - s_F(x)\| \leq \|x - s\|.$$

$$\text{De plus : } \sum_{\alpha \in F} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2.$$