

MATH-F-211 : Topologie

R. Petit

année académique 2016 - 2017

Table des matières

1	Topologie générale	1
1.1	Espaces métriques	1
1.1.1	Sous-espaces métriques	3
1.2	Suites et limites	4
1.3	Fonctions et applications continues	5
1.4	Ensembles ouverts et fermés	5
1.5	Métriques équivalentes	6

Chapitre 1

Topologie générale

1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1. Soit M un ensemble non vide. Une fonction $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ est une *métrique* si d satisfait :

M1. $\forall x, y \in M : d(x, y) \geq 0$ avec $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

M2. $\forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x)$;

M3. $\forall x, y, z \in M : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Le couple (M, d) est appelé *espace métrique*.

Exemple 1.1.1. La métrique euclidienne sur \mathbb{R} est définie par :

$$d_E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto |x - y|.$$

Démonstration. EXERCICE. □

Exemple 1.1.2. La métrique euclidienne sur \mathbb{R}^n est définie par :

$$d_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Lemme 1.1.2 (Inégalité de Cauchy-Schwartz). Soient $r, s \in \mathbb{R}^n$. Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^n r_i s_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n r_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n s_i^2 \right).$$

Démonstration. Soit la fonction :

$$F(t) = \sum_{j=1}^n (r_j + t s_j)^2 = \left(\sum_{j=1}^n s_j^2 \right) t^2 + \left(2 \sum_{j=1}^n r_j s_j \right) t + \sum_{j=1}^n r_j^2.$$

La fonction $F(t)$ est positive pour tout t car c'est une somme de valeurs positives. Dès lors, son discriminant est négatif. On a alors :

$$\left(2 \sum_{j=1}^n r_j s_j \right)^2 - 4 \left(\sum_{j=1}^n r_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n s_j^2 \right) \leq 0.$$

En divisant par 4 de part et d'autre et en réarrangeant l'inégalité, on obtient :

$$\left(\sum_{j=1}^n r_j s_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n r_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n s_j^2 \right).$$

□

Preuve de l'exemple 1.1.2. M1 et M2 sont triviaux.

Pour M3, posons pour $1 \leq i \leq n$: $r_i := x_i - y_i$ et $s_i := y_i - z_i$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n r_i s_i &\leq 2 \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n r_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n s_i^2 \right)} \\ 2 \sum_{i=1}^n r_i s_i + \sum_{i=1}^n (r_i^2 + s_i^2) &\leq 2 \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n r_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n s_i^2 \right)} + \sum_{i=1}^n (r_i^2 + s_i^2) \\ \sum_{i=1}^n (r_i + s_i)^2 &\leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n s_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n r_i^2} \right)^2 \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n (r_i + s_i)^2} &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n r_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n s_i^2} \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2} \\ d_E(x, z) &\leq d_E(y, z) + d_E(x, y). \end{aligned}$$

□

Définition 1.1.3. Soit $M \neq \emptyset$. On définit la *métrique discrète* sur M par :

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}.$$

Démonstration. M1 et M2 sont triviaux.

Pour M3 :

- soit $x \neq z$, et donc $x \neq y$ ou $y \neq z$, ce qui implique $d(x, y) + d(y, z) \geq 1 = d(x, z)$;
- soit $x = z$, et donc $0 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

□

Définition 1.1.4. La *métrique de Manhattan* est définie par :

$$d_M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Démonstration. M1 et M2 sont triviaux.

Pour M3, on pose $x, y, z \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} d_M(x, z) &= d_E(x_1, z_1) + d_E(x_2, z_2) \leq d_E(x_1, y_1) + d_E(y_1, z_1) + d_E(x_2, y_2) + d_E(y_2, z_2) \\ &= (d_E(x_1, y_1) + d_E(x_2, y_2)) + (d_E(y_1, z_1) + d_E(y_2, z_2)) = d_M(x, y) + d_M(y, z). \end{aligned}$$

□

Définition 1.1.5. Soit $\mathcal{C}([a, b])$, l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$, et on définit :

$$\begin{aligned} - d_1 : \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b]) &\rightarrow \mathbb{R} : (f, g) \mapsto \int_a^b |(f - g)(x)| dx ; \\ - d_2 : \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b]) &\rightarrow \mathbb{R} : (f, g) \mapsto \sqrt{\int_a^b ((f - g)(x))^2 dx} ; \\ - d_\infty : \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b]) &\rightarrow \mathbb{R} : (f, g) \mapsto \sup \left\{ |(f - g)(x)| \text{ t.q. } x \in [a, b] \right\}. \end{aligned}$$

Définition 1.1.6. Soit $\mathcal{C}^1([a, b])$, l'ensemble des fonctions continument différentiables sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . On définit :

$$\begin{aligned} d : \mathcal{C}^1([a, b]) \times \mathcal{C}^1([a, b]) &\rightarrow \mathbb{R} : (f, g) \mapsto \sup \left\{ |(f - g)(x)| \text{ t.q. } x \in [a, b] \right\} + \sup \left\{ |(f' - g')(x)| \text{ t.q. } x \in [a, b] \right\} \\ &= d_\infty(f, g) + d_\infty(f', g'). \end{aligned}$$

Remarque. Si f et g sont k fois continument dérivables, alors on définit :

$$d(f, g) = \sum_{i=0}^k d_\infty(f^{(i)}, g^{(i)}).$$

1.1.1 Sous-espaces métriques

Proposition 1.1.7. Soit (M, d) un espace métrique. Soit $A \subset M$, non vide. Alors (A, d_A) est un espace métrique, où :

$$d_A = d|_{A \times A}.$$

Définition 1.1.8. Soient (M, d_M) et (N, d_N) deux espaces métriques. Soit $A \subset M$ non-vide. On définit trois métriques distinctes :

$$\begin{aligned} d_1 : (M \times N)^2 &\rightarrow \mathbb{R} : ((x, y), (x', y')) \mapsto d_M(x, x') + d_N(y, y') \\ d_2 : (M \times N)^2 &\rightarrow \mathbb{R} : ((x, y), (x', y')) \mapsto \sqrt{d_M(x, x') + d_N(y, y')} \\ d_\infty : (M \times N)^2 &\rightarrow \mathbb{R} : ((x, y), (x', y')) \mapsto \max \{ d_M(x, x'), d_N(y, y') \} \end{aligned}$$

Démonstration. EXERCICE.

□

Définition 1.1.9. Soit (M, d) un espace métrique et soient $a \in M, r \in \mathbb{R}_0^+$. On définit la *boule ouverte* centrée en a de rayon r par :

$$B(a, r) := \{x \in M \text{ t.q. } d(x, a) < r\}.$$

Définition 1.1.10. Soit $f : (M, d_M) \times (N, d_N)$, une application entre deux espaces métriques. Si f est une bijection et :

$$\forall x, y \in M : d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y),$$

alors on dit que f est une *isométrie*.

Remarque. L'ensemble des isométries d'un espace métrique dans lui-même forme un groupe pour la composition.

1.2 Suites et limites

Définition 1.2.1. Une suite (x_n) dans un espace métrique (M, d) converge vers un point $a \in M$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Lemme 1.2.2. Soit (x_n) une suite dans un espace métrique (M, d) . S'il existe a et b dans M tels que $x_n \rightarrow a$ et $x_n \rightarrow b$, alors $a = b$.

Lemme 1.2.3. Soient (M, d_M) et (N, d_N) deux espaces métriques. Soient (x_n) une suite dans M et (y_n) une suite dans N . Alors la suite $(x_n, y_n)_n$ dans $M \times N$ converge par d en $(a, b) \in M \times N$ si et seulement si $x_n \rightarrow a$ et $y_n \rightarrow b$, où $d \in \{d_1, d_2, d_\infty\}$.

Remarque. Ici, la convergence est assurée par les trois métriques si elle est constatée par une seule. En réalité, de manière générale, la convergence dépend de la métrique.

Exemple 1.2.1. La fonction :

$$f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1] : x \mapsto \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{si } \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On observe que :

$$\begin{aligned} d_1(f_n, 0) &= \int_0^1 |f_n(x) - 0(x)| dx = \int_0^1 |f_n(x)| dx = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ d_2(f_n, 0) &= \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx \leq \sqrt{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ d_\infty(f_n, 0) &= 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Il y a donc convergence vers 0 (la fonction nulle) pour d_1 et d_2 dans $\mathcal{C}([0, 1])$ mais vers 1 (la fonction constante valant 1) pour d_∞ .

Définition 1.2.4. Une suite (x_n) dans un espace métrique (M, d) est dite *de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m, n \geq N : d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Lemme 1.2.5. Soit (x_n) une suite convergente dans un espace métrique (M, d) . Alors (x_n) est de Cauchy.

Remarque. On ne peut pas cependant dire que la réciproque est vraie : le cas est trop général.

Exemple 1.2.2. Si $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ est une suite convergente en $\sqrt{2}$ dans \mathbb{R} , alors (x_n) est de Cauchy. Or (x_n) ne converge pas dans \mathbb{Q} .

Définition 1.2.6. Soient (M, d) , un espace métrique et $A \subseteq M$. A est dit *borné* lorsque :

$$\exists L \in \mathbb{R}^+_0 \text{ t.q. } \forall x, y \in M : d(x, y) \leq L.$$

De plus, la suite $(x_n) \subset M$ est dite *bornée* lorsque le sous-ensemble $\{x_n \text{ t.q. } n \in \mathbb{N}\} \subset M$ est borné.

Proposition 1.2.7. Un sous-ensemble A de M , où (M, d) est un espace métrique, est borné si et seulement si :

$$\exists x_0 \in M, R \in \mathbb{R}^+_0 \text{ t.q. } A \subset B(x_0, R).$$

Démonstration. □

Théorème 1.2.8 (Bolzano-Weierstrass). Soit $(x_n) \subset \mathbb{R}^m$. Si (x_n) est bornée, alors il existe une sous-suite de (x_n) convergente.

1.3 Fonctions et applications continues

Définition 1.3.1. Soit $f : (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$, une application entre deux espaces métriques. On dit que f est continue en $a \in M$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \text{ t.q. } d_M(x, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

On dit que f est continue lorsqu'elle est continue en tout point a de M .

Lemme 1.3.2. Soit $f : M \rightarrow N$, une application entre deux espaces métriques. f est continue en $a \in M$ si et seulement si :

$$\forall (x_n) \subset M : (x_n \rightarrow a) \Rightarrow (f(x_n) \rightarrow f(a)).$$

Proposition 1.3.3. Soient $(M, d_M), (N, d_N), (P, d_P)$ trois espaces métriques. Soient $f : (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$ et $g : (N, d_N) \rightarrow (P, d_P)$ continues. Alors la fonction $g \circ f$ est également continue.

1.4 Ensembles ouverts et fermés

Définition 1.4.1. Soit (M, d) un espace métrique. Un sous-ensemble $U \subseteq M$ est dit :

- ouvert si $\forall x \in U : \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } B(x, \varepsilon) \subseteq U$;
- fermé si son complémentaire $(M \setminus U)$ est ouvert.

Lemme 1.4.2. Soit $(x_n) \subset M$. La suite (x_n) converge en $a \in M$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ si et seulement si pour tout ouvert $U \subseteq M$: si $a \in U$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N : x_n \in U$.

Lemme 1.4.3. Soit $f : M \rightarrow N$ une application allant d'un espace métrique dans un autre. L'application f est continue si et seulement si pour tout ouvert $u \subseteq M : f^{-1}(U)$ est un ouvert.

Démonstration. Supposons d'abord f continue et prenons $U \subset N$ un ouvert et $a \in f^{-1}(U)$. Par ouverture de U , on a :

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } B(f(a), \varepsilon) \subseteq U.$$

Également, par continuité de f , on sait que

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } \forall x \in f^{-1}(U) : d_M(x, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Autrement dit, si $x \in B(a, \delta)$, alors $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$. Et donc $f(x) \in U$, ou encore $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$ qui est donc ouvert.

Supposons alors que pour tout ouvert $U \subseteq N$, $f^{-1}(U)$ est ouvert. Soient $a \in M$ et $\varepsilon > 0$. On sait que $B(f(a), \varepsilon)$ est un ouvert, et donc $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ est également un ouvert. Or on sait que $a \in f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$. Dès lors, il existe $\delta > 0$ tel que $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$. Ou encore, de manière équivalente, si $d_M(x, a) < \delta$, alors $d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon$. La fonction f est donc continue. \square

Remarque. L'intérêt de ces lemmes est d'avoir une caractérisation de la convergence et de la continuité ne dépendant pas de la métrique mais uniquement de la notion d'ouvert.

Lemme 1.4.4. Soit (M, d) un espace métrique. Alors :

1. M et \emptyset sont des ouverts ;
2. si U_1, \dots, U_k sont des ouverts de M , alors $\bigcap_{i=1}^k U_i$ est un ouvert de M ;
3. si $\{U_i \text{ t.q. } i \in I\}$ est une collection quelconque d'ouverts de M , alors $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de M .

Démonstration. Le point 1 est trivial.

Pour le point 2, prenons $a \in \bigcap_{i=1}^n U_i$. On sait que pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $B(a, \varepsilon_i) \subseteq U_i$. Prenons donc $\varepsilon := \min_i \{\varepsilon_i\}$, on sait donc que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : B(a, \varepsilon) \subseteq U_i.$$

On peut donc dire que $B(a, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i$.

Pour le point 3, prenons $a \in \bigcup_{i \in I} U_i$. On sait donc qu'il existe $j \in I$ tel que $a \in U_j$, et donc, par ouverture de U_j , il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subseteq U_j \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. \square

1.5 Métriques équivalentes

Définition 1.5.1. Soit M un ensemble non-vidé et soient d et d' , deux métriques sur M . On dit qu'elles sont *topologiquement équivalentes* lorsqu'elles déterminent les mêmes ouverts.

Corollaire 1.5.2. Soit M un ensemble non-vidé et soient d, d' deux métriques topologiquement équivalentes sur M . Une suite $(x_n) \subset M$ converge par rapport à d si et seulement si elle converge par rapport à d' .

Démonstration. Les deux métriques d et d' déterminent les mêmes ouverts. Dès lors, par le Lemme 1.4.2, on a la double implication de la convergence. \square

Théorème 1.5.3. Les trois métriques d_1, d_2, d_∞ sont topologiquement équivalentes.

Démonstration. En notant d l'une de ces métriques et d' une autre, pour toute boule ouverte B_d pour la métrique d , il est possible de déterminer une boule ouverte $B_{d'}$ pour la métrique d' telle que $B_{d'} \subseteq B_d$. \square

Théorème 1.5.4. Soit M un espace métrique. Pour tout $x, y \in M$, on a :

$$\frac{1}{2} d_1(x, y) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} d_2(x, y) \leq d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y).$$

Définition 1.5.5. Soit M un ensemble non-vidé et soient d, d' deux métriques sur M . Ces métriques sont dites *Lipschitz-équivalentes* lorsque :

$$\exists A, B \geq 0 \text{ t.q. } \forall x, y \in M : Ad(x, y) \leq d'(x, y) \leq Bd(x, y).$$

Remarque. Par le Théorème 1.5.4, on sait que les métriques d_1, d_2, d_∞ sont Lipschitz-équivalentes.

Lemme 1.5.6. Soit M un ensemble non-vidé et soient d, d' deux métriques sur M . Si d et d' sont Lipschitz-équivalentes, alors elles sont topologiquement équivalentes.