

# MATH-F-211 : Topologie

R. Petit

année académique 2016 - 2017

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Topologie générale</b>	<b>1</b>
1.1	Espaces métriques . . . . .	1
1.1.1	Sous-espaces métriques . . . . .	3
1.2	Suites et limites . . . . .	4
1.3	Fonctions et applications continues . . . . .	5
1.4	Ensembles ouverts et fermés . . . . .	5

# Chapitre 1

## Topologie générale

### 1.1 Espaces métriques

**Définition 1.1.1.** Soit  $M$  un ensemble non vide. Une fonction  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  est une *métrique* si  $d$  satisfait :

M1.  $\forall x, y \in M : d(x, y) \geq 0$  avec  $d(x, y) = 0 \iff x = y$  ;

M2.  $\forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x)$  ;

M3.  $\forall x, y, z \in M : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Le couple  $(M, d)$  est appelé *espace métrique*.

*Exemple 1.1.1.* La métrique euclidienne sur  $\mathbb{R}$  est définie par :

$$d_E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto |x - y|.$$

*Démonstration.* EXERCICE. □

*Exemple 1.1.2.* La métrique euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$  est définie par :

$$d_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

**Lemme 1.1.2** (Inégalité de Cauchy-Schwartz). Soient  $r, s \in \mathbb{R}^n$ . Alors :

$$\left( \sum_{i=1}^n r_i s_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n r_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n s_i^2 \right).$$

*Démonstration.* Soit la fonction :

$$F(t) = \sum_{j=1}^n (r_j + t s_j)^2 = \left( \sum_{j=1}^n s_j^2 \right) t^2 + \left( 2 \sum_{j=1}^n r_j s_j \right) t + \sum_{j=1}^n r_j^2.$$

La fonction  $F(t)$  est positive pour tout  $t$  car c'est une somme de valeurs positives. Dès lors, son discriminant est négatif. On a alors :

$$\left( 2 \sum_{j=1}^n r_j s_j \right)^2 - 4 \left( \sum_{j=1}^n r_j^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n s_j^2 \right) \leq 0.$$

En divisant par 4 de part et d'autre et en réarrangeant l'inégalité, on obtient :

$$\left( \sum_{j=1}^n r_j s_j \right)^2 \leq \left( \sum_{j=1}^n r_j^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n s_j^2 \right).$$

□

*Preuve de l'exemple 1.1.2.* M1 et M2 sont triviaux.

Pour M3, posons pour  $1 \leq i \leq n$  :  $r_i := x_i - y_i$  et  $s_i := y_i - z_i$ .

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n r_i s_i &\leq 2 \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n r_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n s_i^2 \right)} \\ 2 \sum_{i=1}^n r_i s_i + \sum_{i=1}^n (r_i^2 + s_i^2) &\leq 2 \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n r_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n s_i^2 \right)} + \sum_{i=1}^n (r_i^2 + s_i^2) \\ \sum_{i=1}^n (r_i + s_i)^2 &\leq \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n s_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n r_i^2} \right)^2 \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n (r_i + s_i)^2} &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n r_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n s_i^2} \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2} \\ d_E(x, z) &\leq d_E(y, z) + d_E(x, y). \end{aligned}$$

□

**Définition 1.1.3.** Soit  $M \neq \emptyset$ . On définit la *métrique discrète* sur  $M$  par :

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}.$$

*Démonstration.* M1 et M2 sont triviaux.

Pour M3 :

- soit  $x \neq z$ , et donc  $x \neq y$  ou  $y \neq z$ , ce qui implique  $d(x, y) + d(y, z) \geq 1 = d(x, z)$  ;
- soit  $x = z$ , et donc  $0 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

□

**Définition 1.1.4.** La *métrique de Manhattan* est définie par :

$$d_M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

*Démonstration.* M1 et M2 sont triviaux.

Pour M3, on pose  $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ . On a alors :

$$\begin{aligned} d_M(x, z) &= d_E(x_1, z_1) + d_E(x_2, z_2) \leq d_E(x_1, y_1) + d_E(y_1, z_1) + d_E(x_2, y_2) + d_E(y_2, z_2) \\ &= (d_E(x_1, y_1) + d_E(x_2, y_2)) + (d_E(y_1, z_1) + d_E(y_2, z_2)) = d_M(x, y) + d_M(y, z). \end{aligned}$$

□

**Définition 1.1.5.** Soit  $\mathcal{C}([a, b])$ , l'ensemble des fonctions continues sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soient  $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ , et on définit :

$$\begin{aligned} - d_1 : \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b]) &\rightarrow \mathbb{R} : (f, g) \mapsto \int_a^b |(f - g)(x)| dx ; \\ - d_2 : \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b]) &\rightarrow \mathbb{R} : (f, g) \mapsto \sqrt{\int_a^b ((f - g)(x))^2 dx} ; \\ - d_\infty : \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b]) &\rightarrow \mathbb{R} : (f, g) \mapsto \sup \left\{ |(f - g)(x)| \text{ t.q. } x \in [a, b] \right\}. \end{aligned}$$

**Définition 1.1.6.** Soit  $\mathcal{C}^1([a, b])$ , l'ensemble des fonctions continument différentiables sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On définit :

$$\begin{aligned} d : \mathcal{C}^1([a, b]) \times \mathcal{C}^1([a, b]) &\rightarrow \mathbb{R} : (f, g) \mapsto \sup \left\{ |(f - g)(x)| \text{ t.q. } x \in [a, b] \right\} + \sup \left\{ |(f' - g')(x)| \text{ t.q. } x \in [a, b] \right\} \\ &= d_\infty(f, g) + d_\infty(f', g'). \end{aligned}$$

*Remarque.* Si  $f$  et  $g$  sont  $k$  fois continument dérivables, alors on définit :

$$d(f, g) = \sum_{i=0}^k d_\infty(f^{(i)}, g^{(i)}).$$

### 1.1.1 Sous-espaces métriques

**Proposition 1.1.7.** Soit  $(M, d)$  un espace métrique. Soit  $A \subset M$ , non vide. Alors  $(A, d_A)$  est un espace métrique, où :

$$d_A = d|_{A \times A}.$$

**Définition 1.1.8.** Soient  $(M, d_M)$  et  $(N, d_N)$  deux espaces métriques. Soit  $A \subset M$  non-vide. On définit trois métriques distinctes :

$$\begin{aligned} d_1 : (M \times N)^2 &\rightarrow \mathbb{R} : ((x, y), (x', y')) \mapsto d_M(x, x') + d_N(y, y') \\ d_2 : (M \times N)^2 &\rightarrow \mathbb{R} : ((x, y), (x', y')) \mapsto \sqrt{d_M(x, x') + d_N(y, y')} \\ d_\infty : (M \times N)^2 &\rightarrow \mathbb{R} : ((x, y), (x', y')) \mapsto \max \{ d_M(x, x'), d_N(y, y') \} \end{aligned}$$

*Démonstration.* EXERCICE.

□

**Définition 1.1.9.** Soit  $(M, d)$  un espace métrique et soient  $a \in M, r \in \mathbb{R}_0^+$ . On définit la *boule ouverte* centrée en  $a$  de rayon  $r$  par :

$$B(a, r) := \{x \in M \text{ t.q. } d(x, a) < r\}.$$

**Définition 1.1.10.** Soit  $f : (M, d_M) \times (N, d_N)$ , une application entre deux espaces métriques. Si  $f$  est une bijection et :

$$\forall x, y \in M : d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y),$$

alors on dit que  $f$  est une *isométrie*.

*Remarque.* L'ensemble des isométries d'un espace métrique dans lui-même forme un groupe pour la composition.

## 1.2 Suites et limites

**Définition 1.2.1.** Une suite  $(x_n)$  dans un espace métrique  $(M, d)$  converge vers un point  $a \in M$  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : d(x_n, a) < \varepsilon.$$

**Lemme 1.2.2.** Soit  $(x_n)$  une suite dans un espace métrique  $(M, d)$ . S'il existe  $a$  et  $b$  dans  $M$  tels que  $x_n \rightarrow a$  et  $x_n \rightarrow b$ , alors  $a = b$ .

**Lemme 1.2.3.** Soient  $(M, d_M)$  et  $(N, d_N)$  deux espaces métriques. Soient  $(x_n)$  une suite dans  $M$  et  $(y_n)$  une suite dans  $N$ . Alors la suite  $(x_n, y_n)_n$  dans  $M \times N$  converge par  $d$  en  $(a, b) \in M \times N$  si et seulement si  $x_n \rightarrow a$  et  $y_n \rightarrow b$ , où  $d \in \{d_1, d_2, d_\infty\}$ .

*Remarque.* Ici, la convergence est assurée par les trois métriques si elle est constatée par une seule. En réalité, de manière générale, la convergence dépend de la métrique.

*Exemple 1.2.1.* La fonction :

$$f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1] : x \mapsto \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{si } \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On observe que :

$$\begin{aligned} d_1(f_n, 0) &= \int_0^1 |f_n(x) - 0(x)| dx = \int_0^1 |f_n(x)| dx = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ d_2(f_n, 0) &= \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx \leq \sqrt{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ d_\infty(f_n, 0) &= 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Il y a donc convergence vers 0 (la fonction nulle) pour  $d_1$  et  $d_2$  dans  $\mathcal{C}([0, 1])$  mais vers 1 (la fonction constante valant 1) pour  $d_\infty$ .

**Définition 1.2.4.** Une suite  $(x_n)$  dans un espace métrique  $(M, d)$  est dite *de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m, n \geq N : d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

**Lemme 1.2.5.** Soit  $(x_n)$  une suite convergente dans un espace métrique  $(M, d)$ . Alors  $(x_n)$  est de Cauchy.

*Remarque.* On ne peut pas cependant dire que la réciproque est vraie : le cas est trop général.

*Exemple 1.2.2.* Si  $(x_n) \subset \mathbb{Q}$  est une suite convergente en  $\sqrt{2}$  dans  $\mathbb{R}$ , alors  $(x_n)$  est de Cauchy. Or  $(x_n)$  ne converge pas dans  $\mathbb{Q}$ .

**Définition 1.2.6.** Soient  $(M, d)$ , un espace métrique et  $A \subseteq M$ .  $A$  est dit *borné* lorsque :

$$\exists L \in \mathbb{R}^+_0 \text{ t.q. } \forall x, y \in M : d(x, y) \leq L.$$

De plus, la suite  $(x_n) \subset M$  est dite *bornée* lorsque le sous-ensemble  $\{x_n \text{ t.q. } n \in \mathbb{N}\} \subset M$  est borné.

**Proposition 1.2.7.** Un sous-ensemble  $A$  de  $M$ , où  $(M, d)$  est un espace métrique, est borné si et seulement si :

$$\exists x_0 \in M, R \in \mathbb{R}^+_0 \text{ t.q. } A \subset B(x_0, R).$$

*Démonstration.* □

**Théorème 1.2.8** (Bolzano-Weierstrass). Soit  $(x_n) \subset \mathbb{R}^m$ . Si  $(x_n)$  est bornée, alors il existe une sous-suite de  $(x_n)$  convergente.

## 1.3 Fonctions et applications continues

**Définition 1.3.1.** Soit  $f : (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$ , une application entre deux espaces métriques. On dit que  $f$  est continue en  $a \in M$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \text{ t.q. } d_M(x, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

On dit que  $f$  est continue lorsqu'elle est continue en tout point  $a$  de  $M$ .

**Lemme 1.3.2.** Soit  $f : M \rightarrow N$ , une application entre deux espaces métriques.  $f$  est continue en  $a \in M$  si et seulement si :

$$\forall (x_n) \subset M : (x_n \rightarrow a) \Rightarrow (f(x_n) \rightarrow f(a)).$$

**Proposition 1.3.3.** Soient  $(M, d_M), (N, d_N), (P, d_P)$  trois espaces métriques. Soient  $f : (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$  et  $g : (N, d_N) \rightarrow (P, d_P)$  continues. Alors la fonction  $g \circ f$  est également continue.

## 1.4 Ensembles ouverts et fermés