

Modélisation et simulation — INFOF-305

R. Petit

Année académique 2016 - 2017

Table des matières

1	Introduction aux systèmes dynamiques	1
1.1	Généralités	1
1.2	Systèmes dynamiques complexes	2
1.3	Rétroaction	3
2	Automates — systèmes à temps discret et à espace d'états discret	4
3	Systèmes continus	5
3.1	Systèmes réguliers	5
3.2	Espace et portrait de phases	6
3.3	Stabilité des points d'équilibre	6
3.3.1	Critère de Liapounov	7
4	Systèmes dynamiques linéaires à temps continu	8
4.1	Stabilité et valeurs propres	9
4.2	Systèmes linéaires du premier ordre	11
4.3	Systèmes linéaires autonomes du second ordre	11
4.4	Trajectoires et valeurs propres distinctes	12
4.4.1	Systèmes non-simples	13
4.5	Trajectoires et valeurs propres identiques (non-distinctes)	13
4.6	Trajectoires et valeurs propres complexes	14
5	Systèmes dynamiques non-linéaires à temps continu	15
5.1	Bifurcations	15
5.2	Linéarisation de systèmes non-linéaires	15
5.2.1	Linéarisation et stabilité	16
5.3	Systèmes dynamiques non-linéaires à temps continu d'ordre 1	16
5.3.1	Méthode géométrique	16
5.4	Systèmes dynamiques non-linéaires à temps continu d'ordre 2	17
5.5	Invariants	18
5.5.1	Invariants dans un espace des phases de dimension 1	18
5.5.2	Invariants dans un espace des phases de dimension 2	18
5.5.3	Invariants dans un espace des phases de dimension 3	18
5.6	Fractales	18
5.6.1	Attracteurs	20
5.6.2	Chaos et exposant de Liapounov	20

6	Systèmes dynamiques à temps discret	21
6.1	Solutions d'une équation aux différences	21
6.2	États d'équilibre	22
6.3	Équations non-linéaires homogènes d'ordre 1	23
6.3.1	Cycles et stabilité	23
6.3.2	Attracteurs et bifurcations	24
7	Simulation statistique	25
7.1	Méthode de Monte Carlo	25
7.2	Génération de nombres aléatoires	25
7.2.1	Générer des nombres uniformes	26
7.2.2	Tests du caractère aléatoire	26
7.2.3	Générer des nombres aléatoires d'une distribution donnée	27

1 Introduction aux systèmes dynamiques

1.1 Généralités

Définition 1.1. Soit T , l'ensemble de temps. Selon la nature de T , on parle de système à temps discret, ou de système à temps continu. Les applications :

$$u : T \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad y : T \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^m$$

sont respectivement appelées *fonction d'entrée* et *fonction de sortie*. L'application u correspond aux apports que subit le système, alors que l'application y correspond à l'observation du système.

Le couple d'applications (u, y) appartient à $\Omega \times \Gamma$, où Ω est l'ensemble des fonctions d'entrées acceptables et Γ est l'ensemble des fonctions de sortie acceptables.

Remarque. $\forall (u, y) \in \Omega \times \Gamma : \forall t \in T : (u(t), y(t)) \in U \times Y$.

Définition 1.2. On appelle variable d'état la variable $x : T \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}^d$ représentant l'état interne du système en fonction du temps.

L'évolution du système sera décrite comme un système d'équations différentielles ou d'équations aux différences par rapport à la variable d'état.

Remarque. Le fait qu'une variable supplémentaire soit introduite induit que la connaissance de $(t_0, u, y) \in T \times \Omega \times \Gamma$ ne permet pas de prédire $y(t)$ pour $T \ni t > t_0$. Pour cela, il faut également connaître $x^0 := x(t_0) \in \mathbb{R}^d$. Alors les théorèmes de Cauchy-Lipschitz sont applicables (habituellement) pour affirmer que $t \mapsto x(t)$ est une solution.

Définition 1.3. Un système est dit *statique* (ou *memoryless*) lorsque la sortie ne dépend que de l'entrée, et pas de la variable d'état.

Remarque. Dans un tel système, connaître (t_0, u, y) est suffisant pour connaître $y(t)$ pour tout $t > t_0$.

Définition 1.4. L'application :

$$\varphi : T \times T \times X \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$$

telle que $\forall t \in T : x(t) = \varphi(t_0, t, x^0, u)$ est appelée *fonction d'état*.

L'application :

$$\eta : T \times X \rightarrow Y$$

telle que $\forall t \in T : y(t) = \eta(t, x(t))$ est appelée *fonction de transformation de sortie*.

Définition 1.5. Un système dynamique se définit alors par le 8-uple suivant :

$$S = (T, U, \Omega, X, Y, \Gamma, \varphi, \eta).$$

Remarque. On peut donc synthétiser un système dynamique par :

$$u(t) \xrightarrow{\varphi(t)} x(t) \xrightarrow{\eta(t)} y(t).$$

Proposition 1.6. L'application φ admet les propriétés suivantes :

- *consistance* : $\forall (t, x, u) \in T \times X \times \Omega : \varphi(t, t, x, u) = x$;
- *irréversibilité* : φ est définie sur $[t_0, +\infty) \cap T$;
- *composition* : $\forall t_0 < t_1 < t_2 \in T : \forall (u, x) \in \Omega \times X : \varphi(t_2, t_0, x, u) = \varphi(t_2, t_1, \varphi(t_1, t_0, x, u), u)$;
- *causalité* : $\forall t_0 \in T : \forall u_1, u_2 \in \Omega : (\forall t \in T : u_1(t) = u_2(t)) \Rightarrow (\forall t \in T : \varphi(t, t_0, x, u_1) = \varphi(t, t_0, x, u_2))$.

Définition 1.7. Soit un système dynamique régi par :

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u).$$

On appelle le *mouvement du système* l'ensemble $\{(t, x(t)) \mid t.q. t \geq t_0\}$.

On appelle la *trajectoire du système* l'ensemble $\{x(t) \mid t.q. t \geq t_0\}$.

Remarque. La trajectoire est donc la projection du mouvement parallèlement au temps.

Définition 1.8. Soit $\bar{x} \in X$. On dit que \bar{x} est un *état d'équilibre (en temps infini)* lorsque :

$$\exists u \in \Omega \text{ t.q. } \forall (t, t_0) \in T^2 : t \geq t_0 \Rightarrow \varphi(t, t_0, \bar{x}, u) = \bar{x}.$$

Définition 1.9. Soit $\bar{y} \in Y$. On dit que \bar{y} est une *sortie d'équilibre (en temps infini)* lorsque :

$$\forall t_0 \in T : \exists (x, u) \in X \times \Omega \text{ t.q. } \forall t \geq t_0 : \eta(t, \varphi(t, t_0, x, u)) = \bar{y}.$$

Définition 1.10. Un système est dit *invariant* lorsque :

1. T est stable par l'addition ;
2. $\forall (u, \delta) \in \Omega \times T : \Omega \ni u^{(\delta)} : T \rightarrow U : t \mapsto u(t - \delta) ;$
3. $\forall (t_0, \delta, x^0) \in T \times T \times X : \forall t \geq t_0 : \varphi(t, t_0, x^0, u) = \varphi(t + \delta, t_0 + \delta, x^0, u^{(\delta)}) ;$
4. y est indépendante de t , c-à-d : $y(t) = (\eta \circ x)(t)$.

Définition 1.11. Soient $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$. On dit que $x^{(2)}$ est *accessible* à l'instant $t_2 \in T$ à partir de $x^{(1)}$ lorsque :

$$\exists (t_1, u) \in T \times \Omega \text{ t.q. } t_1 < t_2 \text{ et } \varphi(t_2, t_1, x^{(1)}, u) = x^{(2)}.$$

Définition 1.12. Un système est dit *connexe* à l'instant $t \in T$ lorsque $\forall (x^{(1)}, x^{(2)}) \in X^2 : x^{(2)}$ est accessible à l'instant t à partir de $x^{(1)}$.

Si un système est connexe pour tout $t \in T$, alors il est dit connexe.

Définition 1.13. Soient $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$. On dit que $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ sont *équivalents* à l'instant $t_0 \in T$ lorsque :

$$\forall u \in \Omega : \forall t \geq t_0 : \eta \left(t, \varphi \left(t, t_0, x^{(1)}, u \right) \right) = \eta \left(t, \varphi \left(t, t_0, x^{(2)}, u \right) \right).$$

Définition 1.14. Un système est dit en *forme réduite* si $\forall (x^{(1)}, x^{(2)}) \in X^2 : x^{(1)} \neq x^{(2)} \Rightarrow x^{(1)}$ n'est pas équivalent à $x^{(2)}$.

Définition 1.15. Soit $\hat{x} \in X$. L'état \hat{x} est dit *observable* à l'instant $t_0 \in T$ lorsque $\exists (t, u) \in T \times \Omega \text{ t.q. } x(t_0)$ peut être retrouvé de manière univoque à l'aide de $u|_{[t_0, t]}$ et $y|_{[t, t_0]}$.

1.2 Systèmes dynamiques complexes

Définition 1.16. Un *sous-système dynamique* est un système dynamique faisant partie d'un système dynamique complexe.

Définition 1.17. Soient S_1 et S_2 deux systèmes dynamiques. S_1 et S_2 sont dits *connectés en cascade* lorsque :

$$y_1 = u_2,$$

c-à-d lorsque la sortie du premier système sert d'entrée au second.

Remarque. Pour que deux systèmes S_1 et S_2 soient connectés en cascade, il est nécessaire que $T_1 = T_2, \Gamma_1 \subseteq \Omega_2$ (et donc $Y_1 \subseteq U_2$).

Proposition 1.18. Soient les deux systèmes dynamiques suivants :

$$\begin{aligned} S_1 &= (T, U_1, \Omega_1, X_1, Y_1, \Gamma_1, \varphi_1, \eta_1), \\ S_2 &= (T, U_2, \Omega_2, X_2, Y_2, \Gamma_2, \varphi_2, \eta_2). \end{aligned}$$

Le système dynamique résultant de la cascade de S_1 et S_2 est donné par :

$$S = (T, U_1, \Omega_1, X_1 \times X_2, Y_2, \Gamma_2, \varphi, \eta_2),$$

où :

$$T = T_1 = T_2$$

$$\varphi : T \times T \times (X_1 \times X_2) \times \Omega_1 \rightarrow X :$$

$$\left((t, t_0, (x_1(t_0), x_2(t_0)), u) \right) \mapsto \left(\varphi_1(t, t_0, x_1(t_0), u), \varphi_2(t, t_0, x_2(t_0), y_1(t_0, x_1, u)) \right),$$

$$y_1(t_0, x_1, u) : T \rightarrow Y_1 \subseteq U_2 : t \mapsto \eta_1(t, \varphi_1(t, t_0, x_1(t_0), u)).$$

Définition 1.19. Soient S_1 et S_2 deux systèmes dynamiques. S_1 et S_2 sont dits *connectés en parallèle* lorsque :

$$u_1 = u_2,$$

c-à-d lorsqu'ils ont la même fonction d'entrée.

Remarque. Pour que deux systèmes dynamiques soient connectés en parallèle, il est nécessaire que $T_1 = T_2$, $\Omega_1 = \Omega_2$ (et donc $U_1 = U_2$).

Proposition 1.20. Soient les deux systèmes dynamiques suivants :

$$S_1 = (T, U_1, \Omega_1, X_1, Y_1, \Gamma_1, \varphi_1, \eta_1),$$

$$S_2 = (T, U_2, \Omega_2, X_2, Y_2, \Gamma_2, \varphi_2, \eta_2).$$

Le système dynamique résultant des systèmes S_1 et S_2 en parallèle est donné par :

$$S = (T, U, \Omega, X_1 \times X_2, Y_1 \times Y_2, \Gamma_1 \times \Gamma_2, \varphi, \eta),$$

où :

$$T = T_1 = T_2$$

$$U = U_1 = U_2$$

$$\Omega = \Omega_1 = \Omega_2$$

$$\varphi : (t, t_0, x, u) \mapsto (\varphi_1(t, t_0, x, u), \varphi_2(t, t_0, x, u))$$

$$\eta : (t, (x_1, x_2)) \mapsto (\eta_1(t, x_1), \eta_2(t, x_2))$$

1.3 Rétroaction

Définition 1.21. Deux systèmes $S_1 = (T, U_1, \Omega_1, X_1, Y_1, \Gamma_1, \varphi_1, \eta_1)$ et $S_2 = (T, U_2, \Omega_2, X_2, Y_2, \Gamma_2, \varphi_2, \eta_2)$ sont dits en *rétroaction* l'un sur l'autre lorsqu'il existe $v_1 : T \rightarrow U_1, v_2 : T \rightarrow U_2$ et :

$$\psi_1 : Y_1 \times U_2 \times T \rightarrow U_1 \quad \text{et} \quad \psi_2 : Y_2 \times U_1 \times T \rightarrow U_2$$

tels que :

$$u_1(t) = \psi_2(y_1(t), v_2(t), t)$$

$$u_2(t) = \psi_1(y_2(t), v_1(t), t).$$

Définition 1.22. On parle de *rétroaction négative* lorsqu'une modification de $y_1(t)$ entraîne une modification de $y_2(t)$ qui s'oppose au changement de $y_1(t)$.

De même, on parle de *rétroaction positive* lorsqu'une modification de $y_1(t)$ entraîne une modification de $y_2(t)$ qui amplifie le changement de $y_1(t)$.

Remarque. Ce type de construction est le plus simple contenant une boucle.

De plus, il est ici question de rétroaction sur la sortie. Il peut être plus intéressant de définir une rétroaction sur l'état.

Définition 1.23. Un système est dit *rétroactionné sur l'état* lorsqu'il existe $v : T \rightarrow U$ et $\psi : X \times U \times T \rightarrow U$ tels que :

$$u(t) = \psi(x(t), v(t), t).$$

Cette fonction ψ est appelée *loi de contrôle*.

2 Automates — systèmes à temps discret et à espace d'états discret

Définition 2.1. Un *automate* est un système dynamique invariant à temps discret et avec un espace d'états discret, et où les ensembles d'entrée et de sortie sont finis.

Définition 2.2. Un automate est dit *fini* lorsque l'espace d'états est fini.

Proposition 2.3. Dans un système dynamique invariant à temps discret, la fonction φ de transition peut être remplacée par :

$$x(t+1) = \delta(x(t), u(t)),$$

et la fonction de transformation de sortie peut être remplacée par :

$$y(t) = \eta(x(t)),$$

ce qui implique que l'observation du système dépend uniquement de l'état, et que l'état à un certain instant ne dépend plus que de la valeur à l'état précédent (modèle markovien).

Définition 2.4. Un automate *cellulaire* de dimension $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^{*k}$ est un automate tel que $X = \chi^{\prod_{i=1}^k n_i}$, où χ est un ensemble fini d'états tel que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{*k} : (\forall 1 \leq j \leq k : 1 \leq \alpha_j \leq n_k) \Rightarrow (\forall t \in T : x_\alpha(t) \in \chi),$$

et tel que $x(t+1) = (\delta \circ x)(t)$, à savoir, aucune entrée $u \in \Omega$ n'est présente.

Les telles valeurs x_α sont appelées les cellules de l'automate.

Remarque. Dans un automate cellulaire, la nombre de variables d'états est vite très grand, mais reste toute fois fini.

Définition 2.5. la fonction de transition d'un automate cellulaire $\delta : X \times U \rightarrow X$ est une fonction à valeurs dans $X = \chi^{\prod_{i=1}^k n_i}$. Chaque fonction δ_α telle que $x_\alpha(t+1) = \delta_\alpha(x(t))$ est défini sur un *voisinage* de $\alpha \in \mathbb{N}^{*k}$. Et donc, on peut écrire $x_\alpha(t+1) = \delta_\alpha(\gamma(x(t), \alpha))$, où $\gamma : X \times \mathbb{N}^{*k}$ est une fonction renvoyant uniquement un sous-ensemble (non-strict) de $x(t) \in X$.

Exemple 2.1. Un automate cellulaire de dimension $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ représente donc une *grille* de cellules, où l'état de chaque cellule x_{ij} à l'instant $t+1 \in T$ ne dépend que d'un voisinage de $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Par exemple, dans le jeu de la vie (J. Conway), le voisinage de (i, j) est défini par :

$$\{(k, \ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \text{ t.q. } |k - i| = |\ell - j| = 1\}.$$

Remarque. Ces systèmes dynamiques que représentent les automates cellulaires (finis) font partie des systèmes complexes suite à leur grand nombre de variables d'état. Ils ont entre autre prouvé que des règles simples et déterministes pouvaient engendrer un comportement très compliqué à décrire et à prédire. En effet, un *simple* automate cellulaire de dimension $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ peut produire plusieurs comportements distincts et simultanés dans plusieurs voisinages de cellules, certains périodiques, d'autres erratiques.

3 Systèmes continus

Dans cette section, on considère l'espace $T = [t_0, +\infty) \subset \mathbb{R}$, pour $t_0 \in \mathbb{R}^+$, et donc continu.

3.1 Systèmes réguliers

Définition 3.1. Un système dynamique S est dit *de dimensionnalité finie* lorsque les ensembles U, X et Y sont des espaces vectoriels de dimension finie (pas nécessairement la même dimension), i.e. $\exists n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}^*$ tels que $(U, X, Y) = (\mathbb{K}_1^{n_1}, \mathbb{K}_2^{n_2}, \mathbb{K}_3^{n_3})$, où les \mathbb{K}_i sont des corps (habituellement $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$).

Remarque. Nous ferons ici l'hypothèse que ces espaces vectoriels sont normés, afin de pouvoir définir une distance :

$$\forall a, b \in \mathbb{K}^d : d_{\mathbb{K}}(a, b) = \|a - b\|_{\mathbb{K}},$$

où $\|\cdot\|_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ est la norme de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{K}, \|\cdot\|_{\mathbb{K}})$.

Définition 3.2. Un système dynamique continu de dimensionnalité finie est dit *régulier* lorsque :

- les espaces U, X, Y, Ω, Γ sont des espaces vectoriels normés ;
- la fonction de transition φ est continue sur $T \times T \times X \times \Omega$;
- la fonction de transition φ est continûment dérivable par rapport au temps sur le sous-ensemble de définition de $u \in \Omega$ où u est continue ;
- la fonction η est continue sur $X \times T$.

Remarque. On fait ici les hypothèses de régularité suffisantes pour lier les systèmes dynamiques continus aux équations différentielles ordinaires, donc ici en particulier, afin d'assurer l'existence d'une solution maximale unique, il est nécessaire de supposer $\frac{d\varphi}{dt}$ localement lipschitzienne sur X en plus de sa continuité (théorème de Cauchy-Lipschitz local). De manière plus large, on suppose ici le champ de vecteur f de $\frac{dx}{dt} = f(x)$ continûment différentiable (ce qui implique le caractère lipschitzien).

L'équation différentielle vectorielle du premier ordre $\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t)$ peut se réécrire indépendamment selon les composantes¹ :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) &= f_1(x(t), u(t), t) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) &= f_2(x(t), u(t), t) \\ \vdots & \\ \frac{dx_n}{dt}(t) &= f_n(x(t), u(t), t), \end{cases}$$

où n est la dimension d'arrivée de f , et donc la dimensionnalité de X .

Théorème 3.3. Pour $t_0 \in T$ fixé, le mouvement $t \mapsto \varphi(t, t_0, x^{(0)}, u)$ pour $x^{(0)} = x(t_0)$ d'un système dynamique régulier est solution unique maximale d'une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t). \quad (1)$$

Définition 3.4. Dans l'équation (1), la fonction $f : X \times U \times T \rightarrow X$ est appelée *fonction génératrice du système*.

Remarque. Il est souvent très difficile (voire impossible) de déterminer analytiquement la solution d'un système exprimé sous forme différentielle (équation (1)). Dans ces cas, la simulation numérique est requise.

Définition 3.5. Un système régulier est dit *autonome* lorsque $\frac{dx}{dt} = f(x(t))$, c'est-à-dire lorsque f ne fait pas intervenir le temps explicitement.

Proposition 3.6. Tout système d'équations différentielles peut être mis sous forme autonome.

1. Toute équation vectorielle, peu importe son degré, peut se réécrire comme une équation différentielle vectorielle d'ordre 1.

Démonstration. Le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) &= f_1(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt}(t) &= f_n(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) &= f_1(x(t), u(t)) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt}(t) &= f_n(x(t), u(t)) \\ \frac{dx_{n+1}}{dt}(t) &= \frac{dt}{dt} = 1 \end{cases}$$

□

3.2 Espace et portrait de phases

Définition 3.7. L'espace d'états X est également appelé *espace des phases*, dans lequel tout état $x \in X$ représente un point $(x_1, \dots, x_n) \in X$ de l'espace des phases.

Remarque. Selon cette définition, la trajectoire d'un système représente donc la projection du mouvement dans l'espace des phases, ce qui correspond à une courbe de dimension 1 dans X .

Définition 3.8. On appelle *portrait de phases* la représentation du champ de vecteurs $f : X \times U \times T \rightarrow X$ dans l'espace des phases.

Remarque. Le portrait de phases d'un système donne une représentation qualitative de l'évolution du système. Cette représentation est très pratique du fait qu'elle ne requiert rien d'autre que la fonction f , génératrice du système, qui est connue. Il est donc toujours possible de dessiner un portrait de phases, même lorsqu'il est impossible de résoudre analytiquement l'équation.

Afin de rendre l'information encore plus qualitative, il est commun de renormaliser tous les vecteurs du champ lors de la représentation. Ainsi, toute information sur t est perdue (ce qui ne change rien dans le cas d'un système autonome).

3.3 Stabilité des points d'équilibre

La stabilité est la notion qui va permettre de classer les points d'équilibre selon leur comportement induit suite à des perturbations.

Définition 3.9. Soient $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}) \in T \times X \times \Omega$. Le mouvement $t \mapsto \varphi(t, \bar{t}, \bar{x}, \bar{u})$ d'un système S est dit *stable* lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \text{ t.q. } \forall x \in X : (\|x - \bar{x}\| < \delta) \Rightarrow \left(\forall t \in T : t \geq \bar{t} \Rightarrow \|\varphi(t, \bar{t}, \bar{x}, \bar{u}) - \varphi(t, \bar{t}, x, \bar{u})\| < \varepsilon \right).$$

Si un mouvement n'est pas stable, il est dit *instable*.

Définition 3.10. Soit $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{t}) \in X \times \Omega \times T$, où \bar{x} est un point d'équilibre pour \bar{u} à l'instant \bar{t} . Le point d'équilibre \bar{x} est dit *stable* lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \text{ t.q. } \forall x \in X : (\|x - \bar{x}\| < \delta) \Rightarrow \left(\forall t \in T : t \geq \bar{t} \Rightarrow \|\varphi(t, \bar{t}, x, \bar{u}) - \bar{x}\| < \varepsilon \right).$$

Définition 3.11. Un point d'équilibre $\bar{x} \in X$ pour une entrée $\bar{u} \in \Omega$ à l'instant $\bar{t} \in T$ est dit *asymptotiquement stable* lorsqu'il est stable, et :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, \bar{t}, x, \bar{u}) - \bar{x}\| = 0,$$

ou encore :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, \bar{t}, x, \bar{u}) = \bar{x},$$

pour $x \in X$ t.q. $\|x - \bar{x}\| < \delta$ de la définition de stabilité.

3.3.1 Critère de Liapounov

Définition 3.12. Une fonction $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite définie positive (respectivement négative) en $\bar{x} \in X$ lorsqu'il existe $\mathcal{V} \subseteq X$, un voisinage de \bar{x} tel que :

$$V(\bar{x}) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathcal{V} : V(x) > 0 \text{ (respectivement } V(x) < 0 \text{)}.$$

Définition 3.13. Une fonction $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite semi-définie positive (respectivement négative) lorsque les inégalités ci-dessus ne sont pas strictes.

Définition 3.14. Soit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, une matrice symétrique sur un corps \mathbb{K} .

On dit que A est définie positive (respectivement négative) lorsque la forme quadratique associée $x \mapsto x^T A x$ est définie positive (respectivement négative).

On dit que A est semi-définie positive (respectivement négative) lorsque la forme quadratique associée $x \mapsto x^T A x$ est semi-définie positive (respectivement négative).

Théorème 3.15 (Critère de Sylvester). Soit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une matrice symétrique sur un corps \mathbb{K} . A est définie positive si et seulement si :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket : \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} > 0$$

Corollaire 3.16. Soit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Si A est définie positive, alors $\det(A) \neq 0$.

Théorème 3.17 (Critère de stabilité de Liapounov). Soit une équation différentielle vectorielle d'ordre 1 :

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), u(t)).$$

Soit $\bar{x} \in X$, un point d'équilibre pour l'entrée constante $t \mapsto \bar{u} \in \mathcal{U}$.

S'il existe une fonction $V : X \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ telle que :

$$\frac{dV}{dt}(x) = \langle \nabla V(x), f(x, \bar{u}) \rangle$$

semi-définie négative (respectivement définie négative) en \bar{x} , alors \bar{x} est asymptotiquement stable (respectivement stable).

Définition 3.18. Une telle fonction $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée une fonction de Liapounov.

Théorème 3.19 (Critère d'instabilité de Liapounov). Soit une équation différentielle vectorielle d'ordre 1 :

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), u(t)).$$

Soit $\bar{x} \in X$, un point d'équilibre pour l'entrée constante $t \mapsto \bar{u} \in U$.

S'il existe une fonction $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ continûment dérivable sur un voisinage de \bar{x} telle que V est définie positive en \bar{x} et :

$$\frac{dV}{dt}(x) = \langle \nabla V(x), f(x, \bar{u}) \rangle$$

est définie positive en \bar{x} , alors \bar{x} est instable.

4 Systèmes dynamiques linéaires à temps continu

Définition 4.1. On définit le *mouvement libre* d'un système comme étant la fonction :

$$\varphi_\ell : T \times T \times X \rightarrow X : (t, t_0, x^{(0)}) \mapsto \varphi(t, t_0, x^{(0)}, \mathbf{0}),$$

avec $\mathbf{0} : t \mapsto 0$, la fonction nulle.

On définit le *mouvement forcé* d'un système comme étant la fonction :

$$\varphi_f : T \times T \times \Omega \rightarrow X : (t, t_0, u) \mapsto \varphi(t, t_0, 0_X, u),$$

avec 0_X , l'élément neutre de X (qui existe car X est un espace vectoriel).

Proposition 4.2. Dans un système linéaire, la fonction de transition φ est linéaire par rapport à $x \in X$, et $u \in \Omega$, et φ est superposable par φ_ℓ et φ_f , i.e. :

$$\begin{aligned} \forall \lambda, \mu, \gamma, \delta \in \mathbb{K} : \forall (t, t_0) \in T^2 : \forall (x^{(1)}, x^{(2)}) \in X^2 : \forall (u_1, u_2) \in \Omega : \\ \varphi(t, t_0, \lambda x^{(1)} + \mu x^{(2)}, \gamma u_1 + \delta u_2) = \lambda \varphi_\ell(t, t_0, x^{(1)}) + \mu \varphi_\ell(t, t_0, x^{(2)}) + \gamma \varphi_f(t, t_0, u_1) + \delta \varphi_f(t, t_0, u_2). \end{aligned}$$

Proposition 4.3. Dans un système linéaire, la fonction de transformation de sortie $\eta : X \rightarrow Y$ est linéaire par rapport à $x \in X$ pour tout $t \in T$, i.e. :

$$\forall t \in T : \eta(x(t)) = H(t)x(t),$$

pour $H : T \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ et $n = \dim(X) \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 4.4. Tout système dynamique linéaire régulier à temps continu peut être exprimé sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t), \end{cases} \quad (2)$$

avec $A : T \rightarrow \mathbb{K}^{\dim(X) \times \dim(X)}$, $B : T \rightarrow \mathbb{K}^{\dim(X) \times \dim(U)}$, et $C : T \rightarrow \mathbb{K}^{\dim(Y) \times \dim(X)}$, toutes trois continues en temps.

Remarque. Le cas des systèmes linéaires autonomes (où les fonctions A, B, C sont constantes) est simple à résoudre analytiquement (au sens où il existe une solution qu'il est possible de déterminer à la main).

Théorème 4.5. Dans un système dynamique linéaire, la stabilité (respectivement instabilité) d'un mouvement en particulier implique la stabilité (respectivement l'instabilité) de tous les mouvements.

Démonstration. Soient $\hat{x} : T \rightarrow X$ et $\tilde{x} : T \rightarrow X$, les mouvements associés à l'entrée $\bar{u} \in \Omega$ et à l'état initial respectivement $x^{(1)} \in X$ et $x^{(2)} \in X$. On pose :

$$z : T \rightarrow X : t \mapsto \hat{x}(t) - \tilde{x}(t).$$

Le mouvement z correspond donc, par linéarité, à :

$$z(t) = \varphi(t, t_0, x^{(1)}, \bar{u}) - \varphi(t, t_0, x^{(2)}, \bar{u}) = \varphi(t, t_0, x^{(1)} - x^{(2)}, \mathbf{0}) = \varphi_f(t, t_0, x^{(1)} - x^{(2)}).$$

On sait cependant :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + B(t)\bar{u}(t) \\ \frac{d\tilde{x}}{dt}(t) &= A(t)\tilde{x}(t) + B(t)\bar{u}(t). \end{cases}$$

Dès lors, on détermine la dynamique de z :

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{d\hat{x}}{dt}(t) - \frac{d\tilde{x}}{dt}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)\bar{u}(t) - A(t)\tilde{x}(t) - B(t)\bar{u}(t) = A(t)(\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)) = A(t)z(t),$$

qui a l'origine pour point fixe.

Dès lors, en étudiant la stabilité de l'origine, on a la stabilité de tous les mouvements du système. \square

Corollaire 4.6. Dans un système dynamique linéaire, l'étude de stabilité ne dépend que de la matrice $A(t)$.

Définition 4.7. Un système dynamique linéaire est dit *simplement stable* lorsque pour tout $x^{(0)} \in X$, le mouvement libre $t \mapsto \varphi_\ell(t, t_0, x^{(0)})$ est borné.

Un système dynamique linéaire non stable est dit *instable*.

Définition 4.8. Un système dynamique linéaire est dit *asymptotiquement stable* lorsque :

$$\forall x^{(0)} \in X : \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_\ell(t, t_0, x^{(0)}) = 0_X.$$

4.1 Stabilité et valeurs propres

Définition 4.9. Soit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ une matrice. On définit son polynôme caractéristique par :

$$\pi(A) := \det(A - \lambda I).$$

On appelle *valeur propre* de A tout $\lambda^* \in \mathbb{K}$ tel que $(\lambda - \lambda^*)$ divise $\pi(A)$.

On appelle *vecteur propre* de A tout $v \in \mathbb{K}^n$ tel qu'il existe une valeur propre λ avec $Av = \lambda v$.

Théorème 4.10 (Stabilité d'un système linéaire selon les valeurs propres). Soit le système dynamique linéaire $\frac{dx}{dt}(t) = A(t)x(t)$. Alors :

1. le système est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle négative ;
2. le système est simplement stable si toutes les valeurs propres ont soit une partie réelle négative, soit nulle mais sont de multiplicité 1 ;

3. le système est instable sinon.

Remarque. Il n'est pas toujours nécessaire de calculer toutes les valeurs propres de A afin de déterminer la stabilité du système. Il existe certains critères pour le signe des valeurs propres.

Théorème 4.11 (Test de Hurwitz). Soit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, pour $n = \dim(X) \in \mathbb{N}^*$. Soit $\pi(A)$ le polynôme caractéristique de A tel que :

$$\pi(A)(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^{n-i},$$

avec $a_0 = (-1)^n$. En posant $a_k = 0$ pour tout $k \geq n = \dim(X)$ et pour tout $k < 0$, on a que les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle négative si et seulement si :

$$H = [a_{2i-j}]_{1 \leq i, j \leq n}$$

n'admet que des mineurs principaux positifs, i.e. :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket : \det([a_{2i-j}]_{1 \leq i, j \leq k}) > 0.$$

Proposition 4.12. Si tous les a_i , coefficients du polynôme caractéristique $\pi(A)$ ne sont pas de même signe (i.e. s'il en existe deux de signe différent), alors le système dynamique linéaire associé à A n'est pas asymptotiquement stable.

Proposition 4.13 (Formule de Souriau). Soit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ une matrice. Les coefficients du polynôme :

$$\det(\lambda I - A) = (-1)^n \det(A - \lambda I) = \lambda^n \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} a_i,$$

où $n = \dim(X)$, sont donnés par :

$$a_n = -\frac{1}{n} \left(\text{Tr}(A^n) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \text{Tr}(A^{n-k}) \right)$$

Remarque. La formule de Souriau permet de ne pas calculer le déterminant (complexité $O(n^3)$) pour de grandes matrices.

Proposition 4.14. Soit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de A , alors :

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i = \text{Tr}(A).$$

Démonstration. Par décomposition en blocs de Jordan (ou diagonalisation, si toutes les valeurs propres sont de multiplicité 1), on a :

$$A = PJP^{-1}.$$

Par les propriétés de manipulation de trace, on a :

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(PJP^{-1}) = \text{Tr}(JP^{-1}P) = \text{Tr}(J) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

□

Corollaire 4.15. Si un système dynamique linéaire $\frac{dx}{dt}(t) = A(t)x(t)$ est asymptotiquement stable, alors $\Re \text{Tr}(A) < 0$.

Démonstration. Un système linéaire est asymptotiquement stable si et seulement si toutes ses valeurs propres sont de partie réelle négative. On détermine donc :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{j=1}^n \lambda_j = \sum_{j=1}^n \Re \lambda_j + i \Im \lambda_j = \sum_{j=1}^n \Re \lambda_j + i \sum_{j=1}^n \Im \lambda_j.$$

Et donc :

$$\Re \text{Tr}(A) = \sum_{j=1}^n \Re \lambda_j < 0.$$

□

4.2 Systèmes linéaires du premier ordre

Soit $\frac{dx}{dt}(t) = ax(t)$, pour $x : T \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. La solution de cette équation est $x(t) = x(t_0) \exp(a(t - t_0))$. $x = 0$ est un point d'équilibre du système. Pour $a < 0$, ce point d'équilibre est asymptotiquement stable, pour $a = 0$, le système est simplement stable, et pour $a > 0$, le système est instable.

Définition 4.16. Dans le cas de stabilité asymptotique, quand $a < 0$, on définit $\tau := \frac{-1}{a} \in \mathbb{R}_0^+$, que l'on appelle *constante de temps*.

Remarque. Pour de grandes valeurs de a (en valeur absolue), τ se rapprochera de 0, et donc le mouvement tend *vite* vers l'origine, alors que pour de faibles valeurs de a (toujours en valeur absolue), τ sera grand, et donc le mouvement tendra *lentement* vers l'origine.

On considère de manière générale que l'équilibre est atteint après un temps $\Delta t = 4\tau$. En effet :

$$x(t_0 + 4\tau) = x(t_0) \exp(a(t_0 + 4\tau - t_0)) = x(t_0) \exp(4a\tau) = x(t_0) \exp(-4) \simeq \frac{x(t_0)}{50}.$$

On considère donc que proportionnellement, la valeur est suffisamment proche de l'origine.

Les comportements ici sont très restreints : soit les trajectoires se rapprochent du point fixe ($x = 0$), soit elles s'en éloignent, selon qu'il soit stable ou instable.

4.3 Systèmes linéaires autonomes du second ordre

Soit le système dynamique linéaire du second ordre suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) \end{bmatrix} = \frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Définition 4.17. le système est dit *simple* lorsque la matrice A est non-singulière et est dit *non-simple* sinon.

Proposition 4.18. Un système dynamique linéaire du second ordre simple admet un unique point fixe, à savoir $(x_1, x_2) = (0, 0) = 0_X$.

Un système dynamique linéaire du second ordre non-simple admet une infinité de points fixes représentant une

droite vectorielle passant par l'origine.

Démonstration. Soit A non-singulière. On sait donc que A^{-1} existe. Dès lors, en multipliant $\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t)$ par A^{-1} à gauche, on trouve :

$$A^{-1} \frac{dx}{dt}(t) = x(t).$$

Or, si $x(t)$ est un point fixe, on sait $\frac{dx}{dt}(t) = 0$. Donc $x(t) = A^{-1} \frac{dx}{dt}(t) = A^{-1}[0,0]^T = [0,0]^T$ est l'unique solution.

Supposons maintenant $\det A = 0$. Ça implique que les deux lignes ou les deux colonnes de A sont multiples l'une de l'autre. Il y a donc un degré de liberté au système, mais $(0,0)$ reste une solution. Le système admet donc une infinité de points fixes placés sur une droite vectorielle passant par l'origine. \square

Proposition 4.19. *Le polynôme caractéristique de la matrice A est équivalent à :*

$$\pi(A)(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(A) + \det(A).$$

Démonstration. Le polynôme caractéristique est donné par :

$$\pi(A)(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - (a_{12}a_{21}) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}).$$

On observe donc :

$$a_{11} + a_{22} = \text{Tr}(A)$$

et :

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det(A).$$

On a alors en effet :

$$\pi(A)(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A).$$

\square

Théorème 4.20. *Les solutions d'un système d'équations différentielles (pas nécessairement linéaires ou autonomes) est un espace vectoriel. En particulier, la combinaison linéaire de solutions sont également solutions.*

4.4 Trajectoires et valeurs propres distinctes

Les axes des vecteurs propres sont des invariants. En effet, si $x(t)$ est un vecteur propre, alors $\frac{dx}{dt}(t) = \lambda x(t)$, et donc $x(t)$ et $\frac{dx}{dt}(t)$ *pointent* dans la même direction. Les vecteurs propres évoluent donc dans une trajectoire rectiligne (et se dirigent soit vers l'infini soit vers l'origine selon que l'origine soit stable ou non).

Si λ_1 et λ_2 sont les deux valeurs propres de la matrice A et si v_1 et v_2 sont les vecteurs propres associés, alors on a deux solutions distinctes et linéairement indépendantes :

$$t \mapsto \exp(\lambda_1 t)v_1 \quad \text{et} \quad t \mapsto \exp(\lambda_2 t)v_2.$$

La solution générale est donc :

$$t \mapsto C_1 \exp(\lambda_1 t)v_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t)v_2,$$

pour $C_1, C_2 \in \mathbb{K}$.

Proposition 4.21. Pour $t \rightarrow +\infty$ (respectivement $t \rightarrow -\infty$), la trajectoire s'aligne avec le vecteur propre le plus lent (respectivement le plus rapide).

Démonstration. Soient λ_1, λ_2 les deux valeurs propres de A , telles que $\lambda_1 < \lambda_2$ (changer les indices si nécessaire, donc sans perte de généralité). On a alors :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C_2 \exp(\lambda_2 t) v_{21}}{C_2 \exp(\lambda_2 t) v_{22}} = \frac{v_{21}}{v_{22}}.$$

De même, on trouve :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{C_1 \exp(\lambda_1 t) v_{11}}{C_1 \exp(\lambda_1 t) v_{12}} = \frac{v_{11}}{v_{12}}.$$

On en déduit donc qu'en $t \rightarrow +\infty$, la trajectoire s'aligne sur v_2 , le vecteur propre lié à la valeur propre la plus lente, et pour $t \rightarrow -\infty$, la trajectoire s'aligne sur v_1 , le vecteur propre lié à la valeur propre la plus rapide. \square

Définition 4.22. Si les deux valeurs propres de la matrice A sont de partie réelle de signe opposé, alors l'origine est un état d'équilibre instable, que l'on appelle *col* (ou encore *nœud de selle*, *saddle node* en anglais).

Si les deux valeurs propres sont de partie réelle négative, alors l'origine est un état d'équilibre stable appelé *nœud stable*.

Si les deux valeurs propres sont de partie réelle positive, alors l'origine est un état d'équilibre instable et est appelé *nœud instable*.

Remarque. Si le point d'équilibre est une selle, alors on trouve que $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 < 0$ car les valeurs propres sont de signe opposé. Dans les deux autres cas, le déterminant est de signe positif. Mais c'est le signe de la trace qui change. Dans le cas de la selle, on ne peut rien prévoir sur le signe de la trace. La trace peut tout à fait être positive, négative, voire nulle.

4.4.1 Systèmes non-simples

Les systèmes non-simples sont de déterminant nul. Or, comme $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$, on sait qu'une des valeurs propres est nulle. Posons $\lambda_1 = 0$, et intéressons-nous à λ_2 .

Proposition 4.23. Si une des deux valeurs propres est nulle, alors la droite de points fixes est donnée par :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0.$$

De plus, toutes les trajectoires sont parallèles à v_2 , le vecteur propre associé à la valeur propre λ_2 , et les points fixes sont stables si et seulement si $\Re \lambda_2 < 0$.

4.5 Trajectoires et valeurs propres identiques (non-distinctes)

Définition 4.24. Si A est diagonalisable (et donc tous les vecteurs sont des vecteurs propres), et $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, alors l'origine est un état d'équilibre que l'on appelle *nœud singulier*.

Si A n'est pas diagonalisable (et donc il existe un seul vecteur propre, et donc une seule trajectoire en droite), l'origine est un état d'équilibre que l'on appelle *nœud dégénéré*.

Remarque. Un nœud singulier ou un nœud dégénéré est stable si et seulement si $\lambda < 0$ (théorème de stabilité selon les valeurs propres, avec une seule valeur propre de partie réelle nulle).

Remarque. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0$ est l'unique valeur propre, et de multiplicité 2, alors il existe une infinité d'états d'équilibre n'ayant pas de nom particulier mais dont toutes les trajectoires sont sur des droites parallèles.

4.6 Trajectoires et valeurs propres complexes

Proposition 4.25. Soit P un polynôme à coefficients réels. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $P(\lambda) = 0$, alors $P(\bar{\lambda}) = 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $(a_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Notons $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, une racine de P . On a :

$$P(\bar{\lambda}) = \sum_{i=0}^n a_i \bar{\lambda}^i = \overline{\sum_{i=0}^n a_i \lambda^i} = \overline{P(\lambda)} = \overline{0} = 0.$$

□

Corollaire 4.26. Tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Remarque. Ce qui peut également se démontrer par le théorème de Rolle, ou le théorème des accroissements finis.

On déduit de la Proposition 4.25 que les deux racines propres sont obligatoirement deux complexes sous la forme :

$$\lambda_1 = a + ib \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = a - ib,$$

pour $a, b \in \mathbb{R}$.

La solution générale devient donc

$$\begin{cases} x_1(t) &= \exp(at) (C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt)) \\ x_2(t) &= \exp(at) (-C_1 \sin(bt) + C_2 \cos(bt)) \end{cases} \quad (3)$$

Définition 4.27. Dans un tel cas, lorsque $a = 0$, l'origine est un point d'équilibre que l'on appelle *un centre* (les trajectoires forment des ellipses concentriques).

Lorsque $a < 0$, l'origine est un point d'équilibre que l'on appelle *un foyer stable*, et si $a > 0$, on l'appelle *foyer instable*.

Proposition 4.28. Un centre est un état d'équilibre simplement stable, un foyer stable est un état d'équilibre asymptotiquement stable, et un foyer instable est un état d'équilibre instable.

Démonstration. Par les théorèmes de stabilité par la partie réelle des valeurs propres. □

Remarque. On observe que ces trois formes de systèmes sont oscillants de nature, même pour une fonction d'entrée inexistante (nulle).

On observe également que l'équation (3) montre bien que c'est de a que dépend la stabilité, car b n'intervient qu'en composition dans une fonction bornée (selon les constantes).

Définition 4.29. Soit un système dynamique linéaire de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *isocline* tout lieu de point tel que $\frac{dx_k}{dt} = 0$.

Remarque. Les isoclines forment un hyper-plan de dimension $n - 1$ séparant à chaque fois l'espace des phases en deux régions disjointes telles que le signe de la dérivée de x_k y est opposé.

Lors d'un dessin qualitatif, les isoclines servent donc à représenter les courbes sur lesquelles le champ de vecteur vitesse est orthogonal aux axes, et les parties de l'espace où ce champ de vecteurs est de signe constant (au sens de vecteur signe correspondant au signe de chaque composante).

5 Systèmes dynamiques non-linéaires à temps continu

Le modélisation linéaire est efficace car résoluble analytiquement, mais correspond toujours à une simplification forte de la réalité. Ces systèmes ne correspondent souvent à la réalité modélisée que dans certains cas, mais peut devenir très mauvaise tant dans l'explication que dans la prédiction.

5.1 Bifurcations

Définition 5.1. Soit un système dynamique non-linéaire paramétrisé par $r \in \mathbb{K}^d$. On appelle *bifurcation* le phénomène qui amène un changement qualitatif de l'évolution du système suite à un changement du paramètre r . Ce changement peut être soit le changement de stabilité d'un ou plusieurs état(s) d'équilibre, soit la création ou la suppression d'un ou plusieurs état(s) d'équilibre.

On appelle *valeur critique* ou *valeur de bifurcation* toute valeur de r entraînant un tel changement.

Définition 5.2. On appelle *diagramme de bifurcation* le graphique avec le paramètre r sur l'axe horizontal et les points fixes \bar{x} sur l'axe vertical où la position de chaque état d'équilibre est représentée ainsi que sa stabilité (la trajectoire d'un état stable est représentée par une courbe pleine alors que la trajectoire d'un état instable est représenté par une courbe en pointillés).

5.2 Linéarisation de systèmes non-linéaires

Définition 5.3. Soit S un système dynamique autonome non-linéaire à temps continu régi par le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt}(t) = f(x(t), u(t)) \\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}^{(0)} \end{cases} \quad (t_0, \bar{x}^{(0)}) \in T \times X,$$

Le mouvement de ce système est $\bar{x} : T \rightarrow X : t \mapsto \varphi(t, t_0, \bar{x}^{(0)}, u)$, avec $u \in \Omega$, l'entrée du système.

On appelle *système linéarisé associé au système et au mouvement* $t \mapsto \bar{x}(t) \in X$ le système :

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

avec :

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t), u(t)) \quad \text{et} \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}(t), u(t)).$$

Proposition 5.4. *Le système linéarisé associé à un système S autour d'un mouvement $t \mapsto \bar{x}(t)$ est une approximation du premier ordre du système original autour de $\bar{x}(t)$.*

Démonstration. Soient $(\delta u, \delta x^{(0)}) \in \Omega \times X$. Soit $\delta \bar{x} \in X^T$ tel que :

$$\frac{d\bar{x}}{dt}(t) + \frac{d\delta \bar{x}}{dt}(t) = f(\bar{x}(t) + \delta \bar{x}(t), u(t) + \delta u(t)).$$

Par expansion de Taylor, on trouve :

$$\frac{d\bar{x}}{dt}(t) + \frac{d\delta \bar{x}}{dt}(t) = f(\bar{x}(t), u(t), t) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t), u(t))\delta \bar{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}(t), u(t))\delta u(t) + o(\bar{x}(t)) + o(u(t)).$$

En soustrayant $\frac{dx}{dt}(t)$ de part et d'autre et en omettant les termes d'ordre supérieur, on obtient :

$$\frac{d\delta\bar{x}}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t), u(t))\delta\bar{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}(t), u(t))\delta u(t).$$

Posons alors :

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t), u(t)) \quad \text{et} \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}(t), u(t)).$$

Il s'ensuit :

$$\frac{d\delta\bar{x}}{dt}(t) = A(t)\delta\bar{x}(t) + B(t)\delta u(t).$$

Dès lors, le système linéarisé fournit bien une approximation (du premier ordre par Taylor) pour de faibles perturbations (proche de $\bar{x}(t)$). \square

Remarque. Il est intéressant d'étudier le système linéarisé proche des états d'équilibre car il y a alors moyen d'en inférer des propriétés de stabilité.

5.2.1 Linéarisation et stabilité

Théorème 5.5. Soit S un système dynamique autonome non-linéaire, et soit $\bar{x} \in X$, un point d'équilibre de S pour une entrée $\bar{u} \in \Omega$. Si le système linéarisé associé au mouvement $t \mapsto \bar{x}(t)$ autour de \bar{x} est asymptotiquement stable, alors \bar{x} est asymptotiquement stable pour $\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), u(t))$.

De même si le système linéarisé est instable, alors \bar{x} est instable pour $\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), u(t))$.

Remarque. On ne peut donc rien déduire d'un système linéarisé simplement stable.

5.3 Systèmes dynamiques non-linéaires à temps continu d'ordre 1

On se concentre sur les systèmes définis par $\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \in \mathbb{R} = X$.

5.3.1 Méthode géométrique

En traçant le graphique de $\frac{dx}{dt}$ en fonction de x , on peut déduire les point d'équilibre, leur stabilité, et les trajectoires du système.

En effet, toutes les valeurs de x telles que $f(x)$ s'annule donnent les points fixes du système. Également, le signe de $f(x)$ donne une information sur la croissance ou décroissance de x , et donc de sa direction.

Sur base du graphique, on peut alors déduire quatre types d'états d'équilibre \bar{x} (points fixes de $t \mapsto x(t)$) de \bar{x} :

- si f est négative à gauche² de \bar{x} et positive à droite de \bar{x} , alors l'état d'équilibre est instable ;
- si f est positive à gauche de \bar{x} et négative à droite, alors \bar{x} est un état d'équilibre asymptotiquement stable ;
- si f est négative à gauche de \bar{x} et à droite de \bar{x} , alors l'état d'équilibre \bar{x} est *semi-asymptotiquement stable à droite* ;
- et si f est positive à gauche et à droite de \bar{x} , alors l'état d'équilibre \bar{x} est *semi-asymptotiquement stable à gauche*.

2. On appelle ici *gauche* de \bar{x} l'ensemble $(-\infty, \bar{x})$ et *droite* l'ensemble $(\bar{x}, +\infty)$.

Remarque. Sur un graphique d'équilibre de f en fonction de x , il est de convention de marquer les points stables par des cercles pleins, les points instables par des cercles vides, et les points semi-stables par des cercles semi-remplis du côté stable.

Proposition 5.6. *Dans le cas d'un système d'ordre 1, la trajectoire $x : T \subseteq \mathbb{R} \rightarrow X = \mathbb{R}$ suit un mouvement monotone pour tout état initial.*

Démonstration. Les comportements sont, en dimension 1, très limités : une trajectoire peut soit converger vers un point fixe, soit diverger vers l'infini.

En effet, en supposant f continue, on oblige qu'un changement de signe de f induise un point fixe (de stabilité asymptotique ou instable). Pour que la trajectoire puisse « rebrousser chemin », il lui faudrait passer un point fixe, ce qui est impossible : les points fixes ne sont atteints qu'en $t \rightarrow \pm\infty$ et ne sont jamais traversés en dimension 1. \square

Corollaire 5.7. *Une trajectoire ne peut pas suivre de courbe périodique.*

Théorème 5.8. *Soit un système dynamique (linéaire ou non-linéaire) autonome. Par un point de l'espace des phases passe au plus une trajectoire.*

Démonstration. Soit un point tel qu'il existe une solution passant par ce point (Cauchy-Lipschitz dont le caractère lipschitzien de f est supposé dans tous les cas). $\frac{dx}{dt} = f$ admet une unique valeur en ce point. Donc toute trajectoire passant par ce point doit suivre la même tangente, et donc la même trajectoire.

Supposons qu'il existe deux trajectoires (mouvements $t \mapsto \hat{x}(t)$ et $t \mapsto \tilde{x}(t)$) distinctes passant par ce point. On a bien une contradiction car f devrait admettre deux valeurs distinctes. \square

5.4 Systèmes dynamiques non-linéaires à temps continu d'ordre 2

Définition 5.9. Une trajectoire est dite *isolée* lorsqu'elle n'est pas transformation de ses trajectoires avoisinantes.

Définition 5.10. Un *cycle limite* est une trajectoire close isolée.

Définition 5.11. Soit C , un cycle limite.

- C est dit *simple* (ou *attracteur*) lorsque les trajectoires avoisinantes convergent vers C ;
- C est dit *instable* lorsque les trajectoires avoisinantes divergent de C ;
- C est dit *semi-stable* lorsque les trajectoires internes (respectivement externes) à C convergent vers C , alors que les trajectoires externes (respectivement internes) à C divergent de C .

Remarque. Un cycle limite stable implique des oscillations spontanées du système, même en l'absence d'entrée périodique. De plus, ces cycles ne peuvent exister dans un système linéaire (bien que des oscillations soient possibles par des trajectoires circulaires en cas de valeurs propres complexes) car un système linéaire a des propriétés générales : des trajectoires isolées n'existent pas.

Remarque. Il est difficile de déterminer si un système d'ordre 2 admet ou non un cycle limite.

Théorème 5.12 (Théorème de Bendixon). *Soit R une région close, connexe et bornée de l'espace des phases bidimensionnel. Si la fonction :*

$$t \mapsto \langle \nabla f, \mathbf{1} \rangle(t),$$

pour $\mathbf{1} : t \mapsto 1$, est de signe constant sur R et s'annule sur un ensemble de mesure nulle, alors R ne contient aucun cycle limite.

Théorème 5.13 (Théorème de Poincaré). Soit R , une région close, bornée et annulaire (au sens où $R \setminus D \simeq D$) de l'espace des phases bidimensionnel. S'il n'existe aucun état d'équilibre dans R , et si toutes les trajectoires passant par ∂R (le bord de R) sont entrantes dans R , alors il existe au moins un cycle limite dans R .

Remarque. Ce théorème affirme à nouveau que la famille des trajectoires en dimension 2 est limitée.

5.5 Invariants

Définition 5.14. Un *invariant* d'un système dynamique est un sous-ensemble I de dimension $d \leq n$ de son espace des phases X tel que :

$$\forall x \in X^T : \forall t_0 \in T : \left(x(t_0) \in I \Rightarrow (\forall t \in T : t \geq t_0 \Rightarrow x(t) \in I) \right).$$

Remarque. On impose $\dim(I) \leq \dim(X)$ car le seul sous-ensemble (à isomorphisme près) de X de même dimension que X est X . X est donc un invariant trivial de X .

5.5.1 Invariants dans un espace des phases de dimension 1

Il n'existe que des points de X comme sous-ensembles de dimension 0, les seuls invariants d'un système de dimension 1 sont les points fixes.

5.5.2 Invariants dans un espace des phases de dimension 2

Deux types d'invariants sont possibles : les points d'équilibre, et les cycles. Il existe également des trajectoires dites respectivement *hétéroclines* et *homoclines*. Les premières rejoignent un point fixe à un autre, et les secondes sont des trajectoires cycliques contenant un point fixe.

5.5.3 Invariants dans un espace des phases de dimension 3

Les points fixes sont toujours des invariants, mais les cycles ont alors la possibilité d'être continûment déformés et donc de suivre plusieurs circuits *indépendants*.

En dimension 2, des surfaces de type ellipsoïdal ou torique peuvent être des invariants.

Définition 5.15. Soient θ et ϕ les coordonnées angulaires permettant de reporter la trajectoire le long d'un tore. On note T_θ et T_ϕ la période relative à chacune des coordonnées.

Si $\frac{T_\theta}{T_\phi} \in \mathbb{Q}$, la trajectoire est une orbite close le long du tore. Si $\frac{T_\theta}{T_\phi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, les trajectoires sont des hélices qui forment une partition de la surface du tore. On dit d'une telle trajectoire qu'elle est *quasi-périodique*.

Remarque. Certains invariants en dimension $n = \dim(X) \geq 3$ peuvent être des fractales.

5.6 Fractales

Au sens algébrique strict du terme, la dimension représente le nombre de coordonnées minimum nécessaire pour exprimer chaque point de manière univoque. Pour un espace vectoriel, c'est donc la cardinalité d'une base quelconque, et donc un nombre naturel. Les fractales sont des objets géométrique dimension fractionnaire voire irrationnelle.

Définition 5.16. Soit un espace euclidien $E \simeq \mathbb{R}^d$ pour un $d \in \mathbb{N}^*$. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$, on définit $c_E(\varepsilon)$, le cube (de dimension d) de côté ε . Considérons E comme pavé par des cubes $c_E(\varepsilon)$.

Soit S une partie bornée de \mathbb{R}^d . On définit $N_E^S(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ le nombre maximal de cubes $c_E(\varepsilon)$ du pavage dont l'intersection avec S est non-nulle.

Définition 5.17. Soit un espace euclidien \mathbb{R}^d pavé d'hyper-cubes $c_E(\varepsilon)$ pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$. Soit S une partie bornée de \mathbb{R}^d . On appelle *dimension de Hausdorff* de S la quantité :

$$D_H(S) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_E^S(\varepsilon)}{-\log \varepsilon}.$$

Remarque. Pour des parties de dimension d dans l'espace euclidien \mathbb{R}^d , la dimension de Hausdorff correspond bien avec la notion de dimension vectorielle associée aux espaces vectoriels. En effet, si S est de dimension 2, la quantité $N_E^S(\varepsilon)$ va croître comme ε^{-2} . Et donc $D_H(S)$ sera 2. De même, en dimension $d = 3$, le volume croît comme le cube de ε^{-1} , et la dimension de Hausdorff est 3.

Mais de manière plus générale, la dimension de Hausdorff est une valeur réelle et non une valeur naturelle.

Définition 5.18. Un objet géométrique est appelé *fractal* lorsqu'il possède au moins une des caractéristiques suivantes :

1. il est invariant d'échelle (similarités à des échelles arbitraires) ;
2. il est trop compliqué pour être décrit par la géométrie traditionnelle ;
3. il est autosimilaire ;
4. sa dimension de Hausdorff n'est pas naturelle.

Remarque. Lorsqu'un objet fractal est trop compliqué à décrire, on l'exprime par un processus itératif de fragmentation.

Soient un espace euclidien \mathbb{R}^d , une partie non-vidée bornée $F \subset \mathbb{R}^d$, et $r \in (0, 1)$. Prenons $N \in \mathbb{N}^*$ copies conformes de F telles que :

$$Nr^d \in (0, 1),$$

et assemblons-les.

Proposition 5.19. Soient l'espace euclidien \mathbb{R}^d , et F une partie non-vidée bornée de \mathbb{R}^d . Soient $(N, r) \in \mathbb{N}^* \times (0, 1)$ les paramètres de fragmentation de F . Alors :

$$D_H(F) = \frac{\log N}{-\log r}.$$

Démonstration. En considérant l'espace comme pavé d'hyper-cubes $c_E(\varepsilon)$, posons $k \in \mathbb{N}^*$ l'étape de fragmentation. On trouve :

$$N_{\mathbb{R}^d}^F(\varepsilon) = N^k.$$

De même, à la k ème étape, on trouve :

$$\varepsilon = r^k.$$

On trouve finalement :

$$D_H(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_{\mathbb{R}^d}^F(\varepsilon)}{-\log \varepsilon} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k \log N}{-k \log r} = \frac{\log N}{-\log r}$$

□

Remarque. $r \in (0, 1)$, dès lors $\log r \in \mathbb{R}_0^-$. Donc $-\log r \in \mathbb{R}_0^+$, $D_H(F)$ reste bien une quantité positive.

Remarque. Attention : cette formule alternative ne tient que pour les objets fractals auto-similaires, car sinon les paramètres (N, r) ne sont pas définis.

5.6.1 Attracteurs

Définition 5.20. Soient $X \simeq \mathbb{R}^n$, un espace de phases, et $B \subseteq X$, une partie non-vide et bornée de X . Pour tout $x \in X$, on définit la distance entre x et B par :

$$d_X(x, B) := \min \{ d_X(x, b) \text{ t.q. } b \in B \}.$$

Définition 5.21. Une partie $A \subset X$ de l'espace des phases est un *attracteur* lorsque :

1. A est un invariant ;
2. $\exists U \in \mathcal{V}(A)$ ouvert et $u \in \Omega$ tels que :

$$\forall (t, t_0) \in T^2 : x(t_0) \in U \Rightarrow d_X(x(t), A) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 ;$$

3. A est minimal.

Définition 5.22. Un attracteur fractal est appelé *attracteur étrange*.

5.6.2 Chaos et exposant de Liapounov

Il est question de *comportement chaotique* (ou plus simplement *chaos*) lorsqu'un système déterministe devient impossible à prédire au-delà d'un certain intervalle temporel, peu importe la précision de la condition initiale.

La *dépendance sensible aux conditions initiales* (ou *sensitive dependence on initial conditions* en anglais) est le fait que deux trajectoires arbitrairement proches l'une de l'autre divergent l'une de l'autre et adoptent un comportement qualitativement différent, ce qui rend également les prédictions impossibles à faire.

Définition 5.23. Soient S un système dynamique avec les mouvements $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto \bar{x}(t)$ tels que pour $\delta : T \rightarrow X$, on a :

$$x(t) = \bar{x}(t) - \delta(t).$$

Si, pour $t \geq t_0$, on approxime $\delta(t)$ par $\|\delta(t)\| \simeq \|\delta(t_0)\| \exp(\lambda(t - t_0))$, pour un certain λ réel, on appelle ce paramètre *l'exposant de Liapounov* du système.

Définition 5.24. Si l'exposant de Liapounov d'un système est strictement positif, alors on dit que ce système est fortement dépendant des conditions initiales.

Remarque. Si $t_0 = 0$, alors $\log\|\delta(t)\| \simeq \log\|\delta(0)\| + \lambda t$. L'exposant de Liapounov est alors la pente de la droite $t \mapsto \log\|\delta(t)\|$. On peut alors estimer λ par régression linéaire de $\log\|\delta(t)\|$.

Définition 5.25. Soient un système dynamique S dont l'exposant de Liapounov est positif, et $\delta : T \rightarrow X$. Soit $\Delta \in \mathbb{R}_0^+$ tel que les mesures sont acceptables si $\|\delta(t)\| \leq \Delta$. On définit l'*horizon de prédictibilité induit par* Δ l'intervalle de temps $[t_0, t_h]$, avec :

$$T \ni t_h = t_0 + \frac{1}{\lambda} \log \frac{\Delta}{\|\delta(t_0)\|}.$$

Remarque. Cet intervalle correspond à l'ensemble des instants t tels que l'erreur induite par l'erreur initiale est acceptée.

La longueur de cet intervalle est inversement proportionnelle à l'exposant de Liapounov, et proportionnelle au log de Δ . Dès lors, même en augmentant l'ordre de grandeur de Δ et en diminuant celui de $\delta(t_0)$, cet intervalle ne s'agrandira que, proportionnellement, très peu.

6 Systèmes dynamiques à temps discret

Les systèmes à temps discret sont beaucoup plus simples à manipuler par ordinateurs car il n'est pas nécessaire d'avoir recours à des algorithmes d'intégration numérique. De plus, ils peuvent être parfois plus adaptés que des modèles continus, et les dynamiques chaotiques y sont plus facilement générées.

Définition 6.1. Soit $S = (T, U, \Omega, X, Y, \Gamma, \varphi, \eta)$ un système dynamique où T est un ensemble discret (dénombrable car infini).

Lorsque le système est décrit par l'équation vectorielle aux différences suivante :

$$\begin{cases} x(t+1) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= \eta(t, x(t)), \end{cases}$$

on dit que le système est *synchrone à temps discret*.

Remarque. Il est possible de changer l'échelle de temps de manière à avoir toujours un écart $x(t+1) = f(\dots)$ car on considère que tous les points consécutifs de T sont équidistants.

Définition 6.2. Lorsque f et η ne dépendent pas explicitement du temps, le système est dit *invariant*.

Définition 6.3. Un système synchrone à temps discret linéaire est déterminé par les trois « matrices » :

$$\begin{cases} A : T \rightarrow \mathbb{R}^{\dim(X) \times \dim(X)}, \\ B : T \rightarrow \mathbb{R}^{\dim(X) \times \dim(U)}, \\ C : T \rightarrow \mathbb{R}^{\dim(Y) \times \dim(X)}, \end{cases}$$

et est exprimé sous la forme :

$$\begin{cases} x(t+1) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t). \end{cases}$$

Remarque. Dans les systèmes à caractère continu, la représentation appropriée était les équations différentielles. Concernant les systèmes à caractère discret, on préfère les équations aux différences.

Définition 6.4. Pour tout $k \in T$, on pose $x_k := x(k) \in X$. Soit $f : T \times X^n$. On appelle *forme normale de l'équation aux différences d'ordre n* l'équation récursive suivante :

$$x_{k+n} = f(k, x_{k+n-1}, \dots, x_k). \quad (\#)$$

6.1 Solutions d'une équation aux différences

Définition 6.5. Toute fonction $x : T \rightarrow X$ satisfaisant $(\#)$ est appelée *solution de $(\#)$* .

L'ensemble de toutes les solutions d'une équation aux différences est appelé sa solution générale.

Théorème 6.6. Toute équation aux différences d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ admet exactement une solution pour tout n -uplet $(x(t_0), x(t_0+1), \dots, x(t_0+n-1)) \in X^n$.

Théorème 6.7. Pour toute solution $x_p : T \rightarrow X$ d'une équation aux différences non-homogène, si $x_h : T \rightarrow X$ est solution de l'équation homogène associée, alors $x_p + x_h : T \rightarrow X$ est solution de l'équation non-homogène.

Théorème 6.8. L'ensemble de solution générale d'une équation aux différences est un espace vectoriel fonctionnel.

Définition 6.9. Soit l'équation aux différences linéaire homogène suivante :

$$\sum_{k=0}^n a_k x(t+k) = 0.$$

On appelle *polynôme caractéristique* le polynôme suivant :

$$P : \lambda \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k.$$

Définition 6.10. Pour une équation aux différences linéaire et homogène et son polynôme caractéristique P , on appelle *équation caractéristique* l'équation suivante :

$$P(\lambda) = 0.$$

Remarque. Et par le théorème fondamental de l'algèbre, il existe n solutions complexes (multiplicité prise en compte).

Proposition 6.11. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, solution de l'équation caractéristique. Posons $m(\lambda)$ la multiplicité de cette racine. Alors :

$$x : t \mapsto t^k \lambda^t$$

est une solution de l'équation aux différences pour $k = 0, \dots, m(\lambda) - 1$, et toutes ces solutions sont linéairement indépendantes.

Remarque. En travaillant avec des polynômes, on prend pour convention $0^0 = 1$.

Proposition 6.12. Soit $\lambda = \rho \exp(i\theta) \in \mathbb{C}$, solution de l'équation caractéristique. Alors :

$$x_1 : t \mapsto t^k \rho \cos(t\theta) \quad \text{et} \quad x_2 : t \mapsto t^k \rho \sin(t\theta)$$

sont solutions de l'équation aux différences pour $k = 0, \dots, m(\lambda) - 1$, et toutes ces $2m(\lambda)$ solutions sont linéairement indépendantes.

6.2 États d'équilibre

Définition 6.13. Soit une équation aux différences linéaire et homogène :

$$\sum_{k=0}^n a_k x(t+k) = b.$$

Un état d'équilibre de l'équation est un état $\bar{x} \in X$ tel que la fonction constante $x : t \mapsto \bar{x}$ est une solution.

Proposition 6.14. Soit l'équation aux différences linéaire homogène suivante :

$$\sum_{k=0}^n a_k x(t+k) = b.$$

Alors :

— si $\sum_{k=0}^n a_k \neq 0$, alors il existe un unique état fixe donné par :

$$X \ni \bar{x} = \frac{b}{\sum_{k=0}^n a_k} ;$$

— sinon :

— si $b = 0$, alors tout $\bar{x} \in X$ est un point d'équilibre ;

— si $b \neq 0$, alors le système n'admet aucun point d'équilibre.

Définition 6.15. Soit $\bar{x} \in X$ un état d'équilibre. \bar{x} est dit *stable* lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0, t_0 > 0 \text{ t.q. } \sum_{j=0}^{n-1} |x(j) - \bar{x}| < \delta \Rightarrow \forall t > t_0 : |x(t) - \bar{x}| < \varepsilon.$$

Définition 6.16. Un équilibre $\bar{x} \in X$ est dit *asymptotiquement stable* (ou *attractif*) lorsque :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}.$$

Théorème 6.17 (Équilibre d'une équation aux différences linéaire). Soit P le polynôme caractéristique d'une équation aux différences et soit $\bar{x} \in X$ une équilibre de cette équation. Alors \bar{x} est :

- stable si et seulement si toute solution λ_i de P est telle que $|\lambda_i| \leq 1$ et $|\lambda_i| = 1 \Rightarrow m(\lambda_i) = 1$;
- asymptotiquement stable si et seulement si toute solution λ_i de P est telle que $|\lambda_i| < 1$.

6.3 Équations non-linéaires homogènes d'ordre 1

On parle ici d'équations aux différences sous la forme :

$$x(t+1) = f(x(t)),$$

avec $f \in C^\infty(T, I \subset X)$. Ce système est noté par le couple (f, I) .

Définition 6.18. La valeur $\bar{x} \in I$ est dite d'*équilibre* pour le système (f, I) lorsque :

$$\bar{x} = f(\bar{x}).$$

Théorème 6.19. Soient $I = [a, b]$ un intervalle réel et $f : I \rightarrow I$ continue. Alors il existe $\bar{x} \in I$ d'équilibre pour (f, I) .

Définition 6.20. L'équilibre $\bar{x} \in I$ est dit *globalement attractif* (ou *globalement asymptotiquement stable*) lorsque :

$$\forall x^0 \in I : x(t_0) = x^0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}.$$

Et l'équilibre \bar{x} est dit *localement attractif* (ou *localement asymptotiquement stable*) lorsque :

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } \forall x^0 \in I \cap [\bar{x} \pm \delta] : x(t_0) = x^0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}.$$

6.3.1 Cycles et stabilité

Définition 6.21. Soit (f, I) un système discret d'ordre 1. On appelle *cycle d'ordre* $s \in \mathbb{N}^*$ tout ensemble $\{\bar{x}^{(k)} \text{ t.q. } 0 \leq k < s\}$ tel que :

$$\bar{x}^{(0)} = f(\bar{x}^{(s-1)}) \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq k \leq s : \bar{x}^{(k)} = f(\bar{x}^{(k-1)}).$$

On dit également que s est la *période* du cycle.

Théorème 6.22. Soit un système discret d'ordre 1 (f, I) . L'ensemble $\{\bar{x}^{(k)} \text{ t.q. } 0 \leq k \leq s\}$ pour $s \in \mathbb{N}^*$ est un cycle de période s de f si et seulement si les $\bar{x}^{(k)}$ sont des équilibres de f^s et ne sont cycle d'aucun f^σ pour $\sigma \in \{1, \dots, s-1\}$.

Théorème 6.23. Soit (f, I) un système discret d'ordre 1 et soit $\bar{x} \in I$ un équilibre de (f, I) .

- Si $|f'(\bar{x})| < 1$, alors \bar{x} est localement attractif;
- si $|f'(\bar{x})| > 1$, alors \bar{x} est instable;
- si $|f'(\bar{x})| = 1$, \bar{x} peut être soit stable soit instable.

Théorème 6.24. Si selon les hypothèses précédentes, $|f'(\bar{x})| = 1$, alors :

- si $f''(\bar{x}) > 0$, alors \bar{x} est supérieurement attractif et inférieurement instable;
- si $f''(\bar{x}) < 0$, alors \bar{x} est inférieurement attractif et supérieurement instable.

6.3.2 Attracteurs et bifurcations

Définition 6.25. Soit (f, I) un système discret d'ordre 1. Un ensemble $A \subset I$ est appelé *attracteur* lorsque :

1. $f(A) = A$;
2. A est le plus petit ensemble (au sens de l'inclusion) tel qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$(\forall x(0) \in I : d_I(x(0), A) < \delta) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} d_I(x(t), A) = 0.$$

Définition 6.26. L'ensemble $\{x(0) \in I \text{ t.q. } \lim_{t \rightarrow +\infty} d_I(x(t), A) = 0\}$ est appelé *bassin d'attraction*.

Définition 6.27. Soit (f_a, I) un système discret d'ordre 1 tel que la fonction f dépend continûment d'un paramètre $a \in A \subset \mathbb{R}$. La valeur $\bar{a} \in A$ est une *valeur de bifurcation* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une discontinuité dans $N_{f_a}(a)$ sur $(\bar{a} \pm \varepsilon)$, où $N_{f_a} : A \rightarrow \mathbb{N}$ retourne le nombre d'équilibres de f_a pour la valeur a du paramètre.

Remarque. Des systèmes très simples tels que l'équation logistique discrète :

$$x(t+1) = ax(t)(1-x(t))$$

admettent une infinité de valeurs de bifurcations, et ont un comportement chaotique pour certaines valeurs de a .

Définition 6.28. Soit (f, I) un système discret d'ordre 1. Ce système est dit *chaotique* lorsque :

- $\forall (a, b) \subseteq I$, il existe au moins un cycle dans (a, b) ;
- $\forall (x, y, \varepsilon) \in I \times I \times \mathbb{R}_0^+ : \exists (z, k) \in I \times \mathbb{N} \text{ t.q. } |z - x| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |f^k(z) - y| < \varepsilon$;
- $\exists \delta > 0 \text{ t.q. } \forall (x, \varepsilon) \in I \times \mathbb{R}_0^+ : \exists (z, k) \in I \times \mathbb{N} \text{ t.q. } |z - x| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |f^k(x) - f^k(z)| > \delta,$

ce qui correspond à la dépendance aux conditions initiales.

Remarque. Dans les systèmes discrets, le chaos peut apparaître dès l'ordre 1 (équation logistique), contrairement aux systèmes continus où il faut un ordre ≥ 3 .

Définition 6.29. Soit (f, I) un système d'ordre 1. On définit l'*exposant de Liapounov* par :

$$L := \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \ln \left| \frac{\delta(t+1)}{\delta(t)} \right|,$$

avec $\delta : T = \mathbb{N} \rightarrow I$ telle que :

$$\forall t \in T : \delta(t) = f^t(x(0) + \delta(x(0))) - x(t),$$

et avec $\delta(0)$ une perturbation initiale.

Remarque. L'exposant L de Liapounov représente le taux moyen de divergence par itération.

Définition 6.30. Si un système discret d'ordre 1 (f, I) a un exposant de Liapounov L positif, alors il est dit chaotique.

7 Simulation statistique

Dans des modèles où l'incertitude est trop présente, ou des modèles où les erreurs de mesures rendent les représentations déterministes insuffisantes, il est nécessaire de formaliser cette incertitude. Les probabilités permettent un formalisme adapté.

Définition 7.1. On appelle *simulation statistique* toute méthode qui utilise des séquences de nombres aléatoires.

Remarque. Une solution analytique exacte de tels modèles est souvent impossible, et donc la meilleure solution reste la simulation.

7.1 Méthode de Monte Carlo

Définition 7.2. Un système déterministe à paramètre ou entrée stochastique est dit *de Monte Carlo*.

Remarque. Les fondateurs de cette théorie sont Fermi (physicien quantique), Von Neumann (logicien, analyste et mécanicien quantique), Ulam (algébriste et mathématicien physique), et Metropolis (physicien quantique).

Remarque. Les méthodes MC sont initialement prévues pour les problèmes stochastiques, mais peuvent être appliquées à des problèmes non-aléatoires. Elles restent cependant des méthodes de dernier secours car elles demandent de grosses ressources computationnelles.

Définition 7.3. Un algorithme MC se décompose en 7 composantes principales :

1. **la description probabiliste** revient à écrire un modèle stochastique du problème ;
2. **le générateur aléatoire** de loi uniforme sur $[0, 1]$;
3. **la loi d'échantillonnage** pour *transformer* la distribution précédente en toute distribution générique ;
4. **le simulateur déterministe** qui renvoie une sortie, une fois que tous les paramètres sont connus (générés) ;
5. **le collecteur de sorties** qui agrège les sorties de toutes les simulations successives ;
6. **l'analyseur d'output** qui est un ensemble de processus statistiques pour inférer des informations sur les simulations ;
7. **l'estimateur d'erreur** qui associe un indice de confiance à chaque valeur inférée.

7.2 Génération de nombres aléatoires

Définition 7.4. Soit Z une variable aléatoire réelle et continue. On appelle *fonction de répartition de Z* la fonction

$$F^Z : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] : z \mapsto \mathbb{P}[Z \leq z].$$

On appelle *fonction de densité de Z* la fonction :

$$f^Z : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : z \mapsto f^Z(z) = \frac{d}{dz} F^Z(z).$$

Remarque. Pour MC, il est nécessaire de pouvoir générer des nombres pseudo-aléatoires selon une loi donnée.

Le principe actuel de génération aléatoire est de générer des nombres qui ne soient pas indépendants, mais dont la dépendance est trop compliquée à déterminer. Il vient directement de là qu'une distribution de nombres pseudo-aléatoires par un ordinateur est **obligatoirement** cyclique. On cherche à maximiser cette période afin de pouvoir générer la plus longue séquence possible. En effet, une fois la période dépassée, la séquence n'est plus aléatoire **du tout**.

De plus, les générateurs de nombres utilisent une *graine* (*seed* en anglais), ce qui permet une répétabilité des opérations.

Remarque. Suite aux différentes architectures d'ordinateurs et de processeurs existantes, il est très important qu'un générateur de nombre pseudo-aléatoires produise toujours la même séquence, indépendamment de l'ordinateur sur lequel il tourne.

7.2.1 Générer des nombres uniformes

Définition 7.5. La méthode de Von Neumann (*middle square*) consiste à prendre un nombre initial à $2n$ chiffres, le mettre au carré, puis prendre les $2n$ chiffres centraux du nombre, et réitérer afin de générer une « séquence aléatoire ».

Remarque. Cette méthode présente comme gros problème d'avoir un état absorbant (0) et stable.

Définition 7.6. Un *générateur congruentiel linéaire* (*linear congruential generator* en anglais, ou LGC) est un générateur sous la forme :

$$z_{i+1} = (az_i + c) \mod m,$$

pour $a, c \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, avec la séquence $\left(\frac{z_i}{m}\right)_{1 \leq i \leq N}$ pour $N \in \mathbb{N}^*$.

Remarque. C'est à Derrick H. Lehmer que l'on doit cet algorithme.

Remarque. Un choix commun pour l'algorithme de Lehmer est $(a, c, m) = (7^5, 0, 2^{31} - 1)$.

Notons que $2^{31} - 1$ est un nombre de Mersenne premier (*prime Mersenne number*), et donc que $z_i \in \mathbb{Z}_{2^{31}-1}$, qui est un anneau additif.

7.2.2 Tests du caractère aléatoire

Définition 7.7. Soit X une variable aléatoire réelle continue. On définit son moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\mathbb{E}[X^r] = \int_{\mathbb{R}} x^r f^X(x) dx.$$

Proposition 7.8. Si X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, alors son moment d'ordre i pour $i = 1, 2, 3$ est donné par $\frac{1}{i+1}$.

Remarque. En utilisant le *moment empirique d'ordre r* comme estimateur du moment d'ordre r , on peut établir un test disant si la distribution ne suit pas une loi uniforme.

7.2.3 Générer des nombres aléatoires d'une distribution donnée

Soient X et Y , deux variables aléatoires réelles continues de densité respective f^X et f^Y telles qu'il existe $F : Y \mapsto X$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x = F(y)$. On calcule :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X \leq x] &= \mathbb{P}[F(Y) \leq x] \\ \frac{d}{dx} \mathbb{P}[X \leq x] &= \frac{d}{dx} \mathbb{P}[Y \leq F^{-1}(x)] \\ f^X(x) &= f^Y(F^{-1}(x)) \frac{d}{dx} F^{-1}(x) = f^Y(y) \frac{1}{\frac{d}{dx} F[F^{-1}(x)]} = f^Y(y) \frac{1}{\frac{d}{dx} F(y)}.\end{aligned}$$

En prenant alors pour $F : Y \mapsto X$, la fonction F^Y , monotone croissante, la fonction de répartition de Y . On trouve :

$$f^X = \frac{f^Y(y)}{f^Y(y)} = 1,$$

sur $[0, 1]$. Donc $X = F^Y(Y)$ est distribué comme une variable uniforme sur $[0, 1]$.

Pour générer une variable Y de répartition F^Y donnée, il suffit d'inverser cette fonction, et de poser :

$$x = (F^Y)^{-1}(x),$$

pour x généré uniformément dans $[0, 1]$.

Remarque. Dans certains cas, il n'existe pas de forme analytique (non intégrale) pour la fonction de répartition. Dans ces cas, il faut passer par des méthodes d'interpolation pour estimer la réciproque de la fonction de répartition.