MATH-F-211 : Topologie

R. Petit

année académique 2016 - 2017

Table des matières

Chapitre 1

Topologie générale

1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1. Soit M un ensemble non vide. Une fonction $d : M \times M \to \mathbb{R}$ est un e *métrique* si d satisfait :

M1. $\forall x, y \in M : d(x, y) \geqslant 0$ avec $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

M2. $\forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x)$;

M3. $\forall x, y, z \in M : d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Le couple (M, d) est appelé *espace métrique*.

Exemple 1.1.1. La métrique euclidienne sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$$d_E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto |x - y|.$$

Démonstration. EXERCICE. □

Exemple 1.1.2. La métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ est définie par :

$$d_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Lemme 1.1.2 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)**.** *Soient* $r, s \in \mathbb{R}^n$. *Alors :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} r_i s_i \right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} s_i^2 \right).$$

Démonstration. Soit la fonction :

$$F(t) = \sum_{j=1}^{n} (r_j + t s_j)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} s_j^2 \right) t^2 + \left(2 \sum_{j=1}^{n} r_j s_j \right) t + \sum_{j=1}^{n} r_j^2.$$

La fonction $F(t)$ est positive pour tout t car c'est une somme de valeurs positives. Dès lors, son discriminant est négatif. On a alors :

$$\left(2 \sum_{j=1}^{n} r_j s_j \right)^2 - 4 \left(\sum_{j=1}^{n} r_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} s_j^2 \right) \leqslant 0.$$

En divisant par 4 de part et d'autre et en réarrangeant l'inégalité, on obtient :

$$\left(\sum_{j=1}^{n} r_j s_j\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} r_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} s_j^2\right).$$

□

Preuve de l'exemple 1.1.2. M1 et M2 sont triviaux.

Pour M3, posons pour $1 \leqslant i \leqslant n$: $r_i \coloneqq x_i - y_i$ et $s_i \coloneqq y_i - z_i$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n} r_i s_i &\leqslant 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_i^2\right)} \\
2\sum_{i=1}^{n} r_i s_i + \sum_{i=1}^{n}(r_i^2 + s_i^2) &\leqslant 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_i^2\right)} + \sum_{i=1}^{n}(r_i^2 + s_i^2) \\
\sum_{i=1}^{n}(r_i + s_i)^2 &\leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} s_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2}\right)^2 \\
\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(r_i + s_i)^2} &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} s_i^2} \\
\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2} \\
d_E(x, z) &\leqslant d_E(y, z) + d_E(x, y).
\end{aligned}$$

□

Définition 1.1.3. Soit $M \neq \emptyset$. On définit la *métrique discrète* sur M par :

$$d : M \times M \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}.$$

Démonstration. M1 et M2 sont triviaux.

Pour M3 :

- soit $x \neq z$, et donc $x \neq y$ ou $y \neq z$, ce qui implique $d(x, y) + d(y, z) \geqslant 1 = d(x, z)$;
- soit $x = z$, et donc $0 = d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

□

Définition 1.1.4. La métrique de Manhattan est définie par :

$$d_{\mathcal{M}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Démonstration. M1 et M2 sont triviaux.

Pour M3, on pose $x, y, z \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{M}}(x,z) &= d_E(x_1,z_1) + d_E(x_2,z_2) \leqslant d_E(x_1,y_1) + d_E(y_1,z_1) + d_E(x_2,y_2) + d_E(y_2,z_2) \\ &= \big(d_E(x_1,y_1) + d_E(x_2,y_2)\big) + \big(d_E(y_1,z_1) + d_E(y_2,z_2)\big) = d_{\mathcal{M}}(x,y) + d_{\mathcal{M}}(y,z). \end{aligned}$$

□

Définition 1.1.5. Soit $\mathcal{C}\left([a,b]\right)$, l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $f, g \in \mathcal{C}\left([a,b]\right)$, et on définit :

— $d_1 : \mathcal{C}\left([a,b]\right) \times \mathcal{C}\left([a,b]\right) \to \mathbb{R} : (f,g) \mapsto \int_a^b \big|(f-g)(x)\big|\, dx$;

— $d_2 : \mathcal{C}\left([a,b]\right) \times \mathcal{C}\left([a,b]\right) \to \mathbb{R} : (f,g) \mapsto \sqrt{\int_a^b \big((f-g)(x)\big)^2\, dx}$;

— $d_\infty : \mathcal{C}\left([a,b]\right) \times \mathcal{C}\left([a,b]\right) \to \mathbb{R} : (f,g) \mapsto \sup\left\{\big|(f-g)(x)\big| \text{ t.q. } x \in [a,b]\right\}$.

Définition 1.1.6. Soit $\mathcal{C}^1([a,b])$, l'ensemble des fonctions continument différentiables sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit :

$$\begin{aligned} d : \mathcal{C}^1([a,b]) \times \mathcal{C}^1([a,b]) \to \mathbb{R} : (f,g) \mapsto \sup\left\{\big|(f-g)(x)\big| \text{ t.q. } x \in [a,b]\right\} + \sup\left\{\big|(f'-g')(x)\big| \text{ t.q. } x \in [a,b]\right\} \\ = d_\infty(f,g) + d_\infty(f',g'). \end{aligned}$$

Remarque. Si f et g sont k fois continument dérivables, alors on définit :

$$d(f,g) = \sum_{i=0}^{k} d_\infty(f^{(i)}, g^{(i)}).$$

1.1.1 Sous-espaces métriques

Proposition 1.1.7. *Soit* (M,d) *un espace métrique. Soit* $A \subset M$, *non vide. Alors* (A, d_A) *est un espace métrique, où :*

$$d_A = d|_{A\times A}\,.$$

Définition 1.1.8. Soient (M, d_M) et (N, d_N) deux espaces métriques. Soit $A \subset M$ non-vide. On définit trois métriques distinctes :

$$\begin{aligned} d_1 &: (M\times N)^2 \to \mathbb{R} : ((x,y),(x',y')) \mapsto d_M(x,x') + d_N(y,y') \\ d_2 &: (M\times N)^2 \to \mathbb{R} : ((x,y),(x',y')) \mapsto \sqrt{d_M(x,x') + d_N(y,y')} \\ d_\infty &: (M\times N)^2 \to \mathbb{R} : ((x,y),(x',y')) \mapsto \max\left\{d_M(x,x'), d_N(y,y')\right\} \end{aligned}$$

Démonstration. EXERCICE. □

Définition 1.1.9. Soit (M,d) un espace métrique et soient $a \in M, r \in \mathbb{R}_0^+$. On définit la *boule ouverte* centrée en a de rayon r par :

$$B(a,r) \coloneqq \left\{x \in M \text{ t.q. } d(x,a) \lneqq r\right\}.$$

Définition 1.1.10. Soit $f : (M, d_M) \times (N, d_N)$, une application entre deux espaces métriques. Si f est une bijection et :

$$\forall x, y \in M : d_N(f(x), f(y)) = d_M(x,y),$$

alors on dit que f est une *isométrie*.

Remarque. L'ensemble des isométries d'un espace métrique dans lui-même forme un groupe pour la composition.

1.2 Suites et limites

Définition 1.2.1. Une suite (x_n) dans un espace métrique (M, d) converge vers un point $a \in M$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant N : d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Lemme 1.2.2. *Soit (x_n) une suite dans un espace métrique (M, d). S'il existe a et b dans M tels que $x_n \to a$ et $x_n \to b$, alors $a = b$.*

Lemme 1.2.3. *Soient (M, d_M) et (N, d_N) deux espaces métriques. Soient (x_n) une suite dans M et (y_n) une suite dans N. Alors la suite $(x_n, y_n)_n$ dans $M \times N$ converge par d en $(a, b) \in M \times N$ si et seulement si $x_n \to a$ et $y_n \to b$, où $d \in \{d_1, d_2, d_\infty\}$.*

Remarque. Ici, la convergence est assurée par les trois métriques si elle est constatée par une seule. En réalité, de manière générale, la convergence dépend de la métrique.

Exemple 1.2.1. La fonction :

$$f_n : [0,1] \to [0,1] : x \mapsto \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leqslant x < \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On observe que :

$$d_1(f_n, 0) = \int_0^1 \left|f_n(x) - 0(x)\right| dx = \int_0^1 \left|f_n(x)\right| dx = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$d_2(f_n, 0) = \int_0^1 \left|f_n(x)\right|^2 \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$d_\infty(f_n, 0) = 1 \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il y a donc convergence vers 0 (la fonction nulle) pour d_1 et d_2 dans $\mathcal{C}([0,1])$ mais vers 1 (la fonction constante valant 1) pour d_∞.

Définition 1.2.4. Une suite (x_n) dans un espace métrique (M, d) est dite *de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m, n \geqslant N : d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Lemme 1.2.5. *Soit (x_n) une suite convergente dans un espace métrique (M, d). Alors (x_n) est de Cauchy.*

Remarque. On ne peut pas cependant dire que la réciproque est vraie : le cas est trop général.

Exemple 1.2.2. Si $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ est une suite convergente en $\sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$, alors (x_n) est de Cauchy. Or (x_n) ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.