MATHF-3001 — Théorie de la mesure
Résolution des TPs

R. Petit

Année académique 2018 - 2019

1 Séance 1

> **Exercice 1.1.** *Soient* $(X, \mathcal{F})$ *un espace mesurable et* $Y \subset X$. *Mq* $\mathcal{F}_Y \coloneqq \mathcal{F} \cap Y$ *est une* σ*-algèbre sur* Y.

Résolution.

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$, donc $\emptyset \cap Y = \emptyset \in \mathcal{F}_Y$.
2. Soit $F \in \mathcal{F}$. $F \cap Y \in \mathcal{F}_Y$ et donc :

$$Y \setminus (F \cap Y) = Y \setminus F \cup \emptyset = Y \cap F^{\complement} \in \mathcal{F}_Y$$

car $F^{\complement} \in \mathcal{F}$.

3. Soit $(F_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. On sait que $\bigcup_{n \geqslant 0} F_n \in \mathcal{F}$. De plus $(F_n \cap Y)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{F}_Y{}^{\mathbb{N}}$. Donc :

$$\bigcup_{n \geqslant 0} (F_n \cap Y) = \bigcup_{n \geqslant 0} F_n \cap Y \in \mathcal{F}_Y.$$

$\square$

> **Exercice 1.2.**
> 1. *Soit* X *un ensemble fini. Décrire la* σ*-algèbre engendrée par la classe des parties finies de* X. *Que peut-on dire si* X *est fini ?*
> 2. *Dans* $X = [\![0, n]\!]$, *on considère* $\mathcal{A} = \{0\}$ *et* $\mathcal{B} = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$. *Décrire* $\sigma(\mathcal{A})$ *et* $\sigma(\mathcal{B})$.

Résolution.

1. Soit $\mathcal{F} = \sigma(\{Y \in \mathcal{P}(X) \text{ s.t. } Y \text{ est fini }\})$. Alors :

$$\mathcal{F} = \{Y \in \mathcal{P}(X) \text{ s.t. } Y \text{ est au plus dénombrable ou } Y^{\complement} \text{ est au plus dénombrable}\}$$

car la famille doit être stable par complémentaire (d'où la définition symétrique par complémentarité) et par union dénombrable (d'où le fait que Y ou $Y^{\complement}$ soit au plus dénombrable). Si X est fini, alors l'ensemble des parties finies de X est exactement $\mathcal{P}(X)$ qui est une σ-algèbre. Donc $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{P}(X)) = \mathcal{P}(X)$.

2. $\sigma(\mathcal{A})$ est la σ-algèbre engendrée par un unique élément donc : $\sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{0\}, \{0\}^{\complement}, [\![0, n]\!]\}$ où $\{0\}^{\complement} = [\![1, n]\!]$.
$\sigma(\mathcal{B}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, [\![3, n]\!], [\![1, n]\!], \{0\} \cup [\![3, n]\!], [\![0, n]\!]\}$.

$\square$

Exercice 1.3. *Soient* X, Y *deux ensembles, et* $f : X \to Y$.

1. *Si* $\mathcal{F}$ *est une* σ*-algèbre sur* Y, *mq* $\mathcal{A} := f^{-1}(\mathcal{F})$ *est une* σ*-algèbre sur* X.
2. *Soit* $\mathcal{A}$ *une* σ*-algèbre sur* X.
   (a) *Mq* $\mathcal{F} := \{B \in \mathcal{P}(Y) \text{ s.t. } f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ *est une* σ*-algèbre sur* Y.
   (b) *Que peut-on dire de* $f(\mathcal{A})$ *?*

Résolution.

1.
   — $\emptyset \in \mathcal{F}$ donc $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}(\mathcal{F})$.
   — Soit $A \in \mathcal{A}$. Il existe $B \in \mathcal{F}$ s.t. $f^{-1}(B) = A$. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus A \in \mathcal{A}$.
   — Soit $(A_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Il existe $(B_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ s.t. $\forall n \geqslant 0 : A_n = f^{-1}(B_n)$. $\bigcup_{n \geqslant 0} A_n = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \geqslant 0} B_n\right) \in f^{-1}(\mathcal{F})$.

2.
   (a)
   — $\emptyset \in \mathcal{A}$ donc $\emptyset \in \mathcal{F}$.
   — Soient $B \in \mathcal{F}$, $A := f^{-1}(B)$. $f^{-1}(B^{\complement}) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(B)^{\complement} \in \mathcal{A}$.
   — Soit $(B_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. On pose $B := \bigcup_{n \geqslant 0} B_n$.

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-1}(B_n) = \bigcup_{n \geqslant 0} A_n \in \mathcal{A}$$

   où $\forall n \geqslant 0 : A_n = f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$. Donc $B \in \mathcal{F}$.

   (b) $f(\mathcal{A})$ n'est pas nécessairement une σ-algèbre : l'égalité $f(A^{\complement}) = f(A)^{\complement}$ n'est pas vraie en général. Par exemple pour $f : [\pm\varepsilon] \to [0, \varepsilon^2] : x \mapsto x^2$, on a :

$$[0, \varepsilon^2] = f([-\varepsilon, 0]) = f([\pm\varepsilon] \setminus [0, +\varepsilon]) \neq f([\pm\varepsilon]) \setminus f([0, \varepsilon]) = [0, \varepsilon^2] \setminus [0, \varepsilon^2] = \emptyset.$$

   Donc rien ne garantit que $f(\mathcal{A})$ est stable par passage au complémentaire.
   TODO: Donner un contre-exemple avec des σ-algèbres finies sur de petits ensembles.

□

Exercice 1.4. *Soient* $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ *espaces mesurables. Soit* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$. *Si* $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$, *mq* $f : X \to Y$ *est mesurable ssi* $f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$.

Résolution. $\underline{\Rightarrow}$: en supposant f mesurable, si $B \in \mathcal{F}$, alors $B \in \mathcal{B}$ et donc $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

$\underline{\Leftarrow}$: on pose $\mathcal{B}' := \{B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Par le point précédent, $\mathcal{B}'$ est une σ-algèbre. Par hypothèse : $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}'$, et donc $\sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{B}') = \mathcal{B}'$. Or $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$. De plus, puisque $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, on a $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, ce qui implique $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, i.e. :

$$\forall B \in \mathcal{B} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

□

Exercice 1.5.

1. *Mq toute intersection (non-vide) de classes de Dynkin est une classe de Dynkin.*
2. *Mq pour tout* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ *il existe une plus petite classe de Dynkin au sens de l'inclusion (notée* $\lambda(\mathcal{F})$*).*
3. *Mq si* $\mathcal{D}$ *est une classe de Dynkin stable par intersections finies, alors* $\mathcal{D}$ *est une* σ*-algèbre.*

4. *Mq si $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ est stable par intersections finies, alors $\lambda(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$.*

<u>*Résolution*</u>.

1. [Exactement même raisonement que pour les σ-algèbres] Soit $(\mathcal{D}_i)_{i\in I}$ une famille non-vide de classes de Dynkin et soit $\mathcal{D} \coloneqq \bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i$.
   — $\forall i \in I : \emptyset \in \mathcal{D}_i$ donc $\emptyset \in \mathcal{D}$.
   — Soit $D \in \mathcal{D}$. Puisque $\forall i \in I : D \in \mathcal{D}_i$ et que les $\mathcal{D}_i$ sont des classes de Dynkin, on a $\forall i \in I : D^{\complement} \in \mathcal{D}_i$ et donc $D^{\complement} \in \mathcal{D}$.
   — Soit $(D_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$. On sait que $\forall i \in I : \bigsqcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}_i$ et donc $\bigsqcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}$.
2. Comme pour les σ-algèbres, on peut définir :
$$\lambda(\mathcal{F}) \coloneqq \bigcap_{\substack{\mathcal{D} \text{ Dynkin} \\ \mathcal{F}\subset\mathcal{D}}} \mathcal{D}.$$
   Par le point ci-dessus, $\lambda(\mathcal{F})$ est une classe de Dynkin et toute classe de Dynkin $\mathcal{D}' \supset \mathcal{F}$ contient $\lambda(\mathcal{F})$ par définition.
3. Soit $\mathcal{D}$ une classe de Dynkin stable par intersections finies et soit $(D_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$. Montrons donc que $\bigcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}$. On pose $B_0 \coloneqq D_0$ et pour $n > 0$, on pose $B_n \coloneqq A_n \cap (\bigcap_{j=1}^{n-1} B_j^{\complement})$. Par récurrence, on observe que les B_n sont dans $\mathcal{D}$ par stabilité sous intersections finies. De plus les B_n sont disjoints deux à deux et leur union est égale à l'union des D_n. Donc $\bigcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}$.
4. Soit $D \in \lambda(\mathcal{F})$. On pose $\mathcal{D}_D \coloneqq \{Q \in \lambda(\mathcal{F}) \text{ s.t. } Q \cap D \in \lambda(\mathcal{F})\} \subset \lambda(\mathcal{F})$. Montrons que $\mathcal{D}_D$ est une classe de Dynkin.
   — $\emptyset \in \mathcal{D}_D$ puisque $\lambda(\mathcal{F}) \ni \emptyset = \emptyset \cap D$.
   — Soit $Q \in \mathcal{D}_D$. $Q^{\complement} \cap D = (D^{\complement} \cup Q)^{\complement} = (D^{\complement} \sqcup \underbrace{(Q \cap D)}_{\in\lambda(\mathcal{F})})^{\complement} \in \lambda(\mathcal{F})$ par stabilité par passage au complément, stabilité par union disjointe.
   — Soit $(Q_n)_{n\geqslant 0} \in {\mathcal{D}_D}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. On a :
$$\bigsqcup_{n\geqslant 0} Q_n \cap D = \bigsqcup_{n\geqslant 0} \underbrace{(Q_n \cap D)}_{\in\lambda(\mathcal{F})} \in \lambda(\mathcal{F}).$$
   On remarque également que si $D \in \mathcal{F} : \mathcal{F} \subset \mathcal{D}_D \subset \lambda(\mathcal{F})$, ce qui implique $\lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_D$.
   Or par symétrie de l'intersection, pour $D, Q \in \lambda(\mathcal{F})$ on a : $Q \in \mathcal{D}_D \iff D \in \mathcal{D}_Q$. Dès lors on a une équivalence entre les deux assertions suivantes :
   — $\forall (D, Q) \in \mathcal{F} \times \lambda(\mathcal{F}) : Q \in \mathcal{D}_D$ (autrement dit $\forall D \in \mathcal{F} : \lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_D$) ;
   — $\forall (D, Q) \in \mathcal{F} \times \lambda(\mathcal{F}) : D \in \mathcal{D}_Q$ (autrement dit $\forall Q \in \lambda(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subset \mathcal{D}_Q$).
   On peut alors en déduire que $\forall Q \in \lambda(\mathcal{F}) : \lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_Q$. Dès lors, montrer que $\lambda(\mathcal{F})$ est stable par instersections finies revient à montrer que $\forall D, Q \in \lambda(\mathcal{F}) : D \cap Q \in \lambda(\mathcal{F})$, i.e. $D \in \mathcal{D}_Q = \lambda(\mathcal{F})$. On a donc bien la stabilité de $\lambda(\mathcal{F})$ sous intersections finies, on peut donc déduire que $\lambda(\mathcal{F})$ est une σ-algèbre qui contient $\mathcal{F}$, donc $\sigma(\mathcal{F}) \subset \lambda(\mathcal{F})$. Or toute σ-algèbre est une classe de Dynkin, donc $\lambda(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{F})$, ce qui permet de conclure.

□

2 Séance 2

Exercice 2.1. *Soient $(X, \mathcal{F})$ un espace mesurable et μ une fonction additive sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Mq les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *μ est σ-additive ;*
2. *μ est continue à gauche ;*
3. *μ est continue à droite.*

Donner un exemple de mesure $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ qui ne satisfait pas le point 3. Que faut-il ajouter comme hypothèse pour ce résultat ?

Résolution.

1. $\Rightarrow$ 2. Soit $(B_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. On pose $A_0 \coloneqq B_0$ et $\forall n > 0 : A_n \coloneqq B_n \setminus B_{n-1}$, ce qui donne (car les A_n sont dans $\mathcal{A}$) :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 0} B_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n\right) = \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n) = \lim_{N\to+\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \mu(A_n)}_{=\mu(B_N)} = \lim_{N\to+\infty} \mu(B_N).$$

2. $\Rightarrow$ 1. Soit $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. On pose $B_0 \coloneqq A_0$ et $\forall n > 0 : B_n \coloneqq A_n \cup B_{n-1}$. Les B_n forment une suite croissante dans $\mathcal{A}$. On a alors :

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geqslant 0} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigsqcup_{j=0}^{n} A_j\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \mu(A_j) = \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n).$$

2. $\Rightarrow$ 3. Soit $(C_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante. On a alors que $({C_n}^{\complement})_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante dans $\mathcal{A}$. Donc :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 0} {C_n}^{\complement}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu({C_n}^{\complement}) = \mu(X) - \lim_{n\to+\infty} \mu({C_n}^{\complement})$$

car $\mu(X) < +\infty$. De plus :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 0} {C_n}^{\complement}\right) = \mu\left(\left(\bigcap_{n\geqslant 0} C_n\right)^{\complement}\right) = \mu(X) - \mu\left(\bigcap_{n\geqslant 0} C_n\right).$$

Par finitude de μ, on conclut :

$$\mu\left(\bigcap_{n\geqslant 0} C_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(C_n).$$

3. $\Rightarrow$ 2. Exactement même raisonnement par passage au complémentaire.

Si la mesure n'est pas finie, on peut construire une suite $(C_n)_n$ telle que $\forall n \geqslant 0 : \mu(C_n) = +\infty$ et $\bigcap_{n\geqslant 0} C_n = \emptyset$. Par exemple, dans l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \# = |\cdot|)$: $\forall n \geqslant 0 : C_n \coloneqq \{m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } m > n\}$ est de mesure $+\infty$ et $\bigcap_{n\geqslant 0} C_n = \emptyset$. On a donc :

$$\mu\left(\bigcap_{n\geqslant 0} C_n\right) = \mu(\emptyset) = 0 \neq +\infty = \lim_{n\to+\infty} +\infty = \lim_{n\to+\infty} \mu(C_n).$$

Il faut donc supposer que pour la suite $(C_n)_n$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\mu(C_n) \lneqq +\infty$ afin d'éviter le cas où $(\mu(C_n))_{n\geqslant 0}$ est infinie pour tous les termes. □

Exercice 2.2. *Soit* X *un ensemble non dénombrable et* $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X)$ *s.t.* A *ou* $A^{\complement}$ *est dénombrable*$\}$*. Soit* $\mu : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ *où* $\mu(A) = 0 \iff A$ *est dénombrable. Mq* μ *est une mesure sur* $(X, \mathcal{A})$*.*

Résolution. $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre (voir cours).
- $\mu(\emptyset) = 0$ car $\emptyset$ est fini.
- Soit $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. On note $A := \bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n$. On a soit $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$, et :
$$\mu(A) = 0 \iff \underbrace{\forall n \geqslant 0 : \mu(A_n) = 0}_{\text{i.e. tous les } A_n \text{ dénombrables}},$$
et donc :
$$\mu(A) = 0 = \sum_{n\geqslant 0} 0 = \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n)$$
pour le premier cas. Pour le second cas, si $\mu(A) = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. ${A_{n_0}}^{\complement}$ est dénombrable (ou $\mu(A_{n_0}) = 1$), donc $\mu(A) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $n_1 \neq n_0$ s.t. ${A_{n_1}}^{\complement}$ est dénombrable ($\mu(A_{n_1}) = 1$). On a donc ${A_{n_0}}^{\complement}$ et ${A_{n_1}}^{\complement}$ dénombrables. Or $A_{n_0} \cap A_{n_1} = \emptyset$, donc $A_{n_0} \subseteq {A_{n_1}}^{\complement}$ ou $A_{n_1} \subseteq {A_{n_0}}^{\complement}$, ce qui implique A_{n_0} ou A_{n_1} dénombrable, ce qui est une contradiction car X est non-dénombrable.

□

Exercice 2.3. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité. Mq* $\mathcal{T} := \{A \in \mathcal{A}$ *s.t.* $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}\}$ *est une σ-algèbre.*

Résolution.
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ donc $\emptyset \in \mathcal{T}$.
- Soit $A \in \mathcal{T}$. En particulier $A \in \mathcal{A}$ et $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. Puisque $\mathbb{P}$ est une mesure (finie), on a $\mathbb{P}(A^{\complement}) = \mathbb{P}(X) - \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. Donc $A^{\complement} \in \mathcal{T}$.
- Soit $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. On note $A := \bigcup_{n\geqslant 0} A_n$. Mq $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.
  - si $\forall n \geqslant 0 : \mathbb{P}(A_n) = 0$, alors par σ-sous-additivité $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} P(A_n) = 0$.
  - si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\mathbb{P}(A_{n_0}) = 1$, alors par monotonie, puisque $A_{n_0} \subseteq A \subseteq X$:
$$1 = \mathbb{P}(A_{n_0}) \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(X) = 1.$$

□

Exercice 2.4. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* $(Y, \mathcal{B})$ *un espace mesurable et* $g : X \to Y$ *une application mesurable. On pose :*
$$\nu : \mathcal{B} \to [0, +\infty] : B \mapsto \mu(g^{-1}(B)).$$
Mq ν *est une mesure sur* $(Y, \mathcal{B})$*.*

Résolution. On sait que $\forall B \in \mathcal{B} : g^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ puisque g est mesurable. Donc ν est bien définie. Mq ν est une mesure.
- $\nu(\emptyset) = \mu(g^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ car μ est une mesure.
- Soient $(B_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. Mq ν est σ-additive.

$$\nu\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} B_n\right) = \mu\left(g^{-1}\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} B_n\right)\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} g^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n\geqslant 0} \mu(g^{-1}(B_n)) = \sum_{n\geqslant 0} \nu(B_n).$$

$\square$

Exercice 2.5. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable.*

1. *Pour $x \in X$, mq δ_x est une mesure.*
2. *Mq si μ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$ s.t. $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \iff x \notin A$ alors $\exists C \gneqq 0$ s.t. $\mu = C\delta_x$.*

Résolution.

1. Mq δ_x est une mesure.
   — $\delta_x(\emptyset) = 0$ car $x \notin \emptyset$.
   — Soit $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints. Mq $\delta_x(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n) = \sum_{n\geqslant 0} \delta_x(A_n)$.
     — Si $\delta_x(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n) = 0$, alors $\forall n \geqslant 0 : x \notin A_n$, i.e. $\forall n \geqslant 0 : \delta_x(A_n) = 0$.
     — Si $\delta_x(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n) = 1$, alors $\exists n_0$ s.t. $x \in A_{n_0}$. Et puisque les A_n sont disjoints, $\forall n \neq n_0 : x \notin A_n$.
2. Soient $B, C \in \mathcal{A}$ s.t. $\mu(B) \neq 0 \neq \mu(C)$. Alors $\delta_x(B) = 1 = \delta_x(C)$. Mq $\mu(B) = \mu(C)$. $B \cap C \neq \emptyset$ puisque $x \in B \cap C$. On pose $\tilde{C} := C \cap B^{\complement}$ et $\tilde{B} := C^{\complement} \cap B$. On a alors que B et $\tilde{C}$ sont disjoints (C et $\tilde{B}$ également). De plus, $x \notin \tilde{B}$ et $x \notin \tilde{C}$, et donc $\mu(\tilde{B}) = \mu(\tilde{C}) = 0$. On a donc :

$$\mu(C) = \mu(C) + \mu(\tilde{B}) = \mu(C \sqcup \tilde{B}) = \mu(B \cup C) = \mu(B \sqcup \tilde{C}) = \mu(B) + \mu(\tilde{C}) = \mu(B).$$

   On a donc $\mu : \mathcal{A} \to \{0, C\}$ où $\mu(A) \iff \delta_x(A) = 1$.

$\square$

Exercice 2.6. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Mq la mesure de comptage est une mesure.*

Résolution.
— $|\emptyset| = 0$.
— La σ-additivité est triviale : $\left|\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n\right| = \sum_{n\geqslant 0} |A|_n$.

$\square$

Exercice 2.7. *Soit X un ensemble fini non-vide. Mq $\mu = \frac{|\cdot|}{|X|}$ est une mesure de proba sur $(X, \mathcal{P}(X))$.*

Résolution.
— $\mu(\emptyset) = 0/|X| = 0$.
— Soient $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints.

$$\mu(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n) = \frac{\sum_{n\geqslant 0} |A_n|}{|X|} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{|A_n|}{|X|}.$$

Note : si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, alors $\forall \alpha > 0 : \alpha\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty] : A \mapsto \alpha \cdot \mu(A)$ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. Donc l'exercice peut être simplement résolu par le fait que μ est la mesure de comptage normalisée par $|X| \in \mathbb{R}^{+*}$ $\square$

Exercice 2.8. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace de mesure.*

1. *Soit $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante de mesures sur $(X, \mathcal{A})$. Mq $\mu := \lim_{n\to+\infty} \mu_n$ est une mesure.*
2. *Soit $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de mesures. Est-ce que $\mu := \sum_{n\geqslant 0} \mu_n$ est une mesure ?*
3. *Pour $n \geqslant 0$, on définit la mesure μ_n sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ par $\mu_n(A) = \left|A \cap [n, +\infty)\right|$.*
   — *Mq $\forall n \geqslant 0 : \mu_n$ est bien une mesure et que la suite $(\mu_n)_n$ est décroissante.*
   — *Est-ce que $\mu = \lim_{n\to+\infty} \mu_n$ est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$? Caractériser entièrement μ.*

Résolution.

1. On note que puisque la suite des μ_n est croissante, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A)$ est bien définie car soit la suite $(\mu_n(A))_n$ converge vers une valeur réelle, soit elle diverge vers $+\infty$.
   — $\mu(\emptyset) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(\emptyset) = 0$.
   — Soient $(A_n)_{n\geqslant 0}$ 2 à 2 disjoints.

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n\right) = \lim_{k\to+\infty} \mu_k \left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n\right) = \lim_{k\to+\infty} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \mu_k(A_n)$$
$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \lim_{k\to+\infty} \mu_k(A_n) = \sum_{n\geqslant 0} \lim_{k\to+\infty} \mu_k(A_n) = \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n).$$

2.
   — $\mu(\emptyset) = \sum_{n\geqslant 0} \mu_n(\emptyset) = 0$.
   — Soient $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints. On note $A := \bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n$. Par non-négativité des $(\mu_k(A_n))_{n,k}$, on a que les sommes sur k et n commutent, i.e. :

$$\sum_{k\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0} \mu_k(A_n) = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 0} \mu_k(A_n),$$

   et donc $\mu(A) = \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n)$.

   On en déduit donc que $\mu = \sum_{k\geqslant 0} \mu_k$ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. De plus, puisque $\alpha \cdot \mu$ (pour $\alpha > 0$, μ mesure sur $(X, \mathcal{A})$) est également une mesure sur $(X, \mathcal{A})$, on a que pour $(\alpha_n)_{n\geqslant 0} \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^{\mathbb{N}}$: $\mu = \sum_{n\geqslant 0} \alpha_n \mu_n$ est une mesure également.

3.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$.
     — $\mu_n(\emptyset) = |\emptyset| = 0$.
     — La σ-additivité est triviale par la σ-additivité de la mesure de comptage.
     De plus, pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $n \in \mathbb{N}$: $\mu_n(A) = \big|\underbrace{A \cap [n, +\infty)}_{\supseteq A\cap[n+1,+\infty)}\big| \geqslant \mu_{n+1}(A)$.
   — Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Deux cas sont à distinguer :
     (a) Soit A est fini, en quel cas $\max A$ est fini et donc $\forall n > \max A$: $\mu_n(A) = 0$, et donc $\mu(A) = 0$.
     (b) Soit A est infini, et donc dénombrable. On a alors $\forall n \geqslant 0 : A \cap [n, +\infty) \neq \emptyset$ car si il existe un $n \geqslant 0$ tel que $A \cap [n, +\infty) = \emptyset$, alors $A \subset [0, n) \cap \mathbb{N}$, et donc A est fini. Dès lors $\mu(A) > 0$.
     De plus : $\forall n \geqslant 0 : \mu_n(A) = +\infty$. Car si $\exists n \geqslant 0$ s.t. $\mu_n(A) \lneq +\infty$, alors $\mu_n(A) = |A \cap [n, +\infty)| = k \in \mathbb{N}$ et donc $A \cap [n, +\infty) = \{m_1, \dots, m_k\}$. Dans ce cas : $\mu_{m_k+1}(A) = 0$, ce qui est une contradiction.
     On en déduit que si A est infini (dénombrable), alors $\mu(A) = +\infty$.

   μ vaut donc 0 sur les parties finies de $\mathbb{N}$ et $+\infty$ sur les parties dénombrables. μ n'est donc pas une mesure car : $\mu(\mathbb{N}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{n\}) = \sum_{n\geqslant 0} 0 = 0 \neq +\infty$.

□

Exercice 2.9. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

1. *Mq :*

$$\mu\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

2. *Si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *s.t.* $\mu\left(\bigcup_{n\geqslant n_0} A_n\right) \leqslant +\infty$, *mq :*

$$\mu\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) \geqslant \limsup_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

<u>*Résolution*</u>.

1. Pour $n \geqslant 0$: on pose $B_n \coloneqq \cap_{m\geqslant n} A_m$. La suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ est trivialement croissante. On a donc :

$$\mu\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geqslant 0} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n),$$

et :

$$\liminf_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} \mu(A_k).$$

De plus : $\mu(B_n) = \mu\left(\bigcap_{k\geqslant n} A_k\right) \leqslant \mu(A_m)$ pour $m \geqslant n$ par monotonie de μ, et donc en particulier $\mu(B_n) \leqslant \inf_{k\geqslant n} \mu(A_k)$. Dès lors la suite $\mu(B_n)_n$ est dominée par $(\inf_{k\geqslant n} \mu(A_k))_n$. Dès lors :

$$\mu\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} \mu(A_k) = \liminf_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

2. On pose $C_n \coloneqq \bigcup_{m\geqslant n} A_m$. On sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\mu\left(C_{n_0}\right) \lneqq +\infty$. Les C_n forment une suite décroissante. On a donc :

$$\mu\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n\geqslant 0} C_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(C_n).$$

De plus :

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geqslant n} \mu(A_k).$$

Or $\forall k \geqslant n : C_n \supseteq A_k$ et donc $\forall k \geqslant n : \mu(C_n) \geqslant \mu(A_k)$, et en prticulier $\mu(C_n) \geqslant \sup_{k\geqslant n} \mu(A_k)$. Dès lors on conclut :

$$\mu\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(C_n) \geqslant \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geqslant n} \mu(A_k) = \limsup_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

$\square$

Exercice 2.10. *Soit* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable. Soient* μ, ν *deux mesures finies sur* $(X, \mathcal{A})$ *telles que* $\forall A \in \mathcal{A}$: $\mu(A) \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(A) = \nu(A)$.

1. *Mq* $\mu = \nu$.
2. *Mq le résultat est faux si l'inégalité est changée en inégalité stricte.*

<u>*Résolution*</u>.

1. Soit $B \in \mathcal{A}$ s.t. $\mu(B) \gneqq \frac{1}{2}$. Alors $\mu(B^{\complement}) = \mu(X) - \mu(B) = 1 - \mu(B) < \frac{1}{2}$. Dès lors $\mu(B^{\complement}) = \nu(B^{\complement})$ par hypothèse, et on en déduit $\mu(B) = 1 - \mu(B^{\complement}) = 1 - \nu(B^{\complement}) = \nu(B)$, et donc $\mu = \nu$.

2. Si l'inégalité devient stricte, on peut choisir, sur l'espace mesurable $(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$, μ la mesure d'une Bernoulli de proba $\frac{1}{2}$ et ν la mesure d'une Bernoulli de proba $\frac{1}{3}$. On a alors :

A	$\mu(A)$	$\nu(A)$
$\emptyset$	0	0
$\{0\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
$\{1\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$\{0,1\}$	1	1

Puisque $\mathcal{B} := \{A \in \mathcal{P}(\{0,1\}) \text{ s.t. } \mu(A) \lneq \frac{1}{2}\} = \{\emptyset\}$, on a bien $\mu = \nu$ sur $\mathcal{B}$, mais $\mu \neq \nu$.

$\square$

Exercice 2.11. *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et une partie stable par intersections finies $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ s.t. $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$. Si μ et ν sont deux mesures finies sur $(X, \mathcal{A})$ telles que $\nu(X) = \mu(X)$ et $\mu = \nu$ sur $\mathcal{F}$. Mq $\mu = \nu$.*

Résolution. On pose $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} \text{ s.t. } \mu(A) = \nu(A)\}$. Mq $\mathcal{D}$ est une classe de Dynkin :
— $\emptyset \in \mathcal{D}$ car $\mu(\emptyset) = 0 = \nu(\emptyset)$.
— Soit $A \in \mathcal{D}$. $\mu(A^{\complement}) = \mu(X) - \mu(A) = \nu(X) - \nu(A) = \nu(A^{\complement})$ et donc $A^{\complement} \in \mathcal{D}$.
— Soient $(A_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints et $A := \bigsqcup_{n \geqslant 0} A_n$.

$$\mu(A) = \sum_{n \geqslant 0} \mu(A_n) = \sum_{n \geqslant 0} \nu(A_n) = \nu(A).$$

On en conclut $A \in \mathcal{D}$.

De plus par hypothèse $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$, et donc par l'exercice 1.5 on a $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$. Dès lors $\mu = \nu$ sur $\mathcal{A}$, et donc $\mu = \nu$. $\square$

3 Séance 3

Exercice 3.1. *Soient $\mathbb{B}$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}$ la mesure de Lesbesgue sur $\mathbb{B}$.*

1. *Mq* $\forall x \in \mathbb{R} : \{x\} \in \mathbb{B}$.
2. *Mq* $\mathbb{Q} \in \mathbb{B}$ *et* $\mathcal{L}(\mathbb{Q}) = 0$.
3. *Mq une union non-dénombrable d'ensembles négligeables n'est pas nécessairement négligeable.*
4. *Mq* $N \in \mathbb{B}$ *est un ensemble négligeable ssi* $\forall \varepsilon > 0 : \exists U_\varepsilon$ *s.t.* $N \subseteq U_\varepsilon$ *et* $\mathcal{L}(U_\varepsilon) < \varepsilon$.

Résolution.

1. $\{x\} = [x, x]$ est fermé dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{L}(\{x\}) = x - x = 0$.
2. $\mathcal{L}(\mathbb{Q}) = \mathcal{L}(\bigsqcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \mathcal{L}(\{q\}) = 0$.
3. $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = +\infty$, or : $\bigsqcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$.
4. $\Leftarrow$: par monotonie, si $\forall\varepsilon > 0 : N \subseteq U_\varepsilon$, alors $\mathcal{L}(N) \leqslant \mathcal{L}(U_\varepsilon) < \varepsilon$. On en déduit $\mathcal{L}(N) = 0$, et donc N est négligeable.

   $\Rightarrow$: Soit $N \in \mathbb{B}$ s.t. $\mathcal{L}(N) = 0$. Pour $\varepsilon > 0$: mq $\exists U_\varepsilon$ ouvert s.t. $\mathcal{L}(U_\varepsilon) < \varepsilon$ et $N \subset U_\varepsilon$. Rappelons la mesure extérieure de Lebesgue :

   $$\mathcal{L}^*(A) := \inf_{(I_n)_{n\geqslant 0}\in\mathcal{C}_A} \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Vol}(I_n).$$

   Soit $(I_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{C}_N$. Les I_n sont compacts. On peut prendre une nouvelle suite $(J_n)_{n\geqslant 0}$ s.t. $\forall n \geqslant 0$: $\mathrm{Vol}(\overline{J_n}) < \mathrm{Vol}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ [1] et $I_n \subseteq J_n$. Par σ-sous-additivité (parce que les J_n ne sont pas forcément mutuellement disjoints), pour $J = \bigcup_{n\geqslant 0} J_n \supseteq N$:

   $$\mathcal{L}^*(N) \leqslant \mathcal{L}^*(\bigcup_{n\geqslant 0} J_n) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \mathcal{L}^*(J_n).$$

   Or, pour $n \geqslant 0 : \mathcal{L}^*(J_n) \leqslant \mathrm{Vol}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Finalement :

   $$\mathcal{L}^*(J) < \sum_{n\geqslant 0}\left(\mathrm{Vol}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) = 0 + \varepsilon.$$

   Note : si on définit un ensemble négligeable comme étant inclus dans un ensemble de mesure nulle (et pas comme étant un ensemble de mesure nulle, comme considéré ci-dessus), l'implication $\Leftarrow$ est triviale.

$\square$

Exercice 3.2. *Montrer qu'une droite* E *dans* $\mathbb{R}^2$ *est de mesure nulle pour* $\mathcal{L}$.

Résolution. À $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ fixés, $E = \{x + ty\}_{t\in\mathbb{R}}$. Pour $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, on définit $E_\alpha^\beta := \{x + ty\}_{t\in[\alpha,\beta]}$. Mq $\mathcal{L}(E_\alpha^\beta) = 0$.

Si $y = (0, \lambda)$ (ou si $y = (\lambda, 0)$ par symétrie), on peut recouvrir E_α^β par l'intervalle compact $[x_1 \pm \varepsilon] \times [x_2 + \alpha\lambda, x_2 + \beta\lambda]$ de volume arbitrairement petit (pour ε aussi petit que nécessaire), et donc $\mathcal{L}(E_\alpha^\beta) = 0$.

Sinon, soit $(I_n)_{n\geqslant 0}$ un recouvrement de E_α^β par des intervalles compacts. Pour $n \geqslant 0$: $I_n = [a_n^1, b_n^1] \times [a_n^2, b_n^2]$ et $\mathrm{Vol}(I_n) = (b_n^1 - a_n^1)(b_n^2 - a_n^2)$.

1. Par exemple en prenant l'intervalle ouvert $J_n = (a - \varepsilon/2^{n+2}, b + \varepsilon/2^{n+2})$ pour $I_n = [a, b]$.

Montrons qu'il existe $(J_n)_{n\geqslant 0}$ s.t. $\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{Vol}(J_n) < \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{Vol}(I_n)$.

Soit $n \geqslant 0$. $I_n = [a_n^1, b_n^1] \times [a_n^2, b_n^2]$ où les 4 *coins* sont $C_1 = (a_n^1, a_n^2), C_2 = (a_n^1, b_n^2), C_3 = (b_n^1, a_n^2), C_4 = (b_n^1, b_n^2)$. WLOG supposons $\left|E_\alpha^\beta \cap \{C_i\}_{i=1}^4\right| = 2$, i.e. E passe par deux coins de I_n (soit C_1 et C_3, soit C_2 et C_4)[2]. On définit alors :

$$\begin{cases} J_{2n} & := [a_n^1, \frac{1}{2}(b_n^1 + a_n^1)] \times [a_n^2, \frac{1}{2}(b_n^2 + a_n^2)] \\ J_{2n+1} & := [\frac{1}{2}(b_n^1 + a_n^1), b_n^1] \times [\frac{1}{2}(b_n^2 + a_n^2), b_n^2] \end{cases}$$

si $E \cap \{C_1, C_3\}$; et :

$$\begin{cases} J_{2n} & := [a_n^1, \frac{1}{2}(b_n^1 + a_n^1)] \times [\frac{1}{2}(b_n^2 + a_n^2), b_n^2] \\ J_{2n+1} & := [\frac{1}{2}(b_n^1 + a_n^1), b_n^1] \times [a_n^2, \frac{1}{2}(b_n^2 + a_n^2)] \end{cases}$$

sinon.

On a bien $\mathrm{Vol}(I_n) = 2\left(\mathrm{Vol}(J_{2n}) + \mathrm{Vol}(J_{2n+1})\right)$, et donc $\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{Vol}(I_n) = 2\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{Vol}(J_n)$.

Et donc :

$$\mathcal{L}^*(E_\alpha^\beta) = \inf_{(I_n)_n \in \mathcal{C}_{E_\alpha^\beta}} \sum_{n\geqslant 0}\mathrm{Vol}(I_n) = 0.$$

On a alors que E_α^β est mesurable et de mesure de Lebesgue nulle. Et on trouve que :

$$\mathcal{L}^*(E) = \mathcal{L}^*(\bigcup_{n\geqslant 0} E_{-n}^{+n}) = \lim_{n\to+\infty}\mathcal{L}^*(E_{-n}^{+n}) = 0.$$

Donc E est également mesurable pour $\mathcal{L}$ et est de mesure nulle. □

Exercice 3.3. *Pour* $B \in \mathbb{B}^n$ *et* $\lambda > 0$, *on définit* $\lambda B = \{\lambda b\}_{b\in B}$.

1. *Mq* $\forall \lambda > 0, B \in \mathbb{B}^n : \lambda B \in \mathbb{B}^n$.
2. *Mq* $\mathcal{L}(\lambda B) = \lambda^n \mathcal{L}(B)$.

Résolution. On note $\mathcal{B}_\lambda := \{B \in \mathbb{B}^n \text{ s.t. } \lambda B \in \mathbb{B}^n\}$.

1.
   (a) Mq $\mathcal{B}_\lambda$ est une σ-algèbre.
   - $\emptyset \in \mathcal{B}_\lambda$ car $\lambda\emptyset = \emptyset$.
   - Soit $B \in \mathcal{B}_\lambda$. $\lambda B^\complement = (\lambda B)^\complement \in \mathbb{B}^n$ par stabilité par passage au complémentaire.
   - Soit $(B_n)_{n\geqslant 0} \in {\mathbb{B}^n}^{\mathbb{N}}$. $\lambda\bigcup_{n\geqslant 0} B_n = \{\lambda b \text{ s.t. } \exists n \geqslant 0, b \in B_n\} = \bigcup_{n\geqslant 0}\lambda B_n \in \mathbb{B}^n$ par stabilité d'unions dénombrables.

   (b) Mq $\left\{\prod_{k=1}^n(-\infty, b_k]\right\}_{(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n} \subset \mathcal{B}_\lambda$. Soit $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. On sait que $\prod_{k=1}^n(-\infty, b_k] \in \mathbb{B}^n$ et donc $\lambda\prod_{k=1}^n(-\infty, b_k] = \prod_{k=1}^n(-\infty, \lambda b_k] \in \mathbb{B}^n$. On a donc $\left\{\prod_{k=1}^n(-\infty, b_k]\right\}_{(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n} \subseteq \mathcal{B}_\lambda$. Et donc $\mathbb{B}^n \subseteq \sigma\left(\left\{\prod_{k=1}^n(-\infty, b_k]\right\}_{(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n}\right) \subseteq \mathcal{B}_\lambda \subseteq \mathbb{B}^n$, et donc $\mathcal{B}_\lambda = \mathbb{B}^n$.

2. On voit que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ recouvre B ssi $(\lambda I_n)_{n\geqslant 0}$ recouvre λB. Et donc :

$$\mathcal{L}^*(\lambda B) = \inf_{(I_n)_n\in\mathcal{C}_B}\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{Vol}(\lambda I_n) = \inf_{(I_n)_n\in\mathcal{C}_B}\sum_{n\geqslant 0}\lambda^n\,\mathrm{Vol}(I_n) = \lambda^n\inf_{(I_n)_n\in\mathcal{C}_B}\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{Vol}(I_n) = \lambda^n\mathcal{L}^*(B).$$

□

2. En effet, si ce n'est pas le cas, on peut "réduire" I_n afin que ce soit le cas (et qui est donc de volume strictement inférieur).

Exercice 3.4 (Vrai ou Faux). *Justifier les affirmations suivantes :*

1. *Si* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *est négligeable, alors* $\overline{E}$ *est négligeable.*
2. *Il existe un ensemble non-mesurable sur* $\mathbb{R}^n$ *de complémentaire de mesure extérieure de Lebesgue nulle.*
3. *Il existe des ensemble non-mesurables dont l'union est mesurable.*
4. *Si* $A \subset \mathbb{R}^n$ *satisfait* $\mathcal{L}(\mathring{A}) = \mathcal{L}(\overline{A})$, *alors* A *est mesurable.*

Résolution.

1. Faux : $\mathbb{Q}$ est négligeable et $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ n'est pas négligeable.
2. Faux : si $A^\complement$ est de mesure extérieure de Lebesgue nulle, alors $A^\complement$ est mesurable, et donc $A^\complement \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^*}$. Or l'ensemble des mesurables est une σ-algèbre, et donc $A = A^{\complement^\complement} \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^*}$.
3. Vrai : si A est non-mesurable, alors $A^\complement$ ne l'est pas non plus. Or $\mathcal{M}_{\mathcal{L}^*} \ni X = A \cup A^\complement$.
4. Vrai : par définition de complétion de mesure. Si $\mathring{A}$ et $\overline{A}$ sont mesurables et de même mesure, alors $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$ et $\mathcal{L}(\overline{A} \setminus \mathring{A}) = 0$. Dès lors $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^*}$ et par monotonie : $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\mathring{A}) = \mathcal{L}(\overline{A})$.

$\square$

4 Séance 4

Exercice 4.1. *Soit* $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$*. Mq si* $\forall q \in \mathbb{Q} : f^{-1}((q, +\infty)) \in \mathcal{A}$*, alors* f *est mesurable.*

Résolution. Pour cela, montrons que $f^{-1}((r, +\infty)) \in \mathcal{A}$ pour $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on sait que pour $r \in \mathbb{R}$:

$$(r, +\infty) = \bigcup_{q \in (r,+\infty) \cap \mathbb{Q}} (q, +\infty).$$

Dès lors, pour $r \in \mathbb{R}$: $f^{-1}((r, +\infty)) = \bigcup_{q \in (r,+\infty) \cap \mathbb{Q}} \underbrace{f^{-1}((q, +\infty))}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$. $\square$

Exercice 4.2. *Mq les fonctions* f *et* g *sont mesurables sur* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$*.*

Résolution. Pour cela, on utilise le fait qu'un produit de fonctions mesurables est mesurable et que :
- les fonctions caractéristiques sur des boréliens sont mesurables ;
- $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est mesurable car $\alpha = \mathrm{Id} \cdot \mathrm{Id}$;
- $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ est mesurable car $[0, 1]$ est mesurable et $\mathbb{Q}^\complement$ est mesurable aussi.

Donc puisque $f = \alpha\chi_{[0,1]} + \chi_{(1,2)}$ et $g = \alpha\chi_{\mathbb{Q}^\complement \cap [0,1]}$, on a f et g mesurables. $\square$

Exercice 4.3. *Soient* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable et* $(f_k)_{k \geqslant 0}$ *une suite de fonctions mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$*. Mq l'ensemble* $A := \{x \in X$ *s.t.* $\lim_{k \to +\infty} f_k(x)$ *existe*$\}$ *est mesurable.*

Résolution. La limite de la suite $(f_k(x))_{k \geqslant 0}$ existe ssi $f_1 := \limsup_{k \to +\infty} f_k$ et $f_2 := \liminf_{k \to +\infty} f_k$ existent en x et sont identiques. On sait que f_1 et f_2 sont mesurables, et donc que $f_1 - f_2$ l'est également. Or $A = (f_1 - f_2)^{-1}(\{0\})$, donc $A \in \mathcal{A}$. $\square$

Résolution alternative par les suites de Cauchy. À $x \in X$ fixé, la suite $(f_k(x))_{k \geqslant 0}$ est une suite réelle et donc converge ssi elle est de Cauchy, i.e. $\lim_{k \to +\infty} f_k(x)$ existe ssi

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall m, n \geqslant N : \left| f_m(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon.$$

Donc A peut s'écrire comme union/intersection de Boréliens. Pour $m, n \in \mathbb{N}$, posons $f_{m,n} := |f_m - f_n|$. Par mesurabilité des $f_{m,n}$, on observe :

$$A = \left\{ x \in X \text{ s.t. } \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall m, n \geqslant N : f_{m,n}(x) < \varepsilon \right\} = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}^{*+}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{m,n \geqslant N} f_{m,n}^{-1}((\pm\varepsilon)) \in \mathbb{B}.$$

$\square$

Exercice 4.4. *Soient* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Borel-mesurable et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *s.t.* $g \neq f$ *sur un ensemble* D *au plus dénombrable. Mq* g *est Borel-mesurable.*

Résolution. Rappelons d'abord que les singletons sont des fermés et donc des Boréliens. Dès lors, $D \in \mathbb{B}$ et $\mathcal{L}(D) = 0$. De plus, par passage au complémentaire, on sait que $D^\complement \in \mathbb{B}$ également. Pour $b \in \mathbb{R}$:

$$g^{-1}((-\infty, b]) = \left[\underbrace{f^{-1}((-\infty, b]) \cap D^\complement}_{=:A} \right] \sqcup \left[\underbrace{g^{-1}((-\infty, b]) \cap D}_{=:B} \right].$$

Puisque $B \subseteq D$, on a B au plus dénombrable, et en particulier $B \in \mathbb{B}$. Par mesurabilité de f, on sait que $f^{-1}((-\infty, b]) \in \mathbb{B}$, et puisque $D^{\complement} \in \mathbb{B}$, on déduit que $A \in \mathbb{B}$. Dès lors $g^{-1}((-\infty, b])$ est union de deux Boréliens, et est donc un Borélien. $\square$

> **Exercice 4.5.** *Sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, mq χ_A est mesurable ssi $A \in \mathcal{A}$.*

Résolution. $\underline{\Rightarrow}$: si χ_A est mesurable, alors $A = \chi_A^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{A}$.

$\underline{\Leftarrow}$: si $A \in \mathcal{A}$, alors :
- $\chi_A^{-1}(\{0,1\}) = X \in \mathcal{A}$ et $\chi_A^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$ puisque $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre sur X ;
- $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A \in \mathcal{A}$ par hypothèse ;
- et $\chi_A^{-1}(\{0\}) = A^{\complement} \in \mathcal{A}$ par passage au complémentaire.

$\square$

> **Exercice 4.6.** *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Mq f^+ et f^- sont mesurables.*

Résolution. Trivial : min et max de fonctions mesurables sont mesurables et la fonction $\mathbf{0} : X \to \{0\} : x \mapsto 0$ est constante donc mesurable. $\square$

> **Exercice 4.7.** *Mq* $f : [0,1) \to [0,1) : x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1/2) \\ 2x-1 & \text{si } x \in [1/2, 1) \end{cases}$ *est mesurable.*
>
> *Mq pour tout $E \subseteq [0,1)$ mesurable : $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(f^{-1}(E))$.*

Résolution. Soit $M \subseteq [0,1)$ mesurable.

$f^{-1}(M) = (f^{-1}(M) \cap [0,1/2)) \sqcup (f^{-1}(M) \cap [1/2,1)) = \{x \in [0,1/2) \text{ s.t. } f(x) \in M\} \sqcup \{x \in [1/2,1) \text{ s.t. } f(x) \in M\}$.

Notons respectivement M_1 et M_2 ces deux ensembles. $M_1 = \{x \in [0,1/2) \text{ s.t. } 2x \in M\} = \{x/2\}_{x \in M} \in \mathcal{M}$ et $M_2 = \{x \in [1/2,1) \text{ s.t. } 2x-1 \in M\} = \{(1+x)/2\}_{x \in M} \in \mathcal{M}$ car la transformation affine d'un ensemble $\mathcal{L}$-mesurable est $\mathcal{L}$-mesurable. Donc $f^{-1}(M) = M_1 \sqcup M_2 \in \mathcal{M}$ car $\mathcal{M}$ est une σ-algèbre.

De plus, $\mathcal{L}(f^{-1}M) = \mathcal{L}(M_1 \sqcup M_2) = \mathcal{L}(M_1) + \mathcal{L}(M_2)$. Par invariance par translation de $\mathcal{L}$, on a $\mathcal{L}(M_2) = \mathcal{L}(M_1) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(M)$. Donc $\mathcal{L}(f^{-1}M) = 2\mathcal{L}(M_1) = \mathcal{L}(M)$. $\square$

> **Exercice 4.8** (Vrai ou Faux)**.** *Justifier :*
> 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.t. $f \circ f$ est mesurable. Alors f est mesurable.*
> 2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.t. $|f|$ est mesurable. Alors f est mesurable.*
> 3. *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Alors $g \circ f$ est mesurable.*
> 4. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue presque partout, alors f est mesurable.*

Résolution.
1. Faux. Prenons $N \notin \mathcal{M}$ s.t. $N \cap \{0,1\} = \emptyset$. Alors χ_N n'est pas mesurable, mais $\chi_N \circ \chi_N = \mathbf{0}$ est constante donc mesurable.
2. aux. Prenons à nouveau $N \notin \mathcal{M}$. On pose $f \coloneqq \chi_N - \chi_{N^{\complement}} : \mathbb{R} \to \{-1, +1\}$ où donc $f(x) = 1$ si $x \in N$ et $f(x) = -1$ sinon. f n'est pas mesurable, mais $|f| = \mathbf{1} : \mathbb{R} \to \{1\} : x \mapsto 1$ est constante donc mesurable.

3. Mq continuité implique Borel-mesurabilité. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $b \in \mathbb{R}$: $f^{-1}((-\infty, b))$ est ouvert et est donc borélien. Donc ici g et f sont toutes deux Borel-mesurables et la composition d'applications Borel-mesurables est Borel-mesurable.
4. On pose $N \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \text{ s.t. } f \text{ n'est pas continue en } x\}$. N est négligeable et f est continue sur $\mathbb{R} \setminus N$. On trouve pour $b \in \mathbb{R}$:

$$f^{-1}((-\infty, b)) = \left(f^{-1}((-\infty, b)) \cap N^{\complement}\right) \sqcup \underbrace{\left(f^{-1}((-\infty, b)) \cap N\right)}_{\subseteq N \text{ donc } \in \mathcal{M}}.$$

$\square$

5 Séance 5

Exercice 5.1. *1. Mq la relation* $\sim$ *définie sur* $[0,1]$ *par* $x \sim y \iff x-y \in \mathbb{Q}$ *est une relation d'équivalence.*

2. *On note* $\hat{x} := \mathbb{R}/\sim$. *On pose* $F := \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \rho(\hat{x})$ *où* $\rho(\hat{x})$ *est un représentant de* $\hat{x}$ *(*ρ *est bien définie par l'axiome du choix). Mq :*

$$[0,1] \subseteq \underbrace{\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (F+q)}_{=:\tilde{F}} \subseteq [-1,2].$$

3. *Mq si* $q_1 \neq q_2 \in \mathbb{Q}\cap[-1,1]$*, alors* $(F+q_1)\cap(F+q_2) = \emptyset$.
4. *Mq* F *n'est pas* $\mathcal{L}$*-mesurable par l'absurde.*

<u>*Résolution*</u>.

1. $\sim$ est trivialement une relation d'équivalence.
2. <u>$[0,1] \subseteq \tilde{F}$</u> : soit $x \in [0,1]$. Par définition de F : $\exists \tilde{x} \in \hat{x}\cap F$ et $x - \tilde{x} \in \mathbb{Q}$. On a alors $x \in (\mathbb{Q}\cap[-1,1]) + \tilde{x} \subseteq (\mathbb{Q}\cap[-1,1]) + F = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(F+q)$.
   <u>$\tilde{F} \subseteq [-1,2]$</u> : $F \subseteq [0,1]$, et donc :
   $$\tilde{F} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (F+q) \subseteq \bigcup_{y\in[-1,1]} (F+y) \subseteq [-1,2].$$
3. Supposons par l'absurde $\exists \tilde{x} \in (F+q_1)\cap(F+q_2)$. On a alors $\exists y_1, y_2 \in F$ s.t. $y_1 + q_1 = \tilde{x} = y_2 + q_2$. Donc $\tilde{x} - y_1 \in \mathbb{Q} \ni \tilde{x} - y_2$, ou encore $\tilde{x} \sim y_1$ et $\tilde{x} \sim y_2$, et donc par transitivité : $y_1 \sim y_2$, i.e. $\hat{y}_1 = \hat{y}_2$, or F contient exactement un seul représentant de chaque classe d'équivalence, ce qui est une contradiction. Donc $F + q_1$ et $F + q_2$ sont disjoints.
4. Supposons que F soit $\mathcal{L}$-mesurable. On a (par le point 2) :
   $$1 \leqslant \mathcal{L}\left(\bigsqcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (F+q)\right) \leqslant 3.$$
   Or $\forall q \in \mathbb{Q} : \mathcal{L}(F+q) = \mathcal{L}(F)$ car $\mathcal{L}$ est invariante par translations.
   — Si $\mathcal{L}(F) = 0$, alors $\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \mathcal{L}(F+q) = 0 \lneqq 1$, ce qui est une contradiction.
   — Donc $\mathcal{L}(F) \gneqq 0$, et donc $\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \mathcal{L}(F+q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \mathcal{L}(F) = +\infty \gneqq 3$, ce qui est également une contradiction.
   On en déduit que F n'est pas $\mathcal{L}$-mesurable.

$\square$

Exercice 5.2 (Ensemble triadique de Cantor)**.** *Pour* $k \geqslant 0$*, on pose :*

$$A_k := \bigcup_{\alpha\in\{0,2\}^k} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{3^i}\right) + [0, 3^{-k}].$$

On définit l'ensemble triadique de Cantor par $\mathscr{C} := \bigcap_{k\geqslant 0} A_k$.

1. *Mq* $\forall k \geqslant 0$: A_k *est formé de* 2^k *intervalles fermés disjoints deux à deux et* $\mathcal{L}(A_k) = (2/3)^k$.
2. *Mq* $\mathscr{C}$ *est un borélien non vide et de mesure de Lebesgue nulle.*
3. *Mq le développement infini en base 3 est unique ssi les chiffres de la décomposition (notés* $a_k : [0,1] \to \{0,1,2\}$ *pour le* k*ème chiffre) sont soit 0 soit 2. Mq* $x \in \mathscr{C} \iff \forall k \geqslant 0 : a_k(x) \neq 1$.

4. *En déduire que $\mathscr{C}$ est en bijection avec $[0,1]$.*

Résolution.

1. $\left|\{0,2\}^k\right| = 2^k$, donc A_k est bien composé de 2^k intervalles fermés. Soient $\alpha \neq \beta \in \{0,2\}^k$ et mq :
$$\left[\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{3^i}\right) + [0, 3^{-k}]\right] \cap \left[\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{3^i}\right) + [0, 3^{-k}]\right] = \emptyset.$$
Puisque $\alpha \neq \beta$, on sait que $\exists j \in [\![1,k]\!]$ s.t. $\alpha_j \neq \beta_j$. On pose $\gamma_k : \{0,2\}^k \to [0,1] : \alpha \mapsto \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{3^i}$. Par écriture (**finie !**) en base 3, on a :
$$\gamma(\alpha) = 0.\alpha_1|\alpha_2|\dots|\alpha_k \qquad \text{et} \qquad \gamma(\beta) = 0.\beta_1|\beta_2|\dots|\beta_k$$
où $|$ désigne la concaténation, ce qui implique que $\left|\gamma(\alpha) - \gamma(\beta)\right| \gneqq 3^{-k}$. WLOG, on suppose $\gamma(\alpha) < \gamma(\beta)$. On en déduit finalement $\gamma(\alpha) + 3^{-k} \lneqq \gamma(\beta)$, or :
$$\forall x \in \gamma(\alpha) + [0, 3^{-k}] : \gamma(\alpha) \leqslant x \leqslant \gamma(\alpha) + 3^{-k}.$$
Et :
$$\forall x \in \gamma(\beta) + [0, 3^{-k}] : \gamma(\beta) \leqslant x \leqslant \gamma(\beta) + 3^{-k}.$$
On en déduit que $\left(\gamma(\alpha) + [0, 3^{-k}]\right) \cap \left(\gamma(\beta) + [0, 3^{-k}]\right) = \emptyset$.
Et finalement, par additivité de $\mathcal{L}$, on a :
$$\mathcal{L}(A_k) = \sum_{\alpha \in \{0,2\}^k} \mathcal{L}(\gamma(\alpha) + [0, 3^{-k}]) = \sum_{\alpha \in \{0,2\}^k} \mathcal{L}([0, 3^{-k}]) = 2^k 3^{-k} = (2/3)^k.$$
2. $\forall k \geqslant 0 : \{0,1\} \subset A_k$, donc $\mathscr{C} \neq \emptyset$. De plus, $\forall k \geqslant 0 : A_k$ est une union de boréliens et est donc borélien. $\mathscr{C}$ est intersection de boréliens et est donc également un borélien.
De plus la suite $(A_k)_{k \geqslant 0}$ est décroissante, donc par continuité de la mesure : $\mathcal{L}(\mathscr{C}) = \lim_{k \to +\infty} \mathcal{L}(A_k) = 0$. Mq $(A_k)_{k \geqslant 0}$ est décroissante. Fixons $k \geqslant 0$. Soit $x \in A_{k+1}$, mq $x \in A_k$. On sait que $\exists! \alpha \in \{0,2\}^{k+1}$ s.t. $x \in \gamma(\alpha) + [0, 3^{-k}]$. On pose $\tilde{\alpha} \in \{0,2\}^k$ s.t. $\forall j \in [\![1,k]\!] : \tilde{\alpha}_j = \alpha_j$. On a donc :
$$\gamma_k(\tilde{\alpha}) \leqslant \gamma_{k+1}(\alpha).$$
Mais on a également :
$$\gamma_k(\tilde{\alpha}) + 3^{-k} \geqslant \gamma_{k+1}(\alpha) + 3^{-k-1}$$
car :
$$\underbrace{(\gamma_k(\tilde{\alpha}) - \gamma_{k+1}(\alpha))}_{\geqslant -2 \cdot 3^{-k-1}} + \underbrace{(3^{-k} - 3^{-k-1})}_{= 2 \cdot 3^{-k-1}} \geqslant 0.$$
Donc les A_k forment bien une suite décroissante.
3. On remarque que pour $\alpha \in \{0,2\}^k : x \in A_k \iff \{a_j(x)\}_{j=1}^k \subseteq \{0,2\}$. Et puisque $\mathscr{C} = \bigcap_{k \geqslant 0} A_k$:
$$x \in \mathscr{C} \iff x \in \bigcap_{k \geqslant 0} A_k \iff \forall k \geqslant 0 : \{a_j(x)\}_{j=1}^k \subseteq \{0,2\} \iff \{a_j(x)\}_{j \geqslant 0} \subseteq \{0,2\}.$$
4. On a alors $x \in \mathscr{C} \iff x = \sum_{k \geqslant 1} \frac{a_k(x)}{3^k}$ où les $a_k(x) \neq 1$, i.e. $a_k(x) \in \{0,2\}$. On peut alors poser :
$$\theta : \to [0,1] : x = \sum_{k \geqslant 1} \frac{a_k(x)}{3^k} \mapsto \sum_{k \geqslant 1} \frac{a_k(x)}{2^{k+1}},$$
qui est une bijection entre $\mathscr{C}$ et $[0,1]$. On en déduit que $|\mathscr{C}| = \left|[0,1]\right|$, et donc $\mathscr{C}$ est non-dénombrable.

□

Exercice 5.3. *On définit la bijection* $f = \theta^{-1}$ *(inverse de la bijection ci-dessus).*

1. *Mq* f *est strictement croissante et est non-continue.*
2. *Soit* $E \subset [0,1]$ *un ensemble non-mesurable au sens de Lebesgue. Mq* $f(E)$ *est* $\mathcal{L}$*-mesurable mais non Borélien.*

Résolution. Attention : résolution erronée. Il est montré que $[0,1]$ et $\mathscr{C}$ ne sont pas homéomorphes, et pas que f n'est pas continue.

1. f est trivialement strictement croissante par construction, et f n'est pas continue car $\mathscr{C}$ n'est pas connexe donc $\mathscr{C}$ n'est pas homéomorphe à $[0,1]$.

   Mq $\mathscr{C}$ n'est pas connexe : il faut trouver U, V ouverts pour la topologie induite de $\mathscr{C}$ par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ tels que $U \cap V = \emptyset$ et $U \cup V = \mathscr{C}$. Pour cela on prend arbitrairement $x \in [0,1] \setminus \mathscr{C}$ (par exemple $x = 1/2$) et on définit :
   — $U := (-1, x) \cap \mathscr{C}$;
   — $V := (x, 2) \cap \mathscr{C}$.
   U et V sont bien des ouverts pour la topologie induite car $(-1, x)$ et $(x, 2)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$. De plus :
   — $U \cap V = (-1, x) \cap \mathscr{C} \cap (x, 2) \cap \mathscr{C} = \emptyset$;
   — $U \cup V = \big((-1, x) \cup (x, 2)\big) \cap \mathscr{C} = (-1, 2) \cap \mathscr{C} \setminus \{x\} = \mathscr{C}$.

2. Soit $E \subseteq [0,1]$ quelconque. $f(E) \subseteq \mathscr{C}$ donc $f(E)$ est $\mathcal{L}$-négligeable. Or $\mathcal{L}$ est complète donc $f(E)$ est mesurable.

□

6 Séance 6

Exercice 6.1. *Soient* $X \neq \emptyset$, $a \in X$ *et* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. *Dans l'espace mesuré* $(X, \mathcal{A}, \delta_a)$, *montrons que pour* $f : X \to \mathbb{R}^+$ *mesurable :*

$$\int_X f \, d\delta_a = f(a).$$

<u>*Résolution*</u>. Supposons d'abord f positive. Soit $g \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$. Pour $(a_i)_{i=1}^k$ les valeurs prises par g, par définition on a :

$$\int g \, d\delta_a = \sum_{i=1}^k a_i \mu(g^{-1}(\{a_i\})) = a_\ell \delta_a(g^{-1}(\{a_\ell\})) = a_\ell = g(a)$$

où $a_\ell = g(a)$. Dès lors, par définition de l'intégrale d'une fonction positive mesurable :

$$\int f \, d\delta_a = \sup_{\substack{g \in \mathcal{S}^+ \\ g \leqslant f}} \int g \, d\delta_a.$$

On sait que $f(a)$ majore tous les $g(a)$ pour $g \in \mathcal{S}^+$ s.t. $g \leqslant f$ donc $\int f \, d\delta_a \leqslant f(a)$. De plus pour $\tilde{g} = f(a)\chi_{\{a\}}$, on a $\tilde{g} \in \mathcal{S}^+$ et $\tilde{g} \leqslant f$, or $\int \tilde{g} \, d\delta_a = \tilde{g}(a) = f(a)$. Donc $\int f \, d\delta_a \geqslant f(a)$. On a alors bien l'égalité.

Dans le cas général où f n'est pas non-négative, soit $f(a) \geqslant 0$ et donc f est égale à une fonction positive δ_a-ae, soit $f(a) < 0$ et donc $\int f^+ \, d\delta_a = 0$, donc $\int f \, d\delta_a = -\int f^- \, d\delta_a = -f^-(a) = f(a)$. □

Exercice 6.2. *Sur l'espace mesurable* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, *on définit la mesure de Lebesgue* $\mathcal{L}$ *et la mesure* μ *suivante :*

$$\mu : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{R}}^+ : B \mapsto \sum_{k \in B \cap \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + (k+1)^2}.$$

Déterminer si les fonctions suivantes sont intégrables :

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = 0 \\ \ln|x| & \text{si } 0 < |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 1} & \text{si } |x| < 1 \text{ et } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{si } |x| < 1 \text{ et } x \in \mathbb{Q}^\complement \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

$$h(x) \equiv 1$$

pour les mesures $\mathcal{L}$ *et* μ *comme défini ci-dessus (pour* f *et* h*).*

<u>*Résolution*</u>.

- Pour la fonction f :
  - $\mathcal{L}$ Utilisons le théorème de convergence monotone, i.e. construisons une suite croissante $(f_n)_{n \geqslant 1}$ d'applications mesurables telle que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \tilde{f}$ (où $\tilde{f} = f\big|_{(0,1)} = f\chi_{(0,1)}$). Pour $n \geqslant 1$, posons :

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -\chi_{(\frac{1}{n}, 1)}(x) \ln x.$$

f_n est majorée par $x \mapsto \chi_{(1/n,1)}(x)\sup_{y\in(1/n,1)} -\ln(y) = \chi_{(1/n,1)}\ln(n)$ qui est intégrable. On en déduit que f_n est intégrable.[3] Par l'exercice 7.1, une fonction bornée Riemann-intégrable est Lebesgue-intégrable et les intégrales coïncident. On a donc :

$$\int f_n \, d\mathcal{L} = \int_{\frac{1}{n}}^{1} -\ln(x)\, dx = 1 - \frac{\ln n + 1}{n}.$$

En appliquant le théorème de convergence monotone, on trouve :

$$\int f \, d\mathcal{L} = \lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mathcal{L} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1+\ln n}{n}\right) = 1.$$

De manière similaire, on trouve que $\int f\chi_{(-1,0)}\, d\mathcal{L} = 1$, et on en déduit :

$$\int f \, d\mathcal{L} = \int f\chi_{(-1,0)}\, d\mathcal{L} + \int f\chi_{(0,1)}\, d\mathcal{L} = 1 + 1 = 2.$$

μ : $f = \chi_{(-1,1)\setminus\{0\}} \ln|\cdot| + (+\infty)\chi_{\{0\}}$. Donc $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R} \setminus (-1,1)$. Or $(-1,1) \cap \mathbb{Z} = \{0\}$. Donc $f = +\infty\chi_{\{0\}}$ μ-ae où $x \mapsto +\infty\chi_{\{0\}}(x) \in \mathcal{S}^+$. On trouve donc :

$$\int f \, d\mu = \int +\infty\chi_{\{0\}}\, d\mu = +\infty\mu(\{0\}) = +\infty \cdot \frac{1}{1+1} = +\infty.$$

On peut également remarquer que pour $g \in \mathcal{S}^+$ s.t. $g \lneqq f$:

$$\int g \, d\mu = \int g\chi_{\{0\}}\, d\mu = g(0)\frac{1}{2}.$$

Donc $\sup\{\int g\, d\mu \text{ s.t. } g \in \mathcal{S}^+, g \lneqq f\}$ n'est pas borné.

— Pour la fonction g : $g = |x|^{-1/2}\chi_{(-1,+1)} + x^{-2}\chi_{(-\infty,1]\cup[1,+\infty)}$ $\mathcal{L}$-ae et ces deux fonction sont Riemann-intégrables. Donc g est $\mathcal{L}$-intégrable et :

$$\int g \, d\mathcal{L} = 2\left(\int_0^1 x^{-1/2}\, dx + \int_1^{+\infty} x^{-2}\, dx\right) = 2(2+1) = 6.$$

— Pour la fonction $h \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$:
$\mathcal{L}$: h n'est pas $\mathcal{L}$-intégrable car $\int h\, d\mathcal{L} = 1\mathcal{L}(\mathbb{R}) = +\infty$.
μ : h est μ-intégrable car :

$$\begin{aligned}\int h\, d\mu = \mu(\mathbb{R}) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+(k+1)^2} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{1+(k-1)^2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+(k+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{1+k^2} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{1+k^2} = \frac{1}{2} + 2\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{1+k^2} \leqslant \frac{1}{2} + 2\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^{-2} \\ &= \frac{1}{2} + 2\zeta(2) = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{3} < +\infty.\end{aligned}$$

□

Exercice 6.3. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $(f_k)_{k\geqslant 1}$ *une suite de fonctions mesurables telles que :*

$$f_1 \geqslant f_2 \geqslant f_3 \geqslant \ldots \geqslant 0.$$

3. Ainsi, toute fonction bornée définie sur un ensemble de mesure finie est intégrable.

On définit $f := \lim_{k\to+\infty} f_k$ *la limite point par point. Mq si* $f_1 \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$*, alors :*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Donner un contre-exemple avec $f_1 \notin L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

<u>*Résolution*</u>. Pour $n \geqslant 2$: $f_n \leqslant f_1$ donc f_n est intégrable car majorée par une fonction intégrable. Par la convergence dominée, on a f intégrable également et $\int f_k \, d\mu \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int f \, d\mu$.

Pour un contre-exemple, prenons la suite constante $f_k : x \mapsto x^{-1}$. $\forall x \in X : f_k(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} x^{-1}$ qui n'est pas intégrable. □

Exercice 6.4. *Supposons* $\mu(X) \lneqq +\infty$. *Soit* $(f_k)_{k\geqslant 0}$ *une suite de fonctions mesurables positives sur* X *telles que* $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\text{CVU } \textit{sur } X} f$. *Mq si* $\forall k \geqslant 0 : f_k \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$*, alors :*

$$f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \qquad \textit{et} \qquad \lim_{k\to+\infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

<u>*Résolution*</u>. À $n > 0$ fixé, on a :

$$f = |f| = |f_n + f - f_n| \leqslant |f_n| + |f - f_n|.$$

Dès lors, par monotonie de l'intégrale :

$$\int f \, d\mu \leqslant \int f_n \, d\mu + \int |f - f_n| \, d\mu.$$

La convergence uniforme revient à dire :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N > 0 \text{ s.t. } \forall n > N : \sup_{x\in X} |f - f_n|(x) < \varepsilon.$$

En particulier, il existe $N > 0$ s.t. $\forall n > N : \sup_{x\in X} |f - f_n|(x) < 1$. Dès lors pour $n > N$:

$$\int f \, d\mu \leqslant \int f_n \, d\mu + \int |f - f_n| \, d\mu \leqslant \int f_n \, d\mu + \mu(X) < +\infty$$

car $f_n \in L^1$ et $\mu(X) < +\infty$.

On en déduit $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. De plus :

$$\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| = \left| \int (f_n - f) \, d\mu \right| \leqslant \int |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

i.e. $\int f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int f \, d\mu$. □

Exercice 6.5. *On définit pour* $k \geqslant 0$ *:*

$$\alpha_k := \int_0^k \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \exp(x/2) \, dx \qquad \textit{et} \qquad \beta_k := \int_0^k \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \exp(-2x) \, dx.$$

Calculer $\alpha := \lim_{k\to+\infty} \alpha_k$ *et* $\beta := \lim_{k\to+\infty} \beta_k$.

Résolution. On pose $f_k(x) \coloneqq \left(1-\frac{x}{k}\right)^k e^{x/2}\chi_{[0,k]}(x)$ et $g_k(x) = \left(1+\frac{x}{k}\right)^k e^{-2x}\chi_{[0,k]}(x)$. Puisque $f_k(x) \nearrow e^{-x/2}\chi_{\mathbb{R}^+}(x)$ et $g_k(x) \nearrow e^{-x}\chi_{\mathbb{R}^+}(x)$ (deux limites $\in L^1$), par la convergence dominée, on a :

$$\lim_{k\to+\infty}\alpha_k = \lim_{k\to+\infty}\int f_k\,d\mu = \int \lim_{k\to+\infty} f_k\,d\mu = [2e^{x/2}]_{-\infty}^{0} = 2,$$

et :

$$\lim_{k\to+\infty}\beta_k = \lim_{k\to+\infty}\int g_k\,d\mu = \int \lim_{k\to+\infty} g_k\,d\mu = [-e^{-x}]_{0}^{+\infty} = 1.$$

□

Exercice 6.6. *Soit* $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. *Mq :*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \textit{ s.t. } \forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f|\,d\mu < \varepsilon.$$

Résolution. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ s.t. :

$$\forall n > 0 : \exists A_n \in \mathcal{A} \text{ s.t. } \mu(A_n) < \frac{1}{n} \text{ et } \int_{A_n} f\,d\mu \geqslant \varepsilon.$$

Posons $f_n \coloneqq f\chi_{A_n}$. $\forall n > 0 : |f_n| \leqslant |f|$ et $|\lim_{n\to+\infty} f_n| \leqslant |f|$ et ces applications sont mesurables. Donc par la convergence dominée, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n\,d\mu = \int \lim_{n\to+\infty} f_n\,d\mu.$$

Mq $\lim_{n\to+\infty} f_n = 0$ μ-ae. Soit $N \coloneqq \{\lim_{n\to+\infty} f_n \neq 0\}$. Sur $N^{\complement}$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$. Dès lors :

$$\exists K > 0 \text{ s.t. } \forall x \in N : \forall n > K : x \in A_n,$$

et donc : $\forall n > K : N \subset A_n$, ce qui implique $\forall n > K : \mu(N) \leqslant \mu(A_n) < \frac{1}{K}$, i.e. $\mu(A) = 0$.

Finalement, on déduit :

$$\varepsilon \geqslant \lim_{n\to+\infty}\int f_n\,d\mu = \int \lim_{n\to+\infty} f_n\,d\mu = 0,$$

ce qui est une contradiction. □

7 Séance 7

Exercice 7.1. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *bornée. Mq :*

1. *si* f *est Riemann-intégrable, alors* f *est Lebesgue-intégrable et :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\mathcal{L}.$$

2. *les fonctions* h *et* H *définies ci-dessous sont bien définies et* $h \leqslant f \leqslant H$ *sur* $[a, b]$ *:*

$$h(x) = \lim_{\delta\to 0} \inf_{|y-x|<\delta} f(y),$$
$$H(x) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{|y-x|<\delta} f(y).$$

3. f *est continue en* x *ssi* $H(x) = h(x)$.
4. H *et* h *sont Lebesgue-mesurables et :*

$$\int_{[a,b]} H\,d\mathcal{L} = \inf_P U(f;P) \qquad \textit{et} \qquad \int_{[a,b]} h\,d\mathcal{L} = \sup_P L(f;P).$$

5. *En déduire que* f *est Riemann-intégrable ssi l'ensemble des discontinuités de* f *est négligeable.*

Résolution.

1. **Notations** : Pour $P = (x_i)_{i=0}^{N_P}$ une partition de $[a, b]$, on pose pour $i \in [\![0, N_P - 1]\!]$: $P(i] \coloneqq (x_i, x_{i+1}]$. On pose également les fonctions :

$$f_P \coloneqq \sum_{j=0}^{N_P-1} m_j \chi_{P(j]} + f(a)\chi_{\{a\}}$$
$$f^P \coloneqq \sum_{j=0}^{N_P-1} M_j \chi_{P(j]} + f(a)\chi_{\{a\}}$$

Pour P une partition de $[a, b]$ et $y \in (a, b)$ s.t. $\forall i \in [\![0, N_P]\!]$, on pose $P \oplus y \coloneqq (x'_j)_{j=0}^{N_P+1}$ où $\exists j \in [\![1, N_P]\!]$ s.t. $x'_j = y$ et $(x'_1, \ldots, x'_{j-1}, x'_{j+1}, \ldots, x'_{N_P+1}) = P$. Pour deux partitions $P_1 = (x_{1,j})_{j=0}^{N_{P_1}}$ et $P_2 = (x_{2,j})_{j=0}^{N_{P_2}}$, on pose également $P_1 \oplus P_2$ la plus petite partition $(x_j)_{j=0}^{N_P}$ où :

$$\forall j \in [\![0, N_{P_1}]\!] : \forall \ell \in [\![0, N_{P_2}]\!] : \exists i, k \in [\![0, N_P]\!] \text{ s.t. } x_{1,j} = x_i \text{ et } x_{2,\ell} = x_k.$$

Résolution :
Observons que pour une partition P et $y \in (a, b)$, on a :
— $f^{P\oplus y} \leqslant f^P$;
— $f_{P\oplus y} \geqslant f_P$.
En effet, cela découle directement du fait que pour $P \oplus y = (x'_j)_{j=0}^{N_P+1}$ et pour j s.t. $y = x'_j$:

$$\inf_{t\in(x_j,x_{j+1}]} f(t) \geqslant \inf_{t\in(x_{j-1},x_{j+1}]} f(t) \quad \text{et} \quad \inf_{t\in(x_{j-1},x_j]} f(t) \geqslant \inf_{t\in(x_{j-1},x_{j+1}]} f(t).$$

On déduit similairement pour le sup :

$$\sup_{t\in(x_j,x_{j+1}]} f(t) \leqslant \sup_{t\in(x_{j-1},x_{j+1}]} f(t) \quad \text{et} \quad \sup_{t\in(x_{j-1},x_j]} f(t) \leqslant \sup_{t\in(x_{j-1},x_{j+1}]} f(t).$$

Ainsi, on remarque que pour deux partitions P_1 et P_2, on a les inégalités suivantes par le même raisonnement :

— $f^{P_1 \oplus P_2} \leqslant f^{P_1}$;

— $f_{P_1 \oplus P_2} \geqslant f_{P_1}$.

Par définition du sup, il existe une suite de partitions $(P'_n)_{n\geqslant 0}$ s.t. $U(f;P'_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf_P U(f;P)$ et une suite de partitions $(\tilde{P}_n)_{n\geqslant 0}$ s.t. $L(f;\tilde{P}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup_P L(f;P)$. Du plus les suites $(U(f;P'_n))_{n\geqslant 0}$ et $(L(f;\tilde{P}_n))_{n\geqslant 0}$ sont respectivement décroissante et croissante. Par la remarque ci-dessus, on remarque que si on pose $P_n \coloneqq P'_n \oplus \tilde{P}_n$, on obtient une suite de partitions $(P_n)_n$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} U(f;P_n) = \inf_P U(f;P) = \sup_P L(f;P) = \lim_{n\to+\infty} L(f;P_n).$$

En particulier : $U(f;P_n) - L(f;P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Remarquons ensuite que les f_{P_n} sont des applications mesurables puisque des des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques sur des boréliens (en effet les intervalles ouverts à gauches sont des boréliens et le singleton $\{a\}$ en est un également). De plus :

$$\int_{[a,b]} f_{P_n}\, d\mathcal{L} = L(f;P_n) \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} f^{P_n}\, d\mathcal{L} = U(f;P_n).$$

Puisque $U(f;P_n) - L(f;P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $\int_{[a,b]}(f^{P_n} - f_{P_n})\, d\mathcal{L} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Du coup $\lim_{n\to+\infty}(f^{P_n} - f_{P_n}) = 0$ $\mathcal{L}$-ae, i.e. $f_{P_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}\text{-ae}} f$

Dès lors, par le théorème de la convergence monotone, on a que f est mesurable et que :

$$\int_{[a,b]} f\, d\mathcal{L} = \int_{[a,b]} \lim_{n\to+\infty} f_{P_n}\, d\mathcal{L} = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_{P_n}\, d\mathcal{L} = \lim_{n\to+\infty} L(f;P_n) = \sup_P L(f;P) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

2. Puisque f est bornée, pour tout $x \in [a,b]$, $\delta \gneqq 0$, on a bien :

$$\left| \inf_{y\in B_\delta(x)\cap[a,b]} f(y) \right| \lneqq +\infty \quad \text{et} \quad \left| \sup_{y\in B_\delta(x)\cap[a,b]} f(y) \right| \lneqq +\infty.$$

De plus, pour tout $x \in [a,b]$, $\delta \gneqq 0$:

$$\inf_{y\in B_\delta(x)\cap[a,b]} f(y) \leqslant f(x) \leqslant \sup_{y\in B_\delta(x)\cap[a,b]} f(y).$$

3. $\underline{\Leftarrow :}$ $H(x) = h(x)$ est équivalent à :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ s.t. } \forall \gamma > 0 : \gamma \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow \sup_{y\in B_\gamma(x)} f(y) - \inf_{y\in B_\gamma(x)} f(y) \leqslant \varepsilon.$$

En particulier, à $\varepsilon > 0$ fixé, pour $y \in [a,b]$, si $|x-y| \leqslant \delta_\varepsilon$, alors :

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \sup_{z\in B_{\delta_\varepsilon}(x)} f(z) - \inf_{z\in B_{\delta_\varepsilon}} f(z) \leqslant \varepsilon.$$

On a donc bien la continuité de f en x.

$\underline{\Rightarrow :}$ à $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\delta > 0$ s.t. $|x-y| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon$. Donc :

$$\begin{aligned}\sup_{y\in B_\delta(x)} f(y) - \inf_{y\in B_\delta(x)} f(y) &= \left(\sup_{y\in B_\delta(x)} f(y) - f(x)\right) - \left(\inf_{y\in B_\delta(x)} f(y) - f(x)\right) \\ &\leqslant \left|\sup_{y\in B_\delta(x)} f(y) - f(x)\right| + \left|f(x) - \inf_{y\in B_\delta(x)} f(y)\right| \leqslant 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Or cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit que $H(x) - h(x) = 0$.

4. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, remarquons :

$$\overbrace{f^{-1}((-\infty, \beta])}^{\circ} = \{\xi \in [a, b] \text{ s.t. } \exists r_\xi > 0 \text{ s.t. } B_{r_\xi}(\xi) \subseteq f^{-1}((-\infty, \beta])\}.$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
&x \in H^{-1}((-\infty, \beta]) \\
\iff &H(x) \leqslant \beta \\
\iff &\lim_{\delta \to 0} \sup_{y \in B_\delta(x)} f(y) \leqslant \beta \\
\iff &\exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall y \in B_\delta(x) : f(y) \leqslant \beta \\
\iff &\exists \delta > 0 \text{ s.t. } B_\delta(x) \subseteq f^{-1}((-\infty, \beta]) \\
\iff &x \in \overbrace{f^{-1}((-\infty, \beta])}^{\circ},
\end{aligned}$$

i.e. H est mesurable car l'intérieur d'un ensemble est un ouvert.

De manière similaire, on a $x \in h^{-1}([\alpha, +\infty)) \iff x \in \overbrace{f^{-1}([\alpha, +\infty)}^{\circ}$. Donc h est également mesurable.

Remarquons ensuite que pour toute partition P : $H \leqslant f^P$ sur $[a, b] \setminus P$ et donc $H \leqslant f^P$ $\mathcal{L}$-ae. Par monotonie de l'intégrale :

$$\int H \, d\mathcal{L} \leqslant \int f^P \, d\mathcal{L}.$$

En particulier :

$$\int H \, d\mathcal{L} \leqslant \inf_P \int f^P \, d\mathcal{L}.$$

Reconsidérant maintenant la suite $(P_n)_{n \geqslant 0}$ s.t. $U(f; P_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \inf_P U(f; P)$ et $L(f; P_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sup_P L(f; P)$ et supposons la croissante (ce qui n'est pas abusif : il suffit de poser la suite de partitions $\hat{P}_0 \coloneqq P_0$ et $\hat{P}_n \coloneqq \hat{P}_{n-1} \oplus P_n$ qui est croissante au sens de l'inclusion et qui satisfait les limites puisque $f^{\hat{P}_n} \leqslant f^{P_n}$ et $f_{\hat{P}_n} \geqslant f_{P_n}$). Pour toute partition P et pour tout $x \in [a, b] \setminus P$, on note $j_{P,x} \in [\![0, N_P - 1]\!]$ s.t. $x \in P(j_{P,x}]$. Fixons alors $x \in [a, b] \setminus \bigcup_{n \geqslant 0} P_n$ (i.e. $\forall n \geqslant 0 : x \notin P_n$).

Séparons deux cas :

si $\mathcal{L}(P_n(j_{P_n,x}]) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$: $\forall \delta > 0 : \exists N > 0$ s.t. $P_N(j_{P_N,x}] \subset B_\delta(x)$. Posons une suite $(\delta_n)_{n \geqslant 0}$ décroissante vers 0 et posons $H_n(x) \coloneqq \sup_{y \in B_{\delta_n}(x)} f(y)$.

On remarque que $\forall n \geqslant 0 : \exists K > 0$ s.t. $\forall k \geqslant K : H_n(x) \geqslant f^{P_k}(x) \geqslant H(x)$. Or $H_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} H(x)$, et donc $f^{P_n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} H(x)$.

sinon : $\forall (\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n \geqslant 0} P_n(j_{P_n,x}]$: $\exists K > 0$ s.t. $\forall k \geqslant K$:

$$\sup_{y \in (\alpha, \beta]} f(y) = \sup_{y \in P_k(j_{P_k,x}]} f(y).$$

En effet, s'il existe $(\alpha, \beta]$ qui ne satisfait pas la propriété, alors les P_n pourraient être raffinés par la suite $(P'_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $P'_n \coloneqq P_n \oplus \alpha \oplus \beta$. Dans ce cas : $f^{P_n} \geqslant f^{P'_n}$ ce qui contredit :

$$U(f; P_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \inf_P U'f; P).$$

On déduit donc :

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{y\in B_\delta(x)} f(y) = \sup_{y\in\bigcap_{n\geqslant 0} P_n(j_{P_n,x})} f(y),$$

i.e. :

$$H(x) = \lim_{\delta\to 0}\sup_{y\in B_\delta(x)} f(y) = \sup_{y\in\bigcap_{n\geqslant 0} P_n(j_{P_n,x})} f(y) = \lim_{n\to+\infty} f^{P_n}(x).$$

On déduit de ces deux cas $f^{P_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}\text{-ae}} H$ et donc :

$$\int H\,d\mathcal{L} = \lim_{n\to+\infty}\int f^{P_n}\,d\mathcal{L} = \inf_P U(f;P).$$

On déduit similairement le cas $\int h\,d\mathcal{L} = \sup_P L(f;P)$.

5. f est Riemann-intégrable $\iff \int H\,d\mathcal{L} = \int h\,d\mathcal{L} \iff \int(H-h)\,d\mathcal{L} = 0 \iff H = h$ $\mathcal{L}$-ae et donc $\iff \mathcal{L}(\{x\in[a,b] \text{ s.t. } H(x)\neq h(x)\}) = 0$, i.e. f est continue $\mathcal{L}$-ae.

□

Exercice 7.2.

1. *Mq si* $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ *est Riemann-intégrable et bornée sur* $[a,b]$ *pour tous* $b > a$*, alors :*

$$\int_{[a,+\infty)} f\,d\mathcal{L} = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

2. *Mq si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est Riemann-intégrable et bornée sur* $[c,b]$ *pour tous* $c\in(a,b)$*, alors :*

$$\int_{[a,b]} f\,d\mathcal{L} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Résolution.

1. Posons la suite croissante de fonctions $f_n := f\chi_{[a,a+n]}$. Puisque les f_n sont bornées et Riemann-intégrables (par hypothèse), par l'exercice précédent, on sait que les f_n sont mesurables et que $\int_{[a,a+n]} f\,d\mathcal{L} = \int_a^{a+n} f(x)\,dx$. Puisque $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$, on a que f est mesurable. De plus, par le théorème de la convergence monotone :

$$\int f\,d\mathcal{L} = \lim_{n\to+\infty}\int f_n\,d\mathcal{L} = \lim_{n\to+\infty}\int_a^{a+n} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

2. De manière similaire, on pose la suite croissante de fonctions $f_n := f\chi_{[a+\frac{1}{n},b]}$ qui converge vers f sur $(a,b]$ (donc $\mathcal{L}$-ae). Puisque les f_n sont mesurables, on déduit à nouveau que f est mesurable également et par la convergence monotone :

$$\int f\,d\mathcal{L} = \lim_{n\to+\infty}\int f_n\,d\mathcal{L} = \lim_{n\to+\infty}\int_{a+\frac{1}{n}}^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Exercice 7.3. $\mathbb{Q}$ *est dénombrable donc* $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ *l'est aussi. Donc* $\mathbb{Q}\cap[0,1] = \{q_k\}_{k\geqslant 0}$*. Pour* $k\geqslant 0$*, on définit :*

$$f_k : [0,1]\to\mathbb{R} : x\mapsto \begin{cases} 1 & \textit{si } x\in\{q_\ell\}_{\ell=0}^k \\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$$

1. *Mq* $\forall k \geqslant 0 : f_k$ *est Riemann-intégrable et déterminer :*

$$\int_0^1 f_k(x)\,dx.$$

2. *Mq* $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\text{CVS } sur\ [0,1]} f$. *Que peut-on en déduire ?*
3. *Mq* f *est Lebesgue-intégrable et vérifier les hypothèses du théorème de la convergence dominée.*

<u>*Résolution*</u>.

1. À k fixé, f_k est bornée sur son compact de définition et est continue sur $[0,1] \setminus \{q_\ell\}_{\ell=0}^k$, donc f_k est Riemann-intégrable. De plus :

$$\int_0^1 f_k(x)\,dx = \sum_{\ell=1}^{k} \int_{q_{\ell-1}}^{q_\ell} f_k(x)\,dx = \sum_{\ell=1}^{k} 0 = 0.$$

   De manière plus élégante, remarquons que f_k est la fonction caractéristique d'un ensemble de mesure nulle, donc f_k est mesurable et de plus :

$$\int f_k \,d\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{q_\ell\}_{\ell=0}^k) = 0,$$

   donc f_k est Lebesgue-intégrable. De plus f_k est bornée sur son compact de définition (qui est forcément de mesure finie), donc f_k doit être Riemann-intégrable.

2. Soit $x \in [0,1]$. Si $x \in \mathbb{Q}^\complement$, alors $\forall k \geqslant 0 : f_k(x) = 0$. Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $\exists K \geqslant 0$ s.t. $x = q_K$, ce qui implique $\forall k \geqslant K : f_k(x) = 1$. Donc $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. Notons que f_k converge simplement mais pas uniformément. En effet :

$$\forall k \geqslant 0 : \sup_{x\in[0,1]} \left| f_k(x) - \chi_{\mathbb{Q}}(x) \right| = 1.$$

   Puisque $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas Riemann-intégrable, on a l'existence d'une fonction $\mathcal{L}$-intégrable mais pas R-intégrable.

3. Voir la remarque ci-dessus pour l'intégrabilité au sens de Lebesgue. Les f_k sont bien mesurables et $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \leqslant \chi_{[0,1]}$ qui est intégrable. Donc par la convergence dominée, on a bien $\int f\,d\mathcal{L} = 0$.

□

8 Séance 8

Exercice 8.1. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré.*

1. *Si* $\mu(X) \gneqq +\infty$, *mq si* p *et* q *sont des réels tels que* $1 \leqslant q \gneqq p \gneqq +\infty$, *alors :*

$$L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \subset L^q(X, \mathcal{A}, \mu) \subset L^1(X, \mathcal{A}, \mu).$$

2. *Considérons la fonction suivante :*

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^{\frac{-1}{q}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mq $u \in L^p(\mathbb{R}) \setminus L^q(\mathbb{R})$.

3. *Considérons la fonction suivante :*

$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^{\frac{-1}{p}} & \text{si } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mq $u \in L^q(\mathbb{R}) \setminus L^p(\mathbb{R})$.

Résolution.

1.
$L^\infty \subseteq L^p$: Soit $f \in L^\infty$. μ étant une mesure finie, les ensembles μ-négligeables et localement-μ-négligeables coïncidente. Il existe donc $C \geqslant 0$ s.t. $\mu(\{x \in X \text{ s.t. } |f(x)| > C\}) = 0$. Notons cet ensemble N. On a alors :

$$\int |f|^p \, d\mu = \int_N |f|^p \, d\mu + \int_{N^\complement} f^p \, d\mu \leqslant C^p \mu(N^\complement) = C^p \mu(X) < +\infty.$$

$L^p \subseteq L^q$: Soit $f \in L^p$. On remarque que $|f|^q \in L^{\frac{p}{q}}$ avec $\frac{p}{q} > 1$. De plus, puisque $\mu(X) < +\infty$, les fonctions constantes sont intégrables (car dans L^∞). En particulier $\mathbf{1} : x \mapsto 1$ est dans $L^{\frac{p}{p-q}}$. Par Hölder :

$$\int |f|^q \, d\mu = \int |f|^q |\mathbf{1}| \, d\mu \leqslant \left\| |f|^q \right\|_{L^{\frac{p}{q}}} \underbrace{\|\mathbf{1}\|_{L^{\frac{p}{p-q}}}}_{=\mu(X) < +\infty}.$$

Or :

$$\left[\int \left(|f|^q \right)^{\frac{p}{q}} d\mu \right]^{\frac{q}{p}} = \left[\int |f|^p \, d\mu \right]^{\frac{q}{p}} = \left[\left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right]^q = \|f\|_{L^p}^q < +\infty.$$

Donc $f \in L^q$.

$L^q \subseteq L^1$: Soit $f \in L^q$. $f = f\chi_A + f\chi_{A^\complement}$ où $A = \{x \in X \text{ s.t. } |f(x)| \geqslant 1\}$. Donc :

$$\int |f| \, d\mu = \int_A |f| \, d\mu + \int_{A^\complement} |f| \, d\mu \leqslant \int_A |f|^q \, d\mu + \int_{A^\complement} 1 \, d\mu \leqslant \|f\|_{L^q}^q + \mu(A^\complement) < +\infty.$$

2. $u \in L^p$ pour $p > q$ car :

$$\int u^p \, d\mathcal{L} = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t x^{-\frac{p}{q}} \, dx = \frac{-q}{p-q} \lim_{t \to +\infty} \left(t^{-\frac{p-q}{q}} - 1 \right) = \frac{q}{p-q}$$

car $\frac{p-q}{q} > 0$ et donc $t^{-\frac{p-q}{q}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

De plus $u \notin L^q$ car :

$$\int u^q \, d\mathcal{L} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t x^{-1} \, dx = \lim_{t\to+\infty} \ln(t) = +\infty.$$

3. $v \in L^q$ pour $q < p$ car :

$$\int v^q \, d\mathcal{L} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 x^{-\frac{q}{p}} \, dx = \frac{q}{p-q} \lim_{\varepsilon\to 0} \left(1 - \varepsilon^{\frac{p-q}{q}}\right) = \frac{q}{p-q}$$

car $\frac{p-q}{q} > 0$.
De plus $v \notin L^p$ car :

$$\int v^p \, d\mathcal{L} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 x^{-1} \, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln \varepsilon = +\infty.$$

□

Exercice 8.2 (Inégalité de Chebycshev). *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : X \to [0, +\infty)$ *une application mesurable. Mq*

$$\forall \alpha > 0 : \mu\left(\{x \in X \textit{ s.t. } f(x) \geqslant \alpha\}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int f \, d\mu.$$

De plus, si $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *est une application mesurable croissante, alors :*

$$\forall \alpha > 0 : \mu\left(\{x \in X \textit{ s.t. } f(x) \geqslant \alpha\}\right) \leqslant \frac{1}{\Phi(\alpha)} \int \Phi(f(x)) \, d\mu(x).$$

Résolution. à $\alpha > 0$ fixé, notons $A_\alpha(f) := \{x \in X \text{ s.t. } f(x) \geqslant \alpha\}$. L'inégalité découle simplement du fait que :

$$\int_X f \, d\mu \geqslant \int_{A_\alpha(f)} f \, d\mu \geqslant \int_{A_\alpha(f)} \alpha \, d\mu = \alpha\mu(A_\alpha(f)).$$

Pour le second point, il suffit de remarquer que $A_\alpha(f) \subset A_{\Phi(\alpha)}(\Phi \circ f)$ puisque Φ est croissante. Donc en appliquant le premier point :

$$\mu(A_\alpha(f)) \leqslant \mu(A_{\Phi(\alpha)}(\Phi \circ f)) \leqslant \frac{1}{\Phi(\alpha)} \int \Phi \circ f \, d\mu.$$

□

Exercice 8.3. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : X \to \mathbb{R}$ *une application mesurable.*

1. *Mq :*

$$\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \geqslant \|f\|_{L^\infty},$$

et donner un exemple où l'inégalité est infinie à gauche et finie à droite.

2. *Supposions qu'il existe* $q \in [1, +\infty)$ *s.t.* $f \in L^q(X)$.
   (a) *Mq* f *est finie* μ*-ae.*
   (b) *Supposons que* $0 \lneqq \|f\|_{L^\infty} \lneqq +\infty$. *Mq si* $p \in (q, +\infty)$, *alors :*

$$\|f\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{q}{p}} \cdot \|f\|_{L^q}^{\frac{q}{p}},$$

et en déduire que :

$$\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^\infty}.$$

(c) *Conclure.*

<u>*Résolution*</u>.

1. Séparons les cas (i) $\|f\|_{L^\infty} = 0$; (ii) $\|f\|_{L^\infty} \lneqq +\infty$ et (iii) $\|f\|_{L^\infty} = +\infty$.
   - Dans le premier cas, puisque $\forall p \geqslant 1 : \|f\|_{L^p} \geqslant 0$, l'inégalité est triviale.
   - Dans le second cas, l'inégalité est… moins triviale.
     Séparons à nouveau deux cas ici : soit $\forall p \geqslant 1 : f \notin L^p(X)$ soit $\exists p \geqslant 1$ s.t. $f \in L^p$. Dans le premier cas, on a donc $\forall p \geqslant 1 : \|f\|_{L^p} = +\infty \geqslant \|f\|_{L^\infty}$, donc ok. Supposons donc alors qu'il existe $\tilde{p} \geqslant 1$ s.t. $f \in L^{\tilde{p}}$. On pose alors une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall n \geqslant 0 : 0 < \varepsilon_n < \|f\|_{L^\infty}$ et $\varepsilon_n \searrow 0$. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose :

     $$\Omega_{\varepsilon_n} \coloneqq \{x \in X \text{ s.t. } |f(x)| \geqslant \|f\|_{L^\infty} - \varepsilon_n\} = f^{-1}\left(\left(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon_n, +\infty\right)\right).$$

     Puisque $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ décroit, la suite $(\Omega_{\varepsilon_n})_{n\geqslant 0}$ décroit également. De plus, par définition du supremum essentiel ($\|f\|_{L^\infty}$), on déduit $\mu(\Omega_{\varepsilon_n}) \gneqq 0$. Maintenant observons que, à $p \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$ fixés :

     $$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p \,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\int_{\Omega_{\varepsilon_n}} |f|^p \,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\int_{\Omega_{\varepsilon_n}} \left(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon_n\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon_n\right) \mu(\Omega_{\varepsilon_n})^{\frac{1}{p}}.$$

     Montrons alors que $\mu(\Omega_{\varepsilon_n}) \lneqq +\infty$. Puisque $\|f\|_{L^{\tilde{p}}} \lneqq +\infty$, on sait :

     $$+\infty \gneqq \|f\|_{L^{\tilde{p}}} \geqslant \underbrace{\left(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon_n\right)}_{\lneqq +\infty} \mu\left(\Omega_{\varepsilon_n}\right)^{\frac{1}{\tilde{p}}}.$$

     On a donc obligatoirement $\mu(\Omega_{\varepsilon_n}) \lneqq +\infty$.
     Dès lors, puisque $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : x^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$, par passage à la limite pour n, on a :

     $$\forall p \geqslant 1 : \|f\|_{L^p} \geqslant \|f\|_{L^\infty}.$$

     Dès lors, par passage à la limite (à la lim inf car on ne sait pas si $\|f\|_{L^p}$ converge pour $p \to +\infty$) :

     $$\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \geqslant \|f\|_{L^\infty}.$$

   - Dans le dernier cas, montrons que $\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} = +\infty$. On sait que $\|f\|_{L^\infty} = +\infty$, i.e. :

     $$\forall M \geqslant 0 : \exists A_M \in \mathcal{A} \text{ s.t. } f \geqslant M \text{ sur } A_M \text{ et } \mu(A_M) \gneqq 0.$$

     À nouveau, deux cas sont à distinguer : soit $\forall A \in \mathcal{A} : A \neq \emptyset \Rightarrow \mu(A) = +\infty$, soit $\exists A \in \mathcal{A}$ s.t. $A \neq \emptyset$ et $\mu(A) \lneqq +\infty$.

     (a) Dans le premier cas, $f \neq \mathbf{0}$ dans L^p (où $\mathbf{0}$ est la fonction constante nulle) implique $\forall p \geqslant 1$: $\|f\|_{L^p} = +\infty$ car $\|f\|_{L^\infty} > 0$ et donc pour $p \geqslant 1$:

     $$\int |f|^p \,d\mu \geqslant \int_{\left\{x\in X \text{ s.t.} |f(x)| > \frac{\|f\|_{L^\infty}}{2}\right\}} |f|^p \,d\mu \geqslant \frac{\|f\|_{L^\infty}}{2} \underbrace{\mu\left(\left\{x \in X \text{ s.t. } |f(x)| > \frac{\|f\|_{L^\infty}}{2}\right\}\right)}_{=+\infty} = +\infty.$$

     (b) Dans le second cas, pour tout $M \geqslant 0$, il existe A_M s.t. $f \geqslant M$ sur A_M et $0 \lneqq \mu(A_M) \lneqq +\infty$. Dans ce cas :

     $$\forall p \geqslant 1 : \forall M \geqslant 0 : \|f\|_{L^p} \geqslant \left(\int_{A_M} |f|^p \,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\int_{A_M} M^p \,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = M\mu(A_M)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p \to +\infty$: $\mu(A_M)^{\frac{1}{p}} \to 1$. Dès lors on a :

$$\forall M \geqslant 0 : \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \geqslant M,$$

i.e. :

$$\liminf_{p\to+\infty} = +\infty = \|f\|_{L^\infty}.$$

Mais remarquons que l'inégalité peut être stricte. En effet, dans $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mathcal{L})$, l'application $\mathbf{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1$ est bien mesurable avec $\|\mathbf{1}\|_{L^\infty} = 1$ (et même $\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbf{1}(x) = 1$). Or pour tout $p \geqslant 1$:

$$\|\mathbf{1}\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} 1 \, d\mathcal{L}\right)^{\frac{1}{p}} = +\infty.$$

2.

(a) On sait que $f \in L^1 \Rightarrow |f| \lneqq +\infty$ μ-ae. Or :

$$f \in L^q \iff \int |f|^q \, d\mu < +\infty \iff |f|^q \in L^1.$$

Donc si $f \in L^q, |f|^q \lneqq +\infty$ μ-ae, et donc $f \lneqq +\infty$ μ-ae.

(b) Notons $S \coloneqq \{x \in X \text{ s.t. } \left|f(x)\right| \leqslant \|f\|_{L^\infty}\}$. On sait que $\mu(S^\complement) = 0$. Donc à $p > q$ fixé :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_S |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_S |f|^q |f|^{p-q} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

or puisque $|f| \leqslant \|f\|_{L^\infty}$ sur S, on a :

$$\|f\|_{L^p} \leqslant \left(\int_S |f|^q \|f\|_{L^\infty}^{p-q} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\|f\|_{L^\infty}^{p-q} \int_S |f|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^\infty}^{\frac{p-q}{p}} \left(\left(\int_S |f|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{q}{p}} = \|f\|_{L^\infty}^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{L^q}^{\frac{q}{p}}.$$

Montrons alors que l'on peut en déduire :

$$\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^\infty}.$$

Puisque $f \in L^q$, on sait que $\|f\|_{L^q} \lneqq +\infty$ (et $\|f\|_{L^q} \gneqq 0$ puisque $\|f\|_{L^\infty} \gneqq 0$). Dès lors :

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L^q}^{\frac{q}{p}} = \lim_{t\to 0} \|f\|_{L^q}^{t} = 1,$$

car $\frac{q}{p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ (dont on déduit également $\|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{q}{p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|f\|_{L^\infty}$). Cela donne finalement :

$$\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^\infty}.$$

(c) On déduit de tout cela que si $\|f\|_{L^\infty} = +\infty$, alors $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p}$ existe et vaut $+\infty = \|f\|_{L^\infty}$ car :

$$+\infty \geqslant \limsup_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \geqslant \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \geqslant \|f\|_{L^\infty} = +\infty.$$

De plus, si $\|f\|_{L^\infty} \lneqq +\infty$, alors si $\exists q \geqslant 1$ s.t. $f \in L^q$, alors $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p}$ existe et vaut $\|f\|_{L^\infty}$.

$\square$

Exercice 8.4 (Inégalité d'interpolation)**.** *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* $1 \leqslant p \leqslant r \leqslant q \leqslant +\infty$ *et* $\theta \in (0, 1)$ *tels que :*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Mq si $u \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \cap L^q(X, \mathcal{A}, \mu)$*, alors* $u \in L^r(X, \mathcal{A}, \mu)$ *et :*

$$\|u\|_{L^r} \leqslant \|u\|_{L^p}^{\theta} \cdot \|u\|_{L^q}^{1-\theta}.$$

Résolution. Mq $f \in L^p \iff f^q \in L^{\frac{p}{q}}$ pour $q \geqslant 0$. Soient $p \geqslant 1$ et $q \in [1/p, +\infty)$. Soit $f \in L^p$. Si $p \lneqq +\infty$:

$$f^q \in L^{\frac{p}{q}} \iff +\infty \gneqq \int |f^q|^{\frac{p}{q}} \, d\mu = \int |f|^p \, d\mu \lneqq +\infty \iff f \in L^p.$$

Si $p = +\infty$, alors $f \in L^\infty \iff \|f\|_{L^\infty} \lneqq +\infty$. Donc on observe $\|f^q\|_{L^\infty} = \|f\|_{L}^{\infty q} \lneqq +\infty \iff \|f\|_{L^\infty} \lneqq +\infty$.

Dès lors, on a :
- $u \in L^q \Rightarrow u^{r\theta} \in L^{\frac{p}{r\theta}}$;
- $u \in L^q \Rightarrow u^{r(1-\theta)} \in L^{\frac{q}{r(1-\theta)}}$.

Or $\frac{p}{r\theta}$ et $\frac{q}{r(1-\theta)}$ sont conjugués par hypothèse. Par l'inégalité de Hölder, on a alors que $u^r = u^{r\theta} u^{r(1-\theta)} \in L^1$, et donc $u \in L^r$.

Finalement, toujours par Hölder :

$$\|u^r\|_{L^1} \leqslant \left\| u^{r\theta} \right\|_{L^{\frac{p}{r\theta}}} \left\| u^{r(1-\theta)} \right\|_{L^{\frac{q}{r(1-\theta)}}}.$$

Deux cas sont à distinguer :
- si $\frac{p}{r\theta}, \frac{q}{r(1-\theta)} \in (1, +\infty)$:

$$\|u^r\|_{L^1} = \int |u^r| \, d\mu = \int |u|^r \, d\mu = \|u\|_{L^r}^r$$
$$\|u^r\theta\|_{L^{\frac{p}{r\theta}}} = \left(\int \left| u^{r\theta} \right|^{\frac{p}{r\theta}} d\mu \right)^{\frac{r\theta}{p}} = \left(\int |u|^p \, d\mu \right)^{\frac{r\theta}{p}} = \|u\|_{L^p}^{r\theta}$$
$$\left\| u^{r(1-\theta)} \right\|_{L^{\frac{q}{r(1-\theta)}}} = \left(\int |u|^q \, d\mu \right)^{\frac{r(1-\theta)}{q}} = \|u\|_{L^q}^{r(1-\theta)}.$$

- Et si $\frac{p}{r\theta} = 1, \frac{q}{r(1-\theta)} = +\infty$, on a également :

$$\|u^r\|_{L^1} = \|u\|_{L^r}^r$$
$$\left\| u^{r\theta} \right\|_{L^1} = \|u\|_{L^{r\theta}}^{r\theta} = \|u\|_{L^p}^{r\theta}$$
$$\left\| u^{r(1-\theta)} \right\|_{L^\infty} = \|u\|_{L^\infty}^{r(1-\theta)},$$

En mettant les deux membres à la puissance $\frac{1}{r}$, on trouve bien :

$$\|u\|_{L^r} \leqslant \|u\|_{L^p}^{\theta} \|u\|_{L^q}^{1-\theta}.$$

$\square$

Remarque : En corolaire de ce théorème, on déduit que si $f \in L^1 \cap L^\infty$ (i.e. si f est μ-intégrable et essentiellement bornée), alors $f \in L^p$ pour tout p. Et ça, c'est chouette.