MATHF-3001 — Théorie de la mesure
Résolution des TPs

R. Petit

Année académique 2018 - 2019

1 Séance 1

Exercice 1.1. *Soient* $(X, \mathcal{F})$ *un espace mesurable et* $Y \subset X$. *Mq* $\mathcal{F}_Y \coloneqq \mathcal{F} \cap Y$ *est une* σ*-algèbre sur* Y.

Résolution.

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$, donc $\emptyset \cap Y = \emptyset \in \mathcal{F}_Y$.
2. Soit $F \in \mathcal{F}$. $F \cap Y \in \mathcal{F}_Y$ et donc :
$$Y \setminus (F \cap Y) = Y \setminus F \cup \emptyset = Y \cap F^{\complement} \in \mathcal{F}_Y$$
car $F^{\complement} \in \mathcal{F}$.
3. Soit $(F_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. On sait que $\bigcup_{n \geqslant 0} F_n \in \mathcal{F}$. De plus $(F_n \cap Y)_{n \geqslant 0} \in {\mathcal{F}_Y}^{\mathbb{N}}$. Donc :
$$\bigcup_{n \geqslant 0} (F_n \cap Y) = \bigcup_{n \geqslant 0} F_n \cap Y \in \mathcal{F}_Y.$$

□

Exercice 1.2.

1. *Soit* X *un ensemble fini. Décrire la* σ*-algèbre engendrée par la classe des parties finies de* X. *Que peut-on dire si* X *est fini ?*
2. *Dans* $X = [\![0, n]\!]$, *on considère* $\mathcal{A} = \{0\}$ *et* $\mathcal{B} = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$. *Décrire* $\sigma(\mathcal{A})$ *et* $\sigma(\mathcal{B})$.

Résolution.

1. Soit $\mathcal{F} = \sigma(\{Y \in \mathcal{P}(X) \text{ s.t. } Y \text{ est fini }\})$. Alors :
$$\mathcal{F} = \{Y \in \mathcal{P}(X) \text{ s.t. } Y \text{ est au plus dénombrable ou } Y^{\complement} \text{ est au plus dénombrable}\}$$
car la famille doit être stable par complémentaire (d'où la définition symétrique par complémentarité) et par union dénombrable (d'où le fait que Y ou $Y^{\complement}$ soit au plus dénombrable). Si X est fini, alors l'ensemble des parties finies de X est exactement $\mathcal{P}(X)$ qui est une σ-algèbre. Donc $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{P}(X)) = \mathcal{P}(X)$.
2. $\sigma(\mathcal{A})$ est la σ-algèbre engendrée par un unique élément donc : $\sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{0\}, \{0\}^{\complement}, [\![0, n]\!]\}$ où $\{0\}^{\complement} = [\![1, n]\!]$.
$\sigma(\mathcal{B}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, [\![3, n]\!], [\![1, n]\!], \{0\} \cup [\![3, n]\!], [\![0, n]\!]\}$.

□

Exercice 1.3. *Soient* X, Y *deux ensembles, et* $f : X \to Y$.

1. *Si* $\mathcal{F}$ *est une* σ*-algèbre sur* Y, *mq* $\mathcal{A} := f^{-1}(\mathcal{F})$ *est une* σ*-algèbre sur* X.
2. *Soit* $\mathcal{A}$ *une* σ*-algèbre sur* X.
   (a) *Mq* $\mathcal{F} := \{B \in \mathcal{P}(Y) \text{ s.t. } f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ *est une* σ*-algèbre sur* Y.
   (b) *Que peut-on dire de* $f(\mathcal{A})$ *?*

Résolution.

1.
   — $\emptyset \in \mathcal{F}$ donc $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}(\mathcal{F})$.
   — Soit $A \in \mathcal{A}$. Il existe $B \in \mathcal{F}$ s.t. $f^{-1}(B) = A$. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus A \in \mathcal{A}$.
   — Soit $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Il existe $(B_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ s.t. $\forall n \geqslant 0 : A_n = f^{-1}(B_n)$. $\bigcup_{n\geqslant 0} A_n = \bigcup_{n\geqslant 0} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\geqslant 0} B_n\right) \in f^{-1}(\mathcal{F})$.
2.
   (a)
   — $\emptyset \in \mathcal{A}$ donc $\emptyset \in \mathcal{F}$.
   — Soient $B \in \mathcal{F}$, $A := f^{-1}(B)$. $f^{-1}(B^{\complement}) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(B)^{\complement} \in \mathcal{A}$.
   — Soit $(B_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. On pose $B := \bigcup_{n\geqslant 0} B_n$.
   $$f^{-1}(B) = \bigcup_{n\geqslant 0} f^{-1}(B_n) = \bigcup_{n\geqslant 0} A_n \in \mathcal{A}$$
   où $\forall n \geqslant 0 : A_n = f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$. Donc $B \in \mathcal{F}$.

   (b) $f(\mathcal{A})$ n'est pas nécessairement une σ-algèbre : l'égalité $f(A^{\complement}) = f(A)^{\complement}$ n'est pas vraie en général. Par exemple pour $f : [\pm\varepsilon] \to [0, \varepsilon^2] : x \mapsto x^2$, on a :
   $$[0, \varepsilon^2] = f([-\varepsilon, 0]) = f([\pm\varepsilon] \setminus [0, +\varepsilon]) \neq f([\pm\varepsilon]) \setminus f([0, \varepsilon]) = [0, \varepsilon^2] \setminus [0, \varepsilon^2] = \emptyset.$$
   Donc rien ne garantit que $f(\mathcal{A})$ est stable par passage au complémentaire.
   TODO: Donner un contre-exemple avec des σ-algèbres finies sur de petits ensembles.

$\square$

Exercice 1.4. *Soient* $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ *espaces mesurables. Soit* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$. *Si* $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$, *mq* $f : X \to Y$ *est mesurable ssi* $f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$.

Résolution. $\underline{\Rightarrow}$: en supposant f mesurable, si $B \in \mathcal{F}$, alors $B \in \mathcal{B}$ et donc $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

$\underline{\Leftarrow}$: on pose $\mathcal{B}' := \{B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Par le point précédent, $\mathcal{B}'$ est une σ-algèbre. Par hypothèse : $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}'$, et donc $\sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{B}') = \mathcal{B}'$. Or $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$. De plus, puisque $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, on a $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, ce qui implique $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, i.e. :
$$\forall B \in \mathcal{B} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

$\square$

Exercice 1.5.

1. *Mq toute intersection (non-vide) de classes de Dynkin est une classe de Dynkin.*
2. *Mq pour tout* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ *il existe une plus petite classe de Dynkin au sens de l'inclusion (notée* $\lambda(\mathcal{F})$*).*
3. *Mq si* $\mathcal{D}$ *est une classe de Dynkin stable par intersections finies, alors* $\mathcal{D}$ *est une* σ*-algèbre.*

4. *Mq si $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ est stable par intersections finies, alors $\lambda(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$.*

<u>*Résolution*</u>.

1. [Exactement même raisonement que pour les σ-algèbres] Soit $(\mathcal{D}_i)_{i\in I}$ une famille non-vide de classes de Dynkin et soit $\mathcal{D} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i$.
   — $\forall i \in I : \emptyset \in \mathcal{D}_i$ donc $\emptyset \in \mathcal{D}$.
   — Soit $D \in \mathcal{D}$. Puisque $\forall i \in I : D \in \mathcal{D}_i$ et que les $\mathcal{D}_i$ sont des classes de Dynkin, on a $\forall i \in I : D^{\complement} \in \mathcal{D}_i$ et donc $D^{\complement} \in \mathcal{D}$.
   — Soit $(D_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$. On sait que $\forall i \in I : \bigsqcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}_i$ et donc $\bigsqcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}$.
2. Comme pour les σ-algèbres, on peut définir :
$$\lambda(\mathcal{F}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{D} \text{ Dynkin} \\ \mathcal{F}\subset\mathcal{D}}} \mathcal{D}.$$
   Par le point ci-dessus, $\lambda(\mathcal{F})$ est une classe de Dynkin et toute classe de Dynkin $\mathcal{D}' \supset \mathcal{F}$ contient $\lambda(\mathcal{F})$ par définition.
3. Soit $\mathcal{D}$ une classe de Dynkin stable par intersections finies et soit $(D_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$. Montrons donc que $\bigcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}$. On pose $B_0 := D_0$ et pour $n > 0$, on pose $B_n := A_n \cap (\bigcap_{j=1}^{n-1} B_j^{\complement})$. Par récurrence, on observe que les B_n sont dans $\mathcal{D}$ par stabilité sous intersections finies. De plus les B_n sont disjoints deux à deux et leur union est égale à l'union des D_n. Donc $\bigcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}$.
4. Soit $D \in \lambda(\mathcal{F})$. On pose $\mathcal{D}_D := \{Q \in \lambda(\mathcal{F}) \text{ s.t. } Q \cap D \in \lambda(\mathcal{F})\} \subset \lambda(\mathcal{F})$. Montrons que $\mathcal{D}_D$ est une classe de Dynkin.
   — $\emptyset \in \mathcal{D}_D$ puisque $\lambda(\mathcal{F}) \ni \emptyset = \emptyset \cap D$.
   — Soit $Q \in \mathcal{D}_D$. $Q^{\complement} \cap D = (D^{\complement} \cup Q)^{\complement} = (D^{\complement} \sqcup \underbrace{(Q \cap D)}_{\in\lambda(\mathcal{F})})^{\complement} \in \lambda(\mathcal{F})$ par stabilité par passage au complément, stabilité par union disjointe.
   — Soit $(Q_n)_{n\geqslant 0} \in {\mathcal{D}_D}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. On a :
$$\bigsqcup_{n\geqslant 0} Q_n \cap D = \bigsqcup_{n\geqslant 0} \underbrace{(Q_n \cap D)}_{\in\lambda(\mathcal{F})} \in \lambda(\mathcal{F}).$$
   On remarque également que si $D \in \mathcal{F} : \mathcal{F} \subset \mathcal{D}_D \subset \lambda(\mathcal{F})$, ce qui implique $\lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_D$.
   Or par symétrie de l'intersection, pour $D, Q \in \lambda(\mathcal{F})$ on a : $Q \in \mathcal{D}_D \iff D \in \mathcal{D}_Q$. Dès lors on a une équivalence entre les deux assertions suivantes :
   — $\forall (D, Q) \in \mathcal{F} \times \lambda(\mathcal{F}) : Q \in \mathcal{D}_D$ (autrement dit $\forall D \in \mathcal{F} : \lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_D$) ;
   — $\forall (D, Q) \in \mathcal{F} \times \lambda(\mathcal{F}) : D \in \mathcal{D}_Q$ (autrement dit $\forall Q \in \lambda(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subset \mathcal{D}_Q$).
   On peut alors en déduire que $\forall Q \in \lambda(\mathcal{F}) : \lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_Q$. Dès lors, montrer que $\lambda(\mathcal{F})$ est stable par instersections finies revient à montrer que $\forall D, Q \in \lambda(\mathcal{F}) : D \cap Q \in \lambda(\mathcal{F})$, i.e. $D \in \mathcal{D}_Q = \lambda(\mathcal{F})$. On a donc bien la stabilité de $\lambda(\mathcal{F})$ sous intersections finies, on peut donc déduire que $\lambda(\mathcal{F})$ est une σ-algèbre qui contient $\mathcal{F}$, donc $\sigma(\mathcal{F}) \subset \lambda(\mathcal{F})$. Or toute σ-algèbre est une classe de Dynkin, donc $\lambda(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{F})$, ce qui permet de conclure.

□

2 Séance 2

Exercice 2.1. *Soient $(X, \mathcal{F})$ un espace mesurable et μ une fonction additive sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Mq les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *μ est σ-additive ;*
2. *μ est continue à gauche ;*
3. *μ est continue à droite.*

Donner un exemple de mesure $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ qui ne satisfait pas le point 3. Que faut-il ajouter comme hypothèse pour ce résultat ?

Résolution.

1. ⇒ 2. Soit $(B_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. On pose $A_0 \coloneqq B_0$ et $\forall n > 0 : A_n \coloneqq B_n \setminus B_{n-1}$, ce qui donne (car les A_n sont dans $\mathcal{A}$) :

$$\mu\left(\bigcup_{n \geqslant 0} B_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n \geqslant 0} A_n\right) = \sum_{n \geqslant 0} \mu(A_n) = \lim_{N \to +\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \mu(A_n)}_{=\mu(B_N)} = \lim_{N \to +\infty} \mu(B_N).$$

2. ⇒ 1. Soit $(A_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. On pose $B_0 \coloneqq A_0$ et $\forall n > 0 : B_n \coloneqq A_n \cup B_{n-1}$. Les B_n forment une suite croissante dans $\mathcal{A}$. On a alors :

$$\mu\left(\bigsqcup_{n \geqslant 0} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geqslant 0} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu\left(\bigsqcup_{j=0}^{n} A_j\right) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=0}^{n} \mu(A_j) = \sum_{n \geqslant 0} \mu(A_n).$$

2. ⇒ 3. Soit $(C_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante. On a alors que $({C_n}^{\complement})_{n \geqslant 0}$ est une suite croissante dans $\mathcal{A}$. Donc :

$$\mu\left(\bigcup_{n \geqslant 0} {C_n}^{\complement}\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu({C_n}^{\complement}) = \mu(X) - \lim_{n \to +\infty} \mu({C_n}^{\complement})$$

car $\mu(X) < +\infty$. De plus :

$$\mu\left(\bigcup_{n \geqslant 0} {C_n}^{\complement}\right) = \mu\left(\left(\bigcap_{n \geqslant 0} C_n\right)^{\complement}\right) = \mu(X) - \mu\left(\bigcap_{n \geqslant 0} C_n\right).$$

Par finitude de μ, on conclut :

$$\mu\left(\bigcap_{n \geqslant 0} C_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(C_n).$$

3. ⇒ 2. Exactement même raisonnement par passage au complémentaire.

Si la mesure n'est pas finie, on peut construire une suite $(C_n)_n$ telle que $\forall n \geqslant 0 : \mu(C_n) = +\infty$ et $\bigcap_{n \geqslant 0} C_n = \emptyset$. Par exemple, dans l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \# = |\cdot|) : \forall n \geqslant 0 : C_n \coloneqq \{m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } m > n\}$ est de mesure $+\infty$ et $\bigcap_{n \geqslant 0} C_n = \emptyset$. On a donc :

$$\mu\left(\bigcap_{n \geqslant 0} C_n\right) = \mu(\emptyset) = 0 \neq +\infty = \lim_{n \to +\infty} +\infty = \lim_{n \to +\infty} \mu(C_n).$$

Il faut donc supposer que pour la suite $(C_n)_n$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\mu(C_n) \lneqq +\infty$ afin d'éviter le cas où $(\mu(C_n))_{n\geqslant 0}$ est infinie pour tous les termes. $\square$

> **Exercice 2.2.** *Soit* X *un ensemble non dénombrable et* $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X)$ *s.t.* A *ou* $A^{\complement}$ *est dénombrable*$\}$. *Soit* $\mu : \mathcal{A} \to \{0,1\}$ *où* $\mu(A) = 0 \iff A$ *est dénombrable. Mq* μ *est une mesure sur* $(X, \mathcal{A})$.

Résolution. $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre (voir cours).

— $\mu(\emptyset) = 0$ car $\emptyset$ est fini.

— Soit $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. On note $A \coloneqq \bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n$. On a soit $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$, et :

$$\mu(A) = 0 \iff \underbrace{\forall n \geqslant 0 : \mu(A_n) = 0}_{\text{i.e. tous les } A_n \text{ dénombrables}},$$

et donc :

$$\mu(A) = 0 = \sum_{n\geqslant 0} 0 = \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n)$$

pour le premier cas. Pour le second cas, si $\mu(A) = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. ${A_{n_0}}^{\complement}$ est dénombrable (ou $\mu(A_{n_0}) = 1$), donc $\mu(A) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $n_1 \neq n_0$ s.t. ${A_{n_1}}^{\complement}$ est dénombrable ($\mu(A_{n_1}) = 1$). On a donc ${A_{n_0}}^{\complement}$ et ${A_{n_1}}^{\complement}$ dénombrables. Or $A_{n_0} \cap A_{n_1} = \emptyset$, donc $A_{n_0} \subseteq {A_{n_1}}^{\complement}$ ou $A_{n_1} \subseteq {A_{n_0}}^{\complement}$, ce qui implique A_{n_0} ou A_{n_1} dénombrable, ce qui est une contradiction car X est non-dénombrable.

$\square$

> **Exercice 2.3.** *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité. Mq* $\mathcal{T} \coloneqq \{A \in \mathcal{A}$ *s.t.* $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}\}$ *est une* σ*-algèbre.*

Résolution.

— $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ donc $\emptyset \in \mathcal{T}$.

— Soit $A \in \mathcal{T}$. En particulier $A \in \mathcal{A}$ et $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$. Puisque $\mathbb{P}$ est une mesure (finie), on a $\mathbb{P}(A^{\complement}) = \mathbb{P}(X) - \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$. Donc $A^{\complement} \in \mathcal{T}$.

— Soit $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. On note $A \coloneqq \bigcup_{n\geqslant 0} A_n$. Mq $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$.
  — si $\forall n \geqslant 0 : \mathbb{P}(A_n) = 0$, alors par σ-sous-additivité $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} P(A_n) = 0$.
  — si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\mathbb{P}(A_{n_0}) = 1$, alors par monotonie, puisque $A_{n_0} \subseteq A \subseteq X$:

$$1 = \mathbb{P}(A_{n_0}) \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(X) = 1.$$

$\square$

> **Exercice 2.4.** *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* $(Y, \mathcal{B})$ *un espace mesurable et* $g : X \to Y$ *une application mesurable. On pose :*
>
> $$\nu : \mathcal{B} \to [0, +\infty] : B \mapsto \mu(g^{-1}(B)).$$
>
> *Mq* ν *est une mesure sur* $(Y, \mathcal{B})$.

Résolution. On sait que $\forall B \in \mathcal{B} : g^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ puisque g est mesurable. Donc ν est bien définie. Mq ν est une mesure.

— $\nu(\emptyset) = \mu(g^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ car μ est une mesure.

— Soient $(B_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. Mq ν est σ-additive.

$$\nu\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} B_n\right) = \mu\left(g^{-1}\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} B_n\right)\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} g^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n\geqslant 0} \mu(g^{-1}(B_n)) = \sum_{n\geqslant 0} \nu(B_n).$$

$\square$

Exercice 2.5. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable.*

1. *Pour $x \in X$, mq δ_x est une mesure.*
2. *Mq si μ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$ s.t. $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \iff x \notin A$ alors $\exists C \gneqq 0$ s.t. $\mu = C\delta_x$.*

Résolution.

1. Mq δ_x est une mesure.
   — $\delta_x(\emptyset) = 0$ car $x \notin \emptyset$.
   — Soit $(A_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints. Mq $\delta_x(\bigsqcup_{n \geqslant 0} A_n) = \sum_{n \geqslant 0} \delta_x(A_n)$.
     — Si $\delta_x(\bigsqcup_{n \geqslant 0} A_n) = 0$, alors $\forall n \geqslant 0 : x \notin A_n$, i.e. $\forall n \geqslant 0 : \delta_x(A_n) = 0$.
     — Si $\delta_x(\bigsqcup_{n \geqslant 0} A_n) = 1$, alors $\exists n_0$ s.t. $x \in A_{n_0}$. Et puisque les A_n sont disjoints, $\forall n \neq n_0 : x \notin A_n$.
2. Soient $B, C \in \mathcal{A}$ s.t. $\mu(B) \neq 0 \neq \mu(C)$. Alors $\delta_x(B) = 1 = \delta_x(C)$. Mq $\mu(B) = \mu(C)$. $B \cap C \neq \emptyset$ puisque $x \in B \cap C$. On pose $\tilde{C} := C \cap B^{\complement}$ et $\tilde{B} := C^{\complement} \cap B$. On a alors que B et $\tilde{C}$ sont disjoints (C et $\tilde{B}$ également). De plus, $x \notin \tilde{B}$ et $x \notin \tilde{C}$, et donc $\mu(\tilde{B}) = \mu(\tilde{C}) = 0$. On a donc :

$$\mu(C) = \mu(C) + \mu(\tilde{B}) = \mu(C \sqcup \tilde{B}) = \mu(B \cup C) = \mu(B \sqcup \tilde{C}) = \mu(B) + \mu(\tilde{C}) = \mu(B).$$

   On a donc $\mu : \mathcal{A} \to \{0, C\}$ où $\mu(A) \iff \delta_x(A) = 1$.

$\square$

Exercice 2.6. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Mq la mesure de comptage est une mesure.*

Résolution.
— $|\emptyset| = 0$.
— La σ-additivité est triviale : $\left|\bigsqcup_{n \geqslant 0} A_n\right| = \sum_{n \geqslant 0} |A|_n$.

$\square$

Exercice 2.7. *Soit X un ensemble fini non-vide. Mq $\mu = \frac{|\cdot|}{|X|}$ est une mesure de proba sur $(X, \mathcal{P}(X))$.*

Résolution.
— $\mu(\emptyset) = 0/|X| = 0$.
— Soient $(A_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints.

$$\mu(\bigsqcup_{n \geqslant 0} A_n) = \frac{\sum_{n \geqslant 0} |A_n|}{|X|} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{|A_n|}{|X|}.$$

Note : si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, alors $\forall \alpha > 0 : \alpha\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty] : A \mapsto \alpha \cdot \mu(A)$ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. Donc l'exercice peut être simplement résolu par le fait que μ est la mesure de comptage normalisée par$|X| \in \mathbb{R}^{+*}$ $\square$

Exercice 2.8. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace de mesure.*

1. *Soit $(\mu_n)_{n \geqslant 0}$ une suite croissante de mesures sur $(X, \mathcal{A})$. Mq $\mu := \lim_{n \to +\infty} \mu_n$ est une mesure.*
2. *Soit $(\mu_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de mesures. Est-ce que $\mu := \sum_{n \geqslant 0} \mu_n$ est une mesure ?*
3. *Pour $n \geqslant 0$, on définit la mesure μ_n sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ par $\mu_n(A) = \left|A \cap [n, +\infty)\right|$.*
   — *Mq $\forall n \geqslant 0 : \mu_n$ est bien une mesure et que la suite $(\mu_n)_n$ est décroissante.*
   — *Est-ce que $\mu = \lim_{n \to +\infty} \mu_n$ est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$? Caractériser entièrement μ.*

Résolution.

1. On note que puisque la suite des μ_n est croissante, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A)$ est bien définie car soit la suite $(\mu_n(A))_n$ converge vers une valeur réelle, soit elle diverge vers $+\infty$.
   - $\mu(\emptyset) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(\emptyset) = 0$.
   - Soient $(A_n)_{n\geqslant 0}$ 2 à 2 disjoints.

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n\right) = \lim_{k\to+\infty} \mu_k\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n\right) = \lim_{k\to+\infty}\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} \mu_k(A_n)$$
$$= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\lim_{k\to+\infty}\mu_k(A_n) = \sum_{n\geqslant 0}\lim_{k\to+\infty}\mu_k(A_n) = \sum_{n\geqslant 0}\mu(A_n).$$

2.
   - $\mu(\emptyset) = \sum_{n\geqslant 0}\mu_n(\emptyset) = 0$.
   - Soient $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints. On note $A := \bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n$. Par non-négativité des $(\mu_k(A_n))_{n,k}$, on a que les sommes sur k et n commutent, i.e. :

$$\sum_{k\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0}\mu_k(A_n) = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 0}\mu_k(A_n),$$

     et donc $\mu(A) = \sum_{n\geqslant 0}\mu(A_n)$.

   On en déduit donc que $\mu = \sum_{k\geqslant 0}\mu_k$ est une mesure sur $(X,\mathcal{A})$. De plus, puisque $\alpha\cdot\mu$ (pour $\alpha > 0$, μ mesure sur $(X,\mathcal{A})$) est également une mesure sur $(X,\mathcal{A})$, on a que pour $(\alpha_n)_{n\geqslant 0} \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^{\mathbb{N}}$: $\mu = \sum_{n\geqslant 0}\alpha_n\mu_n$ est une mesure également.

3.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$.
     - $\mu_n(\emptyset) = |\emptyset| = 0$.
     - La σ-additivité est triviale par la σ-additivité de la mesure de comptage.

     De plus, pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $n \in \mathbb{N}$: $\mu_n(A) = \Big|\underbrace{A\cap[n,+\infty)}_{\supseteq A\cap[n+1,+\infty)}\Big| \geqslant \mu_{n+1}(A)$.
   - Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Deux cas sont à distinguer :
     (a) Soit A est fini, en quel cas $\max A$ est fini et donc $\forall n > \max A$: $\mu_n(A) = 0$, et donc $\mu(A) = 0$.
     (b) Soit A est infini, et donc dénombrable. On a alors $\forall n \geqslant 0 : A\cap[n,+\infty) \neq \emptyset$ car si il existe un $n \geqslant 0$ tel que $A\cap[n,+\infty) = \emptyset$, alors $A \subset [0,n)\cap\mathbb{N}$, et donc A est fini. Dès lors $\mu(A) > 0$.
     De plus : $\forall n \geqslant 0 : \mu_n(A) = +\infty$. Car si $\exists n \geqslant 0$ s.t. $\mu_n(A) \lneq +\infty$, alors $\mu_n(A) = \left|A\cap[n,+\infty)\right| = k \in \mathbb{N}$ et donc $A\cap[n,+\infty) = \{m_1,\dots,m_k\}$. Dans ce cas : $\mu_{m_k+1}(A) = 0$, ce qui est une contradiction.
     On en déduit que si A est infini (dénombrable), alors $\mu(A) = +\infty$.

   μ vaut donc 0 sur les parties finies de $\mathbb{N}$ et $+\infty$ sur les parties dénombrables. μ n'est donc pas une mesure car : $\mu(\mathbb{N}) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(\{n\}) = \sum_{n\geqslant 0} 0 = 0 \neq +\infty$.

$\square$

Exercice 2.9. *Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.*

1. Mq :

$$\mu\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) \leqslant \liminf_{n\to+\infty}\mu(A_n).$$

2. *Si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *s.t.* $\mu\left(\bigcup_{n\geqslant n_0} A_n\right) \leqslant +\infty$, *mq :*

$$\mu\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) \geqslant \limsup_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

<u>*Résolution*</u>.

1. Pour $n \geqslant 0$: on pose $B_n \coloneqq \cap_{m\geqslant n} A_m$. La suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ est trivialement croissante. On a donc :

$$\mu\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geqslant 0} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n),$$

   et :

$$\liminf_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} \mu(A_k).$$

   De plus : $\mu(B_n) = \mu\left(\bigcap_{k\geqslant n} A_k\right) \leqslant \mu(A_m)$ pour $m \geqslant n$ par monotonie de μ, et donc en particulier $\mu(B_n) \leqslant \inf_{k\geqslant n} \mu(A_k)$. Dès lors la suite $\mu(B_n)_n$ est dominée par $(\inf_{k\geqslant n} \mu(A_k))_n$. Dès lors :

$$\mu\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} \mu(A_k) = \liminf_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

2. On pose $C_n \coloneqq \bigcup_{m\geqslant n} A_m$. On sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\mu\left(C_{n_0}\right) \lneqq +\infty$. Les C_n forment une suite décroissante. On a donc :

$$\mu\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n\geqslant 0} C_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(C_n).$$

   De plus :

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geqslant n} \mu(A_k).$$

   Or $\forall k \geqslant n : C_n \supseteq A_k$ et donc $\forall k \geqslant n : \mu(C_n) \geqslant \mu(A_k)$, et en prticulier $\mu(C_n) \geqslant \sup_{k\geqslant n} \mu(A_k)$. Dès lors on conclut :

$$\mu\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(C_n) \geqslant \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geqslant n} \mu(A_k) = \limsup_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

□

Exercice 2.10. *Soit* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable. Soient* μ, ν *deux mesures finies sur* $(X, \mathcal{A})$ *telles que* $\forall A \in \mathcal{A}$: $\mu(A) \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(A) = \nu(A)$.

1. *Mq* $\mu = \nu$.
2. *Mq le résultat est faux si l'inégalité est changée en inégalité stricte.*

<u>*Résolution*</u>.

1. Soit $B \in \mathcal{A}$ s.t. $\mu(B) \gneqq \frac{1}{2}$. Alors $\mu(B^{\complement}) = \mu(X) - \mu(B) = 1 - \mu(B) < \frac{1}{2}$. Dès lors $\mu(B^{\complement}) = \nu(B^{\complement})$ par hypothèse, et on en déduit $\mu(B) = 1 - \mu(B^{\complement}) = 1 - \nu(B^{\complement}) = \nu(B)$, et donc $\mu = \nu$.

2. Si l'inégalité devient stricte, on peut choisir, sur l'espace mesurable $(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$, μ la mesure d'une Bernoulli de proba $\frac{1}{2}$ et ν la mesure d'une Bernoulli de proba $\frac{1}{3}$. On a alors :

A	$\mu(A)$	$\nu(A)$
$\emptyset$	0	0
$\{0\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
$\{1\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$\{0,1\}$	1	1

Puisque $\mathcal{B} := \{A \in \mathcal{P}(\{0,1\}) \text{ s.t. } \mu(A) \lneqq \frac{1}{2}\} = \{\emptyset\}$, on a bien $\mu = \nu$ sur $\mathcal{B}$, mais $\mu \neq \nu$.

$\square$

Exercice 2.11. *Soient* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable et une partie stable par intersections finies* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ *s.t.* $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$. *Si* μ *et* ν *sont deux mesures finies sur* $(X, \mathcal{A})$ *telles que* $\nu(X) = \mu(X)$ *et* $\mu = \nu$ *sur* $\mathcal{F}$. *Mq* $\mu = \nu$.

Résolution. On pose $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} \text{ s.t. } \mu(A) = \nu(A)\}$. Mq $\mathcal{D}$ est une classe de Dynkin :
- $\emptyset \in \mathcal{D}$ car $\mu(\emptyset) = 0 = \nu(\emptyset)$.
- Soit $A \in \mathcal{D}$. $\mu(A^{\complement}) = \mu(X) - \mu(A) = \nu(X) - \nu(A) = \nu(A^{\complement})$ et donc $A^{\complement} \in \mathcal{D}$.
- Soient $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints et $A := \bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n$.

$$\mu(A) = \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n) = \sum_{n\geqslant 0} \nu(A_n) = \nu(A).$$

On en conclut $A \in \mathcal{D}$.

De plus par hypothèse $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$, et donc par l'exercice 1.5 on a $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$. Dès lors $\mu = \nu$ sur $\mathcal{A}$, et donc $\mu = \nu$. $\square$

3 Séance 3

Exercice 3.1. *Soient $\mathbb{B}$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}$ la mesure de Lesbesgue sur $\mathbb{B}$.*

1. *Mq* $\forall x \in \mathbb{R} : \{x\} \in \mathbb{B}$.
2. *Mq* $\mathbb{Q} \in \mathbb{B}$ *et* $\mathcal{L}(\mathbb{Q}) = 0$.
3. *Mq une union non-dénombrable d'ensembles négligeables n'est pas nécessairement négligeable.*
4. *Mq* $N \in \mathbb{B}$ *est un ensemble négligeable ssi* $\forall \varepsilon > 0 : \exists U_\varepsilon$ *s.t.* $N \subseteq U_\varepsilon$ *et* $\mathcal{L}(U_\varepsilon) < \varepsilon$.

Résolution.

1. $\{x\} = [x, x]$ est fermé dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{L}(\{x\}) = x - x = 0$.
2. $\mathcal{L}(\mathbb{Q}) = \mathcal{L}(\bigsqcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \mathcal{L}(\{q\}) = 0$.
3. $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = +\infty$, or : $\bigsqcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$.
4. $\underline{\Leftarrow}$: par monotonie, si $\forall \varepsilon > 0 : N \subseteq U_\varepsilon$, alors $\mathcal{L}(N) \leqslant \mathcal{L}(U_\varepsilon) < \varepsilon$. On en déduit $\mathcal{L}(N) = 0$, et donc N est négligeable.

   $\underline{\Rightarrow}$: Soit $N \in \mathbb{B}$ s.t. $\mathcal{L}(N) = 0$. Pour $\varepsilon > 0$: mq $\exists U_\varepsilon$ ouvert s.t. $\mathcal{L}(U_\varepsilon) < \varepsilon$ et $N \subset U_\varepsilon$. Rappelons la mesure extérieure de Lebesgue :

   $$\mathcal{L}^*(A) := \inf_{(I_n)_{n\geqslant 0}\in\mathcal{C}_A} \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Vol}(I_n).$$

   Soit $(I_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{C}_N$. Les I_n sont compacts. On peut prendre une nouvelle suite $(J_n)_{n\geqslant 0}$ s.t. $\forall n \geqslant 0$: $\mathrm{Vol}(\overline{J_n}) < \mathrm{Vol}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ [1] et $I_n \subseteq J_n$. Par σ-sous-additivité (parce que les J_n ne sont pas forcément mutuellement disjoints), pour $J = \bigcup_{n\geqslant 0} J_n \supseteq N$:

   $$\mathcal{L}^*(N) \leqslant \mathcal{L}^*(\bigcup_{n\geqslant 0} J_n) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \mathcal{L}^*(J_n).$$

   Or, pour $n \geqslant 0$: $\mathcal{L}^*(J_n) \leqslant \mathrm{Vol}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Finalement :

   $$\mathcal{L}^*(J) < \sum_{n\geqslant 0}\left(\mathrm{Vol}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) = 0 + \varepsilon.$$

   <u>Note :</u> si on définit un ensemble négligeable comme étant inclus dans un ensemble de mesure nulle (et pas comme étant un ensemble de mesure nulle, comme considéré ci-dessus), l'implication $\Leftarrow$ est triviale.

□

Exercice 3.2. *Montrer qu'une droite* E *dans* $\mathbb{R}^2$ *est de mesure nulle pour* $\mathcal{L}$.

Résolution. À $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ fixés, $E = \{x + ty\}_{t\in\mathbb{R}}$. Pour $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, on définit $E_\alpha^\beta := \{x + ty\}_{t\in[\alpha,\beta]}$. Mq $\mathcal{L}(E_\alpha^\beta) = 0$.

Si $y = (0, \lambda)$ (ou si $y = (\lambda, 0)$ par symétrie), on peut recouvrir E_α^β par l'intervalle compact $[x_1 \pm \varepsilon] \times [x_2 + \alpha\lambda, x_2 + \beta\lambda]$ de volume arbitrairement petit (pour ε aussi petit que nécessaire), et donc $\mathcal{L}(E_\alpha^\beta) = 0$.

Sinon, soit $(I_n)_{n\geqslant 0}$ un recouvrement de E_α^β par des intervalles compacts. Pour $n \geqslant 0$: $I_n = [a_n^1, b_n^1] \times [a_n^2, b_n^2]$ et $\mathrm{Vol}(I_n) = (b_n^1 - a_n^1)(b_n^2 - a_n^2)$.

1. Par exemple en prenant l'intervalle ouvert $J_n = (a - \varepsilon/2^{n+2}, b + \varepsilon/2^{n+2})$ pour $I_n = [a, b]$.

Montrons qu'il existe $(J_n)_{n\geqslant 0}$ s.t. $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Vol}(J_n) < \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Vol}(I_n)$.

Soit $n \geqslant 0$. $I_n = [a_n^1, b_n^1] \times [a_n^2, b_n^2]$ où les 4 *coins* sont $C_1 = (a_n^1, a_n^2), C_2 = (a_n^1, b_n^2), C_3 = (b_n^1, a_n^2), C_4 = (b_n^1, b_n^2)$. WLOG supposons $\left|E_\alpha^\beta \cap \{C_i\}_{i=1}^4\right| = 2$, i.e. E passe par deux coins de I_n (soit C_1 et C_3, soit C_2 et C_4) [2]. On définit alors :

$$\begin{cases} J_{2n} & \coloneqq [a_n^1, \frac{1}{2}(b_n^1 + a_n^1)] \times [a_n^2, \frac{1}{2}(b_n^2 + a_n^2)] \\ J_{2n+1} & \coloneqq [\frac{1}{2}(b_n^1 + a_n^1), b_n^1] \times [\frac{1}{2}(b_n^2 + a_n^2), b_n^2] \end{cases}$$

si $E \cap \{C_1, C_3\}$; et :

$$\begin{cases} J_{2n} & \coloneqq [a_n^1, \frac{1}{2}(b_n^1 + a_n^1)] \times [\frac{1}{2}(b_n^2 + a_n^2), b_n^2] \\ J_{2n+1} & \coloneqq [\frac{1}{2}(b_n^1 + a_n^1), b_n^1] \times [a_n^2, \frac{1}{2}(b_n^2 + a_n^2)] \end{cases}$$

sinon.

On a bien $\mathrm{Vol}(I_n) = 2\left(\mathrm{Vol}(J_{2n}) + \mathrm{Vol}(J_{2n+1})\right)$, et donc $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Vol}(I_n) = 2\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Vol}(J_n)$.

Et donc :

$$\mathcal{L}^*(E_\alpha^\beta) = \inf_{(I_n)_n \in \mathcal{C}_{E_\alpha^\beta}} \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Vol}(I_n) = 0.$$

On a alors que E_α^β est mesurable et de mesure de Lebesgue nulle. Et on trouve que :

$$\mathcal{L}^*(E) = \mathcal{L}^*(\bigcup_{n\geqslant 0} E_{-n}^{+n}) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}^*(E_{-n}^{+n}) = 0.$$

Donc E est également mesurable pour $\mathcal{L}$ et est de mesure nulle. □

Exercice 3.3. *Pour* $B \in \mathbb{B}^n$ *et* $\lambda > 0$, *on définit* $\lambda B = \{\lambda b\}_{b\in B}$.

1. *Mq* $\forall \lambda > 0, B \in \mathbb{B}^n : \lambda B \in \mathbb{B}^n$.
2. *Mq* $\mathcal{L}(\lambda B) = \lambda^n \mathcal{L}(B)$.

Résolution. On note $\mathcal{B}_\lambda \coloneqq \{B \in \mathbb{B}^n \text{ s.t. } \lambda B \in \mathbb{B}^n\}$.

1.
   (a) Mq $\mathcal{B}_\lambda$ est une σ-algèbre.
   - $\emptyset \in \mathcal{B}_\lambda$ car $\lambda\emptyset = \emptyset$.
   - Soit $B \in \mathcal{B}_\lambda$. $\lambda B^\complement = (\lambda B)^\complement \in \mathbb{B}^n$ par stabilité par passage au complémentaire.
   - Soit $(B_n)_{n\geqslant 0} \in {\mathbb{B}^n}^{\mathbb{N}}$. $\lambda \bigcup_{n\geqslant 0} B_n = \{\lambda b \text{ s.t. } \exists n \geqslant 0, b \in B_n\} = \bigcup_{n\geqslant 0} \lambda B_n \in \mathbb{B}^n$ par stabilité d'unions dénombrables.

   (b) Mq $\left\{\prod_{k=1}^n (-\infty, b_k]\right\}_{(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n} \subset \mathcal{B}_\lambda$. Soit $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. On sait que $\prod_{k=1}^n (-\infty, b_k] \in \mathbb{B}^n$ et donc $\lambda \prod_{k=1}^n (-\infty, b_k] = \prod_{k=1}^n (-\infty, \lambda b_k] \in \mathbb{B}^n$. On a donc $\left\{\prod_{k=1}^n (-\infty, b_k]\right\}_{(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n} \subseteq \mathcal{B}_\lambda$. Et donc $\mathbb{B}^n \subseteq \sigma\left(\left\{\prod_{k=1}^n (-\infty, b_k]\right\}_{(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n}\right) \subseteq \mathcal{B}_\lambda \subseteq \mathbb{B}^n$, et donc $\mathcal{B}_\lambda = \mathbb{B}^n$.

2. On voit que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ recouvre B ssi $(\lambda I_n)_{n\geqslant 0}$ recouvre λB. Et donc :

$$\mathcal{L}^*(\lambda B) = \inf_{(I_n)_n \in \mathcal{C}_B} \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Vol}(\lambda I_n) = \inf_{(I_n)_n \in \mathcal{C}_B} \sum_{n\geqslant 0} \lambda^n \mathrm{Vol}(I_n) = \lambda^n \inf_{(I_n)_n \in \mathcal{C}_B} \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Vol}(I_n) = \lambda^n \mathcal{L}^*(B).$$

□

2. En effet, si ce n'est pas le cas, on peut "réduire" I_n afin que ce soit le cas (et qui est donc de volume strictement inférieur).

Exercice 3.4 (Vrai ou Faux). *Justifier les affirmations suivantes :*

1. *Si* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *est négligeable, alors* $\overline{E}$ *est négligeable.*
2. *Il existe un ensemble non-mesurable sur* $\mathbb{R}^n$ *de complémentaire de mesure extérieure de Lebesgue nulle.*
3. *Il existe des ensemble non-mesurables dont l'union est mesurable.*
4. *Si* $A \subset \mathbb{R}^n$ *satisfait* $\mathcal{L}(\mathring{A}) = \mathcal{L}(\overline{A})$, *alors* A *est mesurable.*

Résolution.

1. Faux : $\mathbb{Q}$ est négligeable et $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ n'est pas négligeable.
2. Faux : si $A^{\complement}$ est de mesure extérieure de Lebesgue nulle, alors $A^{\complement}$ est mesurable, et donc $A^{\complement} \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^*}$. Or l'ensemble des mesurables est une σ-algèbre, et donc $A = A^{\complement^{\complement}} \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^*}$.
3. Vrai : si A est non-mesurable, alors $A^{\complement}$ ne l'est pas non plus. Or $\mathcal{M}_{\mathcal{L}^*} \ni X = A \cup A^{\complement}$.
4. Vrai : par définition de complétion de mesure. Si $\mathring{A}$ et $\overline{A}$ sont mesurables et de même mesure, alors $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$ et $\mathcal{L}(\overline{A} \setminus \mathring{A}) = 0$. Dès lors $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^*}$ et par monotonie : $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\mathring{A}) = \mathcal{L}(\overline{A})$.

□

4 Séance 4

Exercice 4.1. *Soit* $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$*. Mq si* $\forall q \in \mathbb{Q} : f^{-1}((q, +\infty)) \in \mathcal{A}$*, alors* f *est mesurable.*

Résolution. Pour cela, montrons que $f^{-1}((r, +\infty)) \in \mathcal{A}$ pour $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on sait que pour $r \in \mathbb{R}$:

$$(r, +\infty) = \bigcup_{q \in (r,+\infty) \cap \mathbb{Q}} (q, +\infty).$$

Dès lors, pour $r \in \mathbb{R} : f^{-1}((r, +\infty)) = \bigcup_{q \in (r,+\infty)\cap\mathbb{Q}} \underbrace{f^{-1}((q, +\infty))}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$. □

Exercice 4.2. *Mq les fonctions* f *et* g *sont mesurables sur* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$*.*

Résolution. Pour cela, on utilise le fait qu'un produit de fonctions mesurables est mesurable et que :
- les fonctions caractéristiques sur des boréliens sont mesurables ;
- $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est mesurable car $\alpha = \mathrm{Id} \cdot \mathrm{Id}$;
- $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ est mesurable car $[0, 1]$ est mesurable et $\mathbb{Q}^{\complement}$ est mesurable aussi.

Donc puisque $f = \alpha\chi_{[0,1]} + \chi_{(1,2)}$ et $g = \alpha\chi_{\mathbb{Q}^{\complement} \cap [0,1]}$, on a f et g mesurables. □

Exercice 4.3. *Soient* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable et* $(f_k)_{k\geqslant 0}$ *une suite de fonctions mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$*. Mq l'ensemble* $A := \{x \in X$ *s.t.* $\lim_{k\to+\infty} f_k(x)$ *existe*$\}$ *est mesurable.*

Résolution. La limite de la suite $(f_k(x))_{k\geqslant 0}$ existe ssi $f_1 := \limsup_{k\to+\infty} f_k$ et $f_2 := \liminf_{k\to+\infty} f_k$ existent en x et sont identiques. On sait que f_1 et f_2 sont mesurables, et donc que $f_1 - f_2$ l'est également. Or $A = (f_1 - f_2)^{-1}(\{0\})$, donc $A \in \mathcal{A}$. □

Résolution alternative par les suites de Cauchy. À $x \in X$ fixé, la suite $(f_k(x))_{k\geqslant 0}$ est une suite réelle et donc converge ssi elle est de Cauchy, i.e. $\lim_{k\to+\infty} f_k(x)$ existe ssi

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall m, n \geqslant N : \left|f_m(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon.$$

Donc A peut s'écrire comme union/intersection de Boréliens. Pour $m, n \in \mathbb{N}$, posons $f_{m,n} := |f_m - f_n|$. Par mesurabilité des $f_{m,n}$, on observe :

$$A = \left\{x \in X \text{ s.t. } \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall m, n \geqslant N : f_{m,n}(x) < \varepsilon\right\} = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}^{*+}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{m,n \geqslant N} f_{m,n}^{-1}((\pm\varepsilon)) \in \mathbb{B}.$$

□

Exercice 4.4. *Soient* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Borel-mesurable et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *s.t.* $g \neq f$ *sur un ensemble* D *au plus dénombrable. Mq* g *est Borel-mesurable.*

Résolution. Rappelons d'abord que les singletons sont des fermés et donc des Boréliens. Dès lors, $D \in \mathbb{B}$ et $\mathcal{L}(D) = 0$. De plus, par passage au complémentaire, on sait que $D^{\complement} \in \mathbb{B}$ également. Pour $b \in \mathbb{R}$:

$$g^{-1}((-\infty, b]) = \left[\underbrace{f^{-1}((-\infty, b]) \cap D^{\complement}}_{=:A}\right] \sqcup \left[\underbrace{g^{-1}((-\infty, b]) \cap D}_{=:B}\right].$$

Puisque $B \subseteq D$, on a B au plus dénombrable, et en particulier $B \in \mathbb{B}$. Par mesurabilité de f, on sait que $f^{-1}((-\infty, b]) \in \mathbb{B}$, et puisque $D^{\complement} \in \mathbb{B}$, on déduit que $A \in \mathbb{B}$. Dès lors $g^{-1}((-\infty, b])$ est union de deux Boréliens, et est donc un Borélien. $\square$

> **Exercice 4.5.** *Sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, mq χ_A est mesurable ssi $A \in \mathcal{A}$.*

Résolution. $\underline{\Rightarrow}$: si χ_A est mesurable, alors $A = \chi_A^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{A}$.

$\underline{\Leftarrow}$: si $A \in \mathcal{A}$, alors :
- $\chi_A^{-1}(\{0,1\}) = X \in \mathcal{A}$ et $\chi_A^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$ puisque $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre sur X ;
- $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A \in \mathcal{A}$ par hypothèse ;
- et $\chi_A^{-1}(\{0\}) = A^{\complement} \in \mathcal{A}$ par passage au complémentaire.

$\square$

> **Exercice 4.6.** *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Mq f^+ et f^- sont mesurables.*

Résolution. Trivial : min et max de fonctions mesurables sont mesurables et la fonction $\mathbf{0} : X \to \{0\} : x \mapsto 0$ est constante donc mesurable. $\square$

> **Exercice 4.7.** *Mq* $f : [0,1) \to [0,1) : x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1/2) \\ 2x-1 & \text{si } x \in [1/2,1) \end{cases}$ *est mesurable.*
>
> *Mq pour tout $E \subseteq [0,1)$ mesurable : $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(f^{-1}(E))$.*

Résolution. Soit $M \subseteq [0,1)$ mesurable.

$f^{-1}(M) = (f^{-1}(M) \cap [0,1/2)) \sqcup (f^{-1}(M) \cap [1/2,1)) = \{x \in [0,1/2) \text{ s.t. } f(x) \in M\} \sqcup \{x \in [1/2,1) \text{ s.t. } f(x) \in M\}$.

Notons respectivement M_1 et M_2 ces deux ensembles. $M_1 = \{x \in [0,1/2) \text{ s.t. } 2x \in M\} = \{x/2\}_{x \in M} \in \mathcal{M}$ et $M_2 = \{x \in [1/2,1) \text{ s.t. } 2x-1 \in M\} = \{(1+x)/2\}_{x \in M} \in \mathcal{M}$ car la transformation affine d'un ensemble $\mathcal{L}$-mesurable est $\mathcal{L}$-mesurable. Donc $f^{-1}(M) = M_1 \sqcup M_2 \in \mathcal{M}$ car $\mathcal{M}$ est une σ-algèbre.

De plus, $\mathcal{L}(f^{-1}M) = \mathcal{L}(M_1 \sqcup M_2) = \mathcal{L}(M_1) + \mathcal{L}(M_2)$. Par invariance par translation de $\mathcal{L}$, on a $\mathcal{L}(M_2) = \mathcal{L}(M_1) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(M)$. Donc $\mathcal{L}(f^{-1}M) = 2\mathcal{L}(M_1) = \mathcal{L}(M)$. $\square$

> **Exercice 4.8** (Vrai ou Faux)**.** *Justifier :*
> 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.t. $f \circ f$ est mesurable. Alors f est mesurable.*
> 2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.t. $|f|$ est mesurable. Alors f est mesurable.*
> 3. *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Alors $g \circ f$ est mesurable.*
> 4. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue presque partout, alors f est mesurable.*

Résolution.
1. Faux. Prenons $N \notin \mathcal{M}$ s.t. $N \cap \{0,1\} = \emptyset$. Alors χ_N n'est pas mesurable, mais $\chi_N \circ \chi_N = \mathbf{0}$ est constante donc mesurable.
2. aux. Prenons à nouveau $N \notin \mathcal{M}$. On pose $f \coloneqq \chi_N - \chi_{N^{\complement}} : \mathbb{R} \to \{-1,+1\}$ où donc $f(x) = 1$ si $x \in N$ et $f(x) = -1$ sinon. f n'est pas mesurable, mais $|f| = \mathbf{1} : \mathbb{R} \to \{1\} : x \mapsto 1$ est constante donc mesurable.

3. Mq continuité implique Borel-mesurabilité. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $b \in \mathbb{R}$: $f^{-1}((-\infty, b))$ est ouvert et est donc borélien. Donc ici g et f sont toutes deux Borel-mesurables et la composition d'applications Borel-mesurables est Borel-mesurable.

4. On pose $N := \{x \in \mathbb{R} \text{ s.t. } f \text{ n'est pas continue en } x\}$. N est négligeable et f est continue sur $\mathbb{R} \setminus N$. On trouve pour $b \in \mathbb{R}$:

$$f^{-1}((-\infty, b)) = \left(f^{-1}((-\infty, b)) \cap N^{\complement}\right) \sqcup \underbrace{\left(f^{-1}((-\infty, b)) \cap N\right)}_{\subseteq N \text{ donc } \in \mathcal{M}}.$$

$\square$

5 Séance 5

Exercice 5.1. *1. Mq la relation $\sim$ définie sur $[0,1]$ par $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ est une relation d'équivalence.*

2. *On note $\hat{x} := \mathbb{R}/\sim$. On pose $F := \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \rho(\hat{x})$ où $\rho(\hat{x})$ est un représentant de $\hat{x}$ (ρ est bien définie par l'axiome du choix). Mq :*

$$[0,1] \subseteq \underbrace{\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (F+q)}_{=:\tilde{F}} \subseteq [-1,2].$$

3. *Mq si $q_1 \neq q_2 \in \mathbb{Q}\cap[-1,1]$, alors $(F+q_1)\cap(F+q_2) = \emptyset$.*
4. *Mq F n'est pas $\mathcal{L}$-mesurable par l'absurde.*

Résolution.

1. $\sim$ est trivialement une relation d'équivalence.
2. $[0,1] \subseteq \tilde{F}$: soit $x \in [0,1]$. Par définition de F : $\exists \tilde{x} \in \hat{x} \cap F$ et $x - \tilde{x} \in \mathbb{Q}$. On a alors $x \in (\mathbb{Q}\cap[-1,1]) + \tilde{x} \subseteq (\mathbb{Q}\cap[-1,1]) + F = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(F+q)$.
   $\tilde{F} \subseteq [-1,2]$: $F \subseteq [0,1]$, et donc :
   $$\tilde{F} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (F+q) \subseteq \bigcup_{y\in[-1,1]} (F+y) \subseteq [-1,2].$$
3. Supposons par l'absurde $\exists \tilde{x} \in (F+q_1)\cap(F+q_2)$. On a alors $\exists y_1, y_2 \in F$ s.t. $y_1 + q_1 = \tilde{x} = y_2 + q_2$. Donc $\tilde{x} - y_1 \in \mathbb{Q} \ni \tilde{x} - y_2$, ou encore $\tilde{x} \sim y_1$ et $\tilde{x} \sim y_2$, et donc par transitivité : $y_1 \sim y_2$, i.e. $\hat{y}_1 = \hat{y}_2$, or F contient exactement un seul représentant de chaque classe d'équivalence, ce qui est une contradiction. Donc $F+q_1$ et $F+q_2$ sont disjoints.
4. Supposons que F soit $\mathcal{L}$-mesurable. On a (par le point 2) :
   $$1 \leqslant \mathcal{L}\left(\bigsqcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (F+q)\right) \leqslant 3.$$
   Or $\forall q \in \mathbb{Q}$: $\mathcal{L}(F+q) = \mathcal{L}(F)$ car $\mathcal{L}$ est invariante par translations.
   — Si $\mathcal{L}(F) = 0$, alors $\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \mathcal{L}(F+q) = 0 \lneqq 1$, ce qui est une contradiction.
   — Donc $\mathcal{L}(F) \gneqq 0$, et donc $\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \mathcal{L}(F+q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \mathcal{L}(F) = +\infty \gneqq 3$, ce qui est également une contradiction.
   On en déduit que F n'est pas $\mathcal{L}$-mesurable.

□

Exercice 5.2 (Ensemble triadique de Cantor)**.** *Pour $k \geqslant 0$, on pose :*

$$A_k := \bigcup_{\alpha\in\{0,2\}^k} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{3^i}\right) + [0, 3^{-k}].$$

On définit l'ensemble triadique de Cantor par $\mathscr{C} := \bigcap_{k\geqslant 0} A_k$.

1. *Mq $\forall k \geqslant 0$: A_k est formé de 2^k intervalles fermés disjoints deux à deux et $\mathcal{L}(A_k) = (2/3)^k$.*
2. *Mq $\mathscr{C}$ est un borélien non vide et de mesure de Lebesgue nulle.*
3. *Mq le développement infini en base 3 est unique ssi les chiffres de la décomposition (notés $a_k : [0,1] \to \{0,1,2\}$ pour le kème chiffre) sont soit 0 soit 2. Mq $x \in \mathscr{C} \iff \forall k \geqslant 0 : a_k(x) \neq 1$.*

4. *En déduire que $\mathscr{C}$ est en bijection avec* $[0,1]$.

Résolution.

1. $\left|\{0,2\}^k\right| = 2^k$, donc A_k est bien composé de 2^k intervalles fermés. Soient $\alpha \neq \beta \in \{0,2\}^k$ et mq :
$$\left[\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{3^i}\right) + [0, 3^{-k}]\right] \cap \left[\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{3^i}\right) + [0, 3^{-k}]\right] = \emptyset.$$
Puisque $\alpha \neq \beta$, on sait que $\exists j \in [\![1,k]\!]$ s.t. $\alpha_j \neq \beta_j$. On pose $\gamma_k : \{0,2\}^k \to [0,1] : \alpha \mapsto \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{3^i}$. Par écriture (**finie !**) en base 3, on a :
$$\gamma(\alpha) = 0.\alpha_1|\alpha_2|\ldots|\alpha_k \qquad \text{et} \qquad \gamma(\beta) = 0.\beta_1|\beta_2|\ldots|\beta_k$$
où $|$ désigne la concaténation, ce qui implique que $\left|\gamma(\alpha) - \gamma(\beta)\right| \gneqq 3^{-k}$. WLOG, on suppose $\gamma(\alpha) < \gamma(\beta)$. On en déduit finalement $\gamma(\alpha) + 3^{-k} \lneqq \gamma(\beta)$, or :
$$\forall x \in \gamma(\alpha) + [0, 3^{-k}] : \gamma(\alpha) \leqslant x \leqslant \gamma(\alpha) + 3^{-k}.$$
Et :
$$\forall x \in \gamma(\beta) + [0, 3^{-k}] : \gamma(\beta) \leqslant x \leqslant \gamma(\beta) + 3^{-k}.$$
On en déduit que $\left(\gamma(\alpha) + [0, 3^{-k}]\right) \cap \left(\gamma(\beta) + [0, 3^{-k}]\right) = \emptyset$.
Et finalement, par additivité de $\mathcal{L}$, on a :
$$\mathcal{L}(A_k) = \sum_{\alpha \in \{0,2\}^k} \mathcal{L}(\gamma(\alpha) + [0, 3^{-k}]) = \sum_{\alpha \in \{0,2\}^k} \mathcal{L}([0, 3^{-k}]) = 2^k 3^{-k} = (2/3)^k.$$
2. $\forall k \geqslant 0 : \{0,1\} \subset A_k$, donc $\mathscr{C} \neq \emptyset$. De plus, $\forall k \geqslant 0 : A_k$ est une union de boréliens et est donc borélien. $\mathscr{C}$ est intersection de boréliens et est donc également un borélien.
De plus la suite $(A_k)_{k\geqslant 0}$ est décroissante, donc par continuité de la mesure : $\mathcal{L}(\mathscr{C}) = \lim_{k\to+\infty} \mathcal{L}(A_k) = 0$. Mq $(A_k)_{k\geqslant 0}$ est décroissante. Fixons $k \geqslant 0$. Soit $x \in A_{k+1}$, mq $x \in A_k$. On sait que $\exists! \alpha \in \{0,2\}^{k+1}$ s.t. $x \in \gamma(\alpha) + [0, 3^{-k}]$. On pose $\tilde{\alpha} \in \{0,2\}^k$ s.t. $\forall j \in [\![1,k]\!] : \tilde{\alpha}_j = \alpha_j$. On a donc :
$$\gamma_k(\tilde{\alpha}) \leqslant \gamma_{k+1}(\alpha).$$
Mais on a également :
$$\gamma_k(\tilde{\alpha}) + 3^{-k} \geqslant \gamma_{k+1}(\alpha) + 3^{-k-1}$$
car :
$$\underbrace{(\gamma_k(\tilde{\alpha}) - \gamma_{k+1}(\alpha))}_{\geqslant -2\cdot 3^{-k-1}} + \underbrace{(3^{-k} - 3^{-k-1})}_{=2\cdot 3^{-k-1}} \geqslant 0.$$
Donc les A_k forment bien une suite décroissante.
3. On remarque que pour $\alpha \in \{0,2\}^k : x \in A_k \iff \{a_j(x)\}_{j=1}^k \subseteq \{0,2\}$. Et puisque $\mathscr{C} = \bigcap_{k\geqslant 0} A_k$:
$$x \in \mathscr{C} \iff x \in \bigcap_{k\geqslant 0} A_k \iff \forall k \geqslant 0 : \{a_j(x)\}_{j=1}^k \subseteq \{0,2\} \iff \{a_j(x)\}_{j\geqslant 0} \subseteq \{0,2\}.$$
4. On a alors $x \in \mathscr{C} \iff x = \sum_{k\geqslant 1} \frac{a_k(x)}{3^k}$ où les $a_k(x) \neq 1$, i.e. $a_k(x) \in \{0,2\}$. On peut alors poser :
$$\theta : \to [0,1] : x = \sum_{k\geqslant 1} \frac{a_k(x)}{3^k} \mapsto \sum_{k\geqslant 1} \frac{a_k(x)}{2^{k+1}},$$
qui est une bijection entre $\mathscr{C}$ et $[0,1]$. On en déduit que $|\mathscr{C}| = \left|[0,1]\right|$, et donc $\mathscr{C}$ est non-dénombrable.

$\square$

Exercice 5.3. *On définit la bijection* $f = \theta^{-1}$ *(inverse de la bijection ci-dessus).*

1. *Mq* f *est strictement croissante et est non-continue.*
2. *Soit* $E \subset [0,1]$ *un ensemble non-mesurable au sens de Lebesgue. Mq* $f(E)$ *est* $\mathcal{L}$*-mesurable mais non Borélien.*

Résolution. Attention : résolution erronée. Il est montré que $[0,1]$ et $\mathscr{C}$ ne sont pas homéomorphes, et pas que f n'est pas continue.

1. f est trivialement strictement croissante par construction, et f n'est pas continue car $\mathscr{C}$ n'est pas connexe donc $\mathscr{C}$ n'est pas homéomorphe à $[0,1]$.

   Mq $\mathscr{C}$ n'est pas connexe : il faut trouver U, V ouverts pour la topologie induite de $\mathscr{C}$ par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ tels que $U \cap V = \emptyset$ et $U \cup V = \mathscr{C}$. Pour cela on prend arbitrairement $x \in [0,1] \setminus \mathscr{C}$ (par exemple $x = 1/2$) et on définit :
   — $U \coloneqq (-1, x) \cap \mathscr{C}$;
   — $V \coloneqq (x, 2) \cap \mathscr{C}$.
   U et V sont bien des ouverts pour la topologie induite car $(-1, x)$ et $(x, 2)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$. De plus :
   — $U \cap V = (-1, x) \cap \mathscr{C} \cap (x, 2) \cap \mathscr{C} = \emptyset$;
   — $U \cup V = \big((-1, x) \cup (x, 2)\big) \cap \mathscr{C} = (-1, 2) \cap \mathscr{C} \setminus \{x\} = \mathscr{C}$.

2. Soit $E \subseteq [0,1]$ quelconque. $f(E) \subseteq \mathscr{C}$ donc $f(E)$ est $\mathcal{L}$-négligeable. Or $\mathcal{L}$ est complète donc $f(E)$ est mesurable.

$\square$

6 Séance 6

Exercice 6.1. *Soient* $X \neq \emptyset$, $a \in X$ *et* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. *Dans l'espace mesuré* $(X, \mathcal{A}, \delta_a)$, *montrons que pour* $f : X \to \mathbb{R}^+$ *mesurable :*

$$\int_X f \, d\delta_a = f(a).$$

<u>*Résolution*</u>. Supposons d'abord f positive. Soit $g \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$. Pour $(a_i)_{i=1}^k$ les valeurs prises par g, par définition on a :

$$\int g \, d\delta_a = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(g^{-1}(\{a_i\})) = a_\ell \delta_a(g^{-1}(\{a_\ell\})) = a_\ell = g(a)$$

où $a_\ell = g(a)$. Dès lors, par définition de l'intégrale d'une fonction positive mesurable :

$$\int f \, d\delta_a = \sup_{\substack{g \in \mathcal{S}^+ \\ g \leqslant f}} \int g \, d\delta_a.$$

On sait que $f(a)$ majore tous les $g(a)$ pour $g \in \mathcal{S}^+$ s.t. $g \leqslant f$ donc $\int f \, d\delta_a \leqslant f(a)$. De plus pour $\tilde{g} = f(a)\chi_{\{a\}}$, on a $\tilde{g} \in \mathcal{S}^+$ et $\tilde{g} \leqslant f$, or $\int \tilde{g} \, d\delta_a = \tilde{g}(a) = f(a)$. Donc $\int f \, d\delta_a \geqslant f(a)$. On a alors bien l'égalité.

Dans le cas général où f n'est pas non-négative, soit $f(a) \geqslant 0$ et donc f est égale à une fonction positive δ_a-ae, soit $f(a) < 0$ et donc $\int f^+ \, d\delta_a = 0$, donc $\int f \, d\delta_a = -\int f^- \, d\delta_a = -f^-(a) = f(a)$. □

Exercice 6.2. *Sur l'espace mesurable* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, *on définit la mesure de Lebesgue* $\mathcal{L}$ *et la mesure* μ *suivante :*

$$\mu : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{R}}^+ : B \mapsto \sum_{k \in B \cap \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + (k+1)^2}.$$

Déterminer si les fonctions suivantes sont intégrables :

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = 0 \\ \ln|x| & \text{si } 0 < |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 1} & \text{si } |x| < 1 \text{ et } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{si } |x| < 1 \text{ et } x \in \mathbb{Q}^\complement \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

$$h(x) \equiv 1$$

pour les mesures $\mathcal{L}$ *et* μ *comme défini ci-dessus (pour* f *et* h*).*

<u>*Résolution*</u>.

- Pour la fonction f :
  - $\mathcal{L}$ Utilisons le théorème de convergence monotone, i.e. construisons une suite croissante $(f_n)_{n \geqslant 1}$ d'applications mesurables telle que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \tilde{f}$ (où $\tilde{f} = f\big|_{(0,1)} = f\chi_{(0,1)}$). Pour $n \geqslant 1$, posons :

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -\chi_{(\frac{1}{n}, 1)}(x) \ln x.$$

f_n est majorée par $x \mapsto \chi_{(1/n,1)}(x) \sup_{y\in(1/n,1)} -\ln(y) = \chi_{(1/n,1)} \ln(n)$ qui est intégrable. On en déduit que f_n est intégrable.[3] Par l'exercice 7.1, une fonction bornée Riemann-intégrable est Lebesgue-intégrable et les intégrales coïncident. On a donc :

$$\int f_n \, d\mathcal{L} = \int_{\frac{1}{n}}^{1} -\ln(x)\, dx = 1 - \frac{\ln n + 1}{n}.$$

En appliquant le théorème de convergence monotone, on trouve :

$$\int f \, d\mathcal{L} = \lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mathcal{L} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1+\ln n}{n}\right) = 1.$$

De manière similaire, on trouve que $\int f\chi_{(-1,0)}\, d\mathcal{L} = 1$, et on en déduit :

$$\int f \, d\mathcal{L} = \int f\chi_{(-1,0)}\, d\mathcal{L} + \int f\chi_{(0,1)}\, d\mathcal{L} = 1 + 1 = 2.$$

μ : $f = \chi_{(-1,1)\setminus\{0\}} \ln|\cdot| + (+\infty)\chi_{\{0\}}$. Donc $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R} \setminus (-1,1)$. Or $(-1,1) \cap \mathbb{Z} = \{0\}$. Donc $f = +\infty\chi_{\{0\}}$ μ-ae où $x \mapsto +\infty\chi_{\{0\}}(x) \in \mathcal{S}^+$. On trouve donc :

$$\int f \, d\mu = \int +\infty\chi_{\{0\}}\, d\mu = +\infty\mu(\{0\}) = +\infty \cdot \frac{1}{1+1} = +\infty.$$

On peut également remarquer que pour $g \in \mathcal{S}^+$ s.t. $g \lneqq f$:

$$\int g \, d\mu = \int g\chi_{\{0\}}\, d\mu = g(0)\frac{1}{2}.$$

Donc $\sup\{\int g\, d\mu \text{ s.t. } g \in \mathcal{S}^+, g \lneqq f\}$ n'est pas borné.

— Pour la fonction g : $g = |x|^{-1/2}\chi_{(-1,+1)} + x^{-2}\chi_{(-\infty,1]\cup[1,+\infty)}$ $\mathcal{L}$-ae et ces deux fonction sont Riemann-intégrables. Donc g est $\mathcal{L}$-intégrable et :

$$\int g \, d\mathcal{L} = 2\left(\int_0^1 x^{-1/2}\, dx + \int_1^{+\infty} x^{-2}\, dx\right) = 2(2+1) = 6.$$

— Pour la fonction $h \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$:
$\mathcal{L}$: h n'est pas $\mathcal{L}$-intégrable car $\int h\, d\mathcal{L} = 1\mathcal{L}(\mathbb{R}) = +\infty$.
μ : h est μ-intégrable car :

$$\begin{aligned}\int h\, d\mu = \mu(\mathbb{R}) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+(k+1)^2} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{1+(k-1)^2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+(k+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{1+k^2} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{1+k^2} = \frac{1}{2} + 2\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{1+k^2} \leqslant \frac{1}{2} + 2\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^{-2} \\ &= \frac{1}{2} + 2\zeta(2) = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{3} < +\infty.\end{aligned}$$

□

Exercice 6.3. *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables telles que :*

$$f_1 \geqslant f_2 \geqslant f_3 \geqslant \ldots \geqslant 0.$$

3. Ainsi, toute fonction bornée définie sur un ensemble de mesure finie est intégrable.

On définit $f := \lim_{k\to+\infty} f_k$ *la limite point par point. Mq si* $f_1 \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$*, alors :*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Donner un contre-exemple avec $f_1 \notin L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

<u>*Résolution*</u>. Pour $n \geqslant 2$: $f_n \leqslant f_1$ donc f_n est intégrable car majorée par une fonction intégrable. Par la convergence dominée, on a f intégrable également et $\int f_k \, d\mu \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int f \, d\mu$.

Pour un contre-exemple, prenons la suite constante $f_k : x \mapsto x^{-1}$. $\forall x \in X : f_k(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} x^{-1}$ qui n'est pas intégrable. □

Exercice 6.4. *Supposons* $\mu(X) \lneqq +\infty$. *Soit* $(f_k)_{k\geqslant 0}$ *une suite de fonctions mesurables positives sur* X *telles que* $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\text{CVU } \textit{sur } X} f$. *Mq si* $\forall k \geqslant 0 : f_k \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$*, alors :*

$$f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \qquad \textit{et} \qquad \lim_{k\to+\infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

<u>*Résolution*</u>. À $n > 0$ fixé, on a :

$$f = |f| = |f_n + f - f_n| \leqslant |f_n| + |f - f_n|.$$

Dès lors, par monotonie de l'intégrale :

$$\int f \, d\mu \leqslant \int f_n \, d\mu + \int |f - f_n| \, d\mu.$$

La convergence uniforme revient à dire :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N > 0 \text{ s.t. } \forall n > N : \sup_{x\in X} |f - f_n|(x) < \varepsilon.$$

En particulier, il existe $N > 0$ s.t. $\forall n > N : \sup_{x\in X} |f - f_n|(x) < 1$. Dès lors pour $n > N$:

$$\int f \, d\mu \leqslant \int f_n \, d\mu + \int |f - f_n| \, d\mu \leqslant \int f_n \, d\mu + \mu(X) < +\infty$$

car $f_n \in L^1$ et $\mu(X) < +\infty$.

On en déduit $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. De plus :

$$\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| = \left| \int (f_n - f) \, d\mu \right| \leqslant \int |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

i.e. $\int f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int f \, d\mu$. □

Exercice 6.5. *On définit pour* $k \geqslant 0$ *:*

$$\alpha_k := \int_0^k \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \exp(x/2) \, dx \qquad \textit{et} \qquad \beta_k := \int_0^k \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \exp(-2x) \, dx.$$

Calculer $\alpha := \lim_{k\to+\infty} \alpha_k$ *et* $\beta := \lim_{k\to+\infty} \beta_k$.

Résolution. On pose $f_k(x) := \left(1-\frac{x}{k}\right)^k e^{x/2}\chi_{[0,k]}(x)$ et $g_k(x) = \left(1+\frac{x}{k}\right)^k e^{-2x}\chi_{[0,k]}(x)$. Puisque $f_k(x) \nearrow e^{-x/2}\chi_{\mathbb{R}^+}(x)$ et $g_k(x) \nearrow e^{-x}\chi_{\mathbb{R}^+}(x)$ (deux limites $\in L^1$), par la convergence dominée, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \alpha_k = \lim_{k\to+\infty} \int f_k \, d\mu = \int \lim_{k\to+\infty} f_k \, d\mu = [2e^{x/2}]_{-\infty}^{0} = 2,$$

et :

$$\lim_{k\to+\infty} \beta_k = \lim_{k\to+\infty} \int g_k \, d\mu = \int \lim_{k\to+\infty} g_k \, d\mu = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1.$$

□

Exercice 6.6. *Soit* $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. *Mq :*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \textit{ s.t. } \forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| \, d\mu < \varepsilon.$$

Résolution. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ s.t. :

$$\forall n > 0 : \exists A_n \in \mathcal{A} \text{ s.t. } \mu(A_n) < \frac{1}{n} \text{ et } \int_{A_n} f \, d\mu \geqslant \varepsilon.$$

Posons $f_n := f\chi_{A_n}$. $\forall n > 0 : |f_n| \leqslant |f|$ et $|\lim_{n\to+\infty} f_n| \leqslant |f|$ et ces applications sont mesurables. Donc par la convergence dominée, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n\to+\infty} f_n \, d\mu.$$

Mq $\lim_{n\to+\infty} f_n = 0$ μ-ae. Soit $N := \{\lim_{n\to+\infty} f_n \neq 0\}$. Sur $N^{\complement}$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$. Dès lors :

$$\exists K > 0 \text{ s.t. } \forall x \in N : \forall n > K : x \in A_n,$$

et donc : $\forall n > K : N \subset A_n$, ce qui implique $\forall n > K : \mu(N) \leqslant \mu(A_n) < \frac{1}{K}$, i.e. $\mu(A) = 0$.

Finalement, on déduit :

$$\varepsilon \geqslant \lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n\to+\infty} f_n \, d\mu = 0,$$

ce qui est une contradiction. □

7 Séance 7

Exercice 7.1. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *bornée. Mq :*

1. *si* f *est Riemann-intégrable, alors* f *est Lebesgue-intégrable et :*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\mathcal{L}.$$
2. *les fonctions* h *et* H *définies ci-dessous sont bien définies et* $h \leqslant f \leqslant H$ *sur* $[a, b]$ *:*
$$h(x) = \lim_{\delta\to 0} \inf_{|y-x|<\delta} f(y),$$
$$H(x) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{|y-x|<\delta} f(y).$$
3. f *est continue en* x *ssi* $H(x) = h(x)$.
4. H *et* h *sont Lebesgue-mesurables et :*
$$\int_{[a,b]} H\,d\mathcal{L} = \inf_P U(f; P) \qquad \text{et} \qquad \int_{[a,b]} h\,d\mathcal{L} = \sup_P L(f; P).$$
5. *En déduire que* f *est Riemann-intégrable ssi l'ensemble des discontinuités de* f *est négligeable.*

Résolution.

1. **Notations :** Pour $P = (x_i)_{i=0}^{N_P}$ une partition de $[a, b]$, on pose pour $i \in [\![0, N_P - 1]\!]$: $P(i] \coloneqq (x_i, x_{i+1}]$. On pose également les fonctions :
$$f_P \coloneqq \sum_{j=0}^{N_P-1} m_j \chi_{P(j]} + f(a)\chi_{\{a\}}$$
$$f^P \coloneqq \sum_{j=0}^{N_P-1} M_j \chi_{P(j]} + f(a)\chi_{\{a\}}$$
Pour P une partition de $[a, b]$ et $y \in (a, b)$ s.t. $\forall i \in [\![0, N_P]\!]$, on pose $P \oplus y \coloneqq (x'_j)_{j=0}^{N_P+1}$ où $\exists j \in [\![1, N_P]\!]$ s.t. $x'_j = y$ et $(x'_1, \dots, x'_{j-1}, x'_{j+1}, \dots, x'_{N_P+1}) = P$. Pour deux partitions $P_1 = (x_{1,j})_{j=0}^{N_{P_1}}$ et $P_2 = (x_{2,j})_{j=0}^{N_{P_2}}$, on pose également $P_1 \oplus P_2$ la plus petite partition $(x_j)_{j=0}^{N_P}$ où :
$$\forall j \in [\![0, N_{P_1}]\!] : \forall \ell \in [\![0, N_{P_2}]\!] : \exists i, k \in [\![0, N_P]\!] \text{ s.t. } x_{1,j} = x_i \text{ et } x_{2,\ell} = x_k.$$
Résolution :
Observons que pour une partition P et $y \in (a, b)$, on a :
— $f^{P\oplus y} \leqslant f^P$;
— $f_{P\oplus y} \geqslant f_P$.
En effet, cela découle directement du fait que pour $P \oplus y = (x'_j)_{j=0}^{N_P+1}$ et pour j s.t. $y = x'_j$:
$$\inf_{t\in(x_j,x_{j+1}]} f(t) \geqslant \inf_{t\in(x_{j-1},x_{j+1}]} f(t) \quad \text{et} \quad \inf_{t\in(x_{j-1},x_j]} f(t) \geqslant \inf_{t\in(x_{j-1},x_{j+1}]} f(t).$$
On déduit similairement pour le sup :
$$\sup_{t\in(x_j,x_{j+1}]} f(t) \leqslant \sup_{t\in(x_{j-1},x_{j+1}]} f(t) \quad \text{et} \quad \sup_{t\in(x_{j-1},x_j]} f(t) \leqslant \sup_{t\in(x_{j-1},x_{j+1}]} f(t).$$

Ainsi, on remarque que pour deux partitions P_1 et P_2, on a les inégalités suivantes par le même raisonnement :
— $f^{P_1 \oplus P_2} \leqslant f^{P_1}$;
— $f_{P_1 \oplus P_2} \geqslant f_{P_1}$.
Par définition du sup, il existe une suite de partitions $(P'_n)_{n \geqslant 0}$ s.t. $U(f; P'_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \inf_P U(f; P)$ et une suite de partitions $(\tilde{P}_n)_{n \geqslant 0}$ s.t. $L(f; \tilde{P}_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sup_P L(f; P)$. Du plus les suites $(U(f; P'_n))_{n \geqslant 0}$ et $(L(f; \tilde{P}_n))_{n \geqslant 0}$ sont respectivement décroissante et croissante. Par la remarque ci-dessus, on remarque que si on pose $P_n \coloneqq P'_n \oplus \tilde{P}_n$, on obtient une suite de partitions $(P_n)_n$ telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} U(f; P_n) = \inf_P U(f; P) = \sup_P L(f; P) = \lim_{n \to +\infty} L(f; P_n).$$

En particulier : $U(f; P_n) - L(f; P_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
Remarquons ensuite que les f_{P_n} sont des applications mesurables puisque des des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques sur des boréliens (en effet les intervalles ouverts à gauches sont des boréliens et le singleton $\{a\}$ en est un également). De plus :

$$\int_{[a,b]} f_{P_n} \, d\mathcal{L} = L(f; P_n) \quad \text{ et } \quad \int_{[a,b]} f^{P_n} \, d\mathcal{L} = U(f; P_n).$$

Puisque $U(f; P_n) - L(f; P_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, on a $\int_{[a,b]} (f^{P_n} - f_{P_n}) \, d\mathcal{L} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Du coup $\lim_{n \to +\infty} (f^{P_n} - f_{P_n}) = 0$ $\mathcal{L}$-ae, i.e. $f_{P_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}\text{-ae}} f$
Dès lors, par le théorème de la convergence monotone, on a que f est mesurable et que :

$$\int_{[a,b]} f \, d\mathcal{L} = \int_{[a,b]} \lim_{n \to +\infty} f_{P_n} \, d\mathcal{L} = \lim_{n \to +\infty} \int_{[a,b]} f_{P_n} \, d\mathcal{L} = \lim_{n \to +\infty} L(f; P_n) = \sup_P L(f; P) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

2. Puisque f est bornée, pour tout $x \in [a, b]$, $\delta \gneqq 0$, on a bien :

$$\left| \inf_{y \in B_\delta(x) \cap [a,b]} f(y) \right| \lneqq +\infty \quad \text{ et } \quad \left| \sup_{y \in B_\delta(x) \cap [a,b]} f(y) \right| \lneqq +\infty.$$

   De plus, pour tout $x \in [a, b]$, $\delta \gneqq 0$:

$$\inf_{y \in B_\delta(x) \cap [a,b]} f(y) \leqslant f(x) \leqslant \sup_{y \in B_\delta(x) \cap [a,b]} f(y).$$

3. <u>$\Leftarrow$:</u> $H(x) = h(x)$ est équivalent à :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ s.t. } \forall \gamma > 0 : \gamma \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow \sup_{y \in B_\gamma(x)} f(y) - \inf_{y \in B_\gamma(x)} f(y) \leqslant \varepsilon.$$

   En particulier, à $\varepsilon > 0$ fixé, pour $y \in [a, b]$, si $|x - y| \leqslant \delta_\varepsilon$, alors :

$$\left| f(x) - f(y) \right| \leqslant \sup_{z \in B_{\delta_\varepsilon}(x)} f(z) - \inf_{z \in B_{\delta_\varepsilon}} f(z) \leqslant \varepsilon.$$

   On a donc bien la continuité de f en x.
   <u>$\Rightarrow$:</u> à $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\delta > 0$ s.t. $|x - y| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - f(y) \right| < \varepsilon$. Donc :

$$\begin{aligned} \sup_{y \in B_\delta(x)} f(y) - \inf_{y \in B_\delta(x)} f(y) &= \left(\sup_{y \in B_\delta(x)} f(y) - f(x) \right) - \left(\inf_{y \in B_\delta(x)} f(y) - f(x) \right) \\ &\leqslant \left| \sup_{y \in B_\delta(x)} f(y) - f(x) \right| + \left| f(x) - \inf_{y \in B_\delta(x)} f(y) \right| \leqslant 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Or cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit que $H(x) - h(x) = 0$.

4. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, remarquons :

$$\overbrace{f^{-1}((-\infty,\beta])}^{\circ} = \{\xi \in [a,b] \text{ s.t. } \exists r_\xi > 0 \text{ s.t. } B_{r_\xi}(\xi) \subseteq f^{-1}((-\infty,\beta])\}.$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
& x \in H^{-1}((-\infty,\beta]) \\
\iff & H(x) \leqslant \beta \\
\iff & \lim_{\delta\to 0} \sup_{y\in B_\delta(x)} f(y) \leqslant \beta \\
\iff & \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall y \in B_\delta(x) : f(y) \leqslant \beta \\
\iff & \exists \delta > 0 \text{ s.t. } B_\delta(x) \subseteq f^{-1}((-\infty,\beta]) \\
\iff & x \in \overbrace{f^{-1}((-\infty,\beta])}^{\circ},
\end{aligned}$$

i.e. H est mesurable car l'intérieur d'un ensemble est un ouvert.

De manière similaire, on a $x \in h^{-1}([\alpha,+\infty)) \iff x \in \overbrace{f^{-1}([\alpha,+\infty)}^{\circ}$. Donc h est également mesurable.
Remarquons ensuite que pour toute partition P : $H \leqslant f^P$ sur $[a,b] \setminus P$ et donc $H \leqslant f^P$ $\mathcal{L}$-ae. Par monotonie de l'intégrale :

$$\int H \, d\mathcal{L} \leqslant \int f^P \, d\mathcal{L}.$$

En particulier :

$$\int H \, d\mathcal{L} \leqslant \inf_P \int f^P \, d\mathcal{L}.$$

Reconsidérant maintenant la suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ s.t. $U(f;P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf_P U(f;P)$ et $L(f;P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup_P L(f;P)$ et supposons la croissante (ce qui n'est pas abusif : il suffit de poser la suite de partitions $\hat{P}_0 := P_0$ et $\hat{P}_n := \hat{P}_{n-1} \oplus P_n$ qui est croissante au sens de l'inclusion et qui satisfait les limites puisque $f^{\hat{P}_n} \leqslant f^{P_n}$ et $f_{\hat{P}_n} \geqslant f_{P_n}$). Pour toute partition P et pour tout $x \in [a,b] \setminus P$, on note $j_{P,x} \in [\![0, N_P - 1]\!]$ s.t. $x \in P(j_{P,x}]$. Fixons alors $x \in [a,b] \setminus \bigcup_{n\geqslant 0} P_n$ (i.e. $\forall n \geqslant 0 : x \notin P_n$).
Séparons deux cas :
si $\mathcal{L}(P_n(j_{P_n,x}]) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: $\forall \delta > 0 : \exists N > 0$ s.t. $P_N(j_{P_N,x}] \subset B_\delta(x)$. Posons une suite $(\delta_n)_{n\geqslant 0}$ décroissante vers 0 et posons $H_n(x) := \sup_{y\in B_{\delta_n}(x)} f(y)$.
On remarque que $\forall n \geqslant 0 : \exists K > 0$ s.t. $\forall k \geqslant K : H_n(x) \geqslant f^{P_k}(x) \geqslant H(x)$. Or $H_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} H(x)$, et donc $f^{P_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} H(x)$.
sinon : $\forall (\alpha,\beta] \subset \bigcap_{n\geqslant 0} P_n(j_{P_n,x}] : \exists K > 0$ s.t. $\forall k \geqslant K$:

$$\sup_{y\in(\alpha,\beta]} f(y) = \sup_{y\in P_k(j_{P_k,x}]} f(y).$$

En effet, s'il existe $(\alpha,\beta]$ qui ne satisfait pas la propriété, alors les P_n pourraient être raffinés par la suite $(P'_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $P'_n := P_n \oplus \alpha \oplus \beta$. Dans ce cas : $f^{P_n} \geqslant f^{P'_n}$ ce qui contredit :

$$U(f;P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf_P U'f;P).$$

On déduit donc :

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{y\in B_\delta(x)} f(y) = \sup_{y\in\bigcap_{n\geqslant 0} P_n(j_{P_n,x})} f(y),$$

i.e. :

$$H(x) = \lim_{\delta\to 0}\sup_{y\in B_\delta(x)} f(y) = \sup_{y\in\bigcap_{n\geqslant 0} P_n(j_{P_n,x})} f(y) = \lim_{n\to+\infty} f^{P_n}(x).$$

On déduit de ces deux cas $f^{P_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}\text{-ae}} H$ et donc :

$$\int H\,d\mathcal{L} = \lim_{n\to+\infty}\int f^{P_n}\,d\mathcal{L} = \inf_P U(f;P).$$

On déduit similairement le cas $\int h\,d\mathcal{L} = \sup_P L(f;P)$.

5. f est Riemann-intégrable $\iff \int H\,d\mathcal{L} = \int h\,d\mathcal{L} \iff \int(H-h)\,d\mathcal{L} = 0 \iff H = h$ $\mathcal{L}$-ae et donc $\iff \mathcal{L}(\{x\in[a,b] \text{ s.t. } H(x)\neq h(x)\}) = 0$, i.e. f est continue $\mathcal{L}$-ae.

□

Exercice 7.2.

1. *Mq si* $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ *est Riemann-intégrable et bornée sur* $[a,b]$ *pour tous* $b > a$*, alors :*

$$\int_{[a,+\infty)} f\,d\mathcal{L} = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

2. *Mq si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est Riemann-intégrable et bornée sur* $[c,b]$ *pour tous* $c\in(a,b)$*, alors :*

$$\int_{[a,b]} f\,d\mathcal{L} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Résolution.

1. Posons la suite croissante de fonctions $f_n := f\chi_{[a,a+n]}$. Puisque les f_n sont bornées et Riemann-intégrables (par hypothèse), par l'exercice précédent, on sait que les f_n sont mesurables et que $\int_{[a,a+n]} f\,d\mathcal{L} = \int_a^{a+n} f(x)\,dx$. Puisque $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$, on a que f est mesurable. De plus, par le théorème de la convergence monotone :

$$\int f\,d\mathcal{L} = \lim_{n\to+\infty}\int f_n\,d\mathcal{L} = \lim_{n\to+\infty}\int_a^{a+n} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

2. De manière similaire, on pose la suite croissante de fonctions $f_n := f\chi_{[a+\frac{1}{n},b]}$ qui converge vers f sur $(a,b]$ (donc $\mathcal{L}$-ae). Puisque les f_n sont mesurables, on déduit à nouveau que f est mesurable également et par la convergence monotone :

$$\int f\,d\mathcal{L} = \lim_{n\to+\infty}\int f_n\,d\mathcal{L} = \lim_{n\to+\infty}\int_{a+\frac{1}{n}}^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Exercice 7.3. $\mathbb{Q}$ *est dénombrable donc* $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ *l'est aussi. Donc* $\mathbb{Q}\cap[0,1] = \{q_k\}_{k\geqslant 0}$*. Pour* $k\geqslant 0$*, on définit :*

$$f_k : [0,1]\to\mathbb{R} : x\mapsto\begin{cases}1 & \textit{si } x\in\{q_\ell\}_{\ell=0}^k\\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$$

1. *Mq* $\forall k \geqslant 0 : f_k$ *est Riemann-intégrable et déterminer :*

$$\int_0^1 f_k(x)\, dx.$$

2. *Mq* $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\text{CVS } sur\ [0,1]} f$. *Que peut-on en déduire ?*
3. *Mq* f *est Lebesgue-intégrable et vérifier les hypothèses du théorème de la convergence dominée.*

<u>*Résolution*</u>.

1. À k fixé, f_k est bornée sur son compact de définition et est continue sur $[0,1] \setminus \{q_\ell\}_{\ell=0}^k$, donc f_k est Riemann-intégrable. De plus :

$$\int_0^1 f_k(x)\, dx = \sum_{\ell=1}^k \int_{q_{\ell-1}}^{q_\ell} f_k(x)\, dx = \sum_{\ell=1}^k 0 = 0.$$

De manière plus élégante, remarquons que f_k est la fonction caractéristique d'un ensemble de mesure nulle, donc f_k est mesurable et de plus :

$$\int f_k\, d\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{q_\ell\}_{\ell=0}^k) = 0,$$

donc f_k est Lebesgue-intégrable. De plus f_k est bornée sur son compact de définition (qui est forcément de mesure finie), donc f_k doit être Riemann-intégrable.

2. Soit $x \in [0,1]$. Si $x \in \mathbb{Q}^\complement$, alors $\forall k \geqslant 0 : f_k(x) = 0$. Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $\exists K \geqslant 0$ s.t. $x = q_K$, ce qui implique $\forall k \geqslant K : f_k(x) = 1$. Donc $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. Notons que f_k converge simplement mais pas uniformément. En effet :

$$\forall k \geqslant 0 : \sup_{x\in[0,1]} \left| f_k(x) - \chi_{\mathbb{Q}}(x) \right| = 1.$$

Puisque $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas Riemann-intégrable, on a l'existence d'une fonction $\mathcal{L}$-intégrable mais pas R-intégrable.

3. Voir la remarque ci-dessus pour l'intégrabilité au sens de Lebesgue. Les f_k sont bien mesurables et $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \leqslant \chi_{[0,1]}$ qui est intégrable. Donc par la convergence dominée, on a bien $\int f\, d\mathcal{L} = 0$.

□

8 Séance 8

Exercice 8.1. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré.*

1. *Si* $\mu(X) \gneqq +\infty$, *mq si* p *et* q *sont des réels tels que* $1 \leqslant q \gneqq p \gneqq +\infty$, *alors :*
$$L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \subset L^q(X, \mathcal{A}, \mu) \subset L^1(X, \mathcal{A}, \mu).$$
2. *Considérons la fonction suivante :*
$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^{\frac{-1}{q}} & \textit{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \textit{sinon}. \end{cases}$$
Mq $u \in L^p(\mathbb{R}) \setminus L^q(\mathbb{R})$.
3. *Considérons la fonction suivante :*
$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^{\frac{-1}{p}} & \textit{si } x \in (0, 1] \\ 0 & \textit{sinon}. \end{cases}$$
Mq $u \in L^q(\mathbb{R}) \setminus L^p(\mathbb{R})$.

Résolution.

1.
$L^\infty \subseteq L^p$: Soit $f \in L^\infty$. μ étant une mesure finie, les ensembles μ-négligeables et localement-μ-négligeables coïncidente. Il existe donc $C \geqslant 0$ s.t. $\mu(\{x \in X \text{ s.t. } \left|f(x)\right| > C\}) = 0$. Notons cet ensemble N. On a alors :
$$\int |f|^p \, d\mu = \int_N |f|^p \, d\mu + \int_{N^\complement} f^p \, d\mu \leqslant C^p \mu(N^\complement) = C^p \mu(X) < +\infty.$$
$L^p \subseteq L^q$: Soit $f \in L^p$. On remarque que $|f|^q \in L^{\frac{p}{q}}$ avec $\frac{p}{q} > 1$. De plus, puisque $\mu(X) < +\infty$, les fonctions constantes sont intégrables (car dans L^∞). En particulier $\mathbf{1} : x \mapsto 1$ est dans $L^{\frac{p}{p-q}}$. Par Hölder :
$$\int |f|^q \, d\mu = \int |f|^q |\mathbf{1}| \, d\mu \leqslant \left\| |f|^q \right\|_{L^{\frac{p}{q}}} \underbrace{\|\mathbf{1}\|_{L^{\frac{p}{p-q}}}}_{=\mu(X) < +\infty}.$$
Or :
$$\left[\int \left(|f|^q\right)^{\frac{p}{q}} d\mu\right]^{\frac{q}{p}} = \left[\int |f|^p \, d\mu\right]^{\frac{q}{p}} = \left[\left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]^q = \|f\|_{L^p}^q < +\infty.$$
Donc $f \in L^q$.
$L^q \subseteq L^1$: Soit $f \in L^q$. $f = f\chi_A + f\chi_{A^\complement}$ où $A = \{x \in X \text{ s.t. } \left|f(x)\right| \geqslant 1\}$. Donc :
$$\int |f| \, d\mu = \int_A |f| \, d\mu + \int_{A^\complement} |f| \, d\mu \leqslant \int_A |f|^q \, d\mu + \int_{A^\complement} 1 \, d\mu \leqslant \|f\|_{L^q}^q + \mu(A^\complement) < +\infty.$$
2. $u \in L^p$ pour $p > q$ car :
$$\int u^p \, d\mathcal{L} = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t x^{-\frac{p}{q}} \, dx = \frac{-q}{p-q} \lim_{t \to +\infty} \left(t^{-\frac{p-q}{q}} - 1\right) = \frac{q}{p-q}$$
car $\frac{p-q}{q} > 0$ et donc $t^{-\frac{p-q}{q}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0.$

De plus $u \notin L^q$ car :

$$\int u^q \, d\mathcal{L} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t x^{-1} \, dx = \lim_{t\to+\infty} \ln(t) = +\infty.$$

3. $\nu \in L^q$ pour $q < p$ car :

$$\int \nu^q \, d\mathcal{L} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 x^{-\frac{q}{p}} \, dx = \frac{q}{p-q} \lim_{\varepsilon\to 0} \left(1 - \varepsilon^{\frac{p-q}{q}}\right) = \frac{q}{p-q}$$

car $\frac{p-q}{q} > 0$.

De plus $\nu \notin L^p$ car :

$$\int \nu^p \, d\mathcal{L} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 x^{-1} \, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln \varepsilon = +\infty.$$

□

Exercice 8.2 (Inégalité de Chebycshev). *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : X \to [0, +\infty)$ *une application mesurable. Mq*

$$\forall \alpha > 0 : \mu\left(\left\{x \in X \textit{ s.t. } f(x) \geqslant \alpha\right\}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int f \, d\mu.$$

De plus, si $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *est une application mesurable croissante, alors :*

$$\forall \alpha > 0 : \mu\left(\left\{x \in X \textit{ s.t. } f(x) \geqslant \alpha\right\}\right) \leqslant \frac{1}{\Phi(\alpha)} \int \Phi(f(x)) \, d\mu(x).$$

Résolution. à $\alpha > 0$ fixé, notons $A_\alpha(f) := \{x \in X \text{ s.t. } f(x) \geqslant \alpha\}$. L'inégalité découle simplement du fait que :

$$\int_X f \, d\mu \geqslant \int_{A_\alpha(f)} f \, d\mu \geqslant \int_{A_\alpha(f)} \alpha \, d\mu = \alpha\mu(A_\alpha(f)).$$

Pour le second point, il suffit de remarquer que $A_\alpha(f) \subset A_{\Phi(\alpha)}(\Phi \circ f)$ puisque Φ est croissante. Donc en appliquant le premier point :

$$\mu(A_\alpha(f)) \leqslant \mu(A_{\Phi(\alpha)}(\Phi \circ f)) \leqslant \frac{1}{\Phi(\alpha)} \int \Phi \circ f \, d\mu.$$

□

Exercice 8.3. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : X \to \mathbb{R}$ *une application mesurable.*

1. *Mq :*

$$\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \geqslant \|f\|_{L^\infty},$$

et donner un exemple où l'inégalité est infinie à gauche et finie à droite.

2. *Supposions qu'il existe* $q \in [1, +\infty)$ *s.t.* $f \in L^q(X)$.
   (a) *Mq* f *est finie* μ*-ae.*
   (b) *Supposons que* $0 \lneqq \|f\|_{L^\infty} \lneqq +\infty$. *Mq si* $p \in (q, +\infty)$, *alors :*

$$\|f\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{q}{p}} \cdot \|f\|_{L^q}^{\frac{q}{p}},$$

et en déduire que :

$$\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^\infty}.$$

(c) *Conclure.*

<u>*Résolution*</u>.

1. Séparons les cas (i) $\|f\|_{L^\infty} = 0$; (ii) $\|f\|_{L^\infty} \lneqq +\infty$ et (iii) $\|f\|_{L^\infty} = +\infty$.
   - Dans le premier cas, puisque $\forall p \geqslant 1 : \|f\|_{L^p} \geqslant 0$, l'inégalité est triviale.
   - Dans le second cas, l'inégalité est… moins triviale.
   Séparons à nouveau deux cas ici : soit $\forall p \geqslant 1 : f \notin L^p(X)$ soit $\exists p \geqslant 1$ s.t. $f \in L^p$. Dans le premier cas, on a donc $\forall p \geqslant 1 : \|f\|_{L^p} = +\infty \geqslant \|f\|_{L^\infty}$, donc ok. Supposons donc alors qu'il existe $\tilde{p} \geqslant 1$ s.t. $f \in L^{\tilde{p}}$. On pose alors une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall n \geqslant 0 : 0 < \varepsilon_n < \|f\|_{L^\infty}$ et $\varepsilon_n \searrow 0$. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose :
   $$\Omega_{\varepsilon_n} \coloneqq \{x \in X \text{ s.t. } |f(x)| \geqslant \|f\|_{L^\infty} - \varepsilon_n\} = f^{-1}\left(\left(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon_n, +\infty\right)\right).$$
   Puisque $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ décroît, la suite $(\Omega_{\varepsilon_n})_{n\geqslant 0}$ décroît également. De plus, par définition du supremum essentiel ($\|f\|_{L^\infty}$), on déduit $\mu(\Omega_{\varepsilon_n}) \gneqq 0$. Maintenant observons que, à $p \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$ fixés :
   $$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\int_{\Omega_{\varepsilon_n}} |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\int_{\Omega_{\varepsilon_n}} \left(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon_n\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon_n\right) \mu(\Omega_{\varepsilon_n})^{\frac{1}{p}}.$$
   Montrons alors que $\mu(\Omega_{\varepsilon_n}) \lneqq +\infty$. Puisque $\|f\|_{L^{\tilde{p}}} \lneqq +\infty$, on sait :
   $$+\infty \gneqq \|f\|_{L^{\tilde{p}}} \geqslant \underbrace{\left(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon_n\right)}_{\lneqq +\infty} \mu\left(\Omega_{\varepsilon_n}\right)^{\frac{1}{\tilde{p}}}.$$
   On a donc obligatoirement $\mu(\Omega_{\varepsilon_n}) \lneqq +\infty$.
   Dès lors, puisque $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : x^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$, par passage à la limite pour n, on a :
   $$\forall p \geqslant 1 : \|f\|_{L^p} \geqslant \|f\|_{L^\infty}.$$
   Dès lors, par passage à la limite (à la lim inf car on ne sait pas si $\|f\|_{L^p}$ converge pour $p \to +\infty$) :
   $$\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \geqslant \|f\|_{L^\infty}.$$
   - Dans le dernier cas, montrons que $\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} = +\infty$. On sait que $\|f\|_{L^\infty} = +\infty$, i.e. :
   $$\forall M \geqslant 0 : \exists A_M \in \mathcal{A} \text{ s.t. } f \geqslant M \text{ sur } A_M \text{ et } \mu(A_M) \gneqq 0.$$
   À nouveau, deux cas sont à distinguer : soit $\forall A \in \mathcal{A} : A \neq \emptyset \Rightarrow \mu(A) = +\infty$, soit $\exists A \in \mathcal{A}$ s.t. $A \neq \emptyset$ et $\mu(A) \lneqq +\infty$.
     (a) Dans le premier cas, $f \neq \mathbf{0}$ dans L^p (où $\mathbf{0}$ est la fonction constante nulle) implique $\forall p \geqslant 1$: $\|f\|_{L^p} = +\infty$ car $\|f\|_{L^\infty} > 0$ et donc pour $p \geqslant 1$:
     $$\int |f|^p \, d\mu \geqslant \int_{\left\{x \in X \text{ s.t. } |f(x)| > \frac{\|f\|_{L^\infty}}{2}\right\}} |f|^p \, d\mu \geqslant \frac{\|f\|_{L^\infty}}{2} \underbrace{\mu\left(\left\{x \in X \text{ s.t. } |f(x)| > \frac{\|f\|_{L^\infty}}{2}\right\}\right)}_{=+\infty} = +\infty.$$
     (b) Dans le second cas, pour tout $M \geqslant 0$, il existe A_M s.t. $f \geqslant M$ sur A_M et $0 \lneqq \mu(A_M) \lneqq +\infty$. Dans ce cas :
     $$\forall p \geqslant 1 : \forall M \geqslant 0 : \|f\|_{L^p} \geqslant \left(\int_{A_M} |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\int_{A_M} M^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = M\mu(A_M)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p \to +\infty$: $\mu(A_M)^{\frac{1}{p}} \to 1$. Dès lors on a :

$$\forall M \geqslant 0 : \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \geqslant M,$$

i.e. :

$$\liminf_{p\to+\infty} = +\infty = \|f\|_{L^\infty}.$$

Mais remarquons que l'inégalité peut être stricte. En effet, dans $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \mathcal{L})$, l'application $\mathbf{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1$ est bien mesurable avec $\|\mathbf{1}\|_{L^\infty} = 1$ (et même $\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbf{1}(x) = 1$). Or pour tout $p \geqslant 1$:

$$\|\mathbf{1}\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} 1 \, d\mathcal{L}\right)^{\frac{1}{p}} = +\infty.$$

2.

(a) On sait que $f \in L^1 \Rightarrow |f| \lneqq +\infty$ μ-ae. Or :

$$f \in L^q \iff \int |f|^q \, d\mu < +\infty \iff |f|^q \in L^1.$$

Donc si $f \in L^q, |f|^q \lneqq +\infty$ μ-ae, et donc $f \lneqq +\infty$ μ-ae.

(b) Notons $S \coloneqq \{x \in X \text{ s.t. } |f(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty}\}$. On sait que $\mu(S^{\complement}) = 0$. Donc à $p > q$ fixé :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_S |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_S |f|^q |f|^{p-q} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

or puisque $|f| \leqslant \|f\|_{L^\infty}$ sur S, on a :

$$\|f\|_{L^p} \leqslant \left(\int_S |f|^q \|f\|_{L^\infty}^{p-q} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\|f\|_{L^\infty}^{p-q} \int_S |f|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^\infty}^{\frac{p-q}{p}} \left(\left(\int_S |f|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{q}{p}} = \|f\|_{L^\infty}^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{L^q}^{\frac{q}{p}}.$$

Montrons alors que l'on peut en déduire :

$$\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^\infty}.$$

Puisque $f \in L^q$, on sait que $\|f\|_{L^q} \lneqq +\infty$ (et $\|f\|_{L^q} \gneqq 0$ puisque $\|f\|_{L^\infty} \gneqq 0$). Dès lors :

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L^q}^{\frac{q}{p}} = \lim_{t\to 0} \|f\|_{L^q}^{t} = 1,$$

car $\frac{q}{p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ (dont on déduit également $\|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{q}{p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|f\|_{L^\infty}$). Cela donne finalement :

$$\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^\infty}.$$

(c) On déduit de tout cela que si $\|f\|_{L^\infty} = +\infty$, alors $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p}$ existe et vaut $+\infty = \|f\|_{L^\infty}$ car :

$$+\infty \geqslant \limsup_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \geqslant \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} \geqslant \|f\|_{L^\infty} = +\infty.$$

De plus, si $\|f\|_{L^\infty} \lneqq +\infty$, alors si $\exists q \geqslant 1$ s.t. $f \in L^q$, alors $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p}$ existe et vaut $\|f\|_{L^\infty}$.

$\square$

Exercice 8.4 (Inégalité d'interpolation). *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* $1 \leqslant p \leqslant r \leqslant q \leqslant +\infty$ *et* $\theta \in (0,1)$ *tels que :*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Mq si $u \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \cap L^q(X, \mathcal{A}, \mu)$, *alors* $u \in L^r(X, \mathcal{A}, \mu)$ *et :*

$$\|u\|_{L^r} \leqslant \|u\|_{L^p}^{\theta} \cdot \|u\|_{L^q}^{1-\theta}.$$

Résolution. Mq $f \in L^p \iff f^q \in L^{\frac{p}{q}}$ pour $q \geqslant 0$. Soient $p \geqslant 1$ et $q \in [1/p, +\infty)$. Soit $f \in L^p$. Si $p \lneqq +\infty$:

$$f^q \in L^{\frac{p}{q}} \iff +\infty \gneqq \int |f^q|^{\frac{p}{q}} \, d\mu = \int |f|^p \, d\mu \lneqq +\infty \iff f \in L^p.$$

Si $p = +\infty$, alors $f \in L^\infty \iff \|f\|_{L^\infty} \lneqq +\infty$. Donc on observe $\|f^q\|_{L^\infty} = \|f\|_{L}^{\infty q} \lneqq +\infty \iff \|f\|_{L^\infty} \lneqq +\infty$.

Dès lors, on a :

— $u \in L^q \Rightarrow u^{r\theta} \in L^{\frac{p}{r\theta}}$;

— $u \in L^q \Rightarrow u^{r(1-\theta)} \in L^{\frac{q}{r(1-\theta)}}$.

Or $\frac{p}{r\theta}$ et $\frac{q}{r(1-\theta)}$ sont conjugués par hypothèse. Par l'inégalité de Hölder, on a alors que $u^r = u^{r\theta} u^{r(1-\theta)} \in L^1$, et donc $u \in L^r$.

Finalement, toujours par Hölder :

$$\|u^r\|_{L^1} \leqslant \left\|u^{r\theta}\right\|_{L^{\frac{p}{r\theta}}} \left\|u^{r(1-\theta)}\right\|_{L^{\frac{q}{r(1-\theta)}}}.$$

Deux cas sont à distinguer :

— si $\frac{p}{r\theta}, \frac{q}{r(1-\theta)} \in (1, +\infty)$:

$$\|u^r\|_{L^1} = \int |u^r| \, d\mu = \int |u|^r \, d\mu = \|u\|_{L^r}^r$$

$$\|u^r\theta\|_{L^{\frac{p}{r\theta}}} = \left(\int \left|u^{r\theta}\right|^{\frac{p}{r\theta}} d\mu\right)^{\frac{r\theta}{p}} = \left(\int |u|^p \, d\mu\right)^{\frac{r\theta}{p}} = \|u\|_{L^p}^{r\theta}$$

$$\left\|u^{r(1-\theta)}\right\|_{L^{\frac{q}{r(1-\theta)}}} = \left(\int |u|^q \, d\mu\right)^{\frac{r(1-\theta)}{q}} = \|u\|_{L^q}^{r(1-\theta)}.$$

— Et si $\frac{p}{r\theta} = 1, \frac{q}{r(1-\theta)} = +\infty$, on a également :

$$\|u^r\|_{L^1} = \|u\|_{L^r}^r$$

$$\left\|u^{r\theta}\right\|_{L^1} = \|u\|_{L^{r\theta}}^{r\theta} = \|u\|_{L^p}^{r\theta}$$

$$\left\|u^{r(1-\theta)}\right\|_{L^\infty} = \|u\|_{L^\infty}^{r(1-\theta)},$$

En mettant les deux membres à la puissance $\frac{1}{r}$, on trouve bien :

$$\|u\|_{L^r} \leqslant \|u\|_{L^p}^{\theta} \|u\|_{L^q}^{1-\theta}.$$

□

Remarque : En corolaire de ce théorème, on déduit que si $f \in L^1 \cap L^\infty$ (i.e. si f est μ-intégrable et essentiellement bornée), alors $f \in L^p$ pour tout p. Et ça, c'est chouette.

9 Séance 9

Exercice 9.1. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* $p \in [1, +\infty)$, $(f_k)_{k \geqslant 0} \in {L^p}^{\mathbb{N}}$ *s.t.* $f_k \xrightarrow[k \to +\infty]{\mu\text{-}ae} f$. *Mq les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\|f - f_k\|_{L^p} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$

b) $f \in L^p$ *et* $\|f_k\|_{L^p} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \|f\|_{L^p}$.

Résolution. a) $\Rightarrow$ b) : À k fixé, on a $f = (f - f_k) + f_k$ et donc :

$$\int |f|^p \, d\mu \leqslant \int |f - f_k|^p \, d\mu + \int |f_k|^p \, d\mu.$$

Or par hypothèse : $\forall \varepsilon > 0 : \exists K_\varepsilon > 0$ s.t. $\forall k \geqslant K_\varepsilon : \int |f - f_k|^p \, d\mu < \varepsilon$. En particulier pour $\varepsilon = 1$, on trouve :

$$\int |f|^p \, d\mu \leqslant \int \left|f - f_{K_1}\right|^p d\mu + \int \left|f_{K_1}\right|^p d\mu \leqslant 1 + \int \left|f_{K_1}\right|^p d\mu < +\infty$$

car $f_{K_1} \in L^p$. Donc $f \in L^p$.

De plus, $\|f\|_{L^p} \leqslant \|f - f_k\|_{L^p} + \|f_k\|_{L^p}$ donc $\|f\|_{L^p} \leqslant \liminf_{k \to +\infty} \|f_k\|_{L^p}$. De même, dans l'autre sens on a $\|f_k\|_{L^p} \leqslant \|f - f_k\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}$ et donc $\limsup_{k \to +\infty} \|f_k\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p}$. On en déduit $\lim_{k \to +\infty} \|f_k\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$.

b) $\Rightarrow$ a) : On pose $g_k := 2^{p-1} \left(|f|^p + |f_k|^p\right) - |f - f_k|^p$. Puisque $p \geqslant 1 \Rightarrow 2^{p-1} \geqslant 1$, on a $g_k \geqslant 0$. On peut donc appliquer le lemme de Fatou qui dit :

$$\int \liminf_{k \to +\infty} g_k \, d\mu \leqslant \liminf_{k \to +\infty} \int f_k \, d\mu.$$

Or $g_k \xrightarrow[k \to +\infty]{\mu\text{-ae}} 2^p |f|$ donc $\liminf_{k \to +\infty} g_k = \lim_{k \to +\infty} g_k = 2^p |f|^p$. On a alors :

$$\begin{aligned} 2^p \|f\|_{L^p}^p = \int 2^p |f|^p \, d\mu &\leqslant \liminf_{k \to +\infty} \left[\int (2^{p-1}|f|^p + 2^{p-1}|f_k|^p - |f - f_k|^p) \, d\mu \right] \\ &= 2^p \|f\|_{L^p}^p + \liminf_{k \to +\infty} - \int |f - f_k|^p \, d\mu = 2^p \|f\|_{L^p}^p + \liminf_{k \to +\infty} - \|f - f_k\|_{L^p}^p . \end{aligned}$$

$\|f\|_{L^p}$ étant finie, on trouve alors :

$$0 \leqslant \liminf_{k \to +\infty} - \|f - f_k\|_{L^p} = - \limsup_{k \to +\infty} \|f - f_k\|_{L^p} ,$$

i.e. $\limsup_{k \to +\infty} \|f - f_k\|_{L^p} = 0$. De plus : $0 \leqslant \liminf_{k \to +\infty} \|f - f_k\|_{L^p} \leqslant \limsup_{k \to +\infty} \|f - f_k\|_{L^p} = 0$, on déduit $\lim_{k \to +\infty} \|f - f_k\|_{L^p} = 0$. □

Exercice 9.2 (Lemme de Brézis-Lieb). *Soient* X *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty)$ *et* $(u_k)_{k \geqslant 0} \in L^p(X, \mathcal{B}(X), \mathcal{L})^{\mathbb{N}}$ *où* $\mathcal{L}$ *est la mesure de Lebesgue sur* X. *On suppose que* $(u_k)_k$ *est bornée dans* L^p *et que* $u_k \xrightarrow[k \to +\infty]{\mathcal{L}\text{-}ae} u$. *Montrons que* $u \in L^p(X)$ *et :*

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\|u_k\|_{L^p}^p - \|u - u_k\|_{L^p}^p \right) = \|u\|_{L^p}^p .$$

1. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *mq* $\exists C_\varepsilon = C(\varepsilon, p) > 0$ *s.t.* $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$\left| |a + b|^p - |a|^p - |b|^p \right| \leqslant \varepsilon |a|^p + C_\varepsilon |b|^p .$$

2. *À $\varepsilon > 0$ fixé, on pose :*

$$f_k^\varepsilon := \left(\left| |u_k|^p - |u - u_k|^p - |u|^p \right| - \varepsilon |u_k - u|^p \right)^+ .$$

Calculer :

$$\lim_{k \to +\infty} \int f_k^\varepsilon \, d\mathcal{L}.$$

3. *Conclure.*

Résolution. TODO: Trouver comment faire. □

Exercice 9.3. *Soit $p \in [1, +\infty)$. Montrer les affirmations suivantes :*

1. *L'espace des fonctions simples est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.*
2. *L'espace des fonctions en escalier est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.*
3. *L'espace des fonctions continues à support compact $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.*
4. *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathbb{R}^n$, alors :*

$$\left\| f(\cdot + h) - f(\cdot) \right\|_{L^p} \xrightarrow[|h| \to +\infty]{} 0.$$

Que dire du cas $p = +\infty$?

Résolution.

1. Supposons f positive. Soit $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Pour $n \geqslant 0$, on pose l'application :

$$f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \chi_{f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)}.$$

Si $p = 1$, alors par le théorème de la convergence dominée (puisque $f \in L^1$ et $|f_n| \leqslant f$) on a $\|f_n - f\|_{L^1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Si $p \gneqq 1$, alors ${f_n}^p$ est toujours une fonction simple, et $|f_n|^p \xrightarrow[n \to +\infty]{\mu\text{-ae}} f^p \in L^1$. Donc ok par le cas $p = 1$.

Une autre manière de démontrer le cas $p \gneqq 1$ (parce qu'on n'est plus à une démonstration près) :

$$\|f_n - f\|_{L^p}^p = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \int_{f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)} (f - f_n)^p \, d\mu + \int_{f^{-1}([2^n, +\infty))} f^p \, d\mu \leqslant 2^{2n} 2^{-n(p+1)} + \int_{f^{-1}([2^n, +\infty))} f^p \, d\mu.$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_{L^p}^p = \underbrace{\lim_{n \to +\infty} 2^{n(1-p)}}_{=0} + \lim_{n \to +\infty} \int_{f^{-1}([2^n, +\infty))} |f|^p \, d\mu.$$

Montrons que $\mu\left(f^{-1}([2, +\infty))\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Tout d'abord, remarquons que $f^{-1}([2^n, +\infty)) = (f^p)^{-1}([2^{np}, +\infty))$. Par l'absurde, supposons :

$$\limsup_{n \to +\infty} \mu\left(\underbrace{(f^p)^{-1}([2^{np}, +\infty))}_{=:A_n^p} \right) = \alpha \gneqq 0,$$

qui est équivalent à :
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N > 0 \text{ s.t. } \forall n \geqslant N : \mu(A_n^p) > \alpha - \varepsilon.$$
En particulier $\exists N > 0$ s.t. $\forall n \geqslant N : \mu(A_n^p) > \frac{\alpha}{2}$. Or pour tout $n \geqslant N$:
$$\|f\|_{L^p}^p = \int_{A_n^p} |f|^p \, d\mu + \int_{{A_n^p}^\complement} |f|^p \, d\mu \geqslant \int_{A_n^p} |f|^p \geqslant \int_{A_n^p} 2^{np} \, d\mu = 2^{np} \mu(A_n^p) > 2^{np} \underbrace{\frac{\alpha}{2}}_{\gneqq 0}.$$
Dès lors $\|f\|_{L^p}^p = +\infty$, ce qui contredit $f \in L^p$.

De là, on peut appliquer l'exercice 6.6 (qui dit que pour tout $g \in L^1$: $\int_A g \, d\mu \xrightarrow[\mu(A) \to 0]{} 0$) à l'application $f^p \in L^1$. On a donc :
$$\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_{L^p}^p = \lim_{n \to +\infty} \int_{f^{-1}([2^n, +\infty))} |f|^p \, d\mu = 0,$$
et donc $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L^p} f$.

Dans le cas général où f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on applique séparément le résultat à f^+ et f^- puisque la somme de deux fonctions simples est toujours une fonction simple.

2. Il suffit de montrer que toute fonction caractéristique d'un ensemble mesurable est limite d'une suite de fonctions en escalier. En effet, on aurait alors que l'ensemble des fonctions simples est contenu dans l'adhérence de l'ensemble des fonctions en escalier. Par passage à l'adhérence, on aura alors que $L^p =$ l'adhérence de l'ensemble des fonctions simples est contenu dans l'adhérence de l'adhérence de l'ensemble des fonction en escalier $=$ l'adhérence de l'ensemble des fonctions en escalier $\subseteq L^p$. Ou plus simplement, pour $\mathcal{S}^p$ l'ensemble des fonctions simples de L^p et pour $\mathcal{E}^p$ l'ensemble des fonctions en escalier de L^p, si on montre que $\overline{\mathcal{E}^p} \supseteq \mathcal{S}^p$, alors on a $L^p = \overline{\mathcal{S}^p} \subset \overline{\overline{\mathcal{E}^p}} = \overline{\mathcal{E}^p} \subseteq L^p$.

   Soit donc A mesurable tel que $\chi_A \in L^p$. Puisque $\|\chi_A\|_{L^p}^p = \int \chi_a \, d\mathcal{L} = \mathcal{L}(A) \lneqq +\infty$, on a que A est de mesure finie. Par un résultat vu au cours (cours 2) : $\mathcal{L}(A) = \inf_{\Omega(A)} \mathcal{L}(U)$ où $\Omega(A)$ est l'ensemble des ouverts contenant A. On en déduit l'existence d'une suite U_k dans $\Omega(A)$ telle que
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists K > 0 \text{ s.t. } \forall k \geqslant K : \mathcal{L}(U_k \setminus A) = \mathcal{L}(U_k) - \mathcal{L}(A) < \varepsilon.$$
   Rappelons-nous également que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est égal à une union dénombrable d'intervalles disjoints de $\mathbb{R}^n$. Dès lors :
$$\forall k \geqslant 0 : \exists (I_n^k)_{n \geqslant 0} \text{ suite d'intervalles } \text{ s.t. } U_k = \bigcup_{n \geqslant 0} I_n^k.$$
   On en déduit que pour $k \geqslant 0$: $\mathcal{L}(U_k) = \sum_{n \geqslant 0} \mathcal{L}(I_n^k)$. Dès lors, puisque $(\sum_{n=0}^N \mathcal{L}(I_n^k))_{N \geqslant 0}$ est une suite monotone positive qui converge, on a :
$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 : \exists N \geqslant 0 \text{ s.t. } \mathcal{L}\left(\bigcup_{n \geqslant N} I_n^k\right) < \tilde{\varepsilon}.$$
   Pour $n > 0$, on sait qu'il existe $K_N > 0$ s.t. $\mathcal{L}(U_{K_n} \setminus A) < \frac{1}{n}$ et $U_{K_n} = \bigcup_{j \geqslant 1} I_j^{K_n}$. De plus il existe $J_n > 0$ s.t. $\mathcal{L}(\bigcup_{j \geqslant J_n} < \frac{1}{n}$. On peut alors poser la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ définie par :
$$f_n \coloneqq \sum_{j=1}^{J_n} \chi_{I_j^{K_n}}.$$

Montrons alors que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} \chi_A$.
Remarquons d'abord (ce qui simplifiera les écritures) :

$$\|\chi_A - f_n\|_{L^p}^p \, \mathcal{L} = \int |\chi_A - f_n| \, d\mathcal{L} = \|\chi_A - f_n\|_{L^1}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\|\chi_A - f_n\|_{L^1} &= \int \left| \chi_A - \sum_{j=1}^{J_n} \chi_{I_j^{K_n}} \right| d\mathcal{L} = \int \left| \sum_{j\geqslant 0} \chi_{A\cap I_j^{K_n}} - \sum_{j=1}^{J_n} \chi_{I_j^{K_n}} \right| d\mathcal{L} \\
&= \int \left| \sum_{j=1}^{J_n} (\chi_{A\cap I_j^{K_n}} - \chi_{I_j^{K_n}}) + \sum_{j>J_n} \chi_{I_j^{K_n}} \right| d\mathcal{L} \\
&\leqslant \int \left(\left| \sum_{j=1}^{J_n} (\chi_{A\cap I_j^{K_n}} - \chi_{I_j^{K_n}}) \right| + \left| \sum_{j>J_n} \chi_{I_j^{K_n}} \right| \right) d\mathcal{L} \\
&\leqslant \int \sum_{j=1}^{J_n} \left| \chi_{A\cap I_j^{K_n}} - \chi_{I_j^{K_n}} \right| d\mathcal{L} + \sum_{j>J_n} \int \chi_{I_j^{K_n}} \, d\mathcal{L} \\
&= \sum_{j=1}^{J_n} \int \left| \chi_{A\cap I_j^{K_n}} - \chi_{I_j^{K_n}} \right| d\mathcal{L} + \sum_{j>J_n} \mathcal{L}(I_j^{K_n}) \\
&= \sum_{j=1}^{J_n} \int \chi_{A^\complement\cap I_j^{K_n}} \, d\mathcal{L} + \mathcal{L}\left(\bigcup_{j>J_n} I_j^{K_n} \right) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{J_n} \mathcal{L}(A^\complement \cap I_j^{K_n}) + \frac{1}{n} \\
&= \mathcal{L}\left(\bigcup_{j=1}^{J_n} A^\complement \cap I_j^{K_n} \right) + \frac{1}{n} \\
&\leqslant \mathcal{L}(U_{K_n} \setminus A) + \frac{1}{n} \\
&\leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

3. Par un raisonnement similaire au point 2, il est suffisant de montrer que pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$ mesurable, il existe $(f_k)_{k\geqslant 1} \in C_c^0(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ telle que $\|\chi_A - f_k\|_{L^p} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

   Par le même résultat qu'au point 2, on sait que $\mathcal{L}(A) = \sup_{K\subset\subset A} \mathcal{L}(K)$. Donc on peut extraire une suite $(K_n)_{n\geqslant 0}$ de compacts inclus dans A telle que $\forall \varepsilon > 0 : \exists N > 0$ s.t. $\forall n \geqslant N : \mathcal{L}(A \setminus K_n) = \mathcal{L}(A) - \mathcal{L}(K_n) < \varepsilon$. En particulier, pour $k \geqslant 1 : \exists n_k > 0$ s.t. $\forall n \geqslant n_k : \mathcal{L}(A \setminus K_n) < \frac{1}{k}$. On pose alors la suite de fonctions $f_k = \chi_{K_{n_k}}$. f_k est bien à support compact et est constante sur son support donc trivialement continue. On a bien :

$$\|\chi_A - f_k\|_{L^p}^p = \int \left| \chi_A - \chi_{K_{n_k}} \right|^p d\mathcal{L} = \int \chi_{A\cap K_{n_k}^\complement} \, d\mathcal{L} = \mathcal{L}(A \setminus K_{n_k}) < \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Notons que dans le cas $p = +\infty$, ce résultat ne tient plus. En effet, pour $(f_n)_{n\geqslant 0}$ s.t. $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^\infty} f \in L^\infty$, on a l'existence de $E \subset \mathbb{R}^n$ s.t. $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ sur E, $\mu(E^\complement) = 0$ et :

$$\sup_{x\in E}\left|f_n(x) - f(x)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc f_n converge uniformément vers f sur E. On en déduit que f est également continue sur E, et donc f est continue $\mathcal{L}$-ae. Cependant $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \in L^\infty$ mais $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est nulle part continue sur $[0,1]$. Donc pour toute suite $(f_n)_n$ d'applications continues : $\limsup_{n\to+\infty}\left\|\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} - f_n\right\|_{L^\infty} \gneqq 0$.

4. Utilisons le point 3 : prenons une suite $(f_n)_{n\geqslant 0} \in C^0_c(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ s.t. $\|f - f_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. À $n \geqslant 0$ fixé, on a :

$$\left\|f - f(\cdot + h)\right\|_{L^p} \leqslant \|f - f_n\|_{L^p} + \left\|f_n - f_n(\cdot + h)\right\|_{L^p} + \left\|f_n(\cdot + h) - f(\cdot + h)\right\|_{L^p}.$$

Fixons alors $\varepsilon > 0$. On sait que :

$$\exists N > 0 \text{ s.t. } \forall n \geqslant N : \|f - f_n\|_{L^p} = \left\|f(\cdot + h) - f_n(\cdot + h)\right\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Maintenant montrons que $\forall n \geqslant 0 : \left\|f_n - f_n(\cdot + h)\right\|_{L^p} \xrightarrow[|h|\to 0]{} 0$. Pour cela, fixons $n \geqslant 0$ et fixons $(h_k)_{k\geqslant 0} \in {\mathbb{R}^n}^{\mathbb{N}}$ décroissante vers 0. Notons $K_n \coloneqq \operatorname{supp} f_n$. $\mathcal{L}(K_n) \lneqq +\infty$ puisque dans $\mathbb{R}^n$ les compacts sont les fermés bornés (Heine-Borel). Appliquons ensuite le théorème de Heine à f_n : f_n est continue sur un compact K_n, elle est donc uniformément continue, i.e. :

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 : \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x, y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \delta \Rightarrow \left|f_n(x) - f_n(y)\right| < \tilde{\varepsilon}.$$

En particulier :

$$\exists \delta_\varepsilon \text{ s.t. } \forall x, y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left|f_n(x) - f_n(y)\right| < \frac{\varepsilon}{3\mathcal{L}(K_n)^{\frac{1}{p}}}.$$

Or par convergence de la suite $(h_k)_k$, il existe $K > 0$ s.t. $\forall k \geqslant K : |h_k| < \delta_\varepsilon$. Pour $k \geqslant K$, on a alors :

$$\left\|f_n - f_n(\cdot + h_k)\right\|^p_{L^p} = \int\left|f_n - f_n(\cdot + h_k)\right|^p d\mathcal{L} \leqslant \int_{K_n}\left|\frac{\varepsilon}{3\mathcal{L}(K_n)^{\frac{1}{p}}}\right|^p d\mathcal{L} = \frac{\varepsilon^p}{3^p\mathcal{L}(K_n)}\mathcal{L}(K_n) = \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p,$$

et donc $\left\|f_n - f_n(\cdot + h_k)\right\|_{L^p} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.
Finalement, on a donc pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $k \geqslant K$:

$$\left\|f - f(\cdot + h_k)\right\|_{L^p} \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon + \left\|f_n - f_n(\cdot + h_k)\right\|_{L^p} \leqslant \frac{3}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

Dans le cas $p = +\infty$, on n'a pas cette convergence. Prenons l'ensemble $\Omega \coloneqq [0,1]$ et la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $x_n = -\frac{1}{n}$. Soit $n \geqslant 1$. On cherche $\left\|\chi_\Omega - \chi_\Omega(\cdot + x_n)\right\|_{L^\infty}$. On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}$: $\chi_\Omega(x + x_n) = \chi_{\Omega - x_n}(x)$. De plus :

$$\left|\chi_\Omega - \chi_{\Omega + \frac{1}{n}}\right| = \chi_{\Omega\cap(\Omega+\frac{1}{n})^\complement} + \chi_{\Omega^\complement\cap(\Omega+\frac{1}{n})} = \chi_{\left(\Omega\cap(\Omega+\frac{1}{n})^\complement\right)\sqcup\left(\Omega^\complement\cap(\Omega+\frac{1}{n})\right)}.$$

Notons ce dernier ensemble $\Omega^{(n)}$. Puisque :

$$\mathcal{L}(\{x \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \chi_{\Omega^{(n)}}(x) \gneqq 1\}) = 0 \text{ et } \mathcal{L}(\{x \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \chi_{\Omega^{(n)}}(x) \geqslant 1\}) = \mathcal{L}\left(\left[0, \frac{1}{n}\right) \cup \left(1, \frac{n+1}{n}\right]\right) = \frac{2}{n} \gneqq 0,$$

on déduit $\|\chi_{\Omega^{(n)}}\|_{L^\infty} = 1$. Dès lors $\lim_{n\to+\infty}\|\chi_{\Omega^{(n)}}\|_{L^\infty} = 1 \neq 0$.

$\square$

10 Séance 10

Exercice 10.1. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* $(f_k)_{k \geqslant 0}$ *suite d'applications mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$ *et* $p \in [1, +\infty]$. *Justifier les affirmations suivantes :*

1. *La convergence* μ*-ae n'implique pas la convergence en* L^p, *sauf si la suite* $(f_k)_k$ *est bornée par* $g \in L^p$.
2. *La convergence en* L^p *implique la convergence en mesure.*
3. *La convergence* μ*-ae n'implique pas la convergence en mesure, sauf si* $\mu(X) \lneqq +\infty$.
4. *La convergence en mesure n'implique pas la convergence* μ*-ae, mais seulement la convergence* μ*-ae d'une sous-suite.*
5. *La convergence en mesure n'implique pas la convergence en* L^p, *sauf si la suite* $(f_k)_k$ *est bornée par* $g \in L^p$.
6. *La convergence presque uniforme implique la convergence en mesure.*
7. *La convergence* μ*-ae n'implique pas la convergence presque uniforme.*
8. *Si* $\mu(X) \lneqq +\infty$, *la convergence* μ*-ae implique la convergence presque uniforme.*

Résolution.

1. La suite $f_k = \chi_{[k,k+1]}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ sur $\mathbb{R}$ (en particulier converge μ-ae). Pourtant $\forall k \geqslant 0 : \|f_k\|_{L^p} = 1$.

   Cependant, si $\exists g \in L^p$ s.t. $\forall k \geqslant 0 : |f_k| \leqslant g$, on peut appliquer le théorème de la convergence dominée à la suite $(|f_n|^p)_{n \geqslant 0}$ bornée par $|g|^p$ et qui converge μ-ae vers $|f|^p$. Dès lors $|f|^p$ est μ-intégrable (i.e. $|f|^p \in L^1$ et donc $f \in L^p$) et :

   $$\lim_{n \to +\infty} \int |f_n|^p \, d\mu = \int |f|^p \, d\mu,$$

   i.e. $\|f_n\|_{L^p}^p \xrightarrow[n \to +\infty]{} \|f\|_{L^p}^p$. On en déduit $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L^p} f$.

2. Si la suite $(f_k)_k$ ne converge pas en mesure, alors $\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. :

   $$\limsup_{k \to +\infty} \mu(\underbrace{\{x \in X \text{ s.t. } |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon_0\}}_{=: N_{k,\varepsilon_0}}) = \alpha \gneqq 0.$$

   Dès lors :

   $$\|f_k - f\|_{L^p} = \left(\int |f_k - f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\int_{N_{k,\varepsilon_0}} |f - f_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \varepsilon_0 \mu(N_{k,\varepsilon_0})^{\frac{1}{p}}.$$

   Par passage à la lim sup :

   $$\limsup_{k \to +\infty} \|f_k - f\|_{L^p} \geqslant \varepsilon_0 \alpha^{\frac{1}{p}} \gneqq 0,$$

   et donc f_k ne converge pas en L^p vers f.

3. Prenons à nouveau la suite $f_k = \chi_{[k,k+1]}$. f_k converge simplement vers $\mathbf{0}$ sur $\mathbb{R}$ mais :

   $$\forall k \geqslant 0 : \forall \varepsilon \in (0,1) : \mu(N_{k,\varepsilon}) = \mu([k, k+1]) = 1.$$

   Cependant, si $\mu(X) \lneqq +\infty$, alors procédons par contraposée. On suppose que f_k ne converge pas en mesure vers f. On sait donc :

   $$\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ s.t. } \limsup_{k \to +\infty} (N_{k,\varepsilon_0}) = \alpha \gneqq 0.$$

Remarquons ensuite que $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(x)$ si et seulement si :

$$x \in \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{N\geqslant 0} \bigcap_{n\geqslant N} N_{n,\varepsilon}.$$

par définition de la convergence. Donc $f_k(x) \not\to f(x)$ si et seulement si :

$$x \in \bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*} \bigcap_{N\geqslant 0} \bigcup_{n\geqslant N} N_{n,\varepsilon},$$

Dès lors, si N est l'ensemble des points $x \in X$ s.t. $f_k(x) \not\to f(x)$, alors par monotonie de la mesure :

$$\mu(N) \geqslant \mu\left(\bigcap_{N\geqslant 0} \bigcup_{n\geqslant N} N_{n,\varepsilon_0}\right) = \mu\left(\limsup_{n\to+\infty} N_{n,\varepsilon_0}\right).$$

Par finitude de la mesure et par l'exercice 2.9, on a :

$$\mu\left(\limsup_{n\to+\infty} N_{n,\varepsilon_0}\right) \geqslant \limsup_{n\to+\infty} \mu(N_{n,\varepsilon_0}) = \alpha \gneqq 0.$$

Donc $\mu(N) \gneqq 0$, et f_k ne converge pas μ-ae vers f.

4. Prenons suite $(f_k)_{k\geqslant 0}$ définie par $f_k = \chi_{\left[\frac{k-2^{i(k)}}{2^{i(k)}}, \frac{k-2^{i(k)}-1}{2^{i(k)}}\right]}$ avec $i(k) = \lfloor \log_2 k \rfloor$. On remarque que $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{L}} 0$ puisque pour $\varepsilon \in (0,1)$:

$$\mathcal{L}(\{x \in X \text{ s.t. } |f_k(x)| > \varepsilon\}) = \mathcal{L}(\{x \in X \text{ s.t. } f_k(x) = 1\}) = \mathcal{L}\left(\left[\frac{k-2^{i(k)}}{2^{i(k)}}, \frac{k-2^{i(k)}-1}{2^{i(k)}}\right]\right)$$
$$= 2^{-i(k)} = \frac{2}{2^{i(k)+1}} < \frac{2}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Mais à $x \in [0,1]$, on peut trouver une sous-suite $(f_{k_n})_{n\geqslant 0}$ telle que $f_{k_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Pour $n \geqslant 0$, on pose :

$$k_n \coloneqq 2^n + \lfloor 2^n x \rfloor.$$

On a alors $f_{k_n}(x) = 1$ si $x \in \left[\frac{\lfloor 2^n x\rfloor}{2^n}, \frac{\lfloor 2^n x\rfloor + 1}{2^n}\right]$ et $f_{k_n}(x) = 0$ sinon. Or :

$$\forall n \geqslant 0 : 2^n x \in \left[\lfloor 2^n x\rfloor, \lfloor 2^n x\rfloor + 1\right] \qquad \text{et donc} \qquad x \in \left[\frac{\lfloor 2^n x\rfloor}{2^n}, \frac{\lfloor 2^n x\rfloor + 1}{2^n}\right].$$

On n'a donc pas la convergence $\mathcal{L}$-ae de la suite $(f_k)_k$.
Montrons maintenant la convergence d'une sous-suite. Pour $n \geqslant 0$, on pose $k_n \geqslant 0$ s.t. :

$$\forall k \geqslant k_n : \mu(\{x \in X \text{ s.t. } |f_k(x) - f(x)| > 2^{-n}\}) < 2^{-n}.$$

On sait que k_n existe par la convergence en mesure de $(f_k)_k$. On peut supposer $(k_n)_{n\geqslant 0}$ strictement croissante, quitte à la remplacer par la suite $(\tilde{k}_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\tilde{k}_0 \coloneqq k_0$ et $\tilde{k}_n \coloneqq \max\{k_n, \tilde{k}_{n-1} + 1\}$. On pose alors $N_n \coloneqq \{x \in X \text{ s.t. } |f_{k_n}(x) - f(x)| > 2^{-n}\}$. Posons également $N \coloneqq \{x \in X \text{ s.t. } f_{k_n}(x) \not\to f(x)\}$. On sait que $N \subset \bigcup_{n\geqslant 0} N_n$ car si $x \in N$, alors $\exists n \geqslant 0$ s.t. $x \in N_n$. Puisque :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 0} N_n\right) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \mu(N_n) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} 2^{-n} = 2 \lneqq +\infty,$$

à nouveau par l'exercice 2.9, on trouve :

$$\limsup_{n\to+\infty}\mu(N_n)\leqslant\mu(\limsup_{n\to+\infty}N_n)=\mu\left(\bigcap_{k\geqslant 0}\bigcup_{n\geqslant 0}N_n\right)=\inf_{n\geqslant 0}\mu\left(\bigcap_{n\geqslant k}N_n\right)\leqslant\inf_{k\geqslant 0}\sum_{n\geqslant k}\mu(N_n)$$
$$\leqslant\inf_{k\geqslant 0}\sum_{n\geqslant k}2^{-n}=\inf_{n\geqslant 0}2^{-(k+1)}=\lim_{k\to+\infty}2^{-(k+1)}=0.$$

On a donc finalement $\mu(N)=0$, et donc $f_{k_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{\mu\text{-ae}}f$.

5. Prenons la suite $f_k=k\chi_{[\frac{1}{k},\frac{2}{k}]}$. Cette suite converge en mesure vers 0. En effet, pour $1>\varepsilon>0$:

$$\mathcal{L}(\{x\in X \text{ s.t. } |f_k(x)|>\varepsilon\})=\mathcal{L}\left(\left[\frac{1}{k},\frac{2}{k}\right]\right)=\frac{1}{k}\xrightarrow[k\to+\infty]{}0.$$

Pourtant $(f_k)_k$ ne converge pas en L^1. En effet :

$$\|f_k\|_{L^1}=\int|f_k|\,d\mathcal{L}=k\cdot\frac{1}{k}=1.$$

Supposons maintenant que la suite $(f_k)_k$ est dominée par $g\in L^p$. Supposons, par l'absurde, que $\limsup_{k\to+\infty}\|f_k-f\|_{L^p}=\alpha\gneqq 0$. On a alors une sous-suite $(f_{k_n})_{n\geqslant 0}$ s.t. $(\left\|f_{k_n}-f\right\|_{L^p})_{n\geqslant 0}$ est croissante et croit vers α. Cette sous-suite converge toujours en mesure ; donc par le point 4, on a la convergence μ-ae d'une sous-suite $(f_{k_{n_j}})_{j\geqslant 0}$. Par la domination, on peut appliquer le point 1 et on a alors que $\left\|f_{k_{n_j}}-f\right\|_{L^p}\xrightarrow[j\to+\infty]{}0$. On a alors une contradiction car toute sous-suite d'une suite convergente vers une limite L converge également vers cette limite.

6. Posons $\varepsilon>0$. Pour $\tilde{\varepsilon}\in(0,\varepsilon)$, on a $\Omega_{\tilde{\varepsilon}}\in\mathcal{A}$ avec $\mu(\Omega_{\tilde{\varepsilon}})<\tilde{\varepsilon}$ et $\sup_{x\in\Omega_{\tilde{\varepsilon}}^{\complement}}|f_k(x)-f(x)|\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$. En particulier : $\exists K_\varepsilon>0$ s.t. $\forall k\geqslant K_\varepsilon:\forall x\in\Omega_{\tilde{\varepsilon}}^{\complement}:|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon$.
De là on déduit que pour $k\geqslant K_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}\mu(N_{k,\varepsilon})&=\mu(\{x\in X \text{ s.t. } |f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})\\&=\mu(\{x\in X \text{ s.t. } |f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\}\cap\Omega_{\tilde{\varepsilon}})+\mu(\{x\in X \text{ s.t. } |f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\}\cap\Omega_{\tilde{\varepsilon}}^{\complement})\\&\leqslant\tilde{\varepsilon}+\mu(\emptyset)=\tilde{\varepsilon},\end{aligned}$$

et il en suit : $\forall k\geqslant K_\varepsilon:\mu(N_{k,\varepsilon})=0$.

7. La suite définie par $f_k=\chi_{[k,k+1]}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ mais ne converge pas presque uniformément. En effet, cette suite ne converge pas en mesure, et la convergence presque uniforme implique la convergence en mesure. Donc cette suite ne peut converger presque uniformément.

8. Gardons la notation $N_{k,\varepsilon}$ définie plus haut. Pour $N\coloneqq\{x\in X \text{ s.t. } f_k(x)\not\to f(x)\}$, on a :

$$\begin{aligned}x\in N&\iff\exists\varepsilon>0 \text{ s.t. } \forall K\geqslant 0:\exists k\geqslant K \text{ s.t. } |f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\\&\iff\exists n>0 \text{ s.t. } \forall K\geqslant 0:\exists k\geqslant K \text{ s.t. } |f_k(x)-f(x)|>\frac{1}{n}\\&\iff\exists n>0 \text{ s.t. } \forall K\geqslant 0:x\in\bigcup_{k\geqslant K}N_{k,\frac{1}{n}}\\&\iff\exists n>0 \text{ s.t. } x\in\bigcap_{K\geqslant 0}\bigcup_{k\geqslant K}N_{k,\frac{1}{n}}\\&\iff x\in\bigcup_{n\geqslant 0}\bigcap_{K\geqslant 0}\bigcup_{k\geqslant K}N_{k,\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

Donc $N = \bigcup_{n \geqslant 0} \limsup_{k \to +\infty} N_{k, \frac{1}{n}}$ et donc :

$$\forall n \geqslant 0 : \limsup_{k \to +\infty} N_{k, \frac{1}{n}} \subseteq N.$$

Or par hypothèse $\mu(N) = 0$. On en déduit que :

$$\forall n \geqslant 0 : \mu(\limsup_{k \to +\infty} N_{k, \frac{1}{n}}) = 0.$$

Or puisque $\mu(X) \lneqq +\infty$, on sait que :

$$0 = \mu\left(\bigcap_{K \geqslant 0} \bigcup_{k \geqslant 0} N_{k, \frac{1}{n}}\right) = \lim_{K \to +\infty} \mu\left(\bigcup_{k \geqslant K} N_{k, \frac{1}{n}}\right) = \lim_{K \to +\infty} \mu\left(\bigcup_{k \geqslant K} N_{k, \frac{1}{n}}\right).$$

Donc $\forall \varepsilon > 0 : \exists K > 0$ s.t. $\mu(\bigcup_{k \geqslant K} N_{k, \frac{1}{n}}) < \varepsilon$. En particulier :

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall n > 0 : \exists k_n > 0 \text{ s.t. } \mu\left(\bigcup_{k \geqslant k_n} N_{k, \frac{1}{n}}\right) < 2^{-n}\varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons alors $\Omega_\varepsilon \coloneqq \bigcup_{n > 0} \bigcup_{k \geqslant k_n} N_{k, \frac{1}{n}}$. On a bien :

$$\mu(\Omega_\varepsilon) = \mu\left(\bigcup_{n > 0} \bigcup_{k \geqslant k_n} N_{k, \frac{1}{n}}\right) \leqslant \sum_{n > 0} \mu\left(\bigcup_{k \geqslant k_n} N_{k, \frac{1}{n}}\right) < \varepsilon.$$

Montrons maintenant que f_k converge uniformément vers f sur $\Omega_\varepsilon^\complement$. On sait que $x \in \Omega_\varepsilon^\complement$ si et seulement si :

$$\forall n > 0 : \forall k \geqslant k_n : \left|f_k(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Soient $x \in \Omega_\varepsilon^\complement$ et $\tilde{\varepsilon} > 0$ et soit $n > 0$ s.t. $\tilde{\varepsilon} > \frac{1}{n}$. On a donc :

$$\forall k \geqslant k_n : \left|f_k(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{n} < \tilde{\varepsilon},$$

qui est équivalent à :

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 : \forall k \geqslant k_{\lceil \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \rceil} : \forall x \in \Omega_\varepsilon^\complement : \left|f_k(x) - f(x)\right| < \tilde{\varepsilon}.$$

□