Modélisation et simulation — INFOF-305

R. Petit

Année académique 2016 - 2017

Table des matières

1 Introduction aux systèmes dynamiques

1.1 Généralités

Définition 1.1. Soit T, *l'ensemble de temps*. Selon la nature de T, on parle de *système à temps discret*, ou de *système à temps continu*. Les applications :

$$u : T \to U \subseteq \mathbb{R}^n \qquad \text{et} \qquad y : T \to Y \subseteq \mathbb{R}^m$$

sont respectivement appelées *fonction d'entrée* et *fonction de sortie*. L'application u correspond aux apports que subit le système, alors que l'application y correspond à l'observation du système.

Le couple d'applications (u, y) appartient à $\Omega \times \Gamma$, où Ω est l'ensemble des fonctions d'entrées acceptables et Γ est l'ensemble des fonctions de sortie acceptables.
Remarque. $\forall (u, y) \in \Omega \times \Gamma : \forall t \in T : \big(u(t), y(t)\big) \in U \times Y$.
Définition 1.2. On appelle variable d'état la variable $x : T \to X \subseteq \mathbb{R}^d$ représentant l'*état interne du système* en fonction du temps.

L'évolution du système sera décrite comme un système d'équations différentielles ou d'équations aux différences par rapport à la variable d'état.
Remarque. Le fait qu'une variable supplémentaire soit introduite induit que la connaissance de $(t_0, u, y) \in T \times \Omega \times \Gamma$ ne permet pas de prédire $y(t)$ pour $T \ni t > t_0$. Pour cela, il faut également connaître $x^0 \coloneqq x(t_0) \in \mathbb{R}^d$. Alors les théorèmes de Cauchy-Lipschitz sont applicables (habituellement) pour affirmer que $t \mapsto x(t)$ est une solution.
Définition 1.3. Un système est dit *statique* (ou *memoryless*) lorsque la sortie ne dépend que de l'entrée, et pas de la variable d'état.
Remarque. Dans un tel système, connaitre (t_0, u, y) est suffisant pour connaitre $y(t)$ pour tout $t > t_0$.
Définition 1.4. L'application :

$$\varphi : T \times T \times X \times \Omega \to \mathbb{R}^d$$

telle que $\forall t \in T : x(t) = \varphi(t_0, t, x^0, u)$ est appelée *fonction d'état*.

L'application :

$$\eta : T \times X \to Y$$

telle que $\forall t \in T : y(t) = \eta(t, x(t))$ est appelée *fonction de transformation de sortie*.
Définition 1.5. Un système dynamique se définit alors par le 8-uple suivant :

$$S = (T, U, \Omega, X, Y, \Gamma, \varphi, \eta)\,.$$

Remarque. On peut donc synthétiser un système dynamique par :

$$u(t) \xrightarrow{\varphi(t)} x(t) \xrightarrow{\eta(t)} y(t).$$

Proposition 1.6. *L'application φ admet les propriétés suivantes :*
- *consistance :* $\forall (t, x, u) \in T \times X \times \Omega : \varphi(t, t, x, u) = x$;
- *irréversibilité : φ est définie sur* $[t_0, +\infty) \cap T$;
- *composition :* $\forall t_0 < t_1 < t_2 \in T : \forall (u, x) \in \Omega \times X : \varphi(t_2, t_0, x, u) = \varphi\left(t_2, t_1, \varphi\left(t_1, t_0, x, u\right), u\right)$;
- *causalité :* $\forall t_0 \in T : \forall u_1, u_2 \in \Omega : \big(\forall t \in T : u_1(t) = u_2(t)\big) \Rightarrow \Big(\forall t \in T : \varphi(t, t_0, x, u_{)} = \varphi(t, t_0, x, u_2)\Big)$.

Définition 1.7. Soit un système dynamique régi par :

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u).$$

On appelle le *mouvement du système* l'ensemble $\big\{(t, x(t)) \text{ t.q. } t \geqslant t_0\big\}$.

On appelle la *trajectoire du système* l'ensemble $\big\{x(t) \text{ t.q. } t \geqslant t_0\big\}$.

Remarque. La trajectoire est donc la projection du mouvement parallèlement au temps.

Définition 1.8. Soit $\overline{x} \in X$. On dit que $\overline{x}$ est un *état d'équilibre (en temps infini)* lorsque :

$$\exists u \in \Omega \text{ t.q. } \forall (t, t_0) \in T^2 : t \geqslant t_0 \Rightarrow \varphi(t, t_0, \overline{x}, u) = \overline{x}.$$

Définition 1.9. Soit $\overline{y} \in Y$. On dit que $\overline{y}$ est une *sortie d'équilibre (en temps infini)* lorsque :

$$\forall t_0 \in T : \exists (x, u) \in X \times \Omega \text{ t.q. } \forall t \geqslant t_0 : \eta\left(t, \varphi(t, t_0, x, u)\right) = \overline{y}.$$

Définition 1.10. Un système est dit *invariant* lorsque :

1. T est stable par l'addition ;
2. $\forall (u, \delta) \in \Omega \times T : \Omega \ni u^{(\delta)} : T \to U : t \mapsto u(t - \delta)$;
3. $\forall (t_0, \delta, x^0) \in T \times T \times X : \forall t \geqslant t_0 : \varphi\left(t, t_0, x^0, u\right) = \varphi\left(t + \delta, t_0 + \delta, x^0, u^{(\delta)}\right)$;
4. y est indépendante de t, c-à-d : $y(t) = (\eta \circ x)(t)$).

Définition 1.11. Soient $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$. On dit que $x^{(2)}$ est *accessible* à l'instant $t_2 \in T$ à partir de $x^{(1)}$ lorsque :

$$\exists (t_1, u) \in T \times \Omega \text{ t.q. } t_1 < t_2 \text{ et } \varphi(t_2, t_1, x^{(1)}, u) = x^{(2)}.$$

Définition 1.12. Un système est dit *connexe à l'instant* $t \in T$ lorsque $\forall (x^{(1)}, x^{(2)}) \in X^2 : x^{(2)}$ est accessible à l'instant t à partir de $x^{(1)}$.

Si un système est connexe pour tout $t \in T$, alors il est dit connexe.

Définition 1.13. Soient $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$. On dit que $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ sont équivalents à l'instant $t_0 \in T$ lorsque :

$$\forall u \in \Omega : \forall t \geqslant t_0 : \eta\left(t, \varphi\left(t, t_0, x^{(1)}, u\right)\right) = \eta\left(t, \varphi\left(t, t_0, x^{(2)}, u\right)\right).$$

Définition 1.14. Un système est dit en *forme réduite* si $\forall (x^{(1)}, x^{(2)}) \in X^2 : x^{(1)} \neq x^{(2)} \Rightarrow x^{(1)}$ n'est pas équivalent à $x^{(2)}$.

Définition 1.15. Soit $\hat{x} \in X$. L'état $\hat{x}$ est dit observable à l'instant $t_0 \in T$ lorsque $\exists (t, u) \in T \times \Omega$ t.q. $x(t_0)$ peut être retrouvé de manière univoque à l'aide de $u\Big|_{[t_0, t)}$ et $y\Big|_{[t, t_0)}$.

1.2 Systèmes dynamiques complexes

Définition 1.16. Un *sous-système dynamique* est un système dynamique faisant partie d'un système dynamique complexe.

Définition 1.17. Soient S_1 et S_2 deux systèmes dynamiques. S_1 et S_2 sont dits *connectés en cascade* lorsque :

$$y_1 = u_2,$$

c-à-d lorsque la sortie du premier système sert d'entrée au second.

Remarque. Pour que deux systèmes S_1 et S_2 soient connectés en cascade, il est nécessaire que $T_1 = T_2, \Gamma_1 \subseteq \Omega_2$ (et donc $Y_1 \subseteq U_2$).

Proposition 1.18. *Soient les deux systèmes dynamiques suivants :*

$$S_1 = (T, U_1, \Omega_1, X_1, Y_1, \Gamma_1, \varphi_1, \eta_1),$$
$$S_2 = (T, U_2, \Omega_2, X_2, Y_2, \Gamma_2, \varphi_2, \eta_2).$$

Le système dynamique résultant de la cascade de S_1 et S_2 est donné par :

$$S = (T, U_1, \Omega_1, X_1 \times X_2, Y_2, \Gamma_2, \varphi, \eta_2),$$

où :

$$\begin{aligned}
&T = T_1 = T_2 \\
&\varphi : T \times T \times (X_1 \times X_2) \times \Omega_1 \to X : \\
&\qquad \Big(\left(t, t_0, \left(x_1(t_0), x_2(t_0)\right)\right), u \Big) \mapsto \Big(\varphi_1 \left(t, t_0, x_1(t_0), u\right), \varphi_2 \left(t, t_0, x_2(t_0), y_1(t_0, x_1, u)\right) \Big), \\
&y_1(t_0, x_1, u) : T \to Y_1 \subseteq U_2 : t \mapsto \eta_1 \Big(t, \varphi_1 \left(t, t_0 x_1(t_0), u\right) \Big).
\end{aligned}$$

Définition 1.19. Soient S_1 et S_2 deux systèmes dynamiques. S_1 et S_2 sont dits *connectés en parallèle* lorsque :

$$u_1 = u_2,$$

c-à-d lorsqu'ils ont la même fonction d'entrée.
Remarque. Pour que deux systèmes dynamiques soient connectés en parallèle, il est nécessaire que $T_1 = T_2$, $\Omega_1 = \Omega_2$ (et donc $U_1 = U_2$).

Proposition 1.20. *Soient les deux systèmes dynamiques suivants :*

$$\begin{aligned}
S_1 &= (T, U_1, \Omega_1, X_1, Y_1, \Gamma_1, \varphi_1, \eta_1), \\
S_2 &= (T, U_2, \Omega_2, X_2, Y_2, \Gamma_2, \varphi_2, \eta_2).
\end{aligned}$$

Le système dynamique résultant des systèmes S_1 et S_2 en parallèle est donné par :

$$S = (T, U, \Omega, X_1 \times X_2, Y_1 \times Y_2, \Gamma_1 \times \Gamma_2, \varphi, \eta),$$

où :

$$\begin{aligned}
&T = T_1 = T_2 \\
&U = U_1 = U_2 \\
&\Omega = \Omega_1 = \Omega_2 \\
&\varphi : (t, t_0, x, u) \mapsto \left(\varphi_1(t, t_0, x, u), \varphi_2(t, t_0, x, u)\right) \\
&\eta : \left(t, (x_1, x_2)\right) \mapsto \left(\eta_1(t, x_1), \eta_2(t, x_2)\right)
\end{aligned}$$

1.3 Rétroaction

Définition 1.21. Deux systèmes $S_1 = (T, U_1, \Omega_1, X_1, Y_1, \Gamma_1, \varphi_1, \eta_1)$ et $S_2 = (T, U_2, \Omega_2, X_2, Y_2, \Gamma_2, \varphi_2, \eta_2)$ sont dits en rétroaction l'un sur l'autre lorsqu'il existe $\nu_1 : T \to U_1, \nu_2 : T \to U_2$ et :

$$\psi_1 : Y_1 \times U_2 \times T \to U_2 \qquad \text{et} \qquad \psi_2 : Y_2 \times U_1 \times T \to U_1$$

tels que :

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= \psi_2 \left(y_1(t), \nu_2(t), t\right) \\
u_2(t) &= \psi_1 \left(y_2(t), \nu_1(t), t\right).
\end{aligned}$$

Définition 1.22. On parle de *rétroaction négative* lorsqu'une modification de $y_1(t)$ entraine une modification de $y_2(t)$ qui s'oppose au changement de $y_1(t)$.

De même, on parle de *rétroaction positive* lorsqu'une modification de $y_1(t)$ entraine une modification de $y_2(t)$ qui amplifie le changement de $y_2(t)$.

Remarque. Ce type de construction est le plus simple contenant une boucle.

De plus, il est ici question de rétroaction sur la sortie. Il peut être plus intéressant de définir une rétroaction sur l'état.

Définition 1.23. Un système est dit *rétroactionné sur l'état* lorsqu'il existe $\nu : T \to U$ et $\psi : X \times U \times T \to U$ tels que :

$$u(t) = \psi\left(x(t), \nu(t), t\right).$$

Cette fonction ψ est appelée *loi de contrôle*.

2 Automates — systèmes à temps discret et et à espace d'états discret

Définition 2.1. Un *automate* est un système dynamique invariant à temps discret et avec un espace d'états discret, et où les ensembles d'entrée et de sortie sont finis.

Définition 2.2. Un automate est dit *fini* lorsque l'espace d'états est fini.

> **Proposition 2.3.** *Dans un système dynamique invariant à temps discret, la fonction φ de transition peut être remplacée par :*
>
> $$x(t+1) = \delta(x(t), u(t)),$$
>
> *et la fonction de transformation de sortie peut être remplacée par :*
>
> $$y(t) = \eta(x(t)),$$
>
> *ce qui implique que l'observation du système dépend uniquement de l'état, et que l'état à un certain instant ne dépend plus que de la valeur à l'état précédent (modèle markovien).*

Définition 2.4. Un automate *cellulaire* de dimension $(n_1, \ldots, n_k) \in {\mathbb{N}^*}^k$ est un automate tel que $X = \chi^{\prod_{i=1}^k n_i}$, où χ est un ensemble fini d'états tel que :

$$\forall \alpha \in {\mathbb{N}^*}^k : \left(\forall 1 \leqslant j \leqslant k : 1 \leqslant \alpha_j \leqslant n_k\right) \Rightarrow \left(\forall t \in T : x_\alpha(t) \in \chi\right),$$

et tel que $x(t+1) = (\delta \circ x)(t)$, à savoir, aucune entrée $u \in \Omega$ n'est présente.

Les telles valeurs x_α sont appelées les cellules de l'automate.

Remarque. Dans un automate cellulaire, la nombre de variables d'états est vite très grand, mais reste toute fois fini.

Définition 2.5. la fonction de transition d'un automate cellulaire $\delta : X \times U \to X$ est une fonction à valeurs dans $X = \chi^{\prod_{i=1}^k n_i}$. Chaque fonction δ_α telle que $x_\alpha(t+1) = \delta_\alpha(x(t))$ est défini sur un *voisinage* de $\alpha \in {\mathbb{N}^*}^k$. Et donc, on peut écrire $x_\alpha(t+1) = \delta_\alpha\left(\gamma(x(t), \alpha)\right)$, où $\gamma : X \times {\mathbb{N}^*}^k$ est une fonction renvoyant uniquement un sous-ensemble (non-strict) de $x(t) \in X$.

Exemple 2.1. Un automate cellulaire de dimension $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ représente donc une *grille* de cellules, où l'état de chaque cellule x_{ij} à l'instant $t+1 \in T$ ne dépend que d'un voisinage de $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Par exemple, dans le jeu de la vie (J. Conway), le voisinage de (i, j) est défini par :

$$\left\{(k, \ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \text{ t.q. } |k - i| = |\ell - j| = 1\right\}.$$

Remarque. Ces systèmes dynamiques que représentent les automates cellulaires (finis) font partie des systèmes complexes suite à leur grand nombre de variables d'état. Ils ont entre autre prouvé que des règles simples et déterministes pouvaient engendrer un comportement très compliqué à décrire et à prédire. En effet, un *simple* automate cellulaire de dimension $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ peut produire plusieurs comportements distincts et simultanés dans plusieurs voisinages de cellules, certains périodiques, d'autres erratiques.