MATHF-105 : Probabilités
Résumé

R. Petit

Année académique 2015 - 2016

Contents

1 Espaces de probabilités . . . **1**
1.1 Rappel sur les séries . . . 1
1.1.1 Exemple sur les séries . . . 1
1.1.2 Conclusion de la suite géométrique . . . 1
1.2 Définition . . . 1
1.2.1 Loi uniforme sur un ensemble fini (ou dénombrable) . . . 2
1.2.2 Loi uniforme sur un ensemble infini (intervalle) . . . 2
1.3 Modèles . . . 3
1.3.1 Modèles discrets . . . 3

1 Espaces de probabilités

1.1 Rappel sur les séries

Les fonctions logarithmique et exponentielle ont un développement de Taylor exact. Pour la fonction logarithmique, on a, pour $x \in (-1, 1)$:

$$\log(1-x) = -\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}.$$

Si on pose $S_n \coloneqq \sum_{k=1}^n u_k$, on a $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite des sommes partielles, et $n \mapsto S_n$, une application croissante si (u_n) est une suite positive. Il y a donc deux situations distinctes possibles :

- (S_n) est une suite bornée ($\exists M \in \mathbb{R}\,\text{t.q.}\,\forall n \in \mathbb{N} : S_n \leq M$) et donc converge vers $S \in \mathbb{R}$;
- (S_n) n'est pas bornée ($\forall M \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}\,\text{t.q.}\,S_n > M$) et donc diverge vers $+\infty$.

1.1.1 Exemple sur les séries

Prenons $u_n \coloneqq x^n$, avec $x > 0$.

- Si $x = 1$, on a $n \to +\infty \Rightarrow S_n \to +\infty$;
- si $x \neq 1$, on a $(1-x)S_n = x - x^{n+1}$, et donc :

$$S_n \coloneqq x\frac{1-x^n}{1-x}.$$

  - Si $x < 1$, alors $x^n \to 0$ pour $n \to +\infty$, et donc $S_n \to \frac{x}{1-x}$;
  - si $x > 1$, alors $x^n \to +\infty$ pour $n \to +\infty$, et donc $S_n \to +\infty$.

1.1.2 Conclusion de la suite géométrique

On voit alors :

$$\sum_{n\geq 1} x^n = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{si } x \in [0, 1) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

Si la suite commene à l'indice 0, on a :

$$\sum_{n\geq 0} x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} x^n = \begin{cases} 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} & \text{si } x \in [0, 1) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

1.2 Définition

Définition 1.1. L'ensemble Ω est l'**espace des chances**, l'ensemble des résultats possibles d'un phénomène aléatoire.

Remarque.

- Ω peut être fini (dénombrable) ou infini ;
- $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites à valeur dans $\{0, 1\}$;

- Ω peut être un espace dit *fonctionnel* quand le résultat d'une expérience est une fonction.

Définition 1.2. Un événement E est un ensemble de réalisations possibles à une expérience tel que $E \subseteq \Omega$.

Remarque. L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ n'est pas toujours dénombrable. Et donc l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ est-il le bon ensemble pour décrire les événements ?

- Si $|\Omega| \in \mathbb{N}$: oui ;
- si $|\Omega| \notin \mathbb{N}$: non.

Définition 1.3. $\mathcal{F}$ est la **classe des événements**. On mesure la *probabilité d'occurrence* d'un événement $A \in \mathcal{F}$. On introduit une fonction d'ensemble $\mathbb{P}$ où :

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1] : A \mapsto \mathbb{P}(A).$$

On impose :

(*i*) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

(*ii*) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(*iii*) $\forall A, B \in \mathcal{F} : A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Proposition 1.4. *Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. On a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_i \leq n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{\gamma=1}^{i} A_{k_\gamma}\right).$$

1.2.1 Loi uniforme sur un ensemble fini (ou dénombrable)

Définition 1.5. Soient $m < n \in \mathbb{N}$. On définit l'**intervalle entier** $[\![m, n]\!]$ par :

$$[\![m, n]\!] : \{x \in \mathbb{N} \,\text{t. q.}\, m \leq x \leq n\}.$$

Définition 1.6. Soit $\Omega = [\![1, n]\!]$. Soit $A \subseteq \Omega$. La loi uniforme est donnée par :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n}.$$

Remarque. Il arrive que $|A|$ soit difficile à déterminer et qu'il faille aller chercher du côté de l'analyse combinatoire.

1.2.2 Loi uniforme sur un ensemble infini (intervalle)

Définition 1.7. Soit $\Omega = [0,1]$ et soit $A = [a, b] \subseteq \Omega$. La loi uniforme est donnée par :

$$\mathbb{P}(A) = (b - a).$$

Remarque. La définition de loi uniforme sur un intervalle fait intervenir la notion de mesure et donc de mesurabilité. Or il existe des parties de Ω sur lesquelles la mesure n'a pas de sens. En général, $\mathcal{P}(\Omega)$ est *trop grand*, et il faut donc remplacer l'utilisation de l'ensemble des parties par la notion de tribu.

Définition 1.8. Soit Ω un ensemble de chances et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ une famille de parties de Ω. On dit que $\mathcal{F}$ est une tribu s'il respecte les trois propriétés suivantes :

- $\emptyset \in \mathcal{F}$;
- $\forall A : A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathcal{F}$;
- $\forall A_1, \ldots, A_n, \ldots : A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{k \geq 1} A_k \in \mathcal{F}$.

Une autre appellation pour une tribu est une σ-algèbre.

Remarque.

- On remarque que $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu, mais une tribu trop grande pour être intéressante ;
- Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors $T := \{\emptyset, A, A^{\complement}, \mathcal{P}(\Omega)\}$ est une tribu. T est la plus petite tribu contenant A, et on l'appelle la **tribu engendrée par** A, que l'on note $\sigma(A)$.

Définition 1.9. Soit I une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$. On appelle la *tribu engendrée par* I la plus petite tribu contenant I et on la note $\sigma(I)$.

En prenant $I := \{$ intervalles ouverts de $[0,1]\}$, on obtient $\sigma(I)$ que l'on appelle **tribu des boréliens**. [1]

Définition 1.10. Soit Ω un ensemble de chances et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une tribu sur Ω. Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une fonction $\mathbb{P}$ définie par :

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1] : A \mapsto \mathbb{P}(A),$$

où $\mathbb{P}$ satisfait :

(*i*) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

(*ii*) $\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(aA) + \mathbb{P}(A^{\complement}) = 1$;

(*iii*) $\forall A_1, \ldots, A_n, \ldots$ disjoints deux à deux, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k\right) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A_k).$$

Définition 1.11. On appelle $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités.

Remarque. Probabiliser un expérience revient à déterminer :

- Ω, l'espace des chances ;
- $\mathcal{F}$, la classe des événements ;
- $\mathbb{P}$, la fonction d'ensembles sur $\mathcal{F}$.

1.3 Modèles

1.3.1 Modèles discrets

Remarque. On prend Ω un ensemble fini ou dénombrable. On prend également $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Si Ω est fini, on parle de tirages, et si Ω est infini dénombrable, on parle de populations.

[1] Le nom de *borélien* vient du mathématicien français Émile Borel suite à ses travaux sur la théorie de la mesure.

On pose :

$$\mathbb{P} : \{k\} \mapsto p_k \in [0,1],$$

où :

$$\sum_{k \in \Omega} p_k = 1$$

et pour $A = \{k_1, \dots, k_n\} \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\gamma=1}^{n} p_{k_\gamma}.$$

Définition 1.12 (Modèle de Bernoulli)**.** On prend $\Omega = \{0,1\}$ où :

$$\begin{cases} p_0 & = 1 - p \\ p_1 & = p \end{cases}.$$

Remarque. Il est évident que $p + (1-p) = 1 = P(\Omega)$.

Définition 1.13 (Modèle binomial)**.** On prend $\Omega = [\![0, N]\!]$ (et donc $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$) et $p \in [0,1]$. Le modèle binomial est défini par $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{N-k}$ pour tout $k \in [\![0, N]\!]$.

Remarque. On remarque que $\sum_{k \geq 1} p_k = 1$ car les p_k représentent les termes du binôme de Newton $(p + (1 - p))^N = 1^N = 1$.

Définition 1.14 (Modèle géométrique)**.** On prend $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Omega) \simeq \mathbb{R}$, et $p \in (0,1)$. Le modèle géométrique est défini par $p_k = (1-p)^{k-1} p$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque. On remarque que :

$$\sum_{k \geq 1} p_k = \sum_{k \geq 1} p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k \geq 0} (1-p)^k = p \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1,$$

où on utilise la formule de la somme des termes d'une suite géométrique u définie par $u_n = u_{n-1} q$ pour $n \geq 1$ (avec $0 < q < 1$) qui donne :

$$\sum_{k=0}^{N} u_k = u_0 \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q},$$

et pour la série, il suffit de passer à la limite :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} u_k = \lim_{N \to +\infty} u_0 \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = u_0 \frac{1}{1-q}.$$

Définition 1.15 (Modèle de Poisson)**.** On prend $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, et un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$. Le modèle poissonien est défini par $p_k = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque. On remarque que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ en utilisant la formule de Taylor de l'exponentielle :

$$\exp(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}.$$

On a effectivement :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(\{k\}) = \sum_{k \geq 0} p_k = \sum_{k \geq 0} \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(-\lambda) \exp(\lambda) = 1.$$