

Calcul différentiel et intégral II

R. Petit

année académique 2016 - 2017

Table des matières

1	Suites et séries de fonctions	1
1.1	Rappels	1
1.1.1	Topologie métrique	1
1.1.1.1	Espaces métriques	1
1.1.1.2	Espaces vectoriels	2
1.1.1.3	Ouverts, fermés, compacts	3
1.1.1.4	Suites de Cauchy	4
1.1.1.5	Continuité	4
1.2	Convergence de suites de fonctions	5
1.2.1	Convergence simple	5
1.2.2	Convergence uniforme	6
1.2.3	L'espace $B(X, E)$	7
1.2.4	Convergence uniforme sur tout compact	8
1.3	Suites de fonctions et opérations d'intégration et de dérivation	9
1.3.1	Passage à la limite dans une intégrale de Riemann	9
1.3.2	Passage à la limite dans une dérivation ordinaire ou partielle	10
1.4	Séries de fonctions	13
1.4.1	Retranscription des résultats sur les suites	13
1.4.2	Convergence normale	14

Chapitre 1

Suites et séries de fonctions

1.1 Rappels

1.1.1 Topologie métrique

1.1.1.1 Espaces métriques

Définition 1.1. Soit X un ensemble. Une *distance* sur X est une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

1. $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;
2. $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire) ;
3. $\forall x, y \in X : (d(x, y) = 0 \iff x = y)$ (séparation¹).

Définition 1.2. On appelle *espace métrique* (X, d) un espace X muni d'une distance d sur X .

Définition 1.3. Soient (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $x \in X$. La suite (x_n) converge vers x dans (X, d) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Cela se note :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} x.$$

Proposition 1.4. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans (X, d) , un espace métrique. Soient $x, y \in X$. Si :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} x \quad \text{et} \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} y,$$

alors $x = y$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $x_n \rightarrow x$ et $x_n \rightarrow y$, on sait qu'il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq N_1 : d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2 : d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dès lors, soit $N := \max\{N_1, N_2\}$. On peut dire :

$$\forall n \geq N : d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

1. Également appelé *principe d'identité des indiscernables*.

On en déduit $d(x, y) = 0$ et donc $x = y$ par séparation. □

1.1.1.2 Espaces vectoriels

Définition 1.5. Soit \mathbb{K} , un sous-corps de \mathbb{C} . On appelle *norme* sur le \mathbb{K} -e.v. E toute application $n : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

1. $\forall x \in E : (n(x) = 0 \iff x = 0)$;
2. $\forall x \in E : \forall \lambda \in \mathbb{K} : n(\lambda x) = |\lambda| n(x)$;
3. $\forall x, y \in E : n(x + y) \leq n(x) + n(y)$.

Proposition 1.6. Soit (E, n) un \mathbb{K} -espace vectoriel normé. L'application d suivante est une distance sur E (on l'appelle la distance associée à la norme n) :

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+ : (x, y) \mapsto n(y - x).$$

Démonstration. EXERCICE. □

Remarque. Si (E, n) est un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de E , et si $x \in E$, alors on dit :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{n} x$$

lorsque :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$$

au sens de la distance associée à la norme n .

Exemple 1.1. \mathbb{R} est un \mathbb{R} -e.v. normé avec pour norme $n : x \mapsto |x|$.

Exemple 1.2. Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $p \in [1, +\infty)$. Pour $x = (x_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{C}^d$, on définit :

$$n(x) = \|x\|_p := \left(\sum_{k=0}^d |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On a alors (\mathbb{C}^d, n) est un \mathbb{C} -espace vectoriel normé. Également (\mathbb{C}^d, n) et (\mathbb{R}^d, n) sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels normés.

Définition 1.7. Soit $x \in \mathbb{C}^d$. On définit la *norme infinie* de x dans \mathbb{C}^d par :

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|.$$

Exemple 1.3. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_\infty)$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel normé. Également, $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ et $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_\infty)$ sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels normés.

Démonstration. EXERCICE. □

Définition 1.8. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On dit que la suite (x_n) est *presque nulle* s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N : x_n = 0$.

Exemple 1.4. Soient $P \in \mathbb{C}[x]$ et $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite presque nulle des coefficients de P . On pose :

$$\|P\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

Alors $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{C}[x]$.

Démonstration. EXERCICE. □

1.1.1.3 Ouverts, fermés, compacts

Définition 1.9. Soit (X, d) un espace métrique. On appelle *boule ouverte* de centre $x \in X$ et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble :

$$B(x, r[:= \{y \in X \text{ t.q. } d(x, y) < r\}.$$

On définit également la *boule fermée* de centre x et de rayon r l'ensemble :

$$B(x, r] := \{y \in X \text{ t.q. } d(x, y) \leq r\}.$$

Définition 1.10. Soit (X, d) un espace métrique et soit $O \subset X$. On dit que O est une partie *ouvert* dans X lorsque :

$$\forall x \in O : \exists r \geq 0 \text{ t.q. } B(x, r) \subset O.$$

Remarque. Pour tout X , les ensembles \emptyset et X sont tous deux des ouverts de X .

Définition 1.11. Soit (X, d) un espace métrique. Une partie $F \subset X$ de X est dite *fermée* dans X lorsque $X \setminus F$ est ouvert.

Proposition 1.12. Dans un espace métrique (X, d) , soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de X indicés par un ensemble $I \neq \emptyset$. Alors $(\bigcup_{i \in I} O_i)$ est un ouvert de X . Si de plus I est fini, alors $(\bigcap_{i \in I} O_i)$ est un ouvert de X .

Exemple 1.5. Prenons $X = \mathbb{R}$ et $O_i = (-1 - \frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{i})$. Alors $(\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} O_i) = [-1, 1]$ qui n'est pas un ouvert de X .

Démonstration. EXERCICE. □

Définition 1.13 (Compacts par Borel-Lebesgue). Soit (X, d) un espace métrique. Une partie $K \subset X$ est dite *compacte* si $K \neq \emptyset$ et si, de tout recouvrement de K par des ouverts de X , on peut extraire un sous-recouvrement fini.

C'est-à-dire lorsque :

1. $K \neq \emptyset$;
2. $\forall I \neq \emptyset : \forall (O_i)_{i \in I}$ ouverts de X t.q. $K \subset (\bigcup_{i \in I} O_i) : \exists J \subset I$ fini t.q. $K \subset (\bigcup_{j \in J} O_j)$.

Proposition 1.14 (Compacts par Bolzano-Weierstrass). Soit (X, d) un espace métrique. Une partie K de X est compacte si et seulement si :

1. $K \neq \emptyset$;
2. de toute suite de points de K , on peut extraire une sous-suite convergente dans K .

Démonstration. Admis. □

Exemple 1.6. L'ensemble $[0, 1]$ est un compact de \mathbb{R} .

Proposition 1.15. Soit (X, d) , un espace métrique et $K \subset X$, une partie compacte. Alors K est fermé et borné.

Démonstration. EXERCICE. (Absurde) □

Proposition 1.16. Soit (E, n) un \mathbb{K} -e.v. normé de dimension finie. Alors les parties compactes de E sont les parties fermées bornées non nulles.

Démonstration. Admis. □

1.1.1.4 Suites de Cauchy

Définition 1.17. Soit (X, d) , un espace métrique. On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m, n \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Proposition 1.18. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans l'espace métrique (X, d) , alors elle est de Cauchy.

Démonstration. Si x est la limite de la suite (x_n) , on pose $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N : d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc $\forall m, n \geq N : d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon$. □

Définition 1.19. Un espace métrique (M, d) est dit *complet* quand toute suite de Cauchy de points de X converge dans X .

Définition 1.20. Un espace vectoriel E est dit *de Banach* lorsque toute suite de Cauchy de vecteurs de E converge dans E .

Remarque. On remarque que dans un espace métrique complet, une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy (ce qui est entre autres le cas de \mathbb{R}).

De plus, les suites de Cauchy permettent, dans des espaces complets, de montrer que des suites convergent sans connaître leur limite.

Exemple 1.7. Les espaces métriques $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sont des espaces de Banach. Et pour tout $p \in [1, +\infty)$ et $q \in \mathbb{N}$, les espaces métriques $(\mathbb{R}^q, \|\cdot\|_p)$ et $(\mathbb{C}^q, \|\cdot\|_p)$ sont des espaces de Banach.

1.1.1.5 Continuité

Définition 1.21. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Une application $f : X \rightarrow Y$ est dite continue en $x_0 \in X$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta \geq 0 \text{ t.q. } \forall x \in X : (d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon).$$

On dit que f est continue sur $A \subset X$ lorsque f est continue en tout $a \in A$.

Proposition 1.22. Une fonction $f : (X, d) \rightarrow (Y, d)$ est continue sur X lorsque l'image réciproque par f de (Y, d) est un ouvert de (X, d) .

Démonstration. Admis. □

Proposition 1.23. Une fonction $f : (X, d) \rightarrow (Y, d)$ est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si l'image par f de toute suite de points de X convergente en x_0 est une suite convergente en $f(x_0)$.

Démonstration. Admis. □

Définition 1.24. Soit $f : (X, d) \rightarrow (Y, d)$. f est dite *lipschitzienne* de constante $K \geq 0$ lorsque

$$\forall (x, y) \in X^2 : d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y).$$

Proposition 1.25. Si $f : (X, d) \rightarrow (Y, d)$ est lipschitzienne, alors elle est continue sur X .

Démonstration. EXERCICE. □

Définition 1.26. Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, une suite dans un espace métrique (X, d) . On dit que (a_k) est *presque nulle* lorsqu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N : a_n = 0$.

Exemple 1.8.

- Pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'application $c_i : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C} : P = \sum_{k=0}^+ \infty a_k x^k \mapsto a_i$ est continue de $(\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. En effet, pour $i \in \mathbb{N}$, $P = \sum_{k=0}^+ \infty a_k x^k$, et $Q = \sum_{k=0}^+ \infty b_k x^k$, on a :

$$|c_i(P) - c_i(Q)| = |a_i - b_i| \leq \|P - Q\|_\infty = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k - b_k|.$$

On en déduit que c_i est lipschitzienne sur $\mathbb{C}[x]$ et donc continue sur $\mathbb{C}[x]$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons :

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \in \mathbb{C}[x].$$

On observe que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$ car :

$$\|P_n - P_m\|_\infty = \left\| \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} x^k \right\|_\infty.$$

On a alors :

$$\|P_n - P_m\|_\infty = \left\| \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}} \frac{1}{k!} x^k \right\|_\infty = \max_{\min\{m,n\}+1 \leq k \leq \max\{m,n\}} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(\min\{m,n\} + 1)!}.$$

Montrons que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Supposons (par l'absurde) que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $P \in (\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$. Notons $(a_k) \subset \mathbb{C}$, la suite presque nulle des coefficients de P . Pour $i \in \mathbb{N}$, on a $c_i(P) = \frac{1}{i!}$ quand $n \geq i$. Or par la propriété de Lipschitz, on sait que $c_i(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c_i(P) = a_i$. Or (a_k) est presque nulle et $a_i = \frac{1}{i!}$. Il y a donc contradiction. Donc (P_n) ne converge pas dans $(\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$. Dès lors, $(\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.

1.2 Convergence de suites de fonctions

1.2.1 Convergence simple²

Définition 1.27. Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. On dit que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ où $f_n : X \rightarrow (Y, d)$ converge simplement sur X lorsque :

$$\forall x \in X : (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge dans } (Y, d).$$

Définition 1.28. Dans ce cas, la suite a pour limite simple la fonction :

$$f : X \rightarrow (Y, d) : x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

et est bien définie. Cela se note :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS}} f \quad \text{ou} \quad f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS sur } X} f.$$

Exemple 1.9. Soient $X = [0, 1]$ et $Y = \mathbb{R}$. On pose $f_n(x) = x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Si $x \in [0, 1)$, alors la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison x avec $|x| < 1$ donc la suite converge vers 0 ;

2. La convergence simple est la notion de convergence « minimale » que l'on va exiger. Il existe des convergences encore plus élémentaires (voir théorie de l'intégration de Lebesgue), mais qui se trouvent en dehors des objectifs du cours.

- si $x = 1$, alors $f_n(x) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction :

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

Remarque.

- On a « perdu » la continuité des fonctions f_n par passage à la limite ;
- ici, la convergence simple peut s'écrire ainsi, à l'aide de quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall x \in X : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

On remarque donc que N dépend de x (ordre des quantificateurs).

1.2.2 Convergence uniforme

Définition 1.29. Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique, et $f_n : X \rightarrow (Y, d)$. On dit que (f_n) converge uniformément sur X vers $f : X \rightarrow (Y, d)$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : \forall x \in X : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Cela se note :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } X} f.$$

Remarque. La définition est très proche de la convergence simple. La différence étant que pour une convergence uniforme, il faut que $N \in \mathbb{N}$ ne dépende pas de la valeur de x .

Proposition 1.30. Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans (Y, d) et $f : X \rightarrow (Y, d)$. Si (f_n) converge uniformément sur X vers f , alors (f_n) converge simplement sur X vers f .

Démonstration. EXERCICE. □

Exemple 1.10. Prenons $X = \mathbb{R} = Y$ et pour tout $n \geq 1$, définissons $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Fixons $x \in \mathbb{R}$. On trouve alors :

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \sqrt{x^2} = |x|.$$

Donc :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS sur } X} |\cdot|.$$

Théorème 1.31. Soient (X, d) , (Y, d) deux espaces métriques. Soient $f_n : X \rightarrow Y$, $a \in X$. On suppose :

- $\exists f$ t.q. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } X} f$;
- $\forall n \in \mathbb{N} : f_n$ est continue en a .

Alors f est continue en a .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme des f_n , on sait :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : \forall x \in X : d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De plus, la fonction f_N est continue en a par hypothèse. Dès lors, on sait qu'il existe δ tel que :

$$\forall x \in X : d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f_N(x), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi, prenons $x \in X$ tel que $d(x, a) < \delta$. On a alors :

$$d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f(a)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a)) \leq 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

Corollaire 1.32. Si $f_n \in C^0(X, Y)$ et $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU \text{ sur } X}$, alors $f \in C^0(X, Y)$.

Démonstration. Les fonctions f_n sont continues en tout point et $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU \text{ sur } X}$ par hypothèse. Dès lors, pour tout point $a \in X$, par le théorème précédent, on peut dire f continue en a . Dès lors $f \in C^0(X, Y)$. □

1.2.3 L'espace $B(X, E)$

Définition 1.33. Soient $X \neq \emptyset$ et $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. On note :

$$B(X, E) := \{f : X \rightarrow E \text{ t.q. } f \text{ est bornée sur } X\}.$$

Pour $f \in B(X, E)$, on définit :

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E.$$

Proposition 1.34. $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

Démonstration. EXERCICE. □

Théorème 1.35. $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est complet si et seulement si $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet.

Démonstration. Supposons d'abord $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ complet et montrons que $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet.

Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy d'éléments de E . Soit (f_n) une suite de fonctions de $B(X, E)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in X : f_n(x) = x_n.$$

Puisque (x_n) est de Cauchy, on sait que :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m, n \geq N : d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Or, avec $a \in X$ fixé, on peut alors dire $\forall m, n \geq N : d(f_m(a), f_n(a)) < \varepsilon$, et ce peu importe le a choisi (car les f_n sont constantes). On a donc (f_n) une suite de Cauchy dans $B(X, E)$ car $d(f_m(a), f_n(a)) = \|f_m - f_n\|_\infty$. Or, par complétude de $B(X, E)$, on sait qu'il existe $f \in B(X, E)$ telle que $f_n \rightarrow f$. La fonction f est également constante. Posons L la seule image de f . Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N : \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$.

Or :

$$\varepsilon > \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\|_E = \|f_n(a) - f(a)\|_E = \|x_n - L\|.$$

Dès lors, on sait que (x_n) converge dans E .

Montrons maintenant que si $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet, alors $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est complet également.

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de fonctions de $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall m, n \geq N : \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon.$$

Soit $x \in X$. On observe que :

$$\forall m, n \geq N : \|f_n(x) - f_m(x)\|_E \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

La suite $(f_n(x))_n$ est donc une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_E)$. Par complétude de E , on sait qu'il existe $f(x) \in E$ tel que $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Montrons maintenant que $f \in B(X, E)$.

La suite $(f_n)_n$ est de Cauchy et donc bornée. Soit $M \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} : \|f_n\|_\infty < M$. Passons à la limite dans $(B(X, E))$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in X : \|f(x)\|_E < M.$$

Ainsi, $f \in B(X, E)$ par définition.

Soit alors $\varepsilon > 0$. Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X$, on a :

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_E \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Passons alors à la limite en m , ce qui donne :

$$\|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Dès lors :

$$\forall n \geq N : \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

□

Remarque. Quand $X \neq \emptyset$ et $Y = E$ est un espace vectoriel normé, on a :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } X} f \iff \begin{cases} \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : f_n - f \in B(X, E) \\ f_n - f \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_\infty} 0 \end{cases}.$$

1.2.4 Convergence uniforme sur tout compact

Définition 1.36. Soit X , une partie non-vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|\cdot\|_E)$. Soit (Y, d) un espace métrique. Une suite $f_n : X \rightarrow Y$ converge uniformément vers $f : X \rightarrow Y$ sur tout compact lorsque :

$$\forall \text{ compact } K \subset X : f_n \Big|_K \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } K} f \Big|_K.$$

Cela se note :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur tout cpct de } X} f.$$

Proposition 1.37. Si la suite f_n converge uniformément sur tout compact de X et si toutes les fonctions f_n sont continues en $a \in X$, alors f est continue en a .

Démonstration. EXERCICE.

□

Exemple 1.11. Prenons $X = Y = \mathbb{R}$. On définit $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$. On a alors $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS sur } X} \exp$.

De plus :

$$\|f_n - \exp\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - \exp(x) \right| = +\infty.$$

Donc f_n ne converge pas uniformément vers \exp . Montrons maintenant que f_n converge uniformément vers \exp sur tout compact de \mathbb{R} . Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact. On sait qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ tels que $K \subset [a, b]$. Pour $x \in [a, b]$, par Lagrange, on a :

$$\exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(c_x),$$

avec $c_x \in [a, b]$.

Ainsi :

$$\left| \exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in [a, b]} \exp(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{[a, b]} f$ et donc la convergence uniforme sur tout compact de f_n vers f .

1.3 Suites de fonctions et opérations d'intégration et de dérivation

1.3.1 Passage à la limite dans une intégrale de Riemann

Soit X un pavé de \mathbb{R}^d (donc $X = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$ avec $a_i < b_i \forall i \in \{1, \dots, d\}$).

Théorème 1.38. Soit $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ intégrables au sens de Riemann sur X . Supposons $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } X} f$. Alors :

- f est intégrable au sens de Riemann ;
- la $(\int_X f_n(x) dx)_n$ converge vers $\int_X f(x) dx$.³

Démonstration. On note $\mathcal{E}(X, \mathbb{R}) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } f \text{ est élémentaire}\}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par la convergence uniforme, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N : \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{4|X|},$$

où $|X| = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$.

Par intégrabilité de f_N , on sait qu'il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(X, \mathbb{R})$ telles que :

$$\psi \leq f_N \leq \varphi \quad \text{et} \quad \int_X (\varphi - \psi) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors :

$$\psi - f_N \leq f \leq \varphi + f_N,$$

ou encore :

$$\psi - \frac{\varepsilon}{4|X|} \leq f \leq \varphi + \frac{\varepsilon}{4|X|}.$$

3. Cela veut dire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) dx = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

En posant $\bar{\psi} := \psi - \frac{\varepsilon}{4|X|}$ et $\bar{\varphi} := \varphi + \frac{\varepsilon}{4|X|}$, on a $\bar{\psi}, \bar{\varphi} \in \mathcal{E}(X, \mathbb{R})$. De plus :

$$\int_X (\psi - \varphi) = \int_X \left(\bar{\psi} + \frac{\varepsilon}{4|X|} - \left(\bar{\varphi} - \frac{\varepsilon}{4|X|} \right) \right) = \frac{\varepsilon}{2|X|} |X| + \int_X \bar{\psi} - \bar{\varphi} < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dès lors, on en déduit f intégrable au sens de Riemann.

Fixons $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme de f_n vers f sur X , on sait que :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : \|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{|X|}$$

Et donc :

$$\left| \int_X f_n(x) dx - \int_X f(x) dx \right| = \left| \int_X (f_n - f)(x) dx \right| \leq \left| \int_X \|f_n - f\|_\infty dx \right| = |X| \|f_n - f\|_\infty \leq |X| \frac{\varepsilon}{|X|} = \varepsilon.$$

Finalement, la suite $(\int_X f_n(x) dx)_n$ converge dans \mathbb{R} vers $\int_X f(x) dx$. □

Remarque.

1. Il est possible d'avoir les résultats sans vérifier les hypothèses. Par exemple, $X = [0, 1] \subset \mathbb{R} = Y$, avec $f_n(x) = x^n$. On sait que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS sur } X} 1_{\{x=1\}}$ et que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$. On remarque alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \int_0^1 1_{\{x=1\}}(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx ;$$

2. si les hypothèses ne sont pas vérifiées, la conclusion peut être fausse. Par exemple, $X = [0, 1] \subset \mathbb{R} = Y$. On définit ($n \geq 1$) :

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n\alpha_n x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2n} \\ 2\alpha_n - 2n\alpha_n x & \text{si } \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

où $\alpha_n \in \mathbb{R}_0^+$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \int_0^1 f_n(x) dx = 1$, donc $\alpha_n = 2n$.

On a alors $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS sur } X} 0 = f$. La fonction nulle $0(x)$ est intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$.

Finalement, on a :

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1.$$

Dans ce cas précis, on ne peut pas passer à la limite.

1.3.2 Passage à la limite dans une dérivation ordinaire ou partielle

Théorème 1.39. Soit $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$, un ouvert. Soient $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, toutes de classe C^1 sur Ω . Supposons :

- $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS sur tout cpt de } \Omega} f$;
- $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket : \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } \Omega} g_i$.

Alors :

1. $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$;
2. $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket : \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \text{ dans } \Omega$;
3. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU \text{ sur tout cpct de } \Omega} f$.

Démonstration. Soit $x \in \Omega$. Par ouverture de Ω , on sait qu'il existe $\delta \geq 0$ tel que $B(x, \delta) \subset \Omega$. On en déduit que $B(x, \frac{\delta}{2})$ est incluse dans $B(x, \delta)$. Or $B(x, \frac{\delta}{2})$ est fermé et borné par définition. $B(x, \frac{\delta}{2})$ est donc un compact de Ω .

Soient $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et $h \in [\pm \frac{\delta}{2}]$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x + h e_i) = f_n(x) + \int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + s e_i) ds.$$

Or comme $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS \text{ sur tout cpct de } \Omega} f$ et pour tout i , $\frac{\partial f_n}{\partial x_i}$ converge uniformément vers g_i sur $B(x, \frac{\delta}{2})$, il vient :

$$f_n(x + h e_i) = f_n(x) + \int_0^h g_i(x + s e_i) ds,$$

où $\{e_1, \dots, e_d\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^d .

On en déduit alors que f admet une dérivée partielle par rapport à x_i en x :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = g_i(x).$$

De plus, les f_n sont $C^1(\Omega, \mathbb{R})$, et donc les dérivées partielles $\frac{\partial f_n}{\partial x_i}$ sont $C^0(\Omega, \mathbb{R})$ pour tout i et par convergence uniforme sur les compacts, $g_i \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$ (Proposition 1.37).

On en déduit alors $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ avec $\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i$ pour tout i dans Ω (points 1 et 2 à montrer).

Il reste donc à montrer le point 3.

Soit $K \subset \Omega$, un compact. Par ouverture de Ω , on sait que pour tout $a \in K$, on a :

$$\exists r_a \geq 0 \text{ t.q. } B(a, r_a) \subset \Omega.$$

Dès lors, on sait que :

$$K \subset \bigcup_{a \in K} B\left(a, \frac{r_a}{2}\right).$$

Par complétude, on sait qu'il existe un sous-recouvrement fini de K , c'est-à-dire $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in K^p$ tel que :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^p B\left(a_i, \frac{r_{a_i}}{2}\right).$$

Par convergence simple de f_n vers f , et puisque les a_i sont en nombre fini, on peut alors exprimer :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket |f_n(a_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Fixons donc $\varepsilon > 0$, soit N correspondant et soit $x \in K$. Il existe $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $x \in B(a_k, \frac{r_{a_k}}{2})$ car les boules ouvertes forment un recouvrement de K . On a alors :

$$f_n(x) = f_n(a_k) + \int_0^1 \langle \nabla f_n(a_k + t(x - a_k)), (x - a_k) \rangle dt,$$

et :

$$f(x) = f(a_k) + \int_0^1 \langle \nabla f(a_k + t(x - a_k)), (x - a_k) \rangle dt.$$

Par différence, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(a_k) - f(a_k)| + \int_0^1 \|\nabla f_n(a_k + t(x - a_k)) - \nabla f(a_k + t(x - a_k))\| dt \cdot \|x - a_k\|.$$

Par convergence uniforme sur $(\bigcup_{i=1}^p B(a_i, \frac{r_{a_i}}{2}))$ de ∇f_n vers ∇f , on sait que :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : \|\nabla f_n - \nabla f\|_{\infty, \bigcup_{i=1}^p B(a_i, \frac{r_{a_i}}{2})} < \frac{2\varepsilon}{\max_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} r_{a_i}}.$$

Finalement, on a :

$$\forall x \in K : \forall n \geq N : \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon + \frac{r_{a_k}}{2} \cdot \frac{2\varepsilon}{\max_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} r_{a_i}} \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, pour $n \geq N$, on a :

$$\|f_n - f\|_{\infty, K} \leq 2\varepsilon.$$

□

Remarque. Ce théorème est vrai en particulier pour $d = 1$, et Ω un segment de \mathbb{R} .

Exemple 1.12 (Contre-exemples ne vérifiant pas les hypothèses donc ne pouvant faire passer la limite dans la dérivation).

$f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$, $n \geq 1$, $x \in X = \mathbb{R}$. On a donc $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } \mathbb{R}} 0 = f$ car $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$ avec $\frac{1}{n}$ ne dépendant pas de x . Les f^n sont $C^\infty(\mathbb{R})$ et sont donc dérivables :

$$\frac{df_n}{dx} = n \cos(n^2 x),$$

et donc :

$$\left. \frac{df_n}{dx} \right|_{x=0} = n \rightarrow +\infty.$$

On en déduit :

$$\neg \left(\frac{df_n}{dx} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{df}{dx} \right).$$

2. $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $n \geq 1$, $x \in X = [0, 1]$. On a $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } X} 0$. Puisque les f_n sont $C^\infty(X, \mathbb{R})$, on a :

$$\frac{df_n}{dx} = x^{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1_{\{x=1\}},$$

qui n'est pas une dérivée. À nouveau, la suite des dérivées des f_n ne tend pas vers la dérivée de f .

Corollaire 1.40. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, un ouvert non-vide. Soit $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^p(\Omega, \mathbb{R})$. Supposons :

$$\begin{aligned} &— \forall q \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket : \forall (i_1, \dots, i_q) \in \llbracket 1, d \rrbracket^q : \frac{\partial^q f_n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_q}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU \text{ sur } \Omega} g_{i_1, \dots, i_q} ; \\ &— \forall (i_1, \dots, i_p) \in \llbracket 1, d \rrbracket^p : \frac{\partial^p f_n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU \text{ sur } \Omega} g_{i_1, \dots, i_p} . \end{aligned}$$

Alors :

1. $f = g_\emptyset \in C^p(\Omega, \mathbb{R})$;
2. $\forall q \in \llbracket 1, p \rrbracket : \forall (i_1, \dots, i_q) \in \llbracket 1, d \rrbracket^q : \frac{\partial^q f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_q}} = g_{i_1, \dots, i_q} ;$
3. $\forall q \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket : \forall (i_1, \dots, i_q) \in \llbracket 1, d \rrbracket^q : \frac{\partial^q f_n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_q}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU \text{ sur tout cpct de } \Omega} g_{i_1, \dots, i_q} .$

Démonstration. EXERCICE. (Récurrence sur p par le résultat précédent) □

1.4 Séries de fonctions

1.4.1 Retranscription des résultats sur les suites

Définition 1.41. Soit $u_n : X \rightarrow Y$ où $X \neq \emptyset$ et Y est un espace vectoriel normé. On appelle *somme partielle d'ordre n de la série de terme général u_n* la fonction suivante :

$$S_n : X \rightarrow Y : x \mapsto \sum_{k=0}^n u_k(x).$$

On dit que la série de terme général u_n *converge simplement* sur X lorsque S_n converge simplement sur X . De même pour la *convergence uniforme* sur X et la *convergence uniforme sur tout compact* de X .

Théorème 1.42. Soient (X, d) un espace métrique et Y un espace vectoriel normé. Soit $u_n : X \rightarrow Y$. Si $\forall n \in \mathbb{N} : u_n$ est continue en $a \in X$ et si la série de terme général u_n converge uniformément sur X , alors :

$$S := \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \text{ est continue en } a.$$

Démonstration. EXERCICE. □

Théorème 1.43. Soit $X \neq \emptyset$, un pavé de \mathbb{R}^d et soit $u_n : X \rightarrow Y$ t.q. $\sum_{n \geq 0} u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU \text{ sur } X} S$ avec u_n intégrable au sens de Riemann pour tout n . Alors :

1. S est intégrable au sens de Riemann sur X ;
2. la suite $\int_X S_n(x) dx$ converge vers $\int_X S(x) dx$.

Démonstration. EXERCICE. □

Théorème 1.44. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, un ouvert non-nul et soit $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^p(\Omega, \mathbb{R})$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons :

- $\sum_{n \geq 0} u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS \text{ sur } \Omega} S$;
- $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ t.q. $|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i \leq p : \sum_{n \geq 0} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS \text{ sur } \Omega} s_\alpha$;
- lorsque $|\alpha| = p$, la convergence ci-dessus est uniforme sur les compacts de Ω .

Alors :

1. $S \in C^p(\Omega, \mathbb{R})$;

$$2. \forall \alpha \in \mathbb{N}^d : \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} S = \sum_{n \geq 0} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} u_n ;$$

3. Il y a convergence uniforme sur les compacts de Ω des séries de dérivées partielles d'ordre 0 à $p - 1$.

1.4.2 Convergence normale

Définition 1.45. Soient $X \neq \emptyset$ et Y un espace vectoriel normé. On dit que la série de terme général $u_n : X \rightarrow Y$ converge normalement sur X lorsque :

$$\sum_{n \geq 0} \|u_n\|_{\infty, X} < +\infty.$$

Définition 1.46. On dit que la série de terme général $u_n : X \rightarrow Y$ vérifie le critère de Weierstrass lorsqu'il existe $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in X : \|u_n(x)\|_E \leq M_n ;$
- $\sum_{n \geq 0} M_n < +\infty.$

Remarque. $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur X si et seulement si elle vérifie le critère de Weierstrass.

Proposition 1.47. Si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace vectoriel normé complet, et si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur X alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge uniformément sur X .

Démonstration. Écrivons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k \in B(X, E)$. Par convergence normale, la suite $\sigma_n = \sum_{k \geq 0} \|u_k\|_{\infty, X}$ converge. De plus, (σ_n) est de Cauchy dans \mathbb{R}^+ . Donc :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n, m \geq N : |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\|_{\infty, X} &= \left\| \sum_{k=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)} u_k \right\|_{\infty, X} \leq \sum_{k=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)} \|u_k\|_{\infty, X} \\ &\leq |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $(S_n)_n$ est de Cauchy dans $(B(X, E), \|\cdot\|_{\infty, X})$. Cet espace est complet car $(E, \|\cdot\|_E)$ l'est (Théorème 1.35). Et donc, $(S_n)_n$ converge uniformément sur X . \square

Remarque. On peut écrire :

$$CVN \underset{\text{complet}}{\Rightarrow} CVU \Rightarrow CVS,$$

mais les réciproques sont habituellement fausses.