Géométrie Différentielle — Travail Personnel

Robin Petit

13 novembre 2017

1 Fibré tangent

Considérons M une variété lisse, TM, son fibré tangent, $\mathcal{A} \coloneqq \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlas de M, et $\forall \alpha \in A$: $\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha$ comme dans l'énoncé.

Question 1

(i)

Montrons que pour $\alpha \in A$, $(\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha)$ est une carte de TM. Pour cela, montrons que $\widetilde{U}_\alpha$ est un ouvert de TM et que $\widetilde{\varphi}_\alpha$ est une bijection entre $\widetilde{U}_\alpha$ et un ouvert de $\mathbb{R}^{2m}$.

Puisque $\pi : TM \to M$ est une projection elle est continue, donc $\widetilde{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ est la préimage d'un ouvert de M par une fonction continue, i.e. un ouvert de TM.

De plus :

$$\widetilde{\varphi}_\alpha : \widetilde{U}_\alpha \to \mathbb{R}^{2m} : (x, v_x) \mapsto \left(\varphi_\alpha(x), \left(v^j\right)_{1 \leq j \leq m}\right)$$

peut se séparer en deux applications $x \mapsto \varphi_\alpha(x)$ et $v_x \mapsto (v^j)_{1 \leq j \leq m}$.

La première est une bijection par hypothèse car $\mathcal{A}$ est un atlas de M. La seconde est également bijective car elle représente l'application coordonnées d'un espace vectoriel réel sur une base. De plus, $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ car $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ est une carte de M, donc $\widetilde{\varphi}_\alpha(\widetilde{U}_\alpha) = \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{2m}$.

On en déduit que $(\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha)$ est une carte de TM.

(ii)

Montrons que $\widetilde{\mathcal{A}} \coloneqq \{(\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ est un atlas de TM.

1. On sait que $\bigcup_{\alpha \in A} \widetilde{U}_\alpha \subseteq TM$ car $\forall \alpha \in A : \widetilde{U}_\alpha \subseteq TM$. De plus, pour $(x, v_x) \in TM$, on sait qu'il existe $\alpha \in A$ tel que $x \in U_\alpha$ car $\mathcal{A}$ est un atlas de M. Puisque $v_x \in T_xM$ et $\widetilde{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{y \in U_\alpha} \{y\} \times T_yM$[1], on trouve que $(x, v_x) \in \widetilde{U}_\alpha$.

   On en déduit que $\bigcup_{\alpha \in A} \widetilde{U}_\alpha = TM$.

[1] Où $\sqcup$ est équivalent à $\cup$ mais met l'emphase sur le fait que dans $A \sqcup B$, $A \cap B = \emptyset$.

2. Soient $\alpha, \beta \in A$. Pour montrer que $\widetilde{\varphi}_\alpha(\widetilde{U}_\alpha \cap \widetilde{U}_\beta)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{2m}$, il suffit d'observer que :

$$\widetilde{\varphi}_\alpha(\widetilde{U}_\alpha \cap \widetilde{U}_\beta) = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^m,$$

qui est un produit de deux ouverts de $\mathbb{R}^m$ (car $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ et (U_β, φ_β) sont des cartes de l'atlas $\mathcal{A}$), et est donc un ouvert de $\mathbb{R}^{2m}$.

3. Prenons à nouveau $\alpha, \beta \in A$. Afin que $\widetilde{\mathcal{A}}$ soit un atlas lisse, il faut encore uniquement que

$$\widetilde{\varphi}_\beta \circ \widetilde{\varphi}_\alpha^{-1} \in \mathcal{C}^\infty \left(\widetilde{\varphi}_\alpha(\widetilde{U}_\alpha \cap \widetilde{U}_\beta) \subset \mathbb{R}^{2m}, \widetilde{\varphi}_\beta(\widetilde{U}_\alpha \cap \widetilde{U}_\beta) \subset \mathbb{R}^{2m} \right).$$

Pour cela, observons que $\exists B \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^m, \tilde{v}^1, \ldots, \tilde{v}^m) \in \widetilde{\varphi}_\alpha(\widetilde{U}_\alpha \cap \widetilde{U}_\beta) : (\widetilde{\varphi}_\beta \circ \widetilde{\varphi}_\alpha^{-1})(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^m, \tilde{v}^1, \ldots, \tilde{v}^m) = \left((\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(\tilde{x}), B\tilde{v} \right),$$

pour $\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{v}^1, \ldots, \tilde{v}^m)$ et $\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^m)$. Notons que B n'est autre qu'une matrice de changement de base (et l'identité I_m pour être précis). On sait que $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta))$ car $\mathcal{A}$ est un atlas lisse.

Puisque B est une matrice de changement de base, on sait que l'application induite $v \mapsto Bv$ est linéaire, et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^m$.

De ces 3 points, on conclut que $\widetilde{\mathcal{A}}$ est un atlas lisse pour TM.

(iii)

TM peut être muni d'un atlas lisse $\widetilde{\mathcal{A}}$ de dimension $2m$. Par la relation d'équivalence usuelle sur les atlas (i.e. deux atlas lisses $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de dimension m sur une variété lisse M sont en relation ssi $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est un atlas lisse de dimension m sur M), $\widetilde{\mathcal{A}}$ fait partie d'une classe d'équivalence $[\widetilde{\mathcal{A}}]$ d'atlas lisses de dimension $2m$ sur TM. Dès lors, $[\widetilde{\mathcal{A}}]$ est une structure différentiable sur TM.

Question 2

La projection canonique $\pi : TM \to M : (x, v_x) \mapsto x$ est trivialement surjective car $TM = \bigsqcup_{x \in M} \{x\} \times T_x M$, ce qui implique que $\forall x \in M : \exists v_x \in T_x M$ t.q. $(x, v_x) \in TM$ et $\pi(x, v_x) = x$.

Afin de montrer que π est une submersion, il faut montrer que sa différentielle est surjective en tout point $(x, v_x) \in TM$.

Soit $(x, v_x) \in TM$. La différentielle de π en (x, v_x) est définie par :

$$\pi_{*_{(x,v_x)}} : T_{(x,v_x)} TM \to T_{\pi(x,v_x)} M = T_x M : X_{(x,v_x)} \mapsto \pi_{*_{(x,v_x)}}(X_{(x,v_x)}),$$

avec :

$$\forall((x, v_x), f) \in TM \times \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) : \pi_{*_{(x,v_x)}}(X_{(x,v_x)})(f) = X_{(x,v_x)}(f \circ \pi) \in \mathbb{R}.$$

Fixons $(x, v_x) \in TM$. Pour montrer que $\pi_{*_{(x,v_x)}}$ est surjective, montrons qu'elle contient une base de $T_x M$ dans son image. Puisque $\pi_{*_{(x,v_x)}}$ est linéaire, elle est un morphisme d'espaces vectoriels, et donc :

$$\forall I \subset \operatorname{Im} \pi_{*_{(x,v_x)}} : \langle I \rangle \subset \operatorname{Im} \pi_{*_{(x,v_x)}}.$$

Dès lors, si on montre qu'une base de T_xM est dans l'image de $\pi_{*(x,v_x)}$, alors l'espace engendré par cette base (donc T_xM) est dans l'image. Or l'image est contenue dans T_xM par définition de l'application. On en déduira alors $\operatorname{Im} \pi_{*(x,v_x)} = T_xM$, et donc la surjectivité de la différentielle.

Prenons $\alpha \in A$ tel que $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ est une carte de M en x, et $(\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha)$ est une carte de TM en (x, v_x).

On cherche une préimage de $\frac{\partial}{\partial x^\ell}\Big|_x$ pour $1 \leq \ell \leq m$ par $\pi_{*(x,v_x)}$.

On observe que pour $\left\{ \frac{\partial}{\partial (x,v)^\ell}\Big|_{(x,v_x)} \right\}_{1 \leq \ell \leq 2m}$ [2], une base de $T_{(x,v_x)}TM$, à $1 \leq \ell \leq 2m$ fixé :

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) : \pi_{*(x,v_x)} \left(\frac{\partial}{\partial (x,v)^\ell}\Big|_{(x,v_x)} \right)(f) = \frac{\partial}{\partial (x,v)^\ell}\Big|_{(x,v)} (f \circ \pi) = \frac{\partial (f \circ \pi \circ \widetilde{\varphi}_\alpha^{-1})(\tilde{x}, \tilde{v})}{\partial (\tilde{x}, \tilde{v})^\ell}\Big|_{(\widetilde{\varphi}_\alpha(x,v))}.$$

Or $f \circ \pi \circ \widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}$ est défini comme :

$$f \circ \pi \circ \widetilde{\varphi}_\alpha^{-1} : \widetilde{\varphi}_\alpha(\widetilde{U}_\alpha) \subset \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R} : (\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^m, \tilde{v}^1, \ldots, \tilde{v}^m) \mapsto \left(f \circ \varphi_\alpha^{-1} \right) (\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^m),$$

car $\pi \circ \widetilde{\varphi}_\alpha^{-1} : (\tilde{x}, \tilde{v}) \mapsto \varphi_\alpha^{-1}(\tilde{x})$.

On en déduit que pour $m < \ell \leq 2m$, on a :

$$\pi_{*(x,v_x)} \left(\frac{\partial}{\partial (x,v)^\ell}\Big|_{(x,v_x)} \right)(f) = \frac{\partial}{\partial (x,v)^\ell}\Big|_{(x,v)} (f \circ \pi) = 0,$$

la fonction identiquement nulle, et pour $1 \leq \ell \leq m$:

$$\pi_{*(x,v_x)} \left(\frac{\partial}{\partial (x,v)^\ell}\Big|_{(x,v_x)} \right)(f) = \frac{\partial}{\partial (x,v)^\ell}\Big|_{(x,v)} (f \circ \pi) = \frac{\partial}{\partial x^\ell}\Big|_x f.$$

Dès lors, $\left\{ \frac{\partial}{\partial (x,v)^\ell}\Big|_{(x,v)} \right\}_{1 \leq \ell \leq m}$ est préimage de la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\ell}\Big|_x \right\}_{1 \leq \ell \leq m}$.

Question 3

Pour $(x,y) \in \mathbb{S}^1$, l'application constante $(-y, x) \in T_{(x,y)}\mathbb{S}^1$ est un vecteur tangent à $\mathbb{S}^1$ en (x,y). Puisque $T_{(x,y)}\mathbb{S}^1$ est un espace vectoriel réel de dimension 1, $\{\lambda \cdot (-y,x)\}_{\lambda \in \mathbb{R}} = T_{(x,y)}\mathbb{S}^1$ car $(-y,x)$ est un vecteur de base de $T_{(x,y)}\mathbb{S}^1$. On peut alors établir l'application :

$$\alpha : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to T\mathbb{S}^1 : ((x,y), \lambda) \mapsto ((x,y), (-\lambda y, \lambda x)).$$

α est bijective par la remarque ci-dessus, trivialement lisse. De plus, son inverse peut s'écrire explicitement :

$$\alpha^{-1} : T\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} : ((x,y), (v^1, v^2)) \mapsto ((x,y), v^2/x),$$

qui est également trivialement lisse.

On a alors le difféomorphisme canonique $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : ((x,y),z) \mapsto (x,y,z)$ tel que :

$$\beta\Big|_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } (x,y) \in \mathbb{S}^1 \right\} = C.$$

[2] Où :

$$(x,v)^\ell = \begin{cases} x^\ell & \text{si } 1 \leq \ell \leq m \\ v^{\ell - m} & \text{si } m < \ell \leq 2m \end{cases}.$$

2 Sous-variétés et sous-variétés plongées

Question 4

(a)

Pour une sous-variété lisse $[(N,\iota)]$ de M, on prend un représentant (N,ι) de la sous-variété. On veut montrer qu'il existe une immersion injective $\tilde{\iota} : TN \to TM$ tel que $[(TN,\tilde{\iota})]$ est une sous-variété de TM. Notons que l'on réserve ici la lettre y aux éléments de N et x aux éléments de M. On définit alors :

$$\tilde{\iota} : TN \to TM : \left(y, v_y = \sum_{j=1}^{n} v_y^j \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_y\right) \mapsto \left(x = \iota(y), v_x = \sum_{j=1}^{n} v_y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_x\right).$$

$\tilde{\iota}$ est trivialement injective par injection de ι et par injection de $v_y^j \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_y \mapsto v_y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{\iota(x)}$ pour $1 \leq j \leq n$.

Montrons que sa différentielle $\tilde{\iota}_{*(y,v_y)} = T_{(y,v_y)}TN \to T_{(x,v_x)}TM$ est injective en tout $(y,v_y) \in TN$. Fixons alors $(y,v_y) \in TN$. Fixons également $\ell \in \{1,\ldots,m\}$, prenons $f \in \mathcal{C}^\infty(TM,\mathbb{R})$. Soit $(\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha)$ une carte de TM en $\tilde{\iota}(y,v_y)$ et $(\widetilde{V}_\beta, \widetilde{\psi}_\beta)$ une carte de TN en (y,v_y) et observons :

$$\tilde{\iota}_{*(y,v_y)}\left(\frac{\partial}{\partial y^\ell}\bigg|_{(y,v_y)}\right)(f) = \frac{\partial}{\partial y^\ell}\bigg|_{(y,v_y)}(f\circ\tilde{\iota}) = \frac{\partial(f\circ\tilde{\iota}\circ\widetilde{\psi}_\beta^{-1})}{\partial(\tilde{y},\tilde{v})^\ell}\bigg|_{\widetilde{\psi}_\beta(y,v_y)} = \frac{\partial(f\circ\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}\circ\widetilde{\varphi}_\alpha\circ\tilde{\iota}\circ\widetilde{\psi}_\beta^{-1})}{\partial(\tilde{y},\tilde{v})^\ell}\bigg|_{\widetilde{\psi}_\beta(y,v_y)}.$$

Or, par dérivation en chaîne, on trouve :

$$\tilde{\iota}_{*(y,v_y)}\left(\frac{\partial}{\partial(y,v_y)^\ell}\bigg|_{(y,v_y)}\right)(f) = \sum_{j=1}^{2m} \frac{\partial(f\circ\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1})}{\partial(\tilde{x},\tilde{v})^j}\bigg|_{\widetilde{\varphi}_\alpha(\tilde{\iota}(y,v_y))} \frac{\partial(\widetilde{\varphi}_\alpha\circ\tilde{\iota}\circ\widetilde{\psi}_\beta^{-1})^j}{\partial(\tilde{y},\tilde{v})^\ell}\bigg|_{\widetilde{\psi}_\beta(y,v_y)}.$$

On y reconnait alors $\frac{\partial}{\partial(x,v)^j}\Big|_{\tilde{\iota}(y,v_y)} f$ dans le premier facteur, et on observe que pour $v_y = \sum_{k=1}^n v_y^k \frac{\partial}{\partial(y,v)^k}\Big|_{(y,v_y)} \in TN$:

$$(\widetilde{\varphi}_\alpha\circ\tilde{\iota}\circ\widetilde{\psi}_\beta^{-1})(y,v_y^1,\ldots,v_y^n) = \widetilde{\varphi}_\alpha\left(\tilde{\iota}\left(\psi_\beta^{-1}(y),v_y\right)\right) = \widetilde{\varphi}_\alpha\left(\iota(\psi_\beta^{-1}(y)), \sum_{k=1}^n v_y^k \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_{\iota(\psi_\beta^{-1}(y))}\right)$$
$$= \left(\underbrace{(\varphi_\alpha\circ\iota\circ\psi_\beta^{-1})(y)}_{\in\mathbb{R}^m}, v_y^1,\ldots,v_y^n,\underbrace{0,\ldots,0}_{m-n}\right).$$

De là, il est possible de déduire que $\left\{\tilde{\iota}_{*(y,v_y)}\left(\frac{\partial}{\partial(y,v)^\ell}\Big|_{(y,v_y)}\right)\right\}_{1\leq\ell\leq 2n}$ est une famille libre et de cardinalité $2n$ car ι est une immersion et :

$$\forall 1\leq j\leq 2m : \frac{\partial(\widetilde{\varphi}_\alpha\circ\tilde{\iota}\circ\widetilde{\psi}_\beta^{-1})^j}{\partial(\tilde{y},\tilde{v})^\ell}\bigg|_{\widetilde{\psi}_\beta(y,v_y)} = \begin{cases} \frac{\partial(\varphi_\alpha\circ\iota\circ\psi_\beta^{-1})^j}{\partial\,\tilde{y}^\ell}\Big|_{\psi_\beta(y)} & \text{si } 1\leq j\leq m, 1\leq\ell\leq n \\ 0 & \text{si } 1\leq j\leq m, n<\ell\leq 2n \text{ ou } m<j\leq 2m, 1\leq\ell\leq n \\ 0 & \text{si } m<j\leq 2m, n<\ell\leq 2n, j-m\neq\ell-n \\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Cela implique que $\tilde{\iota}$ est une immersion, et donc que $[(TN, \tilde{\iota})]$, la classe d'équivalence de $(TN, \tilde{\iota})$ selon la relation d'équivalence pour les sous-variétés exposée au cours, est une sous-variété de TM.

(b)

Soit $F : TM \to T\mathbb{R}^p : (x, v_x) \mapsto (f(x), f_{*_x}(v_x))$. Fixons $x \in N \subset M$ et $v_x \in T_xN \subset T_xM$. Montrons que $F(x, v_x) = (0, 0)$.

Par linéarité de la différentielle, fixons $1 \leq j \leq \dim(N) =: n$, prenons $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ et considérons $\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_x$:

$$f_{*_x}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_x\right)(g) = \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_x (g \circ f).$$

Soit $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, une carte de N en x. Alors :

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_x (g \circ f) = \frac{\partial(g \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial \tilde{x}^j}\Big|_{\varphi_\alpha(x)}.$$

Or $g \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ est définie comme suit :

$$g \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \tilde{x} \mapsto (g \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})(\tilde{x}) = g(f(\underbrace{\varphi_\alpha^{-1}(\tilde{x})}_{\in N})) = g(0).$$

Donc $g \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ est constante sur $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. On en conclut que :

$$\frac{\partial(g \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial \tilde{x}^j}\Big|_{\varphi_\alpha(x)} = 0.$$

Dès lors :

$$f_{*_x}(v_x) = \sum_{j=1}^n v_x^j f_{*_x}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_x\right) = 0,$$

et $f(x) = 0$. Donc $F(x, v_x) = (0, 0)$.

Montrons maintenant que $\forall (x, v_x) \in TN : F_{*_{(x,v_x)}} : T_{(x,v_x)}TM \to T_0T\mathbb{R}^p$ est surjective. Fixons $(x, v_x) \in TN, 1 \leq \ell \leq 2m$, $(\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha)$ carte de TM en (x, v_x) et $(\widetilde{V}_\beta, \widetilde{\psi}_\beta)$ carte de $T\mathbb{R}^p$ en $F(x, v_x)$. Observons alors que par la notation *Jacobienne* :

$$F_{*_{(x,v_x)}}\left(\frac{\partial}{\partial (x,v)^\ell}\Big|_{(x,v_x)}\right) = \sum_{j=1}^{2p} \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{F(x,v_x)} \frac{\partial(\widetilde{\psi}_\beta \circ F \circ \widetilde{\varphi}_\alpha^{-1})^j}{\partial(\tilde{x}, \tilde{v})^\ell}\Big|_{\widetilde{\varphi}_\alpha(x,v_x)}.$$

Dès lors, il faut que la matrice jacobienne $\frac{\partial(\widetilde{\psi}_\beta \circ F \circ \widetilde{\varphi}_\alpha^{-1})^j}{\partial(\tilde{x}, \tilde{v})^\ell}\Big|_{\widetilde{\varphi}_\alpha(x,v_x)}$ soit de rang $2p = \dim(T_0T\mathbb{R}^p) = \dim(T\mathbb{R}^p)$. De là, on pourra déduire la surjectivité de $F_{*_{(x,v_x)}}$.

Or :

$$\forall (\tilde{x}, \tilde{v}) \in TM : (\widetilde{\psi}_\beta \circ F \circ \widetilde{\varphi}_\alpha^{-1})(\tilde{x}, \tilde{v}) = ((\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})(\tilde{x}), A\tilde{v}),$$

pour A une matrice à p lignes et m colonnes. Donc :

$$J_{F_{*(x,v_x)}} = \left[\frac{\partial(\widetilde{\psi}_\beta \circ F \circ \widetilde{\varphi}_\alpha^{-1})^j}{\partial(\tilde{x},\tilde{v})^\ell} \bigg|_{\widetilde{\varphi}_\alpha(x,v_x)} \right]_{1\leq j\leq 2p, 1\leq \ell \leq 2m} = \begin{bmatrix} J_{f_{*x}} = \frac{\partial(\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})^j}{\partial\, \tilde{x}^{\,\ell}} \bigg|_{\varphi_\alpha(x)} & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}.$$

où A et $J_{f_{*x}}$ sont de rang p par surjectivité de f_{*x}. On déduit alors que $F_{*(x,v_x)}$ est surjective en tout $(v, v_x) \in TN$. Dès lors, TN a bien une structure de sous-variété lisse de TM pour l'inclusion.

(c)

$\emptyset$

(d)

Posons $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2 = 1$. On observe alors que $N = f^{-1}(\{1\})$. De plus, observons que $\forall (x,y,z) \in N : x = 0 \Rightarrow y \neq 0$. Montrons alors que la différentielle de f est surjective en tout point de N.

Fixons $(x,y,z) \in N$ tel que $x \neq 0$. Alors :

$$f_{*(x,y,z)} : T_{(x,y,z)}\mathbb{R}^3 \to T_1\mathbb{R} : X \mapsto f_{*(x,y,z)}(X).$$

Prenons $v = v^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big|_1 \in T_1\mathbb{R}$. Calculons alors :

$$f_{*(x,y,z)}\left(\frac{v^1}{2x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \bigg|_{(x,y,z)} \right) = \frac{v^1}{2x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \bigg|_{(x,y,z)} (\cdot \circ f) = \frac{v^1}{2x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{x}} \bigg|_1 \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} \bigg|_{(x,y,z)} = \frac{v^1}{2x} 2x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{x}} \bigg|_1 = v.$$

Notons que si on prend $(x,y,z) \in N$ tel que $x = 0$, alors $y \neq 0$, et par le même raisonnement :

$$f_{*(x,y,z)}\left(v^1 \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}} \bigg|_{(x,y,z)} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \bigg|_{(x,y,z)} \right) = v^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{x}} \bigg|_1 = v.$$

On en déduit la surjectivité de $f_{*(x,y,z)}$ en tout point $(x,y,z) \in N$. Par le fait que N admet une structure de sous-variété plongée de $\mathbb{R}^3$ et par le point **(b)** ci-dessus, on sait que TN admet une structure de sous-variété plongée de $T\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^6$.

De plus, on sait que $\dim(N) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathbb{R}) = 2$, et donc que $\dim(TN) = 4$.

Question 5

Posons $\mathrm{Skew}(2n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles antisymétriques de dimension $2n \times 2n$. En admettant que $\mathrm{Skew}(2n, \mathbb{R})$ est une sous-variété plongée de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ de dimension $n(2n-1) = 2n(2n-1)/2$.[3]

[3]Où la dimension est donnée par le nombre de degrés de liberté :

$$\sum_{k=1}^{2n} (k-1) = \sum_{k=1}^{2n-1} k = 2n(2n-1)/2,$$

ce qui correspond à la sous-matrice triangulaire supérieure (ou inférieure par symétrie) de taille $2n(2n+1)/2$ à laquelle on retire la diagonale qui doit être nulle et qui est de taille $2n$. Donc la dimension vaut $n(2n+1) - 2n = n(2n+1-2) = n(2n-1)$.

Posons la fonction :

$$f : \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Skew}(2n, \mathbb{R}) : A \mapsto A'\Omega_0 A.$$

On voit donc que $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) = f^{-1}(\{\Omega_0\})$, et pour $A \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$:

$$f_{*A} : T_A \,\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \to T_{\Omega_0} \,\mathrm{Skew}(2n, \mathbb{R}) : V = \sum_{i,j=1}^{2n} V^{ij} \frac{\partial}{\partial a^{ij}}\bigg|_A \mapsto \sum_{k=1}^{2n} \sum_{\ell=k+1}^{2n} \frac{\partial}{\partial y^{k\ell}}\bigg|_{\Omega_0} \sum_{i,j=1}^{2n} V^{ij} \frac{\partial \left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)^{k\ell}}{\partial a^{ij}}\bigg|_A ,$$

pour $\psi : \mathrm{Skew}(2n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n(2n-1)}$ est une application de coordonnées de $\mathrm{Skew}(2n, \mathbb{R})$, et $\varphi : \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{4n^2}$ est une application de coordonnées de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$. On calcule aisément que :

$$\frac{\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{k\ell}}{\partial a^{ij}}\bigg|_A = \frac{\partial(A'\Omega_0 A)_{k\ell}}{\partial A_{ij}} = \begin{cases} \sum_{\lambda=n+1}^{2n} \left(\delta_{jk} A_{\lambda\ell} - \delta_{j\ell} A_{\lambda k}\right) & \text{si } 1 \leq \lambda \leq n \\ \sum_{\lambda=1}^{n} \left(\delta_{j\ell} A_{\lambda k} - \delta_{jk} A_{\lambda\ell}\right) & \text{si } n < \lambda \leq 2n \end{cases}$$

Dès lors, $J_{f_{*A}}$ est une matrice à $4n^2$ colonnes et $n(2n-1) = 2n^2 - n$ lignes contenant une grande proportion de 0 (une proportion $p(n) = (n-1)/n$ qui donc tend vers 1 quand $n \to +\infty$) mais qui est de rang $n(2n-1)$ car toutes les lignes sont non-nulles et linéairement indépendantes.

Dès lors, f_{*A} est surjective. On peut alors déduire que $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ est un sous-variété de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ de dimension $4n^2 - (2n^2 - n) = 2n^2 + n$.