MATHF-3001 — Théorie de la mesure
Résolution des TPs

R. Petit

Année académique 2018 - 2019

1 Séance 1

Exercice 1.1. *Soient* $(X, \mathcal{F})$ *un espace mesurable et* $Y \subset X$. *Mq* $\mathcal{F}_Y := \mathcal{F} \cap Y$ *est une* σ*-algèbre sur* Y.

Exercice 1.2.

1. *Soit* X *un ensemble infini. Décrire la* σ*-algèbre engendrée par la classe des parties finies de* X. *Que peut-on dire si* X *est fini ?*
2. *Dans* $X = [\![0, n]\!]$, *on considère* $\mathcal{A} = \{0\}$ *et* $\mathcal{B} = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$. *Décrire* $\sigma(\mathcal{A})$ *et* $\sigma(\mathcal{B})$.

Exercice 1.3. *Soient* X, Y *deux ensembles, et* $f : X \to Y$.

1. *Si* $\mathcal{F}$ *est une* σ*-algèbre sur* Y, *mq* $\mathcal{A} := f^{-1}(\mathcal{F})$ *est une* σ*-algèbre sur* X.
2. *Soit* $\mathcal{A}$ *une* σ*-algèbre sur* X.
   (a) *Mq* $\mathcal{F} := \{B \in \mathcal{P}(Y) \text{ s.t. } f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ *est une* σ*-algèbre sur* Y.
   (b) *Que peut-on dire de* $f(\mathcal{A})$ *?*

Exercice 1.4. *Soient* $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ *espaces mesurables. Soit* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$. *Si* $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$, *mq* $f : X \to Y$ *est mesurable ssi* $f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$.

Exercice 1.5.

1. *Mq toute intersection (non-vide) de classes de Dynkin est une classe de Dynkin.*
2. *Mq pour tout* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ *il existe une plus petite classe de Dynkin au sens de l'inclusion (notée* $\lambda(\mathcal{F})$*).*
3. *Mq si* $\mathcal{D}$ *est une classe de Dynkin stable par intersections finies, alors* $\mathcal{D}$ *est une* σ*-algèbre.*
4. *Mq si* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ *est stable par intersections finies, alors* $\lambda(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$.

2 Séance 2

Exercice 2.1. *Soient* $(X, \mathcal{F})$ *un espace mesurable et* μ *une fonction additive sur* $\mathcal{A}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$. *Mq les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. μ *est* σ*-additive ;*
2. μ *est continue à gauche ;*
3. μ *est continue à droite.*

Donner un exemple de mesure $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *qui ne satisfait pas le point 3. Que faut-il ajouter comme hypothèse pour ce résultat ?*

Exercice 2.2. *Soit* X *un ensemble non dénombrable et* $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X)$ *s.t.* A *ou* $A^{\complement}$ *est dénombrable*$\}$. *Soit* $\mu : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ *où* $\mu(A) = 0 \iff A$ *est dénombrable. Mq* μ *est une mesure sur* $(X, \mathcal{A})$.

Exercice 2.3. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité. Mq* $\mathcal{T} \coloneqq \{A \in \mathcal{A}$ *s.t.* $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}\}$ *est une* σ*-algèbre.*

Exercice 2.4. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* $(Y, \mathcal{B})$ *un espace mesurable et* $g : X \to Y$ *une application mesurable. On pose :*

$$\nu : \mathcal{B} \to [0, +\infty] : B \mapsto \mu(g^{-1}(B)).$$

Mq ν *est une mesure sur* $(Y, \mathcal{B})$.

Exercice 2.5. *Soit* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable.*

1. *Pour* $x \in X$, *mq* δ_x *est une mesure.*
2. *Mq si* μ *est une mesure sur* $(X, \mathcal{A})$ *s.t.* $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \iff x \notin A$ *alors* $\exists C \gneqq 0$ *s.t.* $\mu = C\delta_x$.

Exercice 2.6. *Soit* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable. Mq la mesure de comptage est une mesure.*

Exercice 2.7. *Soit* X *un ensemble fini non-vide. Mq* $\mu = \frac{|\cdot|}{|X|}$ *est une mesure de proba sur* $(X, \mathcal{P}(X))$.

Exercice 2.8. *Soit* $(X, \mathcal{A})$ *un espace de mesure.*

1. *Soit* $(\mu_n)_{n \geqslant 0}$ *une suite croissante de mesures sur* $(X, \mathcal{A})$. *Mq* $\mu \coloneqq \lim_{n \to +\infty} \mu_n$ *est une mesure.*
2. *Soit* $(\mu_n)_{n \geqslant 0}$ *une suite de mesures. Est-ce que* $\mu \coloneqq \sum_{n \geqslant 0} \mu_n$ *est une mesure ?*
3. *Pour* $n \geqslant 0$, *on définit la mesure* μ_n *sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *par* $\mu_n(A) = \big|A \cap [n, +\infty)\big|$.
   — *Mq* $\forall n \geqslant 0 : \mu_n$ *est bien une mesure et que la suite* $(\mu_n)_n$ *est décroissante.*
   — *Est-ce que* $\mu = \lim_{n \to +\infty} \mu_n$ *est une mesure sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *? Caractériser entièrement* μ.

Exercice 2.9. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $(A_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

1. *Mq :*
$$\mu\left(\liminf_{n \to +\infty} A_n\right) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$
2. *Si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *s.t.* $\mu\left(\bigcup_{n \geqslant n_0} A_n\right) \leqslant +\infty$, *mq :*
$$\mu\left(\limsup_{n \to +\infty} A_n\right) \geqslant \limsup_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$

Exercice 2.10. *Soit* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable. Soient* μ, ν *deux mesures finies sur* $(X, \mathcal{A})$ *telles que* $\forall A \in \mathcal{A}$:

$\mu(A) \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(A) = \nu(A)$.

1. *Mq* $\mu = \nu$.
2. *Mq le résultat est faux si l'inégalité est changée en inégalité stricte.*

Exercice 2.11. *Soient* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable et une partie stable par intersections finies* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ *s.t.* $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$. *Si* μ *et* ν *sont deux mesures finies sur* $(X, \mathcal{A})$ *telles que* $\nu(X) = \mu(X)$ *et* $\mu = \nu$ *sur* $\mathcal{F}$. *Mq* $\mu = \nu$.

3 Séance 3

Exercice 3.1. *Soient $\mathbb{B}$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}$ la mesure de Lesbesgue sur $\mathbb{B}$.*

1. *Mq* $\forall x \in \mathbb{R} : \{x\} \in \mathbb{B}$.
2. *Mq* $\mathbb{Q} \in \mathbb{B}$ *et* $\mathcal{L}(\mathbb{Q}) = 0$.
3. *Mq une union non-dénombrable d'ensembles négligeables n'est pas nécessairement négligeable.*
4. *Mq* $N \in \mathbb{B}$ *est un ensemble négligeable ssi* $\forall \varepsilon > 0 : \exists U_\varepsilon$ *s.t.* $N \subseteq U_\varepsilon$ *et* $\mathcal{L}(U_\varepsilon) < \varepsilon$.

Exercice 3.2. *Montrer qu'une droite E dans $\mathbb{R}^2$ est de mesure nulle pour $\mathcal{L}$.*

Exercice 3.3. *Pour $B \in \mathbb{B}^n$ et $\lambda > 0$, on définit $\lambda B = \{\lambda b\}_{b \in B}$.*

1. *Mq* $\forall \lambda > 0, B \in \mathbb{B}^n : \lambda B \in \mathbb{B}^n$.
2. *Mq* $\mathcal{L}(\lambda B) = \lambda^n \mathcal{L}(B)$.

Exercice 3.4 (Vrai ou Faux). *Justifier les affirmations suivantes :*

1. *Si* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *est négligeable, alors* $\overline{E}$ *est négligeable.*
2. *Il existe un ensemble non-mesurable sur $\mathbb{R}^n$ de complémentaire de mesure extérieure de Lebesgue nulle.*
3. *Il existe des ensemble non-mesurables dont l'union est mesurable.*
4. *Si* $A \subset \mathbb{R}^n$ *satisfait* $\mathcal{L}(\mathring{A}) = \mathcal{L}(\overline{A})$, *alors A est mesurable.*

4 Séance 4

Exercice 4.1. *Soit* $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$. *Mq si* $\forall q \in \mathbb{Q} : f^{-1}((q, +\infty)) \in \mathcal{A}$, *alors* f *est mesurable.*

Exercice 4.2. *Mq les fonctions* f *et* g *sont mesurables sur* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$.

Exercice 4.3. *Soient* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable et* $(f_k)_{k \geqslant 0}$ *une suite de fonctions mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$. *Mq l'ensemble* $A := \{x \in X$ *s.t.* $\lim_{k \to +\infty} f_k(x)$ *existe*$\}$ *est mesurable.*

Exercice 4.4. *Soient* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Borel-mesurable et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *s.t.* $g \neq f$ *sur un ensemble* D *au plus dénombrable. Mq* g *est Borel-mesurable.*

Exercice 4.5. *Sur un espace mesurable* $(X, \mathcal{A})$, *mq* χ_A *est mesurable ssi* $A \in \mathcal{A}$.

Exercice 4.6. *Soient* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable et* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. Mq* f^+ *et* f^- *sont mesurables.*

Exercice 4.7. *Mq* $f : [0,1) \to [0,1) : x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1/2) \\ 2x - 1 & \text{si } x \in [1/2, 1) \end{cases}$ *est mesurable.*

Mq pour tout $E \subseteq [0,1)$ *mesurable :* $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(f^{-1}(E))$.

Exercice 4.8 (Vrai ou Faux). *Justifier :*

1. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *s.t.* $f \circ f$ *est mesurable. Alors* f *est mesurable.*
2. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *s.t.* $|f|$ *est mesurable. Alors* f *est mesurable.*
3. *Soient* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mesurable et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue. Alors* $g \circ f$ *est mesurable.*
4. *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue presque partout, alors* f *est mesurable.*

5 Séance 5

Exercice 5.1. 1. *Mq la relation* $\sim$ *définie sur* $[0,1]$ *par* $x \sim y \iff x-y \in \mathbb{Q}$ *est une relation d'équivalence.*

2. *On note* $\hat{x}$ *la classe d'équivalence de* x *dans* $\mathbb{R}/\sim$. *Par l'axiome du choix, pour toute classe d'équivalence* $\hat{x} \in \mathbb{R}/\sim$, *on peut définir un représentant* $\rho(\hat{x})$. *On pose alors* $F := \bigcup_{\hat{x}\in\mathbb{R}/\sim} \rho(\hat{x})$. *Mq :*

$$[0,1] \subseteq \underbrace{\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (F+q)}_{=:\tilde{F}} \subseteq [-1,2].$$

3. *Mq si* $q_1 \neq q_2 \in \mathbb{Q}\cap[-1,1]$, *alors* $(F+q_1)\cap(F+q_2) = \emptyset$.
4. *Mq* F *n'est pas* $\mathcal{L}$*-mesurable par l'absurde.*

Exercice 5.2 (Ensemble triadique de Cantor). *Pour* $k \geqslant 0$, *on pose :*

$$A_k := \bigcup_{\alpha\in\{0,2\}^k} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{3^i}\right) + [0, 3^{-k}].$$

On définit l'ensemble triadique de Cantor par $\mathscr{C} := \bigcap_{k\geqslant 0} A_k$.

1. *Mq* $\forall k \geqslant 0$: A_k *est formé de* 2^k *intervalles fermés disjoints deux à deux et* $\mathcal{L}(A_k) = (2/3)^k$.
2. *Mq* $\mathscr{C}$ *est un borélien non vide et de mesure de Lebesgue nulle.*
3. *Soit* $x \in [0,1]$. *Notons* $a_k(x)$ *le* k *chiffre de son développement en base 3. Mq* $x \in \mathscr{C} \iff \forall k \geqslant 0 : a_k(x) \neq 1$.
4. *En déduire que* $\mathscr{C}$ *est en bijection avec* $[0,1]$.

Exercice 5.3. *On définit la bijection* $f = \theta^{-1}$ *(inverse de la bijection ci-dessus).*

1. *Mq* f *est strictement croissante et est non-continue.*
2. *Soit* $E \subset [0,1]$ *un ensemble non-mesurable au sens de Lebesgue. Mq* $f(E)$ *est* $\mathcal{L}$*-mesurable mais non Borélien.*

6 Séance 6

Exercice 6.1. *Soient* $X \neq \emptyset$*,* $a \in X$ *et* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$*. Dans l'espace mesuré* $(X, \mathcal{A}, \delta_a)$*, montrons que pour* $f : X \to \mathbb{R}^+$ *mesurable :*

$$\int_X f \, d\delta_a = f(a).$$

Exercice 6.2. *Sur l'espace mesurable* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$*, on définit la mesure de Lebesgue* $\mathcal{L}$ *et la mesure* μ *suivante :*

$$\mu : \mathbb{B} \to \overline{\mathbb{R}}^+ : B \mapsto \sum_{k \in B \cap \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + (k+1)^2}.$$

Déterminer si les fonctions suivantes sont intégrables :

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \textit{si } x = 0 \\ \ln|x| & \textit{si } 0 < |x| < 1 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 1} & \textit{si } |x| < 1 \textit{ et } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{\sqrt{|x|}} & \textit{si } |x| < 1 \textit{ et } x \in \mathbb{Q}^{\complement} \\ \frac{1}{x^2} & \textit{si } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

$$h(x) \equiv 1$$

pour les mesures $\mathcal{L}$ *et* μ *comme défini ci-dessus (pour* f *et* h*).*

Exercice 6.3. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $(f_k)_{k \geqslant 1}$ *une suite de fonctions mesurables telles que :*

$$f_1 \geqslant f_2 \geqslant f_3 \geqslant \ldots \geqslant 0.$$

On définit $f \coloneqq \lim_{k \to +\infty} f_k$ *la limite point par point. Mq si* $f_1 \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$*, alors :*

$$\lim_{k \to +\infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Donner un contre-exemple avec $f_1 \notin L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$*.*

Exercice 6.4. *Supposons* $\mu(X) \lneqq +\infty$*. Soit* $(f_k)_{k \geqslant 0}$ *une suite de fonctions mesurables positives sur* X *telles que* $f_k \xrightarrow[k \to +\infty]{\text{CVU } \textit{sur } X} f$*. Mq si* $\forall k \geqslant 0 : f_k \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$*, alors :*

$$f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \qquad \textit{et} \qquad \lim_{k \to +\infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Exercice 6.5. *On définit pour* $k \geqslant 0$ *:*

$$\alpha_k \coloneqq \int_0^k \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \exp(x/2) \, dx \qquad \textit{et} \qquad \beta_k \coloneqq \int_0^k \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \exp(-2x) \, dx.$$

Calculer $\alpha \coloneqq \lim_{k \to +\infty} \alpha_k$ *et* $\beta \coloneqq \lim_{k \to +\infty} \beta_k$*.*

Exercice 6.6. *Soit* $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. *Mq :*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \textit{ s.t. } \forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| \, d\mu < \varepsilon.$$

7 Séance 7

Exercice 7.1. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *bornée. Mq :*

1. *si* f *est Riemann-intégrable, alors* f *est Lebesgue-intégrable et :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\mathcal{L}.$$

2. *les fonctions* h *et* H *définies ci-dessous sont bien définies et* $h \leqslant f \leqslant H$ *sur* $[a, b]$ *:*

$$h(x) = \lim_{\delta\to 0} \inf_{|y-x|<\delta} f(y),$$
$$H(x) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{|y-x|<\delta} f(y).$$

3. f *est continue en* x *ssi* $H(x) = h(x)$.
4. H *et* h *sont Lebesgue-mesurables et :*

$$\int_{[a,b]} H\,d\mathcal{L} = \inf_P U(f; P) \qquad \textit{et} \qquad \int_{[a,b]} h\,d\mathcal{L} = \sup_P L(f; P).$$

5. *En déduire que* f *est Riemann-intégrable ssi l'ensemble des discontinuités de* f *est négligeable.*

Exercice 7.2.

1. *Mq si* $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *est Riemann-intégrable et bornée sur* $[a, b]$ *pour tous* $b > a$*, alors :*

$$\int_{[a,+\infty)} f\,d\mathcal{L} = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

2. *Mq si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est Riemann-intégrable et bornée sur* $[c, b]$ *pour tous* $c \in (a, b)$*, alors :*

$$\int_{[a,b]} f\,d\mathcal{L} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exercice 7.3. $\mathbb{Q}$ *est dénombrable donc* $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ *l'est aussi. Donc* $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_k\}_{k\geqslant 0}$*. Pour* $k \geqslant 0$*, on définit :*

$$f_k : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \textit{si } x \in \{q_\ell\}_{\ell=0}^k \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

1. *Mq* $\forall k \geqslant 0$: f_k *est Riemann-intégrable et déterminer :*

$$\int_0^1 f_k(x)\,dx.$$

2. *Mq* $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\text{CVS } sur\ [0,1]} f$. *Que peut-on en déduire ?*
3. *Mq* f *est Lebesgue-intégrable et vérifier les hypothèses du théorème de la convergence dominée.*

8 Séance 8

Exercice 8.1. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré.*

1. *Si* $\mu(X) \gneqq +\infty$, *mq si* p *et* q *sont des réels tels que* $1 \leqslant q \gneqq p \gneqq +\infty$, *alors :*
$$L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \subset L^q(X, \mathcal{A}, \mu) \subset L^1(X, \mathcal{A}, \mu).$$
2. *Considérons la fonction suivante :*
$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^{\frac{-1}{q}} & \textit{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \textit{sinon}. \end{cases}$$
Mq $u \in L^p(\mathbb{R}) \setminus L^q(\mathbb{R})$.
3. *Considérons la fonction suivante :*
$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^{\frac{-1}{p}} & \textit{si } x \in (0, 1] \\ 0 & \textit{sinon}. \end{cases}$$
Mq $u \in L^q(\mathbb{R}) \setminus L^p(\mathbb{R})$.
4. *A-t-on* $L^q(\mathbb{R}) \subseteq L^\infty(\mathbb{R})$ *et* $L^\infty(\mathbb{R}) \subseteq L^q(R)$ *?*

Exercice 8.2 (Inégalité de Chebycshev)**.** *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : X \to [0, +\infty)$ *une application mesurable. Mq*
$$\forall \alpha > 0 : \mu\left(\left\{x \in X \textit{ s.t. } f(x) \geqslant \alpha\right\}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int f \, d\mu.$$
De plus, si $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *est une application mesurable croissante, alors :*
$$\forall \alpha > 0 : \mu\left(\left\{x \in X \textit{ s.t. } f(x) \geqslant \alpha\right\}\right) \leqslant \frac{1}{\Phi(\alpha)} \int \Phi(f(x)) \, d\mu(x).$$

Exercice 8.3. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : X \to \mathbb{R}$ *une application mesurable.*

1. *Mq :*
$$\liminf_{p \to +\infty} \|f\|_{L^p} \geqslant \|f\|_{L^\infty},$$
et donner un exemple où l'inégalité est infinie à gauche et finie à droite.
2. *Supposions qu'il existe* $q \in [1, +\infty)$ *s.t.* $f \in L^q(X)$.
   (a) *Mq* f *est finie* μ*-ae.*
   (b) *Supposons que* $0 \gneqq \|f\|_{L^\infty} \gneqq +\infty$. *Mq si* $p \in (q, +\infty)$, *alors :*
   $$\|f\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{q}{p}} \cdot \|f\|_{L^q}^{\frac{q}{p}},$$
   et en déduire que :
   $$\limsup_{p \to +\infty} \|f\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^\infty}.$$
   (c) *Conclure.*

Exercice 8.4 (Inégalité d'interpolation)**.** *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* $1 \leqslant p \leqslant r \leqslant q \leqslant +\infty$ *et*

$\theta \in (0,1)$ *tels que :*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Mq si $u \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \cap L^q(X, \mathcal{A}, \mu)$*, alors* $u \in L^r(X, \mathcal{A}, \mu)$ *et :*

$$\|u\|_{L^r} \leqslant \|u\|_{L^p}^{\theta} \cdot \|u\|_{L^q}^{1-\theta}.$$

Remarque : En corolaire de ce théorème, on déduit que si $f \in L^1 \cap L^\infty$ (i.e. si f est μ-intégrable et essentiellement bornée), alors $f \in L^p$ pour tout p. Et ça, c'est chouette.

9 Séance 9

Exercice 9.1. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* $p \in [1, +\infty)$, $(f_k)_{k\geqslant 0} \in {L^p}^{\mathbb{N}}$ *s.t.* $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mu\text{-}ae} f$. *Mq les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\|f - f_k\|_{L^p} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$

b) $f \in L^p$ *et* $\|f_k\|_{L^p} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \|f\|_{L^p}$.

Exercice 9.2 (Lemme de Brézis-Lieb). *Soient* X *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty)$ *et* $(u_k)_{k\geqslant 0} \in L^p(X, \mathcal{B}(X), \mathcal{L})^{\mathbb{N}}$ *où* $\mathcal{L}$ *est la mesure de Lebesgue sur* X. *On suppose que* $(u_k)_k$ *est bornée dans* L^p *et que* $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{L}\text{-}ae} u$. *Montrons que* $u \in L^p(X)$ *et :*

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\|u_k\|_{L^p}^p - \|u - u_k\|_{L^p}^p\right) = \|u\|_{L^p}^p .$$

1. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *mq* $\exists C_\varepsilon = C(\varepsilon, p) > 0$ *s.t.* $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$\left||a + b|^p - |a|^p - |b|^p\right| \leqslant \varepsilon|a|^p + C_\varepsilon|b|^p .$$

2. *À* $\varepsilon > 0$ *fixé, on pose :*

$$f_k^\varepsilon := \left(\left||u_k|^p - |u - u_k|^p - |u|^p\right| - \varepsilon|u_k - u|^p\right)^+ .$$

Calculer :

$$\lim_{k\to+\infty} \int f_k^\varepsilon \, d\mathcal{L}.$$

3. *Conclure.*

Exercice 9.3. *Soit* $p \in [1, +\infty)$. *Montrer les affirmations suivantes :*

1. *L'espace des fonctions simples est dense dans* $L^p(\mathbb{R}^n)$.
2. *L'espace des fonctions en escalier est dense dans* $L^p(\mathbb{R}^n)$.
3. *L'espace des fonctions continues à support compact* $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $L^p(\mathbb{R}^n)$.
4. *Si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $h \in \mathbb{R}^n$, *alors :*

$$\left\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\right\|_{L^p} \xrightarrow[|h|\to+\infty]{} 0.$$

Que dire du cas $p = +\infty$ *?*

10 Séance 10

Exercice 10.1. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* $(f_k)_{k \geqslant 0}$ *suite d'applications mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$ *et* $p \in [1, +\infty]$. *Justifier les affirmations suivantes :*

1. *La convergence* μ*-ae n'implique pas la convergence en* L^p*, sauf si la suite* $(f_k)_k$ *est bornée par* $g \in L^p$.
2. *La convergence en* L^p *implique la convergence en mesure.*
3. *La convergence* μ*-ae n'implique pas la convergence en mesure, sauf si* $\mu(X) \lneqq +\infty$.
4. *La convergence en mesure n'implique pas la convergence* μ*-ae, mais seulement la convergence* μ*-ae d'une sous-suite.*
5. *La convergence en mesure n'implique pas la convergence en* L^p*, sauf si la suite* $(f_k)_k$ *est bornée par* $g \in L^p$.
6. *La convergence presque uniforme implique la convergence en mesure.*
7. *La convergence* μ*-ae n'implique pas la convergence presque uniforme.*
8. *Si* $\mu(X) \lneqq +\infty$*, la convergence* μ*-ae implique la convergence presque uniforme.*

11 Séance 11

Exercice 11.1. *On considère l'espace mesuré* $([0,1]^2, \mathcal{M}, \mu)$ *avec* $\mu = \mathcal{L}_1 \times \#$ *où* $\#$ *est la mesure de comptage. On pose* $\Delta := \{(x,x)\}_{x\in[0,1]}$. *Calculer :*

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_\Delta(x,y)\, d\mathcal{L} \right) d\#$$

et

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_\Delta(x,y)\, d\# \right) d\mathcal{L}$$

Ceci contredit-il le théorème de Tonelli (Fubini pour les fonctions positives) ?

Exercice 11.2. *Soit la fonction suivante :*

$$f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \textit{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

1. *Vérifier que* f *est Lebesgue-mesurable.*
2. *Calculer :*
$$I := \int_{[-1,1]} \int_{[-1,1]} f(x,y)\, dx\, dy$$
et :
$$J := \int_{[-1,1]} \int_{[-1,1]} f(x,y)\, dy\, dx.$$
3. *La fonction* f *est-elle intégrable sur* $[-1,1]^2$ *?*

Exercice 11.3. *Soit l'espace mesuré* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$. *On définit :*

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to [-1,1] : (m,n) \mapsto \begin{cases} 1 & \textit{si } m = n \\ -1 & \textit{si } m = n+1 \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

1. f *est-elle* $\# \otimes \#$ *intégrable ?*
2. *Calculer :*
$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\#(m)\, d\#(n) \qquad \textit{et} \qquad \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\#(n)\, d\#(m).$$
3. *Le résultat est-il compatible avec le théorème de Fubini ?*

Exercice 11.4. *Déterminer la valeur de :*

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

12 Séance 12

Exercice 12.1. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$*, un espace mesuré et* $g : X \to \mathbb{R}^+$*, une application mesurable. On définit la mesure* $\nu \coloneqq g \cdot \mu$*. Mq si* $f : X \to \mathbb{R}^+$ *est une application mesurable, alors :*

$$\int_X f \, d\nu = \int_X fg \, d\mu.$$

En conclure que le résultat est valable pour $f \in L^1(\nu)$*.*

Exercice 12.2 (Dérivées de Radon-Nikodym)**.** *Soient* μ, ν *et* m *des mesures finies sur* $(X, \mathcal{A})$*. Montrer les affirmations suivantes :*

1. *Si* $\mu \ll m$ *et* $\nu \ll m$*, alors* $\mu + \nu \ll m$ *et :*

$$\frac{d(\mu + \nu)}{dm} \overset{m\text{-}ae}{=} \frac{d\mu}{dm} + \frac{d\nu}{dm}.$$

2. *Si* $\mu \ll \nu$ *et* $\nu \ll m$*, alors* $\mu \ll m$ *et :*

$$\frac{d\mu}{dm} \overset{m\text{-}ae}{=} \frac{d\mu}{d\nu}\frac{d\nu}{dm}.$$

3. *Si* $\nu \ll \mu$ *et* $\mu \ll \nu$*, alors :*

$$\frac{d\mu}{d\nu} \overset{m\text{-}ae}{=} \frac{d\nu}{d\mu}^{-1}.$$

4. *Si* $\nu \ll \mu$ *et* f *est* ν*-intégrable, alors :*

$$\int f \, d\nu = \int f \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu.$$

Exercice 12.3. *Pour* $i = 1, 2$*, soient* μ_i, ν_i *mesures finies sur* $(X, \mathcal{A})$ *avec* $\mu_i \ll \nu_i$*. Posons* $\nu \coloneqq \nu_1 \times \nu_2$ *et* $\mu \coloneqq \mu_1 \otimes \mu_2$ *les mesures produits sur* $(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$*. Montrer les affirmations suivantes :*

1. $\mu \ll \nu$.
2. $$\frac{d\mu}{d\nu}(x, y) \overset{\nu\text{-}ae}{=} \frac{d\mu_1}{d\nu_1}(x)\frac{d\mu_2}{d\nu_2}(y).$$