Calcul différentiel et intégral II

R. Petit

année académique 2016 - 2017

Table des matières

Chapitre 1

Suites et séries de fonctions

1.1 Rappels

1.1.1 Topologie métrique

1.1.1.1 Espaces métriques

Définition 1.1. Soit X un ensemble. Une *distance* sur X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ telle que :

1. $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;
2. $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire) ;
3. $\forall x, y \in X : \big(d(x, y) = 0 \iff x = y\big)$ (séparation[1]).

Définition 1.2. On appelle *espace métrique* (X, d) un espace X muni d'une distance d sur X.

Définition 1.3. Soient (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x \in X$ La suite (x_n) converge vers x dans (X, d) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant N : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Cela se note :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} x.$$

Proposition 1.4. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans (X, d), un espace métrique. Soient $x, y \in X$. Si :*

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} x \qquad \textit{et} \qquad x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} y,$$

alors $x = y$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $x_n \to x$ et $x_n \to y$, on sait qu'il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geqslant N_1 : d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant N_2 : d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dès lors, soit $N \coloneqq \max\{N_1, N_2\}$. On peut dire :

$$\forall n \geqslant N : d(x, y) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

1. Également appelé *principe d'identité des indiscernables.*

On en déduit $d(x, y) = 0$ et donc $x = y$ par séparation. $\square$

1.1.1.2 Espaces vectoriels

Définition 1.5. Soit $\mathbb{K}$, un sous-corps de $\mathbb{C}$. On appelle *norme* sur le $\mathbb{K}$-e.v. E toute application $n : E \to \mathbb{R}^+$ telle que :

1. $\forall x \in E : \big(n(x) = 02 \iff x = 0\big)$;
2. $\forall x \in E : \forall \lambda \in \mathbb{K} : n(\lambda x) = |\lambda|\, n(x)$;
3. $\forall x, y \in E : n(x + y) \leqslant n(x) + n(y)$.

Proposition 1.6. *Soit* (E, n) *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé. L'application* d *suivante est une distance sur* E *(on l'appelle la distance associée à la norme* n*) :*

$$d : E \times E \to \mathbb{R}^+ : (x, y) \mapsto n(y - x).$$

Démonstration. EXERCICE. $\square$

Remarque. Si (E, n) est un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E, et si $x \in E$, alors on dit :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{n} x$$

lorsque :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$$

au sens de la distance associée à la norme n.
Exemple 1.1. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. normé avec pour norme $n : x \mapsto |x|$.
Exemple 1.2. Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $p \in [1, +\infty)$. Pour $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant d} \in \mathbb{C}^d$, on définit :

$$n(x) = \|x\|_p \coloneqq \left(\sum_{k=0}^{d} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On a alors $(\mathbb{C}^d, n)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé. Également $(\mathbb{C}^d, n)$ et $(\mathbb{R}^d, n)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés.
Définition 1.7. Soit $x \in \mathbb{C}^d$. On définit la *norme infinie* de x dans $\mathbb{C}^d$ par :

$$\|x\|_\infty \coloneqq \max_{1\leqslant i\leqslant d} |x_i|.$$

Exemple 1.3. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_\infty)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé. Également, $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ et $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_\infty)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés.

Démonstration. EXERCICE. $\square$

Définition 1.8. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que la suite (x_n) est *presque nulle* s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N : x_n = 0$.
Exemple 1.4. Soient $P \in \mathbb{C}[x]$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite presque nulle des coefficients de P. On pose :

$$\|P\|_\infty \coloneqq \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

Alors $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{C}[x]$.

Démonstration. EXERCICE. $\square$

1.1.1.3 Ouverts, fermés, compacts

Définition 1.9. Soit (X, d) un espace métrique. On appelle *boule ouverte* de centre $x \in X$ et de rayon $r \gneqq 0$ l'ensemble :

$$B(x, r[:= \left\{y \in X \text{ t.q. } d(x, y) \lneqq r\right\}.$$

On définit également la *boule fermée* de centre x et de rayon r l'ensemble :

$$B(x, r] := \{y \in X \text{ t.q. } d(x, y) \leqslant r\}.$$

Définition 1.10. Soit (X, d) un espace métrique et soit $O \subset X$. On dit que O est une partie *ouvert* dans X lorsque :

$$\forall x \in O : \exists r \gneqq 0 \text{ t.q. } B(x, r) \subset O.$$

Remarque. Pour tout X, les ensembles $\emptyset$ et X sont tous deux des ouverts de X.
Définition 1.11. Soit (X, d) un espace métrique. Une partie $F \subset X$ de X est dite *fermée* dans X lorsque $X \setminus F$ est ouvert.
Proposition 1.12. *Dans un espace métrique* (X, d), *soit* $(O_i)_{i \in I}$ *une famille d'ouverts de* X *indicés par un ensemble* $I \neq \emptyset$. *Alors* $\left(\bigcup_{i \in I} O_i\right)$ *est un ouvert de* X. *Si de plus* I *est fini, alors* $\left(\bigcap_{i \in I}\right)$ *est un ouvert de* X.
Exemple 1.5. Prenons $X = \mathbb{R}$ et $O_i = (-1 - \frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{i})$. Alors $\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} O_i\right) = [-1, 1]$ qui n'est pas un ouvert de X.

Démonstration. EXERCICE. □

Définition 1.13 (Compacts par Borel-Lebesgue)**.** Soit (X, d) un espace métrique. Une partie $K \subset X$ est dite *compacte* si $K \neq \emptyset$ et si, de tout recouvrement de K par des ouverts de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

C'est-à-dire lorsque :

1. $K \neq \emptyset$;
2. $\forall I \neq \emptyset : \forall (O_i)_{i \in I}$ ouverts de X t.q. $K \subset \left(\bigcup_{i \in I} O_i\right) : \exists J \subset I$ fini t.q. $K \subset \left(\bigcup_{j \in J} O_j\right)$.

Proposition 1.14 (Compacts par Bolzano-Weierstrass)**.** *Soit* (X, d) *un espace métrique. Une partie* K *de* X *est compacte si et seulement si :*

1. $K \neq \emptyset$;
2. *de toute suite de points de* K, *on peut extraire une sous-suite convergente dans* K.

Démonstration. Admis. □

Exemple 1.6. L'ensemble $[0, 1]$ est un compact de $\mathbb{R}$.
Proposition 1.15. *Soit* (X, d), *un espace métrique et* $K \subset X$, *une partie compacte. Alors* K *est fermé et borné.*

Démonstration. EXERCICE. (Absurde) □

Proposition 1.16. *Soit* (E, n) *un* $\mathbb{K}$*-e.v. normé de dimension finie. Alors les parties compactes de* E *sont les parties fermées bornées non nulles.*

Démonstration. Admis. □

1.1.1.4 Suites de Cauchy

Définition 1.17. Soit (X, d), un espace métrique. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *de Cauchy* dans X lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m, n \geqslant N : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Proposition 1.18. *Si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente dans l'espace métrique* (X, d)*, alors elle est de Cauchy.*

Démonstration. Si x est la limite de la suite (x_n), on pose $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant \mathbb{N} : d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc $\forall m, n \geqslant N : d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon$. □

Définition 1.19. Un espace métrique (M, d) est dit *complet* quand toute suite de Cauchy de points de X converge dans X.

Définition 1.20. Un espace vectoriel E est dit *de Banach* lorsque toute suite de Cauchy de vecteurs de E converge dans E.

Remarque. On remarque que dans un espace métrique complet, une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy (ce qui est entre autres le cas de $\mathbb{R}$).

De plus, les suites de Cauchy permettent, dans des espaces complets, de montrer que des suites convergent sans connaitre leur limite.

Exemple 1.7. Les espaces métriques $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sont des espaces de Banach. Et pour tout $p \in [1, +\infty)$ et $q \in \mathbb{N}$, les espaces métriques $(\mathbb{R}^q, \|\cdot\|_p)$ et $(\mathbb{C}^q, \|\cdot\|_p)$ sont des espaces de Banach.

1.1.1.5 Continuité

Définition 1.21. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Une application $f : X \to Y$ est dite continue en $x_0 \in X$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta \gneqq 0 \text{ t.q. } \forall x \in X : \left(d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_X(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\right).$$

On dit que f est continue sur $A \subset X$ lorsque f est continue en tout $a \in A$.

Proposition 1.22. *Une fonction* $f : (X, d) \to (Y, d)$ *est continue sur* X *lorsque l'image réciproque par* f *de* (Y, d) *est un ouvert de* (X, d)*.*

Démonstration. Admis. □

Proposition 1.23. *Une fonction* $f : (X, d) \to (Y, d)$ *est continue en* $x_0 \in X$ *si et seulement si l'image par* f *de toute suite de points de* X *convergente en* x_0 *est une suite convergente en* $f(x_0)$*.*

Démonstration. Admis. □

Définition 1.24. Soit $f : (X, d) \to (Y, d)$. f est dite *lipschitzienne* de constante $K \geqslant 0$ lorsque

$$\forall (x, y) \in X^2 : d(f(x), f(y)) \leqslant d(x, y).$$

Proposition 1.25. *Si* $f : (X, d) \to (Y, d)$ *est lipschitzienne, alors elle est continue sur* X*.*

Démonstration. EXERCICE. □

Définition 1.26. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite dans un espace métrique (X, d). On dit que (a_k) est *presque nulle* lorsqu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N : a_n = 0$.

Exemple 1.8.

- Pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'application $c_i : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C} : P = \sum_{k=0}^{+} \infty a_k x^k \mapsto a_i$ est continue de $(\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. En effet, pour $i \in \mathbb{N}$, $P = \sum_{k=0}^{+} \infty a_k x^k$, et $Q = \sum_{k=0}^{+} \infty b_k x^k$, on a :

$$\left|c_i(P) - c_i(Q)\right| = |a_i - b_i| \leqslant \|P - Q\|_\infty = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k - b_k| .$$

  On en déduit que c_i est lipschitzienne sur $\mathbb{C}[x]$ et donc continue sur $\mathbb{C}[x]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k \in \mathbb{C}[x].$$

  On observe que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$ car :

$$\|P_n - P_m\|_\infty = \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} x^k \right\|_\infty .$$

  On a alors :

$$\|P_n - P_m\|_\infty = \left\| \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}} \frac{1}{k!} x^k \right\|_\infty = \max_{\min\{m,n\}+1 \leqslant k \leqslant \max\{m,n\}} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(\min\{m,n\}+1)!}.$$

  Montrons que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Supposons (par l'absurde) que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $P \in (\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$. Notons $(a_k) \subset \mathbb{C}$, la suite presque nulle des coefficients de P. Pour $i \in \mathbb{N}$, on a $c_i(P) = \frac{1}{i!}$ quand $n \geqslant i$. Or par la propriété de Lipschitz, on sait que $c_i(P_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} c_i(P) = a_i$. Or (a_k) est presque nulle et $a_i = \frac{1}{i!}$. Il y a donc contradiction. Donc (P_n) ne converge pas dans $(\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$. Dès lors, $(\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.

1.2 Convergence de suites de fonctions

1.2.1 Convergence simple [2]

Définition 1.27. Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. On dit que la suite $\left(f_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ où $f_n : X \to (Y, d)$ *converge simplement* sur X lorsque :

$$\forall x \in X : \left(f_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge dans } (Y, d).$$

Définition 1.28. Dans ce cas, la suite a pour limite simple la fonction :

$$f : X \to (Y, d) : x \mapsto \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

et est bien définie. Cela se note :

$$f_n \xrightarrow[\substack{n \to +\infty \\ X}]{CVS} f \qquad \text{ou} \qquad f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CVS \text{ sur } X} f.$$

Exemple 1.9. Soient $X = [0, 1]$ et $Y = \mathbb{R}$. On pose $f_n(x) = x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Si $x \in [0, 1)$, alors la suite $\left(f_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison x avec $|x| < 1$ donc la suite converge vers 0 ;

2. La convergence simple est la notion de convergence « minimale » que l'on va exiger. Il existe des convergences encore plus élémentaires (voir théorie de l'intégration de Lebesgue), mais qui se trouvent en dehors des objectifs du cours.

— si $x = 1$,a lors $f_n(x) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction :

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

Remarque.

— On a « perdu » la continuité des fonctions f_n par passage à la limite ;

— ici, la convergence simple peut s'écrire ainsi, à l'aide de quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall x \in X : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant N : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

On remarque donc que N dépend de x (ordre des quantificateurs).

1.2.2 Convergence uniforme

Définition 1.29. Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique, et $f_n : X \to (Y, d)$. On dit que (f_n) *converge uniformément* sur X vers $f : X \to (Y, d)$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant N : \forall x \in X : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Cela se note :

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU sur } X} f.$$

Remarque. La définition est très proche de la convergence simple. La différence étant que pour une convergence uniforme, il faut que $N \in \mathbb{N}$ ne dépende pas de la valeur de x.

Proposition 1.30. *Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique, $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans (Y, d) et $f : X \to (Y, d)$. Si (f_n) converge uniformément sur X vers f, alors (f_n) converge simplement sur X vers f.*

Démonstration. EXERCICE. □

Exemple 1.10. Prenons $X = \mathbb{R} = Y$ et pour tout $n \geqslant 1$, définissons $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Fixons $x \in \mathbb{R}$. On trouve alors :

$$\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \to \sqrt{x^2} = |x|.$$

Donc :

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS sur } X} |\cdot|.$$

Théorème 1.31. *Soient (X, d), (Y, d) deux espaces métriques. Soient $f_n : X \to Y$, $a \in X$. On suppose :*

— $\exists f$ *t.q.* $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU } sur\ X} f$;

— $\forall n \in \mathbb{N} : f_n$ *est continue en* a.

Alors f est continue en a.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme des f_n, on sait :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant N : \forall x \in X : d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De plus, la fonction f_N est continue en a par hypothèse. Dès lors, on sait qu'il existe δ tel que :

$$\forall x \in X : d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f_N(x), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi, prenons $x \in X$ tel que $d(x, a) < \delta$. On a alors :

$$d(f(x), f(a)) \leqslant d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f(a)) \leqslant d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a)) \leqslant 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

Corollaire 1.32. *Si* $f_n \in C^0(X, Y)$ *et* $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU } \textit{sur } X}$*, alors* $f \in C^0(X, Y)$.

Démonstration. Les fonctions f_n sont continues en tout point et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU sur } X}$ par hypothèse. Dès lors, pour tout point $a \in X$, par le théorème précédent, on peut dire f continue en a. Dès lors $f \in C^0(X, Y)$. □

1.2.3 L'espace $B(X, E)$

Définition 1.33. Soient $X \neq \emptyset$ et $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. On note :

$$B(X, E) := \left\{ f : X \to E \text{ t.q. } f \text{ est bornée sur } X \right\}.$$

Pour $f \in B(X, E)$, on définit :

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} \left\| f(x) \right\|_E.$$

Proposition 1.34. $\left(B(X, E), \|\cdot\|_\infty\right)$ *est un espace vectoriel normé.*

Démonstration. EXERCICE. □

Théorème 1.35. $\left(B(X, E), \|\cdot\|_\infty\right)$ *est complet si et seulement si* $(E, \|\cdot\|_E)$ *est complet.*

Démonstration. Supposons d'abord $\left(B(X, E), \|\cdot\|_\infty\right)$ complet et montrons que $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet.

Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy d'éléments de E. Soit (f_n) une suite de fonctions de $B(X, E)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in X : f_n(x) = x_n.$$

Puisque (x_n) est de Cauchy, on sait que :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m, n \geqslant N : d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Or, avec $a \in X$ fixé, on peut alors dire $\forall m, n \geqslant N : d(f_m(a), f_n(a)) < \varepsilon$, et ce peu importe le a choisi (car les f_n sont constantes). On a donc (f_n) une suite de Cauchy dans $B(X, E)$ car $d(f_m(a), f_n(a)) = \|f_m - f_n\|_\infty$. Or, par complétude de $B(X, E)$, on sait qu'il existe $f \in B(X, E)$ telle que $f_n \to f$. La fonction f est également constante. Posons L la seule image de f. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N : \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$.

Or :

$$\varepsilon > \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in X} \left\| f_n(x) - f(x) \right\|_E = \left\| f_n(a) - f(a) \right\|_E = \|x_n - L\|.$$

Dès lors, on sait que (x_n) converge dans E.

Montrons maintenant que si $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet, alors $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est complet également.

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de fonctions de $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall m, n \geqslant N : \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon.$$

Soit $x \in X$. On observe que :

$$\forall m, n \geqslant N : \left\|f_n(x) - f_m(x)\right\|_E \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

La suite $(f_n(x))_n$ est donc une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_E)$. Par complétude de E, on sait qu'il existe $f(x) \in E$ tel que $f_n(x) \to f(x)$. Montrons maintenant que $f \in B(X, E)$.

La suite $(f_n)_n$ est de Cauchy et donc bornée. Soit $M \gneqq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} : \|f_n\|_\infty < M$. Passons à la limite dans $(B(X, E)$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in X : \left\|f(x)\right\|_E < M.$$

Ainsi, $f \in B(X, E)$ par définition.

Soit alors $\varepsilon > 0$. Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X$, on a :

$$\left\|f_n(x) - f_m(x)\right\|_E \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Passons alors à la limite e m, ce qui donne :

$$\left\|f_n(x) - f(x)\right\|_E \leqslant \|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Dès lors :

$$\forall n \geqslant N : \|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

□

Remarque. Quand $X \neq \emptyset$ et $Y = E$ est un espace vectoriel normé, on a :

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU sur } X} f \iff \begin{cases} \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant N : f_n - f \in B(X, E) \\ f_n - f \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} 0 \end{cases}.$$

1.2.4 Convergence uniforme sur tout compact

Définition 1.36. Soit X, une partie non-vide d'un espace vectoriel norméde dimension finie $(E, \|\cdot\|_E)$. Soit (Y, d) un espace métrique. Une suite $f_n : X \to Y$ converge uniformément vers $f : X \to Y$ sur tout compact lorsque :

$$\forall \text{ compact } K \subset X : f_n\Big|_K \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU sur } K} f\Big|_K.$$

Cela se note :

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU sur tout cpct de } X} f.$$

Proposition 1.37. *Si la suite f_n converge uniformément sur tout compact de X et si toutes les fonctions f_n sont continues en $a \in X$, alors f est continue en a.*

Démonstration. EXERCICE. □

Exemple 1.11. Prenons $X = Y = \mathbb{R}$. On définit $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. On a alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS sur } X} \exp$.

De plus :

$$\left\|f_n - \exp\right\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \exp(x)\right| = +\infty.$$

Donc f_n ne converge pas uniformément vers exp. Montrons maintenant que f_n converge uniformément vers exp sur tout compact de $\mathbb{R}$. Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact. On sait qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ tels que $K \subset [a, b]$. Pour $x \in [a, b]$, par Lagrange, on a :

$$\exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(c_x),$$

avec $c_x \in [a, b]$.

Ainsi :

$$\left| \exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in [a,b]} \exp(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

D'où $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{[a,b]} f$ et donc la convergence uniforme sur tout compact de f_n vers f.

1.3 Suites de fonctions et opérations d'intégration et de dérivation

1.3.1 Passage à la limite dans une intégrale de Riemann

Soit X un pavé de $\mathbb{R}^d$ (donc $X = \prod_{i=1}^{d} [a_i, b_i]$ avec $a_i < b_i \forall i \in \{1, \ldots, d\}$).

Théorème 1.38. *Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$ intégrables au sens de Riemann sur X. Supposons $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{CVU sur } X} f$. Alors :*

— *f est intégrable au sens de Riemann ;*
— *la $\left(\int_X f_n(x)\,dx\right)_n$ converge vers $\int_X f(x)\,dx$.* [3]

Démonstration. On note $\mathcal{E}(X, \mathbb{R}) \coloneqq \{f : X \to \mathbb{R} \text{ t.q. } f \text{ est élémentaire}\}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par la convergence uniforme, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N : \|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{4|X|},$$

où $|X| = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$.

Par intégrabilité de f_N, on sait qu'il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(X, \mathbb{R})$ telles que :

$$\psi \leqslant f_N \leqslant \varphi \qquad \text{et} \qquad \int_X (\varphi - \psi) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors :

$$\psi - f_N \leqslant f \leqslant \varphi + f_N,$$

ou encore :

$$\psi - \frac{\varepsilon}{4|X|} \leqslant f \leqslant \varphi + \frac{\varepsilon}{4|X|}.$$

3. Cela veut dire que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n(x)\,dx = \int_X \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,dx.$$

En posant $\overline{\psi} \coloneqq \psi - \frac{\varepsilon}{4|X|}$ et $\overline{\varphi} \coloneqq \varphi + \frac{\varepsilon}{4|X|}$, on a $\overline{\psi}, \overline{\varphi} \in \mathcal{E}(X, \mathbb{R})$. De plus :

$$\int_X (\psi - \varphi) = \int_X \left(\psi + \frac{\varepsilon}{4|X|} - \left(\varphi - \frac{\varepsilon}{4|X|} \right) \right) = \frac{\varepsilon}{2|X|}|X| + \int_X \psi - \varphi < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dès lors, on en déduit f intégrable au sens de Riemann.

Fixons $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme de f_n vers f sur X, on sait que :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant N : \|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{|X|}$$

Et donc :

$$\left| \int_X f_n(x)\,dx - \int_X f(x)\,dx \right| = \left| \int_X (f_n - f)(x)\,dx \right| \leqslant \left| \int_X \|f_n - f\|_\infty\,dx \right| = |X| \|f_n - f\|_\infty \leqslant |X| \frac{\varepsilon}{|X|} = \varepsilon.$$

Finalement, la suite $\left(\int_X f_n(x)\,dx\right)_n$ converge dans $\mathbb{R}$ vers $\int_X f(x)\,dx$. □

Remarque.

1. Il est possible d'avoir les résultats sans vérifier les hypothèses. Par exemple, $X = [0,1] \subset \mathbb{R} = Y$, avec $f_n(x) = x^n$. On sait que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS sur } X} 1_{\{x=1\}}$ et que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$. On remarque alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \int_0^1 1_{\{x=1\}}(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx\ ;$$

2. si les hypothèses ne sont pas vérifiées, la conclusion peut être fausse. Par exemple, $X = [0,1] \subset \mathbb{R} = Y$. On définit ($n \geqslant 1$) :

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n\alpha_n x & \text{si } 0 \leqslant x < \frac{1}{2n} \\ 2\alpha_n - 2n\alpha_n x & \text{si } \frac{1}{2n} \leqslant x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

où $\alpha_n \in \mathbb{R}_0^+$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$, donc $\alpha_n = 2n$.

On a alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS sur } X} 0 = f$. La fonction nulle $0(x)$ est intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$.

Finalement, on a :

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1.$$

Dans ce cas précis, on ne peut pas passer à la limite.

1.3.2 Passage à la limite dans une dérivation ordinaire ou partielle

Théorème 1.39. *Soit $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$, un ouvert. Soient $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, toutes de classe C^1 sur Ω. Supposons :*

— $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS } \textit{sur tout cpct de } \Omega} f$;

— $\forall i \in [\![1, d]\!] : \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU } \textit{sur } \Omega} g_i$.

Alors :

1. $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$;

2. $\forall i \in [\![1, d]\!] : \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x_i}$ *dans* Ω ;

3. $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU } \textit{sur tout cpct de } \Omega} f$.

Démonstration. Soit $x \in \Omega$. Par ouverture de Ω, on sait qu'il existe $\delta \gneqq 0$ tel que $B(x, \delta[\subset \Omega$. On en déduit que $B(x, \frac{\delta}{2}]$ est incluse dans $B(x, \delta[$. Or $B(x, \frac{\delta}{2}]$ est fermé et borné par définition. $B(x\frac{\delta}{2}]$ est donc un compact de Ω.

Soient $i \in [\![1, d]\!]$ et $h \in [\pm\frac{\delta}{2}]$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x + he_i) = f_n(x) + \int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + se_i)\, ds.$$

Or comme $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS sur tout cpct de } \Omega} f$ et pour tout i, $\frac{\partial f_n}{\partial x_i}$ converge uniformément vers g_i sur $B(x, \frac{\delta}{2}]$, il vient :

$$f_n(x + he_i) = f_n(x) + \int_0^h g_i(x + se_i)\, ds,$$

où $\{e_1, \dots e_d\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

On en déduit alors que f admet une dérivée partielle par rapport à x_i en x :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = g_i(x).$$

De plus, les f_n sont $C^1(\Omega, \mathbb{R})$, et donc les dérivées partielles $\frac{\partial f_n}{\partial x_i}$ sont $C^0(\Omega, \mathbb{R})$ pour tout i et par convergence uniforme sur les compacts, $g_i \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$ (Proposition 1.37).

On en déduit alors $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ avec $\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i$ pour tout i dans Ω (points 1 et 2 à montrer).

Il reste donc à montrer le point 3.

Soit $K \subset \Omega$, un compact. Par ouverture de Ω, on sait que pour tout $a \in K$, on a :

$$\exists r_a \gneqq 0 \text{ t.q. } B(a, r_a[\subset \Omega.$$

Dès lors, on sait que :

$$K \subset \bigcup_{a\in K} B\left(a, \frac{r_a}{2}\right[.$$

Par complétude, on sait qu'il existe un sous-recouvrement fini de K, c'est-à-dire $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \in K^p$ tel que :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{p} B\left(a_i, \frac{r_{a_i}}{2}\right[.$$

Par convergence simple de f_n vers f, et puisque les a_i sont en nombre fini, on peut alors exprimer :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant N : \forall k \in [\![1, p]\!] \left|f_n(a_i) - f(a_i)\right| < \varepsilon.$$

Fixons donc $\varepsilon > 0$, soit N correspondant et soit $x \in K$. Il existe $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $x \in B(a_k, \frac{r_{a_k}}{2}[$ car les boules ouvertes forment un recouvrement de K. On a alors :

$$f_n(x) = f_n(a_k) + \int_0^1 \left\langle \nabla f_n(a_k + t(x - a_k)), (x - a_k) \right\rangle dt,$$

et :

$$f(x) = f(a_k) + \int_0^1 \left\langle \nabla f(a_k + t(x - a_k)), (x - a_k) \right\rangle dt.$$

Par différence, on a :

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \left|f_n(a_k) - f(a_k)\right| + \int_0^1 \left\|\nabla f_n(a_k + t(x - a_k)) - \nabla f(a_k + t(x - a_k))\right\| dt \cdot \|x - a_k\|.$$

Par convergence uniforme sur $\left(\bigcup_{i=1}^p B(a_i, \frac{r_{a_i}}{2}]\right)$ de ∇f_n vers ∇f, on sait que :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant N : \|\nabla f_n - \nabla f\|_{\infty, \bigcup_{i=1}^p B\left(a_i, \frac{r_{a_i}}{2}\right]} < \frac{2\varepsilon}{\max\limits_{i \in [\![1,p]\!]} r_{a_i}}.$$

Finalement, on a :

$$\forall x \in K : \forall n \geqslant N : \left\|f_n(x) - f(x)\right\| \leqslant \varepsilon + \frac{r_{a_k}}{2} \cdot \frac{2\varepsilon}{\max\limits_{i \in [\![1,d]\!]} r_{a_i}} \leqslant 2\varepsilon.$$

Ainsi, pour $n \geqslant N$, on a :

$$\|f_n - f\|_{\infty, K} \leqslant 2\varepsilon.$$

□

Remarque. Ce théorème est vrai en particulier pour $d = 1$, et Ω un segment de $\mathbb{R}$.

Exemple 1.12 (Contre-exemples ne vérifiant pas les hypothèses donc ne pouvant faire passer la limite dans la dérivation).

$f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}, n \geqslant 1, x \in X = \mathbb{R}$. On a donc $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{CVU sur } \mathbb{R}} 0 = f$ car $\left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{n} \to 0$ avec $\frac{1}{n}$ ne dépendant pas de x. Les f^n sont $C^\infty(\mathbb{R})$ et sont donc dérivables :

$$\frac{df_n}{dx} = n \cos(n^2 x),$$

et donc :

$$\left.\frac{df_n}{dx}\right|_{x=0} = n \to +\infty.$$

On en déduit :

$$\neg \left(\frac{df_n}{dx} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{df}{dx} \right).$$

2. $f_n(x) = \frac{x^n}{n}, n \geqslant 1, x \in X = [0, 1]$. On a $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{CVU sur } X} 0$. Puisque les f_n sont $C^\infty(X, \mathbb{R})$, on a :

$$\frac{df_n}{dx} = x^{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1_{\{x=1\}},$$

qui n'est pas une dérivée. À nouveau, la suite des dérivées des f_n ne tend pas vers la dérivée de f.

Corollaire 1.40. *Soient* $p \in \mathbb{N}^*, \Omega \subset \mathbb{R}^d$*, un ouvert non-vide. Soit* $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *de classe* $C^p(\Omega, \mathbb{R})$*. Supposons :*

— $\forall q \in [\![0, p-1]\!] : \forall (i_1, \ldots, i_q) \in [\![1, d]\!]^q : \dfrac{\partial^q f_n}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_q}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU } \textit{sur } \Omega} g_{i_1,\ldots,i_q}$;

— $\forall (i_1, \ldots i_p) \in [\![1, d]\!]^p : \dfrac{\partial^p f_n}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_p}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU } \textit{sur } \Omega} g_{i_1,\ldots i_q}$.

Alors :

1. $f = g_\emptyset \in C^p(\Omega, \mathbb{R})$;
2. $\forall q \in [\![1, p]\!] : \forall (i_1, \ldots, i_q) \in [\![1, d]\!]^q : \dfrac{\partial^q f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_q}} = g_{i_1,\ldots,i_q}$;
3. $\forall q \in [\![0, p-1]\!] : \forall (i_1, \ldots, i_q) \in [\![1, d]\!]^q : \frac{\partial^q f_n}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_q}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU } \textit{sur tout cpct de } \Omega} g_{i_1,\ldots,i_q}$.

Démonstration. EXERCICE. (Récurrence sur p par le résultat précédent) □

1.4 Séries de fonctions

1.4.1 Retranscription des résultats sur les suites

Définition 1.41. Soit $u_n : X \to Y$ où $X \neq \emptyset$ et Y est un espace vectoriel normé. On appelle *somme partielle d'ordre* n *de la série de terme général* u_n la fonction suivante :

$$S_n : X \to Y : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

On dit que la série de terme général u_n *converge simplement* sur X lorsque S_n converge simplement sur X. De même pour la *convergence uniforme* sur X et la *convergence uniforme sur tout compact* de X.

Théorème 1.42. *Soient* (X, d) *un espace métrique et* Y *un espace vectoriel normé. Soit* $u_n : X \to Y$. *Si* $\forall n \in \mathbb{N} : u_n$ *est continue en* $a \in X$ *et si la série de terme général* u_n *converge uniformément sur* X*, alors :*

$$S := \lim_{n\to+\infty} S_n \textit{ est continue en } a.$$

Démonstration. EXERCICE. □

Théorème 1.43. *Soit* $X \neq \emptyset$*, un pavé de* $\mathbb{R}^d$ *et soit* $u_n : X \to Y$ *t.q.* $\sum_{n\geqslant 0} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU } \textit{sur } X} S$ *avec* u_n *intégrable au sens de Riemann pour tout* n*. Alors :*

1. *S est intégrable au sens de Riemann sur* X *;*
2. *la suite* $\int_X S_n(x)\,dx$ *converge vers* $\int_X S(x)\,dx$.

Démonstration. EXERCICE. □

Théorème 1.44. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$*, un ouvert non-nul et soit* $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *de classe* $C^p(\Omega, \mathbb{R})$ *avec* $p \in \mathbb{N}^*$*. Supposons :*

— $\sum_{n\geqslant 0} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS } \textit{sur } \Omega} S$;

— $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ *t.q.* $|\alpha| := \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \alpha_i \leqslant p : \sum_{n\geqslant 0} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS } \textit{sur } \Omega} s_\alpha$;

— *lorsque* $|\alpha| = p$*, la convergence ci-dessus est uniforme sur les compacts de* Ω.

Alors :

1. $S \in C^p(\Omega, \mathbb{R})$;

2. $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d : \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} S = \sum_{n \geqslant 0} \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} u_n$;

3. *Il y a convergence uniforme sur les compacts de* Ω *des séries de dérivées partielles d'ordre* 0 *à* $p-1$.

1.4.2 Convergence normale

Définition 1.45. Soient $X \neq \emptyset$ et Y un espace vectoriel normé. On dit que la série de terme général $u_n : X \to Y$ converge normalement sur X lorsque :

$$\sum_{n \geqslant 0} \|u_n\|_{\infty,X} < +\infty.$$

Définition 1.46. On dit que la série de terme général $u_n : X \to Y$ vérifie le critère de Weierstrass lorsqu'il existe $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

— $\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in X : \left\|u_n(x)\right\|_E \leqslant M_n$;

— $\sum_{n \geqslant 0} M_n < +\infty$.

Remarque. $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge normalement sur X si et seulement si elle vérifie le critère de Weierstrass.

Proposition 1.47. *Si* $(E, \|\cdot\|_E)$ *est un espace vectoriel normé complet, et si* $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ *converge normalement sur* X *alors* $\sum_{n \geqslant 0}$ *converge uniformément sur* X.

Démonstration. Écrivons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \in B(X, E)$. Par convergence normale, la suite $\sigma_n = \sum_{k \geqslant 0} \|u_k\|_{\infty,X}$ converge. De plus, (σ_n) est de Cauchy dans $\mathbb{R}^+$. Donc :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n, m \geqslant N : |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\|_{\infty,X} &= \left\| \sum_{k=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)} u_k \right\|_{\infty,X} \leqslant \sum_{k=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)} \|u_k\|_{\infty,X} \\ &\leqslant |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $(S_n)_n$ est de Cauchy dans $\left(B(X, E), \|\cdot\|_{\infty,X}\right)$. Cet espace est complet car $(E, \|\cdot\|_E)$ l'est (Théorème 1.35). Et donc, $(S_n)_n$ converge uniformément sur X. □

Remarque. On peut écrire :

$$\text{CVN} \underset{\text{complet}}{\Rightarrow} \text{CVU} \Rightarrow \text{CVS},$$

mais les réciproques sont habituellement fausses.

Corollaire 1.48. *Si* $f_n : X \to Y$ *(avec* Y *un espace vectoriel normé complet) est t.q. :*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : \exists M_n \geqslant 0 \textit{ t.q.} \|f_{n+1} - f_n\|_{\infty,X} \leqslant M_n \\ \sum_{m \geqslant 0} M_m < +\infty, \end{cases}$$

alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* X.

Démonstration. La série de terme général $u_n = f_{n+1} - f_n$ converge normalement sur X car elle vérifie le critère de Weierstrass sur X. Par complétude de Y, la série $\sum u_n$ converge uniformément sur X.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = f_{n+1} - f_0.$$

Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X. $\square$

1.4.3 Transformation d'Abel

Théorème 1.49. *Soient* Y *un espace vectoriel normé complet,* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y^{\mathbb{N}}$*, et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$*. Supposons :*

$$\begin{cases} \exists M \gneqq 0 \text{ t.q. } \forall n \in \mathbb{N} : \left\| \sum_{k=0}^{n} g_k \right\|_Y \leqslant M \\ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ en décroissant.} \end{cases}$$

Alors $f_n g_n$ *est le terme général d'une série convergente.*

Démonstration. On pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : G_k = \sum_{m=0}^{k} g_m$$

Calculons, pour $n, p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_{n+p} - S_n &= \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k g_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(G_k - G_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k G_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k G_{k-1} = \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k G_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} f_{k+1} G_k \\ &= \sum_{n+1}^{n+p-1} G_k(f_k - f_{k+1}) + f_{n+p}G_{n+p} - f_{n+1}G_n. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \left\| S_{n+p} - S_n \right\|_Y \leqslant M \sum_{k=n+1}^{n+p} (f_k - f_{k+1}) + M f_{n+p} + M f_{n+1} = M(f_{n+1} - f_{n+p}) + M(f_{n+p} + f_{n+1}) \\ = 2M f_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \end{aligned}$$

et la convergence de dépend pas de p. On a alors que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et par complétude de Y, S_n converge, ce qui implique que la série de terme général $f_n g_n$ converge. $\square$

Théorème 1.50. *Soient* X *un espace vectoriel normé completet* $X \neq 0$*. Soient :*

$$\begin{aligned} g_n &: X \to Y, \\ f_n &: X \to \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Supposons :

— *qu'il existe* $M \gneqq 0$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N} : \left\| \sum_{k=1}^{n} g_k \right\|_{\infty, X} \leqslant M$ *;*

— *que* $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU sur } X} 0$ *en décroissant.*

Alors $f_n g_n$ *est le terme général d'une série qui converge uniformément sur* X*.*

Démonstration. Par la preuve précédente, on a :

$$\left\|S_{n+p} - S_n\right\|_Y \leqslant 2Mf_{n+1}(x) \leqslant 2M\|f_{n+1}\|_{\infty,X}\,.$$

On déduit donc :

$$\left\|S_{n+p} - S_n\right\|_{\infty,X} \leqslant 2M\|f_{n+1}\|_{\infty,X}\,.$$

On sait donc que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $B(X, Y)$. Par complétude de Y, la série de terme général $f_n g_n$ converge uniformément sur X.

On remarque en effet que les S_n sont bornés car $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU sur } X} 0$, ce qui implique $\|f_n\|_{\infty,X}$ bornée, au moins à partir d'un certain $n \in \mathbb{N}$. De plus, $\left\|\sum_k g_k\right\| < M$ assure que g_k est uniformément bornée. □

1.4.4 Exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ nulle part dérivable

Considérons la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ sur $[-1, 1]$ et 2-périodique. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$. Posons :

$$\forall k \in \mathbb{N} : u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \left(\frac{3}{4}\right)^k \varphi(4^k x).$$

On sait que $\forall k \in \mathbb{N} : \|u_k\|_\infty = \left(\frac{3}{4}\right)^k \in [0, 1]$. Ainsi, la série de terme général u_k converge normalement sur $\mathbb{R}$ par le critère de Weierstrass. Par le Théorème 1.42, la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k\geqslant 0} u_k(x)$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Montrons maintenant la fonction f n'est jamais dérivable.

Construisons α_n et β_n tels que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n \leqslant x \leqslant \beta_n, \\ \beta_n - \alpha_n \to 0, \\ \forall n \in \mathbb{N} : \left|\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}\right| \geqslant \frac{1}{2}3^n. \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Choisissez $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p = \lfloor 4^n x \rfloor$ (et donc $p \leqslant 4^n x < p + 1$). Posons $\alpha_n = \frac{p}{4^n}$ et $\beta_n = \frac{p+1}{4^n}$. On a alors :

$$f(\beta_n) - f(\alpha_n) = \sum_{k\geqslant 0} \left(\varphi(4^k\beta_n) \left(\frac{3}{4}\right)^k - \varphi(4^k\alpha_n) \left(\frac{3}{4}\right)^k \right) = \sum_{k\geqslant 0} \left(\frac{3}{4}\right)^k \Big(\varphi(4^k\beta_n) - \varphi(4^k\alpha_n)\Big)$$

On observe que :

— si $k \lneqq n$, alors $4^k\beta_n = 4^{k-n}(p+1)$ et $4^k\alpha_n = 4^{k-n}p$. Puisque φ est lipschitzienne de constante 1, on a :
$$\varphi(4^k\beta_n) - \varphi(4^k\alpha_n) \leqslant 4^{k-n}(p + 1 - p) = 4^{k-n}\ ;$$
— si $k = n$, alors $\left|\varphi(4^k\beta_n) - \varphi(4^k\alpha_n)\right| = 1$;
— si $k \gneqq n$, alors $4^k\alpha_n = 4^{k-n}p \in 4\,\mathbb{Z} \subset 2\,\mathbb{Z}$ donc $\varphi(4^k\alpha_n) = 0$. De même, on a $\varphi(4^k\beta_n) = 0$.

Ainsi :

$$f(\beta_n) - f(\alpha_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\varphi(4^k\beta_n) - \varphi(4^k\alpha_n)\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\varphi(4^n\beta_n) - \varphi(4^n\alpha_n)\right).$$

Or, par inégalité triangulaire inversée, on a :

$$\left|f(\beta_n) - f(\alpha_n)\right| \geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n \left|\varphi(4^n\beta_n) - \varphi(4^k\alpha_n)\right| - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k 4^{k-n} \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Et puisque $\beta_n - \alpha_n = 4^{-n}$, il vient :

$$\left|\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}\right| \geqslant \frac{1}{2}3^n,$$

ce qui contredit la dérivabilité en x.

1.5 Séries de puissances

1.5.1 Théorie du rayon

On se donne $(Y,\|\cdot\|)$, un $\mathbb{C}$-ev complet.
Définition 1.51. On appelle *série de puissance* toute série de fonctions :

$$u_n : \mathbb{C} \to Y,$$

dont le terme général est sous la forme $u_n(z) = a_n(z-z_0)^n$, avec $z_0 \in \mathbb{C}$ fixé et $(a_n) \subset Y$.
Remarque. $Y = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$.
Définition 1.52. Définissons $\overline{\mathbb{R}^+} := \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
Théorème 1.53. *Soit* $R := \left(\limsup_{n\to+\infty} \|a_n\|_Y^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$. *Quelque soit* $z \in \mathbb{C}$ *:*

- *si* $|z-z_0| \lneqq R$*, alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n(z)$ *converge absolument ;*
- *si* $|z-z_0| \gneqq R$*, alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n(z)$ *diverge grossièrement (le terme général ne tend pas vers 0 pour* $n \to +\infty$ *en norme dans* Y*).*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-z_0| < R$. Alors il existe $R' \gneqq 0$ t.q. $|z-z_0| < R' < R$ et :

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} < \frac{1}{|z-z_0|}.$$

Puisque $R^{-1} = \limsup_{n\to+\infty} \|a_n\|_Y^{\frac{1}{n}}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. :

$$\forall n \geqslant N : \|a_n\|_Y^{\frac{1}{n}} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \|a_n\|_Y^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R} \leqslant \frac{1}{R'}.$$

Dès lors : $\|a_n\|_Y \leqslant \frac{1}{(R')^n}$, ou encore $|z-z_0|\|a_n\|_Y \leqslant \frac{|z-z_0|^n}{(R')^n}$. On a donc :

$$\left\|(z-z_0)^n a_n\right\|_Y \leqslant \left(\frac{|z-z_0|}{R'}\right)^n.$$

Et comme $\left|\frac{|z-z_0|}{R'}\right| < 1$, on sait que la série de terme général $\frac{|z-z_0|}{R'}$ converge et donc de terme général $\left\|(z-z_0)^n a_n\right\|_Y$ converge aussi.

Soit maintenant $z \in \mathbb{C}$ t.q.$|z-z_0| > R$. Il existe $R' > 0$ tel que $|z-z_0| > R' > R$ et $|z-z_0|^{-1} < (R')^{-1} + R^{-1}$. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{R'} \leqslant \left\|a_{\varphi(n)}\right\|_Y^{\frac{1}{\varphi(n)}}.$$

On en déduit :

$$\left\|a_{\varphi(n)}(z-z_0)^{\varphi(n)}\right\|_Y = |z-z_0|^{\varphi(n)}\left\|a_{\varphi(n)}\right\|_Y \geqslant \left(\frac{|z-z_0|}{R'}\right)^{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Dès lors, $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ diverge grossièrement. □

Théorème 1.54. *Soit $a_n(z-z_0)^n$, le terme général d'une série de puissance. Alors :*
- *lorsque $0 < R < +\infty, \forall r \in (0, R)$: la série de série de terme général : $z \mapsto a_n(z-z_0)^n$ converge normalement sur $B(z_0, r]$;*
- *lorsque $R = +\infty$, la série de fonctions de terme général $z \mapsto a_n(z-z_0)^n$ converge normalement sur $B(z_0, r]$ pour tout r.*

Démonstration. Si $0 < r < R < +\infty$, observons que $|z_0 + r - z_0| < R$. Ainsi, avec le Théorème 1.53, la série de terme général $a_n(z_0 + r)$ converge absolument. Or :

$$\left\|a_n(z_0+r)\right\|_Y = \|a_n\|_Y |z_0 + r - z_0|^n = \|a_n\|_Y r^n.$$

Donc la série de terme général $\|a_n\|_Y r^n$ converge. Observons que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall z \in B(z_0, r] : \left\|u_n(z)\right\|_Y = \|a_n\|_Y |z-z_0|^n \leqslant \|a_n\|_Y r^n.$$

Ainsi $\|u_n\|_{\infty, B(z_0,r]} \leqslant \|a_n\|_Y r^n$. Or $\|a_n\|_Y r^n$ est le terme général d'une série qui converge. Par le critère de Weierstrass, la série de terme général u_n converge normalement $B(z_0, r]$.

Si maintenant $R = +\infty$, on prend $r \in \mathbb{R}^+{}_0, |z_0 + r - z_0| = r < R = +\infty$. Avec le Théorème 1.53, on a : que $\sum_{n\geqslant 0} u_n(z_0 + r)$ converge absolument. Or $\left\|u_n(z_0+r)\right\|_Y = \|a_n\|_R r^n$. Donc la série de terme général $\|a_n\|_Y r^n$ converge. Puisque l'on a toujours :

$$\|u_n\|_{\infty, B(z_0,r]} \leqslant \|a_n\|_Y r^n,$$

on a donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $B(z_0, r]$ par le critère de Weierstrass. □

Corollaire 1.55. *Soit $a_n(z-z_0)^n$ une série de puissance dans Y complet et R le rayon associé. Lorsque $R \gneqq 0$, la série converge normalement sur tout compact de $B(0, r[$.*

Démonstration. Si $0 < R < +\infty$, soit $K \subset B(z_0, R[$ un compact. Il existe $r \in (0, R)$ tel que $K \subset B(z_0, r] \subset B(z_0, R[$. La convergence normale sur $B(z_0, r]$ implique la convergence normale sur K.

Si $R = +\infty$, on a $B(z_0, R[= \mathbb{C}$ Soit K, un compact de $\mathbb{C}$. Il existe $r > 0$ tel que $K \subset B(z_0, r]$, et donc la convergence normale sur $B(z_0, r]$ implique la convergence normale sur K. □

Corollaire 1.56. *Lorsque $R > 0$, la fonction $S(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_k(z-z_0)^k$ est une fonction continue sur $B(z_0, R[$.*

Démonstration. Les fonctions $u_n : B(z_0, R[\to Y : z \mapsto a_n(z-z_0)^n$ sont continues sur l'ouvert $B(z_0, R[\subset \mathbb{C}$, et il y a convergence normale (et donc uniforme) de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sur les compacts de $B(z_0, R[$. Par le Théorème 1.54, on sait que $S \in C^0(B(z_0, R[, Y)$. □

1.5.2 Étude sur le cercle de convergence

Définition 1.57. On définit le cercle centré en $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $R > 0$ par :

$$\mathcal{C}(z_0, R] = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q.} |z - z_0| = R\}.$$

Théorème 1.58. *Lorsque* $0 < R < +\infty$*, s'il existe* $z \in \mathcal{C}(z_0, R]$ *tel que* $\sum_{n\geqslant 0} a_n (z-z_0)^n$ *converge absolument,alors la série de fonctions :* $u_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ *converge normalement sur* $B(z_0, R]$.

Démonstration. Soit $z \in \mathcal{C}(z_0, R]$ tel que $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z - z_0)^n$ converge absolument. On a :

$$\left\|a_n(z - z_0)^n\right\|_Y = |z - z_0|^n \|a_n\|_Y = R^n \|a_n\|_Y .$$

Puisque $\forall z \in B(z_0, R] : \forall n \in \mathbb{N} : \left\|u_n(z)\right\|_Y = |z - z_0| \|a_n\|_Y \leqslant R^n \|a_n\|_Y$, il vient que :

$$\forall n \geqslant 0 : \|u_n\|_{\infty,B(z_0,R]} \leqslant R^n \|a_n\|_Y .$$

Et donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $B(z_0, R]$ par le critère de Weierstrass. □

Exemple 1.13. $Y = \mathbb{C}$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$. On a alors $a_n = \frac{1}{n^2}$, donc :

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{-2}{n}} = \exp\left(-2\frac{\ln n}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

d'où $R = 1$, et il y a convergence en $z = 1$, donc il y a convergence absolue de la série :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\exp(in\theta)}{n^2} \; \forall\theta \in \mathbb{R},$$

et la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$ est normale sur $B(0, 1]$.

Théorème 1.59 (Théorème d'Abel)**.** *Si* $R \in (0, +\infty)$ *et* $\exists z \in \mathcal{C}(z_0, R]$ *t.q.* $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z - z_0)^n$ *converge, alors la série de fonctions de terme général* $z \mapsto a_n(z - z_0)^n$ *converge uniformément sur le segment reliant* z_0 *à* z.

Démonstration. Prenons $z_0 = 0$ et $z \in {\mathbb{R}^+}_0$. Prenons $x \in [0, z]$, $n, p \in \mathbb{N}^*$. Écrivons :

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k x^k = \sum_{n=0}^{n+p} a_k z^k \left(\frac{x}{z}\right)^k .$$

Notons alors $S_m := \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$, pour tout m. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{n+p} a_k x^k &= \sum_{k=n}^{n+p} (S_k - S_{k-1}) \left(\frac{x}{z}\right)^k = \sum_{k=n}^{n+p} (S_k - S_{n-1}) \left(\frac{x}{z}\right)^k - \sum_{k=n}^{n+p} (S_{k-1} - S_{n-1}) \left(\frac{x}{z}\right)^k \\
&= \sum_{k=n}^{n+p} (S_k - S_{n-1}) \left(\frac{x}{z}\right)^k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} (S_k - S_{n-1}) \left(\frac{x}{z}\right)^{k+1} \\
&= -(S_{n-1} - S_{n-1}) \left(\frac{x}{z}\right)^n + \sum_{k=n}^{n+p-1} (S_k - S_{n-1}) \left(\left(\frac{x}{z}\right)^k - \left(\frac{x}{z}\right)^{k+1}\right) + (S_{n+p} - S_{n-1}) \left(\frac{x}{z}\right)^{n+p} .
\end{aligned}$$

Puisque la série de terme général $z \mapsto a_k |z - z_0|^k$ converge, la suite $(S_m)_n$ est de Cauchy dans Y. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. :

$$\forall k, n > N : \|S_k - S_{n-1}\|_Y \leqslant \varepsilon.$$

Soit un $n \geqslant N$, et $p \in \mathbb{N}^*$. Prenons $x \in [0, z]$. On a :

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=n}^{n+p} a_k x^k \right\|_Y &\leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \left\| (S_k - S_{n-1}) \left(\left(\frac{x}{z}\right)^{k+1} - \left(\frac{x}{z}\right)^{k} \right) \right\|_Y + \left\| (S_{n+p} - S_{n-1} \left(\frac{x}{z}\right)^{n+p} \right\| \\
&\leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \|S_k - S_{n-1}\| \left(\left(\frac{x}{z}\right)^{k} - \left(\frac{x}{z}\right)^{k+1} \right) + \|S_{n+p} - S_{n-1}\| \left(\frac{x}{z}\right)^{n+p} \\
&\leqslant \varepsilon \sum_{k=n}^{n+p-1} \left(\left(\frac{x}{z}\right)^{k} - \left(\frac{x}{z}\right)^{k+1} \right) + \varepsilon \left(\frac{x}{z}\right)^{n+p} \\
&\leqslant \varepsilon \left(\left(\frac{x}{z}\right)^{n} - \left(\frac{x}{z}\right)^{n+p} \right) + \varepsilon \left(\frac{x}{z}\right)^{n+p} \\
&\leqslant \varepsilon \left(\frac{x}{z}\right)^{n}.
\end{aligned}$$

Par la suite, on peut dire que pour $n \geqslant N, p \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \cdot^k \right\|_{\infty,[0,z]} \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que la série de terme général $x \mapsto a_k x^k$ est de Cauchy dans $B([0, z], Y)$, et donc, par complétude de Y, convergente. □

Remarque. Soient $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$. On appelle la *suite de Cauchy* de (a_n) et (b_n) la suite de terme général :

$$c_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Théorème 1.60 (Théorème de Cauchy, version CDI1)**.** *Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ convergent absolument, alors $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ converge absolument, et on a :*

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n \right) \left(\sum_{n\geqslant 0} b_n \right) = \sum_{n\geqslant 0} c_n.$$

Théorème 1.61 (Théorème de Cauchy, version CDI2)**.** *Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n$, $\sum_{n\geqslant 0} b_n$, et $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ convergent, alors :*

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n \right) \left(\sum_{n\geqslant 0} b_n \right) = \sum_{n\geqslant 0} c_n.$$

Démonstration. Par hypothèse de convergence des séries, on a :

$$R_a \coloneqq R\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \right), R_b \coloneqq R\left(\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n \right), R_c \coloneqq R\left(\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n \right) \geqslant 1.$$

Posons :

$$A : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n,$$
$$B : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} b_n x^n,$$
$$C : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} c_n x^n.$$

Si les $R_\cdot$ sont > 1, alors $[0,1]$ est un compact de $B(0,R[$ et donc la somme de la série de terme général $\cdot_n z^n$ est C^0 sur $[0,1]$, et si $R = 1$, alors la série de puissance converge en $1 \in \mathcal{C}(0,1]$ et donc la série de terme général $\cdot_n z^n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Puisque $z \mapsto a_n z^n$ (pareil pour b_n, c_n) est C^0 sur $[0,1]$, il vient que $A, B, C \in C^0([0,1],\mathbb{C})$.

Pour $x \in [0,1)$, les séries $\sum_{n\geqslant 0} \cdot_n$ convergent **absolument**. De plus :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot b_{n-k} x^{n-k} = x^n \sum_{n=0}^{n} a_k b_{n-k} = x^n c_n.$$

Par le Théorème 1.60, on a :

$$\forall x \in [0,1) : A(x)B(x) = C(x).$$

De même, en passant à la limite (continuité) $x \to 1$, il vient :

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} b_n\right) = A(1)B(1) = C(1) = \sum_{n\geqslant 0} c_n.$$

$\square$

1.5.3 Fonctions réelles analytiques

On considère la série de puissances $u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, avec $x, x_0 \in \mathbb{R}$ et x_0 fixé.

Définition 1.62. On appelle *série dérivée formelle* de u_n la série de terme général :

$$u_n'(x) = n a_n (x - x_0)^{n-1}, \qquad n \geqslant 1$$

Remarque. La série dérivée formelle est toujours une série de puissances.

Proposition 1.63. *Soient :*

$$R_1 := R\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n (x - x_0)^n\right),$$
$$R_2 := R\left(\sum_{n\geqslant 1} n a_n (x - x_0)^{n-1}\right).$$

Alors $R_1 = R_2$.

Démonstration. On observe aisément que :

$$R_1^{-1} = \limsup_{n\to+\infty} \|a_n\|_Y^{\frac{1}{n}},$$

et donc :

$$R_2^{-1} = \limsup_{n\to+\infty} \|na_n\|_Y^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} \|a_n\|_Y^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to+\infty} \|a_n\|_Y^{\frac{1}{n}} = R_1^{-1},$$

car $n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. □

Proposition 1.64. *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Supposons* $R \gneqq 0$*, et notons :*

$$f : (x_0 - R, x_0 + R) \to Y : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n (x - x_0)^n.$$

Alors la fonction f *est continue sur* $(x_0 \pm R)$*, et on a :*

$$\forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in (x_0 \pm R) : f^{(p)}(x) = \sum_{n\geqslant p} \big(n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)\big)\, a_n (x - x_0)^{n-p} = \sum_{n\geqslant p} \frac{n!}{(n-p)!} a_n (x - x_0)^{n-p}.$$

Démonstration. On observe que le terme général $u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ est de classe C^∞ sur $(x_0 \pm R)$. La série $u_n'(x) = na_n(x - x_0)^{n-1}$ converge normalement sur les compacts de $(x_0 \pm R)$ par l'égalité des rayons. Donc $f \in C^1\big((x_0 \pm R)\big)$ et $f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} na_n(x - x_0)^{-1}$.

Par récurrence, on obtient le résultat désiré. □

Corollaire 1.65. *Si* f *est une somme d'une série de puissances* $\sum_{n\geqslant 0} a_n(x - x_0)^n$ *de rayon* $R \gneqq 0$ *sur* $(x_0 \pm R)$*, alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Démonstration. Si f est somme de la série de puissance de terme général $a_n(x - x_0)^n$, alors $f \in C^\infty$ sur $(x_0 \pm R)$. Par la Proposition 1.64, on trouve :

$$\forall p \in \mathbb{N} : f^{(p)}(x_0) = \sum_{n\geqslant p} \frac{n!}{(n-)!} a_n (x_0 - x_0)^{n-p} = \frac{p!}{0!} a_p (x_0 - x_0)^{p-p} + 0 = p! a_p 1 = p! a_p,$$

et donc $a_p = \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}$. □