

Espaces fonctionnels et séries de Fourier — Notes de cours de Pr.
P. Godin

Robin Petit

Année académique 2017-2018

Contents

1	Transformation de Fourier	2
1.1	Définitions	2
1.2	Formule d'inversion	5
1.3	Discussion sur la définition de la transformée	8
1.4	Extension de la transformée à $L^1 \cap L^2$	8
1.5	Exemple d'application de la théorie de Fourier	10
2	Espaces de Hilbert	12
2.1	Orthogonalité	14
2.2	Systèmes orthonormaux	17
2.3	Applications linéaires entre espaces vectoriels normés	23
3	Équations aux dérivées partielles et théorie des distributions	30
3.1	Rappels	30
3.1.1	Normes et matrices	30
3.2	Problème de Cauchy pour les EDPs	31

Chapter 1

Transformation de Fourier

1.1 Définitions

On considère \mathbb{R}^n à n fixé en tant qu'espace de mesure $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \lambda)$ avec \mathcal{M} la famille des ensembles Lebesgue-mesurables et λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n .

Définition 1.1. Pour $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on définit sa *transformée de Fourier* par :

$$\hat{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \xi \mapsto \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) dx. \quad (1.1)$$

Cette fonction est bien définie car $x \mapsto e^{-i\langle x, \xi \rangle}$ est bornée en module (et donc L^∞), et u est intégrable, donc $x \mapsto e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x)$ est intégrable par Hölder.

Proposition 1.2. Pour $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, \hat{u} est continue.

Proof. Soient $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ et $(h_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ t.q. $h_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$.

$$\hat{f}(\xi_0 + h_k) = \int e^{-i\langle x, \xi_0 \rangle} e^{-i\langle x, h_k \rangle} f(x) dx.$$

Puisque $|e^{-i\langle x, \xi_0 \rangle} e^{-i\langle x, h_k \rangle} f(x)| = |f(x)|$ et $e^{-i\langle \cdot, \xi_0 \rangle} e^{-i\langle \cdot, h_k \rangle} f(\cdot) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\lambda\text{-p.p.}} e^{-i\langle \cdot, \xi_0 \rangle} f(\cdot)$ (la suite converge même partout). Donc par le théorème de la convergence dominée :

$$\hat{f}(\xi_0 + h_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \int e^{-i\langle x, \xi_0 \rangle} f(x) dx = \hat{f}(\xi_0).$$

□

Proposition 1.3. Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si $\forall j \in [[1, n]] : x_j f \in L^1$, alors : $\hat{u} \in C^1$ et :

$$\forall j \in [[1, n]] : \left. \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi_j} \right|_{\xi} = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-ix_j) u(x) dx. \quad (1.2)$$

Proof. Soit $(h_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.q. $h_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, et prenons $\{e_j\}_{j=1}^n$ la base canonique de \mathbb{R}^n .

$$\frac{\hat{u}(\xi + h_k e_j) - \hat{u}(\xi)}{h_k} = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \underbrace{\frac{e^{-ih_k x_j} - 1}{h_k}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} -ix_j} u(x) dx.$$

En module :

$$\left| e^{-i\langle x, \xi \rangle} \frac{e^{-ih_k x_j} - 1}{h_k} f(x) \right| = \left| e^{-i\langle x, \xi \rangle} \right| \left| \frac{e^{-ih_k x_j} - 1}{h_k} \right| |f(x)| \leq C |x_j| |f(x)|,$$

qui est intégrable par hypothèse.

En effet, si $x_j = 0$, alors tout est nul et l'inégalité devient une égalité ; et si $x_j \neq 0$, alors $\left| \frac{e^{-ih_k x_j} - 1}{x_j h_k} \right|$ est borné.

Dès lors, par le théorème de convergence dominée, la limite passe sous l'intégrale et on a (1.2). \square

Corollaire 1.4. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, si $(1 + |x|)^m u \in L^1$, alors $u \in C^m$ et on peut dériver m fois sous le signe :

$$\partial^\alpha \hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-i)^{|\alpha|} x^\alpha u(x) dx$$

Proof. Exercice (récurrence sur m). \square

Définition 1.5. On définit l'ensemble de Schwartz :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &:= \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : x^\alpha \partial^\beta u \text{ est borné dans } \mathbb{R}^n \right\} \\ &= \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : x^\alpha \partial^\beta u \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \right\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Dans l'idée, \mathcal{S} est l'ensemble dont toutes les dérivées décroissent plus vite vers 0 que tout polynôme.

Proposition 1.6. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Proof. Immédiat par le fait que $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ sont des \mathbb{R} -evs. \square

Proposition 1.7. Si $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact, alors :

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \bigcap_{1 \leq p \leq +\infty} L^p(\mathbb{R}^n).$$

Proof.

(i) Pour $u \in \mathcal{S}$ et $+\infty > p \geq 1$:

$$\int |u|^p dx = \int \left(\underbrace{|u| (1 + |x|)^N}_{\text{borné pour tout } N} \right)^p (1 + |x|)^{-Np} dx \leq \int (C_N)^p \underbrace{(1 + |x|)^{-Np}}_{\text{intégrable pour } Np > n} dx.$$

Dès lors, pour N suffisamment grand ($Np > n$), on a $\int |u| dx \leq c^{\text{ste}}$

Le cas $p = +\infty$ vient uniquement du fait que pour $u \in \mathcal{S}$, pour $\alpha = \beta = (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n$:

$$u = x^\alpha \partial^\beta u \in L^\infty.$$

(ii) Soit $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$: $x^\alpha \partial^\beta u \neq 0 \subseteq \text{supp } u$ compact. Par Heine-Cantor, u est uniformément continue sur $\text{supp } u$.

□

Proposition 1.8. Pour $u \in \mathcal{S}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, alors : $x^\alpha \partial^\beta u \in \mathcal{S}$.

Proof. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{N}^n$. Par Leibniz :

$$\partial^\mu(fg) = \sum_{\sigma \leq \mu} \binom{\mu}{\sigma} \partial^\sigma f \partial^{\mu-\sigma} g.$$

Donc :

$$x^\lambda \partial^\mu(x^\alpha \partial^\beta u) = \sum_{\sigma \leq \mu} \binom{\mu}{\sigma} x^\lambda \partial^\sigma(x^\alpha) \partial^{\mu-\sigma} u,$$

où $x^\lambda \partial^\sigma(x^\alpha) \leq c^{\text{ste}} x^\gamma$. On en déduit que $x^\lambda \partial^\mu(x^\alpha \partial^\beta u)$ est une somme finie de termes essentiellement bornés et est donc essentiellement bornée. □

À défaut de définir une topologie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on définit uniquement une notion de convergence.

Définition 1.9. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^\mathbb{N}$, $u \in \mathcal{S}$, on dit que u_k converge vers u lorsque $k \rightarrow +\infty$ (noté $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{S}} u$) lorsque :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta(u - u_k)| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0. \quad (1.4)$$

Théorème 1.10. Soit $u \in \mathcal{S}$. Alors :

1. $\hat{u} \in \mathcal{S}$. De plus si $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{S}} u$, alors $\hat{u}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{S}} \hat{u}$.
2. $\widehat{D_j u}(\xi) = \xi_j \hat{u}(\xi)$ (de plus $\widehat{x_j u} = D_j \hat{u}$).

Proof. Pour le premier point, on calcule :

$$D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \int D_\xi^\alpha(e^{-i\langle x, \xi \rangle}) u(x) dx = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-x)^\alpha u(x) dx.$$

Donc :

$$\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \int \xi^\beta e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-x)^\alpha u(x) dx = \int (-D_x)^\beta(e^{-i\langle x, \xi \rangle}) (-x)^\alpha u(x) dx = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} D_x^\beta((-x)^\alpha u(x)) dx.$$

Pour montrer cette dernière égalité, intégrons par partie. D'abord observons pour $\phi \in \mathcal{S}$ et $j \in [[1, n]]$:

$$\int \partial_j \phi dx = \int \dots \int \left(\int \partial_j \phi dx_j \right) dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n.$$

Or :

$$\int \partial_j \phi dx_j = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N \partial_j \phi(x) dx_j = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\phi(x_1, \dots, x_{j-1}, N, x_{j+1}, \dots, x_n)}_{\xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0} - \underbrace{\phi(x_1, \dots, x_{j-1}, N, x_{j+1}, \dots, x_n)}_{\xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0} \right) = 0,$$

puisque $\phi \in \mathcal{S}$.

On en déduit donc que $\int \partial_j \phi \, dx = 0$.

Dès lors, puisque $e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-x)^\alpha u(x) \in \mathcal{S}$ et par récurrence :

$$\int (-D_x)^\beta (e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-x)^\alpha u(x)) \, dx = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} D_x^\beta ((-x)^\alpha u(x)) \, dx.$$

Montrons alors que $\forall N \in \mathbb{N} : \exists C_N \geq 0$ t.q. $|D_x^\beta ((-x)^\alpha u(x))| \leq C_N (1 + |x|)^{-N}$. Par Leibniz :

$$(1 + |x|)^N \partial^\beta (x^\alpha u(x)) = (1 + |x|)^N \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial^\gamma x^\alpha \partial^{\beta-\gamma} u(x)$$

est borné car $u \in \mathcal{S}$. Dès lors :

$$|\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x)| \leq C_N \int (1 + |x|)^{-N} \, dx.$$

Pour N suffisamment grand ($N > n$), on a $|\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x)| \leq c^{\text{ste}}$.

Dès lors, on trouve :

$$|\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-N} |D_x^\beta ((-x)^\alpha (u - u_k))| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On en déduit donc $\hat{u}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{S}} \hat{u}$.

Pour le second point, la seconde formule découle directement du premier pour $\alpha = e_j$:

$$D_j \hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-x_j) u(x) \, dx = \widehat{x_j u}(\xi).$$

La première égalité se démontre par :

$$\widehat{D_j u}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} D_j u(x) \, dx = - \int D_{x,j} (e^{-i\langle x, \xi \rangle}) u(x) \, dx = \xi_j \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) \, dx = \xi_j \hat{u}(\xi).$$

□

1.2 Formule d'inversion

Théorème 1.11. *Soit $u \in \mathcal{S}$. Alors :*

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(\xi) \, d\xi. \quad (1.5)$$

La fonction $(y, \xi) \mapsto e^{i\langle x, \xi \rangle} e^{-i\langle y, \xi \rangle} u(y)$ n'est pas intégrable pour (y, ξ) . On ne va donc pas pouvoir appliquer Fubini.

Proof. Pour $\chi \in \mathcal{S}$, $(y, \xi) \mapsto e^{-i\langle y, \xi \rangle} e^{i\langle x, \xi \rangle} \chi(\xi) u(y)$ est intégrable. Donc par Fubini :

$$\int e^{i\langle x, \xi \rangle} \chi(\xi) \hat{u}(\xi) \, d\xi = \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \chi(\xi) \int e^{-i\langle y, \xi \rangle} u(y) \, dy \, d\xi = \int u(y) \int e^{-i\langle y-x, \xi \rangle} \chi(\xi) \, d\xi \, dy = \int u(y) \hat{\chi}(y-x) \, dy.$$

Pour $\psi \in \mathcal{S}$, $\delta > 0$ tels que $\chi(\xi) = \psi(\delta\xi)$:

$$\hat{\chi}(\xi) = \int e^{-i\langle y, \xi \rangle} \psi(\delta\xi) \, d\xi = \delta^{-n} \hat{\psi}(\xi/\delta).$$

Alors :

$$\int e^{i\langle x, \xi \rangle} \psi(\delta\xi) \hat{u}(\xi) \, d\xi = \int u(x+y) \delta^{-n} \psi(y/\delta) \, dy = \int u(x+\delta y) \hat{\psi}(y) \, dy.$$

Par le théorème de convergence dominée :

$$\int u(x+\delta y) \hat{\psi}(y) \, dy \xrightarrow{\delta \rightarrow +\infty} u(x) \int \hat{\psi}(y) \, dy,$$

or :

$$\int e^{i\langle x, \xi \rangle} \psi(\delta\xi) \hat{u}(\xi) \, d\xi \xrightarrow{\delta \rightarrow +\infty} \psi(0) \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(\xi) \, d\xi.$$

Par unicité de la limite, si $\int \hat{\psi} \, dy \neq 0$:

$$u(x) = \frac{\psi(0)}{\int \hat{\psi}(y) \, dy} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(\xi) \, d\xi$$

Dans le cas $n = 1$, on prend $\psi_1 : x \mapsto e^{-x^2/2}$. En intégrant $z \mapsto e^{-z^2/2}$ sur un chemin rectangulaire $[a, b, c, d] \subset \mathbb{C}$, on trouve :

$$\int_a^b e^{-x^2/2} \, dx + \int_b^c e^{-z^2/2} \, dz + \int_c^d e^{-z^2/2} \, dz + \int_d^a e^{-z^2/2} \, dz = 0$$

par Cauchy. Pour $(a, b) \rightarrow (-\infty, +\infty)$, on trouve que $\int_b^c e^{-z^2/2} \, dz$ et $\int_d^a e^{-z^2/2} \, dz$ tendent vers 0. Donc à la limite :

$$\int_a^b e^{-x^2/2} \, dx = \int_{\Im z = t} e^{-z^2/2} \, dz = \int e^{(x^2 - t^2)/2} e^{-itx} \, dx.$$

Donc $\hat{\psi}(t) = \psi(t) \int \psi \, dx$. On en déduit :

$$\int \hat{\psi}(t) \, dt = \left(\int \psi(x) \, dx \right)^2 = \left(\int e^{-x^2/2} \right)^2 = 2\pi.$$

Dès lors $\psi(0) = 1$ et $\int \hat{\psi} \, dx = 2\pi$, qui donne bien la formule.

Dans le cas général $n > 1$, on prend $\psi(x) = e^{-|x|^2/2} = \prod_{j=1}^n \psi_1(x_j)$. Donc :

$$\hat{\psi}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \psi(x) \, dx = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2} \, dx = \int \prod_{j=1}^n e^{-ix_j \xi_j} \prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2} \, dx = \int \prod_{j=1}^n \left(e^{-ix_j \xi_j} e^{-x_j^2/2} \right) \, dx.$$

Par Fubini :

$$\hat{\psi}(\xi) = \prod_{j=1}^n \int e^{-ix_j \xi_j} e^{-x_j^2/2} \, dx = \prod_{j=1}^n \hat{\psi}_1(\xi_j).$$

On trouve alors :

$$\int \hat{\psi}(\xi) \, d\xi = \int \prod_{j=1}^n \hat{\psi}_j(\xi_j) \, d\xi = \prod_{j=1}^n \int \hat{\psi}_1(\xi_j) \, d\xi_j = (2\pi)^{-n},$$

où l'avant dernière égalité s'obtient en appliquant Fubini.

Puisque $\hat{\psi}(0) = 1$, on a bien (1.5). □

On définit une application *transformée de Fourier* $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} : u \mapsto \mathcal{F}u := \hat{u}$.

Proposition 1.12. \mathcal{F} est une bijection linéaire.

Proof. Par la formule d'inversion, \mathcal{F} est injective : si $\mathcal{F}u = 0$, alors $u = 0$.

De plus, \mathcal{F} est surjective. Pour $f \in \mathcal{S}$, montrons qu'il existe $u \in \mathcal{S}$ t.q. $\mathcal{F}u = f$. Prenons $u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} f(\xi) d\xi$. Alors :

$$\mathcal{F}f(x) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(\xi) d\xi = (2\pi)^n u(-x).$$

De plus :

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(x) dx = (2\pi)^n (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(x) dx = (2\pi)^n u(-\xi),$$

donc $\hat{f} = \hat{\hat{u}}$ pour tout x , et puisque \mathcal{F} est injective, $f = \hat{u}$. Donc \mathcal{F} est surjective, et donc surjective.

La linéarité est triviale :

$$\mathcal{F}(f + \lambda g)(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} (f + \lambda g)(x) dx = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx + \lambda \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} g(x) dx = (\hat{f} + \lambda \hat{g})(\xi).$$

□

En posant $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} : u \mapsto \tilde{\mathcal{F}}u$ où $\tilde{\mathcal{F}}u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} u(\xi) d\xi$. Par un raisonnement similaire à la Proposition précédente, on trouve $\tilde{\mathcal{F}}$ est une bijection linéaire. De plus $\mathcal{F}^{-1} = \tilde{\mathcal{F}}$.

De plus, puisque \mathcal{F} transforme des suites convergentes en suites convergentes sur \mathcal{S} , $\tilde{\mathcal{F}}$ fait de même.

Cela veut dire que \mathcal{F} est un homéomorphisme linéaire de \mathcal{S} dans \mathcal{S} pour la topologie non définie ici.

Proposition 1.13. Pour $u, v \in \mathcal{S}$:

1. $\int u \hat{v} = \int \hat{u} v$;
2. $\int u \bar{v} = (2\pi)^{-n} \int \hat{u} \hat{\bar{v}}$. Cette égalité est appelée *identité de Parseval*.

Proof. Le premier point se montre par la formule de la preuve du Théorème 1.11 pour $u, \chi \in \mathcal{S}$:

$$\int e^{i\langle x, \xi \rangle} \chi(\xi) \hat{u}(\xi) d\xi = \int u(x + y) \hat{\chi}(y) dy$$

en $x = 0$.

Le second point, prenons $u, w \in \mathcal{S}$ et posons $v := (2\pi)^{-n} \bar{\hat{w}}$. Par le premier point :

$$\int \hat{u} v = \int u \hat{v} = \int u (2\pi)^{-n} \hat{\hat{w}}.$$

On peut voir que :

$$(2\pi)^{-n} \hat{\hat{w}}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \bar{\hat{w}}(x) dx = (2\pi)^{-n} \overline{\int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{w}(x) dx} = \overline{\hat{w}(\xi)}.$$

Dès lors :

$$\int \hat{u} (2\pi)^{-n} \bar{\hat{w}} = \int u \bar{w}.$$

□

Corollaire 1.14 (Formule de Plancherel). *Pour $u \in \mathcal{S}$, on a :*

$$\int |u|^2 dx = (2\pi)^{-n} \int |\hat{u}|^2 d\xi \quad (1.6)$$

1.3 Discussion sur la définition de la transformée

On peut définir la transformée de Fourier de plusieurs manières, paramétrisé par $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}_{a,b}u(\xi) = a \int e^{-ib\langle x, \xi \rangle} u(x) dx.$$

La théorie reste la même à homothétie près puisque :

$$\mathcal{F}u(\xi) = \frac{1}{a} \mathcal{F}_{a,b}u(\xi/b).$$

$$(2\pi)^{-n} \int \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi = \frac{(2\pi)^{-n} b^n}{a^n} \int \mathcal{F}_{a,b}u(\eta) \overline{\mathcal{F}_{a,b}v(\eta)} d\eta.$$

Donc on peut choisir $a = 1$ et $b = 2\pi$ ou encore $a = (2\pi)^{n/2}$ et $b = 1$ afin de simplifier la formule de Parseval qui devient :

$$\int u \overline{v} = \int \mathcal{F}u \overline{\mathcal{F}v}.$$

Cependant le choix $a = b = 1$ permet de ne pas avoir de terme b^k lors des dérivations sous le signe intégral.

1.4 Extension de la transformée à $L^1 \cap L^2$

Proposition 1.15. *Il existe une unique application linéaire continue $\mathbb{F} : L^2 \rightarrow L^2$ tel que $\mathbb{F}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}$ et :*

$$\int u \overline{v} = (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}u \overline{\mathbb{F}v} d\xi,$$

i.e. \mathbb{F} préserve l'identité de Parseval.

Proof. Admettons que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Puisque $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Par cette densité, pour $u \in \mathcal{S}$, il existe $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^\mathbb{N}$ tel que $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} u$, et donc (u_k) est de Cauchy pour cette norme. $(\hat{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est également de Cauchy car :

$$\|\hat{u}_k - \hat{u}_m\| = (2\pi)^{n/2} \|u_k - u_m\|.$$

Par cette complétude, il existe $z \in \mathcal{S}$ t.q. $\hat{u}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} z$. On pose alors $\mathbb{F}u := z$. Montrons que z ne dépend pas de la suite (\hat{u}_k) choisie pour montrer que \mathbb{F} est bien définie.

Soit $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ t.q. $v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} z$. Alors $v_k - u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} 0$. Par Plancherel, $\hat{v}_k - \hat{u}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} 0$. Dès lors $\hat{v}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} z$.

Montrons alors que \mathbb{F} est linéaire.

Soient $u, v \in L^2$. Soient $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}, (v_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} u$ et $v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} v$. Alors $u_k + v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} u + v$. Par linéarité de \mathcal{F} , $\widehat{u_k + v_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \mathbb{F}(u + v)$.

Donc $\widehat{u_k} + \widehat{v_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \mathbb{F}u + \mathbb{F}v$ et $\widehat{u_k} + \widehat{v_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \mathbb{F}(u + v)$. On en déduit $\mathbb{F}u + \mathbb{F}v = \mathbb{F}(u + v)$. Il est également trivial que pour $\lambda \in \mathbb{R} : \mathbb{F}(\lambda u) = \lambda \mathbb{F}u$.

Pour montrer que $\mathbb{F}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}$, prenons $u \in \mathcal{S}$, et la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ constante $u_k = u$. Par définition de \mathbb{F} , on a $\mathbb{F}u = \hat{u}$ car $\forall k \in \mathbb{N} : \hat{u}_k = \hat{u}$, donc $\hat{u}_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \hat{u}$.

Montrons finalement que \mathbb{F} vérifie Parseval.

Premier cas : $u \in L^2$ et $v \in \mathcal{S}$. Il existe $\mathcal{S}^{\mathbb{N}} \ni (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} u$. Donc :

$$\int u \bar{v} = \int u_k \bar{v} + \int (u - u_k) \bar{v}.$$

Puisque :

$$\left| \int (u - u_k) \bar{v} \right| \leq \underbrace{\|u - u_k\|_{L^2}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0} \|v\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0,$$

on sait :

$$\int u_k \bar{v} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \int u \bar{v}.$$

Or $u_k, v \in \mathcal{S}$. Donc pour $k \rightarrow +\infty$, par Cauchy-Schwarz et par Parseval pour \mathcal{F} :

$$\int u \bar{v} = \int u_k \bar{v} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}u \bar{\mathbb{F}v}.$$

Dans le cas général $u, v \in L^2$, par le premier point pour $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ t.q. $v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} v$:

$$\int u \bar{v_k} = (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}u \bar{\mathbb{F}v_k}.$$

Or $v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} v$. Par Cauchy-Schwarz, on a :

1. $\int u \bar{v_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \int u \bar{v}$;
2. et $\int \mathbb{F}u \bar{\mathbb{F}v_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \int \mathbb{F}u \bar{\mathbb{F}v}$.

L'identité de Parseval est donc bien vérifiée pour \mathbb{F} . Il reste à vérifier que \mathbb{F} est continue et qu'elle est unique.

La continuité découle de Parseval :

$$\|u\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2} \|\mathbb{F}u\|_{L^2},$$

donc pour $\varepsilon > 0$, pour $\delta = (2\pi)^{-n/2}\varepsilon$, on a que si $\|u - v\|_{L^2} < \delta$, alors $\|\mathbb{F}u - \mathbb{F}v\|_{L^2} < \varepsilon$.

Si il existe $\mathbb{F}_1 : L^2 \rightarrow L^2$ continue et linéaire telle que $\mathbb{F}_1|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}$, alors par densité, pour $u \in L^2$, il existe $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u$, et donc, par continuité :

$$\underbrace{\mathbb{F}(u_k)}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mathbb{F}(u)} = \underbrace{\mathbb{F}_1(u_k)}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mathbb{F}_1(u)}.$$

Donc puisque deux application continues qui coïncident sur une sous-ensemble dense coïncident partout, on a bien que $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1$. \square

De la même manière, $\tilde{\mathcal{F}}$ se prolonge sur L^2 en $\tilde{\mathbb{F}}$

Proposition 1.16. $\mathbb{F} \circ \tilde{\mathbb{F}} = \text{Id}_{L^2} = \tilde{\mathbb{F}} \circ \mathbb{F}$.

Proof. Ceci vient directement de la même propriété sur \mathcal{F} et $\tilde{\mathbb{F}}$. Soit $u \in L^2$ et soit $\mathcal{S}^{\mathbb{N}} \ni (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} u$.

On sait :

$$\mathcal{S} \ni \tilde{\mathcal{F}}(u_k) = \tilde{\mathbb{F}}(u_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \tilde{\mathbb{F}}(u)$$

par continuité de $\tilde{\mathbb{F}}$. Par continuité de \mathbb{F} , on a :

$$\mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}}(u_k) = \mathbb{F} \circ \tilde{\mathbb{F}}(u_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \mathbb{F} \circ \tilde{\mathbb{F}}(u).$$

Or $\mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}}(u_k) = u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} u$. Par unicité de la limite, on a $\mathbb{F} \circ \tilde{\mathbb{F}}(u) = u$. L'autre égalité se démontre de la même manière. \square

À ce stade, il est légitime de se demander si les définitions que l'on a sur L^1 (la formule intégrale définie depuis \mathcal{S}) et sur L^2 (la définition de \mathbb{F}) sont compatibles, i.e. si pour $u \in L^1 \cap L^2$ on a bien $\hat{u} = \mathbb{F}u$. Cette égalité tient bien (démonstration à venir).

1.5 Exemple d'application de la théorie de Fourier

Pour $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$ le Laplacien sur \mathbb{R}^n et $f \in \mathcal{S}$, soit la PDE suivante :

$$(1 + \sum_{j=1}^n D_j^2)u = u - \Delta u = f, \quad (1.7)$$

ou plus généralement, pour des $a_\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\underbrace{\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha}_{P(D) \text{ polynôme}} u = f, \quad (1.8)$$

dans le cas du Laplacien, ce polynôme est $P(\xi) = 1 + |\xi|^2$.

Sous l'hypothèse $\inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} |P(\xi)| \gtrsim 0$, trouvons u t.q. $P(D)u = f$.

Formellement :

$$\begin{aligned}\widehat{P(D)u}(\xi) &= \hat{f}(\xi) \\ P(\xi)\hat{u}(\xi) &= \hat{f}(\xi) \\ \hat{u}(\xi) &= \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} \\ u(x) &= (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} d\xi.\end{aligned}$$

Plus rigoureusement, puisque $f \in \mathcal{S}$, on sait $\hat{f} \in \mathcal{S}$. De plus, P est borné par dessous. Donc $|\hat{f}/P| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}$, et du coup la fonction sous l'intégrale ($\xi \mapsto e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)}$) est L^1 , et cette intégrale est bien définie pour $N > n$.

De plus, puisque la dérivation selon x sur u fait juste descendre du ξ de l'exponentielle, par récurrence avec le théorème de convergence dominée et par la borne supérieure ci-dessus, on trouve que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On peut alors vérifier que la fonction u ainsi trouvée est bien une solution de (1.8) :

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha}_{=P(\xi)} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} d\xi = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi = f(x).$$

Chapter 2

Espaces de Hilbert

Définition 2.1. Soit H un \mathbb{C} -espace vectoriel. Un produit scalaire (forme hermitienne définie positive) sur H est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ t.q. :

- (i) à $y \in \mathbb{C}$ fixé : $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est une application linéaire de H dans \mathbb{C} ;
- (ii) pour $x, y \in \mathbb{C}$: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
- (iii) pour $x \in \mathbb{C}$: $\langle x, x \rangle \geq 0$ où $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Sur un produit scalaire, on peut définir une norme $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$.

Remarque. Une forme hermitienne définie positive est donc anti-linéaire pour le 2e paramètre : $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$.

Proposition 2.2. $\|\cdot\| : H \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une norme.

Proposition 2.3. $\|\cdot\|$ vérifie Cauchy-Schwarz, i.e. :

$$\forall x, y \in H : |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Proof. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ t.q. $|\alpha| = 1$ et $\alpha \langle y, x \rangle \in \mathbb{R}^+$ (i.e. $\alpha \langle y, x \rangle = |\langle x, y \rangle|$). Soit $r \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x - r\alpha y, x - r\alpha y \rangle = \langle x, x \rangle - r\alpha \langle y, x \rangle - r\overline{\alpha} \langle x, y \rangle + r^2 \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - r \underbrace{\alpha \langle y, x \rangle}_{=|\langle y, x \rangle|} - r \underbrace{\overline{\alpha} \langle x, y \rangle}_{=|\langle y, x \rangle|} + r^2 \underbrace{\langle y, y \rangle}_{=|\alpha|=1} = A - 2Br + Cr^2, \end{aligned}$$

pour $A = \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$, $B = \alpha \langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle| \in \mathbb{R}^+$, $C = \langle y, y \rangle \in \mathbb{R}^+$.

Si $C = 0$, alors $B = 0$, et donc $\langle y, x \rangle = 0$ et Cauchy-Schwarz est vérifié.

Si $C \geq 0$, alors pour $r = B/C$: $0 \leq A - 2Br + Cr^2 = \frac{AC - B^2}{C}$, donc $B^2 \leq AC$, donc Cauchy-Schwarz est vérifié. \square

Proposition 2.4. $\|\cdot\|$ vérifie l'inégalité triangulaire, i.e. :

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Proof. $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$ \square

On a donc $(H, \|\cdot\|)$ un e.v. normé, depuis lequel on peut alors définir une distance : $d(x, y) := \|x - y\|$.

Définition 2.5. Si H est complet pour d , on dit que H est un espace de Hilbert.

Quelques exemples d'espaces de Hilbert :

- (0) \mathbb{C}^n pour $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$;
- (1) Pour $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure, $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle := \int f \overline{g} d\mu$;
- (2) Pour $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ comme espace de mesure, on a l'équivalent dénombrable de l'exemple (0) :

$$\langle f, g \rangle_{\ell^2} := \int f \overline{g} d\# = \sum_{k \geq 1} f_k \overline{g_k}.$$

On note $\ell^2(\mathbb{N}) := L^2(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$.

Un dernière exemple bien moins trivial : les espaces de Sobolev.

Définition 2.6. Soit $s \geq 0$ un paramètre, on définit l'espace de Sobolev d'ordre s sur \mathbb{R}^n par :

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } (2\pi)^{-n} \int |\mathbb{F}u(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^s d\xi < +\infty \right\}. \quad (2.1)$$

On y définit le produit scalaire suivante pour $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle u, v \rangle_s := (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}u \overline{\mathbb{F}v} (1 + |\xi|)^s d\xi. \quad (2.2)$$

Remarque. Remarquons que $u \in H^s \iff \xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathbb{F}u(\xi)$ est dans L^2 .

Proposition 2.7. $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_s$ est un produit scalaire.

Proof. À v fixé, $u \mapsto \langle u, v \rangle_s$ est linéaire par linéarité de \mathbb{F} et par linéarité de l'intégrale.

Soient $u, v \in H^s$.

$$\langle u, v \rangle_s = (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}u \overline{\mathbb{F}v} \underbrace{(1 + |\xi|)^s}_{\in \mathbb{R}^+} d\xi = (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}v \overline{\mathbb{F}u} (1 + |\xi|)^s d\xi = \overline{\langle v, u \rangle_s}.$$

Finalement, pour $u \in H^s$:

$$\langle u, u \rangle_s = (2\pi)^{-n} \int \underbrace{|\mathbb{F}u|^2}_{\geq 0} \underbrace{(1 + |\xi|)^s}_{\geq 0} d\xi \geq 0,$$

et de plus, il est évident que $\langle u, u \rangle_s = 0 \iff u = 0$ puisque $\hat{u} = 0 \iff u = 0$. □

Par linéarité de Fourier, $H^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel, et de plus il est normé par le produit scalaire défini ci-dessus. Montrons alors que c'est un espace de Hilbert.

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in H^s$ une suite de Cauchy. $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathbb{F}u_k$ est de Cauchy dans L^2 , qui est complet. Donc il existe une limite $V \in L^2$ t.q. $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathbb{F}u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} V$. Il existe $u \in L^2$ t.q. $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathbb{F}u = V$ car $(1 + |\xi|^2)^{-s/2} V \in L^2$, et \mathbb{F} est une bijection sur L^2 . De plus, $u \in H^s$ car $V = (1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathbb{F}u \in L^2$. Puisque $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{H^s} u$, on a que H^s est complet.

Pour un contre-exemple, on a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle := \int f \bar{g} dx$ n'est pas un Hilbert. En effet, pour $f \in L^2 \setminus C_0^\infty$, par densité de C_0^∞ dans L^2 , $\exists (f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C_0^\infty$ t.q. $f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} f$. De plus, (f_k) est de Cauchy dans C_0^∞ . Par l'absurde, si $\exists g \in C_0^\infty$ t.q. $f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} g$, par unicité de la limite, $g = f$, or $f \notin C_0^\infty$.

À partir d'ici, H désigne un espace de Hilbert quelconque.

Définition 2.8. Soit $y \in H$. On définit :

$$\begin{cases} f_1 : x \mapsto \langle x, y \rangle \\ f_2 : x \mapsto \langle y, x \rangle \\ f_3 : x \mapsto \|x\| \end{cases}$$

Proposition 2.9. f_i est continue pour $i = 1, 2, 3$.

Proof. 1. $|f_1(x_1) - f_1(x_2)| = |\langle x_1 - x_2, y \rangle| \leq \|x_1 - x_2\| \|y\| \xrightarrow{x_1 \rightarrow x_2} 0$. (f_1 est même uniformément continue et Lipschitzienne).

2. Idem pour f_2 , à permutation près.

3. La continuité vient directement de $|\|x\| - \|z\|| \leq \|x - z\|$.

□

Proposition 2.10. Pour $F \leq H$, $\overline{F} \leq H$.

Proof. Pour $x, y \in \overline{F}$, il existe $(x_k), (y_k) \in F$ t.q. $x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x$ et $y_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y$.

Donc $F \ni x_k + y_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x + y$. De plus, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\underbrace{\lambda x_k}_{\in F} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \lambda x \in \overline{F}$.

□

Remarque. Contrairement aux e.v. de dimension finie, en dimension infinie, il est possible d'avoir un sous-e.v. strict dense (e.g. C_0^∞ dans L^2).

Proposition 2.11. $F := \{f \in L^2 \text{ t.q. } f = 0 \text{ sur } x_n > 0\}$ est un e.v. fermé dans L^2 .

Proof. Soit $g \in \overline{F}$. Il existe $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in F$ t.q. $f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} g$. Pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_{x_n > 0} |g|^2 dx = \int_{x_n > 0} |g - f_k|^2 dx \leq \|g - f_k\|_{L^2}^2 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

car $f_k \in F$ et $f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} g$. Dès lors $\int_{x_n > 0} |g|^2 dx = 0$, i.e. $g \in F$. Donc $\overline{F} = F$.

□

2.1 Orthogonalité

Définition 2.12. Pour $x, y \in H$, x et y sont *orthogonaux*, noté $x \perp y$ lorsque $\langle x, y \rangle = 0$.

Pour $x \in H$, on définit $x^\perp := \{y \in H \text{ t.q. } \langle x, y \rangle = 0\}$, et pour $M \subset H$, on définit $M^\perp := \{y \in H \text{ t.q. } \forall x \in M : \langle x, y \rangle = 0\} = \bigcap_{x \in M} x^\perp$.

Proposition 2.13. Pour $x \in H$, $x^\perp \leq H$, et x^\perp est fermé.

Proof. À $x \in H$ fixé, on remarque que $x^\perp = f_1^{-1}(\{0\})$, or f_2 est continue. Donc x^\perp est fermé. Vérifier que x^\perp est un sous-e.v. est trivial. \square

Corollaire 2.14. Pour $M \leq H$, M^\perp est un sous-e.v. fermé de H .

Ce résultat découle directement du fait que M^\perp est une intersection d'e.v. fermés.

Définition 2.15. $E \subseteq H$ est dit *convexe* lorsque $\forall x, y \in E : \forall t \in [0, 1] : (1-t)x + ty \in E$.

Exemple 2.1.

- tout sous-e.v. de H est convexe ;
- toute boule (ouverte ou fermée) dans H est convexe ;
- pour $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, u \in L^2(\Omega), E = \{v \in L^2 \text{ t.q. } u = v \text{ sur } \Omega\}$ est convexe.

Montrons également que E est fermé dans L^2 . Soit $f \in \overline{E}$. Il existe $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E^\mathbb{N}$ t.q. $f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} f$.

$$\int_{\Omega} |u - f|^2 dx = \int_{\Omega} |f_k - f|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f|^2 dx \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Théorème 2.16. Soit $E \neq \emptyset$ convexe fermé dans H . Alors $\exists ! x \in E$ t.q. $\|x\| = \min_{z \in E} \|z\| = \inf_{z \in E} \|z\| =: \delta$.

Proof. **unicité :** soient $x, y \in E$ t.q. $\|x\| = \|y\| = \delta$. Par la formule du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Par convexité de E , $\frac{1}{2}(x + y) \in E$. Donc $\|\frac{1}{2}(x + y)\| \geq \delta$. On trouve alors :

$$\|x - y\|^2 \leq 2(\underbrace{\|x\|^2 + \|y\|^2}_{=2\delta^2}) - 4\delta^2 = 0.$$

On en déduit $\|x - y\| = 0$, i.e. $x = y$.

existence : Soit $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E^\mathbb{N}$ t.q. $\|y_k\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \delta$ qui existe par définition de l'infimum. Par la règle du parallélogramme :

$$\|y_k - y_m\|^2 \leq 2(\underbrace{\|y_k\|^2 + \|y_m\|^2}_{\xrightarrow[k, m \rightarrow +\infty]{} 2\delta^2}) - 4\delta^2 \xrightarrow[k, m \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Donc (y_k) est de Cauchy. Par complétude de H , $\exists x_0 \in H$ t.q. $y_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x_0$, et par fermeture de E , $x_0 \in E$.

De plus, par continuité de la norme, $\|y_k\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \|x_0\|$, et par unicité de la limite, $\|x_0\| = \delta$. \square

Exemple 2.2. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert, $u \in L^2(\Omega)$, $E = \{v \in L^2 \text{ t.q. } u = v \text{ sur } \Omega\}$ est un convexe fermé, donc par ce théorème, il existe un unique $u^* \in E$ qui minimise la norme : $u^* = u$ sur Ω et $u^* = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Théorème 2.17 (Décomposition orthogonale). Soit $M \leq H$ fermé. Alors :

1. $\forall x \in H : \exists ! (y, z) \in M \times M^\perp$ t.q. $x = y + z$;
2. ces valeurs y, z sont les points les plus proches de x dans M et M^\perp respectivement ;
3. Les applications $P : x \mapsto y$ et $Q : x \mapsto z$ sont linéaires ;

4. $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ (et donc P, Q sont continues) ;
 5. P et Q sont les projections orthogonales de x sur M et M^\perp respectivement.

Proof.

1. **unicité** : si $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, pour $y_1, y_2 \in M$ et $z_1, z_2 \in M^\perp$, on a $\underbrace{y_1 - y_2}_{\in M} = \underbrace{z_2 - z_1}_{\in M^\perp}$. Or

$M \cap M^\perp = \{0\}$. Donc $y_1 = y_2$ et $z_1 = z_2$.

existence : $x + M$ est convexe (trivial par le fait que $M \leq H$). Montrons que $x + M$ est fermé. Soit $u \in \overline{x + M}$. Il existe $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (x + M)^\mathbb{N}$ t.q. $u_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} u$. $\forall k \in \mathbb{N} : x + M \ni u_k = x + y_k$. On en déduit $y_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} u - x$. Par fermeture de M , on a $u - x \in M$, et donc $u \in x + M$ (i.e. $x + M$ est fermé).

Soit $z \in x + M$ l'élément qui minimise la norme. On pose $y := x - z \in M$. Montrons alors que $z \in x + M$. Soit $w \in M$; WLOG, supposons $\|w\| = 1$. Puisque $z \in x + M$, $\forall \alpha \in \mathbb{C} : z - \alpha w \in x + M$. Donc :

$$\|z\|^2 \leq \|z - \alpha w\|^2 = \|z\|^2 - 2\Re \alpha \langle w, z \rangle + |\alpha|^2.$$

$0 = 2\Re \alpha \langle w, z \rangle - |\alpha|^2$. En particulier, pour $\alpha = \langle z, w \rangle$: $0 = \|\langle z, w \rangle\|^2$, donc $\langle z, w \rangle = 0$. Dès lors $z \in M^\perp$.

2. Soit $Y \in M$. Montrons que $\|x - Y\| \geq \|x - y\| = \|z\|$. Par Pythagore :

$$\|x - Y\|^2 = \|y + z - Y\|^2 = \|(y - Y) + z\|^2 = \|y - Y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2.$$

Idem pour $Z \in M^\perp$: $\|x - Z\| \geq \|x - z\| = y$.

3. Soient $x_1, x_2 \in H, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. On a $\alpha_1 x_1 = \alpha_1 P x_1 + \alpha_1 Q x_1$, et $\alpha_2 x_2 = \alpha_2 P x_2 + \alpha_2 Q x_2$. Donc :

$$P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + Q(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 P x_1 + \alpha_1 Q x_1 + \alpha_2 P x_2 + \alpha_2 Q x_2,$$

et donc :

$$\underbrace{P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \alpha_1 P x_1 - \alpha_2 P x_2}_{\in M} = \underbrace{\alpha_1 Q x_1 + \alpha_2 Q x_2 - Q(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}_{\in M^\perp}.$$

Or $M \cap M^\perp = \{0\}$, donc $P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 P x_1 - \alpha_2 P x_2$, et $\alpha_1 Q x_1 + \alpha_2 Q x_2 = Q(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$.

4. Par Pythagore $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$. Donc $\|Px\| \leq \|x\|$ et $\|Qx\| \leq \|x\|$, i.e. P et Q sont Lipschitziennes, donc en particulier continues.

□

Corollaire 2.18. Si $M \leq H$, avec $M \neq H$, il existe $y \in H \setminus \{0\}$ t.q. $y \perp M$.

Proof. Pour $x \in H \setminus M$, $x = Px + Qx$, où $Qx \neq 0$, et $Qx \perp M$.

□

Corollaire 2.19. Si $M \leq H$ est fermé, alors $M = M^{\perp\perp}$.

Proof. La première inclusion est triviale : si $x \in M$, alors $x \perp M^\perp$.

La seconde inclusion se démontre comme suit : soit $x \in M^{\perp\perp} \subseteq H$. $x = y + z$ où $y \in M$ et $z \in M^\perp$. Or $0 = \langle x, z \rangle = \langle y + z, z \rangle = \langle y, z \rangle + \|z\|^2$, et $\langle y, z \rangle = 0$ par définition d'orthogonalité. Donc $|z| = 0$ et $z = 0$, i.e. $x = y \in M$.

□

Lemme 2.20 (Lemme de Riesz). Soit $L : H \rightarrow \mathbb{C}$, une forme linéaire continue. Alors $\exists! y \in H$ t.q. $L = \langle \cdot, y \rangle$.

Proof. **unicité** : pour $y_1, y_2 \in H$ t.q. $\forall x \in H : \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$, on a $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0$, donc $y_1 - y_2 \in H^\perp = \{0\}$, i.e. $y_1 = y_2$.

existence : si $L \equiv 0$, alors $y = 0$. Supposons alors que L n'est pas identiquement nulle. $\text{Ker } L \subsetneq H$ et est fermé par continuité de L . Dès lors, il existe $z \in H$, $z \neq 0$ t.q. $z \perp \text{Ker } L$. WLOG, supposons $\|z\| = 1$. Posons $y := (\overline{Lz})z$ et $u := (Lx)z - (Lz)x$. Calculons :

$$Lu = (Lx)Lz - (Lz)Lx = 0,$$

donc $u \in \text{Ker } L$, et donc $0 = \langle u, z \rangle = (Lx) \langle z, z \rangle - (Lz) \langle x, z \rangle = Lx - (Lz) \langle x, z \rangle$. Dès lors, $Lx = (Lz) \langle x, z \rangle = \langle x, y \rangle$. \square

2.2 Systèmes orthonormaux

Définition 2.21. Pour V un e.v. et $S \subseteq V$, on note $\text{Vect } S = \text{Span } S$ l'e.v. engendré par S .

$(e_\alpha)_{\alpha \in A} \subset V$ est appelé *orthonormal* lorsque $\forall \alpha, \beta \in A : \langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha, \beta}$.

Pour $x \in H$, on définit $\hat{x}(\alpha) := \langle x, e_\alpha \rangle$.

Les $\hat{x}(\alpha)$ sont les coefficients de Fourier relativement au système $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Exemple 2.3. Sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, les $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}}$ sont les $e_\alpha : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto \frac{e^{i\alpha t}}{\sqrt{2\pi}}$.

Théorème 2.22. Pour H un espace de Hilbert et $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ un système orthonormal, $F \subset A$ fini, et $M_F := \text{Vect } \{e_\alpha\}_{\alpha \in F}$, on a :

1. si $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ est nulle sur $A \setminus F$, pour $y = \sum_{\alpha \in F} \varphi(\alpha) e_\alpha$, alors :

$$\forall \alpha \in A : \varphi(\alpha) = \hat{y}(\alpha).$$

$$\text{De plus, } \|y\|^2 = \sum_{\alpha \in F} |\varphi(\alpha)|^2.$$

2. Si $x \in H$, $s_F(x) := \sum_{\alpha \in F} \hat{x}(\alpha) e_\alpha \in M_F$. Si $s \in M_F \setminus \{s_F(x)\}$, alors :

$$\|x - s_F(x)\| \leq \|x - s\|.$$

$$\text{De plus : } \sum_{\alpha \in F} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2 \text{ (inégalité de Bessel).}$$

Proof.

1. $\hat{y}(\alpha) = \langle y, e_\alpha \rangle = \sum_{\beta \in F} \varphi(\beta) \langle e_\beta, e_\alpha \rangle = \varphi(\alpha)$ et :

$$\|y\|^2 = \left\| \sum_{\beta \in F} \varphi(\beta) e_\beta \right\|^2 \stackrel{\text{Pythagore}}{=} \sum_{\beta \in F} |\varphi(\beta)|^2 \|e_\beta\|^2 = \sum_{\beta \in F} |\varphi(\beta)|^2.$$

2. Soit $s \in M_F$. $\forall \alpha \in F : x - s_F(x) \perp e_\alpha$ et $x - s_F(x) \perp s_F(x) - s \in M_F$. En effet :

$$\langle x - s_F(x), e_\alpha \rangle = \langle x, e_\alpha \rangle - \langle s_F(x), e_\alpha \rangle = \hat{x}(\alpha) - \hat{x}(\alpha) = 0.$$

Dès lors :

$$x - s = (x - s_F(x)) + (s_F(x) - s),$$

et donc, par Pythagore :

$$\|x - s\|^2 = \|x - s_F(x)\|^2 + \|s_F(x) - s\|^2. \quad (2.3)$$

Cette norme est minimisée (strictement) en $s = s_F(x)$ et donc :

$$\|x - s_F(x)\| \leq \|x - s\|$$

si $s \neq s_F(x)$. Ensuite :

$$\|s_F(x)\|^2 \leq \|s_F(x)\|^2 + \|x - s_F(x)\|^2.$$

Par l'équation 2.3 : si $s = 0$:

$$\|s_F(x)\|^2 \leq \|s_F(x)\|^2 \leq \|s_F(x)\|^2 + \|x - s_F(x)\|^2 = \|x\|^2.$$

Or :

$$\|s_F(x)\|^2 = \sum_{\alpha \in F} |\hat{x}(\alpha)|^2.$$

Dès lors $\|s_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$.

□

Remarque. Sur A , on a un espace mesuré canonique : $(A, \mathcal{P}(A), \#)$ pour lequel on adopte les notations :

$$\forall B \in \mathcal{P}(A) : \int_B \varphi \, d\# =: \sum_{\alpha \in B} \varphi(\alpha).$$

Remarquons également que par définition de l'intégrale, si $\varphi : A \rightarrow [0, +\infty]$:

$$\sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha) = \sup_{\substack{B \subset A \\ |B| \leq +\infty}} \sum_{\alpha \in B} \varphi(\alpha).$$

Et si $\varphi \in \ell^1(A)$ et $\varphi \geq 0$, alors pour $A_k = \{\varphi \geq k^{-1}\}$ ($k \geq 1$), on a $|A_k| \leq +\infty$ puisque $\varphi \in \ell^1(A)$. Or $\bigcup_{k \geq 1} A_k = \{\varphi \geq 0\}$, et donc $\{\varphi \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Dans le cas général, pour $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$, alors $(\Re \varphi)^\pm$ et $(\Im \varphi)^\pm$ sont non-nulles sur un ensemble au plus dénombrable, et donc $\{\varphi \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Lemme 2.23. *Pour $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, l'ensemble des fonctions simples mesurables nulles hors d'un ensemble de mesure finie est dense dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ pour $p \in [1, +\infty)$.*

Lemme 2.24. *Soient X un espace métrique complet, Y un espace métrique, et $X_0 \subset X$, un sous-ensemble dense. Si $f \in C^0(X, Y)$ telle que $f|_{X_0}$ une isométrie et $f(X_0)$ est dense dans Y , alors f est surjective et est une isométrie.*

Proof. Fixons $x, y \in X$. Il existe $(x_k)_{k \geq 0}, (y_k)_{k \geq 0} \in X_0^{\mathbb{N}}$ telles que $x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x$ et $y_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y$. Pour $k \geq 0$:

$$d(x_k, y_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} d(x, y)$$

car la distance est continue sur un espace métrique. De plus :

$$d(x_k, y_k) = d(f(x_k), f(y_k)) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} d(f(x), f(y)),$$

à nouveau par continuité de la métrique, et par continuité de f . Donc par unicité de la limite, on a $d(x, y) = d(f(x), f(y))$, et donc f est une isométrie.

Il reste à montrer que f est surjective. Soit $y \in Y$. $f(X_0)$ est dense dans Y , et donc par continuité de f , on sait : $\exists (x_k)_{k \geq 0} \in X_0^{\mathbb{N}}$ telle que $f(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y$. $(f(x_k))_k$ est de Cauchy dans Y , et puisque f est une isométrie, $(x_k)_k$ est de Cauchy dans X . Par complétude, on sait que $\exists x \in X$ t.q. $x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x$.

Finalement, par continuité de f : $f(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} f(x)$, et par construction $f(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y$. Par unicité de la limite dans les espaces métriques, on a $f(x) = y$, et donc y admet une préimage par f . \square

Théorème 2.25. Soit $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$, un système orthonormal dans H . Soit $P = \text{Span}\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Alors :

1. $\forall x \in H : \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$ (inégalité de Bessel généralisée) ;
2. $f : H \rightarrow \ell^2(A) : x \mapsto \hat{x}$ est linéaire, continue, et surjective ;
3. $f|_{\overline{P}}$ est une isométrie surjective $\overline{P} \rightarrow \ell^2(A)$.

Proof.

1. Pour tout $F \subset A$ fini, on a :

$$\sum_{\alpha \in F} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Or par la remarque précédente :

$$\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \sup_{\substack{B \subset A \\ |B| \leq +\infty}} \sum_{\alpha \in B} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$$

par passage au supremum (à la limite) et par l'inégalité de Bessel finie.

2. Soit $x \in H$. Puisque $\|x\|^2 \leq +\infty$, par l'inégalité de Bessel, on sait $\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq +\infty$, i.e. $\hat{x} \in \ell^2(A)$.

f est linéaire par linéarité de $x \mapsto \langle x, e_\alpha \rangle$ pour tout $\alpha \in A$.

f est continue car Lipschitzienne :

$$\|f(x) - f(y)\|_{\ell^2(A)}^2 = \sum_{\alpha \in A} |\widehat{x - y}(\alpha)|^2 \leq \|x - y\|_H^2.$$

La surjectivité vient du point 3 : si $f|_{\overline{P}}$ est surjective, alors en particulier f est surjective.

3. Pour $X = \overline{P}$, $X_0 = P$, $Y = \ell^2(A)$, remarquons que :

$$\underbrace{\left\{ \chi \in \ell^2(A) \text{ t.q. } \chi(\alpha) = 0 \text{ si } \alpha \notin F \subset A \text{ fini} \right\}}_{\text{dense dans } \ell^2(A)} \subset f(P).$$

De plus $f|_P$ est une isométrie. En effet, pour $x \in P$, on sait qu'il existe $F \subset A$ fini et $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}$ ($\alpha \in F$) tels que $x = \sum_{\alpha \in F} \lambda_\alpha e_\alpha$. Dès lors :

$$\|f(x)\|_{\ell^2(A)}^2 = \|x\|_{\ell^2(A)}^2 = \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \sum_{\alpha \in F} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \sum_{\alpha \in A} \left| \sum_{\beta \in F} \lambda_\beta \langle e_\beta, e_\alpha \rangle \right|^2 = \sum_{\alpha \in F} |\lambda_\alpha|^2,$$

et :

$$\|x\|_H^2 = \langle x, x \rangle_H = \left\langle \sum_{\alpha \in F} \lambda_\alpha e_\alpha, \sum_{\beta \in F} \lambda_\beta e_\beta \right\rangle = \sum_{\alpha \in F} \sum_{\beta \in F} \lambda_\alpha \overline{\lambda_\beta} \langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \sum_{\alpha \in F} |\lambda_\alpha|^2.$$

Finalement, puisque \overline{P} est complet (car sous-ensemble fermé de H), on peut ensuite appliquer le lemme 2.24 qui affirme que $f|_{\overline{P}}$ est une isométrie surjective sur Y . □

Définition 2.26. Un *système orthonormal maximal* (SOM) est un système orthonormal qui est maximal au sens de l'inclusion.

Théorème 2.27. Soit $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ un système orthonormal dans H . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $(e_\alpha)_\alpha$ est un SOM.
2. $M := \text{Span}\{e_\alpha\}_\alpha$ est dense dans H .
3. $\forall x \in H : \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \|x\|^2$.
4. $\forall x, y \in H : \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha) \overline{\hat{y}(\alpha)} = \langle x, y \rangle$ (Identité de Parseval).
5. $\forall x \in H : \forall \varepsilon > 0 : \exists A_0 \subset A$ fini tel que $\forall A_1 \supset A_0$: si A_1 est fini, alors $\left\| x - \sum_{\alpha \in A_1} \hat{x}(\alpha) e_\alpha \right\| \leq \varepsilon$.

Proof.

- 1 \Rightarrow 2 Par l'absurde, supposons que $M \subsetneq A$. Alors il existe $y \in A \setminus \{0\}$ tel que $y \perp M$ et donc le système n'est pas maximal car on peut lui ajouter $\frac{y}{\|y\|_H}$.
- 2 \Rightarrow 3 Par le Théorème 2.25 (point 3), on sait que $\overline{M} \rightarrow \ell^2(A) : x \mapsto \hat{x}$ est une isométrie, ce qui revient à dire que si $x \in \overline{M}$, alors l'inégalité de Bessel est une égalité, i.e. :

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2.$$

- 3 \Rightarrow 4 On veut montrer que $\|\cdot\|_{\ell^2(A)} = \|\cdot\|_H \Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2(A)} = \langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Dans \mathcal{H} , un espace de Hilbert quelconque (e.g. $\mathcal{H} = H$ ou $\mathcal{H} = \ell^2(A)$), on a :

$$4 \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} = \|x + y\|_{\mathcal{H}}^2 - \|x - y\|_{\mathcal{H}}^2 + i\|x + iy\|_{\mathcal{H}}^2 - i\|x - iy\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Or par hypothèse, $\|\cdot\|_H = \|\cdot\|_{\ell^2(A)}$. Donc :

$$\begin{aligned} 4 \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_{\ell^2(A)} &= \|\hat{x} + \hat{y}\|_{\ell^2(A)}^2 - \|\hat{x} - \hat{y}\|_{\ell^2(A)}^2 + i\|\hat{x} + i\hat{y}\|_{\ell^2(A)}^2 - i\|\hat{x} - i\hat{y}\|_{\ell^2(A)}^2 \\ &= \|x + y\|_H^2 - \|x - y\|_H^2 + i\|x + iy\|_H^2 - i\|x - iy\|_H^2 = 4 \langle x, y \rangle_H. \end{aligned}$$

- 4 \Rightarrow 1 Par l'absurde, supposons qu'il existe $u \neq 0$ tel que $\forall \alpha \in A : u \perp e_\alpha$. Alors $\forall \alpha \in A : \hat{u}(\alpha) = 0$. Or $0 \neq \|u\|^2 = \sum_{\alpha \in A} \hat{u}(\alpha) \overline{\hat{u}(\alpha)} = \sum_{\alpha \in A} |\hat{u}(\alpha)|^2 = 0$, ce qui est une contradiction.
- 5 \Rightarrow 2 Fixons $x \in H$ et $\varepsilon = \frac{1}{k}$. Pour tout k , il existe $x_k = \sum_{\alpha \in A_1} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha \in M$ tel que $\|x - x_k\| \leq \frac{1}{k} = \varepsilon$

3 \Rightarrow 5

$$\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \sup_{B \subset A \text{ fini}} \sum_{\beta \in B} |\hat{x}(\beta)|^2.$$

Par définition du sup : $\forall \varepsilon > 0 : \exists A_0 \text{ fini} \subset A \text{ t.q. } \forall A_1 \text{ fini} \supset A_0 :$

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in A_1} \hat{x}(\alpha) e_\alpha \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in A_1} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \varepsilon^2.$$

□

Théorème 2.28. *Tout espace de Hilbert possède un système orthonormal maximal.*

Proof. Soit A l'ensemble des SOMs de H . (A, \subseteq) est ordonné. Soit $\mathcal{S} \subset A$ une partie totalement ordonnée. On pose :

$$\hat{S} := \bigcup_{s \in \mathcal{S}} s.$$

Mq $\hat{S} \in A$.

Soient $a_1, a_2 \in \hat{S}$. Il existe $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ tels que $a_1 \in s_1$ et $a_2 \in s_2$, or \mathcal{S} est totalement ordonné. Donc soit $s_1 \subseteq s_2$, soit $s_2 \subseteq s_1$, donc $a_1, a_2 \in s_1$ ou $a_1, a_2 \in s_2$. En particulier, ils sont orthogonaux, et de plus \hat{S} majore tout $s \in \mathcal{S}$.

Par le lemme de Zorn, on a l'existence d'un élément maximal pour l'inclusion, i.e. un SOM. □

Théorème 2.29 (Gram-Schmidt). *Soit $\{x_1, x_2, \dots\} \subseteq H$ une suite finie ou dénombrable de vecteurs linéairement indépendants. Alors il existe un système orthonormal $\{u_1, u_2, \dots\}$ fini et de même cardinalité que $\{x_1, \dots\}$ si ce dernier est fini ou dénombrable si $\{x_1, x_2, \dots\}$ est dénombrable tel que $\text{Span}\{u_1, \dots\} = \text{Span}\{x_1, \dots\}$.*

Proof. Les x_j sont non-nuls car $\{x_1, x_2, \dots\}$ est linéairement indépendant. Posons $y_1 := x_1$ et $u_1 := \frac{y_1}{\|y_1\|}$ et pour tout $n > 1$ posons $y_n := x_n - \sum_{j=1}^n \langle x_n, u_j \rangle u_j$ et $u_n := \frac{y_n}{\|y_n\|}$.

Il faut maintenant s'assurer que pour tout $n \geq 1 : y_n \neq 0$ afin que les u_n soient bien définis. Par l'absurde, supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $y_n = 0$. Alors :

$$x_n \in \text{Span}\{u_1, \dots, u_{n-1}\} \subseteq \text{Span}\{y_1, \dots, y_{n-1}\} \subseteq \text{Span}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}.$$

Or les x_j sont linéairement indépendants.

Il est évident que $u_n \in \text{Span}\{x_1, \dots, x_n\}$ et $x_n \in \text{Span}\{u_1, \dots, u_n\}$ pour tout $n \geq 1$. Il reste alors uniquement à montrer que $u_n \perp u_j$ ($j < n$), ou de manière équivalente $y_n \perp u_j$, et cette dernière formulation est évidente par définition de y_n . □

Définition 2.30. Un espace topologique E est dit *séparable* s'il admet une partie dense dénombrable.

Théorème 2.31. *Un espace de Hilbert est séparable ssi il possède un système orthonormal maximal.*

Proof. \Rightarrow : Soit $\{a_1, a_2, \dots\}$ une suite dense dans H . Soit $\{a'_1, a'_2, \dots\}$ la suite partielle (possiblement finie) de $\{a_1, \dots\}$ constituée des $a_i \notin \text{Span}\{a_1, \dots, a_{i-1}\}$. Par définition, on a que les a'_i sont indépendants et tous les a_j sont combinaisons linéaires des a'_i , i.e. $\{a_1, a_2, \dots\} \subset \text{Span}\{a'_1, a'_2, \dots\}$.

On en déduit alors que $\text{Span}\{a'_1, a'_2, \dots\}$ est dense dans H . Par Gram-Schmidt sur $\{a'_1, a'_2, \dots\}$, on a un système orthonormal $\{u_1, \dots\}$ tel que $\text{Span}\{u_1, \dots\}$ est dense dans H . Dès lors, par le Théorème 2.27, $\{u_1, \dots\}$ est un SOM.

\Leftarrow : Soit $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un SOM. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$E_N := \left\{ \sum_{j=1}^N q_j e_j \text{ t.q. } q_j \in \mathbb{Q}[i] \right\}.$$

E_N est dénombrable, et donc $E := \bigcup_{N>0} E_N$ est également dénombrable. Par le théorème 2.27, on a $\forall \varepsilon > 0 : \exists A_0 \subset A$ fini tel que :

$$\forall A_1 \supset A_0 : \left\| x - \sum_{\alpha \in A_1} \hat{x}(\alpha) e_\alpha \right\| \leq \varepsilon.$$

Montrons que $\forall \varepsilon > 0 : \exists y \in E$ t.q. $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Soit $(q_\alpha)_{\alpha \in A_1} \subset \mathbb{Q}[i]$ t.q. $\sum_{\alpha \in A_1} \|q_\alpha - \hat{x}(\alpha)\|^2 \leq \varepsilon^2$. De tels q_α existent bien par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , et donc par densité de $\mathbb{Q}[i]$ dans \mathbb{C} .

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in A_1} q_\alpha e_\alpha \right\|^2 = \left\| x - \sum_{\alpha \in A_1} \hat{x}(\alpha) e_\alpha \right\|^2 + \sum_{\alpha \in A_1} \|q_\alpha - \hat{x}(\alpha)\|^2 \leq 2\varepsilon^2.$$

Donc pour $y = \sum_{\alpha \in A_1} q_\alpha e_\alpha$, on a bien le résultat. \square

Exemple 2.4.

- (0) \mathbb{C}^N muni du produit scalaire usuel admet une base canonique. Cette dernière est orthonormale et maximale.
- (1) Dans $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, posons les suites e_k ($k \in \mathbb{Z}$) telles que $e_{k,j} = 1$ si $k = j$ et 0 sinon. $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est un système orthonormal maximal car :

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{j \geq 1} x_j \overline{x_j} = \sum_{j \geq 1} |x_j|^2.$$

Par le point 3 du Théorème 2.27, on a que $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est un SOM.

- (2) Dans $L^2[0, 2\pi)$, on définit (pour $k \in \mathbb{Z}$) :

$$e_k : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Pour le produit scalaire usuel de L^2 , on a :

$$\langle e_k, e_\ell \rangle_{L^2} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(k-\ell)t}}{2\pi} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } k - \ell = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour montrer que $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est maximal, prenons $f \in L^2[0, 2\pi)$. $S_k f := \sum_{m=-k}^k \langle f, e_m \rangle e_m$. Montrons que $S_k f \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} f$. Pour $\varepsilon > 0, \exists \varphi \in C_0^\infty((0, 2\pi)) : \|f - \varphi\|_{L^2} \leq \varepsilon$ (par densité de C_0^∞ dans L^2).

On a $S_k \varphi \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{CVU}} \varphi$ (théorème de Dirichlet global), ce qui implique $S_k \varphi \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^2} \varphi$. Finalement, remarquons :

$$\|f - S_k f\|_{L^2} \leq \|f - S_k \varphi\|_{L^2} \leq \|f - \varphi\|_{L^2} + \|\varphi - S_k \varphi\| \leq 2\varepsilon$$

si k est assez grand.

Attention, $\{e_k\}_k$ n'est **pas** une base au sens algébrique car $\forall k \in \mathbb{Z} : e_k \in C^\infty$. Donc si $\{e_k\}_k$ est une base, toute fonction $f \in L^2$ est égale à $\sum_{j=1}^N c_j e_{k_j} \in C^\infty$. Or $L^2 \not\subseteq C^\infty$.

2.3 Applications linéaires entre espaces vectoriels normés

Soient E, F deux espaces de Banach. Pour $T : E \rightarrow F$ linéaire, on dit que T est *bornée* lorsque :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \leq +\infty.$$

Remarque. borné doit se comprendre borné sur la boule unité car T n'est pas borné puisque linéaire.

Proposition 2.32. Soit $T : E \rightarrow F$ linéaire.

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Proof. On note $A = \{\|Tx\|\}_{\|x\| \leq 1}$, $B = \{\|Tx\|\}_{\|x\| < 1}$, et $C = \{\|Tx\|\}_{\|x\|=1}$. Notons également $a = \sup A$, $b = \sup B$ et $c = \sup C$.

Puisque $A \supset B \cup C$, on sait que $a \geq b$ et $a \geq c$. Maintenant, si $x \neq 0$ t.q. $\|x\| \leq 1$, alors $B \ni T \frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|} Tx \geq \|Tx\|$. En particulier, $c \geq a$, et donc $c = a$.

Si $a < +\infty$, alors $\forall \delta > 0 : \exists x$ t.q. $\|x\| = 1$ et $\|Tx\| \geq a - \delta$ (par définition du sup et puisque $a = c$). Pour $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$\|T((1 - \varepsilon)x)\| = (1 - \varepsilon)\|Tx\| \geq (1 - \varepsilon)(a - \delta) \geq a - \eta,$$

pour $\eta = \varepsilon a - \varepsilon \delta + \delta$. Pour $\delta, \varepsilon \rightarrow 0$, on a $\eta \rightarrow 0$ et donc $b \geq a$.

Finalement, si $a = +\infty$, alors $\forall M > 0 : \exists x_M$ t.q. $\|x_M\| \leq 1$ et $\|Tx_M\| \geq M$. Or par linéarité de T , on a $\left\| \frac{x_M}{2} \right\| \leq 1$, et finalement :

$$\forall M > 0 : \exists \tilde{x}_M (= x_{M/2}) \text{ t.q. } \|\tilde{x}_M\| \leq 1 \text{ et } \|T\tilde{x}_M\| \geq M.$$

On en déduit également que $a = b$.

Dès lors, on a bien $a = b = c$. □

Définition 2.33. L'ensemble des applications linéaires bornées de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$. On munit cet ensemble de la norme :

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)} : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathbb{R}^+ : T \mapsto \|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

On note également $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$.

Remarque. Il est à noter que cette norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ dépend des normes sur E et sur F !

Proposition 2.34. $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)}$ est une norme.

Proof. TODO: Exercice □

Proposition 2.35. Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $y \in E$, on a $\|Ty\| \leq \|T\| \|y\|$.

Proof. Si $y = 0$, alors $Ty = 0$, et donc ok. Sinon, $Ty = \|y\| T \frac{y}{\|y\|}$. Par passage à la norme dans F :

$$\|Ty\| = \|y\| \underbrace{\left\| T \frac{y}{\|y\|} \right\|}_{\leq \|T\|} \leq \|y\| \|T\|.$$

□

On remarque également que $\|(T_2 \circ T_1)(x)\| \leq \|T_2\| \|T_1 x\| \leq \|T_2\| \|T_1\| \|x\|$, et donc $\|T_2 T_1\| \leq \|T_2\| \|T_1\|$. Dès lors si $T_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $T_2 T_1 \in \mathcal{L}(E, G)$.

Théorème 2.36. *Soit $T : E \rightarrow F$ linéaire. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) T est bornée ;
- (ii) T est continue en tous points ;
- (iii) $\exists x_0 \in E$ t.q. T est continue en x_0 .

Proof.

- (i) \Rightarrow (ii) Soit $y \in E$. $\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq \|T\| \|x - y\|$. Dès lors, T est Lipschitzienne et donc continue.
- (ii) \Rightarrow (iii) Trivial (je cite : *Si vous avez un problème ici, je crois qu'il y a un sérieux problème dans l'enseignement*).
- (iii) \Rightarrow (i) Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x - x_0\| < \delta$, alors $\|T(x - x_0)\| < \varepsilon$. En posant $y := x - x_0$, si $\|y\| < \delta$, alors $\|Ty\| < \varepsilon$. Autrement dit, $T(B(0, \delta)) \subset B(0, \varepsilon)$. Pour $z \in B(0, 1)$ (i.e. $\|z\| < 1$), on a :

$$\|Tz\| = \frac{1}{\delta} \|T(\delta z)\| < \frac{1}{\delta} \varepsilon.$$

Dès lors $\forall z : \|z\| < 1 \Rightarrow \|Tz\| < \varepsilon/\delta$, et donc $\|T\| \not\leq +\infty$, i.e. T est bornée.

□

Exemple 2.5.

- (0) Un opérateur linéaire $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ est déterminé par une matrice $(T_{k\ell})_{k,\ell}$ dans les bases canoniques de \mathbb{C}^m et \mathbb{C}^n . T est continue¹ donc bornée.
- (1) $T : L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{C} : f \mapsto \int f d\mu$ est borné car :

$$|Tf| = \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu = \|f\|_{L^1}.$$

Dès lors l'opérateur T d'intégration est continue.

- (2) Si $1 \leq p, q \leq +\infty$ sont conjugués, pour $g \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ on définit :

$$T_g : L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{C} : f \mapsto \int fg d\mu.$$

T_g est bien défini par l'inégalité de Hölder. De plus : $|T_g f| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$, et donc $\|T_g\| \leq \|g\|_{L^q}$.

- (3) $\mathbb{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur linéaire. De plus, par Plancherel, on a $\|\mathbb{F}f\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2} \|f\|_{L^2}$, et donc $\|\mathbb{F}\| = (2\pi)^{n/2}$, i.e. la transformée de Fourier est un opérateur borné (donc continu).

¹En dimension finie, toute application linéaire entre espaces vectoriels est continue.

- (4) Pour H , un espace de Hilbert quelconque et M un sous-espace vectoriel fermé, $P : H \rightarrow M$, la projection orthogonale sur M est bornée car Lipschitzienne (et donc également continue).
- (5) Dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, on fixe $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu)$, et on pose :

$$T : L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) : f \mapsto \int_{\Omega} K(\cdot, y) f(y) d\mu(y).$$

Par Fubini, $\forall x \in \Omega : \int_{\Omega} |K(x, y)|^2 d\mu(y)$ est bien défini, et pour presque tout $x \in \Omega : |K(x, \cdot)|^2 \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. En particulier, $|K(x, \cdot)| \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Dès lors, à $x \in \Omega$ fixé, $y \mapsto K(x, y)f(y)$ est L^1 par Hölder. Donc il existe $N \in \mathcal{A}$ t.q. $\mu(N) = 0$ et $\forall x \notin N : K(x, \cdot)f(\cdot) \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. On pose alors :

$$g : x \mapsto \begin{cases} \int_{\Omega} K(x, y) f(y) d\mu(y) & \text{si } x \notin N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons que $g = Tf \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Si $x \notin N$, alors par Cauchy-Schwarz :

$$|g(x)|^2 \leq \left(\int_{\Omega} |K(x, y)| |f(y)| d\mu(y) \right)^2 \leq \int_{\Omega} |K(x, y)|^2 d\mu(y) \int_{\Omega} |f(y)|^2 d\mu(y).$$

Or le second facteur ne dépend pas de x (notons le C) et est fini puisque $f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Dès lors :

$$\int_{\Omega} |g(x)|^2 d\mu(x) = C \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |K(x, y)|^2 d\mu(y) \right) d\mu(x).$$

Par Fubini (puisque $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu)$), on a finalement :

$$\int_{\Omega} |g(x)|^2 d\mu(x) \leq C \int_{\Omega \times \Omega} |K(x, y)|^2 d(\mu \otimes \mu)(x, y) \leq +\infty.$$

On en déduit également $\|g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|K\|_{L^2}$, et donc $\|T\| \leq \|K\|_{L^2}$.

Définition 2.37. Un opérateur de la forme suivante :

$$T : L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) : f \mapsto \int_{\Omega} K(\cdot, y) f(y) d\mu(y),$$

pour $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu)$ est appelé *opérateur intégral de Hilbert-Schmidt*.

Soient $T \in \mathcal{L}(H)$, $x \in H$ et $\Phi : H \rightarrow \mathbb{C} : y \mapsto \langle Ty, x \rangle$, une forme linéaire bornée. Par Cauchy-Schwarz : $|\Phi y| \leq \|Ty\| \|x\| \leq \|T\| \|y\| \|x\|$.

Par le lemme de Riesz, on sait qu'il existe un unique $z_x \in H$ tel que $\forall y \in H : \Phi y = \langle y, z_x \rangle$. On a alors une application $x \mapsto z_x$. Notons-la T^* .

Proposition 2.38. T^* est une application linéaire.

Proof. Soient $x_1, x_2 \in H, \lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\langle y, T^*(\lambda x_1 + x_2) \rangle = \langle Ty, \lambda x_1 + x_2 \rangle = \bar{\lambda} \langle Ty, x_1 \rangle + \langle Ty, x_2 \rangle = \bar{\lambda} \langle y, T^* x_1 \rangle + \langle y, T^* x_2 \rangle = \langle y, \lambda T^* x_1 + T^* x_2 \rangle.$$

Or cette égalité vaut pour tous $x_1, x_2 \in H$, donc $T^*(\lambda x_1 + x_2) = \lambda T^* x_1 + T^* x_2$. \square

Lemme 2.39. $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |\langle Tx, y \rangle|$.

Proof. Par Cauchy-Schwarz, si $\|y\| \leq 1$: $|\langle Tx, y \rangle| \leq \|Tx\| \|y\| \leq \|Tx\|$. En particulier, par passage au sup, on a l'inégalité \geq .

Pour l'autre inégalité, Si $T \equiv 0$, le résultat est trivial. Donc supposons $T \not\equiv 0$. On sait alors que $\text{Ker } T \neq H$, et donc $\exists x \in H \setminus \text{Ker } T$. En posant $z := \frac{Tx}{\|Tx\|}$, on observe :

$$\sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |\langle Tx, y \rangle| \geq \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, z \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Tx\|^2}{\|Tx\|}.$$

□

Théorème 2.40. Pour $T \in \mathcal{L}(H)$, on a $\|T\| = \|T^*\|$.

Proof. Par le lemme précédent :

$$\|T^*\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T^*x\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |\langle T^*x, y \rangle| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |\langle y, T^*x \rangle| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |\langle Ty, x \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|$$

□

Définition 2.41. Cet opérateur T^* est appelé *l'opérateur adjoint de T* .

Proposition 2.42. Soient $S, T \in \mathcal{L}(H)$. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a :

1. $(\alpha S + \beta T)^*x = \bar{\alpha}S^* + \bar{\beta}T^*$;
2. $(ST)^* = T^*S^*$.

Proof.

1. Fixons $x, y \in H$.

$$\langle x, (\alpha S + \beta T)^*y \rangle = \langle (\alpha S + \beta T)x, y \rangle = \alpha \langle Sx, y \rangle + \beta \langle Tx, y \rangle = \alpha \langle x, S^*y \rangle + \beta \langle x, T^*y \rangle = \langle x, \bar{\alpha}S^*y + \bar{\beta}T^*y \rangle.$$

2. Montrons que $\forall x \in H : (ST)^*x = T^*S^*x$. Soient $x, y \in H$.

$$\langle y, (ST)^*x \rangle = \langle STy, x \rangle = \langle Ty, S^*x \rangle = \langle y, T^*S^*x \rangle.$$

□

Définition 2.43. Si $T = T^*$, on dit que T est auto-adjoint.

Exemple 2.6.

- (1) Soit un opérateur linéaire $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. T est défini par une matrice $(T_{k\ell})_{k,\ell} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. L'adjoint T^* de T est également un opérateur linéaire de \mathbb{C}^n et est donc également défini par une matrice $(T^*_{k\ell})_{k,\ell}$. Fixons $z, w \in \mathbb{C}^n$ et calculons :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n T^*_{jk} z_k \bar{w}_j = \langle T^*z, w \rangle = \langle z, Tw \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n z_k \overline{T_{kj} w_j}.$$

Cette égalité étant vraie $\forall z, w \in \mathbb{C}^n$, on en déduit $T^*_{jk} = \overline{T_{kj}}$, i.e. la matrice adjointe est la conjuguée de la transposée.

D'ailleurs, si $T = T^*$, alors $(T_{jk})_{jk}$ est une matrice hermitienne.

(2) Pour un opérateur intégral de Hilbert-Schmidt, fixons $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu)$ et considérons :

$$T_K : L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) : f \mapsto \int K(\cdot, y) f(y) d\mu(y).$$

Soient $f, g \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Partons de $\langle T_K f, g \rangle = \langle f, T_K^* g \rangle$ et calculons :

$$\langle T_K f, g \rangle = \int_{\Omega} \overline{g}(x) \int_{\Omega} K(x, y) f(y) d\mu(y) d\mu(x) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\Omega} f(y) \int_{\Omega} K(x, y) \overline{g}(x) d\mu(x) d\mu(y) = \langle f, T_K^* g \rangle.$$

Donc :

$$T_K^* g(y) = \overline{\int_{\Omega} K(x, y) \overline{g}(x) d\mu(x)},$$

ou en changeant simplement les variables x et y :

$$T_K^* g(x) = \int_{\Omega} \overline{K}(y, x) g(y) d\mu(y).$$

T_K^* est donc également un opérateur intégral de Hilbert-Schmidt et on a bien *transposé/conjugué* le noyau K de T_K pour trouver celui de T_K^* .

(2) Reconsidérons M un sous-espace fermé de H et la projection orthogonale $P : H \rightarrow M$. Montrons que $P = P^*$.

Soient $x_1, x_2 \in H$ et soit Q la projection orthogonale sur M^\perp . Calculons :

$$\langle Px_1, x_2 \rangle = \langle Px_1, Px_2 + Qx_2 \rangle = \langle Px_1, Px_2 \rangle + \underbrace{\langle Px_1, Qx_2 \rangle}_{=0} = \langle Px_1, Px_2 \rangle.$$

Et :

$$\langle x_1, Px_2 \rangle = \langle Px_1 + Qx_1, Px_2 \rangle = \langle Px_1, Px_2 \rangle + \underbrace{\langle Qx_1, Px_2 \rangle}_{=0} = \langle Px_1, Px_2 \rangle.$$

On a donc $\forall x_1, x_2 \in H : \langle x_1, P^* x_2 \rangle = \langle Px_1, x_2 \rangle = \langle x_1, Px_2 \rangle$. Dès lors $P = P^*$. La projection orthogonale est donc auto-adjointe.

Pour E, F espaces vectoriels normés, plusieurs normes semblent canoniques. À $p \geq 1$ fixé, on peut définir :

$$\|(e, f)\|_{E \times F; p} := (\|e\|_E^p + \|f\|_F^p)^{1/p}.$$

De même, si E et F sont munis d'un produit scalaire, on a un produit scalaire canonique sur $E \times F$:

$$\langle (e_1, f_1), (e_2, f_2) \rangle_{E \times F} := \langle e_1, e_2 \rangle_E + \langle f_1, f_2 \rangle_F,$$

et donc la norme $\|\cdot\|_{E \times F; 2}$ semble particulièrement intuitive.

Il est cependant à noter que les normes $\|\cdot\|_{E \times F; p}$ sont équivalentes pour toutes les valeurs de $p \geq 1$, et donc que les topologies induites par ces normes sont homéomorphes (elles sont même strictement identiques, et cette topologie est la topologie produit). Dès lors, la norme $\|\cdot\|_{E \times F; 1}$ va être posée canoniquement sur $E \times F$, mais les résultats qui suivront seront également valables pour toute valeur de $p > 1$.

Définition 2.44. Pour un opérateur linéaire $T : E \rightarrow F$, on note $\Gamma_T = \{(x, Tx)\}_{x \in E} \subset E \times F$ le graphe de T .

Théorème 2.45. Si T est bornée, alors Γ_T est fermé dans $E \times F$.

Proof. Soit $(x, y) \in \overline{\Gamma_T}$. Prenons une suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Gamma_T$ telle que $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x, y)$. De plus T est continue car bornée. Dès lors :

$$\begin{cases} Tx_n = y_n \\ Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Tx \\ y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y. \end{cases}$$

Or $x \in E$ et par unicité de la limite, $Tx = y$. Dès lors, $(x, y) \in \Gamma_T$. \square

Définition 2.46. Une application $f : E \rightarrow F$ est *ouverte* si l'image de tout ouvert de E par f est un ouvert de F .

Théorème 2.47 (de Baire). *Soit X un espace métrique complet. Si $(V_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'ouverts denses dans X , alors $\bigcap_{n \geq 0} V_n$ est également dense dans X .*

Proof. Soient $(V_n)_n$ ouverts denses dans X . Si pour tout $W \subset X$ ouvert non vide, $W \cap \bigcap_{n \geq 0} V_n \neq \emptyset$, alors $\bigcap_{n \geq 0} V_n$ est dense dans X . Fixons donc $W \subset X$ ouvert de X non vide et trouvons $x \in W \cap \bigcap_{n \geq 0} V_n$.

V_1 est dense. Donc $\exists x_1 \in W \cap V_1$ et $r_1 \in (0, 1)$ tel que $\overline{B(x_1, r_1)} \subset W \cap V_1$. $B(x_1, r_1)$ est un ouvert de X , donc $\exists x_2 \in B(x_1, r_1) \cap V_2$ et $r_2 \in (0, 1/2)$ tel que $\overline{B(x_2, r_2)} \subset B(x_1, r_1) \cap V_2$, etc. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(r_n)_{n \geq 1}$ tels que :

$$\forall n \geq 2 : x_n \in B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap V_n \text{ et } r_n \in (0, 1/n) \text{ t.q. } \overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap V_n.$$

À n fixé, pour $k \geq n$, $x_k \in B(x_n, r_n)$ et donc pour $k, \ell \geq n$: $d(x_k, x_\ell) \leq d(x_k, x_n) + d(x_\ell, x_n) \leq 2r_n = \frac{2}{n}$. Donc la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans X . Dès lors $\exists x \in X$ t.q. $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. De plus, pour $k \geq n$:

$$x_k \in \overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap V_n \subset V_n.$$

Dès lors $\forall n \geq 1 : \forall k \geq n : x_k \in V_n$, et donc $\forall k \geq 1 : x_k \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$. En particulier : $x \in \bigcap_{n \geq 1} V_n$.

Finalement, puisque $x \in \overline{B(x_1, r_1)} \subset W$, on a bien $x \in W \cap \bigcap_{n \geq 1} V_n$. \square

Remarque. Le théorème de Baire peut se formuler de la manière équivalente suivante: si dans X , $(F_n)_{n \geq 0}$ est une suite de fermés d'intérieur vide, alors $\bigcup_{n \geq 0} F_n$ est également d'intérieur vide.

Théorème 2.48 (de l'application ouverte, Banach). *Soient E, F espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si T est surjective, alors T est ouverte.*

Proof. Notons B_E (resp. B_F) la boule unité dans E (resp. dans F). Il suffit de montrer que $\exists \delta > 0$ t.q. $T(B_E) \supset \delta B_F$. En effet, en supposant que cette inclusion est vérifiée, on a $T(x_0 + \lambda B_E) = Tx_0 + \lambda T(B_E)$. Dès lors, si U est un voisinage de x_0 dans E , alors $T(U)$ est un voisinage de Tx_0 dans F . Si de plus U est ouvert, U est un voisinage de tout $y \in U$, et donc $T(U)$ est un voisinage de tout $Ty \in T(U)$, et donc $T(U)$ est ouvert dans F .

Montrons donc qu'il existe un tel $\delta > 0$. On sait que $E = \bigcup_{n \geq 0} nB_E$, et donc :

$$F = T(E) = T\left(\bigcup_{n \geq 0} nB_E\right) = \bigcup_{n \geq 0} T(nB_E).$$

Supposons alors par l'absurde que $\forall n \geq 0 : \overline{T(nB_E)}^\circ = \emptyset$. Par Baire, on a $F = \overset{\circ}{\bigcup_{n \geq 0} T(nB_E)} = \emptyset$, ce qui est une contradiction.

Dès lors, il existe $n > 0$ tel que $T(nB_E) \supseteq \overline{T(nB_E)}^\circ \neq \emptyset$, et donc il existe un ouvert $W \subset \overline{T(nB_E)}$. Soient $y_0 \in W$ et $r > 0$ t.q. $y_0 + rB_F \subset W$. Fixons également $y \in F$ t.q. $\|y\| < r$. Soit également $(x'_k)_{k \geq 0} \subset nB_E$ t.q. $Tx'_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y_0$.

Puisque $y_0 + y \in W \subset \overline{T(nB_E)}$, prenons une autre suite $(x''_k)_{k \geq 0} \subset nB_E$ t.q. $Tx''_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y_0 + y$.

On note $x_k := x'_k - x''_k$. $\|x_k\| \leq \|x''_k\| + \|x'_k\| \leq 2n$ et $Tx_k = Tx''_k - Tx'_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y_0 + y - y_0 = y$. Dès lors $\forall \varepsilon > 0 : \forall y \in rB_F : \exists x \in E$ t.q. $\|x\| \leq 2n$ et $\|Tx - y\| \leq \varepsilon$. Ce qui est équivalent à :

$$\forall y \in F : \forall \varepsilon > 0 : \exists x \in E \text{ t.q. } \|x\| \leq \frac{4n}{r}\|y\| \text{ et } \|Tx - y\| \leq \varepsilon. \quad (\Delta)$$

En effet, si $y = 0$, on prend $x = 0$, et si $y \neq 0$, on sait qu'il existe $\tilde{x} \in E$ t.q. $\|\tilde{x}\| \leq 2n$ et $\left\|T\tilde{x} - \frac{2}{\|y\|}y\right\| \leq \varepsilon$. On peut dès lors poser $x := \frac{\|y\|}{2}\tilde{x}$.

Posons $\delta := \frac{r}{4n}$, et prenons $\omega > 0$. Montrons alors que :

$$\forall y \in F : \|y\| \leq \delta \Rightarrow \exists x \in E \text{ t.q. } \|x\| \leq 1 + \omega \text{ et } Tx = y. \quad (\#)$$

Par (Δ) :

$$\exists x_1 \in E \text{ t.q. } \|x_1\| \leq \frac{1}{\delta}\|y\| \leq 1 \text{ et } \|Tx_1 - y\| \leq \frac{\delta\omega}{2}.$$

De même :

$$\exists x_2 \in E \text{ t.q. } \|x_2\| \leq \frac{4n}{r}\|Tx_1 - y\| \leq \frac{\omega}{2} \text{ et } \|(y - Tx_1 - Tx_2)\| \leq \frac{\delta\omega}{2^2}.$$

On construit ainsi x_1, \dots, x_n tels que $\|x_n\| \leq 2^{-(n-1)}\omega$. Pour $\varepsilon = 2^{-n}\delta\omega$, on a l'existence de x_n t.q. $\|x_n\| \leq 2^{-(n-1)}\omega$ et $\|y - Tx_1 - \dots - Tx_n\| \leq \varepsilon$.

De plus, puisque $(x_n)_n$ est de Cauchy, la suite $(\sum_{j=1}^n x_j)_n$ est également de Cauchy. Donc :

$$\exists x \in E \text{ t.q. } \sum_{j=1}^n x_j \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x.$$

Par continuité de la norme $\|\cdot\|$, on a également $\left\|\sum_{j=1}^n x_j\right\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \|x\|$. or $\exists \eta > 0$ t.q. $\left\|\sum_{j=1}^n x_j\right\| \leq 1 + \omega - \eta$ et donc $\|x\| \leq 1 + \omega$. Finalement, par continuité de T , on a $T(\sum_{j=1}^n x_j) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} Tx$. Or puisque $T(\sum_{j=1}^n x_j) = \sum_{j=1}^n Tx_j \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} y$, par unicité de la limite (dans les espaces métriques complets), on a $Tx = y$, ce qui montre bien $(\#)$. \square

Théorème 2.49 (du graphe fermé, Banach). *Soient E, F espaces de Banach, $T : E \rightarrow F$ linéaire. Si Γ_T est fermé dans $E \times F$, alors T est bornée.*

Proof. Γ_T est un sous-espace vectoriel fermé de $E \times F$. Or $E \times F$ est un espace de Banach puisque le produit d'espaces de Banach en est un. Dès lors Γ_T est un espace de Banach également. On décompose T en $T_1 : E \rightarrow \Gamma_T : x \mapsto (x, Tx)$ et $T_2 : E \times F \rightarrow F : (x, y) \mapsto y$ ($T = T_2 T_1$). T_1 est bijective par définition du graphe d'une application et $T_1^{-1} : (x, Tx) \mapsto x$ est bornée (donc continue). Par le théorème de l'application ouverte de Banach, on déduit que T_1^{-1} est ouverte, i.e. T_2 est continue.

De plus, T_2 est continue car les projections sont toujours continues pour la topologie produit. Donc $T = T_2 T_1$ est composition d'applications continues, et est donc continue. \square

Chapter 3

Équations aux dérivées partielles et théorie des distributions

3.1 Rappels

Dans le cadre des EDOs, on cherche une fonction $u : [-T, T] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$F(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t)) = 0.$$

On généralise à $u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$, et une EDP est donc sous la forme :

$$F\left(x, (\partial^\alpha u(x))_{|\alpha| \leq m}\right) = 0.$$

Dans le cadre des EDOs, la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) \\ u(0) = u^0, \end{cases}$$

pour $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ continue, et $u^0 \in \mathbb{C}^n$ est donnée par :

$$u(t) = u^0 e^{-tA} + \int_0^t e^{(s-t)A} f(s) ds,$$

où l'exponentielle d'une matrice est définie par la série :

$$e^A := \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}.$$

3.1.1 Normes et matrices

Remarquons que les matrices définissent des opérateurs linéaires. Elles sont donc canoniquement munies de la norme associée :

$$\|A\| := \sup_{|x|=1} |Ax|.$$

Proposition 3.1. *Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty : A \mapsto \|A\|_\infty := \sup_{1 \leq i, j \leq m} |A_{ij}|$ sont équivalentes.*

Proof. Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Pour tous $1 \leq i, j \leq m$, on a :

$$|A_{ij}| \leq |Ae_j| \leq \|A\|$$

car $|e_j| = 1$. De plus :

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax| = \sup_{|x|=1} \left(\sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^m A_{ij} x_j \right|^2 \right)^{1/2} \leq \sup_{|x|=1} \|A\|_\infty \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |x_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Or $x \mapsto \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |x_j|^2$ est continue sur $\{x \in \mathbb{C}^m \text{ t.q. } |x| = 1\}$ (qui est fermé), et donc $\exists M > 0$ tel que :

$$\|A\| \leq M \|A\|_\infty.$$

□

Proposition 3.2. Pour $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$: $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$.

Proof. Par propriété de la norme opérateur :

$$\|e^A\| = \left\| \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k \geq 0} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k \geq 0} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}.$$

□

3.2 Problème de Cauchy pour les EDPs

On va étudier des problèmes sous la forme (P.C.) avec $u = [u_1, \dots, u_m]^\top$ où $u_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $f = [f_1, \dots, f_n]^\top$ où $f_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $A_j \in \mathbb{C}^{m \times m}$, et $u^0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f \\ u|_{t=0} = u^0 \end{cases} \quad (\text{P.C.})$$

Proposition 3.3. Le problème de Cauchy suivant (équivalent) (P.C.) pour $n = m = 1$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f \\ u|_{t=0} = u^0, \end{cases}$$

pour $a \in \mathbb{C}$, $u^0 \in C^1(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ possède une unique solution $C^1(\mathbb{R}^2)$ si $a \in \mathbb{R}$ et ne possède (en général) pas de solution $C^1(\mathbb{R}^2)$ si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Proof. Supposons que $a \in \mathbb{R}$. On procède au changement de variable $(t, x) \mapsto (t, y)$ (et $u(t, x) = U(t, y)$). On a alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\partial y}{\partial t} + a \frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial U}{\partial y}.$$

En particulier, pour $y = x - at$ (afin d'annuler la parenthèse), on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = f(t, y + at) \\ U(0, y) = u^0(y) \end{cases}$$

qui revient à résoudre une EDO pour tout $y \in \mathbb{R}$. On a donc la solution :

$$U(t, y) = u^0(y) + \int_0^t f(s, y + as) ds,$$

ou encore, pour u et non U :

$$u(t, x) = u^0(x - at) + \int_0^t f(s, x - a(t - s)) ds.$$

Dans le cas où $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, justifions pourquoi trouver une solution est en général pas faisable.

On peut réécrire $a = \alpha + i\beta$ avec $\beta \neq 0$. En faisant le même changement de variable que précédemment ($y = x - \alpha t$), on trouve :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + i\beta \frac{\partial U}{\partial y} = f(t, y + \alpha t) \\ U|_{t=0} = u^0. \end{cases}$$

on peut supposer WLOG que $a = i$ car en posant $y' := \frac{y}{\beta}$ (bien défini car $\beta \neq 0$), on trouve :

$$\frac{\partial U'}{\partial t} + i \frac{\partial U'}{\partial y'} = f(t, \beta y' + \alpha t).$$

Dans le cas le plus simple, supposons $f \equiv 0$ et regardons le P.C. :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + i \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u|_{t=0} = u^0 \end{cases}$$

La première équation est celle de Cauchy-Riemann en $t + ix$, et donc u doit être une fonction holomorphe de $t + ix$. Si une solution u existe à ce problème, alors :

$$u(t, x) = \sum_{k \geq 0} c_k (t + ix)^k,$$

qui converge uniformément en les variables d'origine. En particulier, pour $t = 0$:

$$u^0(x) = u(0, x) = \sum_{k \geq 0} c_k (ix)^k.$$

Dès lors u^0 est analytique, et donc $u^0 \in C^\infty(\mathbb{R})$. On a donc une condition extrêmement restrictive sur le choix de u^0 : il est nécessaire (mais pas suffisant !) que $u^0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ pour que le système admette une solution. \square

Définissons alors des espaces dans lesquelles on espère pouvoir résoudre (P.C.)

Définition 3.4. Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit :

$$C_b^p(\mathbb{R}^n) := \left\{ v \in C^p(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq p \Rightarrow \partial^\alpha v \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

De manière similaire, pour $T > 0$, on introduit :

$$C_b^p([-T, T] \times \mathbb{R}^n) := \left\{ v \in C^p([-T, T] \times \mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq p \Rightarrow \partial^\alpha v \in L^\infty([-T, T] \times \mathbb{R}^n) \right\}.$$

Proposition 3.5. *L'application suivante est une norme sur $C_b^p(\mathbb{R}^n)$:*

$$\|\cdot\|_{C_b^p(\mathbb{R}^n)} : C_b^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^+ : v \mapsto \|v\|_{C_b^p(\mathbb{R}^n)} := \sum_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha v(x)|.$$

Proposition 3.6. *$C_b^p(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach.*

Proof. TODO □