

MATH-F-211 : Topologie

R. Petit

année académique 2016 - 2017

Table des matières

1	Topologie générale	1
1.1	Espaces métriques	1
1.1.1	Sous-espaces métriques	3
1.2	Suites et limites	4
1.3	Fonctions et applications continues	5
1.4	Ensembles ouverts et fermés	5
1.5	Métriques équivalentes	6
2	Topologie différentielle	7
2.1	Définitions	7
2.2	Homéomorphismes	9
2.3	Topologie produit	9
2.4	Topologie quotient	10
2.5	Sous-ensembles fermés et sous-ensembles denses	11

Chapitre 1

Topologie générale

1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1. Soit M un ensemble non vide. Une fonction $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ est une *métrique* si d satisfait :

M1. $\forall x, y \in M : d(x, y) \geq 0$ avec $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

M2. $\forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x)$;

M3. $\forall x, y, z \in M : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Le couple (M, d) est appelé *espace métrique*.

Exemple 1.1.1. La métrique euclidienne sur \mathbb{R} est définie par :

$$d_E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto |x - y|.$$

Démonstration. EXERCICE. □

Exemple 1.1.2. La métrique euclidienne sur \mathbb{R}^n est définie par :

$$d_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Lemme 1.1.2 (Inégalité de Cauchy-Schwartz). Soient $r, s \in \mathbb{R}^n$. Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^n r_i s_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n r_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n s_i^2 \right).$$

Démonstration. Soit la fonction :

$$F(t) = \sum_{j=1}^n (r_j + t s_j)^2 = \left(\sum_{j=1}^n s_j^2 \right) t^2 + \left(2 \sum_{j=1}^n r_j s_j \right) t + \sum_{j=1}^n r_j^2.$$

La fonction $F(t)$ est positive pour tout t car c'est une somme de valeurs positives. Dès lors, son discriminant est négatif. On a alors :

$$\left(2 \sum_{j=1}^n r_j s_j \right)^2 - 4 \left(\sum_{j=1}^n r_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n s_j^2 \right) \leq 0.$$

En divisant par 4 de part et d'autre et en réarrangeant l'inégalité, on obtient :

$$\left(\sum_{j=1}^n r_j s_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n r_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n s_j^2 \right).$$

□

Preuve de l'exemple 1.1.2. M1 et M2 sont triviaux.

Pour M3, posons pour $1 \leq i \leq n$: $r_i := x_i - y_i$ et $s_i := y_i - z_i$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n r_i s_i &\leq 2 \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n r_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n s_i^2 \right)} \\ 2 \sum_{i=1}^n r_i s_i + \sum_{i=1}^n (r_i^2 + s_i^2) &\leq 2 \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n r_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n s_i^2 \right)} + \sum_{i=1}^n (r_i^2 + s_i^2) \\ \sum_{i=1}^n (r_i + s_i)^2 &\leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n s_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n r_i^2} \right)^2 \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n (r_i + s_i)^2} &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n r_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n s_i^2} \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2} \\ d_E(x, z) &\leq d_E(y, z) + d_E(x, y). \end{aligned}$$

□

Définition 1.1.3. Soit $M \neq \emptyset$. On définit la *métrique discrète* sur M par :

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}.$$

Démonstration. M1 et M2 sont triviaux.

Pour M3 :

- soit $x \neq z$, et donc $x \neq y$ ou $y \neq z$, ce qui implique $d(x, y) + d(y, z) \geq 1 = d(x, z)$;
- soit $x = z$, et donc $0 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

□

Définition 1.1.4. La *métrique de Manhattan* est définie par :

$$d_M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Démonstration. M1 et M2 sont triviaux.

Pour M3, on pose $x, y, z \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} d_M(x, z) &= d_E(x_1, z_1) + d_E(x_2, z_2) \leq d_E(x_1, y_1) + d_E(y_1, z_1) + d_E(x_2, y_2) + d_E(y_2, z_2) \\ &= (d_E(x_1, y_1) + d_E(x_2, y_2)) + (d_E(y_1, z_1) + d_E(y_2, z_2)) = d_M(x, y) + d_M(y, z). \end{aligned}$$

□

Définition 1.1.5. Soit $\mathcal{C}([a, b])$, l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$, et on définit :

$$\begin{aligned} - d_1 : \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b]) &\rightarrow \mathbb{R} : (f, g) \mapsto \int_a^b |(f - g)(x)| dx ; \\ - d_2 : \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b]) &\rightarrow \mathbb{R} : (f, g) \mapsto \sqrt{\int_a^b ((f - g)(x))^2 dx} ; \\ - d_\infty : \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b]) &\rightarrow \mathbb{R} : (f, g) \mapsto \sup \left\{ |(f - g)(x)| \text{ t.q. } x \in [a, b] \right\}. \end{aligned}$$

Définition 1.1.6. Soit $\mathcal{C}^1([a, b])$, l'ensemble des fonctions continument différentiables sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . On définit :

$$\begin{aligned} d : \mathcal{C}^1([a, b]) \times \mathcal{C}^1([a, b]) &\rightarrow \mathbb{R} : (f, g) \mapsto \sup \left\{ |(f - g)(x)| \text{ t.q. } x \in [a, b] \right\} + \sup \left\{ |(f' - g')(x)| \text{ t.q. } x \in [a, b] \right\} \\ &= d_\infty(f, g) + d_\infty(f', g'). \end{aligned}$$

Remarque. Si f et g sont k fois continument dérivables, alors on définit :

$$d(f, g) = \sum_{i=0}^k d_\infty(f^{(i)}, g^{(i)}).$$

1.1.1 Sous-espaces métriques

Proposition 1.1.7. Soit (M, d) un espace métrique. Soit $A \subset M$, non vide. Alors (A, d_A) est un espace métrique, où :

$$d_A = d|_{A \times A}.$$

Définition 1.1.8. Soient (M, d_M) et (N, d_N) deux espaces métriques. Soit $A \subset M$ non-vide. On définit trois métriques distinctes :

$$\begin{aligned} d_1 : (M \times N)^2 &\rightarrow \mathbb{R} : ((x, y), (x', y')) \mapsto d_M(x, x') + d_N(y, y') \\ d_2 : (M \times N)^2 &\rightarrow \mathbb{R} : ((x, y), (x', y')) \mapsto \sqrt{d_M(x, x') + d_N(y, y')} \\ d_\infty : (M \times N)^2 &\rightarrow \mathbb{R} : ((x, y), (x', y')) \mapsto \max \{ d_M(x, x'), d_N(y, y') \} \end{aligned}$$

Démonstration. EXERCICE.

□

Définition 1.1.9. Soit (M, d) un espace métrique et soient $a \in M, r \in \mathbb{R}_0^+$. On définit la *boule ouverte* centrée en a de rayon r par :

$$B(a, r) := \{x \in M \text{ t.q. } d(x, a) < r\}.$$

Définition 1.1.10. Soit $f : (M, d_M) \times (N, d_N)$, une application entre deux espaces métriques. Si f est une bijection et :

$$\forall x, y \in M : d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y),$$

alors on dit que f est une *isométrie*.

Remarque. L'ensemble des isométries d'un espace métrique dans lui-même forme un groupe pour la composition.

1.2 Suites et limites

Définition 1.2.1. Une suite (x_n) dans un espace métrique (M, d) converge vers un point $a \in M$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Lemme 1.2.2. Soit (x_n) une suite dans un espace métrique (M, d) . S'il existe a et b dans M tels que $x_n \rightarrow a$ et $x_n \rightarrow b$, alors $a = b$.

Lemme 1.2.3. Soient (M, d_M) et (N, d_N) deux espaces métriques. Soient (x_n) une suite dans M et (y_n) une suite dans N . Alors la suite $(x_n, y_n)_n$ dans $M \times N$ converge par d en $(a, b) \in M \times N$ si et seulement si $x_n \rightarrow a$ et $y_n \rightarrow b$, où $d \in \{d_1, d_2, d_\infty\}$.

Remarque. Ici, la convergence est assurée par les trois métriques si elle est constatée par une seule. En réalité, de manière générale, la convergence dépend de la métrique.

Exemple 1.2.1. La fonction :

$$f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1] : x \mapsto \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{si } \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On observe que :

$$\begin{aligned} d_1(f_n, 0) &= \int_0^1 |f_n(x) - 0(x)| dx = \int_0^1 |f_n(x)| dx = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ d_2(f_n, 0) &= \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx \leq \sqrt{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ d_\infty(f_n, 0) &= 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Il y a donc convergence vers 0 (la fonction nulle) pour d_1 et d_2 dans $\mathcal{C}([0, 1])$ mais vers 1 (la fonction constante valant 1) pour d_∞ .

Définition 1.2.4. Une suite (x_n) dans un espace métrique (M, d) est dite *de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m, n \geq N : d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Lemme 1.2.5. Soit (x_n) une suite convergente dans un espace métrique (M, d) . Alors (x_n) est de Cauchy.

Remarque. On ne peut pas cependant dire que la réciproque est vraie : le cas est trop général.

Exemple 1.2.2. Si $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ est une suite convergente en $\sqrt{2}$ dans \mathbb{R} , alors (x_n) est de Cauchy. Or (x_n) ne converge pas dans \mathbb{Q} .

Définition 1.2.6. Soient (M, d) , un espace métrique et $A \subseteq M$. A est dit *borné* lorsque :

$$\exists L \in \mathbb{R}^+_0 \text{ t.q. } \forall x, y \in M : d(x, y) \leq L.$$

De plus, la suite $(x_n) \subset M$ est dite *bornée* lorsque le sous-ensemble $\{x_n \text{ t.q. } n \in \mathbb{N}\} \subset M$ est borné.

Proposition 1.2.7. Un sous-ensemble A de M , où (M, d) est un espace métrique, est borné si et seulement si :

$$\exists x_0 \in M, R \in \mathbb{R}^+_0 \text{ t.q. } A \subset B(x_0, R).$$

Démonstration. □

Théorème 1.2.8 (Bolzano-Weierstrass). Soit $(x_n) \subset \mathbb{R}^m$. Si (x_n) est bornée, alors il existe une sous-suite de (x_n) convergente.

1.3 Fonctions et applications continues

Définition 1.3.1. Soit $f : (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$, une application entre deux espaces métriques. On dit que f est continue en $a \in M$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \text{ t.q. } d_M(x, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

On dit que f est continue lorsqu'elle est continue en tout point a de M .

Lemme 1.3.2. Soit $f : M \rightarrow N$, une application entre deux espaces métriques. f est continue en $a \in M$ si et seulement si :

$$\forall (x_n) \subset M : (x_n \rightarrow a) \Rightarrow (f(x_n) \rightarrow f(a)).$$

Proposition 1.3.3. Soient $(M, d_M), (N, d_N), (P, d_P)$ trois espaces métriques. Soient $f : (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$ et $g : (N, d_N) \rightarrow (P, d_P)$ continues. Alors la fonction $g \circ f$ est également continue.

1.4 Ensembles ouverts et fermés

Définition 1.4.1. Soit (M, d) un espace métrique. Un sous-ensemble $U \subseteq M$ est dit :

- ouvert si $\forall x \in U : \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } B(x, \varepsilon) \subseteq U$;
- fermé si son complémentaire $(M \setminus U)$ est ouvert.

Lemme 1.4.2. Soit $(x_n) \subset M$. La suite (x_n) converge en $a \in M$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ si et seulement si pour tout ouvert $U \subseteq M$: si $a \in U$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N : x_n \in U$.

Lemme 1.4.3. Soit $f : M \rightarrow N$ une application allant d'un espace métrique dans un autre. L'application f est continue si et seulement si pour tout ouvert $u \subseteq M : f^{-1}(U)$ est un ouvert.

Démonstration. Supposons d'abord f continue et prenons $U \subset N$ un ouvert et $a \in f^{-1}(U)$. Par ouverture de U , on a :

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } B(f(a), \varepsilon) \subseteq U.$$

Également, par continuité de f , on sait que

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } \forall x \in f^{-1}(U) : d_M(x, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Autrement dit, si $x \in B(a, \delta)$, alors $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$. Et donc $f(x) \in U$, ou encore $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$ qui est donc ouvert.

Supposons alors que pour tout ouvert $U \subseteq N$, $f^{-1}(U)$ est ouvert. Soient $a \in M$ et $\varepsilon > 0$. On sait que $B(f(a), \varepsilon)$ est un ouvert, et donc $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ est également un ouvert. Or on sait que $a \in f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$. Dès lors, il existe $\delta > 0$ tel que $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$. Ou encore, de manière équivalente, si $d_M(x, a) < \delta$, alors $d_N(f(x), f(a)) < \varepsilon$. La fonction f est donc continue. \square

Remarque. L'intérêt de ces lemmes est d'avoir une caractérisation de la convergence et de la continuité ne dépendant pas de la métrique mais uniquement de la notion d'ouvert.

Lemme 1.4.4. Soit (M, d) un espace métrique. Alors :

1. M et \emptyset sont des ouverts ;
2. si U_1, \dots, U_k sont des ouverts de M , alors $\bigcap_{i=1}^k U_i$ est un ouvert de M ;
3. si $\{U_i \text{ t.q. } i \in I\}$ est une collection quelconque d'ouverts de M , alors $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de M .

Démonstration. Le point 1 est trivial.

Pour le point 2, prenons $a \in \bigcap_{i=1}^n U_i$. On sait que pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $B(a, \varepsilon_i) \subseteq U_i$. Prenons donc $\varepsilon := \min_i \{\varepsilon_i\}$, on sait donc que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : B(a, \varepsilon) \subseteq U_i.$$

On peut donc dire que $B(a, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i$.

Pour le point 3, prenons $a \in \bigcup_{i \in I} U_i$. On sait donc qu'il existe $j \in I$ tel que $a \in U_j$, et donc, par ouverture de U_j , il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subseteq U_j \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. \square

1.5 Métriques équivalentes

Définition 1.5.1. Soit M un ensemble non-vidé et soient d et d' , deux métriques sur M . On dit qu'elles sont *topologiquement équivalentes* lorsqu'elles déterminent les mêmes ouverts.

Corollaire 1.5.2. Soit M un ensemble non-vidé et soient d, d' deux métriques topologiquement équivalentes sur M . Une suite $(x_n) \subset M$ converge par rapport à d si et seulement si elle converge par rapport à d' .

Démonstration. Les deux métriques d et d' déterminent les mêmes ouverts. Dès lors, par le Lemme 1.4.2, on a la double implication de la convergence. \square

Théorème 1.5.3. Les trois métriques d_1, d_2, d_∞ sont topologiquement équivalentes.

Démonstration. En notant d l'une de ces métriques et d' une autre, pour toute boule ouverte B_d pour la métrique d , il est possible de déterminer une boule ouverte $B_{d'}$ pour la métrique d' telle que $B_{d'} \subseteq B_d$. \square

Théorème 1.5.4. Soit M un espace métrique. Pour tout $x, y \in M$, on a :

$$\frac{1}{2} d_1(x, y) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} d_2(x, y) \leq d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y).$$

Définition 1.5.5. Soit M un ensemble non-vidé et soient d, d' deux métriques sur M . Ces métriques sont dites *Lipschitz-équivalentes* lorsque :

$$\exists A, B \geq 0 \text{ t.q. } \forall x, y \in M : Ad(x, y) \leq d'(x, y) \leq Bd(x, y).$$

Remarque. Par le Théorème 1.5.4, on sait que les métriques d_1, d_2, d_∞ sont Lipschitz-équivalentes.

Lemme 1.5.6. Soit M un ensemble non-vidé et soient d, d' deux métriques sur M . Si d et d' sont Lipschitz-équivalentes, alors elles sont topologiquement équivalentes.

Chapitre 2

Topologie différentielle

2.1 Définitions

Définition 2.1.1. Soit X un ensemble non-vidé. Une collection \mathcal{T}_X des sous-ensembles de X est une topologie lorsque :

T1 $\{X, \emptyset\} \subseteq \mathcal{T}_X$;

T2 si $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{T}_X$, alors $\bigcap_{i=1}^k U_i \in \mathcal{T}_X$;

T3 si $\{U_i \text{ t.q. } i \in I\}$ est une collection quelconque d'éléments de \mathcal{T}_X , alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_X$.

On appelle le couple (X, \mathcal{T}_X) un *espace topologique*. Les éléments de \mathcal{T}_X sont appelés les *ouverts* de X .

Définition 2.1.2. Soient $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$. On dit que f est $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$ -continue si :

$$\forall U \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X.$$

Exemple 2.1.1. Si (M, d_M) est un espace métrique, on définit \mathcal{T}_{d_M} comme étant la collection de tous les ouverts de (M, d_M) . On a vérifié par le Lemme 1.4.4 que (M, \mathcal{T}_{d_M}) est un espace topologique.

Remarque. On observe qu'une fonction est continue au sens topologique ssi elle est continue au sens précédent, par le Lemme 1.4.3.

Définition 2.1.3. Soit X un ensemble non-vidé quelconque. On définit :

— la *topologie grossière* sur X par $\mathcal{T}_X = \{X, \emptyset\}$;

— la *topologie discrète* sur X par $\mathcal{T}_X = \mathcal{P}(X) = 2^X$.

Remarque. La topologie discrète revient à la topologie induite par la métrique discrète (voir Définition 1.1.3) sur un ensemble.

La topologie grossière par contre ne peut être issue d'une métrique lorsque $|X| \geq 2$.

Exemple 2.1.2. Soient $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ et $U_n = [0, n]$ pour $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{T} := \{U_n \text{ t.q. } n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}, \emptyset\}$.

L'axiome T1 est satisfait de manière triviale (par définition).

Pour prouver que T2 est respecté, prenons $U_{n_1}, \dots, U_{n_k} \in \mathcal{T}$. Posons $n := \min_i \{n_i\}$. On a alors $\bigcap_{i=1}^k U_{n_i} = U_n \in \mathcal{T}$. Si dans l'intersection, il y a \emptyset , alors l'intersection est $\emptyset \in \mathcal{T}$. Également si l'intersection comporte au plus $k-1$ fois \mathbb{N} , on peut les *retirer* et retomber sur le cas U_n . Si l'intersection est $\mathbb{N} \cap \mathbb{N} \cap \dots \cap \mathbb{N}$, alors l'intersection vaut $\mathbb{N} \in \mathcal{T}$.

Pour l'axiome T3, prenons $\{U_{n_i} \text{ t.q. } i \in I\}$. Si $\{n_i \text{ t.q. } i \in I\}$ est borné, alors $\bigcup_{i \in I} U_{n_i} = U_{\max_{i \in I} \{n_i\}}$, et sinon $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathbb{N}$.

On a donc bien une topologie sur \mathbb{N} , ce qui veut dire que $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ est un espace topologique.

Remarque. Ici, \mathcal{T} ne peut être issu d'une métrique car toute fonction continue de $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{d_E})$ est constante. En effet, soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_{d_E})$ -continue. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Posons $y := f(n_0) \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ est un ouvert, par continuité, on sait que $f^{-1}((y - \varepsilon, y + \varepsilon))$ est également un ouvert, et qui contient n_0 , et donc qui inclut U_{n_0} .

On en déduit $f(0) \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$, or ε est quelconque. On trouve donc :

$$f(0) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} (y - \varepsilon, y + \varepsilon) = \{y\}.$$

On a alors trouvé que $f(0) = y = f(n_0)$, et ce, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$. La fonction f est donc bien constante.

Définition 2.1.4. Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique et soit $x \in X$. Un *voisinage* de x est un sous-ensemble V de X tel que :

$$\exists O \in \mathcal{T} \text{ t.q. } x \in O \subseteq V.$$

On note $\mathcal{V}_X(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans X .

Définition 2.1.5. Soit $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$, une application et $a \in X$. On dit que f est continue en a lorsque :

$$\forall V \in \mathcal{V}_Y(f(a)) : f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_X(a).$$

Remarque. On remarque alors qu'une fonction est continue si elle est continue en tous ses points.

Définition 2.1.6. Soit $A \subseteq (X, \mathcal{T})$. Munissons A d'une topologie :

$$\mathcal{T}|_A := \{U \cap A \text{ t.q. } U \in \mathcal{T}\}.$$

On appelle $\mathcal{T}|_A$ la *topologie induite par A* .

Remarque. Montrons que $\mathcal{T}|_A$ est bien une topologie.

Pour T1, on sait que $\emptyset, X \in \mathcal{T}$. Et donc $\mathcal{T}|_A \supseteq \{\emptyset \cap A, X \cap A\} = \{\emptyset, A\}$.

Pour T2, prenons $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{T}|_A$. On en déduit que pour tout $i = 1, \dots, k$, il existe $V_i \in \mathcal{T}$ tel que $V_i \cap A = U_i$. Et donc :

$$\bigcap_{i=1}^k U_i = \bigcap_{i=1}^k (V_i \cap A) = \left(\bigcap_{i=1}^k V_i \right) \cap A \in \mathcal{T}|_A,$$

car $\bigcap_{i=1}^k V_i \in \mathcal{T}$.

Pour T3, à nouveau, pour tout $i \in I$, il existe $V_i \in \mathcal{T}$ tel que $U_i = V_i \cap A$. On a alors :

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (V_i \cap A) = \left(\bigcup_{i \in I} V_i \right) \cap A \in \mathcal{T}|_A,$$

car $\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{T}$.

Définition 2.1.7. On appelle *inclusion* la fonction d'identité allant d'un ensemble $A \subset X$ dans X :

$$i : A \rightarrow X : x \mapsto x.$$

Lemme 2.1.8. Soit (X, \mathcal{T}_X) un espace topologique et soit $\emptyset \neq A \subset X$. La fonction d'inclusion $i : A \rightarrow X$ est $(\mathcal{T}|_A, \mathcal{T}_X)$ -continue.

Remarque. La topologie induite est la plus réduite (avec le moins d'ouverts) telle que l'inclusion est continue.

Lemme 2.1.9. Soit $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ continue et soit $\emptyset \neq A \subseteq X$. Alors $(f \circ i) : A \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ est $(\mathcal{T}|_A, \mathcal{T}_Y)$ -continue.

Remarque. Cela revient à dire que la restriction d'une fonction continue à un sous-ensemble de son domaine est toujours continue.

Lemme 2.1.10. Soient $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$, une application telle que $f(X) \subseteq B \subseteq Y$. Alors f est $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$ -continue si et seulement si $\tilde{f} : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (B, \mathcal{T}_Y|_B)$ est $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y|_B)$ -continue.

Lemme 2.1.11. Soient $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ et $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ deux applications continues. Alors $g \circ f$ est continue.

Démonstration. Soit $U \in \mathcal{T}_Z$. On sait que $(g \circ f)^{-1}(U) = (f^{-1} \circ g^{-1})(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$, où $g^{-1}(U)$ est un ouvert par continuité de g . Appelons-le V . On a alors $f^{-1}(V)$ un ouvert également par continuité de f . Donc $(g \circ f)^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ et donc $(g \circ f)$ est continue. \square

Remarque. On peut remarquer l'efficacité de la topologie dans de telles démonstrations.

2.2 Homéomorphismes

Définition 2.2.1. Soit $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ une application entre deux espaces topologiques. f est un *homéomorphisme* lorsque :

- (i) f est bijective ;
- (ii) f est continue ;
- (iii) f^{-1} est continue.

Remarque. Attention : un homéomorphisme n'est pas un homomorphisme !

Également, une bijection continue n'est pas forcément un homéomorphisme.

Par exemple $\text{Id} : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$, avec $\mathcal{T}_2 \subsetneq \mathcal{T}_1$.

Exemple 2.2.1. Tous les ouverts de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{d_E})$ sont homéomorphes. En effet, l'application :

$$f : (a, b) \rightarrow (c, d) : x \mapsto c + \frac{(x - a)(d - c)}{(b - a)}$$

est continue (et sa réciproque également) et bijective. La continuité est assurée par la composition d'applications continues (translations et homothéties).

Définition 2.2.2. On appelle *propriété topologique* toute propriété résistante aux homéomorphismes.

Exemple 2.2.2. Le fait qu'une fonction continue sur $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{d_D})$, avec d_D la métrique discrète, est constante est une propriété topologique.

À l'opposé, le fait d'être un ensemble borné n'est pas une propriété topologique. En effet, l'ensemble ouvert $(-1, 1)$ est borné, mais prenons l'application $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$. On voit bien que f est un homéomorphisme mais que $f((-1, 1)) = \mathbb{R}$ n'est plus borné.

2.3 Topologie produit

Définition 2.3.1. Étant donnés deux espaces topologiques $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$, on définit la collection \mathcal{T} de sous-ensembles de $X \times Y$ comme suit :

$$W \in \mathcal{T} \iff \forall x, y \in W : \exists U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y \text{ t.q. } (x, y) \in U \times V \subseteq W.$$

On appelle \mathcal{T} la *topologie produit* de \mathcal{T}_X et \mathcal{T}_Y .

Lemme 2.3.2. \mathcal{T} est une topologie sur $X \times Y$.

Démonstration. Pour vérifier T1, on observe que $\emptyset \in \mathcal{T}$ car si $W = \emptyset$, la condition est vérifiée pour tout $(x, y) \in W$. Également, $X \times Y \in \mathcal{T}$ car si on prend $(x, y) \in W = X \times Y$, on peut prendre $X \in \mathcal{T}_X, Y \in \mathcal{T}_Y$ tels que :

$$(x, y) \in X \times Y \subseteq W = X \times Y.$$

Pour vérifier T2, prenons $W_1, W_2 \in \mathcal{T}$. Soit $(x, y) \in W_1 \cap W_2$. On sait que :

$$\begin{aligned} \exists U_1 \in \mathcal{T}_X, V_1 \in \mathcal{T}_Y \text{ t.q. } (x, y) \in U_1 \times V_1 \subseteq W_1, \\ \exists U_2 \in \mathcal{T}_X, V_2 \in \mathcal{T}_Y \text{ t.q. } (x, y) \in U_2 \times V_2 \subseteq W_2. \end{aligned}$$

On peut alors dire $(x, y) \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \subseteq W_1 \cap W_2$.

Pour vérifier T3, soit $\{W_i \text{ t.q. } i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$. Alors $\bigcup_{i \in I} W_i \in \mathcal{T}$. En effet, soit $(x, y) \in \bigcup_{i \in I} W_i$. On sait qu'il existe $i \in I$ tel que $(x, y) \in W_i$. Donc $\exists U \in \mathcal{T}_X$ et $V \in \mathcal{T}_Y$ tels que $(x, y) \in U \times V \subseteq \bigcup_{i \in I} W_i$. \square

Remarque. Les produits d'ouverts sont des ouverts, mais tous les ouverts ne sont pas des produits d'ouverts : il suffit de prendre les boules ouvertes.

Proposition 2.3.3. *Les projections $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ et $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ sont continues.*

Démonstration. Soit $U \in \mathcal{T}_X$. Alors $\pi^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{T}$. De même, soit $V \in \mathcal{T}_Y$. Alors :

$$\pi^{-1}(V) = X \times V \in \mathcal{T}.$$

\square

Remarque. La topologie produit est la moins fine qui rende les π_i continues.

Proposition 2.3.4. *Soit $f : Z \rightarrow X \times Y$, une application continue, où X, Y, Z sont des espaces topologiques. Alors f est continue si et seulement si $(\pi_1 \circ f)$ et $(\pi_2 \circ f)$ sont continues.*

Démonstration. Supposons f continue. Par la Proposition 2.3.3, on sait que les projections sont continues, donc la composition d'applications continues est une application continue.

Supposons maintenant les $(\pi_i \circ f)$ continues. Soit $W \in \mathcal{T}$. Soit $z \in f^{-1}(W)$. Puisque W est un ouvert, on sait qu'il existe $(U, V) \in (\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$ tels que $f(z) \in U \times V$. Par hypothèse, on sait $(\pi_1 \circ f)^{-1}(U), (\pi_2 \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Par l'axiome d'intersection finie, on sait que $T_z := (\pi_1 \circ f)^{-1}(U) \cap (\pi_2 \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. On en déduit également $f(z) \in f^{-1}(W) \in T_z$.

Puisque $T_z \subseteq f^{-1}(W)$ pour tout z , on peut dire que :

$$f^{-1}(W) = \bigcup_{z \in f^{-1}(W)} T_z \in \mathcal{T},$$

par l'axiome d'union quelconque. La préimage d'un ouvert W est donc bien un ouvert $\in \mathcal{T}$. L'application f est donc continue. \square

Remarque. Cette proposition assure la continuité composante par composante.

2.4 Topologie quotient

Définition 2.4.1. un quotient d'un espace topologique (X, \mathcal{T}_X) est une application surjective $\pi : X \rightarrow Y$, où Y est un ensemble quelconque.

Remarque. On parle de quotient car on peut aisément faire des classes d'équivalences contenant tous les $x \in X$ tels que $\pi(x)$ ont la même valeur. Par surjection de π , on sait que tous les $y \in Y$ admettent une préimage, et on peut donc identifier les classes $[\pi(x)]$ aux valeurs $y = \pi(x)$.

Définition 2.4.2. La topologie quotient sur Y est la collection \mathcal{T}_π de tous les sous-ensembles O de Y tels que $\pi^{-1}(O) \in \mathcal{T}$.

Lemme 2.4.3. \mathcal{T}_π est une topologie sur Y . De plus, π est $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_\pi)$ -continue.

Démonstration. Pour vérifier T1, on sait que $\emptyset \in \mathcal{T}_\pi$ car $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$. De plus, $\pi^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T}$ par surjection de π , et donc $Y \in \mathcal{T}_\pi$.

Pour vérifier T2, si $O_1, \dots, O_k \in \mathcal{T}_\pi$, alors :

$$\pi^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^k O_i\right) = \bigcap_{i=1}^k \pi^{-1}(O_i) \in \mathcal{T},$$

par l'axiome d'intersection finie.

Pour vérifier T3, si $\{O_i \text{ t.q. } i \in I\} \subset \mathcal{T}_\pi$, alors :

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} O_i\right) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(O_i) \in \mathcal{T},$$

par l'axiome d'union quelconque. □

Remarque. Bien qu'il soit correct d'écrire $\pi^{-1}(O_1 \cap O_2) = \pi^{-1}(O_1) \cap \pi^{-1}(O_2)$, il est généralement faux d'écrire $\pi(O_1 \cap O_2) = \pi(O_1) \cap \pi(O_2)$.

Remarque. la topologie quotient est la topologie la plus fine (qui contient le plus d'ouverts) qui rende π continue.

Lemme 2.4.4. Soit $\pi : (X, \mathcal{T}) \rightarrow Y$, surjective, et $f : Y \rightarrow (Z, \mathcal{T}')$. Alors f est $(\mathcal{T}_\pi, \mathcal{T}')$ -continue si et seulement si $(f \circ \pi)$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ -continue.

Démonstration. Supposons f continue. $(f \circ \pi)$ est alors une composition d'applications continues, et est donc continue.

Supposons maintenant $(f \circ \pi)$ continue. Prenons $U \in \mathcal{T}'$. Alors $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_\pi \iff (\pi^{-1} \circ f^{-1})(U) \in \mathcal{T}$. Or $(\pi^{-1} \circ f^{-1}) = (f \circ \pi)^{-1}$. Donc, par hypothèse, $(f \circ \pi)^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. □

2.5 Sous-ensembles fermés et sous-ensembles denses

Définition 2.5.1. Un sous-ensemble F d'un espace topologique X est fermé lorsque $X \setminus F$ est ouvert.

Lemme 2.5.2. Soit X un espace topologique. Alors :

- (i) X, \emptyset sont fermés ;
- (ii) si F_1, \dots, F_k sont fermés, alors $\bigcup_{i=1}^k F_i$ est fermé ;
- (iii) si $\{F_i \text{ t.q. } i \in I\}$ est une collection de fermés, alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé.

Lemme 2.5.3. Une application $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ est continue si et seulement si :

$$\forall F \subset Y : F \text{ fermé} \Rightarrow f^{-1}(F) \text{ fermé} \subseteq X.$$

Remarque. Un sous-ensemble peut être à la fois ouvert et fermé, et peut n'être ni ouvert, ni fermé.

Définition 2.5.4. Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique (X, \mathcal{T}) . L'adhérence de A , notée $\text{adh } A$ est le sous-ensemble :

$$\text{adh } A := \{x \in X \text{ t.q. } \forall U \in \mathcal{T} : x \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Définition 2.5.5. Un point limite de A est un point dans $\text{adh } A \setminus A$.

Exemple 2.5.1. Soit l'intervalle (a, b) avec $a < b \in \mathbb{R}$. $\text{adh}((a, b)) = [a, b]$ si on se place dans \mathbb{R} , mais $\text{adh}((a, b)) = (a, b)$ si on se place dans (a, b) .

Lemme 2.5.6. Soient (M, d) est un espace métrique, $A \subseteq M$, et $x \in M$. Alors $x \in \text{adh } A$ si et seulement si :

$$\exists (x_n) \subset A \text{ t.q. } x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x.$$

Lemme 2.5.7. Soient $A, B \subseteq (X, \mathcal{T}_X)$, un espace topologique. Alors :

- (i) A est fermé si et seulement si $A = \text{adh } A$;
- (ii) $A \subseteq B \Rightarrow \text{adh } A \subseteq \text{adh } B$;
- (iii) $\text{adh}(\text{adh}(A)) = \text{adh}(A)$;
- (iv) $\text{adh } A$ est fermé;
- (v) soit F , l'intersection de tous les fermés qui contiennent A ; alors $F = \text{adh } A$.

Démonstration.

- (i) Supposons d'abord A fermé. On a alors $A \subseteq \text{adh } A$. Montrons que $\text{adh } A \subseteq A$. Prenons $x \notin A$. Puisque A est fermé, on sait que $U := X \setminus A$ est ouvert et $x \in U$. Mais $U \cap A = (X \setminus A) \cap A = A \cap \emptyset = \emptyset$. Donc $x \notin \text{adh } A$, ce qui montre que $X \setminus A \subseteq X \setminus \text{adh } A$, ou encore $\text{adh } A \subseteq A$. Supposons ensuite $\text{adh } A = A$. Montrons que $X \setminus A$ est ouvert. Soit $x \in X \setminus A = X \setminus \text{adh } A$. Alors, comme $x \notin \text{adh } A$, il existe U_x un ouvert tel que $x \in U_x$ et $U_x \cap A = \emptyset$. Donc :

$$U_x \subset X \setminus A = \bigcup_{x \in X \setminus A} U_x,$$

on a donc bien $X \setminus A$ ouvert.

- (ii) Trivial.
- (iii) Par (ii), on sait que $\text{adh } A \subseteq \text{adh}(\text{adh}(A))$. Montrons que $\text{adh}(\text{adh}(A)) \subseteq \text{adh } A$. Soit $x \in \text{adh}(\text{adh}(A))$, et soit U ouvert tel que $x \in U$. Alors $U \cap \text{adh}(A) \neq \emptyset$, par définition de l'adhérence. Soit $y \in U \cap \text{adh}(A)$. On peut donc dire $y \in \text{adh}(A)$ et U est un ouvert tel que $U \ni x$. Donc $U \cap A \neq \emptyset$, ou encore $x \in \text{adh}(A)$.
- (iv) Trivial par (i) et (iii).
- (v) Montrons que $F \subseteq \text{adh}(A)$: $\text{adh } A$ est fermé, donc $\text{adh}(A) \supseteq \bigcap_{C \text{ fermé } \supseteq A} C = F$. Montrons maintenant que $F \supseteq \text{adh } A$: si C est un fermé qui contient A , alors $C = \text{adh } C \supseteq \text{adh } A$. Donc :

$$\bigcap_{C \text{ fermé } \supseteq A} C \supseteq \text{adh } A.$$

□