MATHF-3001 — Théorie de la mesure
Résolution des TPs

R. Petit

Année académique 2018 - 2019

1 Séance 1

> **Exercice 1.1.** *Soient* $(X, \mathcal{F})$ *un espace mesurable et* $Y \subset X$. *Mq* $\mathcal{F}_Y := \mathcal{F} \cap Y$ *est une* σ*-algèbre sur* Y.

Résolution.

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$, donc $\emptyset \cap Y = \emptyset \in \mathcal{F}_Y$.
2. Soit $F \in \mathcal{F}$. $F \cap Y \in \mathcal{F}_Y$ et donc :
$$Y \setminus (F \cap Y) = Y \setminus F \cup \emptyset = Y \cap F^{\complement} \in \mathcal{F}_Y$$
car $F^{\complement} \in \mathcal{F}$.
3. Soit $(F_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. On sait que $\bigcup_{n \geqslant 0} F_n \in \mathcal{F}$. De plus $(F_n \cap Y)_{n \geqslant 0} \in {\mathcal{F}_Y}^{\mathbb{N}}$. Donc :
$$\bigcup_{n \geqslant 0} (F_n \cap Y) = \bigcup_{n \geqslant 0} F_n \cap Y \in \mathcal{F}_Y.$$

□

> **Exercice 1.2.**
> 1. *Soit* X *un ensemble fini. Décrire la* σ*-algèbre engendrée par la classe des parties finies de* X. *Que peut-on dire si* X *est fini ?*
> 2. *Dans* $X = [\![0, n]\!]$, *on considère* $\mathcal{A} = \{0\}$ *et* $\mathcal{B} = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$. *Décrire* $\sigma(\mathcal{A})$ *et* $\sigma(\mathcal{B})$.

Résolution.

1. Soit $\mathcal{F} = \sigma(\{Y \in \mathcal{P}(X) \text{ s.t. } Y \text{ est fini }\})$. Alors :
$$\mathcal{F} = \{Y \in \mathcal{P}(X) \text{ s.t. } Y \text{ est au plus dénombrable ou } Y^{\complement} \text{ est au plus dénombrable}\}$$
car la famille doit être stable par complémentaire (d'où la définition symétrique par complémentarité) et par union dénombrable (d'où le fait que Y ou $Y^{\complement}$ soit au plus dénombrable). Si X est fini, alors l'ensemble des parties finies de X est exactement $\mathcal{P}(X)$ qui est une σ-algèbre. Donc $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{P}(X)) = \mathcal{P}(X)$.
2. $\sigma(\mathcal{A})$ est la σ-algèbre engendrée par un unique élément donc : $\sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{0\}, \{0\}^{\complement}, [\![0, n]\!]\}$ où $\{0\}^{\complement} = [\![1, n]\!]$.
$\sigma(\mathcal{B}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, [\![3, n]\!], [\![1, n]\!], \{0\} \cup [\![3, n]\!], [\![0, n]\!]\}$.

□

Exercice 1.3. *Soient* X, Y *deux ensembles, et* $f : X \to Y$.

1. *Si* $\mathcal{F}$ *est une* σ*-algèbre sur* Y, *mq* $\mathcal{A} := f^{-1}(\mathcal{F})$ *est une* σ*-algèbre sur* X.
2. *Soit* $\mathcal{A}$ *une* σ*-algèbre sur* X.
   (a) *Mq* $\mathcal{F} := \{B \in \mathcal{P}(Y) \text{ s.t. } f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ *est une* σ*-algèbre sur* Y.
   (b) *Que peut-on dire de* $f(\mathcal{A})$ *?*

Résolution.

1.
   — $\emptyset \in \mathcal{F}$ donc $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}(\mathcal{F})$.
   — Soit $A \in \mathcal{A}$. Il existe $B \in \mathcal{F}$ s.t. $f^{-1}(B) = A$. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus A \in \mathcal{A}$.
   — Soit $(A_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Il existe $(B_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ s.t. $\forall n \geqslant 0 : A_n = f^{-1}(B_n)$. $\bigcup_{n \geqslant 0} A_n = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \geqslant 0} B_n\right) \in f^{-1}(\mathcal{F})$.
2.
   (a)
   — $\emptyset \in \mathcal{A}$ donc $\emptyset \in \mathcal{F}$.
   — Soient $B \in \mathcal{F}$, $A := f^{-1}(B)$. $f^{-1}(B^{\complement}) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(B)^{\complement} \in \mathcal{A}$.
   — Soit $(B_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. On pose $B := \bigcup_{n \geqslant 0} B_n$.

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-1}(B_n) = \bigcup_{n \geqslant 0} A_n \in \mathcal{A}$$

   où $\forall n \geqslant 0 : A_n = f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$. Donc $B \in \mathcal{F}$.

   (b) $f(\mathcal{A})$ n'est pas nécessairement une σ-algèbre : l'égalité $f(A^{\complement}) = f(A)^{\complement}$ n'est pas vraie en général. Par exemple pour $f : [\pm\varepsilon] \to [0, \varepsilon^2] : x \mapsto x^2$, on a :

$$[0, \varepsilon^2] = f([-\varepsilon, 0]) = f([\pm\varepsilon] \setminus [0, +\varepsilon]) \neq f([\pm\varepsilon]) \setminus f([0, \varepsilon]) = [0, \varepsilon^2] \setminus [0, \varepsilon^2] = \emptyset.$$

   Donc rien ne garantit que $f(\mathcal{A})$ est stable par passage au complémentaire.
   TODO: Donner un contre-exemple avec des σ-algèbres finies sur de petits ensembles.

$\square$

Exercice 1.4. *Soient* $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ *espaces mesurables. Soit* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$. *Si* $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$, *mq* $f : X \to Y$ *est mesurable ssi* $f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$.

Résolution. $\underline{\Rightarrow}$: en supposant f mesurable, si $B \in \mathcal{F}$, alors $B \in \mathcal{B}$ et donc $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

$\underline{\Leftarrow}$: on pose $\mathcal{B}' := \{B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Par le point précédent, $\mathcal{B}'$ est une σ-algèbre. Par hypothèse : $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}'$, et donc $\sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{B}') = \mathcal{B}'$. Or $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$. De plus, puisque $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, on a $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, ce qui implique $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, i.e. :

$$\forall B \in \mathcal{B} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

$\square$

Exercice 1.5.

1. *Mq toute intersection (non-vide) de classes de Dynkin est une classe de Dynkin.*
2. *Mq pour tout* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ *il existe une plus petite classe de Dynkin au sens de l'inclusion (notée* $\lambda(\mathcal{F})$*).*
3. *Mq si* $\mathcal{D}$ *est une classe de Dynkin stable par intersections finies, alors* $\mathcal{D}$ *est une* σ*-algèbre.*

4. *Mq si $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ est stable par intersections finies, alors $\lambda(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$.*

<u>*Résolution.*</u>

1. [Exactement même raisonement que pour les σ-algèbres] Soit $(\mathcal{D}_i)_{i\in I}$ une famille non-vide de classes de Dynkin et soit $\mathcal{D} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i$.
   — $\forall i \in I : \emptyset \in \mathcal{D}_i$ donc $\emptyset \in \mathcal{D}$.
   — Soit $D \in \mathcal{D}$. Puisque $\forall i \in I : D \in \mathcal{D}_i$ et que les $\mathcal{D}_i$ sont des classes de Dynkin, on a $\forall i \in I : D^{\complement} \in \mathcal{D}_i$ et donc $D^{\complement} \in \mathcal{D}$.
   — Soit $(D_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$. On sait que $\forall i \in I : \bigsqcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}_i$ et donc $\bigsqcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}$.
2. Comme pour les σ-algèbres, on peut définir :
$$\lambda(\mathcal{F}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{D} \text{ Dynkin} \\ \mathcal{F}\subset\mathcal{D}}} \mathcal{D}.$$
   Par le point ci-dessus, $\lambda(\mathcal{F})$ est une classe de Dynkin et toute classe de Dynkin $\mathcal{D}' \supset \mathcal{F}$ contient $\lambda(\mathcal{F})$ par définition.
3. Soit $\mathcal{D}$ une classe de Dynkin stable par intersections finies et soit $(D_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$. Montrons donc que $\bigcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}$. On pose $B_0 := D_0$ et pour $n > 0$, on pose $B_n := A_n \cap (\bigcap_{j=1}^{n-1} B_j^{\complement})$. Par récurrence, on observe que les B_n sont dans $\mathcal{D}$ par stabilité sous intersections finies. De plus les B_n sont disjoints deux à deux et leur union est égale à l'union des D_n. Donc $\bigcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}$.
4. Soit $D \in \lambda(\mathcal{F})$. On pose $\mathcal{D}_D := \{Q \in \lambda(\mathcal{F}) \text{ s.t. } Q \cap D \in \lambda(\mathcal{F})\} \subset \lambda(\mathcal{F})$. Montrons que $\mathcal{D}_D$ est une classe de Dynkin.
   — $\emptyset \in \mathcal{D}_D$ puisque $\lambda(\mathcal{F}) \ni \emptyset = \emptyset \cap D$.
   — Soit $Q \in \mathcal{D}_D$. $Q^{\complement} \cap D = (D^{\complement} \cup Q)^{\complement} = (D^{\complement} \sqcup \underbrace{(Q \cap D)}_{\in\lambda(\mathcal{F})})^{\complement} \in \lambda(\mathcal{F})$ par stabilité par passage au complément, stabilité par union disjointe.
   — Soit $(Q_n)_{n\geqslant 0} \in {\mathcal{D}_D}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. On a :
$$\bigsqcup_{n\geqslant 0} Q_n \cap D = \bigsqcup_{n\geqslant 0} \underbrace{(Q_n \cap D)}_{\in\lambda(\mathcal{F})} \in \lambda(\mathcal{F}).$$
   On remarque également que si $D \in \mathcal{F} : \mathcal{F} \subset \mathcal{D}_D \subset \lambda(\mathcal{F})$, ce qui implique $\lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_D$.
   Or par symétrie de l'intersection, pour $D, Q \in \lambda(\mathcal{F})$ on a : $Q \in \mathcal{D}_D \iff D \in \mathcal{D}_Q$. Dès lors on a une équivalence entre les deux assertions suivantes :
   — $\forall (D, Q) \in \mathcal{F} \times \lambda(\mathcal{F}) : Q \in \mathcal{D}_D$ (autrement dit $\forall D \in \mathcal{F} : \lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_D$) ;
   — $\forall (D, Q) \in \mathcal{F} \times \lambda(\mathcal{F}) : D \in \mathcal{D}_Q$ (autrement dit $\forall Q \in \lambda(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subset \mathcal{D}_Q$).
   On peut alors en déduire que $\forall Q \in \lambda(\mathcal{F}) : \lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_Q$. Dès lors, montrer que $\lambda(\mathcal{F})$ est stable par instersections finies revient à montrer que $\forall D, Q \in \lambda(\mathcal{F}) : D \cap Q \in \lambda(\mathcal{F})$, i.e. $D \in \mathcal{D}_Q = \lambda(\mathcal{F})$. On a donc bien la stabilité de $\lambda(\mathcal{F})$ sous intersections finies, on peut donc déduire que $\lambda(\mathcal{F})$ est une σ-algèbre qui contient $\mathcal{F}$, donc $\sigma(\mathcal{F}) \subset \lambda(\mathcal{F})$. Or toute σ-algèbre est une classe de Dynkin, donc $\lambda(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{F})$, ce qui permet de conclure.

$\square$