Espaces fonctionnels et séries de Fourier — Notes de cours de Pr. P. Godin

Robin Petit

Année académique 2017-2018

Contents

Chapter 1

Transformation de Fourier

1.1 Définitions

On considère $\mathbb{R}^n$ à n fixé en tant qu'espace de mesure $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \lambda)$ avec $\mathcal{M}$ la famille des ensembles Lebesgue-mesurables et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1. Pour $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on définit sa *transformée de Fourier* par :

$$\hat{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.1}$$

Cette fonction est bien définie car $x \mapsto e^{-i\langle x,\xi\rangle}$ est continue (et donc L^∞), et u est intégrable, donc $x \mapsto e^{-i\langle x,\xi\rangle}u(x)$ est intégrable par Hölder.

Proposition 1.2. *Pour $u \in L^1$, $\hat{u}$ est continue.*

Proof. Soient $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ et $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{n\mathbb{N}}$ t.q. $h_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

$$\hat{f}(\xi_0 + h_k) = \int e^{-i\langle x,\xi_0\rangle} e^{-i\langle x,h_k\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Puisque $\left|e^{-i\langle x,\xi_0\rangle} e^{-i\langle x,h_k\rangle} f(x)\right| = \left|f(x)\right|$ et $x \mapsto e^{-i\langle x,\xi_0\rangle} e^{-i\langle x,h_k\rangle} f(x)$ converge partout (en particulier presque partout), par le théorème de la convergence dominée :

$$\hat{f}(\xi_0 + h_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int e^{-i\langle x,\xi_0\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x = \hat{f}(\xi_0).$$

□

Proposition 1.3. *Soit $u \in L^1$. Si $\forall j \in [[1,n]] : x_j f \in L^1$, alors : $\hat{u} \in C^1$ et :*

$$\forall j \in [[1,n]] : \left.\frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi_j}\right|_\xi = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}(-ix_j)u(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

Proof. Soit $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ t.q. $h_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, et prenons $\{e_j\}_{j=1}^n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$$\frac{\hat{u}(\xi + h_k e_j) - \hat{u}(\xi)}{h_k} = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} \underbrace{\frac{e^{-ih_k x_j} - 1}{h_k}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} -ix_j} u(x)\,\mathrm{d}x.$$

En module :

$$\left|e^{-i\langle x,\xi\rangle}\frac{e^{-ih_kx_j}-1}{h_k}f(x)\right| = \left|e^{-i\langle x,\xi\rangle}\right|\left|\frac{e^{-ih_kx_j}-1}{h_k}\right|\left|f(x)\right| \leq C\left|x_j\right|\left|f(x)\right|,$$

qui est intégrable par hypothèse.

En effet, si $x_j = 0$, alors tout est nul et l'inégalité devient une égalité ; et si $x_j \neq 0$, alors $\frac{\left|e^{-ih_kx_j}-1\right|}{\left|x_jh_k\right|}$ est borné.

Dès lors, par le théorème de convergence dominée, la limite passe sous l'intégrale et on a (1.2). □

Corollaire 1.4. *Pour $m \in \mathbb{N}^*$, si $(1+|x|)^m u \in L^1$, alors $u \in C^m$ et on peut dériver m fois sous le signe:*

$$\partial^\alpha \hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}(-i)^{|\alpha|}x^\alpha u(x)\,\mathrm{d}x$$

Proof. Exercice (récurrence sur m). □

Définition 1.5. On définit l'ensemble de Schwartz :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &:= \left\{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n : x^\alpha\partial^\beta u \text{ est borné dans } \mathbb{R}^n\right\} \\ &= \left\{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n : x^\alpha\partial^\beta u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\right\}.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Dans l'idée, $\mathcal{S}$ est l'ensemble dont toutes les dérivées décroissent plus vite vers 0 que tout polynôme.

Proposition 1.6. *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Proof. Immédiat par le fait que $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ sont des $\mathbb{R}$-evs. □

Proposition 1.7. *Si $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact, alors :*

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \bigcap_{1\leq p\leq +\infty} L^p(\mathbb{R}^n).$$

Proof.

(*i*) Pour $u \in \mathcal{S}$ et $+\infty > p \geq 1$:

$$\int |u|^p\,\mathrm{d}x = \int \Big(\underbrace{|u|\,(1+|x|)^N}_{\text{borné pour tout } N}\Big)^p (1+|x|)^{-Np}\,\mathrm{d}x \leq \int (C_N)^p \underbrace{(1+|x|)^{-Np}}_{\text{intégrable pour } Np>n}\,\mathrm{d}x.$$

Dès lors, pour N suffisamment grand ($Np > n$), on a $\int |u|\,\mathrm{d}x \leq \mathrm{c}^{\mathrm{ste}}$

Le cas $p = +\infty$ vient uniquement du fait que pour $u \in \mathcal{S}$, pour $\alpha = \beta = (0,\dots,0) \in \mathbb{N}^n$:

$$u = x^\alpha\partial^\beta u \in L^\infty.$$

(*ii*) Soit $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$: $x^\alpha\partial^\beta u \neq 0 \subseteq \operatorname{supp} u$ compact. Par Heine-Cantor, u est uniformément continue sur $\operatorname{supp} u$.

□

Proposition 1.8. *Pour $u \in \mathcal{S}$ et $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$, alors : $x^\alpha\partial^\beta u \in \mathcal{S}$.*

Proof. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{N}^n$. Par Leibniz :

$$\partial^\mu(fg) = \sum_{\sigma \leq \mu} \binom{\mu}{\sigma} \partial^\sigma f \partial^{\mu-\sigma} g.$$

Donc :

$$x^\lambda \partial^\mu(x^\alpha \partial^\beta u) = \sum_{\sigma \leq \mu} \binom{\mu}{\sigma} x^\lambda \partial^\sigma(x^\alpha) \partial^{\mu-\sigma} u,$$

où $x^\lambda \partial^\sigma(x^\alpha) \leq \mathrm{c}^{\mathrm{ste}} x^\gamma$. On en déduit que $x^\lambda \partial^\mu(x^\alpha \partial^\beta u)$ est une somme finie de termes bornés et est donc bornée. $\square$

À défaut de définir une topologie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on définit uniquement une notion de convergence.

Définition 1.9. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$, $u \in \mathcal{S}$, on dit que u_k converge vers u lorsque $k \to +\infty$ (noté $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}} u$) lorsque :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta (u - u_k) \right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0. \tag{1.4}$$

Théorème 1.10. *Soit $u \in \mathcal{S}$. Alors :*

1. *$\hat{u} \in \mathcal{S}$. De plus si $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}} u$, alors $\hat{u_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}} \hat{u}$.*
2. *$\widehat{D_j u}(\xi) = \xi_j \hat{u}(\xi)$ (de plus $\widehat{x_j u} = D_j \hat{u}$).*

Proof. Pour le premier point, on calcule :

$$D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \int D_\xi^\alpha (e^{-i\langle x,\xi\rangle}) u(x)\,\mathrm{d}x = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} (-x)^\alpha u(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donc :

$$\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \int \xi^\beta e^{-i\langle x,\xi\rangle} (-x)^\alpha u(x)\,\mathrm{d}x = \int (-D_x)^\beta (e^{-i\langle x,\xi\rangle}) (-x)^\alpha u(x)\,\mathrm{d}x = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} D_x^\beta \left((-x)^\alpha u(x)\right)\mathrm{d}x.$$

Pour montrer cette dernière égalité, intégrons par partie. D'abord observons pour $\phi \in \mathcal{S}$ et $j \in [[1, n]]$:

$$\int \partial_j \phi\,\mathrm{d}x = \int \dots \int \left(\int \partial_j \phi\,\mathrm{d}x_j \right) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{j-1}\,\mathrm{d}x_{j+1} \dots \mathrm{d}x_n.$$

Or :

$$\int \partial_j \phi\,\mathrm{d}x_j = \lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} \partial_j \phi(x)\,\mathrm{d}x_j = \lim_{N\to+\infty} \left(\underbrace{\phi(x_1, \dots, x_{j-1}, N, x_{j+1}, \dots, x_n)}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0} - \underbrace{\phi(x_1, \dots, x_{j-1}, N, x_{j+1}, \dots, x_n)}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0} \right) = 0,$$

puisque $\phi \in \mathcal{S}$.

On en déduit donc que $\int \partial_j \phi\,\mathrm{d}x = 0$.

Dès lors, puisque $e^{-i\langle x,\xi\rangle}(-x)^\alpha u(x) \in \mathcal{S}$ et par récurrence :

$$\int (-D_x)^\beta (e^{-i\langle x,\xi\rangle}) (-x)^\alpha u(x)\,\mathrm{d}x = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} D_x^\beta \left((-x)^\alpha u(x)\right)\mathrm{d}x.$$

Montrons alors que $\forall N \in \mathbb{N} : \exists C_N \geq 0$ t.q. $\left|D_x^\beta((-x)^\alpha u(x))\right| \leq C_N(1+|x|)^{-N}$. Par Leibniz :

$$(1+|x|)^N \partial^\beta(x^\alpha u(x)) = (1+|x|)^N \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial^\gamma x^\alpha \partial^{\beta-\gamma} u(x)$$

est borné car $u \in \mathcal{S}$. Dès lors :

$$\left|\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x)\right| \leq C_N \int (1+|x|)^{-N}\,\mathrm{d}x.$$

Pour N suffisamment grand ($N > n$), on a $\left|\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x)\right| \leq \mathrm{c}^{\mathrm{ste}}$.

Dès lors, on trouve :

$$\left|\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x)\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-N} \left|D_x^\beta((-x)^\alpha(u-u_k))\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit donc $\hat{u_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}} \hat{u}$.

Pour le second point, la seconde formule découle directement du premier pour $\alpha = e_j$:

$$D_j\hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}(-x_j)u(x)\,\mathrm{d}x = \widehat{x_j u}(\xi).$$

La première égalité se démontre par :

$$\widehat{D_j u}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} D_j u(x)\,\mathrm{d}x = -\int D_{x,j}\left(e^{-i\langle x,\xi\rangle}\right)u(x)\,\mathrm{d}x = \xi_j \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}u(x)\,\mathrm{d}x = \xi_j\hat{u}(\xi).$$

□

1.2 Formule d'inversion

Théorème 1.11. *Soit $u \in \mathcal{S}$. Alors :*

$$u(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{1.5}$$

La fonction $(y,\xi) \mapsto e^{i\langle x,\xi\rangle}e^{-i\langle y,\xi\rangle}u(y)$ n'est pas intégrable pour (y,ξ). On ne va donc pas pouvoir appliquer Fubini.

Proof. Pour $\chi \in \mathcal{S}$, $(y,\xi) \mapsto e^{-i\langle y,\xi\rangle}e^{i\langle x,\xi\rangle}\chi(\xi)u(y)$ est intégrable. Donc par Fubini :

$$\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\chi(\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int e^{i\langle x,\xi\rangle}\chi(\xi)\int e^{-i\langle y,\xi\rangle}u(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi = \int u(y)\int e^{-i\langle y-x,\xi\rangle}\chi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}y = \int u(y)\hat{\chi}(y-x)\,\mathrm{d}y.$$

Pour $\psi \in \mathcal{S}$, $\delta > 0$ tels que $\chi(\xi) = \psi(\delta\xi)$:

$$\hat{\chi}(\xi) = \int e^{-i\langle y,\xi\rangle}\psi(\delta\xi)\,\mathrm{d}\xi = \delta^{-n}\hat{\psi}(\xi/\delta).$$

Alors :

$$\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\psi(\delta\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int u(x+y)\delta^{-n}\psi(y/\delta)\,\mathrm{d}y = \int u(x+\delta y)\hat{\psi}(y)\,\mathrm{d}y.$$

Par le théorème de convergence dominée :

$$\int u(x+\delta y)\hat{\psi}(y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow[\delta\to+\infty]{} u(x)\int \hat{\psi}(y)\,\mathrm{d}y,$$

or :

$$\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\psi(\delta\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \xrightarrow[\delta\to+\infty]{} \psi(0)\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Par unicité de la limite, si $\int \hat{\psi}\,\mathrm{d}y \neq 0$:

$$u(x) = \frac{\psi(0)}{\int \hat{\psi}(y)\,\mathrm{d}y}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Dans le cas $n=1$, on prend $\psi_1 : x \mapsto e^{-x^2/2}$. En intégrant $z \mapsto e^{-z^2/2}$ sur un chemin rectangulaire $[a,b,c,d] \subset \mathbb{C}$, on trouve :

$$\int_a^b e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x + \int_b^c e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z + \int_c^d e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z + \int_d^a e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z = 0$$

par Cauchy. Pour $(a,b)\to(-\infty,+\infty)$, on trouve que $\int_b^c e^{-z^2/2}$ et $\int_d^a e^{-z^2/2}$ tendent vers 0. Donc à la limite :

$$\int_a^b e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \int_{\Im z=t} e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z = \int e^{(x^2-t^2)/2}e^{-itx}\,\mathrm{d}x.$$

Donc $\hat{\psi}(t) = \psi(t)\int\psi\,\mathrm{d}x$. On en déduit :

$$\int \hat{\psi}(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int \psi(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int e^{-x^2/2}\right)^2 = 2\pi.$$

Dès lors $\psi(0)=1$ et $\int\hat{\psi}\,\mathrm{d}x = 2\pi$, qui donne bien la formule.

Dans le cas général $n>1$, on prend $\psi(x) = e^{-|x|^2/2} = \prod_{j=1}^n \psi_1(x_j)$. Donc :

$$\hat{\psi}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\psi(x)\,\mathrm{d}x = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2}\,\mathrm{d}x = \int \prod_{j=1}^n e^{-ix_j\xi_j}\prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2}\,\mathrm{d}x = \int\prod_{j=1}^n\left(e^{-ix_j\xi_j}e^{-x_k^2/2}\right)\mathrm{d}x.$$

Par Fubini :

$$\hat{\psi}(\xi) = \prod_{j=1}^n\int e^{-ix_j\xi_j}e^{-x_j^2/2}\,\mathrm{d}x = \prod_{j=1}^n\hat{\psi}_1(\xi_j).$$

On trouve alors :

$$\int\hat{\psi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int\prod_{j=1}^n\hat{\psi}_j(\xi_j)\,\mathrm{d}\xi = \prod_{j=1}^n\int\hat{\psi}_1(\xi_j)\,\mathrm{d}\xi_j = (2\pi)^{-n},$$

où l'avant dernière égalité s'obtient en appliquant Fubini.

Puisque $\hat{\psi}(0)=1$, on a bien (1.5). $\square$

On définit une application *transformée de Fourier* $\mathcal{F} : \mathcal{S}\to\mathcal{S} : u \mapsto \mathcal{F}u := \hat{u}$.

Proposition 1.12. *$\mathcal{F}$ est une bijection linéaire.*

Proof. Par la formule d'inversion, $\mathcal{F}$ est injective : si $\mathcal{F}u = 0$, alors $u = 0$.

De plus, $\mathcal{F}$ est surjective. Pour $f \in \mathcal{S}$, montrons qu'il existe $u \in \mathcal{S}$ t.q. $\mathcal{F}u = f$. Prenons $u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$. Alors :

$$\mathcal{F}f(x) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^n u(-x).$$

De plus :

$$\hat{\hat{u}}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} \hat{u}(x)\,\mathrm{d}x = (2\pi)^n (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} \hat{u}(x)\,\mathrm{d}x = (2\pi)^n u(-\xi),$$

donc $\hat{f} = \hat{\hat{u}}$ pour tout x, et puisque $\mathcal{F}$ est injective, $f = \hat{u}$. Donc $\mathcal{F}$ est surjective, et donc surjective.

La linéarité est triviale :

$$\mathcal{F}(f + \lambda g)(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} (f + \lambda g)(x)\,\mathrm{d}x = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x + \lambda \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} g(x)\,\mathrm{d}x = \left(\hat{f} + \lambda \hat{g}\right)(\xi).$$

□

En posant $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S} \to \mathcal{S} : u \mapsto \tilde{\mathcal{F}}u$ où $\tilde{\mathcal{F}}u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi$. Par un raisonnement similaire à la Proposition précédente, on trouve $\tilde{\mathcal{F}}$ est une bijection linéaire. De plus $\mathcal{F}^{-1} = \tilde{\mathcal{F}}$.

De plus, puisque $\mathcal{F}$ transforme des suites convergentes en suites convergentes sur $\mathcal{S}$, $\tilde{\mathcal{F}}$ fait de même.

Cela veut dire que $\mathcal{F}$ est une homéomorphisme linéaire de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ pour la topologie non définie ici.

Proposition 1.13. *Pour $u, v \in \mathcal{S}$:*

1. $\int u\hat{v} = \int \hat{u}v$;
2. $\int u\overline{v} = (2\pi)^{-n} \int \hat{u}\hat{\overline{v}}$. *Cette égalité est appelée identité de Parseval.*

Proof. Le premier point se montre par la formule de la preuve du Théorème 1.11 pour $u, \chi \in \mathcal{S}$:

$$\int e^{i\langle x,\xi\rangle} \chi(\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int u(x+y)\hat{\chi}(y)\,\mathrm{d}y$$

en $x = 0$.

Le second point, prenons $u, w \in \mathcal{S}$ et posons $v \coloneqq (2\pi)^{-n}\overline{\hat{w}}$. Par le premier point :

$$\int \hat{u}v = \int u\hat{v} = \int u(2\pi)^{-n}\hat{\overline{\hat{w}}}.$$

On peut voir que :

$$(2\pi)^{-n}\hat{\overline{\hat{w}}}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} \overline{\hat{w}}(x)\,\mathrm{d}x = (2\pi)^{-n} \overline{\int e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{w}(x)\,\mathrm{d}x} = \overline{w(\xi)}.$$

Dès lors :

$$\int \hat{u}(2\pi)^{-n}\overline{\hat{w}} = \int u\overline{w}.$$

□

Corollaire 1.14 (Formule de Plancherel)**.** *Pour $u \in \mathcal{S}$, on a :*

$$\int |u|^2\,\mathrm{d}x = (2\pi)^{-n} \int |\hat{u}|^2\,\mathrm{d}\xi \tag{1.6}$$

1.3 Discussion sur la définition de la transformée

On peut définir la transformée de Fourier de plusieurs manières, paramétrisé par $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}_{a,b}u(\xi) = a \int e^{-ib\langle x,\xi\rangle} u(x)\,\mathrm{d}x.$$

La théorie reste la même à homothétie près puisque :

$$\mathcal{F}u(\xi) = \frac{1}{a}\mathcal{F}_{a,b}u(\xi/b).$$

$$(2\pi)^{-n}\int \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{(2\pi)^{-n}b^n}{a^n}\int \mathcal{F}_{a,b}u(\eta)\overline{\mathcal{F}_{a,b}v(\eta)}\,\mathrm{d}\eta.$$

Donc on peut choisir $a = 1$ et $b = 2\pi$ ou encore $a = (2\pi)^{n/2}$ et $b = 1$ afin de simplifier la formule de Parseval qui devient :

$$\int u\overline{v} = \int \mathcal{F}u\overline{\mathcal{F}v}.$$

Cependant le choix $a = b = 1$ permet de ne pas avoir de terme b^k lors des dérivations sous le signe intégral.

1.4 Extension de la transformée à $L^1 \cap L^2$

Proposition 1.15. *Il existe une unique application linéaire continue $\mathbb{F} : L^2 \to L^2$ tel que $\mathbb{F}\Big|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}$ et :*

$$\int u\overline{v} = (2\pi)^{-n}\int \mathbb{F}u\overline{\mathbb{F}v}\,\mathrm{d}\xi,$$

i.e. $\mathbb{F}$ préserve l'identité de Parseval.

Proof. Admettons que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Puisque $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Par cette densité, pour $u \in \mathcal{S}$, il existe $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} u$, et donc (u_k) est de Cauchy pour cette norme. $(\hat{u_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est également de Cauchy car :

$$\|\hat{u_k} - \hat{u_m}\| = (2\pi)^{n/2}\|u_k - u_m\|.$$

Par cette complétude, il existe $z \in \mathcal{S}$ t.q. $\hat{u_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} z$. On pose alors $\mathbb{F}u \coloneqq z$. Montrons que z ne dépend pas de la suite $(\hat{u_k})$ choisie pour montrer que $\mathbb{F}$ est bien définie.

Soit $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ t.q. $v_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} z$. Alors $v_k - u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} 0$. Par Plancherel, $\hat{v_k} - \hat{u_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} 0$. Dès lors $\hat{v_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} z$.

Montrons alors que $\mathbb{F}$ est linéaire.

Soient $u, v \in L^2$. Soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}, (v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} u$ et $v_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} v$. Alors $u_k + v_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} u + v$. Par linéarité de $\mathcal{F}$, $\hat{u_k} + \hat{v_k} = \widehat{u_k + v_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} \mathbb{F}(u+v)$.

Donc $\hat{u_k}+\hat{v_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} \mathbb{F}u+\mathbb{F}v$ et $\hat{u_k}+\hat{v_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} \mathbb{F}(u+v)$. On en déduit $\mathbb{F}u+\mathbb{F}v=\mathbb{F}(u+v)$. Il est également trivial que pour $\lambda\in\mathbb{R} : \mathbb{F}(\lambda u)=\lambda\mathbb{F}u$.

Pour montrer que $\mathbb{F}\Big|_{\mathcal{S}}=\mathcal{F}$, prenons $u\in\mathcal{S}$, et la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ constante $u_k=u$. Par définition de $\mathbb{F}$, on a $\mathbb{F}u=\hat{u}$ car $\forall k\in[[1,n]] : \hat{u_k}=\hat{u}$, donc $\hat{u_k}\xrightarrow[k\to+\infty]{}\hat{u}$.

Montrons finalement que $\mathbb{F}$ vérifie Parseval.

Premier cas : $u\in L^2$ et $v\in\mathcal{S}$. Il existe $\mathcal{S}^{\mathbb{N}}\ni(u_k)_{k\in\mathbb{N}}\xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} u$. Donc :

$$\int u\overline{v}=\int u_k\overline{v}+\int(u-u_k)\overline{v}.$$

Puisque :

$$\left|\int(u-u_k)\overline{v}\right|\le\underbrace{\|u-u_k\|_{L^2}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}0}\|v\|\xrightarrow[k\to+\infty]{}0,$$

on sait :

$$\int u_k\overline{v}\xrightarrow[k\to+\infty]{}\int u\overline{v}.$$

Or $u_k,v\in\mathcal{S}$. Donc pour $k\to+\infty$, par Cauchy-Schwartz et par Parseval pour $\mathcal{F}$:

$$\int u\overline{v}=\int u_k\overline{v}\xrightarrow[k\to+\infty]{L^2}(2\pi)^{-n}\int\mathbb{F}u\overline{\hat{v}}.$$

Dans le cas général $u,v\in L^2$, par le premier point pour $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ t.q. $v_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}v$:

$$\int u\overline{v_k}=(2\pi)^{-n}\int\mathbb{F}u\overline{\hat{v_k}}.$$

Or $v_k\xrightarrow[k\to+\infty]{L^2}\mathbb{F}v$. Par Cauchy-Schwartz, on a :

1. $\int u\overline{v_k}\xrightarrow[k\to+\infty]{L^2}\int u\overline{v}$;
2. et $\int\mathbb{F}u\overline{\hat{v_k}}\xrightarrow[k\to+\infty]{L^2}\int\mathbb{F}u\overline{\mathbb{F}v}$.

L'identité de Parseval est donc bien vérifiée pour $\mathbb{F}$. Il reste à vérifier que $\mathbb{F}$ est continue et qu'elle est unique.

La continuité découle de Parseval :

$$\|u\|_{L^2}=(2\pi)^{-n/2}\|\mathbb{F}u\|_{L^2},$$

donc pour $\varepsilon>0$, pour $\delta=(2\pi)^{-n/2}\varepsilon$, on a que si $\|u-v\|_{L^2}<\delta$, alors $\|\mathbb{F}u-\mathbb{F}v\|_{L^2}<\varepsilon$.

Si il existe $\mathbb{F}_1 : L^2\to L^2$ continue et linéaire telle que $\mathbb{F}_1\Big|_{\mathcal{S}}=\mathcal{F}$, alors par densité, pour $u\in L^2$, il existe $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}u$, et donc, par continuité :

$$\underbrace{\mathbb{F}(u_k)}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}\mathbb{F}(u)}=\underbrace{\mathbb{F}_1(u_k)}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}\mathbb{F}_1(u)}.$$

Donc puisque deux application continues qui coïncident sur une sous-ensemble dense coïncident partout, on a bien que $\mathbb{F}=\mathbb{F}_1$. ☐

De la même manière, $\tilde{\mathcal{F}}$ se prolonge sur L^2 en $\tilde{\mathbb{F}}$
Proposition 1.16. $\mathbb{F} \circ \tilde{\mathbb{F}} = \mathrm{Id}_{L^2} = \tilde{\mathbb{F}} \circ \mathbb{F}$.

Proof. Ceci vient directement de la même propriété sur $\mathcal{F}$ et $\tilde{\mathbb{F}}$. Soit $u \in L^2$ et soit $\mathcal{S}^{\mathbb{N}} \ni (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} u$. On sait :

$$\mathcal{S} \ni \tilde{\mathcal{F}}(u_k) = \tilde{\mathbb{F}}(u_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} \tilde{\mathbb{F}}(u)$$

par continuité de $\tilde{\mathbb{F}}$. Par continuité de $\mathbb{F}$, on a :

$$\mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}}(u_k) = \mathbb{F} \circ \tilde{\mathbb{F}}(u_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} \mathbb{F} \circ \tilde{\mathbb{F}}(u).$$

Or $\mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}}(u_k) = u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} u$. Par unicité de la limite, on a $\mathbb{F} \circ \tilde{\mathbb{F}}(u)$. L'autre égalité se démontre de la même manière. □

À ce stade, il est légitime de se demander si les définitions que l'on a sur L^1 (la formule intégrale définie depuis $\mathcal{S}$) et sur L^2 (la définition de $\mathbb{F}$) sont compatibles, i.e. si pour $u \in L^1 \cap L^2$ on a bien $\hat{u} = \mathbb{F}u$. Cette égalité tient bien (démonstration à venir).

1.5 Exemple d'application de la théorie de Fourier

Pour $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2$ le Laplacien sur $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{S}$, soit la PDE suivante :

$$(1 + \sum_{j=1}^{n} D_j^2)u = u - \Delta u = f, \tag{1.7}$$

ou plus généralement, pour des $a_\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\underbrace{\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha}_{P(D) \text{ polynôme}} \ u = f, \tag{1.8}$$

dans le cas du Laplacien, ce polynôme est $P(\xi) = 1 + |\xi|^2$.

Sous l'hypothèse $\inf_{\xi\in\mathbb{R}^n} |P(\xi)| \gneqq 0$, trouvons u t.q. $P(D)u = f$.

Formellement :

$$\begin{aligned}
\widehat{P(D)u}(\xi) &= \hat{f}(\xi) \\
P(\xi)\hat{u}(\xi) &= \hat{f}(\xi) \\
\hat{u}(\xi) &= \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} \\
u(x) &= (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} \, \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Plus rigoureusement, puisque $f \in \mathcal{S}$, on sait $\hat{f} \in \mathcal{S}$. De plus, P est borné par dessous. Donc $\left|\hat{f}/P\right| \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N}$, et du coup la fonction sous l'intégrale ($\xi \mapsto e^{i\langle x,\xi\rangle} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)}$) est L^1, et cette intégrale est bien définie pour $N > n$.

De plus, puisque la dérivation selon x sur u fait juste descendre du ξ de l'exponentielle, par récurrence avec le théorème de convergence dominée et par la borne supérieure ci-dessus, on trouve que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On peut alors vérifier que la fonction u ainsi trouvée est bien une solution de (1.8) :

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha u = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \underbrace{\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \xi^\alpha}_{=P(\xi)} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} \,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{f}(\xi) \,\mathrm{d}\xi = f(x).$$

Chapter 2

Espaces de Hilbert

Définition 2.1. Soit H un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Un produit scalaire (forme hermitienne définie positive) sur H est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ t.q. :

(i) à $y \in \mathbb{C}$ fixé : $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est une application linéaire de H dans $\mathbb{C}$;

(ii) pour $x, y \in \mathbb{C}$: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;

(iii) pour $x \in \mathbb{C}$: $\langle x, x \rangle \geq 0$ où $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Sur un produit scalaire, on peut définir une norme $\|x\| \coloneqq \langle x, x \rangle^{1/2}$.
Remarque. Une forme hermitienne définie positive est donc anti-linéaire pour le 2e paramètre : $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$.
Proposition 2.2. $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}^+$ *est une norme.*
Proposition 2.3. $\|\cdot\|$ *vérifie Cauchy-Schwartz, i.e. :*

$$\forall x, y \in H : \left|\langle x, y \rangle\right| \leq \|x\| \|y\| .$$

Proof. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ t.q. $|\alpha| = 1$ et $\alpha \langle y, x \rangle \in \mathbb{R}^+$ (i.e. $\alpha \langle y, x \rangle = \left|\langle x, y \rangle\right|$). Soit $r \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x - r\alpha y, x - r\alpha y \rangle = \langle x, x \rangle - r\alpha \langle y, x \rangle - r\overline{\alpha} \langle x, y \rangle + r^2 \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - r \underbrace{\alpha \langle y, x \rangle}_{=\left|\langle y, x \rangle\right|} - r \underbrace{\overline{\alpha} \langle x, y \rangle}_{=\left|\langle y, x \rangle\right|} + r^2 \underbrace{\alpha\overline{\alpha}}_{=|\alpha|=1} \langle y, y \rangle = A - 2Br + Cr^2, \end{aligned}$$

pour $A = \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$, $B = \alpha \langle x, y \rangle = \left|\langle x, y \rangle\right| \in \mathbb{R}^+$, $C = \langle y, y \rangle \in \mathbb{R}^+$.

Si $C = 0$, alors $B = 0$, et donc $\langle y, x \rangle = 0$ et Cauchy-Schwartz est vérifié.

Si $C \gneqq 0$, alors pour $r = B/C$: $0 \leq A - 2Br + Cr^2 = \frac{AC - B^2}{C}$, donc $B^2 \leq AC$, donc Cauchy-Schwartz est vérifié. □

Proposition 2.4. $\|\cdot\|$ *vérifie l'inégalité triangulaire, i.e. :*

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Proof. $\|x + y\|^2 = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$. □

On a donc $(H, \|\cdot\|)$ un e.v. normé, depuis lequel on peut alors définir une distance : $d(x, y) \coloneqq \|x - y\|$.

Définition 2.5. Si H est complet pour d, on dit que H est un espace de Hilbert.

Quelques exemples d'espaces de Hilbert :

(0) $\mathbb{C}^n$ pour $\langle x, y\rangle \coloneqq \sum_{j=1}^n x_j\overline{y_j}$;

(1) Pour $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure, $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle \coloneqq \int f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$;

(2) Pour $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ comme espace de mesure, on a l'équivalent dénombrable de l'exemple (0) :

$$\langle f, g\rangle_{\ell^2} \coloneqq \int f\overline{g}\,\mathrm{d}\# = \sum_{k\geq 1} f_k\overline{g_k}.$$

On note $\ell^2(\mathbb{N}) \coloneqq L^2(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$.

Un dernière exemple bien moins trivial : les espaces de Sobolev.
Définition 2.6. Soit $s \geq 0$ un paramètre, on définit l'espace de Sobolev d'ordre s sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$H^s(\mathbb{R}^n) \coloneqq \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } (2\pi)^{-n}\int \left|\mathbb{F}u(\xi)\right|^2 (1+|\xi|)^s\,\mathrm{d}\xi \lneqq +\infty\right\}. \tag{2.1}$$

On y définit le produit scalaire suivante pour $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle u, v\rangle_s \coloneqq (2\pi)^{-n}\int \mathbb{F}u\overline{\mathbb{F}v}(1+|\xi|)^s\,\mathrm{d}\xi. \tag{2.2}$$

Remarque. Remarquons que $u \in H^s \iff \xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{s/2}\mathbb{F}u(\xi)$ est dans L^2.
Proposition 2.7. *$(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle_s$ est un produit scalaire.*

Proof. À v fixé, $u \mapsto \langle u, v\rangle_s$ est linéaire par linéarité de $\mathbb{F}$ et par linéarité de l'intégrale.

Soient $u, v \in H^s$.

$$\langle u, v\rangle_s = (2\pi)^{-n}\int \mathbb{F}u\overline{\mathbb{F}v}\underbrace{(1+|\xi|)^s}_{\in\mathbb{R}^+}\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{-n}\overline{\int \mathbb{F}v\overline{\mathbb{F}u}(1+|\xi|)^s\,\mathrm{d}\xi} = \overline{\langle v, u\rangle}_s.$$

Finalement, pour $u \in H^s$:

$$\langle u, u\rangle_s = (2\pi)^{-n}\int \underbrace{|\mathbb{F}u|^2}_{\geq 0}\underbrace{(1+|\xi|)^s}_{\geq 0}\mathrm{d}\xi \geq 0,$$

et de plus, il est évident que $\langle u, u\rangle_s = 0 \iff u = 0$ puisque $\hat{u} = 0 \iff u = 0$. ☐

Par linéarité de Fourier, $H^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel, et de plus il est normé par le produit scalaire défini ci-dessus. Montrons alors que c'est un espace ce Hilbert.

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in H^s$ une suite de Cauchy. $(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathbb{F}u_k$ est de Cauchy dans L^2, qui est complet. Donc il en existe une limite $V \in L^2$ t.q. $(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathbb{F}u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} V$. Il existe $u \in L^2$ t.q. $(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathbb{F}u = V$ car $(1+|\xi|^2)^{-s/2}V \in L^2$, et $\mathbb{F}$ est une bijection sur L^2. De plus, $u \in H^s$ car $V = (1+|\xi|^2)^{s/2}\mathbb{F}u \in L^2$. Puisque $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{H^s} u$, on a que H^s est complet.

Pour un contre-exemple, on a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle \coloneqq \int f\overline{g}\,\mathrm{d}x$ n'est pas un Hilbert. En effet, pour $f \in L^2 \setminus C_0^\infty$, par densité de C_0^∞ dans L^2, $\exists (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in C_0^{\infty\,\mathbb{N}}$ t.q. $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} f$. De plus, (f_k)

est de Cauchy dans C_0^∞. Par l'absurde, si $\exists g \in C_0^\infty$ t.q. $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} g$, par unicité de la limite, $g = f$, or $f \notin C_0^\infty$.

À partir d'ici, H désigne un espace de Hilbert quelconque.

Définition 2.8. Soit $y \in H$. On définit :

$$\begin{cases} f_1 : x \mapsto \langle x, y\rangle \\ f_2 : x \mapsto \langle y, x\rangle \\ f_3 : x \mapsto \|x\| \end{cases}$$

Proposition 2.9. *f_i est continue pour $i = 1, 2, 3$.*

Proof.

1. $\left|f_1(x_1) - f_1(x_2)\right| = \left|\langle x_1 - x_2, y\rangle\right| \leq \|x_1 - x_2\|\|y\| \xrightarrow[x_1\to x_2]{} 0$. ($f_1$ est même uniformément continue et Lipschitzienne).
2. Idem pour f_2, à permutation près.
3. La continuité vient directement de $\big|\|x\| - \|z\|\big| \leq \|x - z\|$.

□

Proposition 2.10. *Pour $F \leq H$, $\overline{F} \leq H$.*

Proof. Pour $x, y \in \overline{F}$, il existe $(x_k), (y_k) \in F^{\mathbb{N}}$ t.q. $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$ et $y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} y$.

Donc $F \ni x_k + y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x + y$. De plus, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\underbrace{\lambda x_k}_{\in F} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \lambda x \in \overline{F}$. □

Remarque. Contrairement aux e.v. de dimension finie, en dimension infinie, il est possible d'avoir un sous-e.v. *strict* dense (e.g. C_0^∞ dans L^2).

Proposition 2.11. *$F := \{f \in L^2$ t.q. $f = 0$ sur $x_n > 0\}$ est un e.v. fermé dans L^2.*

Proof. Soit $g \in \overline{F}$. Il existe $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ t.q. $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} g$. Pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_{x_n>0} |g|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{x_n>0} |g - f_k|^2 \,\mathrm{d}x \leq |g - f_k|^2_{L^2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

car $f_k \in F$ et $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} g$. Dès lors $\int_{x_n>0} |g|^2 \,\mathrm{d}x = 0$, i.e. $g \in F$. Donc $\overline{F} = F$. □

2.1 Orthogonalité

Définition 2.12. Pour $x, y \in H$, x et y sont *orthogonaux*, noté $x \perp y$ lorsque $\langle x, y\rangle = 0$.

Pour $x \in H$, on définit $x^\perp := \{y \in H$ t.q. $\langle x, y\rangle = 0\}$, et pour $M \subset H$, on définit $M^\perp := \{y \in H$ t.q. $\forall x \in M : \langle x, y\rangle = 0\} = \bigcap_{x\in M} x^\perp$.

Proposition 2.13. *Pour $x \in H$, $x^\perp \leq H$, et $x^\perp$ est fermé.*

Proof. À $x \in H$ fixé, on remarque que $x^\perp = f_1^{-1}(\{0\})$, or f_2 est continue. Donc $x^\perp$ est fermé. Vérifier que $x^\perp$ est un sous-e.v. est trivial. □

Corollaire 2.14. *Pour $M \leq H$, $M^\perp$ est un sous-e.v. fermé de H.*

Ce résultat découle directement du fait que $M^\perp$ est une intersection d'e.v. fermés.

Définition 2.15. $E \subseteq H$ est dit *convexe* lorsque $\forall x, y \in E : \forall t \in [0,1] : (1-t)x + ty \in E$.

Exemple 2.1.

- tout sous-e.v. de H est convexe ;
- toute boule (ouverte ou fermée) dans H est convexe ;
- pour $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, u \in L^2(\Omega)$, $E = \{v \in L^2 \text{ t.q. } u = v \text{ sur } \Omega\}$ est convexe.

Montrons également que E est fermé dans L^2. Soit $f \in \overline{E}$. Il existe $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ t.q. $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} f$.

$$\int_\Omega |u - f|^2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f_k - f| \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f|^2 \,\mathrm{d}x \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Théorème 2.16. *Soit $E \neq \emptyset$ convexe fermé dans H. Alors $\exists! x \in E$ t.q. $\|x\| = \min_{z\in E}\|z\| = \inf_{z\in E}\|z\| =: \delta$.*

Proof. **<u>unicité :</u>** soient $x, y \in E$ t.q. $\|x\| = \|y\| = \delta$. Par la formule du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Par convexité de E, $\frac{1}{2}(x+y) \in E$. Donc $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \geq \delta$. On trouve alors :

$$\|x-y\|^2 \leq 2(\underbrace{\|x\|^2 + \|y\|^2}_{=2\delta^2}) - 4\delta^2 = 0.$$

On en déduit $\|x-y\| = 0$, i.e. $x = y$.

<u>existence :</u> Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ t.q. $\|y_k\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} \delta$ qui existe par définition de l'infimum. Par la règle du parallélogramme :

$$\|y_k - y_m\|^2 \leq 2(\underbrace{\|y_k\|^2 + \|y_m\|^2}_{\xrightarrow[k,m\to+\infty]{} 2\delta^2}) - 4\delta^2 \xrightarrow[k,m\to+\infty]{} 0.$$

Donc (y_k) est de Cauchy. Par complétude de H, $\exists x_0 \in H$ t.q. $y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x_0$, et par fermeture de E, $x_0 \in E$.

De plus, par continuité de la norme, $\|y_k\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} \|x_0\|$, et par unicité de la limite, $\|x_0\| = \delta$. □

Exemple 2.2. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert, $u \in L^2(\Omega)$, $E = \{v \in L^2 \text{ t.q. } u = v \text{ sur } \Omega\}$ est un convexe fermé, donc par ce théorème, il existe un unique $u^* \in E$ qui minimise la norme : $u^* = u$ sur Ω et $u^* = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Théorème 2.17 (Décomposition orthogonale)**.** *Soit $M \leq H$ fermé. Alors :*

1. *$\forall x \in H : \exists! (y,z) \in M \times M^\perp$ t.q. $x = y + z$;*
2. *ces valeurs y, z sont les points les plus proches de x dans M et $M^\perp$ respectivement ;*
3. *Les applications $P : x \mapsto y$ et $Q : x \mapsto z$ sont linéaires ;*
4. *$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ (et donc P, Q sont continues) ;*
5. *P et Q sont les projections orthogonales de x sur M et $M^\perp$ respectivement.*

Proof.

1. **unicité :** si $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, pour $y_1, y_2 \in M$ et $z_1, z_2 \in M^\perp$, on a $\underbrace{y_1 - y_2}_{\in M} = \underbrace{z_2 - z_1}_{\in M^\perp}$. Or $M \cap M^\perp = \{0\}$. Donc $y_1 = y_2$ et $z_1 = z_2$.

   existence : $x + M$ est convexe (trivial par le fait que $M \leq H$). Montrons que $x + M$ est fermé. Soit $u \in \overline{x + M}$. Il existe $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (x + M)^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} u$. $\forall k \in \mathbb{N} : x + M \ni u_k = x + y_k$. On en déduit $y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} u - x$. Par fermeture de M, on a $u - x \in M$, et donc $u \in x + M$ (i.e. $x + M$ est fermé).

   Soit $z \in x + M$ l'élément qui minimise la norme. On pose $y \coloneqq x - z \in M$. Montrons alors que $z \in x + M$. Soit $w \in M$; WLOG, supposons $\|w\| = 1$. Puisque $z \in x + M$, $\forall \alpha \in \mathbb{C} : z - \alpha w \in x + M$. Donc :

   $$\|z\|^2 \leq \|z - \alpha w\|^2 = \|z\|^2 - 2\Re\alpha \langle w, z\rangle + |\alpha|^2 .$$

   $0 = 2\Re\alpha \langle w, z\rangle - |\alpha|^2$. En particulier, pour $\alpha = \langle z, w\rangle$: $0 = \left\|\langle z, w\rangle\right\|^2$, donc $\langle z, w\rangle = 0$. Dès lors $z \in M^\perp$.

2. Soit $Y \in M$. Montrons que $\|x - Y\| \geq \|x - y\| = \|z\|$. Par Pythagore :

   $$\|x - Y\|^2 = \|y + z - Y\|^2 = \left\|(y - Y) + z\right\|^2 = \|y - Y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2 .$$

   Idem pour $Z \in M^\perp$: $\|x - Z\| \geq \|x - z\| = y$.

3. Soient $x_1, x_2 \in H, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. On a $\alpha_1 x_1 = \alpha_1 P x_1 + \alpha_1 Q x_1$, et $\alpha_2 x_2 = \alpha_2 P x_2 + \alpha_2 Q x_2$. Donc :

   $$P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + Q(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 P x_1 + \alpha_1 Q x_1 + \alpha_2 P x_2 + \alpha_2 Q x_2,$$

   et donc :

   $$\underbrace{P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \alpha_1 P x_1 - \alpha_2 p x_2}_{\in M} = \underbrace{\alpha_1 Q x_1 + \alpha_2 Q x_2 - Q(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}_{\in M^\perp}.$$

   Or $M \cap M^\perp = \{0\}$, donc $P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 P x_1 - \alpha_2 p x_2$, et $\alpha_1 Q x_1 + \alpha_2 Q x_2 = Q(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$.

4. Par Pythagore $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$. Donc $\|Px\| \leq \|x\|$ et $\|Qx\| \leq \|x\|$, i.e. P et Q sont Lipschitziennes, donc en particulier continues.

□

Corollaire 2.18. *Si $M \leq H$, avec $M \neq H$, il existe $y \in H \setminus \{0\}$ t.q. $y \perp M$.*

Proof. Pour $x \in H \setminus M$, $x = Px + Qx$, où $Qx \neq 0$, et $Qx \perp M$. □

Corollaire 2.19. *Si $M \leq H$ est fermé, alors $M = M^{\perp\perp}$.*

Proof. La première inclusion est triviale : si $x \in M$, alors $x \perp M^\perp$.

La seconde inclusion se démontre comme suit : soit $x \in M^{\perp\perp} \subseteq H$. $x = y + z$ où $y \in M$ et $z \in M^\perp$. Or $0 = \langle x, z\rangle = \langle y + z, z\rangle = \langle y, z\rangle + \|z\|^2$, et $\langle y, z\rangle = 0$ par définition d'orthogonalité. Donc $|z| = 0$ et $z = 0$, i.e. $x = y \in M$. □

Lemme 2.20 (Lemme de Riesz)**.** *Soit $L : H \to \mathbb{C}$, une forme linéaire continue. Alors $\exists! y \in H$ t.q. $L = \langle\cdot, y\rangle$.*

Proof. **unicité :** pour $y_1, y_2 \in H$ t.q. $\forall x \in H : \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$, on a $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0$, donc $y_1 - y_2 \in H^\perp = \{0\}$, i.e. $y_1 = y_2$.

existence : si $L \equiv 0$, alors $y = 0$. Supposons alors que L n'est pas identiquement nulle. $\operatorname{Ker} L \subsetneq H$ et est fermé par continuité de L. Dès lors, il existe $z \in H$, $z \neq 0$ t.q. $z \perp \operatorname{Ker} L$. WLOG, supposons $\|z\| = 1$. Posons $y \coloneqq (\overline{Lz})z$ et $u \coloneqq (Lx)z - (Lz)x$. Calculons :

$$Lu = (Lx)Lz - (Lz)Lx = 0,$$

donc $u \in \operatorname{Ker} L$, et donc $0 = \langle u, z \rangle = (Lx) \langle z, z \rangle - (Lz) \langle x, z \rangle = Lx - (Lz) \langle x, z \rangle$. Dès lors, $Lx = (Lz) \langle x, z \rangle = \langle x, y \rangle$. $\square$

2.2 Systèmes orthonormaux

Définition 2.21. Pour V un e.v. et $S \subseteq V$, on note $\operatorname{Vect} S = \operatorname{Span} S$ l'e.v. engendré par S.

$(e_\alpha)_{\alpha \in A} \subset V$ est appelé *orthonormal* lorsque $\forall \alpha, \beta \in A : \langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta}$.

Pour $x \in H$, on définit $\hat{x}(\alpha) \coloneqq \langle x, e_\alpha \rangle$.

Les $\hat{x}(\alpha)$ sont les coefficients de Fourier relativement au système $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$.
Exemple 2.3. Sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, les $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}}$ sont les $e_\alpha : [0, 2\pi) \to \mathbb{C} : t \mapsto \frac{e^{i\alpha t}}{\sqrt{2\pi}}$.
Théorème 2.22. *Pour H un espace de Hilbert et $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ un système orthonormal, $F \subset A$ fini, et $M_F \coloneqq \operatorname{Vect} \{e_\alpha\}_{\alpha \in F}$, on a :*

1. *si $\varphi : A \to \mathbb{C}$ est nulle sur $A \setminus F$, pour $y = \sum_{\alpha \in F} \varphi(\alpha) e_\alpha$, alors :*

$$\forall \alpha \in A : \varphi(\alpha) = \hat{y}(\alpha).$$

   De plus, $\|y\|^2 = \sum_{\alpha \in F} |\varphi(\alpha)|^2$.

2. *Si $x \in H$, $s_F(x) \coloneqq \sum_{\alpha \in F} \hat{x}(\alpha) e_\alpha \in M_F$. Si $s \in M_F \setminus \{s_F(x)\}$, alors :*

$$\|x - s_F(x)\| \lneqq \|x - s\|.$$

   De plus : $\sum_{\alpha \in F} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$ (inégalité de Bessel).

Proof.

1. $\hat{y}(\alpha) = \langle y, e_\alpha \rangle = \sum_{\beta \in F} \varphi(\beta) \langle e_\beta, e_\alpha \rangle = \varphi(\alpha)$ et :

$$\|y\|^2 = \left\| \sum_{\beta \in F} \varphi(\beta) e_\beta \right\|^2 \overset{\text{Pythagore}}{=} \sum_{\beta \in F} |\varphi(\beta)|^2 \|e_\beta\|^2 = \sum_{\beta \in F} |\varphi(\beta)|^2.$$

2. Soit $s \in M_F$. $\forall \alpha \in F : x - s_F(x) \perp e_\alpha$ et $x - s_F(x) \perp s_F(x) - s \in M_F$. En effet :

$$\langle x - s_F(x), e_\alpha \rangle = \langle x, e_\alpha \rangle - \langle s_F(x), e_\alpha \rangle = \hat{x}(\alpha) - \hat{x}(\alpha) = 0.$$

   Dès lors :

$$x - s = (x - s_F(x)) + (s_F(x) - s),$$

et donc, par Pythagore :

$$\|x - s\|^2 = \|x - s_F(x)\|^2 + \|s_F(x) - s\|^2. \tag{2.3}$$

Cette norme est minimisée (strictement) en $s = s_F(x)$ et donc :

$$\|x - s_F(x)\| \lneqq \|x - s\|$$

si $s \neq s_F(x)$. Ensuite :

$$\|s_F(x)\|^2 \leq \|s_F(x)\|^2 + \|x - s_F(x)\|^2.$$

Par l'équation 2.3 : si $s = 0$:

$$\|s_F(x)\|^2 \leq \|s_F(x)\|^2 \leq \|s_F(x)\|^2 + \|x - s_F(x)\|^2 = \|x\|^2.$$

Or :

$$\|s_F(x)\|^2 = \sum_{\alpha \in F} |\hat{x}(\alpha)|^2.$$

Dès lors $\|s_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$.

□

Remarque. Sur A, on a un espace mesuré canonique : $(A, \mathcal{P}(A), \#)$ pour lequel on adopte les notations :

$$\forall B \in \mathcal{P}(A) : \int_B \varphi \, \mathrm{d}\# =: \sum_{\alpha \in B} \varphi(\alpha).$$

Remarquons également que par définition de l'intégrale, si $\varphi : A \to [0, +\infty]$:

$$\sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha) = \sup_{\substack{B \subset A \\ |B| \lneqq +\infty}} \sum_{\alpha \in B} \varphi(\alpha).$$

Et si $\varphi \in \ell^1(A)$ et $\varphi \geq 0$, alors pour $A_k = \{\varphi \geq k^{-1}\}$ $(k \geq 1)$, on a $|A_k| \lneqq +\infty$ puisque $\varphi \in \ell^1(A)$. Or $\bigcup_{k \geq 1} A_k = \{\varphi \gneqq 0\}$, et donc $\{\varphi \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Dans le cas général, pour $\varphi : A \to \mathbb{C}$, alors $(\Re\varphi)^{\pm}$ et $(\Im\varphi)^{\pm}$ sont non-nulles sur un ensemble au plus dénombrable, et donc $\{\varphi \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Lemme 2.23. *Pour $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, l'ensemble des fonctions simples mesurables nulles hors d'un ensemble de mesure finie est dense dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ pour $p \in [1, +\infty)$.*

Lemme 2.24. *Soient X un espace métrique complet, Y un espace métrique, et $X_0 \subset X$, un sous-ensemble dense. Si $f \in C^0(X, Y)$ telle que $f\big|_{X_0}$ une isométrie et $f(X_0)$ est dense dans Y, alors f est surjective et est une isométrie.*

Proof. Fixons $x, y \in X$. Il existe $(x_k)_{k \geq 0}, (y_k)_{k \geq 0} \in {X_0}^{\mathbb{N}}$ telles que $x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} x$ et $y_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} y$. Pour $k \geq 0$:

$$d(x_k, y_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} d(x, y)$$

car la distance est continue sur un espace métrique. De plus :

$$d(x_k, y_k) = d\left(f(x_k), f(y_k)\right) \xrightarrow[k \to +\infty]{} d\left(f(x), f(y)\right),$$

à nouveau par continuité de la métrique, et par continuité de f. Donc par unicité de la limite, on a $d(x, y) = d(f(x), f(y))$, et donc f est une isométrie.

Il reste à montrer que f est surjective. Soit $y \in Y$. $f(X_0)$ est dense dans Y, et donc par continuité de f, on sait : $\exists (x_k)_{k\geq 0} \in {X_0}^{\mathbb{N}}$ telle que $f(x_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} y$. $(f(x_k))_k$ est de Cauchy dans Y, et puisque f est une isométrie, $(x_k)_k$ est de Cauchy dans X. Par complétude, on sait que $\exists x \in X$ t.q. $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$.

Finalement, par continuité de f : $f(x_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(x)$, et par construction $f(x_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} y$. Par unicité de la limite dans les espaces métriques, on a $f(x) = y$, et donc y admet une préimage par f. □

Théorème 2.25. *Soit $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$, un système orthonormal dans H. Soit $P = \operatorname{Span}\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Alors :*

1. $\forall x \in H : \sum_{\alpha\in A} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 \leq \|x\|^2$ *(inégalité de Bessel généralisée) ;*
2. $f : H \to \ell^2(A) : x \mapsto \hat{x}$ *est linéaire, continue, et surjective ;*
3. $f\Big|_{\overline{P}}$ *est une isométrie surjective $\overline{P} \to \ell^2(A)$.*

Proof.

1. Pour tout $F \subset A$ fini, on a :
$$\sum_{\alpha\in F} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 \leq \|x\|^2 .$$
Or par la remarque précédente :
$$\sum_{\alpha\in A} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 = \sup_{\substack{B\subset A \\ |B|\lneqq+\infty}} \sum_{\alpha\in B} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 \leq \|x\|^2$$
par passage au supremum (à la limite) et par l'inégalité de Bessel finie.
2. Soit $x \in H$. Puisque $\|x\|^2 \lneqq +\infty$, par l'inégalité de Bessel, on sait $\sum_{\alpha\in A} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 \lneqq +\infty$, i.e. $\hat{x} \in \ell^2(A)$.
f est linéaire par linéarité de $x \mapsto \langle x, e_\alpha\rangle$ pour tout $\alpha \in A$.
f est continue car Lipschitzienne :
$$\left\|f(x) - f(y)\right\|^2_{\ell^2(A)} = \sum_{\alpha\in A} \left|\widehat{x-y}(\alpha)\right|^2 \leq \|x-y\|^2_H .$$
La surjectivité vient du point 3 : si $f\Big|_{\overline{P}}$ est surjective, alors en particulier f est surjective.
3. Pour $X = \overline{P}$, $X_0 = P$, $Y = \ell^2(A)$, remarquons que :
$$\underbrace{\left\{\chi \in \ell^2(A) \text{ t.q. } \chi(\alpha) = 0 \text{ si } \alpha \notin F \subset A \text{ fini}\right\}}_{\text{dense dans } \ell^2(A)} \subset f(P).$$
De plus $f\Big|_P$ est une isométrie. En effet, pour $x \in P$, on sait qu'il existe $F \subset A$ fini et $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}$ $(\alpha \in F)$ tels que $x = \sum_{\alpha\in F} \lambda_\alpha e_\alpha$. Dès lors :
$$\left\|f(x)\right\|^2_{\ell^2(A)} = \|x\|^2_{\ell^2(A)} = \sum_{\alpha\in A} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 = \sum_{\alpha\in F} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 = \sum_{\alpha\in A} \left|\sum_{\beta\in F} \lambda_\beta \left\langle e_\beta, e_\alpha\right\rangle\right|^2 = \sum_{\alpha\in F} |\lambda_\alpha|^2 ,$$
et :
$$\|x\|^2_H = \langle x, x\rangle_H = \left\langle \sum_{\alpha\in F} \lambda_\alpha e_\alpha, \sum_{\beta\in F} \lambda_\beta e_\beta \right\rangle = \sum_{\alpha\in F} \sum_{\beta\in F} \lambda_\alpha \overline{\lambda_\beta} \left\langle e_\alpha, e_\beta\right\rangle = \sum_{\alpha\in F} |\lambda_\alpha|^2 .$$

Finalement, puisque $\overline{P}$ est complet (car sous-ensemble fermé de H), on peut ensuite appliquer le lemme 2.24 qui affirme que $f\Big|_{\overline{P}}$ est une isométrie surjective sur Y.

□

Définition 2.26. Un *système orthonormal maximal* (SOM) est un système orthonormal qui est maximal au sens de l'inclusion.

Théorème 2.27. *Soit $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ un système orthonormal dans H. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$(e_\alpha)_\alpha$ est un SOM.*
2. *$M := \operatorname{Span}\{e_\alpha\}_\alpha$ est dense dans H.*
3. *$\forall x \in H : \sum_{\alpha\in A} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 = \|x\|^2$.*
4. *$\forall x, y \in H : \sum_{\alpha\in A} \hat{x}(\alpha)\overline{\hat{y}(\alpha)} = \langle x, y\rangle$ (Identité de Parseval).*
5. *$\forall x \in H : \forall \varepsilon > 0 : \exists A_0 \subset A$ fini tel que $\forall A_1 \supset A_0$: si A_1 est fini, alors $\left\|x - \sum_{\alpha\in A_1} \hat{x}(\alpha)e_\alpha\right\| \leq \varepsilon$.*

Proof.

$1 \Rightarrow 2$ Par l'absurde, supposons que $M \subsetneqq A$. Alors il existe $y \in A \setminus \{0\}$ tel que $y \perp M$ et donc le système n'est pas maximal car on peut lui ajouter $\frac{y}{\|y\|_H}$.

$2 \Rightarrow 3$ Par le Théorème 2.25 (point 3), on sait que $\overline{M} \to \ell^2(A) : x \mapsto \hat{x}$ est une isométrie, ce qui revient à dire que si $x \in \overline{M}$, alors l'inégalité de Bessel est une égalité, i.e. :

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 .$$

$3 \Rightarrow 4$ On veut montrer que $\|\hat{\cdot}\|_{\ell^2(A)} = \|\cdot\|_H \Rightarrow \langle\hat{\cdot}, \hat{\cdot}\rangle_{\ell^2(A)} = \langle\cdot, \cdot\rangle_H$. Dans $\mathcal{H}$, un espace de Hilbert quelconque (e.g. $\mathcal{H} = H$ ou $\mathcal{H} = \ell^2(A)$), on a :

$$4\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}} = \|x+y\|_{\mathcal{H}}^2 - \|x-y\|_{\mathcal{H}}^2 + i\|x+iy\|_{\mathcal{H}}^2 - i\|x-iy\|_{\mathcal{H}}^2 .$$

Or par hypothèse, $\|\cdot\|_H = \|\hat{\cdot}\|_{\ell^2(A)}$. Donc :

$$\begin{aligned} 4\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle_{\ell^2(A)} &= \|\hat{x}+\hat{y}\|_{\ell^2(A)}^2 - \|\hat{x}-\hat{y}\|_{\ell^2(A)}^2 + i\|\hat{x}+i\hat{y}\|_{\ell^2(A)}^2 - i\|\hat{x}-i\hat{y}\|_{\ell^2(A)}^2 \\ &= \|x+y\|_H^2 - \|x-y\|_H^2 + i\|x+iy\|_H^2 - i\|x-iy\|_H^2 = 4\langle x, y\rangle_H . \end{aligned}$$

$4 \Rightarrow 1$ Par l'absurde, supposons qu'il existe $u \neq 0$ tel que $\forall \alpha \in A : u \perp e_\alpha$. Alors $\forall \alpha \in A : \hat{u}(\alpha) = 0$. Or $0 \neq \|u\|^2 = \sum_{\alpha\in A} \hat{u}(\alpha)\overline{\hat{u}(\alpha)} = \sum_{\alpha\in A} \left|\hat{u}(\alpha)\right|^2 = 0$, ce qui est une contradiction.

$5 \Rightarrow 2$ Fixons $x \in H$ et $\varepsilon = \frac{1}{k}$. Pour tout k, il existe $x_k = \sum_{\alpha\in A_1} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha \in M$ tel que $\|x - x_k\| \leq \frac{1}{k} = \varepsilon$

$3 \Rightarrow 5$

$$\sum_{\alpha\in A} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 = \sup_{B\subset A \text{ fini}} \sum_{\beta\in B} \left|\hat{x}(\beta)\right|^2 .$$

Par définition du sup : $\forall \varepsilon > 0 : \exists A_0$ fini $\subset A$ t.q. $\forall A_1$ fini $\supset A_0$:

$$\left\|x - \sum_{\alpha\in A_1} \hat{x}(\alpha)e_\alpha\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\alpha\in A_1} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 \leq \varepsilon^2.$$

$\square$

Théorème 2.28. *Tout espace de Hiblert possède un système orthonormal maximal.*

Proof. Soit A l'ensemble des SOMs de H. $(A, \subseteq)$ est ordonné. Soit $\mathcal{S} \subset A$ une partie totalement ordonnée. On pose :

$$\hat{S} := \bigcup_{s \in \mathcal{S}} s.$$

Mq $\hat{S} \in A$.

Soient $a_1, a_2 \in \hat{S}$. Il existe $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ tels que $a_1 \in s_1$ et $a_2 \in s_2$, or $\mathcal{S}$ est totalement ordonné. Donc soit $s_1 \subseteq s_2$, soit $s_2 \subseteq s_1$, donc $a_1, a_2 \in s_1$ ou $a_1, a_2 \in s_2$. En particulier, ils sont orthogonaux, et de plus $\hat{S}$ majore tout $s \in \mathcal{S}$.

Par le lemme de Zorn, on a l'existence d'un élément maximal pour l'inclusion, i.e. un SOM. $\square$

Théorème 2.29 (Gram-Schmidt)**.** *Soit* $\{x_1, x_2, \ldots\} \subseteq H$ *une suite finie ou dénombrable de vecteurs linéairement indépendants. Alors il existe un système orthonormal* $\{u_1, u_2, \ldots,\}$ *fini et de même cardinalité que* $\{x_1, \ldots\}$ *si ce dernier est fini ou dénombrable si* $\{x_1, x_2, \ldots\}$ *est dénombrable tel que* $\operatorname{Span}\{u_1, \ldots,\} = \operatorname{Span}\{x_1, \ldots\}$.

Proof. Les x_j sont non-nuls car $\{x_1, x_2, \ldots\}$ est linéairement indépendant. Posons $y_1 := x_1$ et $u_1 := \frac{y_1}{\|y_1\|}$ et pour tout $n > 1$ posons $y_n := x_n - \sum_{j=1}^{n} \langle x_n, u_j \rangle u_j$ et $u_n := \frac{y_n}{\|y_n\|}$.

Il faut maintenant s'assurer que pour tout $n \geq 1$: $y_n \neq 0$ afin que les u_n soient bien définis. Par l'absurde, supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $y_n = 0$. Alors :

$$x_n \in \operatorname{Span}\{u_1, \ldots, u_{n-1}\} \subseteq \operatorname{Span}\{y_1, \ldots, y_{n-1}\} \subseteq \operatorname{Span}\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}.$$

Or les x_j sont linéairement indépendants.

Il est évident que $u_n \in \operatorname{Span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $x_n \in \operatorname{Span}\{u_1, \ldots, u_n\}$ pour tout $n \geq 1$. Il reste alors uniquement à montrer que $u_n \perp u_j$ $(j < n)$, ou de manière équivalente $y_n \perp u_j$, et cette dernière formulation est évidente par définition de y_n. $\square$

Définition 2.30. Un espace topologique E est dit *séparable* s'il admet une partie dense dénombrable.

Théorème 2.31. *Un espace de Hilbert est séparable ssi il possède un système orthonormal maximal.*

Proof. $\underline{\Rightarrow:}$ Soit $\{a_1, a_2, \ldots\}$ une suite dense dans H. Soit $\{a'_1, a'_2, \ldots\}$ la suite partielle (possiblement finie) de $\{a_1, \ldots\}$ consitituée des $a_i \notin \operatorname{Span}\{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$. Par définition, on a que les a'_i sont indépendants et tous les a_j sont combinaisons linéaires des a'_i, i.e. $\{a_1, a_2, \ldots\} \subset \operatorname{Span}\{a'_1, a'_2, \ldots\}$.

On en déduit alors que $\operatorname{Span}\{a'_1, a'_2, \ldots\}$ est dense dans H Par Gram-Schmidt sur $\{a'_1, a'_2, \ldots\}$, on a un système orthonormal $\{u_1, \ldots\}$ tel que $\operatorname{Span}\{u_1, \ldots\}$ est dense dans H. Dès lors, par le Théorème 2.27, $\{u_1, \ldots\}$ est un SOM.

$\underline{\Leftarrow:}$ Soit $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un SOM. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$E_N := \left\{ \sum_{j=1}^{N} q_j e_j \text{ t.q. } q_j \in \mathbb{Q}[i] \right\}.$$

E_N est dénombrable, et donc $E := \bigcup_{N>0} E_N$ est également dénombrable. Par le théorème 2.27, on a $\forall \varepsilon > 0 : \exists A_0 \subset A$ fini tel que :

$$\forall A_1 \supset A_0 : \left\| x - \sum_{\alpha \in A_1} \hat{x}(\alpha) e_\alpha \right\| \leq \varepsilon.$$

Montrons que $\forall \varepsilon > 0 : \exists y \in E$ t.q. $\|x-y\| \leq \varepsilon$. Soit $(q_\alpha)_{\alpha\in A_1} \subset \mathbb{Q}[i]$ t.q. $\sum_{\alpha\in A_1} \|q_\alpha - \hat{x}(\alpha)\|^2 \leq \varepsilon^2$. De tels q_α existent bien par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, et donc par densité de $\mathbb{Q}[i]$ dans $\mathbb{C}$.

$$\left\| x - \sum_{\alpha\in A_1} q_\alpha e_\alpha \right\|^2 = \left\| x - \sum_{\alpha\in A_1} \hat{x}(\alpha) e_\alpha \right\|^2 + \sum_{\alpha\in A_1} \|q_\alpha - \hat{x}(\alpha)\| \leq 2\varepsilon^2.$$

Donc pour $y = \sum_{\alpha\in A_1} q_\alpha e_\alpha$, on a bien le résultat. □

Exemple 2.4.

(0) $\mathbb{C}^N$ muni du produit scalaire usuel admet une base canonique. Cette dernière est orthonormale et maximale.

(1) Dans $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, posons le suites e_k ($k \in \mathbb{Z}$) telles que $e_{k,j} = 1$ si $k = j$ et 0 sinon. $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un système orthonormal maximal car :
$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{j\geq 1} x_j \overline{x_j} = \sum_{j\geq 1} |x_j|^2 .$$

Par le point 3 du Théorème 2.27, on a que $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un SOM.

(2) Dans $L^2[0, 2\pi)$, on définit (pour $k \in \mathbb{Z}$) :

$$e_k : [0, 2\pi) \to \mathbb{C} : t \mapsto \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Pour le produit scalaire usuel de L^2, on a :

$$\langle e_k, e_\ell\rangle_{L^2} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(k-\ell)t}}{2\pi}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{si } k-\ell = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour montrer que $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est maximal, prenons $f \in L^2[0, 2\pi)$. $S_k f := \sum_{m=-k}^{k} \langle f, e_m\rangle\, e_m$. Montrons que $S_k f \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} f$. Pour $\varepsilon > 0, \exists \varphi \in C_0^\infty((0, 2\pi)) : \|f-\varphi\|_{L^2} \leq \varepsilon$ (par densité de C_0^∞ dans L^2).

On a $S_k\varphi \xrightarrow[k\to+\infty]{\text{CVU}} \varphi$ (théorème de Dirichlet global), ce qui implique $S_k\varphi \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} \varphi$. Finalement, remarquons :
$$\|f - S_k f\|_{L^2} \leq \|f - S_k\varphi\|_{L^2} \leq \|f-\varphi\|_{L^2} + \|\varphi - S_k\varphi\| \leq 2\varepsilon$$

si k est assez grand.

Attention, $\{e_k\}_k$ n'est **pas** une base au sens algébrique car $\forall k \in \mathbb{Z} : e_k \in C^\infty$. Donc si $\{e_k\}_k$ est une base, toute fonction $f \in L^2$ est égale à $\sum_{j=1}^{N} c_j e_{k_j} \in C^\infty$. Or $L^2 \not\subseteq C^\infty$.

2.3 Applications linéaires entre espaces vectoriels normés

Soient E, F deux espaces de Banach. Pour $T : E \to F$ linéaire, on dit que T est *bornée* lorsque :

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| \lneqq +\infty.$$

Remarque. borné doit se comprendre *borné sur la boule unité* car T n'est pas borné puisque linéaire.

Proposition 2.32. *Soit $T : E \to F$ linéaire.*

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\lneqq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| .$$

Proof. On note $A = \{\|Tx\|\}_{\|x\|\leq 1}$, $B = \{\|Tx\|\}_{\|x\|<1}$, et $C = \{\|Tx\|\}_{\|x\|=1}$. Notons également $a = \sup A$, $b = \sup B$ et $c = \sup C$.

Puisque $A \supset B \cup C$, on sait que $a \geq b$ et $a \geq c$. Maintenant, si $x \neq 0$ t.q. $\|x\| \leq 1$, alors $B \ni T\frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|}Tx \geq \|Tx\|$. En particulier, $c \geq a$, et donc $c = a$.

Si $a \lneqq +\infty$, alors $\forall \delta > 0 : \exists x$ t.q. $\|x\| = 1$ et $\|Tx\| \geq a - \delta$ (par définition du sup et puisque $a = c$). Pour $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$\left\|T((1-\varepsilon)x)\right\| = (1-\varepsilon)\|Tx\| \geq (1-\varepsilon)(a-\delta) \geq a - \eta,$$

pour $\eta = \varepsilon a - \varepsilon\delta + \delta$. Pour $\delta, \varepsilon \to 0$, on a $\eta \to 0$ et donc $b \geq a$.

Finalement, si $a = +\infty$, alors $\forall M > 0 : \exists x_M$ t.q. $\|x_M\| \leq 1$ et $\|Tx_M\| \geq M$. Or par linéarité de T, on a $\left\|x_{M/2}\right\| \lneqq 1$, et finalement :

$$\forall M > 0 : \exists \tilde{x}_M (= x_{M/2}) \text{ t.q. } \|\tilde{x}_M\| \leq 1 \text{ et } \|T\tilde{x}_M\| \geq M.$$

On en déduit également que $a = b$.

Dès lors, on a bien $a = b = c$. $\square$

Définition 2.33. L'ensemble des applications linéaires bornées de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$. On munit cet ensemble de la norme :

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)} : \mathcal{L}(E, F) \to \mathbb{R}^+ : T \mapsto \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \coloneqq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| .$$

On note également $\mathcal{L}(E) \coloneqq \mathcal{L}(E, E)$.
Remarque. Il est à noter que cette norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ dépend des normes sur E et sur F !
Proposition 2.34. $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ *est une norme.*

Proof. TODO: Exercice $\square$

Proposition 2.35. *Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $y \in E$, on a $\|Ty\| \leq \|T\|\|y\|$.*

Proof. Si $y = 0$, alors $Ty = 0$, et donc ok. Sinon, $Ty = \|y\| \, T\frac{y}{\|y\|}$. Par passage à la norme dans F :

$$\|Ty\| = \|y\| \underbrace{\left\|T\frac{y}{\|y\|}\right\|}_{\leq\|T\|} \leq \|y\|\|T\| .$$

$\square$

On remarque également que $\left\|(T_2 \circ T_1)(x)\right\| \leq \|T_2\|\|T_1 x\| \leq \|T_2\|\|T_1\|\|x\|$, et donc $\|T_2 T_1\| \leq \|T_2\|\|T_1\|$. Dès lors si $T_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $T_2 T_1 \in \mathcal{L}(E, G)$.