MATHF-3001 — Théorie de la mesure
Résolution des TPs

R. Petit

Année académique 2018 - 2019

1 Séance 1

> **Exercice 1.1.** *Soient* $(X, \mathcal{F})$ *un espace mesurable et* $Y \subset X$. *Mq* $\mathcal{F}_Y := \mathcal{F} \cap Y$ *est une* σ*-algèbre sur* Y.

Résolution.

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$, donc $\emptyset \cap Y = \emptyset \in \mathcal{F}_Y$.
2. Soit $F \in \mathcal{F}$. $F \cap Y \in \mathcal{F}_Y$ et donc :

$$Y \setminus (F \cap Y) = Y \setminus F \cup \emptyset = Y \cap F^{\complement} \in \mathcal{F}_Y$$

   car $F^{\complement} \in \mathcal{F}$.

3. Soit $(F_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. On sait que $\bigcup_{n \geqslant 0} F_n \in \mathcal{F}$. De plus $(F_n \cap Y)_{n \geqslant 0} \in {\mathcal{F}_Y}^{\mathbb{N}}$. Donc :

$$\bigcup_{n \geqslant 0} (F_n \cap Y) = \bigcup_{n \geqslant 0} F_n \cap Y \in \mathcal{F}_Y.$$

□

> **Exercice 1.2.**
>
> 1. *Soit* X *un ensemble fini. Décrire la* σ*-algèbre engendrée par la classe des parties finies de* X. *Que peut-on dire si* X *est fini ?*
> 2. *Dans* $X = [\![0, n]\!]$, *on considère* $\mathcal{A} = \{0\}$ *et* $\mathcal{B} = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$. *Décrire* $\sigma(\mathcal{A})$ *et* $\sigma(\mathcal{B})$.

Résolution.

1. Soit $\mathcal{F} = \sigma(\{Y \in \mathcal{P}(X) \text{ s.t. } Y \text{ est fini }\})$. Alors :

$$\mathcal{F} = \{Y \in \mathcal{P}(X) \text{ s.t. } Y \text{ est au plus dénombrable ou } Y^{\complement} \text{ est au plus dénombrable}\}$$

   car la famille doit être stable par complémentaire (d'où la définition symétrique par complémentarité) et par union dénombrable (d'où le fait que Y ou $Y^{\complement}$ soit au plus dénombrable). Si X est fini, alors l'ensemble des parties finies de X est exactement $\mathcal{P}(X)$ qui est une σ-algèbre. Donc $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{P}(X)) = \mathcal{P}(X)$.

2. $\sigma(\mathcal{A})$ est la σ-algèbre engendrée par un unique élément donc : $\sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{0\}, \{0\}^{\complement}, [\![0, n]\!]\}$ où $\{0\}^{\complement} = [\![1, n]\!]$.
   $\sigma(\mathcal{B}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, [\![3, n]\!], [\![1, n]\!], \{0\} \cup [\![3, n]\!], [\![0, n]\!]\}$.

□

Exercice 1.3. *Soient* X, Y *deux ensembles, et* $f : X \to Y$.

1. *Si* $\mathcal{F}$ *est une σ-algèbre sur* Y, *mq* $\mathcal{A} := f^{-1}(\mathcal{F})$ *est une σ-algèbre sur* X.
2. *Soit* $\mathcal{A}$ *une σ-algèbre sur* X.
   (a) *Mq* $\mathcal{F} := \{B \in \mathcal{P}(Y) \text{ s.t. } f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ *est une σ-algèbre sur* Y.
   (b) *Que peut-on dire de* $f(\mathcal{A})$ *?*

Résolution.

1.
   — $\emptyset \in \mathcal{F}$ donc $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}(\mathcal{F})$.
   — Soit $A \in \mathcal{A}$. Il existe $B \in \mathcal{F}$ s.t. $f^{-1}(B) = A$. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus A \in \mathcal{A}$.
   — Soit $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Il existe $(B_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ s.t. $\forall n \geqslant 0 : A_n = f^{-1}(B_n)$. $\bigcup_{n\geqslant 0} A_n = \bigcup_{n\geqslant 0} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\geqslant 0} B_n\right) \in f^{-1}(\mathcal{F})$.

2.
   (a)
   — $\emptyset \in \mathcal{A}$ donc $\emptyset \in \mathcal{F}$.
   — Soient $B \in \mathcal{F}$, $A := f^{-1}(B)$. $f^{-1}(B^\complement) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(B)^\complement \in \mathcal{A}$.
   — Soit $(B_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. On pose $B := \bigcup_{n\geqslant 0} B_n$.

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{n\geqslant 0} f^{-1}(B_n) = \bigcup_{n\geqslant 0} A_n \in \mathcal{A}$$

   où $\forall n \geqslant 0 : A_n = f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$. Donc $B \in \mathcal{F}$.

   (b) $f(\mathcal{A})$ n'est pas nécessairement une σ-algèbre : l'égalité $f(A^\complement) = f(A)^\complement$ n'est pas vraie en général. Par exemple pour $f : [\pm\varepsilon] \to [0, \varepsilon^2] : x \mapsto x^2$, on a :

$$[0, \varepsilon^2] = f([-\varepsilon, 0]) = f([\pm\varepsilon] \setminus [0, +\varepsilon]) \neq f([\pm\varepsilon]) \setminus f([0, \varepsilon]) = [0, \varepsilon^2] \setminus [0, \varepsilon^2] = \emptyset.$$

   Donc rien ne garantit que $f(\mathcal{A})$ est stable par passage au complémentaire.
   TODO: Donner un contre-exemple avec des σ-algèbres finies sur de petits ensembles.

□

Exercice 1.4. *Soient* $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ *espaces mesurables. Soit* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$. *Si* $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$, *mq* $f : X \to Y$ *est mesurable ssi* $f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$.

Résolution. $\Rightarrow$: en supposant f mesurable, si $B \in \mathcal{F}$, alors $B \in \mathcal{B}$ et donc $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

$\Leftarrow$: on pose $\mathcal{B}' := \{B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Par le point précédent, $\mathcal{B}'$ est une σ-algèbre. Par hypothèse : $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}'$, et donc $\sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{B}') = \mathcal{B}'$. Or $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$. De plus, puisque $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, on a $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, ce qui implique $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, i.e. :

$$\forall B \in \mathcal{B} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

□

Exercice 1.5.

1. *Mq toute intersection (non-vide) de classes de Dynkin est une classe de Dynkin.*
2. *Mq pour tout* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ *il existe une plus petite classe de Dynkin au sens de l'inclusion (notée* $\lambda(\mathcal{F})$*).*
3. *Mq si* $\mathcal{D}$ *est une classe de Dynkin stable par intersections finies, alors* $\mathcal{D}$ *est une σ-algèbre.*

4. *Mq si $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ est stable par intersections finies, alors $\lambda(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$.*

<u>*Résolution*</u>.

1. [Exactement même raisonement que pour les σ-algèbres] Soit $(\mathcal{D}_i)_{i\in I}$ une famille non-vide de classes de Dynkin et soit $\mathcal{D} \coloneqq \bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i$.
   — $\forall i \in I : \emptyset \in \mathcal{D}_i$ donc $\emptyset \in \mathcal{D}$.
   — Soit $D \in \mathcal{D}$. Puisque $\forall i \in I : D \in \mathcal{D}_i$ et que les $\mathcal{D}_i$ sont des classes de Dynkin, on a $\forall i \in I : D^{\complement} \in \mathcal{D}_i$ et donc $D^{\complement} \in \mathcal{D}$.
   — Soit $(D_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$. On sait que $\forall i \in I : \bigsqcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}_i$ et donc $\bigsqcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}$.
2. Comme pour les σ-algèbres, on peut définir :

$$\lambda(\mathcal{F}) \coloneqq \bigcap_{\substack{\mathcal{D} \text{ Dynkin} \\ \mathcal{F}\subset\mathcal{D}}} \mathcal{D}.$$

   Par le point ci-dessus, $\lambda(\mathcal{F})$ est une classe de Dynkin et toute classe de Dynkin $\mathcal{D}' \supset \mathcal{F}$ contient $\lambda(\mathcal{F})$ par définition.
3. Soit $\mathcal{D}$ une classe de Dynkin stable par intersections finies et soit $(D_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$. Montrons donc que $\bigcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}$. On pose $B_0 \coloneqq D_0$ et pour $n > 0$, on pose $B_n \coloneqq A_n \cap (\bigcap_{j=1}^{n-1} B_j^{\complement})$. Par récurrence, on observe que les B_n sont dans $\mathcal{D}$ par stabilité sous intersections finies. De plus les B_n sont disjoints deux à deux et leur union est égale à l'union des D_n. Donc $\bigcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}$.
4. Soit $D \in \lambda(\mathcal{F})$. On pose $\mathcal{D}_D \coloneqq \{Q \in \lambda(\mathcal{F}) \text{ s.t. } Q \cap D \in \lambda(\mathcal{F})\} \subset \lambda(\mathcal{F})$. Montrons que $\mathcal{D}_D$ est une classe de Dynkin.
   — $\emptyset \in \mathcal{D}_D$ puisque $\lambda(\mathcal{F}) \ni \emptyset = \emptyset \cap D$.
   — Soit $Q \in \mathcal{D}_D$. $Q^{\complement} \cap D = (D^{\complement} \cup Q)^{\complement} = (D^{\complement} \sqcup \underbrace{(Q \cap D)}_{\in\lambda(\mathcal{F})})^{\complement} \in \lambda(\mathcal{F})$ par stabilité par passage au complément, stabilité par union disjointe.
   — Soit $(Q_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{D}_D{}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. On a :

$$\bigsqcup_{n\geqslant 0} Q_n \cap D = \bigsqcup_{n\geqslant 0} \underbrace{(Q_n \cap D)}_{\in\lambda(\mathcal{F})} \in \lambda(\mathcal{F}).$$

   On remarque également que si $D \in \mathcal{F} : \mathcal{F} \subset \mathcal{D}_D \subset \lambda(\mathcal{F})$, ce qui implique $\lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_D$.
   Or par symétrie de l'intersection, pour $D, Q \in \lambda(\mathcal{F})$ on a : $Q \in \mathcal{D}_D \iff D \in \mathcal{D}_Q$. Dès lors on a une équivalence entre les deux assertions suivantes :
   — $\forall (D, Q) \in \mathcal{F} \times \lambda(\mathcal{F}) : Q \in \mathcal{D}_D$ (autrement dit $\forall D \in \mathcal{F} : \lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_D$) ;
   — $\forall (D, Q) \in \mathcal{F} \times \lambda(\mathcal{F}) : D \in \mathcal{D}_Q$ (autrement dit $\forall Q \in \lambda(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subset \mathcal{D}_Q$).
   On peut alors en déduire que $\forall Q \in \lambda(\mathcal{F}) : \lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_Q$. Dès lors, montrer que $\lambda(\mathcal{F})$ est stable par instersections finies revient à montrer que $\forall D, Q \in \lambda(\mathcal{F}) : D \cap Q \in \lambda(\mathcal{F})$, i.e. $D \in \mathcal{D}_Q = \lambda(\mathcal{F})$. On a donc bien la stabilité de $\lambda(\mathcal{F})$ sous intersections finies, on peut donc déduire que $\lambda(\mathcal{F})$ est une σ-algèbre qui contient $\mathcal{F}$, donc $\sigma(\mathcal{F}) \subset \lambda(\mathcal{F})$. Or toute σ-algèbre est une classe de Dynkin, donc $\lambda(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{F})$, ce qui permet de conclure.

□

2 Séance 2

Exercice 2.1. *Soient* $(X, \mathcal{F})$ *un espace mesurable et* μ *une fonction additive sur* $\mathcal{A}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$*. Mq les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. μ *est* σ*-additive ;*
2. μ *est continue à gauche ;*
3. μ *est continue à droite.*

Donner un exemple de mesure $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *qui ne satisfait pas le point 3. Que faut-il ajouter comme hypothèse pour ce résultat ?*

Résolution.

1. $\Rightarrow$ 2. Soit $(B_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. On pose $A_0 \coloneqq B_0$ et $\forall n > 0 : A_n \coloneqq B_n \setminus B_{n-1}$, ce qui donne (car les A_n sont dans $\mathcal{A}$) :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 0} B_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n\right) = \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n) = \lim_{N\to+\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \mu(A_n)}_{=\mu(B_N)} = \lim_{N\to+\infty} \mu(B_N).$$

2. $\Rightarrow$ 1. Soit $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. On pose $B_0 \coloneqq A_0$ et $\forall n > 0 : B_n \coloneqq A_n \cup B_{n-1}$. Les B_n forment une suite croissante dans $\mathcal{A}$. On a alors :

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geqslant 0} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigsqcup_{j=0}^{n} A_j\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \mu(A_j) = \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n).$$

2. $\Rightarrow$ 3. Soit $(C_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante. On a alors que $({C_n}^\complement)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante dans $\mathcal{A}$. Donc :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 0} {C_n}^\complement\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu({C_n}^\complement) = \mu(X) - \lim_{n\to+\infty} \mu({C_n}^\complement)$$

car $\mu(X) < +\infty$. De plus :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 0} {C_n}^\complement\right) = \mu\left(\left(\bigcap_{n\geqslant 0} C_n\right)^\complement\right) = \mu(X) - \mu\left(\bigcap_{n\geqslant 0} C_n\right).$$

Par finitude de μ, on conclut :

$$\mu\left(\bigcap_{n\geqslant 0} C_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(C_n).$$

3. $\Rightarrow$ 2. Exactement même raisonnement par passage au complémentaire.

Si la mesure n'est pas finie, on peut construire une suite $(C_n)_n$ telle que $\forall n \geqslant 0 : \mu(C_n) = +\infty$ et $\bigcap_{n\geqslant 0} C_n = \emptyset$. Par exemple, dans l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \# = |\cdot|)$: $\forall n \geqslant 0 : C_n \coloneqq \{m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } m > n\}$ est de mesure $+\infty$ et $\bigcap_{n\geqslant 0} C_n = \emptyset$. On a donc :

$$\mu\left(\bigcap_{n\geqslant 0} C_n\right) = \mu(\emptyset) = 0 \neq +\infty = \lim_{n\to+\infty} +\infty = \lim_{n\to+\infty} \mu(C_n).$$

Il faut donc supposer que pour la suite $(C_n)_n$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\mu(C_n) \lneqq +\infty$ afin d'éviter le cas où $(\mu(C_n))_{n\geqslant 0}$ est infinie pour tous les termes. $\square$

> **Exercice 2.2.** *Soit* X *un ensemble non dénombrable et* $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X)$ *s.t.* A *ou* $A^\complement$ *est dénombrable*$\}$. *Soit* $\mu : \mathcal{A} \to \{0,1\}$ *où* $\mu(A) = 0 \iff A$ *est dénombrable. Mq* μ *est une mesure sur* $(X, \mathcal{A})$.

Résolution. $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre (voir cours).

— $\mu(\emptyset) = 0$ car $\emptyset$ est fini.

— Soit $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^\mathbb{N}$ deux à deux disjoints. On note $A \coloneqq \bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n$. On a soit $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$, et :

$$\mu(A) = 0 \iff \underbrace{\forall n \geqslant 0 : \mu(A_n) = 0}_{\text{i.e. tous les } A_n \text{ dénombrables}},$$

et donc :

$$\mu(A) = 0 = \sum_{n\geqslant 0} 0 = \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n)$$

pour le premier cas. Pour le second cas, si $\mu(A) = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. ${A_{n_0}}^\complement$ est dénombrable (ou $\mu(A_{n_0}) = 1$), donc $\mu(A) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $n_1 \neq n_0$ s.t. ${A_{n_1}}^\complement$ est dénombrable ($\mu(A_{n_1}) = 1$). On a donc ${A_{n_0}}^\complement$ et ${A_{n_1}}^\complement$ dénombrables. Or $A_{n_0} \cap A_{n_1} = \emptyset$, donc $A_{n_0} \subseteq {A_{n_1}}^\complement$ ou $A_{n_1} \subseteq {A_{n_0}}^\complement$, ce qui implique A_{n_0} ou A_{n_1} dénombrable, ce qui est une contradiction car X est non-dénombrable.

$\square$

> **Exercice 2.3.** *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité. Mq* $\mathcal{T} \coloneqq \{A \in \mathcal{A}$ *s.t.* $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}\}$ *est une* σ*-algèbre.*

Résolution.

— $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ donc $\emptyset \in \mathcal{T}$.

— Soit $A \in \mathcal{T}$. En particulier $A \in \mathcal{A}$ et $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$. Puisque $\mathbb{P}$ est une mesure (finie), on a $\mathbb{P}(A^\complement) = \mathbb{P}(X) - \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$. Donc $A^\complement \in \mathcal{T}$.

— Soit $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{T}^\mathbb{N}$. On note $A \coloneqq \bigcup_{n\geqslant 0} A_n$. Mq $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$.

  — si $\forall n \geqslant 0 : \mathbb{P}(A_n) = 0$, alors par σ-sous-additivité $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} P(A_n) = 0$.

  — si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\mathbb{P}(A_{n_0}) = 1$, alors par monotonie, puisque $A_{n_0} \subseteq A \subseteq X$:

$$1 = \mathbb{P}(A_{n_0}) \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(X) = 1.$$

$\square$

> **Exercice 2.4.** *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* $(Y, \mathcal{B})$ *un espace mesurable et* $g : X \to Y$ *une application mesurable. On pose :*
>
> $$\nu : \mathcal{B} \to [0, +\infty] : B \mapsto \mu(g^{-1}(B)).$$
>
> *Mq* ν *est une mesure sur* $(Y, \mathcal{B})$.

Résolution. On sait que $\forall B \in \mathcal{B} : g^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ puisque g est mesurable. Donc ν est bien définie. Mq ν est une mesure.

— $\nu(\emptyset) = \mu(g^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ car μ est une mesure.

— Soient $(B_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{B}^\mathbb{N}$ deux à deux disjoints. Mq ν est σ-additive.

$$\nu\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} B_n\right) = \mu\left(g^{-1}\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} B_n\right)\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} g^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n\geqslant 0} \mu(g^{-1}(B_n)) = \sum_{n\geqslant 0} \nu(B_n).$$

□

Exercice 2.5. *Soit* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable.*

1. *Pour* $x \in X$, *mq* δ_x *est une mesure.*
2. *Mq si* μ *est une mesure sur* $(X, \mathcal{A})$ *s.t.* $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \iff x \notin A$ *alors* $\exists C \gneqq 0$ *s.t.* $\mu = C\delta_x$.

Résolution.

1. Mq δ_x est une mesure.
   — $\delta_x(\emptyset) = 0$ car $x \notin \emptyset$.
   — Soit $(A_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints. Mq $\delta_x(\bigsqcup_{n \geqslant 0} A_n) = \sum_{n \geqslant 0} \delta_x(A_n)$.
      — Si $\delta_x(\bigsqcup_{n \geqslant 0} A_n) = 0$, alors $\forall n \geqslant 0 : x \notin A_n$, i.e. $\forall n \geqslant 0 : \delta_x(A_n) = 0$.
      — Si $\delta_x(\bigsqcup_{n \geqslant 0} A_n) = 1$, alors $\exists n_0$ s.t. $x \in A_{n_0}$. Et puisque les A_n sont disjoints, $\forall n \neq n_0 : x \notin A_n$.
2. Soient $B, C \in \mathcal{A}$ s.t. $\mu(B) \neq 0 \neq \mu(C)$. Alors $\delta_x(B) = 1 = \delta_x(C)$. Mq $\mu(B) = \mu(C)$. $B \cap C \neq \emptyset$ puisque $x \in B \cap C$. On pose $\tilde{C} := C \cap B^{\complement}$ et $\tilde{B} := C^{\complement} \cap B$. On a alors que B et $\tilde{C}$ sont disjoints (C et $\tilde{B}$ également). De plus, $x \notin \tilde{B}$ et $x \notin \tilde{C}$, et donc $\mu(\tilde{B}) = \mu(\tilde{C}) = 0$. On a donc :

$$\mu(C) = \mu(C) + \mu(\tilde{B}) = \mu(C \sqcup \tilde{B}) = \mu(B \cup C) = \mu(B \sqcup \tilde{C}) = \mu(B) + \mu(\tilde{C}) = \mu(B).$$

   On a donc $\mu : \mathcal{A} \to \{0, C\}$ où $\mu(A) \iff \delta_x(A) = 1$.

□

Exercice 2.6. *Soit* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable. Mq la mesure de comptage est une mesure.*

Résolution.

— $|\emptyset| = 0$.
— La σ-additivité est triviale : $\left|\bigsqcup_{n \geqslant 0} A_n\right| = \sum_{n \geqslant 0} |A|_n$.

□

Exercice 2.7. *Soit* X *un ensemble fini non-vide. Mq* $\mu = \frac{|\cdot|}{|X|}$ *est une mesure de proba sur* $(X, \mathcal{P}(X))$.

Résolution.

— $\mu(\emptyset) = 0/|X| = 0$.
— Soient $(A_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints.

$$\mu(\bigsqcup_{n \geqslant 0} A_n) = \frac{\sum_{n \geqslant 0} |A_n|}{|X|} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{|A_n|}{|X|}.$$

Note : si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, alors $\forall \alpha > 0 : \alpha\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty] : A \mapsto \alpha \cdot \mu(A)$ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. Donc l'exercice peut être simplement résolu par le fait que μ est la mesure de comptage normalisée par $|X| \in \mathbb{R}^{+*}$

□

Exercice 2.8. *Soit* $(X, \mathcal{A})$ *un espace de mesure.*

1. *Soit* $(\mu_n)_{n \geqslant 0}$ *une suite croissante de mesures sur* $(X, \mathcal{A})$. *Mq* $\mu := \lim_{n \to +\infty} \mu_n$ *est une mesure.*
2. *Soit* $(\mu_n)_{n \geqslant 0}$ *une suite de mesures. Est-ce que* $\mu := \sum_{n \geqslant 0} \mu_n$ *est une mesure ?*
3. *Pour* $n \geqslant 0$, *on définit la mesure* μ_n *sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *par* $\mu_n(A) = \left|A \cap [n, +\infty)\right|$.
   — *Mq* $\forall n \geqslant 0 : \mu_n$ *est bien une mesure et que la suite* $(\mu_n)_n$ *est décroissante.*
   — *Est-ce que* $\mu = \lim_{n \to +\infty} \mu_n$ *est une mesure sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *? Caractériser entièrement* μ.

Résolution.

1. On note que puisque la suite des μ_n est croissante, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A)$ est bien définie car soit la suite $(\mu_n(A))_n$ converge vers une valeur réelle, soit elle diverge vers $+\infty$.
   — $\mu(\emptyset) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(\emptyset) = 0$.
   — Soient $(A_n)_{n\geqslant 0}$ 2 à 2 disjoints.

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n\right) = \lim_{k\to+\infty} \mu_k \left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n\right) = \lim_{k\to+\infty} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \mu_k(A_n)$$
$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \lim_{k\to+\infty} \mu_k(A_n) = \sum_{n\geqslant 0} \lim_{k\to+\infty} \mu_k(A_n) = \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n).$$

2.
   — $\mu(\emptyset) = \sum_{n\geqslant 0} \mu_n(\emptyset) = 0$.
   — Soient $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints. On note $A := \bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n$. Par non-négativité des $(\mu_k(A_n))_{n,k}$, on a que les sommes sur k et n commutent, i.e. :

$$\sum_{k\geqslant 0} \sum_{n\geqslant 0} \mu_k(A_n) = \sum_{n\geqslant 0} \sum_{k\geqslant 0} \mu_k(A_n),$$

   et donc $\mu(A) = \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n)$.

   On en déduit donc que $\mu = \sum_{k\geqslant 0} \mu_k$ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. De plus, puisque $\alpha \cdot \mu$ (pour $\alpha > 0$, μ mesure sur $(X, \mathcal{A})$) est également une mesure sur $(X, \mathcal{A})$, on a que pour $(\alpha_n)_{n\geqslant 0} \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^{\mathbb{N}}$: $\mu = \sum_{n\geqslant 0} \alpha_n \mu_n$ est une mesure également.

3.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$.
     — $\mu_n(\emptyset) = |\emptyset| = 0$.
     — La σ-additivité est triviale par la σ-additivité de la mesure de comptage.

     De plus, pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $n \in \mathbb{N}$: $\mu_n(A) = \big|\underbrace{A \cap [n, +\infty)}_{\supseteq A\cap[n+1,+\infty)}\big| \geqslant \mu_{n+1}(A)$.
   — Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Deux cas sont à distinguer :
     (a) Soit A est fini, en quel cas $\max A$ est fini et donc $\forall n > \max A$: $\mu_n(A) = 0$, et donc $\mu(A) = 0$.
     (b) Soit A est infini, et donc dénombrable. On a alors $\forall n \geqslant 0 : A \cap [n, +\infty) \neq \emptyset$ car si il existe un $n \geqslant 0$ tel que $A \cap [n, +\infty) = \emptyset$, alors $A \subset [0, n) \cap \mathbb{N}$, et donc A est fini. Dès lors $\mu(A) > 0$.
     De plus : $\forall n \geqslant 0 : \mu_n(A) = +\infty$. Car si $\exists n \geqslant 0$ s.t. $\mu_n(A) \lneq +\infty$, alors $\mu_n(A) = \big|A \cap [n, +\infty)\big| = k \in \mathbb{N}$ et donc $A \cap [n, +\infty) = \{m_1, \dots, m_k\}$. Dans ce cas : $\mu_{m_k+1}(A) = 0$, ce qui est une contradiction.
     On en déduit que si A est infini (dénombrable), alors $\mu(A) = +\infty$.

   μ vaut donc 0 sur les parties finies de $\mathbb{N}$ et $+\infty$ sur les parties dénombrables. μ n'est donc pas une mesure car : $\mu(\mathbb{N}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{n\}) = \sum_{n\geqslant 0} 0 = 0 \neq +\infty$.

□

Exercice 2.9. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

1. *Mq :*

$$\mu\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

2. *Si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *s.t.* $\mu\left(\bigcup_{n \geqslant n_0} A_n\right) \leqslant +\infty$, *mq :*

$$\mu\left(\limsup_{n \to +\infty} A_n\right) \geqslant \limsup_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$

Résolution.

1. Pour $n \geqslant 0$: on pose $B_n \coloneqq \cap_{m \geqslant n} A_m$. La suite $(B_n)_{n \geqslant 0}$ est trivialement croissante. On a donc :

$$\mu\left(\liminf_{n \to +\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geqslant 0} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B_n),$$

   et :

$$\liminf_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \lim_{n \to +\infty} \inf_{k \geqslant n} \mu(A_k).$$

   De plus : $\mu(B_n) = \mu\left(\bigcap_{k \geqslant n} A_k\right) \leqslant \mu(A_m)$ pour $m \geqslant n$ par monotonie de μ, et donc en particulier $\mu(B_n) \leqslant \inf_{k \geqslant n} \mu(A_k)$. Dès lors la suite $\mu(B_n)_n$ est dominée par $(\inf_{k \geqslant n} \mu(A_k))_n$. Dès lors :

$$\mu\left(\liminf_{n \to +\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B_n) \leqslant \lim_{n \to +\infty} \inf_{k \geqslant n} \mu(A_k) = \liminf_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$

2. On pose $C_n \coloneqq \bigcup_{m \geqslant n} A_m$. On sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\mu\left(C_{n_0}\right) \lneqq +\infty$. Les C_n forment une suite décroissante. On a donc :

$$\mu\left(\limsup_{n \to +\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n \geqslant 0} C_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(C_n).$$

   De plus :

$$\limsup_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \lim_{n \to +\infty} \sup_{k \geqslant n} \mu(A_k).$$

   Or $\forall k \geqslant n : C_n \supseteq A_k$ et donc $\forall k \geqslant n : \mu(C_n) \geqslant \mu(A_k)$, et en prticulier $\mu(C_n) \geqslant \sup_{k \geqslant n} \mu(A_k)$. Dès lors on conclut :

$$\mu\left(\limsup_{n \to +\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(C_n) \geqslant \lim_{n \to +\infty} \sup_{k \geqslant n} \mu(A_k) = \limsup_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$

□

Exercice 2.10. *Soit* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable. Soient* μ, ν *deux mesures finies sur* $(X, \mathcal{A})$ *telles que* $\forall A \in \mathcal{A}$: $\mu(A) \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(A) = \nu(A)$.

1. *Mq* $\mu = \nu$.
2. *Mq le résultat est faux si l'inégalité est changée en inégalité stricte.*

Résolution.

1. Soit $B \in \mathcal{A}$ s.t. $\mu(B) \gneqq \frac{1}{2}$. Alors $\mu(B^{\complement}) = \mu(X) - \mu(B) = 1 - \mu(B) < \frac{1}{2}$. Dès lors $\mu(B^{\complement}) = \nu(B^{\complement})$ par hypothèse, et on en déduit $\mu(B) = 1 - \mu(B^{\complement}) = 1 - \nu(B^{\complement}) = \nu(B)$, et donc $\mu = \nu$.

2. Si l'inégalité devient stricte, on peut choisir, sur l'espace mesurable $(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$, μ la mesure d'une Bernoulli de proba $\frac{1}{2}$ et ν la mesure d'une Bernoulli de proba $\frac{1}{3}$. On a alors :

A	$\mu(A)$	$\nu(A)$
$\emptyset$	0	0
$\{0\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
$\{1\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$\{0,1\}$	1	1

Puisque $\mathcal{B} := \{A \in \mathcal{P}(\{0,1\}) \text{ s.t. } \mu(A) \lneqq \frac{1}{2}\} = \{\emptyset\}$, on a bien $\mu = \nu$ sur $\mathcal{B}$, mais $\mu \neq \nu$.

□

Exercice 2.11. *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et une partie stable par intersections finies $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ s.t. $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$. Si μ et ν sont deux mesures finies sur $(X, \mathcal{A})$ telles que $\nu(X) = \mu(X)$ et $\mu = \nu$ sur $\mathcal{F}$. Mq $\mu = \nu$.*

Résolution. On pose $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} \text{ s.t. } \mu(A) = \nu(A)\}$. Mq $\mathcal{D}$ est une classe de Dynkin :
— $\emptyset \in \mathcal{D}$ car $\mu(\emptyset) = 0 = \nu(\emptyset)$.
— Soit $A \in \mathcal{D}$. $\mu(A^{\complement}) = \mu(X) - \mu(A) = \nu(X) - \nu(A) = \nu(A^{\complement})$ et donc $A^{\complement} \in \mathcal{D}$.
— Soient $(A_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints et $A := \bigsqcup_{n \geqslant 0} A_n$.

$$\mu(A) = \sum_{n \geqslant 0} \mu(A_n) = \sum_{n \geqslant 0} \nu(A_n) = \nu(A).$$

On en conclut $A \in \mathcal{D}$.

De plus par hypothèse $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$, et donc par l'exercice 1.5 on a $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$. Dès lors $\mu = \nu$ sur $\mathcal{A}$, et donc $\mu = \nu$. □

3 Séance 3

Exercice 3.1. *Soient $\mathbb{B}$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}$ la mesure de Lesbesgue sur $\mathbb{B}$.*

1. *Mq $\forall x \in \mathbb{R} : \{x\} \in \mathbb{B}$.*
2. *Mq $\mathbb{Q} \in \mathbb{B}$ et $\mathcal{L}(\mathbb{Q}) = 0$.*
3. *Mq une union non-dénombrable d'ensembles négligeables n'est pas nécessairement négligeable.*
4. *Mq $N \in \mathbb{B}$ est un ensemble négligeable ssi $\forall \varepsilon > 0 : \exists U_\varepsilon$ s.t. $N \subseteq U_\varepsilon$ et $\mathcal{L}(U_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Résolution.

1. $\{x\} = [x, x]$ est fermé dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{L}(\{x\}) = x - x = 0$.
2. $\mathcal{L}(\mathbb{Q}) = \mathcal{L}(\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mathcal{L}(\{q\}) = 0$.
3. $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = +\infty$, or : $\bigsqcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$.
4. $\Leftarrow$: par monotonie, si $\forall \varepsilon > 0 : N \subseteq U_\varepsilon$, alors $\mathcal{L}(N) \leqslant \mathcal{L}(U_\varepsilon) < \varepsilon$. On en déduit $\mathcal{L}(N) = 0$, et donc N est négligeable.
   $\Rightarrow$: Soit $N \in \mathbb{B}$ s.t. $\mathcal{L}(N) = 0$. Pour $\varepsilon > 0$: mq $\exists U_\varepsilon$ ouvert s.t. $\mathcal{L}(U_\varepsilon) < \varepsilon$. Rappelons la mesure extérieure de Lebesgue : $\mathcal{L}^*(A) \coloneqq \inf_{(I_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{C}_A} \sum_{n \geqslant 0} \mathrm{Vol}(I_n)$.
   Soit $(I_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{C}_N$. Les I_n sont compacts. On peut prendre une nouvelle suite $(J_n)_{n \geqslant 0}$ s.t. $\forall n \geqslant 0$: $\mathrm{Vol}(\overline{J_n}) < \mathrm{Vol}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ et $I_n \subseteq J_n$. Par σ-sous-additivité (parce que les J_n ne sont pas forcément mutuellement disjoints), pour $J = \bigcup_{n \geqslant 0} J_n \supseteq N$:
   $$\mathcal{L}^*(N) \leqslant \mathcal{L}^*(\bigcup_{n \geqslant 0} J_n) \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \mathcal{L}^*(J_n).$$
   Or, pour $n \geqslant 0 : \mathcal{L}^*(J_n) \leqslant \mathrm{Vol}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Finalement :
   $$\mathcal{L}^*(N) < \sum_{n \geqslant 0} \left(\mathrm{Vol}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) = 0 + \varepsilon$$

□

Exercice 3.2. *Montrer qu'une droite E dans $\mathbb{R}^2$ est de mesure nulle pour $\mathcal{L}$.*

Résolution. À $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ fixés, $E = \{x + ty\}_{t \in \mathbb{R}}$. Pour $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, on définit $E_\alpha^\beta \coloneqq \{x + ty\}_{t \in [\alpha, \beta]}$. Mq $\mathcal{L}(E_\alpha^\beta) = 0$.

Si $y = (0, \lambda)$ (ou si $y = (\lambda, 0)$ par symétrie), on peut recouvrir E_α^β par l'intervalle compact $[x_1 \pm \varepsilon] \times [x_2 + \alpha\lambda, x_2 + \beta\lambda]$ de volume arbitrairement petit (pour ε aussi petit que nécessaire), et donc $\mathcal{L}(E_\alpha^\beta) = 0$.

Sinon, soit $(I_n)_{n \geqslant 0}$ un recouvrement de E_α^β par des intervalles compacts. Pour $n \geqslant 0$: $I_n = [a_n^1, b_n^1] \times [a_n^2, b_n^2]$ et $\mathrm{Vol}(I_n) = (b_n^1 - a_n^1)(b_n^2 - a_n^2)$.

Montrons qu'il existe $(J_n)_{n \geqslant 0}$ s.t. $\sum_{n \geqslant 0} \mathrm{Vol}(J_n) < \frac{1}{2} \sum_{n \geqslant 0} \mathrm{Vol}(I_n)$.

Soit $n \geqslant 0$. $I_n = [a_n^1, b_n^1] \times [a_n^2, b_n^2]$ où les 4 *coins* sont $C_1 = (a_n^1, a_n^2), C_2 = (a_n^1, b_n^2), C_3 = (b_n^1, a_n^2), C_4 = (b_n^1, b_n^2)$. WLOG supposons $\left| E_\alpha^\beta \cap \{C_i\}_{i=1}^4 \right| = 2$, i.e. E passe par deux coins de I_n (soit C_1 et C_3, soit C_2 et C_4) [1]. On définit alors :

$$\Big\{ J_{2n} \coloneqq [a_n^1, \tfrac{1}{2}(b_n^1 + a_n^1)] \times [a_n^2, \tfrac{1}{2}(b_n^2 + a_n^2)] J_{2n+1} \coloneqq [\tfrac{1}{2}(b_n^1 + a_n^1), b_n^1] \times [\tfrac{1}{2}(b_n^2 + a_n^2), b_n^2]$$

1. En effet, si ce n'est pas le cas, on peut "réduire" I_n afin que ce soit le cas (et qui est donc de volume strictement inférieur).

si $E \cap \{C_1, C_3\}$; et :

$$\Big\{ J_{2n} \coloneqq [a_n^1, \tfrac{1}{2}(b_n^1 + a_n^1)] \times [\tfrac{1}{2}(b_n^2 + a_n^2), b_n^2] J_{2n+1} \coloneqq [\tfrac{1}{2}(b_n^1 + a_n^1), b_n^1] \times [a_n^2, \tfrac{1}{2}(b_n^2 + a_n^2)]$$

sinon.

On a bien $\mathrm{Vol}(I_n) = 2\left(\mathrm{Vol}(J_{2n} + \mathrm{Vol}(J_{2n+1}))\right)$, et donc $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Vol}(I_n) = 2\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Vol}(J_n)$.

Et donc :

$$\mathcal{L}^*(E_\alpha^\beta) = \inf_{(I_n)_n \in \mathcal{C}_{E_\alpha^\beta}} \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Vol}(I_n) = 0.$$

On a alors que E_α^β est mesurable et de mesure de Lebesgue nulle. Et on trouve que :

$$\mathcal{L}^*(E) = \mathcal{L}^*(\bigcup_{n\geqslant 0} E_{-n}^{+n}) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}^*(E_{-n}^{+n}) = 0.$$

Donc E est également mesurable pour $\mathcal{L}$ et est de mesure nulle. □

Exercice 3.3. *Pour* $B \in \mathbb{B}^n$ *et* $\lambda > 0$, *on définit* $\lambda B = \{\lambda b\}_{b\in B}$.

1. *Mq* $\forall \lambda > 0, B \in \mathbb{B}^n : \lambda B \in \mathbb{B}^n$.
2. *Mq* $\mathcal{L}(\lambda B) = \lambda^n \mathcal{L}(B)$.

Résolution. On note $\mathcal{B}_\lambda \coloneqq \{B \in \mathbb{B}^n \text{ s.t. } \lambda B \in \mathbb{B}^n\}$.

1.
   (a) Mq $\mathcal{B}_\lambda$ est une σ-algèbre.
   - $\emptyset \in \mathcal{B}_\lambda$ car $\lambda\emptyset = \emptyset$.
   - Soit $B \in \mathcal{B}_\lambda$. $\lambda B^{\complement} = (\lambda B)^{\complement} \in \mathbb{B}^n$ par stabilité par passage au complémentaire.
   - Soit $(B_n)_{n\geqslant 0} \in {\mathbb{B}^n}^{\mathbb{N}}$. $\lambda \bigcup_{n\geqslant 0} B_n = \{\lambda b \text{ s.t. } \exists n \geqslant 0, b \in B_n\} = \bigcup_{n\geqslant 0} \lambda B_n \in \mathbb{B}^n$ par stabilité d'unions dénombrables.

   (b) Mq $\left\{\prod_{k=1}^n (-\infty, b_k]\right\}_{(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n} \subset \mathcal{B}_\lambda$. Soit $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. On sait que $\prod_{k=1}^n (-\infty, b_k] \in \mathbb{B}^n$ et donc $\lambda \prod_{k=1}^n (-\infty, b_k] = \prod_{k=1}^n (-\infty, \lambda b_k] \in \mathbb{B}^n$. On a donc $\left\{\prod_{k=1}^n (-\infty, b_k]\right\}_{(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n} \subseteq \mathcal{B}_\lambda$. Et donc $\mathbb{B}^n \subseteq \sigma\left(\left\{\prod_{k=1}^n (-\infty, b_k]\right\}_{(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n}\right) \subseteq \mathcal{B}_\lambda \subseteq \mathbb{B}^n$, et donc $\mathcal{B}_\lambda = \mathbb{B}^n$.

2. On voit que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ recouvre B ssi $(\lambda I_n)_{n\geqslant 0}$ recouvre λB. Et donc :

$$\mathcal{L}^*(\lambda B) = \inf_{(I_n)_n \in \mathcal{C}_B} \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Vol}(\lambda I_n) = \inf_{(I_n)_n \in \mathcal{C}_B} \sum_{n\geqslant 0} \lambda^n \mathrm{Vol}(I_n) = \lambda^n \inf_{(I_n)_n \in \mathcal{C}_B} \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Vol}(I_n) = \lambda^n \mathcal{L}^*(B).$$

□

Exercice 3.4 (Vrai ou Faux)**.** *Justifier les affirmations suivantes :*

1. *Si* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *est négligeable, alors* $\overline{E}$ *est négligeable.*
2. *Il existe un ensemble non-mesurable sur* $\mathbb{R}^n$ *de complémentaire de mesure extérieure de Lebesgue nulle.*
3. *Il existe des ensemble non-mesurables dont l'union est mesurable.*
4. *Si* $A \subset \mathbb{R}^n$ *satisfait* $\mathcal{L}(\mathring{A}) = \mathcal{L}(\overline{A})$, *alors* A *est mesurable.*

Résolution.

1. Faux : $\mathbb{Q}$ est négligeable et $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ n'est pas négligeable.

2. Faux : si $A^{\complement}$ est de mesure extérieure de Lebesgue nulle, alors $A^{\complement}$ est mesurable, et donc $A^{\complement} \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^*}$. Or l'ensemble des mesurables est une σ-algèbre, et donc $A = A^{\complement^{\complement}} \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^*}$.
3. Vrai : si A est non-mesurable, alors $A^{\complement}$ ne l'est pas non plus. Or $\mathcal{M}_{\mathcal{L}^*} \ni X = A \cup A^{\complement}$.
4. Vrai : par définition de complétion de mesure. Si $\mathring{A}$ et $\overline{A}$ sont mesurables et de même mesure, alors $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$ et $\mathcal{L}(\overline{A} \setminus \mathring{A}) = 0$. Dès lors $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^*}$ et par monotonie : $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\mathring{A}) = \mathcal{L}(\overline{A})$.

$\square$