MATHF-3001 — Théorie de la mesure
Résolution des TPs

R. Petit

Année académique 2018 - 2019

1 Séance 1

> **Exercice 1.1.** *Soient* $(X, \mathcal{F})$ *un espace mesurable et* $Y \subset X$. *Mq* $\mathcal{F}_Y \coloneqq \mathcal{F} \cap Y$ *est une* σ*-algèbre sur* Y.

Résolution.

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$, donc $\emptyset \cap Y = \emptyset \in \mathcal{F}_Y$.
2. Soit $F \in \mathcal{F}$. $F \cap Y \in \mathcal{F}_Y$ et donc :
$$Y \setminus (F \cap Y) = Y \setminus F \cup \emptyset = Y \cap F^{\complement} \in \mathcal{F}_Y$$
car $F^{\complement} \in \mathcal{F}$.
3. Soit $(F_n)_{n \geqslant 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. On sait que $\bigcup_{n \geqslant 0} F_n \in \mathcal{F}$. De plus $(F_n \cap Y)_{n \geqslant 0} \in {\mathcal{F}_Y}^{\mathbb{N}}$. Donc :
$$\bigcup_{n \geqslant 0} (F_n \cap Y) = \bigcup_{n \geqslant 0} F_n \cap Y \in \mathcal{F}_Y.$$

□

> **Exercice 1.2.**
> 1. *Soit* X *un ensemble fini. Décrire la* σ*-algèbre engendrée par la classe des parties finies de* X. *Que peut-on dire si* X *est fini ?*
> 2. *Dans* $X = [\![0, n]\!]$, *on considère* $\mathcal{A} = \{0\}$ *et* $\mathcal{B} = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$. *Décrire* $\sigma(\mathcal{A})$ *et* $\sigma(\mathcal{B})$.

Résolution.

1. Soit $\mathcal{F} = \sigma(\{Y \in \mathcal{P}(X) \text{ s.t. } Y \text{ est fini }\})$. Alors :
$$\mathcal{F} = \{Y \in \mathcal{P}(X) \text{ s.t. } Y \text{ est au plus dénombrable ou } Y^{\complement} \text{ est au plus dénombrable}\}$$
car la famille doit être stable par complémentaire (d'où la définition symétrique par complémentarité) et par union dénombrable (d'où le fait que Y ou $Y^{\complement}$ soit au plus dénombrable). Si X est fini, alors l'ensemble des parties finies de X est exactement $\mathcal{P}(X)$ qui est une σ-algèbre. Donc $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{P}(X)) = \mathcal{P}(X)$.
2. $\sigma(\mathcal{A})$ est la σ-algèbre engendrée par un unique élément donc : $\sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{0\}, \{0\}^{\complement}, [\![0, n]\!]\}$ où $\{0\}^{\complement} = [\![1, n]\!]$.
$\sigma(\mathcal{B}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, [\![3, n]\!], [\![1, n]\!], \{0\} \cup [\![3, n]\!], [\![0, n]\!]\}$.

□

Exercice 1.3. *Soient* X, Y *deux ensembles, et* $f : X \to Y$*.*

1. *Si* $\mathcal{F}$ *est une* σ*-algèbre sur* Y*, mq* $\mathcal{A} := f^{-1}(\mathcal{F})$ *est une* σ*-algèbre sur* X*.*
2. *Soit* $\mathcal{A}$ *une* σ*-algèbre sur* X*.*
   (a) *Mq* $\mathcal{F} := \{B \in \mathcal{P}(Y) \text{ s.t. } f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ *est une* σ*-algèbre sur* Y*.*
   (b) *Que peut-on dire de* $f(\mathcal{A})$ *?*

<u>*Résolution*</u>.

1.
   — $\emptyset \in \mathcal{F}$ donc $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}(\mathcal{F})$.
   — Soit $A \in \mathcal{A}$. Il existe $B \in \mathcal{F}$ s.t. $f^{-1}(B) = A$. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus A \in \mathcal{A}$.
   — Soit $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Il existe $(B_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ s.t. $\forall n \geqslant 0 : A_n = f^{-1}(B_n)$. $\bigcup_{n\geqslant 0} A_n = \bigcup_{n\geqslant 0} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\geqslant 0} B_n\right) \in f^{-1}(\mathcal{F})$.
2.
   (a)
   — $\emptyset \in \mathcal{A}$ donc $\emptyset \in \mathcal{F}$.
   — Soient $B \in \mathcal{F}$, $A := f^{-1}(B)$. $f^{-1}(B^{\complement}) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(B)^{\complement} \in \mathcal{A}$.
   — Soit $(B_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. On pose $B := \bigcup_{n\geqslant 0} B_n$.
   $$f^{-1}(B) = \bigcup_{n\geqslant 0} f^{-1}(B_n) = \bigcup_{n\geqslant 0} A_n \in \mathcal{A}$$
   où $\forall n \geqslant 0 : A_n = f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$. Donc $B \in \mathcal{F}$.

   (b) $f(\mathcal{A})$ n'est pas nécessairement une σ-algèbre : l'égalité $f(A^{\complement}) = f(A)^{\complement}$ n'est pas vraie en général. Par exemple pour $f : [\pm\varepsilon] \to [0, \varepsilon^2] : x \mapsto x^2$, on a :
   $$[0, \varepsilon^2] = f([-\varepsilon, 0]) = f([\pm\varepsilon] \setminus [0, +\varepsilon]) \neq f([\pm\varepsilon]) \setminus f([0, \varepsilon]) = [0, \varepsilon^2] \setminus [0, \varepsilon^2] = \emptyset.$$
   Donc rien ne garantit que $f(\mathcal{A})$ est stable par passage au complémentaire.
   TODO: Donner un contre-exemple avec des σ-algèbres finies sur de petits ensembles.

$\square$

Exercice 1.4. *Soient* $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ *espaces mesurables. Soit* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$*. Si* $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$*, mq* $f : X \to Y$ *est mesurable ssi* $f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$*.*

<u>*Résolution*</u>. <u>$\Rightarrow$</u> : en supposant f mesurable, si $B \in \mathcal{F}$, alors $B \in \mathcal{B}$ et donc $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

<u>$\Leftarrow$</u> : on pose $\mathcal{B}' := \{B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Par le point précédent, $\mathcal{B}'$ est une σ-algèbre. Par hypothèse : $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}'$, et donc $\sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{B}') = \mathcal{B}'$. Or $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$. De plus, puisque $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, on a $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, ce qui implique $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, i.e. :
$$\forall B \in \mathcal{B} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

$\square$

Exercice 1.5.

1. *Mq toute intersection (non-vide) de classes de Dynkin est une classe de Dynkin.*
2. *Mq pour tout* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ *il existe une plus petite classe de Dynkin au sens de l'inclusion (notée* $\lambda(\mathcal{F})$*).*
3. *Mq si* $\mathcal{D}$ *est une classe de Dynkin stable par intersections finies, alors* $\mathcal{D}$ *est une* σ*-algèbre.*

4. *Mq si $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ est stable par intersections finies, alors $\lambda(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$.*

<u>*Résolution*</u>.

1. [Exactement même raisonement que pour les σ-algèbres] Soit $(\mathcal{D}_i)_{i\in I}$ une famille non-vide de classes de Dynkin et soit $\mathcal{D} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{D}_i$.
   — $\forall i \in I : \emptyset \in \mathcal{D}_i$ donc $\emptyset \in \mathcal{D}$.
   — Soit $D \in \mathcal{D}$. Puisque $\forall i \in I : D \in \mathcal{D}_i$ et que les $\mathcal{D}_i$ sont des classes de Dynkin, on a $\forall i \in I : D^{\complement} \in \mathcal{D}_i$ et donc $D^{\complement} \in \mathcal{D}$.
   — Soit $(D_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$. On sait que $\forall i \in I : \bigsqcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}_i$ et donc $\bigsqcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}$.
2. Comme pour les σ-algèbres, on peut définir :
$$\lambda(\mathcal{F}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{D}\text{ Dynkin} \\ \mathcal{F}\subset\mathcal{D}}} \mathcal{D}.$$
   Par le point ci-dessus, $\lambda(\mathcal{F})$ est une classe de Dynkin et toute classe de Dynkin $\mathcal{D}' \supset \mathcal{F}$ contient $\lambda(\mathcal{F})$ par définition.
3. Soit $\mathcal{D}$ une classe de Dynkin stable par intersections finies et soit $(D_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$. Montrons donc que $\bigcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}$. On pose $B_0 := D_0$ et pour $n > 0$, on pose $B_n := A_n \cap (\bigcap_{j=1}^{n-1} B_j^{\complement})$. Par récurrence, on observe que les B_n sont dans $\mathcal{D}$ par stabilité sous intersections finies. De plus les B_n sont disjoints deux à deux et leur union est égale à l'union des D_n. Donc $\bigcup_{n\geqslant 0} D_n \in \mathcal{D}$.
4. Soit $D \in \lambda(\mathcal{F})$. On pose $\mathcal{D}_D := \{Q \in \lambda(\mathcal{F}) \text{ s.t. } Q \cap D \in \lambda(\mathcal{F})\} \subset \lambda(\mathcal{F})$. Montrons que $\mathcal{D}_D$ est une classe de Dynkin.
   — $\emptyset \in \mathcal{D}_D$ puisque $\lambda(\mathcal{F}) \ni \emptyset = \emptyset \cap D$.
   — Soit $Q \in \mathcal{D}_D$. $Q^{\complement} \cap D = (D^{\complement} \cup Q)^{\complement} = (D^{\complement} \sqcup \underbrace{(Q \cap D)}_{\in\lambda(\mathcal{F})})^{\complement} \in \lambda(\mathcal{F})$ par stabilité par passage au complément, stabilité par union disjointe.
   — Soit $(Q_n)_{n\geqslant 0} \in {\mathcal{D}_D}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. On a :
$$\bigsqcup_{n\geqslant 0} Q_n \cap D = \bigsqcup_{n\geqslant 0} \underbrace{(Q_n \cap D)}_{\in\lambda(\mathcal{F})} \in \lambda(\mathcal{F}).$$
   On remarque également que si $D \in \mathcal{F} : \mathcal{F} \subset \mathcal{D}_D \subset \lambda(\mathcal{F})$, ce qui implique $\lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_D$.
   Or par symétrie de l'intersection, pour $D, Q \in \lambda(\mathcal{F})$ on a : $Q \in \mathcal{D}_D \iff D \in \mathcal{D}_Q$. Dès lors on a une équivalence entre les deux assertions suivantes :
   — $\forall (D, Q) \in \mathcal{F} \times \lambda(\mathcal{F}) : Q \in \mathcal{D}_D$ (autrement dit $\forall D \in \mathcal{F} : \lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_D$) ;
   — $\forall (D, Q) \in \mathcal{F} \times \lambda(\mathcal{F}) : D \in \mathcal{D}_Q$ (autrement dit $\forall Q \in \lambda(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subset \mathcal{D}_Q$).
   On peut alors en déduire que $\forall Q \in \lambda(\mathcal{F}) : \lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_Q$. Dès lors, montrer que $\lambda(\mathcal{F})$ est stable par instersections finies revient à montrer que $\forall D, Q \in \lambda(\mathcal{F}) : D \cap Q \in \lambda(\mathcal{F})$, i.e. $D \in \mathcal{D}_Q = \lambda(\mathcal{F})$. On a donc bien la stabilité de $\lambda(\mathcal{F})$ sous intersections finies, on peut donc déduire que $\lambda(\mathcal{F})$ est une σ-algèbre qui contient $\mathcal{F}$, donc $\sigma(\mathcal{F}) \subset \lambda(\mathcal{F})$. Or toute σ-algèbre est une classe de Dynkin, donc $\lambda(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{F})$, ce qui permet de conclure.

□

2 Séance 2

Exercice 2.1. *Soient* $(X,\mathcal{F})$ *un espace mesurable et* μ *une fonction additive sur* $\mathcal{A}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$. *Mq les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. μ *est* σ*-additive ;*
2. μ *est continue à gauche ;*
3. μ *est continue à droite.*

Donner un exemple de mesure $\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ *qui ne satisfait pas le point 3. Que faut-il ajouter comme hypothèse pour ce résultat ?*

Résolution.

1. ⇒ 2. Soit $(B_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. On pose $A_0 \coloneqq B_0$ et $\forall n > 0 : A_n \coloneqq B_n \setminus B_{n-1}$, ce qui donne (car les A_n sont dans $\mathcal{A}$) :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 0} B_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n\right) = \sum_{n\geqslant 0}\mu(A_n) = \lim_{N\to+\infty}\underbrace{\sum_{n=0}^{N}\mu(A_n)}_{=\mu(B_N)} = \lim_{N\to+\infty}\mu(B_N).$$

2. ⇒ 1. Soit $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. On pose $B_0 \coloneqq A_0$ et $\forall n > 0 : B_n \coloneqq A_n \cup B_{n-1}$. Les B_n forment une suite croissante dans $\mathcal{A}$. On a alors :

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geqslant 0} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty}\mu\left(\bigsqcup_{j=0}^{n} A_j\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n}\mu(A_j) = \sum_{n\geqslant 0}\mu(A_n).$$

2. ⇒ 3. Soit $(C_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante. On a alors que $({C_n}^{\complement})_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante dans $\mathcal{A}$. Donc :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 0} {C_n}^{\complement}\right) = \lim_{n\to+\infty}\mu({C_n}^{\complement}) = \mu(X) - \lim_{n\to+\infty}\mu({C_n}^{\complement})$$

car $\mu(X) < +\infty$. De plus :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 0} {C_n}^{\complement}\right) = \mu\left(\left(\bigcap_{n\geqslant 0} C_n\right)^{\complement}\right) = \mu(X) - \mu\left(\bigcap_{n\geqslant 0} C_n\right).$$

Par finitude de μ, on conclut :

$$\mu\left(\bigcap_{n\geqslant 0} C_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\mu(C_n).$$

3. ⇒ 2. Exactement même raisonnement par passage au complémentaire.

Si la mesure n'est pas finie, on peut construire une suite $(C_n)_n$ telle que $\forall n \geqslant 0 : \mu(C_n) = +\infty$ et $\bigcap_{n\geqslant 0} C_n = \emptyset$. Par exemple, dans l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \# = |\cdot|)$: $\forall n \geqslant 0 : C_n \coloneqq \{m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } m > n\}$ est de mesure $+\infty$ et $\bigcap_{n\geqslant 0} C_n = \emptyset$. On a donc :

$$\mu\left(\bigcap_{n\geqslant 0} C_n\right) = \mu(\emptyset) = 0 \neq +\infty = \lim_{n\to+\infty} +\infty = \lim_{n\to+\infty}\mu(C_n).$$

Il faut donc supposer que pour la suite $(C_n)_n$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\mu(C_n) \lneqq +\infty$ afin d'éviter le cas où $(\mu(C_n))_{n\geqslant 0}$ est infinie pour tous les termes. $\square$

Exercice 2.2. *Soit* X *un ensemble non dénombrable et* $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X)$ *s.t.* A *ou* $A^{\complement}$ *est dénombrable*$\}$*. Soit* $\mu : \mathcal{A} \to \{0,1\}$ *où* $\mu(A) = 0 \iff A$ *est dénombrable. Mq* μ *est une mesure sur* $(X, \mathcal{A})$*.*

Résolution. $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre (voir cours).

— $\mu(\emptyset) = 0$ car $\emptyset$ est fini.

— Soit $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. On note $A \coloneqq \bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n$. On a soit $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$, et :

$$\mu(A) = 0 \iff \underbrace{\forall n \geqslant 0 : \mu(A_n) = 0}_{\text{i.e. tous les } A_n \text{ dénombrables}},$$

et donc :

$$\mu(A) = 0 = \sum_{n\geqslant 0} 0 = \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n)$$

pour le premier cas. Pour le second cas, si $\mu(A) = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. ${A_{n_0}}^{\complement}$ est dénombrable (ou $\mu(A_{n_0}) = 1$), donc $\mu(A) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $n_1 \neq n_0$ s.t. ${A_{n_1}}^{\complement}$ est dénombrable ($\mu(A_{n_1}) = 1$). On a donc ${A_{n_0}}^{\complement}$ et ${A_{n_1}}^{\complement}$ dénombrables. Or $A_{n_0} \cap A_{n_1} = \emptyset$, donc $A_{n_0} \subseteq {A_{n_1}}^{\complement}$ ou $A_{n_1} \subseteq {A_{n_0}}^{\complement}$, ce qui implique A_{n_0} ou A_{n_1} dénombrable, ce qui est une contradiction car X est non-dénombrable.

$\square$

Exercice 2.3. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité. Mq* $\mathcal{T} \coloneqq \{A \in \mathcal{A}$ *s.t.* $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}\}$ *est une σ-algèbre.*

Résolution.

— $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ donc $\emptyset \in \mathcal{T}$.

— Soit $A \in \mathcal{T}$. En particulier $A \in \mathcal{A}$ et $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$. Puisque $\mathbb{P}$ est une mesure (finie), on a $\mathbb{P}(A^{\complement}) = \mathbb{P}(X) - \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$. Donc $A^{\complement} \in \mathcal{T}$.

— Soit $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. On note $A \coloneqq \bigcup_{n\geqslant 0} A_n$. Mq $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$.
  — si $\forall n \geqslant 0 : \mathbb{P}(A_n) = 0$, alors par σ-sous-additivité $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} P(A_n) = 0$.
  — si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\mathbb{P}(A_{n_0}) = 1$, alors par monotonie, puisque $A_{n_0} \subseteq A \subseteq X$:

$$1 = \mathbb{P}(A_{n_0}) \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(X) = 1.$$

$\square$

Exercice 2.4. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré,* $(Y, \mathcal{B})$ *un espace mesurable et* $g : X \to Y$ *une application mesurable. On pose :*

$$\nu : \mathcal{B} \to [0, +\infty] : B \mapsto \mu(g^{-1}(B)).$$

Mq ν *est une mesure sur* $(Y, \mathcal{B})$*.*

Résolution. On sait que $\forall B \in \mathcal{B} : g^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ puisque g est mesurable. Donc ν est bien définie. Mq ν est une mesure.

— $\nu(\emptyset) = \mu(g^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ car μ est une mesure.

— Soient $(B_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. Mq ν est σ-additive.

$$\nu\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} B_n\right) = \mu\left(g^{-1}\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} B_n\right)\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} g^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n\geqslant 0} \mu(g^{-1}(B_n)) = \sum_{n\geqslant 0} \nu(B_n).$$

$\square$

Exercice 2.5. *Soit* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable.*

1. *Pour* $x \in X$, *mq* δ_x *est une mesure.*
2. *Mq si* μ *est une mesure sur* $(X, \mathcal{A})$ *s.t.* $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \iff x \notin A$ *alors* $\exists C \gneqq 0$ *s.t.* $\mu = C\delta_x$.

Résolution.

1. Mq δ_x est une mesure.
   - $\delta_x(\emptyset) = 0$ car $x \notin \emptyset$.
   - Soit $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints. Mq $\delta_x(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n) = \sum_{n\geqslant 0} \delta_x(A_n)$.
     - Si $\delta_x(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n) = 0$, alors $\forall n \geqslant 0 : x \notin A_n$, i.e. $\forall n \geqslant 0 : \delta_x(A_n) = 0$.
     - Si $\delta_x(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n) = 1$, alors $\exists n_0$ s.t. $x \in A_{n_0}$. Et puisque les A_n sont disjoints, $\forall n \neq n_0 : x \notin A_n$.
2. Soient $B, C \in \mathcal{A}$ s.t. $\mu(B) \neq 0 \neq \mu(C)$. Alors $\delta_x(B) = 1 = \delta_x(C)$. Mq $\mu(B) = \mu(C)$. $B \cap C \neq \emptyset$ puisque $x \in B \cap C$. On pose $\tilde{C} := C \cap B^{\complement}$ et $\tilde{B} := C^{\complement} \cap B$. On a alors que B et $\tilde{C}$ sont disjoints (C et $\tilde{B}$ également). De plus, $x \notin \tilde{B}$ et $x \notin \tilde{C}$, et donc $\mu(\tilde{B}) = \mu(\tilde{C}) = 0$. On a donc :

$$\mu(C) = \mu(C) + \mu(\tilde{B}) = \mu(C \sqcup \tilde{B}) = \mu(B \cup C) = \mu(B \sqcup \tilde{C}) = \mu(B) + \mu(\tilde{C}) = \mu(B).$$

   On a donc $\mu : \mathcal{A} \to \{0, C\}$ où $\mu(A) \iff \delta_x(A) = 1$.

$\square$

Exercice 2.6. *Soit* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable. Mq la mesure de comptage est une mesure.*

Résolution.

- $|\emptyset| = 0$.
- La σ-additivité est triviale : $\left|\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n\right| = \sum_{n\geqslant 0} |A|_n$.

$\square$

Exercice 2.7. *Soit* X *un ensemble fini non-vide. Mq* $\mu = \frac{|\cdot|}{|X|}$ *est une mesure de proba sur* $(X, \mathcal{P}(X))$.

Résolution.

- $\mu(\emptyset) = 0/|X| = 0$.
- Soient $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints.

$$\mu(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n) = \frac{\sum_{n\geqslant 0} |A_n|}{|X|} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{|A_n|}{|X|}.$$

Note : si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, alors $\forall \alpha > 0 : \alpha\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty] : A \mapsto \alpha \cdot \mu(A)$ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. Donc l'exercice peut être simplement résolu par le fait que μ est la mesure de comptage normalisée par $|X| \in \mathbb{R}^{+*}$ $\square$

Exercice 2.8. *Soit* $(X, \mathcal{A})$ *un espace de mesure.*

1. *Soit* $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite croissante de mesures sur* $(X, \mathcal{A})$. *Mq* $\mu := \lim_{n\to+\infty} \mu_n$ *est une mesure.*
2. *Soit* $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de mesures. Est-ce que* $\mu := \sum_{n\geqslant 0} \mu_n$ *est une mesure ?*
3. *Pour* $n \geqslant 0$, *on définit la mesure* μ_n *sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *par* $\mu_n(A) = \left|A \cap [n, +\infty)\right|$.
   - *Mq* $\forall n \geqslant 0 : \mu_n$ *est bien une mesure et que la suite* $(\mu_n)_n$ *est décroissante.*
   - *Est-ce que* $\mu = \lim_{n\to+\infty} \mu_n$ *est une mesure sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *? Caractériser entièrement* μ.

Résolution.

1. On note que puisque la suite des μ_n est croissante, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A)$ est bien définie car soit la suite $(\mu_n(A))_n$ converge vers une valeur réelle, soit elle diverge vers $+\infty$.
   — $\mu(\emptyset) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(\emptyset) = 0$.
   — Soient $(A_n)_{n\geqslant 0}$ 2 à 2 disjoints.

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n\right) = \lim_{k\to+\infty} \mu_k\left(\bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n\right) = \lim_{k\to+\infty}\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\mu_k(A_n)$$
$$= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\lim_{k\to+\infty}\mu_k(A_n) = \sum_{n\geqslant 0}\lim_{k\to+\infty}\mu_k(A_n) = \sum_{n\geqslant 0}\mu(A_n).$$

2.
   — $\mu(\emptyset) = \sum_{n\geqslant 0}\mu_n(\emptyset) = 0$.
   — Soient $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints. On note $A \coloneqq \bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n$. Par non-négativité des $(\mu_k(A_n))_{n,k}$, on a que les sommes sur k et n commutent, i.e. :

$$\sum_{k\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0}\mu_k(A_n) = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 0}\mu_k(A_n),$$

   et donc $\mu(A) = \sum_{n\geqslant 0}\mu(A_n)$.

   On en déduit donc que $\mu = \sum_{k\geqslant 0}\mu_k$ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. De plus, puisque $\alpha\cdot\mu$ (pour $\alpha > 0$, μ mesure sur $(X,\mathcal{A})$) est également une mesure sur $(X,\mathcal{A})$, on a que pour $(\alpha_n)_{n\geqslant 0} \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^{\mathbb{N}}$: $\mu = \sum_{n\geqslant 0}\alpha_n\mu_n$ est une mesure également.
3.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$.
      — $\mu_n(\emptyset) = |\emptyset| = 0$.
      — La σ-additivité est triviale par la σ-additivité de la mesure de comptage.

      De plus, pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $n \in \mathbb{N}$: $\mu_n(A) = \big|\underbrace{A \cap [n, +\infty)}_{\supseteq A\cap[n+1,+\infty)}\big| \geqslant \mu_{n+1}(A)$.
   — Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Deux cas sont à distinguer :
      (a) Soit A est fini, en quel cas $\max A$ est fini et donc $\forall n > \max A$: $\mu_n(A) = 0$, et donc $\mu(A) = 0$.
      (b) Soit A est infini, et donc dénombrable. On a alors $\forall n \geqslant 0 : A \cap [n, +\infty) \neq \emptyset$ car si il existe un $n \geqslant 0$ tel que $A \cap [n, +\infty) = \emptyset$, alors $A \subset [0, n) \cap \mathbb{N}$, et donc A est fini. Dès lors $\mu(A) > 0$.
      De plus : $\forall n \geqslant 0 : \mu_n(A) = +\infty$. Car si $\exists n \geqslant 0$ s.t. $\mu_n(A) \lneq +\infty$, alors $\mu_n(A) = \big|A \cap [n, +\infty)\big| = k \in \mathbb{N}$ et donc $A \cap [n, +\infty) = \{m_1, \ldots, m_k\}$. Dans ce cas : $\mu_{m_k+1}(A) = 0$, ce qui est une contradiction.
      On en déduit que si A est infini (dénombrable), alors $\mu(A) = +\infty$.

   μ vaut donc 0 sur les parties finies de $\mathbb{N}$ et $+\infty$ sur les parties dénombrables. μ n'est donc pas une mesure car : $\mu(\mathbb{N}) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(\{n\}) = \sum_{n\geqslant 0} 0 = 0 \neq +\infty$.

□

Exercice 2.9. *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.*

1. Mq :

$$\mu\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) \leqslant \liminf_{n\to+\infty}\mu(A_n).$$

2. *Si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *s.t.* $\mu\left(\bigcup_{n \geqslant n_0} A_n\right) \leqslant +\infty$, *mq :*

$$\mu\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) \geqslant \limsup_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

<u>*Résolution*</u>.

1. Pour $n \geqslant 0$: on pose $B_n \coloneqq \cap_{m \geqslant n} A_m$. La suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ est trivialement croissante. On a donc :

$$\mu\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geqslant 0} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n),$$

et :

$$\liminf_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} \mu(A_k).$$

De plus : $\mu(B_n) = \mu\left(\bigcap_{k\geqslant n} A_k\right) \leqslant \mu(A_m)$ pour $m \geqslant n$ par monotonie de μ, et donc en particulier $\mu(B_n) \leqslant \inf_{k\geqslant n} \mu(A_k)$. Dès lors la suite $\mu(B_n)_n$ est dominée par $(\inf_{k\geqslant n} \mu(A_k))_n$. Dès lors :

$$\mu\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} \mu(A_k) = \liminf_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

2. On pose $C_n \coloneqq \bigcup_{m\geqslant n} A_m$. On sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\mu\left(C_{n_0}\right) \lneqq +\infty$. Les C_n forment une suite décroissante. On a donc :

$$\mu\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n\geqslant 0} C_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(C_n).$$

De plus :

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geqslant n} \mu(A_k).$$

Or $\forall k \geqslant n : C_n \supseteq A_k$ et donc $\forall k \geqslant n : \mu(C_n) \geqslant \mu(A_k)$, et en prticulier $\mu(C_n) \geqslant \sup_{k\geqslant n} \mu(A_k)$. Dès lors on conclut :

$$\mu\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(C_n) \geqslant \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geqslant n} \mu(A_k) = \limsup_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

□

Exercice 2.10. *Soit* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable. Soient* μ, ν *deux mesures finies sur* $(X, \mathcal{A})$ *telles que* $\forall A \in \mathcal{A}$: $\mu(A) \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(A) = \nu(A)$.

1. *Mq* $\mu = \nu$.
2. *Mq le résultat est faux si l'inégalité est changée en inégalité stricte.*

<u>*Résolution*</u>.

1. Soit $B \in \mathcal{A}$ s.t. $\mu(B) \gneqq \frac{1}{2}$. Alors $\mu(B^{\complement}) = \mu(X) - \mu(B) = 1 - \mu(B) < \frac{1}{2}$. Dès lors $\mu(B^{\complement}) = \nu(B^{\complement})$ par hypothèse, et on en déduit $\mu(B) = 1 - \mu(B^{\complement}) = 1 - \nu(B^{\complement}) = \nu(B)$, et donc $\mu = \nu$.

2. Si l'inégalité devient stricte, on peut choisir, sur l'espace mesurable $(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$, μ la mesure d'une Bernoulli de proba $\frac{1}{2}$ et ν la mesure d'une Bernoulli de proba $\frac{1}{3}$. On a alors :

A	$\mu(A)$	$\nu(A)$
$\emptyset$	0	0
$\{0\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
$\{1\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$\{0,1\}$	1	1

Puisque $\mathcal{B} := \{A \in \mathcal{P}(\{0,1\}) \text{ s.t. } \mu(A) \lneqq \frac{1}{2}\} = \{\emptyset\}$, on a bien $\mu = \nu$ sur $\mathcal{B}$, mais $\mu \neq \nu$.

□

Exercice 2.11. *Soient* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable et une partie stable par intersections finies* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ *s.t.* $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$. *Si* μ *et* ν *sont deux mesures finies sur* $(X, \mathcal{A})$ *telles que* $\nu(X) = \mu(X)$ *et* $\mu = \nu$ *sur* $\mathcal{F}$. *Mq* $\mu = \nu$.

Résolution. On pose $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} \text{ s.t. } \mu(A) = \nu(A)\}$. Mq $\mathcal{D}$ est une classe de Dynkin :
— $\emptyset \in \mathcal{D}$ car $\mu(\emptyset) = 0 = \nu(\emptyset)$.
— Soit $A \in \mathcal{D}$. $\mu(A^{\complement}) = \mu(X) - \mu(A) = \nu(X) - \nu(A) = \nu(A^{\complement})$ et donc $A^{\complement} \in \mathcal{D}$.
— Soient $(A_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints et $A := \bigsqcup_{n\geqslant 0} A_n$.

$$\mu(A) = \sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n) = \sum_{n\geqslant 0} \nu(A_n) = \nu(A).$$

On en conclut $A \in \mathcal{D}$.

De plus par hypothèse $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$, et donc par l'exercice 1.5 on a $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$. Dès lors $\mu = \nu$ sur $\mathcal{A}$, et donc $\mu = \nu$. □