

MATHF-3001 — Théorie de la mesure

Résolution des TP

R. Petit

Année académique 2018 - 2019

1 Séance 1

Exercice 1.1. Soient (X, \mathcal{F}) un espace mesurable et $Y \subset X$. On a $\mathcal{F}_Y := \mathcal{F} \cap Y$ est une σ -algèbre sur Y .

Résolution.

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$, donc $\emptyset \cap Y = \emptyset \in \mathcal{F}_Y$.
2. Soit $F \in \mathcal{F}$. $F \cap Y \in \mathcal{F}_Y$ et donc :

$$Y \setminus (F \cap Y) = Y \setminus F \cup \emptyset = Y \cap F^c \in \mathcal{F}_Y$$

car $F^c \in \mathcal{F}$.

3. Soit $(F_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. On sait que $\bigcup_{n \geq 0} F_n \in \mathcal{F}$. De plus $(F_n \cap Y)_{n \geq 0} \in \mathcal{F}_Y^{\mathbb{N}}$. Donc :

$$\bigcup_{n \geq 0} (F_n \cap Y) = \bigcup_{n \geq 0} F_n \cap Y \in \mathcal{F}_Y.$$

□

Exercice 1.2.

1. Soit X un ensemble fini. Décrire la σ -algèbre engendrée par la classe des parties finies de X . Que peut-on dire si X est fini ?
2. Dans $X = \llbracket 0, n \rrbracket$, on considère $\mathcal{A} = \{0\}$ et $\mathcal{B} = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$. Décrire $\sigma(\mathcal{A})$ et $\sigma(\mathcal{B})$.

Résolution.

1. Soit $\mathcal{F} = \sigma(\{Y \in \mathcal{P}(X) \text{ s.t. } Y \text{ est fini}\})$. Alors :

$$\mathcal{F} = \{Y \in \mathcal{P}(X) \text{ s.t. } Y \text{ est au plus dénombrable ou } Y^c \text{ est au plus dénombrable}\}$$

car la famille doit être stable par complémentaire (d'où la définition symétrique par complémentarité) et par union dénombrable (d'où le fait que Y ou Y^c soit au plus dénombrable). Si X est fini, alors l'ensemble des parties finies de X est exactement $\mathcal{P}(X)$ qui est une σ -algèbre. Donc $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{P}(X)) = \mathcal{P}(X)$.

2. $\sigma(\mathcal{A})$ est la σ -algèbre engendrée par un unique élément donc : $\sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{0\}, \{0\}^c, \llbracket 0, n \rrbracket\}$ où $\{0\}^c = \llbracket 1, n \rrbracket$.
 $\sigma(\mathcal{B}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, \llbracket 3, n \rrbracket, \llbracket 1, n \rrbracket, \{0\} \cup \llbracket 3, n \rrbracket, \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

□

Exercice 1.3. Soient X, Y deux ensembles, et $f : X \rightarrow Y$.

1. Si \mathcal{F} est une σ -algèbre sur Y , mq $\mathcal{A} := f^{-1}(\mathcal{F})$ est une σ -algèbre sur X .
2. Soit \mathcal{A} une σ -algèbre sur X .
 - (a) Mq $\mathcal{F} := \{B \in \mathcal{P}(Y) \text{ s.t. } f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une σ -algèbre sur Y .
 - (b) Que peut-on dire de $f(\mathcal{A})$?

Résolution.

1.
 - $\emptyset \in \mathcal{F}$ donc $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}(\mathcal{F})$.
 - Soit $A \in \mathcal{A}$. Il existe $B \in \mathcal{F}$ s.t. $f^{-1}(B) = A$. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus A \in \mathcal{A}$.
 - Soit $(A_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Il existe $(B_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ s.t. $\forall n \geq 0 : A_n = f^{-1}(B_n)$. $\bigcup_{n \geq 0} A_n = \bigcup_{n \geq 0} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right) \in f^{-1}(\mathcal{F})$.
2.
 - (a)
 - $\emptyset \in \mathcal{A}$ donc $\emptyset \in \mathcal{F}$.
 - Soient $B \in \mathcal{F}$, $A := f^{-1}(B)$. $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus A \in \mathcal{A}$.
 - Soit $(B_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. On pose $B := \bigcup_{n \geq 0} B_n$.

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-1}(B_n) = \bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{A}$$

où $\forall n \geq 0 : A_n = f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$. Donc $B \in \mathcal{F}$.

- (b) $f(\mathcal{A})$ n'est pas nécessairement une σ -algèbre : l'égalité $f(A^c) = f(A)^c$ n'est pas vraie en général. Par exemple pour $f : [\pm \varepsilon] \rightarrow [0, \varepsilon^2] : x \mapsto x^2$, on a :

$$[0, \varepsilon^2] = f([- \varepsilon, 0]) = f([\pm \varepsilon] \setminus [0, + \varepsilon]) \neq f([\pm \varepsilon]) \setminus f([0, \varepsilon]) = [0, \varepsilon^2] \setminus [0, \varepsilon^2] = \emptyset.$$

Donc rien ne garantit que $f(\mathcal{A})$ est stable par passage au complémentaire.

TODO: Donner un contre-exemple avec des σ -algèbres finies sur de petits ensembles.

□

Exercice 1.4. Soient $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ espaces mesurables. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$. Si $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$, mq $f : X \rightarrow Y$ est mesurable ssi $f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$.

Résolution. \Rightarrow : en supposant f mesurable, si $B \in \mathcal{F}$, alors $B \in \mathcal{B}$ et donc $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

\Leftarrow : on pose $\mathcal{B}' := \{B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Par le point précédent, \mathcal{B}' est une σ -algèbre. Par hypothèse : $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}'$, et donc $\sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{B}') = \mathcal{B}'$. Or $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$. De plus, puisque $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, on a $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, ce qui implique $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, i.e. :

$$\forall B \in \mathcal{B} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

□

Exercice 1.5.

1. Mq toute intersection (non-vide) de classes de Dynkin est une classe de Dynkin.
2. Mq pour tout $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ il existe une plus petite classe de Dynkin au sens de l'inclusion (notée $\lambda(\mathcal{F})$).
3. Mq si \mathcal{D} est une classe de Dynkin stable par intersections finies, alors \mathcal{D} est une σ -algèbre.

4. Ma si $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ est stable par intersections finies, alors $\lambda(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$.

Résolution.

1. [Exactement même raisonnement que pour les σ -algèbres] Soit $(\mathcal{D}_i)_{i \in I}$ une famille non-vide de classes de Dynkin et soit $\mathcal{D} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{D}_i$.
 - $\forall i \in I : \emptyset \in \mathcal{D}_i$ donc $\emptyset \in \mathcal{D}$.
 - Soit $D \in \mathcal{D}$. Puisque $\forall i \in I : D \in \mathcal{D}_i$ et que les \mathcal{D}_i sont des classes de Dynkin, on a $\forall i \in I : D^c \in \mathcal{D}_i$ et donc $D^c \in \mathcal{D}$.
 - Soit $(D_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$. On sait que $\forall i \in I : \bigcup_{n \geq 0} D_n \in \mathcal{D}_i$ et donc $\bigcup_{n \geq 0} D_n \in \mathcal{D}$.
2. Comme pour les σ -algèbres, on peut définir :

$$\lambda(\mathcal{F}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{D} \text{ Dynkin} \\ \mathcal{F} \subset \mathcal{D}}} \mathcal{D}.$$

Par le point ci-dessus, $\lambda(\mathcal{F})$ est une classe de Dynkin et toute classe de Dynkin $\mathcal{D}' \supset \mathcal{F}$ contient $\lambda(\mathcal{F})$ par définition.

3. Soit \mathcal{D} une classe de Dynkin stable par intersections finies et soit $(D_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$. Montrons donc que $\bigcup_{n \geq 0} D_n \in \mathcal{D}$. On pose $B_0 := D_0$ et pour $n > 0$, on pose $B_n := A_n \cap (\bigcap_{j=1}^{n-1} B_j^c)$. Par récurrence, on observe que les B_n sont dans \mathcal{D} par stabilité sous intersections finies. De plus les B_n sont disjoints deux à deux et leur union est égale à l'union des D_n . Donc $\bigcup_{n \geq 0} D_n \in \mathcal{D}$.
4. Soit $D \in \lambda(\mathcal{F})$. On pose $\mathcal{D}_D := \{Q \in \lambda(\mathcal{F}) \text{ s.t. } Q \cap D \in \lambda(\mathcal{F})\} \subset \lambda(\mathcal{F})$. Montrons que \mathcal{D}_D est une classe de Dynkin.
 - $\emptyset \in \mathcal{D}_D$ puisque $\lambda(\mathcal{F}) \ni \emptyset = \emptyset \cap D$.
 - Soit $Q \in \mathcal{D}_D$. $Q^c \cap D = (D^c \cup Q)^c = (D^c \sqcup \underbrace{(Q \cap D)}_{\in \lambda(\mathcal{F})})^c \in \lambda(\mathcal{F})$ par stabilité par passage au complément, stabilité par union disjointe.
 - Soit $(Q_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{D}_D^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. On a :

$$\bigcup_{n \geq 0} Q_n \cap D = \bigcup_{n \geq 0} \underbrace{(Q_n \cap D)}_{\in \lambda(\mathcal{F})} \in \lambda(\mathcal{F}).$$

On remarque également que si $D \in \mathcal{F} : \mathcal{F} \subset \mathcal{D}_D \subset \lambda(\mathcal{F})$, ce qui implique $\lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_D$.

Or par symétrie de l'intersection, pour $D, Q \in \lambda(\mathcal{F})$ on a : $Q \in \mathcal{D}_D \iff D \in \mathcal{D}_Q$. Dès lors on a une équivalence entre les deux assertions suivantes :

- $\forall (D, Q) \in \mathcal{F} \times \lambda(\mathcal{F}) : Q \in \mathcal{D}_D$ (autrement dit $\forall D \in \mathcal{F} : \lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_D$) ;
- $\forall (D, Q) \in \mathcal{F} \times \lambda(\mathcal{F}) : D \in \mathcal{D}_Q$ (autrement dit $\forall Q \in \lambda(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subset \mathcal{D}_Q$).

On peut alors en déduire que $\forall Q \in \lambda(\mathcal{F}) : \lambda(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_Q$. Dès lors, montrer que $\lambda(\mathcal{F})$ est stable par intersections finies revient à montrer que $\forall D, Q \in \lambda(\mathcal{F}) : D \cap Q \in \lambda(\mathcal{F})$, i.e. $D \in \mathcal{D}_Q = \lambda(\mathcal{F})$. On a donc bien la stabilité de $\lambda(\mathcal{F})$ sous intersections finies, on peut donc déduire que $\lambda(\mathcal{F})$ est une σ -algèbre qui contient \mathcal{F} , donc $\sigma(\mathcal{F}) \subset \lambda(\mathcal{F})$. Or toute σ -algèbre est une classe de Dynkin, donc $\lambda(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{F})$, ce qui permet de conclure.

□

2 Séance 2

Exercice 2.1. Soient (X, \mathcal{F}) un espace mesurable et μ une fonction additive sur \mathcal{A} à valeurs dans \mathbb{R}^+ . Mq les conditions suivantes sont équivalentes :

1. μ est σ -additive ;
2. μ est continue à gauche ;
3. μ est continue à droite.

Donner un exemple de mesure $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ qui ne satisfait pas le point 3. Que faut-il ajouter comme hypothèse pour ce résultat ?

Résolution.

1. \Rightarrow 2. Soit $(B_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. On pose $A_0 := B_0$ et $\forall n > 0 : A_n := B_n \setminus B_{n-1}$, ce qui donne (car les A_n sont dans \mathcal{A}) :

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq 0} B_n \right) = \mu \left(\bigsqcup_{n \geq 0} A_n \right) = \sum_{n \geq 0} \mu(A_n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^N \mu(A_n)}_{=\mu(B_N)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mu(B_N).$$

2. \Rightarrow 1. Soit $(A_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. On pose $B_0 := A_0$ et $\forall n > 0 : B_n := A_n \cup B_{n-1}$. Les B_n forment une suite croissante dans \mathcal{A} . On a alors :

$$\mu \left(\bigsqcup_{n \geq 0} A_n \right) = \mu \left(\bigcup_{n \geq 0} B_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu \left(\bigsqcup_{j=0}^n A_j \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^n \mu(A_j) = \sum_{n \geq 0} \mu(A_n).$$

2. \Rightarrow 3. Soit $(C_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante. On a alors que $(C_n^c)_{n \geq 0}$ est une suite croissante dans \mathcal{A} . Donc :

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq 0} C_n^c \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(C_n^c) = \mu(X) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(C_n^c)$$

car $\mu(X) < +\infty$. De plus :

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq 0} C_n^c \right) = \mu \left(\left(\bigcap_{n \geq 0} C_n \right)^c \right) = \mu(X) - \mu \left(\bigcap_{n \geq 0} C_n \right).$$

Par finitude de μ , on conclut :

$$\mu \left(\bigcap_{n \geq 0} C_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(C_n).$$

3. \Rightarrow 2. Exactement même raisonnement par passage au complémentaire.

Si la mesure n'est pas finie, on peut construire une suite $(C_n)_n$ telle que $\forall n \geq 0 : \mu(C_n) = +\infty$ et $\bigcap_{n \geq 0} C_n = \emptyset$. Par exemple, dans l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \# = |\cdot|) : \forall n \geq 0 : C_n := \{m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } m > n\}$ est de mesure $+\infty$ et $\bigcap_{n \geq 0} C_n = \emptyset$. On a donc :

$$\mu \left(\bigcap_{n \geq 0} C_n \right) = \mu(\emptyset) = 0 \neq +\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} +\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(C_n).$$

Il faut donc supposer que pour la suite $(C_n)_n$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\mu(C_n) \leq +\infty$ afin d'éviter le cas où $(\mu(C_n))_{n \geq 0}$ est infinie pour tous les termes. \square

Exercice 2.2. Soit X un ensemble non dénombrable et $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X) \text{ s.t. } A \text{ ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$. Soit $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$ où $\mu(A) = 0 \iff A \text{ est dénombrable}$. Mq μ est une mesure sur (X, \mathcal{A}) .

Résolution. \mathcal{A} est une σ -algèbre (voir cours).

- $\mu(\emptyset) = 0$ car \emptyset est fini.
- Soit $(A_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. On note $A := \bigsqcup_{n \geq 0} A_n$. On a soit $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$, et :

$$\mu(A) = 0 \iff \underbrace{\forall n \geq 0 : \mu(A_n) = 0}_{\text{i.e. tous les } A_n \text{ dénombrables}},$$

et donc :

$$\mu(A) = 0 = \sum_{n \geq 0} 0 = \sum_{n \geq 0} \mu(A_n)$$

pour le premier cas. Pour le second cas, si $\mu(A) = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $A_{n_0}^c$ est dénombrable (ou $\mu(A_{n_0}) = 1$), donc $\mu(A) \leq \sum_{n \geq 0} \mu(A_n)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $n_1 \neq n_0$ s.t. $A_{n_1}^c$ est dénombrable ($\mu(A_{n_1}) = 1$). On a donc $A_{n_0}^c$ et $A_{n_1}^c$ dénombrables. Or $A_{n_0} \cap A_{n_1} = \emptyset$, donc $A_{n_0} \subseteq A_{n_1}^c$ ou $A_{n_1} \subseteq A_{n_0}^c$, ce qui implique A_{n_0} ou A_{n_1} dénombrable, ce qui est une contradiction car X est non-dénombrable. \square

Exercice 2.3. Soit $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Mq $\mathcal{T} := \{A \in \mathcal{A} \text{ s.t. } \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}\}$ est une σ -algèbre.

Résolution.

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ donc $\emptyset \in \mathcal{T}$.
- Soit $A \in \mathcal{T}$. En particulier $A \in \mathcal{A}$ et $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. Puisque \mathbb{P} est une mesure (finie), on a $\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(X) - \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. Donc $A^c \in \mathcal{T}$.
- Soit $(A_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. On note $A := \bigcup_{n \geq 0} A_n$. Mq $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.
 - si $\forall n \geq 0 : \mathbb{P}(A_n) = 0$, alors par σ -sous-additivité $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n) = 0$.
 - si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\mathbb{P}(A_{n_0}) = 1$, alors par monotonie, puisque $A_{n_0} \subseteq A \subseteq X$:

$$1 = \mathbb{P}(A_{n_0}) \leq \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(X) = 1.$$

\square

Exercice 2.4. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, (Y, \mathcal{B}) un espace mesurable et $g : X \rightarrow Y$ une application mesurable. On pose :

$$\nu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty] : B \mapsto \mu(g^{-1}(B)).$$

Mq ν est une mesure sur (Y, \mathcal{B}) .

Résolution. On sait que $\forall B \in \mathcal{B} : g^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ puisque g est mesurable. Donc ν est bien définie. Mq ν est une mesure.

- $\nu(\emptyset) = \mu(g^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ car μ est une mesure.
- Soient $(B_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints. Mq ν est σ -additive.

$$\nu\left(\bigsqcup_{n \geq 0} B_n\right) = \mu\left(g^{-1}\left(\bigsqcup_{n \geq 0} B_n\right)\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n \geq 0} g^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n \geq 0} \mu(g^{-1}(B_n)) = \sum_{n \geq 0} \nu(B_n).$$

□

Exercice 2.5. Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable.

1. Pour $x \in X$, $m_x \delta_x$ est une mesure.
2. Mq si μ est une mesure sur (X, \mathcal{A}) s.t. $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \iff x \notin A$ alors $\exists C \geq 0$ s.t. $\mu = C \delta_x$.

Résolution.

1. Mq δ_x est une mesure.
 - $\delta_x(\emptyset) = 0$ car $x \notin \emptyset$.
 - Soit $(A_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints. Mq $\delta_x(\bigsqcup_{n \geq 0} A_n) = \sum_{n \geq 0} \delta_x(A_n)$.
 - Si $\delta_x(\bigsqcup_{n \geq 0} A_n) = 0$, alors $\forall n \geq 0 : x \notin A_n$, i.e. $\forall n \geq 0 : \delta_x(A_n) = 0$.
 - Si $\delta_x(\bigsqcup_{n \geq 0} A_n) = 1$, alors $\exists n_0$ s.t. $x \in A_{n_0}$. Et puisque les A_n sont disjoints, $\forall n \neq n_0 : x \notin A_n$.
2. Soient $B, C \in \mathcal{A}$ s.t. $\mu(B) \neq 0 \neq \mu(C)$. Alors $\delta_x(B) = 1 = \delta_x(C)$. Mq $\mu(B) = \mu(C)$. $B \cap C \neq \emptyset$ puisque $x \in B \cap C$. On pose $\tilde{C} := C \cap B^c$ et $\tilde{B} := C^c \cap B$. On a alors que B et \tilde{C} sont disjoints (C et \tilde{B} également). De plus, $x \notin \tilde{B}$ et $x \notin \tilde{C}$, et donc $\mu(\tilde{B}) = \mu(\tilde{C}) = 0$. On a donc :

$$\mu(C) = \mu(C) + \mu(\tilde{B}) = \mu(C \sqcup \tilde{B}) = \mu(B \cup C) = \mu(B \sqcup \tilde{C}) = \mu(B) + \mu(\tilde{C}) = \mu(B).$$

On a donc $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \{0, C\}$ où $\mu(A) \iff \delta_x(A) = 1$.

□

Exercice 2.6. Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable. Mq la mesure de comptage est une mesure.

Résolution.

- $|\emptyset| = 0$.
- La σ -additivité est triviale : $|\bigsqcup_{n \geq 0} A_n| = \sum_{n \geq 0} |A_n|$.

□

Exercice 2.7. Soit X un ensemble fini non-vidé. Mq $\mu = \frac{|\cdot|}{|X|}$ est une mesure de proba sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

Résolution.

- $\mu(\emptyset) = 0/|X| = 0$.
- Soient $(A_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints.

$$\mu\left(\bigsqcup_{n \geq 0} A_n\right) = \frac{\sum_{n \geq 0} |A_n|}{|X|} = \sum_{n \geq 0} \frac{|A_n|}{|X|}.$$

Note : si (X, \mathcal{A}, μ) est un espace mesuré, alors $\forall \alpha > 0 : \alpha \mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty] : A \mapsto \alpha \cdot \mu(A)$ est une mesure sur (X, \mathcal{A}) . Donc l'exercice peut être simplement résolu par le fait que μ est la mesure de comptage normalisée par $|X| \in \mathbb{R}^{+*}$

□

Exercice 2.8. Soit (X, \mathcal{A}) un espace de mesure.

1. Soit $(\mu_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de mesures sur (X, \mathcal{A}) . Mq $\mu := \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n$ est une mesure.
2. Soit $(\mu_n)_{n \geq 0}$ une suite de mesures. Est-ce que $\mu := \sum_{n \geq 0} \mu_n$ est une mesure ?
3. Pour $n \geq 0$, on définit la mesure μ_n sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ par $\mu_n(A) = |A \cap [n, +\infty)|$.
 - Mq $\forall n \geq 0 : \mu_n$ est bien une mesure et que la suite $(\mu_n)_n$ est décroissante.
 - Est-ce que $\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n$ est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$? Caractériser entièrement μ .

Résolution.

1. On note que puisque la suite des μ_n est croissante, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A)$ est bien définie car soit la suite $(\mu_n(A))_n$ converge vers une valeur réelle, soit elle diverge vers $+\infty$.
 - $\mu(\emptyset) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(\emptyset) = 0$.
 - Soient $(A_n)_{n \geq 0}$ 2 à 2 disjoints.

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigsqcup_{n \geq 0} A_n \right) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k \left(\bigsqcup_{n \geq 0} A_n \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \mu_k(A_n) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k(A_n) = \sum_{n \geq 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k(A_n) = \sum_{n \geq 0} \mu(A_n). \end{aligned}$$

2.
 - $\mu(\emptyset) = \sum_{n \geq 0} \mu_n(\emptyset) = 0$.
 - Soient $(A_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints. On note $A := \bigsqcup_{n \geq 0} A_n$. Par non-négativité des $(\mu_k(A_n))_{n,k}$, on a que les sommes sur k et n commutent, i.e. :

$$\sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} \mu_k(A_n) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \mu_k(A_n),$$

et donc $\mu(A) = \sum_{n \geq 0} \mu(A_n)$.

On en déduit donc que $\mu = \sum_{k \geq 0} \mu_k$ est une mesure sur (X, \mathcal{A}) . De plus, puisque $\alpha \cdot \mu$ (pour $\alpha > 0$, μ mesure sur (X, \mathcal{A})) est également une mesure sur (X, \mathcal{A}) , on a que pour $(\alpha_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$: $\mu = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \mu_n$ est une mesure également.

3.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - $\mu_n(\emptyset) = |\emptyset| = 0$.
 - La σ -additivité est triviale par la σ -additivité de la mesure de comptage.
 - De plus, pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $n \in \mathbb{N}$: $\mu_n(A) = \underbrace{|A \cap [n, +\infty)|}_{\geq |A \cap [n+1, +\infty)|} \geq \mu_{n+1}(A)$.
 - Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Deux cas sont à distinguer :
 - (a) Soit A est fini, en quel cas $\max A$ est fini et donc $\forall n > \max A : \mu_n(A) = 0$, et donc $\mu(A) = 0$.
 - (b) Soit A est infini, et donc dénombrable. On a alors $\forall n \geq 0 : A \cap [n, +\infty) \neq \emptyset$ car si il existe un $n \geq 0$ tel que $A \cap [n, +\infty) = \emptyset$, alors $A \subset [0, n) \cap \mathbb{N}$, et donc A est fini. Dès lors $\mu(A) > 0$.
De plus : $\forall n \geq 0 : \mu_n(A) = +\infty$. Car si $\exists n \geq 0$ s.t. $\mu_n(A) < +\infty$, alors $\mu_n(A) = |A \cap [n, +\infty)| = k \in \mathbb{N}$ et donc $A \cap [n, +\infty) = \{m_1, \dots, m_k\}$. Dans ce cas : $\mu_{m_k+1}(A) = 0$, ce qui est une contradiction.
 - On en déduit que si A est infini (dénombrable), alors $\mu(A) = +\infty$.
 - μ vaut donc 0 sur les parties finies de \mathbb{N} et $+\infty$ sur les parties dénombrables. μ n'est donc pas une mesure car : $\mu(\mathbb{N}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\{n\}) = \sum_{n \geq 0} 0 = 0 \neq +\infty$.

□

Exercice 2.9. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $(A_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

1. Mq :

$$\mu \left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n \right) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

2. Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\mu\left(\bigcup_{n \geq n_0} A_n\right) \leq +\infty$, mq :

$$\mu\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

Résolution.

1. Pour $n \geq 0$: on pose $B_n := \bigcap_{m \geq n} A_m$. La suite $(B_n)_{n \geq 0}$ est trivialement croissante. On a donc :

$$\mu\left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n),$$

et :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} \mu(A_k).$$

De plus : $\mu(B_n) = \mu\left(\bigcap_{k \geq n} A_k\right) \leq \mu(A_m)$ pour $m \geq n$ par monotonie de μ , et donc en particulier $\mu(B_n) \leq \inf_{k \geq n} \mu(A_k)$. Dès lors la suite $\mu(B_n)_n$ est dominée par $(\inf_{k \geq n} \mu(A_k))_n$. Dès lors :

$$\mu\left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} \mu(A_k) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

2. On pose $C_n := \bigcup_{m \geq n} A_m$. On sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\mu(C_{n_0}) < +\infty$. Les C_n forment une suite décroissante. On a donc :

$$\mu\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n \geq 0} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(C_n).$$

De plus :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} \mu(A_k).$$

Or $\forall k \geq n : C_n \supseteq A_k$ et donc $\forall k \geq n : \mu(C_n) \geq \mu(A_k)$, et en particulier $\mu(C_n) \geq \sup_{k \geq n} \mu(A_k)$. Dès lors on conclut :

$$\mu\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(C_n) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} \mu(A_k) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

□

Exercice 2.10. Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable. Soient μ, ν deux mesures finies sur (X, \mathcal{A}) telles que $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(A) = \nu(A)$.

1. Mq $\mu = \nu$.

2. Mq le résultat est faux si l'inégalité est changée en inégalité stricte.

Résolution.

1. Soit $B \in \mathcal{A}$ s.t. $\mu(B) \geq \frac{1}{2}$. Alors $\mu(B^c) = \mu(X) - \mu(B) = 1 - \mu(B) < \frac{1}{2}$. Dès lors $\mu(B^c) = \nu(B^c)$ par hypothèse, et on en déduit $\mu(B) = 1 - \mu(B^c) = 1 - \nu(B^c) = \nu(B)$, et donc $\mu = \nu$.

2. Si l'inégalité devient stricte, on peut choisir, sur l'espace mesurable $(\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\}))$, μ la mesure d'une Bernoulli de proba $\frac{1}{2}$ et ν la mesure d'une Bernoulli de proba $\frac{1}{3}$. On a alors :

A	$\mu(A)$	$\nu(A)$
\emptyset	0	0
$\{0\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
$\{1\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$\{0, 1\}$	1	1

Puisque $\mathcal{B} := \{A \in \mathcal{P}(\{0, 1\}) \text{ s.t. } \mu(A) \leq \frac{1}{2}\} = \{\emptyset\}$, on a bien $\mu = \nu$ sur \mathcal{B} , mais $\mu \neq \nu$.

□

Exercice 2.11. Soient (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et une partie stable par intersections finies $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ s.t. $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$. Si μ et ν sont deux mesures finies sur (X, \mathcal{A}) telles que $\nu(X) = \mu(X)$ et $\mu = \nu$ sur \mathcal{F} . Mq $\mu = \nu$.

Résolution. On pose $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} \text{ s.t. } \mu(A) = \nu(A)\}$. Mq \mathcal{D} est une classe de Dynkin :

- $\emptyset \in \mathcal{D}$ car $\mu(\emptyset) = 0 = \nu(\emptyset)$.
- Soit $A \in \mathcal{D}$. $\mu(A^c) = \mu(X) - \mu(A) = \nu(X) - \nu(A) = \nu(A^c)$ et donc $A^c \in \mathcal{D}$.
- Soient $(A_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints et $A := \bigcup_{n \geq 0} A_n$.

$$\mu(A) = \sum_{n \geq 0} \mu(A_n) = \sum_{n \geq 0} \nu(A_n) = \nu(A).$$

On en conclut $A \in \mathcal{D}$.

De plus par hypothèse $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$, et donc par l'exercice 1.5 on a $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$. Dès lors $\mu = \nu$ sur \mathcal{A} , et donc $\mu = \nu$. □

3 Séance 3

Exercice 3.1. Soient \mathbb{B} la tribu borélienne sur \mathbb{R} et \mathcal{L} la mesure de Lebesgue sur \mathbb{B} .

1. $Mq \forall x \in \mathbb{R} : \{x\} \in \mathbb{B}$.
2. $Mq \mathbb{Q} \in \mathbb{B}$ et $\mathcal{L}(\mathbb{Q}) = 0$.
3. Mq une union non-dénombrable d'ensembles négligeables n'est pas nécessairement négligeable.
4. $Mq N \in \mathbb{B}$ est un ensemble négligeable ssi $\forall \varepsilon > 0 : \exists U_\varepsilon$ s.t. $N \subseteq U_\varepsilon$ et $\mathcal{L}(U_\varepsilon) < \varepsilon$.

Résolution.

1. $\{x\} = [x, x]$ est fermé dans \mathbb{R} , et $\mathcal{L}(\{x\}) = x - x = 0$.
2. $\mathcal{L}(\mathbb{Q}) = \mathcal{L}(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mathcal{L}(\{q\}) = 0$.
3. $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = +\infty$, or : $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$.
4. \Leftarrow : par monotonie, si $\forall \varepsilon > 0 : N \subseteq U_\varepsilon$, alors $\mathcal{L}(N) \leq \mathcal{L}(U_\varepsilon) < \varepsilon$. On en déduit $\mathcal{L}(N) = 0$, et donc N est négligeable.
 \Rightarrow : Soit $N \in \mathbb{B}$ s.t. $\mathcal{L}(N) = 0$. Pour $\varepsilon > 0$: $m_q \exists U_\varepsilon$ ouvert s.t. $\mathcal{L}(U_\varepsilon) < \varepsilon$ et $N \subset U_\varepsilon$. Rappelons la mesure extérieure de Lebesgue :

$$\mathcal{L}^*(A) := \inf_{(I_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{C}_A} \sum_{n \geq 0} \text{Vol}(I_n).$$

Soit $(I_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{C}_N$. Les I_n sont compacts. On peut prendre une nouvelle suite $(J_n)_{n \geq 0}$ s.t. $\forall n \geq 0$: $\text{Vol}(\overline{J_n}) < \text{Vol}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ et $I_n \subseteq J_n$. Par σ -sous-additivité (parce que les J_n ne sont pas forcément mutuellement disjoints), pour $J = \bigcup_{n \geq 0} J_n \supseteq N$:

$$\mathcal{L}^*(N) \leq \mathcal{L}^*\left(\bigcup_{n \geq 0} J_n\right) \leq \sum_{n \geq 0} \mathcal{L}^*(J_n).$$

Or, pour $n \geq 0$: $\mathcal{L}^*(J_n) \leq \text{Vol}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Finalement :

$$\mathcal{L}^*(J) < \sum_{n \geq 0} \left(\text{Vol}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) = 0 + \varepsilon.$$

Note : si on définit un ensemble négligeable comme étant inclus dans un ensemble de mesure nulle (et pas comme étant un ensemble de mesure nulle, comme considéré ci-dessus), l'implication \Leftarrow est triviale.

□

Exercice 3.2. Montrer qu'une droite E dans \mathbb{R}^2 est de mesure nulle pour \mathcal{L} .

Résolution. À $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ fixés, $E = \{x + ty\}_{t \in \mathbb{R}}$. Pour $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, on définit $E_\alpha^\beta := \{x + ty\}_{t \in [\alpha, \beta]}$. $Mq \mathcal{L}(E_\alpha^\beta) = 0$.

Si $y = (0, \lambda)$ (ou si $y = (\lambda, 0)$ par symétrie), on peut recouvrir E_α^β par l'intervalle compact $[x_1 \pm \varepsilon] \times [x_2 + \alpha\lambda, x_2 + \beta\lambda]$ de volume arbitrairement petit (pour ε aussi petit que nécessaire), et donc $\mathcal{L}(E_\alpha^\beta) = 0$.

Sinon, soit $(I_n)_{n \geq 0}$ un recouvrement de E_α^β par des intervalles compacts. Pour $n \geq 0$: $I_n = [a_n^1, b_n^1] \times [a_n^2, b_n^2]$ et $\text{Vol}(I_n) = (b_n^1 - a_n^1)(b_n^2 - a_n^2)$.

1. Par exemple en prenant l'intervalle ouvert $J_n = (a - \varepsilon/2^{n+2}, b + \varepsilon/2^{n+2})$ pour $I_n = [a, b]$.

Montrons qu'il existe $(J_n)_{n \geq 0}$ s.t. $\sum_{n \geq 0} \text{Vol}(J_n) < \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \text{Vol}(I_n)$.

Soit $n \geq 0$. $I_n = [a_n^1, b_n^1] \times [a_n^2, b_n^2]$ où les 4 coins sont $C_1 = (a_n^1, a_n^2)$, $C_2 = (a_n^1, b_n^2)$, $C_3 = (b_n^1, a_n^2)$, $C_4 = (b_n^1, b_n^2)$. WLOG supposons $|E_\alpha^\beta \cap \{C_i\}_{i=1}^4| = 2$, i.e. E passe par deux coins de I_n (soit C_1 et C_3 , soit C_2 et C_4)². On définit alors :

$$\begin{cases} J_{2n} &:= [a_n^1, \frac{1}{2}(b_n^1 + a_n^1)] \times [a_n^2, \frac{1}{2}(b_n^2 + a_n^2)] \\ J_{2n+1} &:= [\frac{1}{2}(b_n^1 + a_n^1), b_n^1] \times [\frac{1}{2}(b_n^2 + a_n^2), b_n^2] \end{cases}$$

si $E \cap \{C_1, C_3\}$; et :

$$\begin{cases} J_{2n} &:= [a_n^1, \frac{1}{2}(b_n^1 + a_n^1)] \times [\frac{1}{2}(b_n^2 + a_n^2), b_n^2] \\ J_{2n+1} &:= [\frac{1}{2}(b_n^1 + a_n^1), b_n^1] \times [a_n^2, \frac{1}{2}(b_n^2 + a_n^2)] \end{cases}$$

sinon.

On a bien $\text{Vol}(I_n) = 2 (\text{Vol}(J_{2n}) + \text{Vol}(J_{2n+1}))$, et donc $\sum_{n \geq 0} \text{Vol}(I_n) = 2 \sum_{n \geq 0} \text{Vol}(J_n)$.

Et donc :

$$\mathcal{L}^*(E_\alpha^\beta) = \inf_{(I_n)_n \in \mathcal{C}_{E_\alpha^\beta}} \sum_{n \geq 0} \text{Vol}(I_n) = 0.$$

On a alors que E_α^β est mesurable et de mesure de Lebesgue nulle. Et on trouve que :

$$\mathcal{L}^*(E) = \mathcal{L}^*\left(\bigcup_{n \geq 0} E_{-n}^{+n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}^*(E_{-n}^{+n}) = 0.$$

Donc E est également mesurable pour \mathcal{L} et est de mesure nulle. □

Exercice 3.3. Pour $B \in \mathbb{B}^n$ et $\lambda > 0$, on définit $\lambda B = \{\lambda b\}_{b \in B}$.

1. Mq $\forall \lambda > 0, B \in \mathbb{B}^n : \lambda B \in \mathbb{B}^n$.
2. Mq $\mathcal{L}(\lambda B) = \lambda^n \mathcal{L}(B)$.

Résolution. On note $\mathcal{B}_\lambda := \{B \in \mathbb{B}^n \text{ s.t. } \lambda B \in \mathbb{B}^n\}$.

1.

(a) Mq \mathcal{B}_λ est une σ -algèbre.

- $\emptyset \in \mathcal{B}_\lambda$ car $\lambda \emptyset = \emptyset$.
- Soit $B \in \mathcal{B}_\lambda$. $\lambda B^c = (\lambda B)^c \in \mathbb{B}^n$ par stabilité par passage au complémentaire.
- Soit $(B_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{B}^{n\mathbb{N}}$. $\lambda \bigcup_{n \geq 0} B_n = \{\lambda b \text{ s.t. } \exists n \geq 0, b \in B_n\} = \bigcup_{n \geq 0} \lambda B_n \in \mathbb{B}^n$ par stabilité d'unions dénombrables.

(b) Mq $\{\prod_{k=1}^n (-\infty, b_k]\}_{(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n} \subset \mathcal{B}_\lambda$. Soit $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. On sait que $\prod_{k=1}^n (-\infty, b_k] \in \mathbb{B}^n$ et donc $\lambda \prod_{k=1}^n (-\infty, b_k] = \prod_{k=1}^n (-\infty, \lambda b_k] \in \mathbb{B}^n$. On a donc $\{\prod_{k=1}^n (-\infty, b_k]\}_{(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n} \subset \mathcal{B}_\lambda$. Et donc $\mathbb{B}^n \subseteq \sigma\left(\{\prod_{k=1}^n (-\infty, b_k]\}_{(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n}\right) \subseteq \mathcal{B}_\lambda \subseteq \mathbb{B}^n$, et donc $\mathcal{B}_\lambda = \mathbb{B}^n$.

2. On voit que $(I_n)_{n \geq 0}$ recouvre B ssi $(\lambda I_n)_{n \geq 0}$ recouvre λB . Et donc :

$$\mathcal{L}^*(\lambda B) = \inf_{(I_n)_n \in \mathcal{C}_B} \sum_{n \geq 0} \text{Vol}(\lambda I_n) = \inf_{(I_n)_n \in \mathcal{C}_B} \sum_{n \geq 0} \lambda^n \text{Vol}(I_n) = \lambda^n \inf_{(I_n)_n \in \mathcal{C}_B} \sum_{n \geq 0} \text{Vol}(I_n) = \lambda^n \mathcal{L}^*(B).$$

□

2. En effet, si ce n'est pas le cas, on peut "réduire" I_n afin que ce soit le cas (et qui est donc de volume strictement inférieur).

Exercice 3.4 (Vrai ou Faux). Justifier les affirmations suivantes :

1. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ est négligeable, alors \bar{E} est négligeable.
2. Il existe un ensemble non-mesurable sur \mathbb{R}^n de complémentaire de mesure extérieure de Lebesgue nulle.
3. Il existe des ensemble non-mesurables dont l'union est mesurable.
4. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ satisfait $\mathcal{L}(\mathring{A}) = \mathcal{L}(\bar{A})$, alors A est mesurable.

Résolution.

1. Faux : \mathbb{Q} est négligeable et $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ n'est pas négligeable.
2. Faux : si A^c est de mesure extérieure de Lebesgue nulle, alors A^c est mesurable, et donc $A^c \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^*}$.
Or l'ensemble des mesurables est une σ -algèbre, et donc $A = A^{c^c} \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^*}$.
3. Vrai : si A est non-mesurable, alors A^c ne l'est pas non plus. Or $\mathcal{M}_{\mathcal{L}^*} \ni X = A \cup A^c$.
4. Vrai : par définition de complétion de mesure. Si \mathring{A} et \bar{A} sont mesurables et de même mesure, alors $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}$ et $\mathcal{L}(\bar{A} \setminus \mathring{A}) = 0$. Dès lors $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^*}$ et par monotonie : $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\mathring{A}) = \mathcal{L}(\bar{A})$.

□

4 Séance 4

Exercice 4.1. Soit $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$. Mq si $\forall q \in \mathbb{Q} : f^{-1}((q, +\infty)) \in \mathcal{A}$, alors f est mesurable.

Résolution. Pour cela, montrons que $f^{-1}((r, +\infty)) \in \mathcal{A}$ pour $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , on sait que pour $r \in \mathbb{R}$:

$$(r, +\infty) = \bigcup_{q \in (r, +\infty) \cap \mathbb{Q}} (q, +\infty).$$

Dès lors, pour $r \in \mathbb{R} : f^{-1}((r, +\infty)) = \bigcup_{q \in (r, +\infty) \cap \mathbb{Q}} \underbrace{f^{-1}((q, +\infty))}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$ □

Exercice 4.2. Mq les fonctions f et g sont mesurables sur (\mathbb{R}, \mathbb{B}) .

Résolution. Pour cela, on utilise le fait qu'un produit de fonctions mesurables est mesurable et que :

- les fonctions caractéristiques sur des boréliens sont mesurables ;
- $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est mesurable car $\alpha = \text{Id} \cdot \text{Id}$;
- $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ est mesurable car $[0, 1]$ est mesurable et \mathbb{Q}^c est mesurable aussi.

Donc puisque $f = \alpha \chi_{[0,1]} + \chi_{(1,2]}$ et $g = \alpha \chi_{\mathbb{Q}^c \cap [0,1]}$, on a f et g mesurables. □

Exercice 4.3. Soient (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et $(f_k)_{k \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de X dans \mathbb{R} . Mq l'ensemble $A := \{x \in X \text{ s.t. } \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) \text{ existe}\}$ est mesurable.

Résolution. La limite de la suite $(f_k(x))_{k \geq 0}$ existe ssi $f_1 := \limsup_{k \rightarrow +\infty} f_k$ et $f_2 := \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k$ existent en x et sont identiques. On sait que f_1 et f_2 sont mesurables, et donc que $f_1 - f_2$ l'est également. Or $A = (f_1 - f_2)^{-1}(\{0\})$, donc $A \in \mathcal{A}$. □

Résolution alternative par les suites de Cauchy. À $x \in X$ fixé, la suite $(f_k(x))_{k \geq 0}$ est une suite réelle et donc converge ssi elle est de Cauchy, i.e. $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)$ existe ssi

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall m, n \geq N : |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Donc A peut s'écrire comme union/intersection de Boréliens. Pour $m, n \in \mathbb{N}$, posons $f_{m,n} := |f_m - f_n|$. Par mesurabilité des $f_{m,n}$, on observe :

$$A = \{x \in X \text{ s.t. } \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall m, n \geq N : f_{m,n}(x) < \varepsilon\} = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}^*+} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{m, n \geq N} f_{m,n}^{-1}((\pm \varepsilon)) \in \mathbb{B}.$$

□

Exercice 4.4. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-mesurable et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s.t. $g \neq f$ sur un ensemble D au plus dénombrable. Mq g est Borel-mesurable.

Résolution. Rappelons d'abord que les singletons sont des fermés et donc des Boréliens. Dès lors, $D \in \mathbb{B}$ et $\mathcal{L}(D) = 0$. De plus, par passage au complémentaire, on sait que $D^c \in \mathbb{B}$ également. Pour $b \in \mathbb{R}$:

$$g^{-1}((-\infty, b]) = \underbrace{f^{-1}((-\infty, b]) \cap D^c}_{=: A} \sqcup \underbrace{g^{-1}((-\infty, b]) \cap D}_{=: B}.$$

Puisque $B \subseteq D$, on a B au plus dénombrable, et en particulier $B \in \mathbb{B}$. Par mesurabilité de f , on sait que $f^{-1}((-\infty, b]) \in \mathbb{B}$, et puisque $D^c \in \mathbb{B}$, on déduit que $A \in \mathbb{B}$. Dès lors $g^{-1}((-\infty, b])$ est union de deux Boréliens, et est donc un Borélien. \square

Exercice 4.5. Sur un espace mesurable (X, \mathcal{A}) , mq χ_A est mesurable ssi $A \in \mathcal{A}$.

Résolution. \Rightarrow : si χ_A est mesurable, alors $A = \chi_A^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{A}$.

\Leftarrow : si $A \in \mathcal{A}$, alors :

- $\chi_A^{-1}(\{0, 1\}) = X \in \mathcal{A}$ et $\chi_A^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$ puisque \mathcal{A} est une σ -algèbre sur X ;
- $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A \in \mathcal{A}$ par hypothèse;
- et $\chi_A^{-1}(\{0\}) = A^c \in \mathcal{A}$ par passage au complémentaire.

\square

Exercice 4.6. Soient (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Mq f^+ et f^- sont mesurables.

Résolution. Trivial : min et max de fonctions mesurables sont mesurables et la fonction $0 : X \rightarrow \{0\} : x \mapsto 0$ est constante donc mesurable. \square

Exercice 4.7. Mq $f : [0, 1) \rightarrow [0, 1) : x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1/2) \\ 2x - 1 & \text{si } x \in [1/2, 1) \end{cases}$ est mesurable.

Mq pour tout $E \subseteq [0, 1)$ mesurable : $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(f^{-1}(E))$.

Résolution. Soit $M \subseteq [0, 1)$ mesurable.

$$f^{-1}(M) = (f^{-1}(M) \cap [0, 1/2)) \sqcup (f^{-1}(M) \cap [1/2, 1)) = \{x \in [0, 1/2) \text{ s.t. } f(x) \in M\} \sqcup \{x \in [1/2, 1) \text{ s.t. } f(x) \in M\}.$$

Notons respectivement M_1 et M_2 ces deux ensembles. $M_1 = \{x \in [0, 1/2) \text{ s.t. } 2x \in M\} = \{x/2\}_{x \in M} \in \mathcal{M}$ et $M_2 = \{x \in [1/2, 1) \text{ s.t. } 2x - 1 \in M\} = \{(1+x)/2\}_{x \in M} \in \mathcal{M}$ car la transformation affine d'un ensemble \mathcal{L} -mesurable est \mathcal{L} -mesurable. Donc $f^{-1}(M) = M_1 \sqcup M_2 \in \mathcal{M}$ car \mathcal{M} est une σ -algèbre.

De plus, $\mathcal{L}(f^{-1}M) = \mathcal{L}(M_1 \sqcup M_2) = \mathcal{L}(M_1) + \mathcal{L}(M_2)$. Par invariance par translation de \mathcal{L} , on a $\mathcal{L}(M_2) = \mathcal{L}(M_1) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(M)$. Donc $\mathcal{L}(f^{-1}M) = 2\mathcal{L}(M_1) = \mathcal{L}(M)$. \square

Exercice 4.8 (Vrai ou Faux). Justifier :

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s.t. $f \circ f$ est mesurable. Alors f est mesurable.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s.t. $|f|$ est mesurable. Alors f est mesurable.
3. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $g \circ f$ est mesurable.
4. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue presque partout, alors f est mesurable.

Résolution.

1. Faux. Prenons $N \notin \mathcal{M}$ s.t. $N \cap \{0, 1\} = \emptyset$. Alors χ_N n'est pas mesurable, mais $\chi_N \circ \chi_N = 0$ est constante donc mesurable.
2. aux. Prenons à nouveau $N \notin \mathcal{M}$. On pose $f := \chi_N - \chi_{N^c} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, +1\}$ où donc $f(x) = 1$ si $x \in N$ et $f(x) = -1$ sinon. f n'est pas mesurable, mais $|f| = 1 : \mathbb{R} \rightarrow \{1\} : x \mapsto 1$ est constante donc mesurable.

3. Mq continuité implique Borel-mesurabilité. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $b \in \mathbb{R}$: $f^{-1}((-\infty, b))$ est ouvert et est donc borélien. Donc ici g et f sont toutes deux Borel-mesurables et la composition d'applications Borel-mesurables est Borel-mesurable.
4. On pose $N := \{x \in \mathbb{R} \text{ s.t. } f \text{ n'est pas continue en } x\}$. N est négligeable et f est continue sur $\mathbb{R} \setminus N$. On trouve pour $b \in \mathbb{R}$:

$$f^{-1}((-\infty, b)) = \left(f^{-1}((-\infty, b)) \cap N^c \right) \sqcup \underbrace{\left(f^{-1}((-\infty, b)) \cap N \right)}_{\subseteq N \text{ donc } \in \mathcal{M}}.$$

□

5 Séance 5

Exercice 5.1. 1. Mq la relation \sim définie sur $[0, 1]$ par $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ est une relation d'équivalence.

2. On note $\hat{x} := \mathbb{R} / \sim$. On pose $F := \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \rho(\hat{x})$ où $\rho(\hat{x})$ est un représentant de \hat{x} (ρ est bien définie par l'axiome du choix). Mq :

$$[0, 1] \subseteq \underbrace{\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (F + q)}_{=: \tilde{F}} \subseteq [-1, 2].$$

3. Mq si $q_1 \neq q_2 \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, alors $(F + q_1) \cap (F + q_2) = \emptyset$.

4. Mq F n'est pas \mathcal{L} -mesurable par l'absurde.

Résolution.

1. \sim est trivialement une relation d'équivalence.

2. $[0, 1] \subseteq \tilde{F}$: soit $x \in [0, 1]$. Par définition de F : $\exists \tilde{x} \in \hat{x} \cap F$ et $x - \tilde{x} \in \mathbb{Q}$. On a alors $x \in (\mathbb{Q} \cap [-1, 1]) + \tilde{x} \subseteq (\mathbb{Q} \cap [-1, 1]) + F = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (F + q)$.

$\tilde{F} \subseteq [-1, 2]$: $F \subseteq [0, 1]$, et donc :

$$\tilde{F} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (F + q) \subseteq \bigcup_{y \in [-1, 1]} (F + y) \subseteq [-1, 2].$$

3. Supposons par l'absurde $\exists \tilde{x} \in (F + q_1) \cap (F + q_2)$. On a alors $\exists y_1, y_2 \in F$ s.t. $y_1 + q_1 = \tilde{x} = y_2 + q_2$. Donc $\tilde{x} - y_1 \in \mathbb{Q} \ni \tilde{x} - y_2$, ou encore $\tilde{x} \sim y_1$ et $\tilde{x} \sim y_2$, et donc par transitivité : $y_1 \sim y_2$, i.e. $\hat{y}_1 = \hat{y}_2$, or F contient exactement un seul représentant de chaque classe d'équivalence, ce qui est une contradiction. Donc $F + q_1$ et $F + q_2$ sont disjoints.

4. Supposons que F soit \mathcal{L} -mesurable. On a (par le point 2) :

$$1 \leq \mathcal{L} \left(\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (F + q) \right) \leq 3.$$

Or $\forall q \in \mathbb{Q} : \mathcal{L}(F + q) = \mathcal{L}(F)$ car \mathcal{L} est invariante par translations.

— Si $\mathcal{L}(F) = 0$, alors $\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \mathcal{L}(F + q) = 0 \not\geq 1$, ce qui est une contradiction.

— Donc $\mathcal{L}(F) \geq 0$, et donc $\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \mathcal{L}(F + q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \mathcal{L}(F) = +\infty \not\geq 3$, ce qui est également une contradiction.

On en déduit que F n'est pas \mathcal{L} -mesurable. □

Exercice 5.2 (Ensemble triadique de Cantor). Pour $k \geq 0$, on pose :

$$A_k := \bigcup_{\alpha \in \{0, 2\}^k} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{3^i} \right) + [0, 3^{-k}].$$

On définit l'ensemble triadique de Cantor par $\mathcal{C} := \bigcap_{k \geq 0} A_k$.

1. Mq $\forall k \geq 0 : A_k$ est formé de 2^k intervalles fermés disjoints deux à deux et $\mathcal{L}(A_k) = (2/3)^k$.

2. Mq \mathcal{C} est un borélien non vide et de mesure de Lebesgue nulle.

3. Mq le développement infini en base 3 est unique ssi les chiffres de la décomposition (notés $\alpha_k : [0, 1] \rightarrow \{0, 1, 2\}$ pour le kème chiffre) sont soit 0 soit 2. Mq $x \in \mathcal{C} \iff \forall k \geq 0 : \alpha_k(x) \neq 1$.

4. En déduire que \mathcal{C} est en bijection avec $[0, 1]$.

Résolution.

1. $|\{0, 2\}^k| = 2^k$, donc A_k est bien composé de 2^k intervalles fermés. Soient $\alpha \neq \beta \in \{0, 2\}^k$ et mq :

$$\left[\left(\sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{3^i} \right) + [0, 3^{-k}] \right] \cap \left[\left(\sum_{i=1}^k \frac{\beta_i}{3^i} \right) + [0, 3^{-k}] \right] = \emptyset.$$

Puisque $\alpha \neq \beta$, on sait que $\exists j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ s.t. $\alpha_j \neq \beta_j$. On pose $\gamma_k : \{0, 2\}^k \rightarrow [0, 1] : \alpha \mapsto \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{3^i}$. Par écriture (**finie**!) en base 3, on a :

$$\gamma(\alpha) = 0.\alpha_1|\alpha_2|\dots|\alpha_k \quad \text{et} \quad \gamma(\beta) = 0.\beta_1|\beta_2|\dots|\beta_k$$

où $|$ désigne la concaténation, ce qui implique que $|\gamma(\alpha) - \gamma(\beta)| \geq 3^{-k}$. WLOG, on suppose $\gamma(\alpha) < \gamma(\beta)$. On en déduit finalement $\gamma(\alpha) + 3^{-k} \leq \gamma(\beta)$, or :

$$\forall x \in \gamma(\alpha) + [0, 3^{-k}] : \gamma(\alpha) \leq x \leq \gamma(\alpha) + 3^{-k}.$$

Et :

$$\forall x \in \gamma(\beta) + [0, 3^{-k}] : \gamma(\beta) \leq x \leq \gamma(\beta) + 3^{-k}.$$

On en déduit que $(\gamma(\alpha) + [0, 3^{-k}]) \cap (\gamma(\beta) + [0, 3^{-k}]) = \emptyset$.

Et finalement, par additivité de \mathcal{L} , on a :

$$\mathcal{L}(A_k) = \sum_{\alpha \in \{0, 2\}^k} \mathcal{L}(\gamma(\alpha) + [0, 3^{-k}]) = \sum_{\alpha \in \{0, 2\}^k} \mathcal{L}([0, 3^{-k}]) = 2^k 3^{-k} = (2/3)^k.$$

2. $\forall k \geq 0 : \{0, 1\} \subset A_k$, donc $\mathcal{C} \neq \emptyset$. De plus, $\forall k \geq 0 : A_k$ est une union de boréliens et est donc borélien. \mathcal{C} est intersection de boréliens et est donc également un borélien.

De plus la suite $(A_k)_{k \geq 0}$ est décroissante, donc par continuité de la mesure : $\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(A_k) = 0$. Mq $(A_k)_{k \geq 0}$ est décroissante. Fixons $k \geq 0$. Soit $x \in A_{k+1}$, mq $x \in A_k$. On sait que $\exists ! \alpha \in \{0, 2\}^{k+1}$ s.t. $x \in \gamma(\alpha) + [0, 3^{-k-1}]$. On pose $\tilde{\alpha} \in \{0, 2\}^k$ s.t. $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket : \tilde{\alpha}_j = \alpha_j$. On a donc :

$$\gamma_k(\tilde{\alpha}) \leq \gamma_{k+1}(\alpha).$$

Mais on a également :

$$\gamma_k(\tilde{\alpha}) + 3^{-k} \geq \gamma_{k+1}(\alpha) + 3^{-k-1}$$

car :

$$\underbrace{(\gamma_k(\tilde{\alpha}) - \gamma_{k+1}(\alpha))}_{\geq -2 \cdot 3^{-k-1}} + \underbrace{(3^{-k} - 3^{-k-1})}_{= 2 \cdot 3^{-k-1}} \geq 0.$$

Donc les A_k forment bien une suite décroissante.

3. On remarque que pour $\alpha \in \{0, 2\}^k : x \in A_k \iff \{a_j(x)\}_{j=1}^k \subseteq \{0, 2\}$. Et puisque $\mathcal{C} = \bigcap_{k \geq 0} A_k$:

$$x \in \mathcal{C} \iff x \in \bigcap_{k \geq 0} A_k \iff \forall k \geq 0 : \{a_j(x)\}_{j=1}^k \subseteq \{0, 2\} \iff \{a_j(x)\}_{j \geq 0} \subseteq \{0, 2\}.$$

4. On a alors $x \in \mathcal{C} \iff x = \sum_{k \geq 1} \frac{a_k(x)}{3^k}$ où les $a_k(x) \neq 1$, i.e. $a_k(x) \in \{0, 2\}$. On peut alors poser :

$$\theta : \rightarrow [0, 1] : x = \sum_{k \geq 1} \frac{a_k(x)}{3^k} \mapsto \sum_{k \geq 1} \frac{a_k(x)}{2^{k+1}},$$

qui est une bijection entre \mathcal{C} et $[0, 1]$. On en déduit que $|\mathcal{C}| = |[0, 1]|$, et donc \mathcal{C} est non-dénombrable. \square

Exercice 5.3. On définit la bijection $f = \theta^{-1}$ (inverse de la bijection ci-dessus).

1. Mq f est strictement croissante et est non-continue.
2. Soit $E \subset [0, 1]$ un ensemble non-mesurable au sens de Lebesgue. Mq $f(E)$ est \mathcal{L} -mesurable mais non Borélien.

Résolution. Attention : résolution erronée. Il est montré que $[0, 1]$ et \mathcal{C} ne sont pas homéomorphes, et pas que f n'est pas continue.

1. f est trivialement strictement croissante par construction, et f n'est pas continue car \mathcal{C} n'est pas connexe donc \mathcal{C} n'est pas homéomorphe à $[0, 1]$.

Mq \mathcal{C} n'est pas connexe : il faut trouver U, V ouverts pour la topologie induite de \mathcal{C} par la topologie usuelle de \mathbb{R} tels que $U \cap V = \emptyset$ et $U \cup V = \mathcal{C}$. Pour cela on prend arbitrairement $x \in [0, 1] \setminus \mathcal{C}$ (par exemple $x = 1/2$) et on définit :

- $U := (-1, x) \cap \mathcal{C}$;
- $V := (x, 2) \cap \mathcal{C}$.

U et V sont bien des ouverts pour la topologie induite car $(-1, x)$ et $(x, 2)$ sont des ouverts de \mathbb{R} . De plus :

- $U \cap V = (-1, x) \cap \mathcal{C} \cap (x, 2) \cap \mathcal{C} = \emptyset$;
- $U \cup V = ((-1, x) \cup (x, 2)) \cap \mathcal{C} = (-1, 2) \cap \mathcal{C} \setminus \{x\} = \mathcal{C}$.

2. Soit $E \subseteq [0, 1]$ quelconque. $f(E) \subseteq \mathcal{C}$ donc $f(E)$ est \mathcal{L} -négligeable. Or \mathcal{L} est complète donc $f(E)$ est mesurable.

□

6 Séance 6

Exercice 6.1. Soient $X \neq \emptyset$, $a \in X$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Dans l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \delta_a)$, montrons que pour $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable :

$$\int_X f d\delta_a = f(a).$$

Résolution. Supposons d'abord f positive. Soit $g \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$. Pour $(a_i)_{i=1}^k$ les valeurs prises par g , par définition on a :

$$\int g d\delta_a = \sum_{i=1}^k a_i \mu(g^{-1}(\{a_i\})) = a_\ell \delta_a(g^{-1}(\{a_\ell\})) = a_\ell = g(a)$$

où $a_\ell = g(a)$. Dès lors, par définition de l'intégrale d'une fonction positive mesurable :

$$\int f d\delta_a = \sup_{\substack{g \in \mathcal{S}^+ \\ g \leq f}} \int g d\delta_a.$$

On sait que $f(a)$ majore tous les $g(a)$ pour $g \in \mathcal{S}^+$ s.t. $g \leq f$ donc $\int f d\delta_a \leq f(a)$. De plus pour $\tilde{g} = f(a)\chi_{\{a\}}$, on a $\tilde{g} \in \mathcal{S}^+$ et $\tilde{g} \leq f$, or $\int \tilde{g} d\delta_a = \tilde{g}(a) = f(a)$. Donc $\int f d\delta_a \geq f(a)$. On a alors bien l'égalité.

Dans le cas général où f n'est pas non-négative, soit $f(a) \geq 0$ et donc f est égale à une fonction positive δ_a -ae, soit $f(a) < 0$ et donc $\int f^+ d\delta_a = 0$, donc $\int f d\delta_a = -\int f^- d\delta_a = -f^-(a) = f(a)$. \square

Exercice 6.2. Sur l'espace mesurable (\mathbb{R}, \mathbb{B}) , on définit la mesure de Lebesgue \mathcal{L} et la mesure μ suivante :

$$\mu : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}^+ : B \mapsto \sum_{k \in B \cap \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + (k+1)^2}.$$

Déterminer si les fonctions suivantes sont intégrables :

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = 0 \\ \ln|x| & \text{si } 0 < |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-1} & \text{si } |x| < 1 \text{ et } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{si } |x| < 1 \text{ et } x \in \mathbb{Q}^c \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$h(x) \equiv 1$$

pour les mesures \mathcal{L} et μ comme défini ci-dessus (pour f et h).

Résolution.

— Pour la fonction f :

\mathcal{L} Utilisons le théorème de convergence monotone, i.e. construisons une suite croissante $(f_n)_{n \geq 1}$ d'applications mesurables telle que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tilde{f}$ (où $\tilde{f} = f|_{(0,1)} = f\chi_{(0,1)}$). Pour $n \geq 1$, posons :

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -\chi_{(\frac{1}{n}, 1)}(x) \ln x.$$

f_n est majorée par $x \mapsto \chi_{(1/n,1)}(x) \sup_{y \in (1/n,1)} -\ln(y) = \chi_{(1/n,1)} \ln(n)$ qui est intégrable. On en déduit que f_n est intégrable.³ Par l'exercice 7.1, une fonction bornée Riemann-intégrable est Lebesgue-intégrable et les intégrales coïncident. On a donc :

$$\int f_n d\mathcal{L} = \int_{\frac{1}{n}}^1 -\ln(x) dx = 1 - \frac{\ln n + 1}{n}.$$

En appliquant le théorème de convergence monotone, on trouve :

$$\int f d\mathcal{L} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mathcal{L} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1 + \ln n}{n}\right) = 1.$$

De manière similaire, on trouve que $\int f\chi_{(-1,0)} d\mathcal{L} = 1$, et on en déduit :

$$\int f d\mathcal{L} = \int f\chi_{(-1,0)} d\mathcal{L} + \int f\chi_{(0,1)} d\mathcal{L} = 1 + 1 = 2.$$

$\mu : f = \chi_{(-1,1) \setminus \{0\}} \ln|\cdot| + (+\infty)\chi_{\{0\}}$. Donc $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R} \setminus (-1,1)$. Or $(-1,1) \cap \mathbb{Z} = \{0\}$. Donc $f = +\infty\chi_{\{0\}}$ μ -ae où $x \mapsto +\infty\chi_{\{0\}}(x) \in \mathcal{S}^+$. On trouve donc :

$$\int f d\mu = \int +\infty\chi_{\{0\}} d\mu = +\infty\mu(\{0\}) = +\infty \cdot \frac{1}{1+1} = +\infty.$$

On peut également remarquer que pour $g \in \mathcal{S}^+$ s.t. $g \leq f$:

$$\int g d\mu = \int g\chi_{\{0\}} d\mu = g(0)\frac{1}{2}.$$

Donc $\sup\{\int g d\mu \text{ s.t. } g \in \mathcal{S}^+, g \leq f\}$ n'est pas borné.

- Pour la fonction $g : g = |x|^{-1/2}\chi_{(-1,+1)} + x^{-2}\chi_{(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)}$ \mathcal{L} -ae et ces deux fonction sont Riemann-intégrables. Donc g est \mathcal{L} -intégrable et :

$$\int g d\mathcal{L} = 2 \left(\int_0^1 x^{-1/2} dx + \int_1^{+\infty} x^{-2} dx \right) = 2(2+1) = 6.$$

- Pour la fonction $h \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$:
 $\mathcal{L} : h$ n'est pas \mathcal{L} -intégrable car $\int h d\mathcal{L} = 1\mathcal{L}(\mathbb{R}) = +\infty$.
 $\mu : h$ est μ -intégrable car :

$$\begin{aligned} \int h d\mu &= \mu(\mathbb{R}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+(k+1)^2} = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{1+(k-1)^2} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{1+(k+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{1+k^2} + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{1+k^2} = \frac{1}{2} + 2 \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{1+k^2} \leq \frac{1}{2} + 2 \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^{-2} \\ &= \frac{1}{2} + 2\zeta(2) = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{3} < +\infty. \end{aligned}$$

□

Exercice 6.3. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $(f_k)_{k \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables telles que :

$$f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \dots \geq 0.$$

3. Ainsi, toute fonction bornée définie sur un ensemble de mesure finie est intégrable.

On définit $f := \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k$ la limite point par point. Mq si $f_1 \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, alors :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu.$$

Donner un contre-exemple avec $f_1 \notin L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Résolution. Pour $n \geq 2$: $f_n \leq f_1$ donc f_n est intégrable car majorée par une fonction intégrable. Par la convergence dominée, on a f intégrable également et $\int f_k d\mu \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int f d\mu$.

Pour un contre-exemple, prenons la suite constante $f_k : x \mapsto x^{-1}$. $\forall x \in X : f_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x^{-1}$ qui n'est pas intégrable. \square

Exercice 6.4. Supposons $\mu(X) < +\infty$. Soit $(f_k)_{k \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives sur X telles que $f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } X} f$. Mq si $\forall k \geq 0 : f_k \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, alors :

$$f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu.$$

Résolution. À $n > 0$ fixé, on a :

$$f = |f| = |f_n + f - f_n| \leq |f_n| + |f - f_n|.$$

Dès lors, par monotonie de l'intégrale :

$$\int f d\mu \leq \int f_n d\mu + \int |f - f_n| d\mu.$$

La convergence uniforme revient à dire :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N > 0 \text{ s.t. } \forall n > N : \sup_{x \in X} |f - f_n|(x) < \varepsilon.$$

En particulier, il existe $N > 0$ s.t. $\forall n > N : \sup_{x \in X} |f - f_n|(x) < 1$. Dès lors pour $n > N$:

$$\int f d\mu \leq \int f_n d\mu + \int |f - f_n| d\mu \leq \int f_n d\mu + \mu(X) < +\infty$$

car $f_n \in L^1$ et $\mu(X) < +\infty$.

On en déduit $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. De plus :

$$\left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| = \left| \int (f_n - f) d\mu \right| \leq \int |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

i.e. $\int f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int f d\mu$. \square

Exercice 6.5. On définit pour $k \geq 0$:

$$\alpha_k := \int_0^k \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \exp(x/2) dx \quad \text{et} \quad \beta_k := \int_0^k \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \exp(-2x) dx.$$

Calculer $\alpha := \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k$ et $\beta := \lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k$.

Résolution. On pose $f_k(x) := \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k e^{x/2} \chi_{[0,k]}(x)$ et $g_k(x) = \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k e^{-2x} \chi_{[0,k]}(x)$. Puisque $f_k(x) \nearrow e^{-x/2} \chi_{\mathbb{R}^+}(x)$ et $g_k(x) \nearrow e^{-x} \chi_{\mathbb{R}^+}(x)$ (deux limites $\in L^1$), par la convergence dominée, on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int f_k d\mu = \int \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k d\mu = [2e^{x/2}]_{-\infty}^0 = 2,$$

et :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int g_k d\mu = \int \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k d\mu = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1.$$

□

Exercice 6.6. Soit $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Mq :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \varepsilon.$$

Résolution. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ s.t. :

$$\forall n > 0 : \exists A_n \in \mathcal{A} \text{ s.t. } \mu(A_n) < \frac{1}{n} \text{ et } \int_{A_n} f d\mu \geq \varepsilon.$$

Posons $f_n := f \chi_{A_n}$. $\forall n > 0 : |f_n| \leq |f|$ et $|\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n| \leq |f|$ et ces applications sont mesurables. Donc par la convergence dominée, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu.$$

Mq $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 0$ μ -ae. Soit $N := \{\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \neq 0\}$. Sur N^c , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$. Dès lors :

$$\exists K > 0 \text{ s.t. } \forall x \in N : \forall n > K : x \in A_n,$$

et donc : $\forall n > K : N \subset A_n$, ce qui implique $\forall n > K : \mu(N) \leq \mu(A_n) < \frac{1}{K}$, i.e. $\mu(N) = 0$.

Finalement, on déduit :

$$\varepsilon \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = 0,$$

ce qui est une contradiction.

□

7 Séance 7

Exercice 7.1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée. Ma :

1. si f est Riemann-intégrable, alors f est Lebesgue-intégrable et :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\mathcal{L}.$$

2. les fonctions h et H définies ci-dessous sont bien définies et $h \leq f \leq H$ sur $[a, b]$:

$$h(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{|y-x| < \delta} f(y),$$

$$H(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|y-x| < \delta} f(y).$$

3. f est continue en x ssi $H(x) = h(x)$.

4. H et h sont Lebesgue-mesurables et :

$$\int_{[a,b]} H d\mathcal{L} = \inf_P U(f; P) \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} h d\mathcal{L} = \sup_P L(f; P).$$

5. En déduire que f est Riemann-intégrable ssi l'ensemble des discontinuités de f est négligeable.

Résolution.

1. **Notations :** Pour $P = (x_i)_{i=0}^{N_P}$ une partition de $[a, b]$, on pose pour $i \in \llbracket 0, N_P - 1 \rrbracket$: $P(i) := (x_i, x_{i+1}]$. On pose également les fonctions :

$$f_P := \sum_{j=0}^{N_P-1} m_j \chi_{P(j)} + f(a) \chi_{\{a\}}$$

$$f^P := \sum_{j=0}^{N_P-1} M_j \chi_{P(j)} + f(a) \chi_{\{a\}}$$

Pour P une partition de $[a, b]$ et $y \in (a, b)$ s.t. $\forall i \in \llbracket 0, N_P \rrbracket$, on pose $P \oplus y := (x'_j)_{j=0}^{N_P+1}$ où $\exists j \in \llbracket 1, N_P \rrbracket$ s.t. $x'_j = y$ et $(x'_1, \dots, x'_{j-1}, x'_{j+1}, \dots, x'_{N_P+1}) = P$. Pour deux partitions $P_1 = (x_{1,j})_{j=0}^{N_{P_1}}$ et $P_2 = (x_{2,j})_{j=0}^{N_{P_2}}$, on pose également $P_1 \oplus P_2$ la plus petite partition $(x_j)_{j=0}^{N_P}$ où :

$$\forall j \in \llbracket 0, N_{P_1} \rrbracket : \forall \ell \in \llbracket 0, N_{P_2} \rrbracket : \exists i, k \in \llbracket 0, N_P \rrbracket \text{ s.t. } x_{1,j} = x_i \text{ et } x_{2,\ell} = x_k.$$

Résolution :

Observons que pour une partition P et $y \in (a, b)$, on a :

$$- f^{P \oplus y} \leq f^P;$$

$$- f_{P \oplus y} \geq f_P.$$

En effet, cela découle directement du fait que pour $P \oplus y = (x'_j)_{j=0}^{N_P+1}$ et pour j s.t. $y = x'_j$:

$$\inf_{t \in (x_j, x_{j+1}]} f(t) \geq \inf_{t \in (x_{j-1}, x_{j+1}]} f(t) \quad \text{et} \quad \inf_{t \in (x_{j-1}, x_j]} f(t) \geq \inf_{t \in (x_{j-1}, x_{j+1}]} f(t).$$

On déduit similairement pour le sup :

$$\sup_{t \in (x_j, x_{j+1}]} f(t) \leq \sup_{t \in (x_{j-1}, x_{j+1}]} f(t) \quad \text{et} \quad \sup_{t \in (x_{j-1}, x_j]} f(t) \leq \sup_{t \in (x_{j-1}, x_{j+1}]} f(t).$$

Ainsi, on remarque que pour deux partitions P_1 et P_2 , on a les inégalités suivantes par le même raisonnement :

- $f^{P_1 \oplus P_2} \leq f^{P_1}$;
- $f^{P_1 \oplus P_2} \geq f^{P_1}$.

Par définition du sup, il existe une suite de partitions $(P'_n)_{n \geq 0}$ s.t. $U(f; P'_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf_P U(f; P)$ et une suite de partitions $(\tilde{P}_n)_{n \geq 0}$ s.t. $L(f; \tilde{P}_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sup_P L(f; P)$. Du plus les suites $(U(f; P'_n))_{n \geq 0}$ et $(L(f; \tilde{P}_n))_{n \geq 0}$ sont respectivement décroissante et croissante. Par la remarque ci-dessus, on remarque que si on pose $P_n := P'_n \oplus \tilde{P}_n$, on obtient une suite de partitions $(P_n)_n$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U(f; P_n) = \inf_P U(f; P) = \sup_P L(f; P) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L(f; P_n).$$

En particulier : $U(f; P_n) - L(f; P_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Remarquons ensuite que les f_{P_n} sont des applications mesurables puisque des des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques sur des boréliens (en effet les intervalles ouverts à gauches sont des boréliens et le singleton $\{a\}$ en est un également). De plus :

$$\int_{[a,b]} f_{P_n} d\mathcal{L} = L(f; P_n) \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} f^{P_n} d\mathcal{L} = U(f; P_n).$$

Puisque $U(f; P_n) - L(f; P_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $\int_{[a,b]} (f^{P_n} - f_{P_n}) d\mathcal{L} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Du coup $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f^{P_n} - f_{P_n}) = 0$ \mathcal{L} -ae, i.e. $f_{P_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}\text{-ae}} f$

Dès lors, par le théorème de la convergence monotone, on a que f est mesurable et que :

$$\int_{[a,b]} f d\mathcal{L} = \int_{[a,b]} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{P_n} d\mathcal{L} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} f_{P_n} d\mathcal{L} = \lim_{n \rightarrow +\infty} L(f; P_n) = \sup_P L(f; P) = \int_a^b f(x) dx.$$

2. Puisque f est bornée, pour tout $x \in [a, b]$, $\delta \geq 0$, on a bien :

$$\left| \inf_{y \in B_\delta(x) \cap [a,b]} f(y) \right| \leq +\infty \quad \text{et} \quad \left| \sup_{y \in B_\delta(x) \cap [a,b]} f(y) \right| \leq +\infty.$$

De plus, pour tout $x \in [a, b]$, $\delta \geq 0$:

$$\inf_{y \in B_\delta(x) \cap [a,b]} f(y) \leq f(x) \leq \sup_{y \in B_\delta(x) \cap [a,b]} f(y).$$

3. \Leftarrow : $H(x) = h(x)$ est équivalent à :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ s.t. } \forall \gamma > 0 : \gamma \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \sup_{y \in B_\gamma(x)} f(y) - \inf_{y \in B_\gamma(x)} f(y) \leq \varepsilon.$$

En particulier, à $\varepsilon > 0$ fixé, pour $y \in [a, b]$, si $|x - y| \leq \delta_\varepsilon$, alors :

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{z \in B_{\delta_\varepsilon}(x)} f(z) - \inf_{z \in B_{\delta_\varepsilon}(x)} f(z) \leq \varepsilon.$$

On a donc bien la continuité de f en x .

\Rightarrow : à $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\delta > 0$ s.t. $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Donc :

$$\begin{aligned} \sup_{y \in B_\delta(x)} f(y) - \inf_{y \in B_\delta(x)} f(y) &= \left(\sup_{y \in B_\delta(x)} f(y) - f(x) \right) - \left(\inf_{y \in B_\delta(x)} f(y) - f(x) \right) \\ &\leq \left| \sup_{y \in B_\delta(x)} f(y) - f(x) \right| + \left| f(x) - \inf_{y \in B_\delta(x)} f(y) \right| \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Or cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit que $H(x) - h(x) = 0$.

4. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, remarquons :

$$\overline{f^{-1}((-\infty, \beta])}^{\circ} = \{\xi \in [a, b] \text{ s.t. } \exists r_\xi > 0 \text{ s.t. } B_{r_\xi}(\xi) \subseteq f^{-1}((-\infty, \beta])\}.$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} x &\in H^{-1}((-\infty, \beta]) \\ \iff H(x) &\leq \beta \\ \iff \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{y \in B_\delta(x)} f(y) &\leq \beta \\ \iff \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall y \in B_\delta(x) : f(y) &\leq \beta \\ \iff \exists \delta > 0 \text{ s.t. } B_\delta(x) \subseteq f^{-1}((-\infty, \beta]) \\ \iff x &\in \overline{f^{-1}((-\infty, \beta])}^{\circ}, \end{aligned}$$

i.e. H est mesurable car l'intérieur d'un ensemble est un ouvert.

De manière similaire, on a $x \in h^{-1}([\alpha, +\infty)) \iff x \in \overline{f^{-1}([\alpha, +\infty))}^{\circ}$. Donc h est également mesurable.

Remarquons ensuite que pour toute partition $P : H \leq f^P$ sur $[a, b] \setminus P$ et donc $H \leq f^P$ \mathcal{L} -ae. Par monotonie de l'intégrale :

$$\int H d\mathcal{L} \leq \int f^P d\mathcal{L}.$$

En particulier :

$$\int H d\mathcal{L} \leq \inf_P \int f^P d\mathcal{L}.$$

Reconsidérant maintenant la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ s.t. $U(f; P_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf_P U(f; P)$ et $L(f; P_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sup_P L(f; P)$

et supposons la croissante (ce qui n'est pas abusif : il suffit de poser la suite de partitions $\hat{P}_0 := P_0$ et $\hat{P}_n := \hat{P}_{n-1} \oplus P_n$ qui est croissante au sens de l'inclusion et qui satisfait les limites puisque $f^{\hat{P}_n} \leq f^{P_n}$ et $f_{\hat{P}_n} \geq f_{P_n}$). Pour toute partition P et pour tout $x \in [a, b] \setminus P$, on note $j_{P,x} \in \llbracket 0, N_P - 1 \rrbracket$ s.t. $x \in P(j_{P,x})$. Fixons alors $x \in [a, b] \setminus \bigcup_{n \geq 0} P_n$ (i.e. $\forall n \geq 0 : x \notin P_n$).

Séparons deux cas :

si $\mathcal{L}(P_n(j_{P_n,x})) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 : \forall \delta > 0 : \exists N > 0$ s.t. $P_N(j_{P_N,x}) \subset B_\delta(x)$. Posons une suite $(\delta_n)_{n \geq 0}$ décroissante vers 0 et posons $H_n(x) := \sup_{y \in B_{\delta_n}(x)} f(y)$.

On remarque que $\forall n \geq 0 : \exists K > 0$ s.t. $\forall k \geq K : H_n(x) \geq f^{P_k}(x) \geq H(x)$. Or $H_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} H(x)$, et

donc $f^{P_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} H(x)$.

sinon : $\forall (\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n \geq 0} P_n(j_{P_n,x}) : \exists K > 0$ s.t. $\forall k \geq K :$

$$\sup_{y \in (\alpha, \beta]} f(y) = \sup_{y \in P_k(j_{P_k,x})} f(y).$$

En effet, s'il existe $(\alpha, \beta]$ qui ne satisfait pas la propriété, alors les P_n pourraient être raffinés par la suite $(P'_n)_{n \geq 0}$ définie par $P'_n := P_n \oplus \alpha \oplus \beta$. Dans ce cas : $f^{P_n} \geq f^{P'_n}$ ce qui contredit :

$$U(f; P_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf_P U(f; P).$$

On déduit donc :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{y \in B_\delta(x)} f(y) = \sup_{y \in \bigcap_{n \geq 0} P_n(j_{P_n, x})} f(y),$$

i.e. :

$$H(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{y \in B_\delta(x)} f(y) = \sup_{y \in \bigcap_{n \geq 0} P_n(j_{P_n, x})} f(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{P_n}(x).$$

On déduit de ces deux cas $f^{P_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}\text{-ae}} H$ et donc :

$$\int H d\mathcal{L} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f^{P_n} d\mathcal{L} = \inf_P U(f; P).$$

On déduit similairement le cas $\int h d\mathcal{L} = \sup_P L(f; P)$.

5. f est Riemann-intégrable $\iff \int H d\mathcal{L} = \int h d\mathcal{L} \iff \int (H - h) d\mathcal{L} = 0 \iff H = h \mathcal{L}\text{-ae}$ et donc $\iff \mathcal{L}(\{x \in [a, b] \text{ s.t. } H(x) \neq h(x)\}) = 0$, i.e. f est continue $\mathcal{L}\text{-ae}$.

□

Exercice 7.2.

1. Mq si $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable et bornée sur $[a, b]$ pour tous $b > a$, alors :

$$\int_{[a, +\infty)} f d\mathcal{L} = \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

2. Mq si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable et bornée sur $[c, b]$ pour tous $c \in (a, b)$, alors :

$$\int_{[a, b]} f d\mathcal{L} = \int_a^b f(x) dx.$$

Résolution.

1. Posons la suite croissante de fonctions $f_n := f\chi_{[a, a+n]}$. Puisque les f_n sont bornées et Riemann-intégrables (par hypothèse), par l'exercice précédent, on sait que les f_n sont mesurables et que $\int_{[a, a+n]} f d\mathcal{L} = \int_a^{a+n} f(x) dx$. Puisque $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$, on a que f est mesurable. De plus, par le théorème de la convergence monotone :

$$\int f d\mathcal{L} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mathcal{L} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^{a+n} f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

2. De manière similaire, on pose la suite croissante de fonctions $f_n := f\chi_{[a+\frac{1}{n}, b]}$ qui converge vers f sur $(a, b]$ (donc $\mathcal{L}\text{-ae}$). Puisque les f_n sont mesurables, on déduit à nouveau que f est mesurable également et par la convergence monotone :

$$\int f d\mathcal{L} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mathcal{L} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{a+\frac{1}{n}}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

□

Exercice 7.3. \mathbb{Q} est dénombrable donc $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ l'est aussi. Donc $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_k\}_{k \geq 0}$. Pour $k \geq 0$, on définit :

$$f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{q_\ell\}_{\ell=0}^k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Mq $\forall k \geq 0 : f_k$ est Riemann-intégrable et déterminer :

$$\int_0^1 f_k(x) dx.$$

2. Mq $f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{CVS sur } [0,1]} f$. Que peut-on en déduire ?

3. Mq f est Lebesgue-intégrable et vérifier les hypothèses du théorème de la convergence dominée.

Résolution.

1. À k fixé, f_k est bornée sur son compact de définition et est continue sur $[0, 1] \setminus \{q_\ell\}_{\ell=0}^k$, donc f_k est Riemann-intégrable. De plus :

$$\int_0^1 f_k(x) dx = \sum_{\ell=1}^k \int_{q_{\ell-1}}^{q_\ell} f_k(x) dx = \sum_{\ell=1}^k 0 = 0.$$

De manière plus élégante, remarquons que f_k est la fonction caractéristique d'un ensemble de mesure nulle, donc f_k est mesurable et de plus :

$$\int f_k d\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{q_\ell\}_{\ell=0}^k) = 0,$$

donc f_k est Lebesgue-intégrable. De plus f_k est bornée sur son compact de définition (qui est forcément de mesure finie), donc f_k doit être Riemann-intégrable.

2. Soit $x \in [0, 1]$. Si $x \in \mathbb{Q}^c$, alors $\forall k \geq 0 : f_k(x) = 0$. Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $\exists K \geq 0$ s.t. $x = q_K$, ce qui implique $\forall k \geq K : f_k(x) = 1$. Donc $f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$. Notons que f_k converge simplement mais pas uniformément. En effet :

$$\forall k \geq 0 : \sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - \chi_{\mathbb{Q}}(x)| = 1.$$

Puisque $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ n'est pas Riemann-intégrable, on a l'existence d'une fonction \mathcal{L} -intégrable mais pas \mathbb{R} -intégrable.

3. Voir la remarque ci-dessus pour l'intégrabilité au sens de Lebesgue. Les f_k sont bien mesurables et $f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} \leq \chi_{[0,1]}$ qui est intégrable. Donc par la convergence dominée, on a bien $\int f d\mathcal{L} = 0$.

□