MATHF-203 – Algèbre I

R. Petit

Année académique 2016 - 2017

Table des matières

1 Les groupes

1.1 Définitions

Définition 1.1. Un *groupe* $(G, *)$ est un ensemble non-vide G muni d'une loi de composition $* : G \times G \to G$ tels que :
- $*$ est associative ;
- G possède un élément neutre noté $e \in G$;
- chaque élément g de G possède un inverse noté g^{-1}.

Définition 1.2. Un ensemble non-vide M muni d'une loi de composition $* : M \times M \to M$ associative telle que M admet un neutre par $*$ est appelé un *monoïde*.

Définition 1.3. Un monoïde $(M, *)$ est dit *abélien* (ou *commutatif*) lorsque $*$ est commutative.

Remarque. Un groupe est un monoïde admettant un inverse pour chaque élément. Dès lors, les résultats et définitions sur les monoïdes s'appliquent également aux groupes.

Proposition 1.4. *Dans un groupe $(G, *)$, les équations :*

$$x * a = b, \tag{1}$$

et :

$$a * y = b \tag{2}$$

admettent une unique solution, i.e. :

$$(x, y) = (b * a^{-1}, a^{-1} * b) \in G^2.$$

Démonstration. G est un groupe, du coup a et b admettent un inverse. L'existence de la solution est donc triviale.

Soit x, solution de (1). On a alors :

$$x = x * e = x * a * a^{-1} = b * a^{-1}.$$

Similairement pour y, solution de (2), on a :

$$y = e * y = a^{-1} * a * y = a^{-1} * b.$$

$\square$

Proposition 1.5. *Le neutre d'un groupe est unique, et l'inverse de tout élément l'est également.*

De plus :

$$\forall a, b, c, d \in G : \begin{cases} c * a = d * a \Rightarrow c = d, \\ a * c = a * d \Rightarrow c = d. \end{cases}$$

Démonstration. EXERCICE. $\square$

Proposition 1.6. *Si G est un ensemble non-vide muni d'une loi de composition $*$ associative telle que (1) et (2) admettent une unique solution, alors $(G, *)$ est un groupe.*

Démonstration. Pour chaque élément $a \in G$, prenons e^L_a tel que $e^L_a * a = a$ et e^R_a tel que $a * e^R_a = a$. Ces deux équations admettent une unique solution par hypothèse. On trouve alors :

$$e^L_a * a = a = a * e^R_a,$$

d'où l'on déduit :

$$a * e^L_a * a = a * a = a * e^R_a * a,$$

et donc $e^L_a = e^R_a$ en multipliant à gauche et à droite par a^{-1}. On en déduit l'unicité d'un neutre pour a et notons-le e_a. Montrons que ce neutre l'est pour tous les éléments de G. Prenons $(a, b) \in G^2$ et leur neutre respectif e_a et e_b. On peut écrire :

$$a * e_b * b = a * b = a * e_a * b,$$

d'où l'on déduit $e_a = e_b$ en multipliant à gauche par a^{-1} et à droite par b^{-1}. □

Définition 1.7. Si $|G| < \infty$, on peut définir la *table de multiplication* de $(G, *)$ par un tableau de dimensions $|G| \times |G|$ reprenant tous les résultats de $g * h$ pour $g, h \in G$.

1.2 Groupes de transformation

Définition 1.8. Soit S un ensemble non-vide. Soit G l'ensemble des bijections de S dans S. On définit la loi de composition :

$$\circ : G \times G \to G : (\psi, \varphi) \mapsto (\psi \circ \varphi),$$

tels que $\forall s \in S : (\psi \circ \varphi)(s) = \psi(\varphi(s))$.

Proposition 1.9. $(G, \circ)$ *est un groupe (de permutation sur* S*).*

Démonstration. Le neutre est donné par $\mathrm{Id} \in G$ où $\forall s \in S : \mathrm{Id}(s) = s$. La loi $\circ$ est trivialement associative, et l'inverse d'une fonction est bien définie sur les bijections. □

Exemple 1.1. L'ensemble $SO(3, \mathbb{R})$ des rotations axiales passant par $\mathcal{O}$ forme un groupe de transformations.

Remarque. Un groupe de transformation est composé de fonctions bijectives. L'ensemble G est donc un ensemble fonctionnel.

1.3 Sous-groupes

Définition 1.10. Soit $(G, *)$ un groupe, et soit $S \subset G$. Si $(S, *)$ est un groupe, alors on dit que $(S, *)$ est un *sous-groupe* de $(G, *)$.

Proposition 1.11. *Soit* $(G, *)$ *un groupe.* $S \subseteq G$ *est un sous-groupe de* G *si et seulement si :*

$$\forall a, b \in S : a * b^{-1} \in S.$$

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Trivial car S est un groupe.

$\boxed{\Leftarrow}$ S est non-vide, donc $e \in S$ car si $a \in S$, alors par hypothèse $e = a * a^{-1} \in S$. De même, soit $a \in S$. On sait que $a^{-1} = e * a^{-1} \in S$. Et S est stable par $*$ car si $a, b \in S$, on sait que $b^{-1} \in S$, et donc $a * \left(b^{-1}\right)^{-1} \in S$. □

Proposition 1.12. *Si* $\{S_\alpha$ *t.q.* $\alpha \in I\}$ *est une famille de sous-groupes de* $(G, *)$*, alors* $S \coloneqq \bigcap_{\alpha\in I} S_\alpha$ *est un sous-groupe de* $(G, *)$ *également.*

Démonstration. On sait que $e \in S$ car $e \in S_\alpha$ pour tout $\alpha \in I$. Donc $S \neq \emptyset$. Prenons $a, b \in S$. On sait que $a, b \in S_\alpha$ pour tout $\alpha \in I$. Donc b^{-1} et $a * b^{-1}$ sont dans S_α pour tout $\alpha \in I$ également. Donc $a * b^{-1} \in S$. □

Définition 1.13. Soit $(G, *)$ un groupe et soit $P \subseteq G$. On appelle le *sous-groupe de* G *engendré par* P le plus petit sous-groupe de G contenant P. On le note $\langle P\rangle$

Définition 1.14. Soit $(G, *)$ un groupe et soit $g \in G$. On appelle *ordre de* g le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^n = e$. On le note $\mathrm{ord}(e)$.

L'ordre de $(G, *)$ est$|G|$.

Définition 1.15. Un groupe $(G, *)$ est dit *cyclique* lorsqu'il existe $g \in G$ tel que $G = \langle g\rangle \coloneqq \langle\{g\}\rangle$.

1.4 Isomorphismes

Définition 1.16. Un *isomorphisme* entre deux groupes $(G, *)$ et $(H, \star)$ est une bijection $\phi : G \to H$ telle que :

$$\forall g_1, g_2 \in G : \phi(g_1 * g_2) = \phi(g_1) \star \phi(g_2).$$

Remarque. La relation « *être isomorphe* » dans l'ensemble des groupes est une relation d'équivalence.

De plus, sis G et H sont deux groupes finis, $\phi : G \to H$ est un isomorphisme si et seulement si ϕ est bijective, et la table de multiplication de H par $\phi(G)$ est l'image de la table de multiplication de G par G.

Proposition 1.17. *Soit* $\phi : (G, *) \to (H, \star)$ *un isomorphisme de groupes. Alors :*
- $\phi(e_G) = e_H$;
- $\forall g \in G : \phi(g)^1 = \phi(g^{-1})$.

Démonstration. On sait que $\phi(e_G) = \phi(e_G * e_G) = \phi(e_G) \star \phi(e_G)$. Dès lors, il est évident que $\phi(e_G)$ est le neutre de H.

Soit $g \in G$. On sait également que $e_H = \phi(e_G) = \phi(g*g^{-1}) = \phi(g)\star\phi(g^{-1})$. On a donc bien, en multipliant par $\phi(g)^{-1}$ à gauche que $\phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1})$. □

Théorème 1.18. *Tout groupe est isomorphe à un groupe de transformation.*

Démonstration. Soit $(G, *)$ un groupe, et soit $g \in G$. On définit $\phi : G \to \{\ell_g \text{ t.q. } g \in G\}$, où $\ell_g : G \to G : h \mapsto g * h$.

Pour $g \in G$, montrons que ℓ_g est bijective :
- il est évident que $\forall g, h, h' \in G : g * h = g * h' \iff h = h'$ par les règles de simplification ;
- $\forall h \in G : \ell_g(g^{-1} * h) = g * g^{-1} * h = h$.

On a donc que ℓ_g est bien bijective pour tout $g \in G$.

Montrons maintenant que $\phi : g \mapsto \ell_g$ est un isomorphisme de groupes :
- ϕ est surjective par définition.
- soient $g, h \in G$. $\ell_g = \ell_h$ si et seulement si pour tout $\gamma \in G$, on a $g * \gamma = h * \gamma$, et donc si et seulement si on a $g = h$. ϕ est donc injective.
- Soient $g, h, \gamma \in G$. $\phi(g * h)(\gamma) = g * h * \gamma = g * \ell_h(\gamma) = (\ell_g \circ \ell_h)(\gamma)$.

□

Théorème 1.19. *Tout groupe cyclique est déterminé, à isomorphisme près, par l'ordre d'un élément g qui l'engendre.*

Plus précisément, si $(G, *)$ est un groupe engendré par un élément g d'ordre $\operatorname{ord}(g)$ fini, alors $G \cong (\mathbb{Z}_{\operatorname{ord}(g)}, +)$; et si g est d'ordre infini, alors $(G, *) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

<u>*Démonstration.*</u> S'il existe $g \in G$ tel que $G = \langle g \rangle$ et $\operatorname{ord}(g) \lneqq +\infty$, alors $G = \{e, g, \dots, g^{\operatorname{ord}(g)-1}\}$.

Soit $\phi : \mathbb{Z}_{\operatorname{ord}(g)} \to G : k \mapsto g^k$. ϕ est trivialement bijective, et on observe :

$$\phi(k + l) = g^{k+l} = g^k * g^l = \phi(k) * \phi(l).$$

Supposons maintenant qu'il existe $g \in G$ tel que $\operatorname{ord}(g) = +\infty$ et $\langle g \rangle = G$. On pose :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* : g^{-p} \coloneqq g^{-1} * g^{1-p}.$$

Puisque $\operatorname{ord}(g) = +\infty$, si $g^x = g^y$ pour $x, y \in \mathbb{Z}$, alors $x = y$. En reprenant le même ϕ étendu à $\mathbb{Z}$, on a bien, à nouveau, un isomorphisme de groupes. $\square$

Corollaire 1.20. *Tout groupe cyclique est commutatif.*

<u>*Démonstration.*</u> Étant isomorphe à $\mathbb{Z}_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ ou à $\mathbb{Z}$, par passage à l'isomorphisme, la propriété d'additivité est conservée. $\square$

Proposition 1.21. *Si $(G, *)$ est un groupe cyclique, tout sous-groupe S de G est cyclique.*

<u>*Démonstration.*</u> Prenons $a \in G$ tel que $G = \langle a \rangle$. Posons $N \coloneqq \{n \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } a^n \in S\}$. Dans le cas fini, prenons $\underline{n}$, le plus petit entier positif de N. Supposons par l'absurde que $a^t \in S$ ne soit pas une puissance entière de $a^{\underline{n}}$. Par Euclide, on a :

$$\exists (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \text{ t.q. } t = q\underline{n} + r,$$

et donc :

$$a^t = a^{q\underline{n}} * a^r,$$

avec $0 \lneqq r \lneqq \underline{n}$. On sait que $a^t \in S$, et $a^{q\underline{n}} \in S$ (donc $a^{-q\underline{n}} \in S$). Dès lors, $a^r \in S$. Or $\underline{n}$ est le plus petit entier positif tel que $a^{\underline{n}} \in S$. Il y a donc contradiction, et a^t est une puissance entière de $a^{\underline{n}}$. Dès lors, $S = \langle a^{\underline{n}} \rangle$. $\square$

1.5 Classes latérales et théorème de Lagrange

Dans cette sous-section, considérons que $(G, *)$ est un groupe, et que S est un sous-groupe de G.
Définition 1.22. Soient $(G, *)$ un groupe, et S un sous-groupe de G. On appelle *classe latérale gauche de S par* $a \in G$ l'ensemble :

$$a * S \coloneqq \left\{ a * s \text{ t.q. } s \in S \right\}.$$

Similairement, une classe latérale droite est sous la forme :

$$S * a \coloneqq \left\{ s * a \text{ t.q. } s \in S \right\},$$

pour un certain $a \in G$.

Proposition 1.23. *Deux classes latérales gauches* $a * S$ *et* $b * S$ *sont identiques ou sont d'intersection nulle.*

Démonstration. Soient deux telles classes d'équivalences, telles que $a * S \cap b * S \neq \emptyset$. On sait alors qu'il existe $c \in a * S \cap b * S$. On en déduit $u, v \in S$ tels que $a * u = c = b * v$. On a alors, pour $s \in S$:

$$b * s = c * v^{-1} * s = a * u * v^{-1} * s.$$

Or u et v^{-1} sont dans S. Donc $b * S \subseteq a * S$.

Par un raisonnement similaire, on a $a * S \subseteq b * S$, et donc $a * S = b * S$. □

Proposition 1.24. *Deux éléments* $a, b \in G$ *ont la même classe latérale gauche, i.e.* $a * S = b * S$ *si et seulement si* $a^{-1} * b \in S$.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ $a * S = b * S = a * a^{-1} * b * S$. Donc $a^{-1} * b \in S$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On sait $S = e * S = s * S$ pour tout $s \in S$. Or $a^{-1} * b \in S$. Donc $S = a^{-1} * b * S$, ou encore $a * S = b * S$. □

Définition 1.25. On appelle *indice* d'un sous-groupe S de G le « nombre » de classes latérales gauches distinctes de S dans G.

Proposition 1.26. *Il existe une bijection entre un sous-groupe* S *et chacune de ses classes latérales.*

Démonstration. Soit $a \in G$. On considère $\phi : S \to a * S : s \mapsto a * s$.

ϕ est surjective par définition, et est trivialement injective. □

Corollaire 1.27. *Il existe une bijection entre tout groupe* $(G, *)$ *et l'ensemble* $S \times T$, *pour* S, *un sous-groupe de* G *et* T *l'ensemble des classes latérales gauches distinctes de* S *dans* G.

Théorème 1.28 (Théorème de Lagrange)**.** *Soient* $(G, *)$ *un groupe fini, et* S *un sous-groupe de* G. *L'ordre de* G *est un multiple de l'ordre de* S.

Démonstration. Trivial par le corollaire précédent. □

Corollaire 1.29. *Si* p *est un nombre premier, tout groupe* $(G, *)$ *à* p *éléments est isomorphe à* $(\mathbb{Z}_p, +)$.

Démonstration. p est premier, donc $|G| \geqslant 2$. Soit g tel que $\mathrm{ord}(g) > 1$ (c-à-d $g \neq e$). $S \coloneqq \langle g \rangle$ est un sous-groupe de G, on en déduit par Lagrange que $\left|\langle g \rangle\right|$ divise $|G|$. Donc $|S| \in \{1, p\}$. Et comme $e, g \in S$ pour $g \neq e$, on a $|S| \geqslant 2$, et donc $|S| = p$. □

Corollaire 1.30. *Si* G *est un groupe d'ordre fini* n, *pour tout* $g \in G$, *on a* $\mathrm{ord}(g)$ *divise* n.

Corollaire 1.31. *Il n'existe, à isomorphisme près, que deux groupes d'ordre 4, à savoir* $\mathbb{Z}_4$ *et* $V_4 \coloneqq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Corollaire 1.32. *Tout groupe d'ordre fini* $n \leqslant 5$ *est commutatif.*

1.6 Sous-groupes normaux et homomorphismes

Définition 1.33. Un sous-groupe N d'un groupe $(G, *)$ est dit *normal* lorsque ses classes latérales gauches sont des classes latérales droites, i.e. :

$$\forall a \in G : a * N = N * a.$$

Proposition 1.34. *Soit* N*, un sous-groupe d'un groupe* $(G, *)$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. N *est normal ;*
2. $\forall a \in G : a * N = N * a$ *;*
3. $\forall a \in G : a * N \subseteq N * a$ *;*
4. $\forall a \in G : a * N * a^{-1} \subseteq N$.

Démonstration. On sait, par définition, que $1 \iff 2$, et $2 \Rightarrow 3$. En multipliant par a^{-1} à droite, on a $3 \iff 4$.

Montrons donc que $3 \Rightarrow 2$. En particulier, c'est vrai pour a^{-1}, et donc $a^{-1} * N \subseteq N * a^{-1}$, ou encore $N * a \subseteq a * N$. Avec 3, cela implique que $a * N = N * a$. □

Définition 1.35. Un *homomorphisme* d'un groupe $(G, *)$ dans un groupe $(H, \star)$ est une application $f : G \to H$ telle que :

$$\forall g_1, g_2 \in G : f(g_1 * g_2) = f(g_1) \star f(g_2).$$

Proposition 1.36. *Si* f *est un homomorphisme de* $(G, *)$ *dans* $(H, \star)$*, alors l'image du neutre par* f *est le neutre de* H*, et l'inverse* g^{-1} *d'un élément* $g \in G$ *est envoyé sur* $f(g)^{-1} \in H$.

Démonstration. Voir preuve de la Proposition 1.17. □

Proposition 1.37. *Si* f *est un homomorphisme de* $(G, *)$ *dans* $(H, \star)$*, alors :*

1. $\operatorname{Im} f \coloneqq \{f(g) \text{ t.q. } g \in G\} \eqqcolon f(G)$ *est un sous-groupe de* H *;*
2. $\operatorname{Ker} f \coloneqq \{g \in G \text{ t.q. } f(g) = e_H\}$ *est un sous-groupe* ***normal*** *de* H.

Démonstration. Montrons d'abord que $\operatorname{Im} f \leqslant H$. Prenons donc $g, g' \in G$. On a alors $f(g) \star f(g')^{-1} = f(g * g'^{-1}) \in \operatorname{Im} f$ car f est un homomorphisme.

Montrons ensuite que $\operatorname{Ker} f \leqslant G$. Prenons $g_1, g_2 \in \operatorname{Ker} f$. On sait donc que :

$$f(g_1 * g_2^{-1}) = f(g_1) \star f(g_2)^{-1} = e_H \star e_H^{-1} = e_H.$$

On en déduit que $g_1 * g_2^{-1} \in \operatorname{Ker} f$.

Montrons alors que pour tout $a \in G$, on a $a * \operatorname{Ker}(f) * a^{-1} \subseteq \operatorname{Ker} f$. Soit $g \in \operatorname{Ker} f$. On calcule :

$$f\left(a * g * a^{-1}\right) = f(a) * e_H * f(a)^{-1} = f(a) * f(a)^{-1} = e_H,$$

et donc $a * g * a^{-1} \in \operatorname{Ker} f$, ou encore $a * \operatorname{Ker}(f) * a^{-1} \subseteq \operatorname{Ker} f$. $\operatorname{Ker} f$ est donc bien un sous-groupe normal de G. □

Remarque. Un isomorphisme est un homomorphisme tel que $\operatorname{Ker} f = \{e_G\}$ et $\operatorname{Im} f = H$ car f est respectivement injective et surjective.

Définition 1.38. Un homomorphisme d'un groupe $(G, *)$ dans lui-même est appelé un *automorphisme*.

Définition 1.39. Pour tout $g \in G$, on définit la *conjugaison par* g comme la fonction :

$$c(g) : G \to G : h \mapsto g * h * g^{-1}.$$

Proposition 1.40. *Pour* $g \in G$*, la conjugaison par* g *est un automorphisme.*

Démonstration. $c(g)$ est injective par les règles de simplification, et est surjective car pour tout $\gamma \in G$, on a :

$$c(g)^{-1}(\gamma) = g^{-1} * \gamma * g,$$

en effet :

$$c(g)(g^{-1} * \gamma * g) = g * \left(g^{-1} * \gamma * g\right) * g^{-1} = \gamma.$$

Donc $c(g)$ est bien surjective.

Et puisque $c(g)$ va de G dans G, c'est bien un automorphisme. □

Proposition 1.41. *L'application* $C : G \to \mathrm{Aut}(G) \subset G^G : g \mapsto c(g)$ *est un homomorphisme.*

Démonstration. Soient $g, h, \gamma \in G$. On calcule :

$$\begin{aligned} C(g * h)(\gamma) &= c(g * h)(\gamma) = (g * h) * \gamma * (g * h)^{-1} = g * h * \gamma * h^{-1} * g^{-1} = c(g)(h * \gamma * h^{-1}) \\ &= c(g)\left(c(h)(\gamma)\right) = \left(c(g) \circ c(h)\right)(\gamma). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.42. *Soit* f *un homomorphisme de groupe de* $(G, *)$ *dans* $(H, \star)$*. Deux éléments* $x, y \in G$ *ont la même image par* f *si et seulement si ils appartiennent à la même classe latérale de* $\mathrm{Ker}\, f$ *dans* G*.*

Démonstration. Soient x et y tels que $f(x) = f(y)$. On calcule :

$$f(x * y^{-1}) = f(x) \star f(y^{-1}) = f(y) \star f(y)^{-1} = e_H.$$

Donc $x * y^{-1} \in \mathrm{Ker}\, f$, et donc $x * \mathrm{Ker}\, f = y * \mathrm{Ker}\, f$ par la Proposition 1.24. □

1.7 Groupes quotients

Soit $f : (G, *) \to (H, \star)$ un homomorphisme surjectif. Si $x' \in H$, alors il existe $x \in G$ tel que $f(x) = x'$. On a alors :

$$f^{-1}(\{x'\}) = x * \mathrm{Ker}\, f.$$

Si $|\mathrm{Ker}\, f| \geqslant 2$, prenons également $y' \in H$ et donc $y \in G$ tel que $f^{-1}(\{y'\}) = y * \mathrm{Ker}\, f$.

On peut ensuite calculer :

$$x' \star y' = f(x) \star f(y) = f(x * y),$$

d'où l'on déduit :

$$f^{-1}(\{x' * y'\}) = x * y * \mathrm{Ker}\, f.$$

Définition 1.43. Soit N un sous-groupe normal du groupe $(G, *)$. On désigne par G/N l'ensemble des classes latérales de N dans G. Cela se lit G *quotienté* N.

Proposition 1.44. *Soient* $x * N$ *et* $y * N$ *deux éléments de* G/N*. Si* $x' \in x * N$ *et* $y' \in y * N$*, alors :*

$$x' * y' \in x * y * N.$$

Démonstration. On sait qu'il existe $m, n \in N$ tels que $x' = x * n$ et $y' = y * m$. Par normalité de N, on sait qu'il existe $m' \in N$ tel que $y' = n * y = y * n'$. Dès lors :

$$x' * y' = x * n * y * n' * m.$$

Or, $n' * m \in N$. Donc :

$$x' * y' \in x * y * N.$$

□

Définition 1.45. On définit le produit $\bar{*} : G/N \times G/N \to G/N : (x * N, y * N) \mapsto (x * N)\bar{*}(y * N) := x * y * N$.

Théorème 1.46. *Soient* $(G, *)$ *un groupe et* N *un sous-groupe normal de* G*. Alors* $(G/N, \bar{*})$ *est un groupe.*

Démonstration. $\bar{*}$ est interne par définition et par la proposition précédente, et est associative par associativité de $*$.

$(G/N, \bar{*})$ admet pour neutre $e * N = N$.

Soit $g * N \in G/N$. Il admet pour inverse $g^{-1} * N$ car $(g * N)\bar{*}(g^{-1} * N) = e * N = N$. □

Définition 1.47. Le groupe $(G/N, \bar{*})$ est appelé le *groupe quotient de* G *par* N.

Définition 1.48. Soient $(G, *)$ un groupe, et $N \leqslant G$. La projection $\pi_N : G \to G/N : g \mapsto g * N$ est appelée la *projection canonique*.

Proposition 1.49. $\pi_N : (G, *) \to (G/N, \bar{*})$ *est un homomorphisme.*

Démonstration. Soient $g, h \in G$. $\pi_N(g * h) = g * h * N = (g * N)\bar{*}(h * N) = \pi_N(g)\bar{*}\pi_N(h)$. □

Proposition 1.50. *Si* $(G, *)$ *et* $(H, \star)$ *sont deux groupes,* $f : G \to H$ *est un homomorphisme, et si* N *est un sous-groupe normal de* G *contenu dans* $\operatorname{Ker} f$*, alors il existe un homomorphisme* $\bar{f} : G/N \to H$ *avec* $\bar{f}(g * N) = f(g)$*. De plus :*

$$\operatorname{Im} \bar{f} = \operatorname{Im} f \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{Ker} \bar{f} = \operatorname{Ker}(f)/N.$$

Démonstration. $\bar{f}$ est bien définie. Soient $g, g' \in G$. On calcule :

$$\bar{f}((g * N)\bar{*}(g' * N)) = \bar{f}(g * g' * N) = f(g * g').$$

Par propriétés de morphismes de f, on trouve donc :

$$\bar{g}((g * N)\bar{*}(g' * N)) = f(g) \star f(g') = \bar{f}(g * N) \star \bar{f}(g' * N).$$

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} \bar{f}$ de manière triviale.

$g * N \in \operatorname{Ker} \bar{f}$ si et seulement si $g \in \operatorname{Ker} f$. On a alors bien $\operatorname{Ker} \bar{f} = \{h * N \text{ t.q. } h \in \operatorname{Ker} f\} = \operatorname{Ker}(f)/N$. □

1.8 Théorèmes d'isomorphisme

1.8.1 Premier théorème d'isomorphisme

Théorème 1.51. *Si* $f : (G, *) \to (H, \star)$ *est un homomorphisme de groupes, il induit un isomorphisme :*

$$G/\operatorname{Ker}(f) \cong \operatorname{Im} f.$$

Démonstration. $(\operatorname{Im} f, \star)$ est un groupe car $\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe de H. $f : G \to \operatorname{Im} f$ est un homomorphisme.

Considérons $N = \operatorname{Ker} f$. $\bar{f} : G/\operatorname{Ker}(f) \to \operatorname{Im} f$ est surjectif car $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} \bar{f}$ et est injectif car $\operatorname{Ker}(\bar{f}) = \operatorname{Ker}(f)/\operatorname{Ker}(f) = \{e * \operatorname{Ker} f\} = \{e\}$. $\bar{f}$ est donc un homomorphisme bijectif, ou encore, un isomorphisme. □

1.8.2 Deuxième théorème d'isomorphisme

Théorème 1.52. *Si* K, N *sont des sous-groupes de* $(G, *)$*, alors* $K/(N \cap K) \cong (N * K)/N$*, où on définit :*

$$N * K := \left\{ n * k \textit{ t.q. } (n, k) \in N \times K \right\}.$$

Démonstration. Montrons que $N * K$ est un sous-groupe de G, i.e. $\forall x, y \in N * K : x * y^{-1} \in N * K$. Prenons donc $(x, y) \in (N * K)^2$. Il existe $n_x, n_y \in N$ et $k_x, k_y \in K$ tels que $(x, y) = (n_x * k_x, n_y * k_y)$. On a alors :

$$x * y^{-1} = n_x * k_x * k_y^{-1} * n_y^{-1}.$$

En posant $k := k_x * k_y^{-1} \in K$ (car K est un sous-groupe), on trouve :

$$x * y^{-1} = n_x * k * n_y.$$

Par normalité de N on sait qu'il existe $n \in N$ tel que $k * n_y = n * k$. On trouve alors :

$$x * y^{-1} = n_x * n * k = (n_x * n) * k \in N * K.$$

On observe maintenant que si N est normal dans G, alors il l'est dans $N * K$.

L'application $f : K \to (N*K)/N : k \mapsto k*N$ est un homomorphisme. Son noyau est $\operatorname{Ker} f = \{k \in K \text{ t.q. } k*N = N\} = K \cap N$. $K \cap N$ est donc un sous-groupe normal de K. Par le théorème précédent, on a :

$$K/\operatorname{Ker}(f) \cong \operatorname{Im} f = (N * K)/N.$$

□

1.8.3 Troisième théorème d'isomorphisme

Théorème 1.53. *Si* K *et* N *sont deux sous-groupes normaux de* $(G, *)$ *tels que* $K \subseteq N$*, alors* N/K *est normal dans* G/K *et :*

$$\left(G/K\right) / \left(N/K\right) \cong G/N.$$

Démonstration. Prenons $\pi_N : G \to G/N$ l'homomorphisme canonique. On a $K \subset \operatorname{Ker} \pi = N$. Par le théorème précédent, il existe un homomorphisme $\overline{\pi} : G/K \to G/N : g * K \mapsto g * N$ surjectif de noyau $\operatorname{Ker} \overline{\pi} = N/K$.

Puisque l'on en déduit G/K normal dans N/K, en appliquant le premier théorème d'isomorphisme à $\overline{\pi}$, on trouve :

$$\left(G/K\right) / \left(N/K\right) \cong G/N.$$

□

2 Actions de groupes

Définition 2.1. Une *action* (à gauche) d'un groupe $(G, *)$ sur un ensemble S est une application :

$$\phi : G \times S \to S : (g, x) \mapsto \phi(g, x)$$

telle que :
- $\forall x \in S : \phi(e_G, x) = x$;
- $\forall g_1, g_2 \in G : \forall x \in S : \phi(g_1 * g_2, x) = \phi\left(g_1, \phi(g_2, x)\right)$.

S'il existe une action entre un groupe $(G, *)$ et un ensemble S, on dit que G agit sur S.

Remarque. Pour $g \in G, x \in S$ et ϕ une action de G sur S, on note souvent $gx = \phi(g, x)$.

Définition 2.2. Soit $(G, *)$ un groupe et $H \leqslant G$ un sous-groupe. Une action de H sur G est sous la forme $\phi(h, g) = h * g$. Une telle action est appelée *une translation à gauche* de H par G.

Exemple 2.1. La conjugaison $c(g)$ est une action.

Remarque. Soient $(G, *)$ un groupe et H, K deux sous-groupes de G avec K normal. H agit sur G/K par translation gauche :

$$(h, g * K) \mapsto (h * g) * K$$

Définition 2.3. Soit $(G, *)$ un groupe agissant sur un ensemble S. Cette action ϕ définit une relation d'équivalence sur S :

$$\forall x, x' \in S : x \sim x' \iff \exists g \in G \text{ t.q. } gx = x'.$$

Les classes d'équivalence induites par $\sim$ (donc les éléments de $S/\sim$) sont appelées les *orbites de* S *sous l'action de* G.

On note :

$$\mathcal{O}_x := \{gx \text{ t.q. } g \in G\}$$

l'orbite de $x \in S$.

Proposition 2.4. *Les orbites de* S *sous l'action de* G *forment une partition de* S.

Définition 2.5. Si $\left|S/\sim\right| = 1$, on dit que l'action est transitive.

Définition 2.6. Soit $(G, *)$ un groupe agissant sur un ensemble S, et soit $x \in S$. On définit le *stabilisateur de* x *dans* G par :

$$G_x := \{g \in G \text{ t.q. } gx = x\}$$

Proposition 2.7. *Le stabilisateur de* $x \in S$ *dans* G *est un sous-groupe de* G.

Démonstration. Soient $a, b \in G_x$. On observe que :

$$\phi(b^{-1}, x) = \phi(b^{-1}, \phi(b, x))) = \phi(e_G, x) = x.$$

Dès lors, $b^{-1} \in G_x$. Montrons alors que $a * b^{-1} \in G_x$:

$$\phi(a * b^{-1}, x) = \phi(a, \phi(b^{-1}, x)) = \phi(a, x) = x.$$

□

Définition 2.8. Soit $(G, *)$ un groupe. G agit sur lui-même par conjugaison. Pour $x \in G$, on a :

$$G_x = \{g \in G \text{ t.q. } gxg^{-1} = x\} =: C_G(x),$$

que l'on appelle le *centralisateur de* x *dans* G.
Définition 2.9. Si G agit sur l'ensemble de ses sous-groupe par conjugaison, pour $K \leqslant G$, on définit :

$$G_K := \{g \in G \text{ t.q. } gKg^{-1} = K\} =: N_G(K),$$

que l'on appelle *normalisateur de* K *dans* G.
Remarque. On observe que $\langle x \rangle \leqslant C_G(x)$, et K est un sous-groupe normal de $N_G(K)$.
Remarque. Soient $(G, *)$ un groupe agissant sur un ensemble S, et G_x, le stabilisateur de x dans G. L'indice de G_x dans G (noté $[G : G_x]$) est égal à :

$$[G : G_x] = \frac{|G|}{|G_x|}.$$

Théorème 2.10. *Soit* $(G, *)$ *un groupe agissant sur un ensemble* S*. Alors* $\forall x \in S$*, on a :*

$$|\mathcal{O}_x| = [G : G_x].$$

<u>*Démonstration*</u>. L'application $\varphi : G/G_x \to \mathcal{O}_x : gG_x \mapsto gx$ est une bijection car :

$$gG_x = \phi(g, G_x) = \{\phi(g, hx) \text{ t.q. } h \in G \text{ et } hx = x\} = \{\phi(g, x)\} = \{gx\}.$$

□

Corollaire 2.11. *Si* $(G, *)$ *est un groupe fini, alors :*

1. $\forall x \in G : \left|\{gxg^{-1} \textit{ t.q. } g \in G\}\right| = [G : C_G(x)]$;
2. *si* $\mathcal{O}_{x_i}$ *pour* $i = 1, \dots, m$ *sont les classes de conjugaison, distinctes deux à deux, d'éléments de* G *(avec* $x_i \in G$*), alors :*
$$|G| = \sum_{k=1}^{m} \left|\mathcal{O}_{x_k}\right| = \sum_{k=1}^{m} [G : C_G(x_k)] \text{ ;}$$
3. *la cardinalité de l'ensemble des sous-groupes de* G *qui sont conjugués à un sous-groupe* K *de* G *fixé, est égal à :*
$$[G : N_G(K)],$$
qui divise $|G|$.

Définition 2.12. On définit le *centre du groupe* G par :

$$Z(G) := C(G) := \{x \in G \text{ t.q. } \forall g \in G : gxg^{-1}\}.$$

Remarque. On observe que $\left|\mathcal{O}_{x_i}\right| = 1 \iff x_i \in C(G)$. Cela amène à la *formule des classes* qui dit que :

$$|G| = \left|C(G)\right| + \sum_{j=1}^{n} \left|\mathcal{O}_{x_j}\right|,$$

où $\mathcal{O}_{x_j}$ sont les classes de conjugaison contenant au moins 2 éléments.
Définition 2.13. Soit $\phi : G \to S$, une action d'un groupe G sur un ensemble S. Pour $g \in G$ fixé, on définit :

$$\phi : S \to S : x \mapsto \phi_g(x) = \phi(g, x) = gx.$$

Proposition 2.14. *Pour* $g \in G$ *fixé,* ϕ_g *est une bijection de* S *dans* S.

Démonstration. Soient $x, y \in S$. Si $\phi_g(x) = \phi_g(y)$, alors $x = \phi(g^{-1}, \phi_g(x)) = \phi(g^{-1}, \phi_g(y)) = y$.
De plus, soit $x \in S$. On sait que $\phi(g^{-1}, x) \in S$ par définition. Notons y cette valeur. On a alors :

$$\phi_g(y) = \phi_g(g^{-1}x) = x.$$

ϕ_g est donc injective et surjective. $\square$

Définition 2.15. Notons $A(S) = \mathrm{Sym}(S)$ le groupe des bijections de S dans S muni de la composition.

Théorème 2.16. *Soit* $\phi : G \times S \to S$. *L'application* $\widetilde{\phi} : G \to A(S) : g \mapsto \phi_g$ *est un homomorphisme de groupes.*

Théorème 2.17. *Si* $(G, *)$ *est un groupe, alors il existe un homomorphisme de groupes* $\widetilde{\phi} : G \to \mathrm{Aut}(G)$ *tel que* $\mathrm{Ker}\,\widetilde{\phi} = C(G)$.

Lemme 2.18. *Soit* G*, un groupe d'ordre fini* p^n*, pour* p *premier, et* $n \in \mathbb{N}^*$*. Soit* S *un ensemble fini sur lequel* G *agit. Si* S_0 *est un ensemble de points fixes de* S *sous l'action de* G *:*

$$S_0 \coloneqq \{x \in S \textit{ t.q. } \forall g \in G : gx = x\},$$

alors :

$$|S| = |S_0| \mod p.$$

Démonstration. On écrit S comme une union disjointe d'orbites sous l'action de G. On remarque que l'orbite $\mathcal{O}_x$ d'un point $x \in S$ ne contient qu'un seul point (donc x) si et seulement si $x \in S_0$. Donc :

$$S = S_0 \sqcup \mathcal{O}_{x_1} \sqcup \mathcal{O}_{x_2} \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{O}_{x_n},$$

pour $\left|\mathcal{O}_{x_i}\right| \geqslant 2$.

On sait que $\left|\mathcal{O}_{x_i}\right|$ divise $|G|$ pour tout i. Or, seules les puissances de p divisent $|G|$, donc p divise $\mathcal{O}_{x_i}$. Or :

$$S \setminus S_0 = \mathcal{O}_{x_1} \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{O}_{x_n}.$$

Du coup :

$$|S| - |S_0| = pK,$$

pour un certain $K \in \mathbb{N}^*$, et donc :

$$|S| = |S_0| + pK = |S_0| \mod p.$$

$\square$

Théorème 2.19 (Théorème de Cauchy)**.** *Soit* $(G, *)$ *un groupe fini, et* p *un nombre premier qui divise* $|G|$*. Alors* G *possède au moins un élément* $g \in G$ *tel que* $\mathrm{ord}(g) = p$.

Démonstration. On pose :

$$S \coloneqq \{(g_1, \ldots, g_p) \in G^p \text{ t.q. } g_1 \ldots g_p = e_G\}.$$

Puisque $g_p = (g_1 \ldots g_p)^{-1}$, on a $|S| = |G|^{p-1}$, et par hypothèse, p divise $|G|$. Soit $H \cong \mathbb{Z}_p$, le groupe cyclique d'ordre p agissant sur S par permutations cycliques du type :

$$\mathbb{Z}_p \times S \to S : \big(k, (g_1, \ldots, g_p)\big) \mapsto k(g_1, \ldots, g_p) :- \big(g_{k+1}, \ldots, g_p, g_1 \ldots, g_k\big).$$

Posons alors :

$$S_0 \coloneqq \{(g_1, \ldots, g_p) \in S \text{ t.q. } g_1 = \ldots = g_p\} = \{(g, \ldots, g) \in S \text{ t.q. } g^p = e\}.$$

On sait $|S_0| \geqslant 1$ car $(e, \ldots, e) \in S_0$. De plus, par le lemme précédent, p divise $|S_0|$, donc $|S_0| \geqslant 2$.

Il existe donc au moins une valeur $g \in G$ telle que $g \neq e_G$, et $g^p = e$. □

3 Groupes abéliens

Lemme 3.1. *Si* $(G, *)$ *est un groupe cyclique, alors tout sous-groupe de* G *est cyclique.*

Démonstration. Soit $g \in G$ tel que $G = \langle g \rangle$. Soit $H \leqslant G$, un sous-groupe de G. Posons :

$$A \coloneqq \{\ell \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } g^\ell \in H\}.$$

Prenons $\ell, m \in A$. On a alors $g^{\ell - m} = g^\ell * (g^m)^{-1}$, la composition de deux éléments de H. Donc $\ell - m \in A$, ce qui fait de A un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Si $A = \{0\}$, alors A est trivialement cyclique, et sinon soit n, le plus petit entier strictement positif de A. On a alors $A \cong n\mathbb{Z}$. □

Lemme 3.2. *Soit* $G = \langle g \rangle$*, un groupe cyclique d'ordre* $n \lneqq +\infty$*, et soit* $\ell \in \mathbb{N}^*$*. Alors :*

$$\left| \left\langle g^\ell \right\rangle \right| = \frac{n}{\mathrm{GCD}(n, \ell)}$$

Démonstration. On cherche le plus petit entier positif k tel que $(g^\ell)^k = g^{k\ell} = e$. On a :

$$\begin{cases} \ell & = \mathrm{GCD}(\ell, n) r \\ n & = \mathrm{GCD}(\ell, n) s, \end{cases}$$

pour $s, r \in \mathbb{N}$, avec $\mathrm{GCD}(r, s) = 1$. Si $g^{k\ell} = e$, c'est que n divise $k\ell$, et donc $\frac{n}{\mathrm{GCD}(n,\ell}$ $= s$ divise k. De plus :

$$\left(g^\ell\right)^{\frac{n}{\mathrm{GCD}(n,\ell)}} = g^{\frac{\ell n}{\mathrm{GCD}(n,\ell)}} = g^{nr} = e^r = e.$$

On en déduit que $k = \mathrm{ord}(g^\ell)$ divise $\frac{n}{\mathrm{GCD}(n,\ell)}$. Donc $k = \frac{n}{\mathrm{GCD}(n,\ell)}$. □

Exemple 3.1. On sait que $\mathbb{Z}_{30} = \langle 1 \rangle$. Alors $\left|\{5, 10, 15, 20, 25, 0\}\right| = \left|\langle 5 \rangle\right| = \frac{30}{5} = 6$.

Définition 3.3. Dans un groupe abélien, on prend pour convention d'écrire la loi de composition $+$, de noter l'inverse par de $g \in G$ par $-g \in G$, et de noter la composition n fois par $g^n = ng$.

Lemme 3.4. *Soit* $\varphi : H \to K$*, un morphisme de groupes abéliens. Si* $\operatorname{Ker} \varphi$ *et* $\operatorname{Im} \varphi$ *sont engendrés par un ensemble fini, alors* H *l'est également.*

Démonstration. Soient $\{k_1, \ldots, k_r\}$ et $\{i_1, \ldots, i_s\}$, ensembles générateurs respectivement de $\operatorname{Ker} \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$. Pour $j = 1, \ldots, s$, on prend $h_j \in H$ t.q. $\varphi(h_j) = i_j$. Montrons que $\{k_1, \ldots, k_r\} \cup \{h_1, \ldots, h_s\}$ est un ensemble générateur de H.

Soit $x \in H$. Il existe $(a_1, \ldots, a_s) \in \mathbb{Z}^s$, tel qu'on peut écrire :

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{s} a_k i_k.$$

Par définition des h_j et par propriétés de morphismes, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{k=1}^{s} a_k \varphi(h_k) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{s} a_k h_k\right) \\ 0 &= \varphi(x) - \varphi\left(\sum_{k=1}^{s} a_k h_k\right) = \varphi\left(x - \sum_{k=1}^{s} a_k h_k\right) \\ \operatorname{Ker}\varphi &\ni x - \sum_{k=1}^{s} a_k h_k,\end{aligned}$$

et donc il existe $(b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{Z}^r$ tel qu'on peut écrire :

$$x - \sum_{k=1}^{s} a_k h_k = \sum_{t=1}^{r} b_t k_t,$$

ou encore :

$$x = \sum_{k=1}^{s} a_k h_k + \sum_{t=1}^{r} b_t k_t.$$

H est bien généré par $\{h_1, \dots, h_s, k_1, \dots, k_r\}$. $\square$

Proposition 3.5. *Tout sous-groupe d'un groupe abélien finiment engendré est finiment engendré.*

Démonstration. Soit $\{g_1, \dots, g_n\}$, un ensemble générateur de G. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on définit :

$$G_k \coloneqq \langle g_1, \dots, g_k \rangle .$$

Soit H un sous-groupe de G, et posons $H_i \coloneqq H \cap G_i$ pour $i = 1, \dots, n$.

Montrons ce résultat par récurrence sur G_k.

Pour $k = 1$, le groupe $G_k = G_1 = \langle g_1 \rangle$ est un groupe cyclique, et par propriété d'intersection (Proposition 1.12), on sait que H_1 est un sous-groupe, et cyclique qui plus est.

Supposons alors pour $j < n$ que tout sous-groupe de G_j est finiment engendré. Considérons alors la projection :

$$\phi_j : G_{j+1} \to G_{j+1}/G_n,$$

un morphisme de groupes. Intéressons-nous à la restriction de ϕ_j à H_{j+1}. Puisque $\operatorname{Ker}\phi_j = G_j$, on trouve :

$$\operatorname{Ker}\phi_j\Big|_{H_{j+1}} = H_{j+1} \cap G_j,$$

et $H_{j+1} \cap G_j$ est un sous-groupe de G_j. Or, par hypothèse, on suppose que tout sous-groupe de G_j est finiment engendré. Donc $\operatorname{Ker}\phi_k\Big|_{H_{j+1}}$ est finiment engendré.

De plus, $\operatorname{Im}\phi_k \leqslant G_{j+1}/G_j = \langle g_{j+1} + G_k \rangle$. Donc $\operatorname{Im}\phi_k\Big|_{H_{j+1}} \leqslant \operatorname{Im}\phi_k$ est finiment engendré.

Par le lemme précédent, on trouve que H_{j+1} est finiment engendré. La propriété est en particulier vraie pour $j = n$, et donc pour G. $\square$

Théorème 3.6 (Théorème fondamental des groupes abéliens finis)**.** *Soit* $(G, +)$ *un groupe abélien fini. Alors il existe une unique suite* $(n_1, \dots, n_{d(G)}) \in \mathbb{Z}^{d(G)}$ *telle que :*

$$\prod_{i=1}^{d(G)} n_i = |G|,$$

et :

$$G \cong \prod_{k=1}^{d(G)} \mathbb{Z}_{n_k},$$

avec $d(G)$ *la cardinalité du plus petit générateur de* G *(au sens de l'inclusion), tel que* $\forall 1 \leqslant k \lneqq d(G)$: n_k *divise* n_{k+1}.

Démonstration. Montrons cela par récurrence. Si $d(G) = 1$, alors G est cyclique, et donc isomorphe à $\mathbb{Z}_{n_1}$.

Supposons alors $d(G) \geqslant 2$ tel que pour tout groupe abélien G' tel que $d(G') \lneqq d(G)$, le théorème est vrai. Soit m, le plus petit entier strictement positif tel qu'il existe $\{g_1, \dots, g_{d(G)}\}$, un ensemble générateur de G satisfaisant :

$$mg_1 + \sum_{k=2}^{d(G)} a_k g_k = 0. \tag{3}$$

Pour $i \in \{2, \dots, d(G)\}$, on pose :

$$a_i = mq_i + r_i,$$

pour $q_i \in \mathbb{N}$, et $r_i \in \mathbb{N}$ tel que $r_i \lneqq m$.

Posons ensuite :

$$h_1 \coloneqq g_1 + \sum_{k=2}^{d(G)} q_k g_k.$$

L'équation (3) devient alors :

$$m\left(g_1 + q_2 g_2 + \ldots + q_{d(G)} g_{d(G)}\right) + \sum_{k=2}^{d(G)} r_k g_k = mh_1 + \sum_{k=2}^{d(G)} r_k g_k = 0.$$

On trouve alors, par définition de m, $r_2 = \ldots = r_{d(G)} = 0$, et donc $mh_1 = 0$, avec $m \neq 0$, donc m divise $\operatorname{ord}(h_1)$. Or m est le plus petit entier avec cette propriété. Donc $m = \operatorname{ord}(h_1)$.

On a un morphisme surjectif de groupes : $\Theta : \langle h_1 \rangle \times \left\langle g_2, \dots, g_{d(G)} \right\rangle \to G : (a, b) \mapsto a + b$. On observe que Θ est injective car $(a, b) \in \operatorname{Ker} \Theta \iff a = b = e$ par (3). Donc Θ est un isomorphisme, et donc :

$$\exists G' \text{ t.q. } G \cong Z_m \times G',$$

et par récurrence, on a $\exists (n_2, \dots, n_{d(G)})$ tel que :

$$G' \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \mathbb{Z}_{n_{d(G)}}.$$

Il reste alors à montrer que m divise n_2. On pose $n_2 = mq + r$, et on observe que $mh_1 + n_2 h_2 = 0$ si h_2 engendre $\mathbb{Z}_{n_2}$. On a donc :

$$m(h_1 + qh_2) + rh_2 = 0 \Rightarrow r = 0.$$

□

3.1 Groupes abéliens de type fini

Définition 3.7. Un groupe abélien est dit *de type fini* lorsqu'il est engendré par un ensemble fini.
Définition 3.8. La *torsion* T d'un groupe $(G, *)$ est définie par :

$$T \coloneqq \{g \in G \text{ t.q. } \operatorname{ord}(g) \lneqq +\infty\}.$$

Remarque. On remarque que e est toujours dans la torsion du groupe dont il est le neutre.
Définition 3.9. Un groupe $(G, *)$ de torsion $T = \{e\}$ est dit *sans torsion*, et un groupe de torsion $T = G$ est dit *de torsion*.

Proposition 3.10. *La torsion T d'un groupe abélien de type fini G est un sous-groupe de G.*

Démonstration. Soient $x, y \in T$. On sait que $y^{-1} \in T$ car $\operatorname{ord}(y) = \operatorname{ord}(y^{-1})$. Puisque G est de type fini, on sait :

$$x = \sum_{i=1}^{d(G)} a_i g_i \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{i=1}^{d(G)} b_i g_i,$$

pour $\{g_1, \dots g_{d(G)}\} \subset G$ tel que $G = \left\langle g_1, \dots, g_{d(G)} \right\rangle$. Dès lors :

$$\operatorname{ord}(x)\operatorname{ord}(y)(x-y) = \operatorname{ord}(x)\operatorname{ord}(y)\sum_{i=1}^{d(G)}(a_i - b_i)g_i = \operatorname{ord}(y)\left(\operatorname{ord}(x)x\right) - \operatorname{ord}(x)\left(\operatorname{ord}(y)y\right) = \operatorname{ord}(x)e - \operatorname{ord}(y)e = e.$$

Dès lors, $x - y$ a un ordre fini qui divise $\operatorname{ord}(x)\operatorname{ord}(y)$ (à savoir $\operatorname{LCM}(\operatorname{ord}(x), \operatorname{ord}(y))$). □

Théorème 3.11. *Soit $(G, +)$ un groupe abélien sans torsion de type fini. Alors $G \cong \mathbb{Z}^{d(G)}$.*

Démonstration. Soit $\hat{g} \coloneqq \{g_1, \dots, g_{d(G)}\}$, une partie génératrice de G. On définit :

$$\Pi : \mathbb{Z}^{d(G)} \to G : (a_1, \dots, a_{d(G)}) \mapsto \sum_{i=1}^{d(G)} a_i g_i,$$

un morphisme de groupes surjectif.

Montrons que Π est injectif. Si $(a_1, \dots, a_{d(G)}) \in \operatorname{Ker}\Pi$, alors :

$$\sum_{i=1}^{d(G)} a_i g_i = 0. \tag{4}$$

De plus, G est sans torsion, donc tout $g \in G$ tel que $g \neq e_G$ est d'ordre infini. En considérant $(a_1, \dots, a_{d(G)}) \neq (0, \dots, 0)$, on déduit qu'il existe au moins deux coefficients non-nuls. Prenons a_1 et a_2 (réorganisation des indices). Supposons $|a_1| > |a_2|$ sans perte de généralité.

Si $a_1 a_2 > 0$ (même signe), alors $|a_1 - a_2| < |a_1|$. L'équation (4) devient alors :

$$(a_1 - a_2)g_1 + a_2(g_1 + g_2) + \sum_{i=3}^{d(G)} a_i g_i = 0.$$

Si $a_1a_2 < 0$ (signe opposé), alors$|a_1 + a_2| <|a_1| <|a_1 - a_2|$. L'équation (4) devient alors :

$$(a_1 + a_2)g_1 + a_2(g_2 - g_1) + \sum_{i=3}^{d(G)} = 0.$$

En réitérant un nombre fini de fois, on montre qu'il existe un élément différent de e_G d'ordre fini, ce qui est une contradiction.

Π est donc injective, donc bijective, et donc un isomorphisme. □

Lemme 3.12. *Soit* $(G, +)$ *un groupe abélien de type fini.* G/T *est un groupe sans torsion.*

Démonstration. Soit $g \in G$ tel que $T \neq g + T \in G/T$. Dès lors, $g \notin T$, et donc, $\nexists n \in \mathbb{N}$ t.q. $ng + T = T$. □

Lemme 3.13. *Tout groupe abélien* $(G, +)$ *de type fini est isomorphe au produit direct d'un groupe abélien fini et d'un groupe abélien sans torsion de type fini.*

Démonstration. T est un sous-groupe de G. Considérons G/T, qui est sans torsion (lemme précédent). Soit π : $G \to G/T$, la projection canonique. Par le Théorème 3.11, $G/T \cong \mathbb{Z}^\ell$, pour $\ell := d(G/T)$. Soit $\{g_1+T, \ldots, g_\ell+T\}$ un ensemble générateur de G/T.

Soit $f : G/T \to G : \sum_{i=1}^{\ell} a_i g_i \mapsto \sum_{i=1}^{\ell} a_i g_i$. f est un morphisme injectif, et donc :

$$\pi \circ f : G/T \to G/T = \mathrm{Id}_{G/T}.$$

Soit $O : T \times G/T \to G : (t, x) \mapsto O(t, x) = t + f(x)$. O est surjectif. En effet :

$$\forall g \in G : \pi(g - (f \circ \pi)(g)) = \pi(g) - (\pi \circ f)(\pi(g)) = \pi(g) - \pi(g) = 0,$$

et donc $t(g) := g - (f \circ \pi)(g) \in \operatorname{Ker} \pi = T$. Or :

$$g = g - (f \circ \pi)(g) + (f \circ \pi)(g) = t(g) + (f \circ \pi)(g) = O(g, \pi(g)).$$

De plus, O est injective car $O(t, x) = 0$ si et seulement si $t = -f(x)$, donc $f(x) \in T$ car $0 \in T$. f est un morphisme, donc si $f(x)$ est d'ordre fini, alors x est d'ordre fini car $f(nx) = nf(x)$. De plus, si x est d'ordre fini et f est injective, il faut $x = 0$ car x est dans la torsion de G/T. On a donc $O(t, x) = 0 \iff (t, x) = (0_T, 0_{G/T})$. □

Théorème 3.14. *Soit* $(G, +)$ *un groupe abélien de type fini. Alors il existe* $\ell > 0$ *et une suite unique d'entiers positifs* $(n_1, \ldots, n_k)$ *tel que* n_j *divise* n_{j+1} *pour* $1 \leqslant j \lneqq k$ *et* $G \cong \mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}$.

Démonstration. Montrons que$|T| < +\infty$. T est un groupe de torsion de type fini puisque G est de type fini. Il existe donc un générateur de T : $\{t_1, \ldots, t_{d(T)}\}$ tel que pour $x \in T$:

$$x = \sum_{i=1}^{d(T)} a_i t_i.$$

Donc$|T| \leqslant \mathrm{LCM}\left(a_1, \ldots, a_{d(T)}\right) < +\infty$.

Par le lemme précédent et par le théorème fondamental des groupes abéliens finis, on a ce résultat ($T \cong \mathbb{Z}^{d(T)=:\ell}$). □

4 Les théorèmes de Sylow

Définition 4.1. Soit $(G, *)$ un groupe fini, et soit p un diviseur premier de $|G|$. Si H est un sous-groupe de G tel que $|H| = p^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que H est un p*-sous-groupe de* G. Si de plus, p ne divise pas $\frac{|G|}{|H|}$, on dit que H est un p*(-sous-groupe de) Sylow de* G.

Théorème 4.2 (Premier théorème de Sylow)**.** *Soit* G *un groupe fini et soit* $p \in \mathbb{N}$ *premier tel que* p *divise* $|G|$. *Alors* G *possède au moins un* p*-Sylow.*

Démonstration. Montrons cela par récurrence sur $|G|$. Si $\exists \alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $|G| = p^\alpha$, alors G est son propre p-Sylow.

Supposons que le théorème soit faux pour un G d'ordre le plus petit possible. On a donc $\alpha \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $m > 1, \mathrm{GCD}(p,, m) = 1$ et $|G| = p^\alpha m$. On sait de plus (formule des classes) :

$$|G| = \left|Z(G)\right| + \sum_{k=1}^{r} [G : C_G(x_k)],$$

où $\mathcal{O}_{x_1}, \ldots, \mathcal{O}_{x_r}$ sont les orbites (classes de conjugaison) de cardinalité $\gneqq 1$.

Cas 1 Supposons qu'il existe un j tel que p^α divise $\left|C_G(x_j)\right|$. Puisque $\left|C_G(x_j)\right| < |G|$, l'hypothèse nous donne un p-Sylow de $C_G(x_j)$, qui est également un p-Sylow de G, contradiction.

Cas 2 Supposons que pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$: p^α ne divise pas $\left|C_G(x_j)\right|$. On sait :

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant r : |G| = \left|C_G(x_j)\right| [G : C_G(x_j)].$$

Or p^α divise $|G|$, donc p^α divise $[G : C_G(x_j)]$ pour tout j. Par la formule des classes, on a alors p divise $\left|Z(G)\right|$.

De plus, $Z(G)$ est abélien. Par le théorème de Cauchy, il existe $x \in Z(G)$ tel que $\mathrm{ord}(x) = p$. Étant donné que $\langle x \rangle$ forme un sous-groupe normal de G, on peut poser $G' := G/\langle x \rangle$. On a $|G'| = \frac{|G|}{p} = p^{\alpha-1} m < p^\alpha = |G|$. Donc par hypothèse de récurrence, il existe P', un p-Sylow de G' d'ordre $p^{\alpha-1}$.

Or, tout sous-groupe de $G/\langle x \rangle$ est sous la forme $H/\langle x \rangle$, pour $H \leqslant G$. Il existe donc $P \leqslant G$ tel que $P/\langle x \rangle = P'$. Et donc :

$$\left|P'\right| = p^{\alpha-1} = \frac{|P|}{\left|\langle x \rangle\right|} = \frac{|P|}{p},$$

ou encore $|P| = p^\alpha$, et donc P est un p-Sylow de G, ce qui est une contradiction.

□

Remarque. Si $|G| < +\infty$ et p est premier tel que p divise $|G|$, alors tout sous-groupe conjugué xPx^{-1} admet un p-Sylow.

Si un groupe G n'admet qu'un seul p-Sylow P, alors P est normal dans G.

Théorème 4.3 (Deuxième théorème de Sylow)**.** *Soit* H, *un* p*-sous-groupe d'un groupe fini* G. *Soit* P, *un* p*-Sylow de* G. *Alors il existe* $x \in G$ *tel que* $H \subseteq xPx^{-1}$.

En particulier, tous les p*-Sylow sont conjugués.*

Démonstration. On regarde l'action de H par translation à gauche sur $S := G/P$:

$$\phi : H \times S \to S : (h, xP) \mapsto hxP.$$

Par le Lemme 2.18, pour :

$$S_0 = \{x \in S \text{ t.q. } \forall h \in H : \phi(h, xP) = xP\},$$

on a :

$$\left|G/P\right| = [G : P] = |S| = |S_0| \mod p.$$

Or p ne divise pas $|S|$ car P est un p-Sylow. Donc $|S_0| \neq 0$. Donc il existe $xP \in S_0$. Or :

$$\begin{aligned} xP \in S_0 &\iff \forall h \in H : hxP = \phi(h, xP) = xP \\ &\iff \forall h \in H : x^{-1}hxP = P \\ &\iff \forall h \in H : x^{-1}hx \in P \\ &\iff x^{-1}Hx \subseteq P \\ &\iff H \subseteq xPx^{-1}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.4. *Si P est un p-Sylow de G, et P est un sous-groupe normal de G, alors P est l'unique p-Sylow de G.*

Théorème 4.5 (Troisième théorème de Sylow)**.** *Soit G un groupe fini et soit p premier tel que p divise $|G|$. Le nombre de p-Sylow de G divise $|G|$ et est de la forme :*

$$[G : N_G(P)] = kp + 1,$$

avec $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Par le deuxième théorème de Sylow, ce nombre de p-Sylow est égal au nombre de conjugués d'un p-Sylow.

Pour P fixé, on a donc :

$$\left|\left\{xPx^{-1} \text{ t.q. } x \in G\right\}\right| = |\mathcal{O}_P| =: \left|P^G\right|.$$

On considère l'action de G sur les sous-groupes de G par conjugaison. Le stabilisateur de P dans cette action est $N_G(P)$. De plus :

$$|\mathcal{O}_P| = \left|\left\{xPx^{-1} \text{ t.q. } x \in G\right\}\right| = [G : N_G(P)] \text{ divise } |G|.$$

On regarde l'action de P sur l'ensemble des p-Sylow par conjugaison :

$$\phi : P \times \mathcal{O}_P \to \mathcal{O}_P : (g, xPx^{-1}) \mapsto \phi(g, xPx^{-1}) = gxPx^{-1}.$$

Si S_0 désigne l'ensemble des p-Sylow fixes par cette action, on a :

$$\begin{aligned} Q \in S_0 &\iff \forall g \in P : gQg^{-1} = Q \\ &\iff P \leqslant N_G(Q). \end{aligned}$$

P et Q sont des p-Sylow de G, et des sous-groupes de $N_G(Q)$. Dès lors, P et Q sont conjugués dans $N_G(Q)$. Ainsi, on a $P = xQx^{-1}$, pour $x \in N_G(Q)$. Comme Q est normal dans $N_G(Q)$, on a $xQx^{-1} = Q$, et donc $P = Q$. Il y a donc un unique élément dans S_0, et par la formule $|S| = |S_0| \mod p = 1 \mod p$, on trouve $|S| = 1 + kp$, pour $k \in \mathbb{N}$. □