

# Calcul différentiel et intégral II

R. Petit

année académique 2016 - 2017

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Fonctions, séries et intégrales</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Suites et séries de fonctions</b>	<b>2</b>
1.1	Rappels . . . . .	2
1.1.1	Topologie métrique . . . . .	2
1.1.1.1	Espaces métriques . . . . .	2
1.1.1.2	Espaces vectoriels . . . . .	3
1.1.1.3	Ouverts, fermés, compacts . . . . .	4
1.1.1.4	Suites de Cauchy . . . . .	5
1.1.1.5	Continuité . . . . .	5
1.2	Convergence de suites de fonctions . . . . .	7
1.2.1	Convergence simple . . . . .	7
1.2.2	Convergence uniforme . . . . .	7
1.2.3	L'espace $B(X, E)$ . . . . .	8
1.2.4	Convergence uniforme sur tout compact . . . . .	10
1.3	Suites de fonctions et opérations d'intégration et de dérivation . . . . .	10
1.3.1	Passage à la limite dans une intégrale de Riemann . . . . .	10
1.3.2	Passage à la limite dans une dérivation ordinaire ou partielle . . . . .	12
1.4	Séries de fonctions . . . . .	14
1.4.1	Retranscription des résultats sur les suites . . . . .	14
1.4.2	Convergence normale . . . . .	15
1.4.3	Transformation d'Abel . . . . .	16
1.4.4	Exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ nulle part dérivable . . . . .	17
1.5	Séries de puissances . . . . .	18
1.5.1	Théorie du rayon . . . . .	18
1.5.2	Étude sur le cercle de convergence . . . . .	20
1.5.3	Fonctions réelles analytiques . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Intégration</b>	<b>26</b>
2.1	Intégrales absolument convergentes . . . . .	26
2.1.1	Rappels concernant l'intégrale de Riemann . . . . .	26
2.1.2	Fonctions absolument intégrables sur un intervalle . . . . .	28
2.1.3	Fonctions absolument intégrables vues comme fonction des bornes . . . . .	30
2.1.4	Critères d'intégration absolue . . . . .	31
2.1.5	Fonctions de référence de Riemann . . . . .	33
2.1.6	Théorème du changement de variable . . . . .	33
2.2	Intégrales convergentes . . . . .	34
2.2.1	Définitions et exemples . . . . .	34
2.2.2	Rappel : deuxième formule de la moyenne . . . . .	35
2.2.3	Critère d'Abel . . . . .	37

<b>3</b>	<b>Intégrales à paramètres</b>	<b>39</b>
3.1	Fonctions définies par une intégrale sur un segment fixe . . . . .	39
3.1.1	Un résultat de continuité . . . . .	39
3.1.2	Un résultat de dérivabilité . . . . .	40
3.2	Fonction définies par des intégrales sur un segment variable . . . . .	41
3.2.1	Un résultat de continuité . . . . .	41
3.2.2	Un résultat de dérivabilité . . . . .	42
3.3	Fonctions définies par des intégrales convergentes . . . . .	43
3.3.1	Exemple . . . . .	43
3.3.2	Notion d'intégrales uniformément convergentes . . . . .	43
3.3.3	Théorème de Fubini . . . . .	45
3.3.4	Critères de convergence uniforme d'intégrales . . . . .	46
3.4	Application à la régularisation et à l'approximation à une dimension . . . . .	48
3.4.1	Fonctions à support compact . . . . .	48
3.4.2	Produit de convolution . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Critère de compacité en dimension infinie : le théorème d'Arzela-Ascoli</b>	<b>53</b>
4.1	Rappels de topologie métrique . . . . .	53
4.1.1	Densité et séparabilité . . . . .	53
4.2	L'espace $C_b^0(X, \mathbb{R})$ . . . . .	55
4.3	Théorème d'Arzela-Ascoli . . . . .	56
4.3.1	Motivation . . . . .	56
4.3.2	Énoncé et démonstration . . . . .	57
<b>II</b>	<b>Équations différentielles</b>	<b>59</b>
<b>5</b>	<b>Conditions suffisantes d'existence et d'unicité de solutions</b>	<b>60</b>
5.1	Équations différentielles - forme normale - réduction à l'ordre 1 . . . . .	60
5.1.1	Généralités . . . . .	60
5.1.2	Réduction à l'ordre 1 . . . . .	60
5.1.3	Problème de Cauchy . . . . .	61
5.1.4	Formulation intégrale . . . . .	61
5.2	Existence et unicité locales . . . . .	62
5.2.1	Théorème du point fixe de Banach . . . . .	62
5.2.2	Cylindres en espace-temps . . . . .	63
5.2.3	Théorème d'existence et d'unicité locales . . . . .	64
5.3	Existence et unicité locale . . . . .	66
5.3.1	Motivation . . . . .	66
5.3.2	Exemples . . . . .	67
5.3.3	Bouts droites et bouts gauches . . . . .	68
5.3.4	Solutions maximales . . . . .	68
5.3.5	Théorème de Cauchy-Lipschitz global . . . . .	68
5.4	Flot d'une équation différentielle et intégrale première . . . . .	71
5.4.1	Flot associé à une équation différentielle . . . . .	71
5.4.2	Intégrales premières . . . . .	73
5.4.3	Exemple de système Hamiltonien . . . . .	74
5.5	Condition suffisante d'existence locale . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Équations différentielles linéaires</b>	<b>77</b>
6.1	Existence et unicité des solutions globales . . . . .	77
6.1.1	Notations . . . . .	77

6.1.2	Théorie de Cauchy . . . . .	77
6.2	Systèmes différentiels linéaires homogènes — matrice résolvante . . . . .	79
6.3	Systèmes linéaires linéaires inhomogènes — variation des constantes . . . . .	83
6.3.1	Structure de l'espace des solutions . . . . .	83
6.3.2	Recherche d'une solution particulière — variation de la constante . . . . .	84
6.3.3	Équations scalaires — Wronskien . . . . .	84
6.4	Systèmes différentiels à coefficients constants . . . . .	85
6.4.1	Rappels d'algèbre linéaire — forme normale de Jordan . . . . .	85
6.4.2	Exponentielle de matrice . . . . .	88
6.4.3	Systèmes différentiels à coefficients constants . . . . .	90
6.4.4	Exponentielle d'une matrice de Jordan . . . . .	91

## **Première partie**

# **Fonctions, séries et intégrales**

# Chapitre 1

## Suites et séries de fonctions

### 1.1 Rappels

#### 1.1.1 Topologie métrique

##### 1.1.1.1 Espaces métriques

**Définition 1.1.** Soit  $X$  un ensemble. Une *distance* sur  $X$  est une application  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que :

1.  $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie) ;
2.  $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire) ;
3.  $\forall x, y \in X : (d(x, y) = 0 \iff x = y)$  (séparation<sup>1</sup>).

**Définition 1.2.** On appelle *espace métrique*  $(X, d)$  un espace  $X$  muni d'une distance  $d$  sur  $X$ .

**Définition 1.3.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $x \in X$ . La suite  $(x_n)$  converge vers  $x$  dans  $(X, d)$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Cela se note :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} x.$$

**Proposition 1.4.** Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $(X, d)$ , un espace métrique. Soient  $x, y \in X$ . Si :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} x \quad \text{et} \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} y,$$

alors  $x = y$ .

Démonstration. Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $x_n \rightarrow x$  et  $x_n \rightarrow y$ , on sait qu'il existe  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\forall n \geq N_1 : d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2 : d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

---

1. Également appelé *principe d'identité des indiscernables*.

Dès lors, soit  $N := \max\{N_1, N_2\}$ . On peut dire :

$$\forall n \geq N : d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On en déduit  $d(x, y) = 0$  et donc  $x = y$  par séparation. □

### 1.1.1.2 Espaces vectoriels

**Définition 1.5.** Soit  $\mathbb{K}$ , un sous-corps de  $\mathbb{C}$ . On appelle *norme* sur le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$  toute application  $n : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que :

1.  $\forall x \in E : (n(x) = 0 \iff x = 0)$  ;
2.  $\forall x \in E : \forall \lambda \in \mathbb{K} : n(\lambda x) = |\lambda| n(x)$  ;
3.  $\forall x, y \in E : n(x + y) \leq n(x) + n(y)$ .

**Proposition 1.6.** Soit  $(E, n)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé. L'application  $d$  suivante est une distance sur  $E$  (on l'appelle la distance associée à la norme  $n$ ) :

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+ : (x, y) \mapsto n(y - x).$$

Démonstration. EXERCICE. □

*Remarque.* Si  $(E, n)$  est un espace vectoriel normé,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $E$ , et si  $x \in E$ , alors on dit :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{n} x$$

lorsque :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$$

au sens de la distance associée à la norme  $n$ .

*Exemple 1.1.*  $\mathbb{R}$  est un  $\mathbb{R}$ -e.v. normé avec pour norme  $n : x \mapsto |x|$ .

*Exemple 1.2.* Soient  $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in [1, +\infty)$ . Pour  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{C}^d$ , on définit :

$$n(x) = \|x\|_p := \left( \sum_{k=0}^d |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On a alors  $(\mathbb{C}^d, n)$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel normé. Également  $(\mathbb{C}^d, n)$  et  $(\mathbb{R}^d, n)$  sont des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés.

**Définition 1.7.** Soit  $x \in \mathbb{C}^d$ . On définit la *norme infinie* de  $x$  dans  $\mathbb{C}^d$  par :

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|.$$

*Exemple 1.3.* Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ .  $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_\infty)$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel normé. Également,  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$  et  $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_\infty)$  sont des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés.

Démonstration. EXERCICE. □

**Définition 1.8.** Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. On dit que la suite  $(x_n)$  est *presque nulle* s'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N : x_n = 0$ .

Exemple 1.4. Soient  $P \in \mathbb{C}[x]$  et  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la suite presque nulle des coefficients de  $P$ . On pose :

$$\|P\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

Alors  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme sur  $\mathbb{C}[x]$ .

Démonstration. EXERCICE. □

### 1.1.1.3 Ouverts, fermés, compacts

**Définition 1.9.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On appelle *boule ouverte* de centre  $x \in X$  et de rayon  $r \geq 0$  l'ensemble :

$$B(x, r) := \{y \in X \text{ t.q. } d(x, y) < r\}.$$

On définit également la *boule fermée* de centre  $x$  et de rayon  $r$  l'ensemble :

$$B(x, r] := \{y \in X \text{ t.q. } d(x, y) \leq r\}.$$

**Définition 1.10.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et soit  $O \subset X$ . On dit que  $O$  est une partie *ouvert* dans  $X$  lorsque :

$$\forall x \in O : \exists r \geq 0 \text{ t.q. } B(x, r) \subset O.$$

*Remarque.* Pour tout  $X$ , les ensembles  $\emptyset$  et  $X$  sont tous deux des ouverts de  $X$ .

**Définition 1.11.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Une partie  $F \subset X$  de  $X$  est dite *fermée* dans  $X$  lorsque  $X \setminus F$  est ouvert.

**Proposition 1.12.** Dans un espace métrique  $(X, d)$ , soit  $(O_i)_{i \in I}$  une famille d'ouverts de  $X$  indicés par un ensemble  $I \neq \emptyset$ . Alors  $(\bigcup_{i \in I} O_i)$  est un ouvert de  $X$ . Si de plus  $I$  est fini, alors  $(\bigcap_{i \in I} O_i)$  est un ouvert de  $X$ .

Exemple 1.5. Prenons  $X = \mathbb{R}$  et  $O_i = (-1 - \frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{i})$ . Alors  $(\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} O_i) = [-1, 1]$  qui n'est pas un ouvert de  $X$ .

Démonstration. EXERCICE. □

**Définition 1.13** (Compacts par Borel-Lebesgue). Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Une partie  $K \subset X$  est dite *compacte* si  $K \neq \emptyset$  et si, de tout recouvrement de  $K$  par des ouverts de  $X$ , on peut extraire un sous-recouvrement fini.

C'est-à-dire lorsque :

1.  $K \neq \emptyset$ ;
2.  $\forall I \neq \emptyset : \forall (O_i)_{i \in I}$  ouverts de  $X$  t.q.  $K \subset (\bigcup_{i \in I} O_i) : \exists J \subset I$  fini t.q.  $K \subset (\bigcup_{j \in J} O_j)$ .

**Proposition 1.14** (Compacts par Bolzano-Weierstrass). Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Une partie  $K$  de  $X$  est compacte si et seulement si :

1.  $K \neq \emptyset$ ;
2. de toute suite de points de  $K$ , on peut extraire une sous-suite convergente dans  $K$ .

Démonstration. Admis. □

Exemple 1.6. L'ensemble  $[0, 1]$  est un compact de  $\mathbb{R}$ .



**Proposition 1.15.** Soit  $(X, d)$ , un espace métrique et  $K \subset X$ , une partie compacte. Alors  $K$  est fermé et borné.

Démonstration. EXERCICE. (Absurde) □

**Proposition 1.16.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. normé de dimension finie. Alors les parties compactes de  $E$  sont les parties fermées bornées non nulles.

Démonstration. Admis. □

#### 1.1.1.4 Suites de Cauchy

**Définition 1.17.** Soit  $(X, d)$ , un espace métrique. On dit que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $X$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m, n \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

**Proposition 1.18.** Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente dans l'espace métrique  $(X, d)$ , alors elle est de Cauchy.

Démonstration. Si  $x$  est la limite de la suite  $(x_n)$ , on pose  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N : d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc  $\forall m, n \geq N : d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon$ . □

**Définition 1.19.** Un espace métrique  $(M, d)$  est dit *complet* quand toute suite de Cauchy de points de  $X$  converge dans  $X$ .

**Définition 1.20.** Un espace vectoriel  $E$  est dit *de Banach* lorsque toute suite de Cauchy de vecteurs de  $E$  converge dans  $E$ .

*Remarque.* On remarque que dans un espace métrique complet, une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy (ce qui est entre autres le cas de  $\mathbb{R}$ ).

De plus, les suites de Cauchy permettent, dans des espaces complets, de montrer que des suites convergent sans connaître leur limite.

*Exemple 1.7.* Les espaces métriques  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  et  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$  sont des espaces de Banach. Et pour tout  $p \in [1, +\infty)$  et  $q \in \mathbb{N}$ , les espaces métriques  $(\mathbb{R}^q, \|\cdot\|_p)$  et  $(\mathbb{C}^q, \|\cdot\|_p)$  sont des espaces de Banach.

#### 1.1.1.5 Continuité

**Définition 1.21.** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques. Une application  $f : X \rightarrow Y$  est dite continue en  $x_0 \in X$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta \geq 0 \text{ t.q. } \forall x \in X : (d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon).$$

On dit que  $f$  est continue sur  $A \subset X$  lorsque  $f$  est continue en tout  $a \in A$ .

**Proposition 1.22.** Une fonction  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d)$  est continue sur  $X$  lorsque l'image réciproque par  $f$  de  $(Y, d)$  est un ouvert de  $(X, d)$ .

Démonstration. Admis. □

**Proposition 1.23.** Une fonction  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d)$  est continue en  $x_0 \in X$  si et seulement si l'image par  $f$  de toute suite de points de  $X$  convergente en  $x_0$  est une suite convergente en  $f(x_0)$ .

Démonstration. Admis. □

**Définition 1.24.** Soit  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d)$ .  $f$  est dite *lipschitzienne* de constante  $K \geq 0$  lorsque

$$\forall (x, y) \in X^2 : d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y).$$

**Proposition 1.25.** Si  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d)$  est lipschitzienne, alors elle est continue sur  $X$ .

Démonstration. EXERCICE. □

**Définition 1.26.** Soit  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , une suite dans un espace métrique  $(X, d)$ . On dit que  $(a_k)$  est *presque nulle* lorsqu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N : a_n = 0$ .

Exemple 1.8.

- Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , l'application  $c_i : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C} : P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \mapsto a_i$  est continue de  $(\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$  dans  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ . En effet, pour  $i \in \mathbb{N}$ ,  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ , et  $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ , on a :

$$|c_i(P) - c_i(Q)| = |a_i - b_i| \leq \|P - Q\|_\infty = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k - b_k|.$$

On en déduit que  $c_i$  est lipschitzienne sur  $\mathbb{C}[x]$  et donc continue sur  $\mathbb{C}[x]$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Posons :

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \in \mathbb{C}[x].$$

On observe que  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $(\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$  car :

$$\|P_n - P_m\|_\infty = \left\| \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} x^k \right\|_\infty.$$

On a alors :

$$\|P_n - P_m\|_\infty = \left\| \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}} \frac{1}{k!} x^k \right\|_\infty = \max_{\min\{m,n\}+1 \leq k \leq \max\{m,n\}} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(\min\{m,n\}+1)!}.$$

Montrons que  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy. Supposons (par l'absurde) que  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $P \in (\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$ . Notons  $(a_k) \subset \mathbb{C}$ , la suite presque nulle des coefficients de  $P$ . Pour  $i \in \mathbb{N}$ , on a  $c_i(P) = \frac{1}{i!}$  quand  $n \geq i$ . Or par la propriété de Lipschitz, on sait que  $c_i(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c_i(P) = a_i$ . Or  $(a_k)$  est presque nulle et  $a_i = \frac{1}{i!}$ . Il y a donc contradiction. Donc  $(P_n)$  ne converge pas dans  $(\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$ . Dès lors,  $(\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_\infty)$  n'est pas complet.

## 1.2 Convergence de suites de fonctions

### 1.2.1 Convergence simple<sup>2</sup>

**Définition 1.27.** Soit  $X$  un ensemble et  $(Y, d)$  un espace métrique. On dit que la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  où  $f_n : X \rightarrow (Y, d)$  converge simplement sur  $X$  lorsque :

$$\forall x \in X : (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge dans } (Y, d).$$

**Définition 1.28.** Dans ce cas, la suite a pour limite simple la fonction :

$$f : X \rightarrow (Y, d) : x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

et est bien définie. Cela se note :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS}} f \quad \text{ou} \quad f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS sur } X} f.$$

*Exemple 1.9.* Soient  $X = [0, 1]$  et  $Y = \mathbb{R}$ . On pose  $f_n(x) = x^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- Si  $x \in [0, 1)$ , alors la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $x$  avec  $|x| < 1$  donc la suite converge vers 0 ;
- si  $x = 1$ , alors  $f_n(x) = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Donc la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $[0, 1]$  vers la fonction :

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

*Remarque.*

- On a « perdu » la continuité des fonctions  $f_n$  par passage à la limite ;
- ici, la convergence simple peut s'écrire ainsi, à l'aide de quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall x \in X : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

On remarque donc que  $N$  dépend de  $x$  (ordre des quantificateurs).

### 1.2.2 Convergence uniforme

**Définition 1.29.** Soient  $X$  un ensemble,  $(Y, d)$  un espace métrique, et  $f_n : X \rightarrow (Y, d)$ . On dit que  $(f_n)$  converge uniformément sur  $X$  vers  $f : X \rightarrow (Y, d)$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : \forall x \in X : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Cela se note :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } X} f.$$

*Remarque.* La définition est très proche de la convergence simple. La différence étant que pour une convergence uniforme, il faut que  $N \in \mathbb{N}$  ne dépende pas de la valeur de  $x$ .

**Proposition 1.30.** Soient  $X$  un ensemble,  $(Y, d)$  un espace métrique,  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $X$  dans  $(Y, d)$  et  $f : X \rightarrow (Y, d)$ . Si  $(f_n)$  converge uniformément sur  $X$  vers  $f$ , alors  $(f_n)$  converge simplement sur  $X$  vers  $f$ .

2. La convergence simple est la notion de convergence « minimale » que l'on va exiger. Il existe des convergences encore plus élémentaires (voir théorie de l'intégration de Lebesgue), mais qui se trouvent en dehors des objectifs du cours.

Démonstration. EXERCICE. □

Exemple 1.10. Prenons  $X = \mathbb{R} = Y$  et pour tout  $n \geq 1$ , définissons  $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ . Fixons  $x \in \mathbb{R}$ . On trouve alors :

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} = \left( \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \sqrt{x^2} = |x|.$$

Donc :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } X} |\cdot|.$$

**Théorème 1.31.** Soient  $(X, d)$ ,  $(Y, d)$  deux espaces métriques. Soient  $f_n : X \rightarrow Y$ ,  $a \in X$ . On suppose :

- $\exists f$  t.q.  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } X} f$  ;
- $\forall n \in \mathbb{N} : f_n$  est continue en  $a$ .

Alors  $f$  est continue en  $a$ .

Démonstration. Soit  $\varepsilon > 0$ . Par convergence uniforme des  $f_n$ , on sait :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : \forall x \in X : d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De plus, la fonction  $f_N$  est continue en  $a$  par hypothèse. Dès lors, on sait qu'il existe  $\delta$  tel que :

$$\forall x \in X : d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f_N(x), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi, prenons  $x \in X$  tel que  $d(x, a) < \delta$ . On a alors :

$$d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f(a)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a)) \leq 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

**Corollaire 1.32.** Si  $f_n \in C^0(X, Y)$  et  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } X}$ , alors  $f \in C^0(X, Y)$ .

Démonstration. Les fonctions  $f_n$  sont continues en tout point et  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } X}$  par hypothèse. Dès lors, pour tout point  $a \in X$ , par le théorème précédent, on peut dire  $f$  continue en  $a$ . Dès lors  $f \in C^0(X, Y)$ . □

### 1.2.3 L'espace $B(X, E)$

**Définition 1.33.** Soient  $X \neq \emptyset$  et  $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace vectoriel normé. On note :

$$B(X, E) := \{f : X \rightarrow E \text{ t.q. } f \text{ est bornée sur } X\}.$$

Pour  $f \in B(X, E)$ , on définit :

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E.$$

**Proposition 1.34.**  $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace vectoriel normé.

Démonstration. EXERCICE. □

**Théorème 1.35.**  $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$  est complet si et seulement si  $(E, \|\cdot\|_E)$  est complet.

Démonstration. Supposons d'abord  $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$  complet et montrons que  $(E, \|\cdot\|_E)$  est complet.

Soit  $(x_n)_n$  une suite de Cauchy d'éléments de  $E$ . Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $B(X, E)$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in X : f_n(x) = x_n.$$

Puisque  $(x_n)$  est de Cauchy, on sait que :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall m, n \geq N : d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Or, avec  $a \in X$  fixé, on peut alors dire  $\forall m, n \geq N : d(f_m(a), f_n(a)) < \varepsilon$ , et ce peu importe le  $a$  choisi (car les  $f_n$  sont constantes). On a donc  $(f_n)$  une suite de Cauchy dans  $B(X, E)$  car  $d(f_m(a), f_n(a)) = \|f_m - f_n\|_\infty$ . Or, par complétude de  $B(X, E)$ , on sait qu'il existe  $f \in B(X, E)$  telle que  $f_n \rightarrow f$ . La fonction  $f$  est également constante. Posons  $L$  la seule image de  $f$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . On sait qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N : \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ .

Or :

$$\varepsilon > \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\|_E = \|f_n(a) - f(a)\|_E = \|x_n - L\|.$$

Dès lors, on sait que  $(x_n)$  converge dans  $E$ .

Montrons maintenant que si  $(E, \|\cdot\|_E)$  est complet, alors  $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$  est complet également.

Soit  $(f_n)_n$  une suite de Cauchy de fonctions de  $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ . Fixons  $\varepsilon > 0$ . Il existe alors  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall m, n \geq N : \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon.$$

Soit  $x \in X$ . On observe que :

$$\forall m, n \geq N : \|f_n(x) - f_m(x)\|_E \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

La suite  $(f_n(x))_n$  est donc une suite de Cauchy dans  $(E, \|\cdot\|_E)$ . Par complétude de  $E$ , on sait qu'il existe  $f(x) \in E$  tel que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ . Montrons maintenant que  $f \in B(X, E)$ .

La suite  $(f_n)_n$  est de Cauchy et donc bornée. Soit  $M \geq 0$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N} : \|f_n\|_\infty < M$ . Passons à la limite dans  $(B(X, E))$ . On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in X : \|f(x)\|_E < M.$$

Ainsi,  $f \in B(X, E)$  par définition.

Soit alors  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in X$ , on a :

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_E \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Passons alors à la limite en  $m$ , ce qui donne :

$$\|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Dès lors :

$$\forall n \geq N : \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

□

*Remarque.* Quand  $X \neq \emptyset$  et  $Y = E$  est un espace vectoriel normé, on a :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } X} f \iff \begin{cases} \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : f_n - f \in B(X, E) \\ f_n - f \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_\infty} 0 \end{cases}.$$

## 1.2.4 Convergence uniforme sur tout compact

**Définition 1.36.** Soit  $X$ , une partie non-vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie  $(E, \|\cdot\|_E)$ . Soit  $(Y, d)$  un espace métrique. Une suite  $f_n : X \rightarrow Y$  converge uniformément vers  $f : X \rightarrow Y$  sur tout compact lorsque :

$$\forall \text{ compact } K \subset X : f_n \Big|_K \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } K} f \Big|_K.$$

Cela se note :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur tout cpct de } X} f.$$

**Proposition 1.37.** Si la suite  $f_n$  converge uniformément sur tout compact de  $X$  et si toutes les fonctions  $f_n$  sont continues en  $a \in X$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .

*Démonstration.* EXERCICE. □

*Exemple 1.11.* Prenons  $X = Y = \mathbb{R}$ . On définit  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ . On a alors  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS sur } X} \exp$ .

De plus :

$$\|f_n - \exp\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - \exp(x) \right| = +\infty.$$

Donc  $f_n$  ne converge pas uniformément vers  $\exp$ . Montrons maintenant que  $f_n$  converge uniformément vers  $\exp$  sur tout compact de  $\mathbb{R}$ . Soit  $K \subset \mathbb{R}$  un compact. On sait qu'il existe  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$  tels que  $K \subset [a, b]$ . Pour  $x \in [a, b]$ , par Lagrange, on a :

$$\exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(c_x),$$

avec  $c_x \in [a, b]$ .

Ainsi :

$$\left| \exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in [a, b]} \exp(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

D'où  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{[a, b]} f$  et donc la convergence uniforme sur tout compact de  $f_n$  vers  $f$ .

## 1.3 Suites de fonctions et opérations d'intégration et de dérivation

### 1.3.1 Passage à la limite dans une intégrale de Riemann

Soit  $X$  un pavé de  $\mathbb{R}^d$  (donc  $X = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$  avec  $a_i < b_i \forall i \in \{1, \dots, d\}$ ).

**Théorème 1.38.** Soit  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  intégrables au sens de Riemann sur  $X$ . Supposons  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU \text{ sur } X} f$ . Alors :

- $f$  est intégrable au sens de Riemann ;
- la  $(\int_X f_n(x) dx)_n$  converge vers  $\int_X f(x) dx$ .<sup>3</sup>

Démonstration. On note  $\mathcal{E}(X, \mathbb{R}) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } f \text{ est élémentaire}\}$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par la convergence uniforme, on sait qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N : \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{4|X|},$$

où  $|X| = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$ .

Par intégrabilité de  $f_N$ , on sait qu'il existe  $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(X, \mathbb{R})$  telles que :

$$\psi \leq f_N \leq \varphi \quad \text{et} \quad \int_X (\varphi - \psi) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors :

$$\psi - f_N \leq f \leq \varphi + f_N,$$

ou encore :

$$\psi - \frac{\varepsilon}{4|X|} \leq f \leq \varphi + \frac{\varepsilon}{4|X|}.$$

En posant  $\bar{\psi} := \psi - \frac{\varepsilon}{4|X|}$  et  $\bar{\varphi} := \varphi + \frac{\varepsilon}{4|X|}$ , on a  $\bar{\psi}, \bar{\varphi} \in \mathcal{E}(X, \mathbb{R})$ . De plus :

$$\int_X (\bar{\psi} - \bar{\varphi}) = \int_X \left( \psi + \frac{\varepsilon}{4|X|} - \left( \varphi - \frac{\varepsilon}{4|X|} \right) \right) = \frac{\varepsilon}{2|X|} |X| + \int_X \psi - \varphi < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dès lors, on en déduit  $f$  intégrable au sens de Riemann.

Fixons  $\varepsilon > 0$ . Par convergence uniforme de  $f_n$  vers  $f$  sur  $X$ , on sait que :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : \|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{|X|}$$

Et donc :

$$\left| \int_X f_n(x) dx - \int_X f(x) dx \right| = \left| \int_X (f_n - f)(x) dx \right| \leq \left| \int_X \|f_n - f\|_\infty dx \right| = |X| \|f_n - f\|_\infty \leq |X| \frac{\varepsilon}{|X|} = \varepsilon.$$

Finalement, la suite  $(\int_X f_n(x) dx)_n$  converge dans  $\mathbb{R}$  vers  $\int_X f(x) dx$ . □

*Remarque.*

1. Il est possible d'avoir les résultats sans vérifier les hypothèses. Par exemple,  $X = [0, 1] \subset \mathbb{R} = Y$ , avec  $f_n(x) = x^n$ . On sait que  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS \text{ sur } X} 1_{\{x=1\}}$  et que la convergence n'est pas uniforme sur  $[0, 1]$ . On remarque alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \int_0^1 1_{\{x=1\}}(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx ;$$

3. Cela veut dire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) dx = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

2. si les hypothèses ne sont pas vérifiées, la conclusion peut être fausse. Par exemple,  $X = [0, 1] \subset \mathbb{R} = Y$ .  
On définit ( $n \geq 1$ ) :

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n\alpha_n x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2n} \\ 2\alpha_n - 2n\alpha_n x & \text{si } \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\alpha_n \in \mathbb{R}_0^+$  t.q.  $\forall n \in \mathbb{N}^* : \int_0^1 f_n(x) dx = 1$ , donc  $\alpha_n = 2n$ .

On a alors  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS sur } X} 0 = f$ . La fonction nulle  $0(x)$  est intégrable au sens de Riemann sur  $[0, 1]$ .

Finalement, on a :

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1.$$

Dans ce cas précis, on ne peut pas passer à la limite.

### 1.3.2 Passage à la limite dans une dérivation ordinaire ou partielle

**Théorème 1.39.** Soit  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ , un ouvert. Soient  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , toutes de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ . Supposons :

- $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS sur tout cpct de } \Omega} f$  ;
- $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket : \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } \Omega} g_i$ .

Alors :

1.  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$  ;
2.  $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket : \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x_i}$  dans  $\Omega$  ;
3.  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur tout cpct de } \Omega} f$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in \Omega$ . Par ouverture de  $\Omega$ , on sait qu'il existe  $\delta \geq 0$  tel que  $B(x, \delta) \subset \Omega$ . On en déduit que  $B(x, \frac{\delta}{2})$  est incluse dans  $B(x, \delta)$ . Or  $B(x, \frac{\delta}{2})$  est fermé et borné par définition.  $B(x, \frac{\delta}{2})$  est donc un compact de  $\Omega$ .

Soient  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$  et  $h \in [\pm \frac{\delta}{2}]$ . On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x + he_i) = f_n(x) + \int_0^h \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x + se_i) ds.$$

Or comme  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS sur tout cpct de } \Omega} f$  et pour tout  $i$ ,  $\frac{\partial f_n}{\partial x_i}$  converge uniformément vers  $g_i$  sur  $B(x, \frac{\delta}{2})$ , il vient :

$$f_n(x + he_i) = f_n(x) + \int_0^h g_i(x + se_i) ds,$$

où  $\{e_1, \dots, e_d\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ .

On en déduit alors que  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à  $x_i$  en  $x$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = g_i(x).$$



De plus, les  $f_n$  sont  $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ , et donc les dérivées partielles  $\frac{\partial f_n}{\partial x_i}$  sont  $C^0(\Omega, \mathbb{R})$  pour tout  $i$  et par convergence uniforme sur les compacts,  $g_i \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$  (Proposition 1.37).

On en déduit alors  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$  avec  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i$  pour tout  $i$  dans  $\Omega$  (points 1 et 2 à montrer).

Il reste donc à montrer le point 3.

Soit  $K \subset \Omega$ , un compact. Par ouverture de  $\Omega$ , on sait que pour tout  $a \in K$ , on a :

$$\exists r_a \geq 0 \text{ t.q. } B(a, r_a) \subset \Omega.$$

Dès lors, on sait que :

$$K \subset \bigcup_{a \in K} B\left(a, \frac{r_a}{2}\right).$$

Par complétude, on sait qu'il existe un sous-recouvrement fini de  $K$ , c'est-à-dire  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $(a_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in K^p$  tel que :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^p B\left(a_i, \frac{r_{a_i}}{2}\right).$$

Par convergence simple de  $f_n$  vers  $f$ , et puisque les  $a_i$  sont en nombre fini, on peut alors exprimer :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket |f_n(a_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Fixons donc  $\varepsilon > 0$ , soit  $N$  correspondant et soit  $x \in K$ . Il existe  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  tel que  $x \in B(a_k, \frac{r_{a_k}}{2})$  car les boules ouvertes forment un recouvrement de  $K$ . On a alors :

$$f_n(x) = f_n(a_k) + \int_0^1 \langle \nabla f_n(a_k + t(x - a_k)), (x - a_k) \rangle dt,$$

et :

$$f(x) = f(a_k) + \int_0^1 \langle \nabla f(a_k + t(x - a_k)), (x - a_k) \rangle dt.$$

Par différence, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(a_k) - f(a_k)| + \int_0^1 \|\nabla f_n(a_k + t(x - a_k)) - \nabla f(a_k + t(x - a_k))\| dt \cdot \|x - a_k\|.$$

Par convergence uniforme sur  $\left(\bigcup_{i=1}^p B(a_i, \frac{r_{a_i}}{2})\right)$  de  $\nabla f_n$  vers  $\nabla f$ , on sait que :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : \|\nabla f_n - \nabla f\|_{\infty, \bigcup_{i=1}^p B(a_i, \frac{r_{a_i}}{2})} < \frac{2\varepsilon}{\max_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} r_{a_i}}.$$

Finalement, on a :

$$\forall x \in K : \forall n \geq N : \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon + \frac{r_{a_k}}{2} \cdot \frac{2\varepsilon}{\max_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} r_{a_i}} \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, pour  $n \geq N$ , on a :

$$\|f_n - f\|_{\infty, K} \leq 2\varepsilon.$$

□

*Remarque.* Ce théorème est vrai en particulier pour  $d = 1$ , et  $\Omega$  un segment de  $\mathbb{R}$ .

*Exemple 1.12* (Contre-exemples ne vérifiant pas les hypothèses donc ne pouvant faire passer la limite dans la dérivation).

$f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$ ,  $n \geq 1, x \in X = \mathbb{R}$ . On a donc  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU \text{ sur } \mathbb{R}} 0 = f$  car  $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$  avec  $\frac{1}{n}$  ne dépendant pas de  $x$ . Les  $f_n$  sont  $C^\infty(\mathbb{R})$  et sont donc dérivables :

$$\frac{df_n}{dx} = n \cos(n^2 x),$$

et donc :

$$\left. \frac{df_n}{dx} \right|_{x=0} = n \rightarrow +\infty.$$

On en déduit :

$$\neg \left( \frac{df_n}{dx} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{df}{dx} \right).$$

2.  $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ ,  $n \geq 1, x \in X = [0, 1]$ . On a  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU \text{ sur } X} 0$ . Puisque les  $f_n$  sont  $C^\infty(X, \mathbb{R})$ , on a :

$$\frac{df_n}{dx} = x^{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1_{\{x=1\}},$$

qui n'est pas une dérivée. À nouveau, la suite des dérivées des  $f_n$  ne tend pas vers la dérivée de  $f$ .

**Corollaire 1.40.** Soient  $p \in \mathbb{N}^*, \Omega \subset \mathbb{R}^d$ , un ouvert non-vide. Soit  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^p(\Omega, \mathbb{R})$ . Supposons :

$$— \forall q \in [0, p-1] : \forall (i_1, \dots, i_q) \in [1, d]^q : \frac{\partial^q f_n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_q}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU \text{ sur } \Omega} g_{i_1, \dots, i_q} ;$$

$$— \forall (i_1, \dots, i_p) \in [1, d]^p : \frac{\partial^p f_n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU \text{ sur } \Omega} g_{i_1, \dots, i_p}.$$

Alors :

$$1. f = g_\emptyset \in C^p(\Omega, \mathbb{R}) ;$$

$$2. \forall q \in [1, p] : \forall (i_1, \dots, i_q) \in [1, d]^q : \frac{\partial^q f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_q}} = g_{i_1, \dots, i_q} ;$$

$$3. \forall q \in [0, p-1] : \forall (i_1, \dots, i_q) \in [1, d]^q : \frac{\partial^q f_n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_q}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU \text{ sur tout cpct de } \Omega} g_{i_1, \dots, i_q}.$$

Démonstration. EXERCICE. (Récurrence sur  $p$  par le résultat précédent)

□

## 1.4 Séries de fonctions

### 1.4.1 Retranscription des résultats sur les suites

**Définition 1.41.** Soit  $u_n : X \rightarrow Y$  où  $X \neq \emptyset$  et  $Y$  est un espace vectoriel normé. On appelle *somme partielle d'ordre  $n$  de la série de terme général  $u_n$*  la fonction suivante :

$$S_n : X \rightarrow Y : x \mapsto \sum_{k=0}^n u_k(x).$$

On dit que la série de terme général  $u_n$  *converge simplement* sur  $X$  lorsque  $S_n$  converge simplement sur  $X$ . De même pour la *convergence uniforme* sur  $X$  et la *convergence uniforme sur tout compact* de  $X$ .

**Théorème 1.42.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique et  $Y$  un espace vectoriel normé. Soit  $u_n : X \rightarrow Y$ . Si  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n$  est continue en  $a \in X$  et si la série de terme général  $u_n$  converge uniformément sur  $X$ , alors :

$$S := \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \text{ est continue en } a.$$

Démonstration. EXERCICE. □

**Théorème 1.43.** Soit  $X \neq \emptyset$ , un pavé de  $\mathbb{R}^d$  et soit  $u_n : X \rightarrow Y$  t.q.  $\sum_{n \geq 0} u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVU \text{ sur } X} S$  avec  $u_n$  intégrable au sens de Riemann pour tout  $n$ . Alors :

1.  $S$  est intégrable au sens de Riemann sur  $X$ ;
2. la suite  $\int_X S_n(x) dx$  converge vers  $\int_X S(x) dx$ .

Démonstration. EXERCICE. □

**Théorème 1.44.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , un ouvert non-nul et soit  $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^p(\Omega, \mathbb{R})$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ . Supposons :

- $\sum_{n \geq 0} u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS \text{ sur } \Omega} S$ ;
- $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$  t.q.  $|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i \leq p : \sum_{n \geq 0} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS \text{ sur } \Omega} s_\alpha$ ;
- lorsque  $|\alpha| = p$ , la convergence ci-dessus est uniforme sur les compacts de  $\Omega$ .

Alors :

1.  $S \in C^p(\Omega, \mathbb{R})$ ;
2.  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d : \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} S = \sum_{n \geq 0} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} u_n$ ;
3. Il y a convergence uniforme sur les compacts de  $\Omega$  des séries de dérivées partielles d'ordre 0 à  $p - 1$ .

## 1.4.2 Convergence normale

**Définition 1.45.** Soient  $X \neq \emptyset$  et  $Y$  un espace vectoriel normé. On dit que la série de terme général  $u_n : X \rightarrow Y$  converge normalement sur  $X$  lorsque :

$$\sum_{n \geq 0} \|u_n\|_{\infty, X} < +\infty.$$

**Définition 1.46.** On dit que la série de terme général  $u_n : X \rightarrow Y$  vérifie le critère de Weierstrass lorsqu'il existe  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in X : \|u_n(x)\|_E \leq M_n$ ;
- $\sum_{n \geq 0} M_n < +\infty$ .

*Remarque.*  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge normalement sur  $X$  si et seulement si elle vérifie le critère de Weierstrass.

**Proposition 1.47.** Si  $(E, \|\cdot\|_E)$  est un espace vectoriel normé complet, et si  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge normalement sur  $X$  alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge uniformément sur  $X$ .

Démonstration. Écrivons  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k \in B(X, E)$ . Par convergence normale, la suite  $\sigma_n = \sum_{k \geq 0} \|u_k\|_{\infty, X}$  converge. De plus,  $(\sigma_n)$  est de Cauchy dans  $\mathbb{R}^+$ . Donc :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n, m \geq N : |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\|_{\infty, X} &= \left\| \sum_{k=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)} u_k \right\|_{\infty, X} \leq \sum_{k=\min(m,n)+1}^{\max(m,n)} \|u_k\|_{\infty, X} \\ &\leq |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc  $(S_n)_n$  est de Cauchy dans  $(B(X, E), \|\cdot\|_{\infty, X})$ . Cet espace est complet car  $(E, \|\cdot\|_E)$  l'est (Théorème 1.35). Et donc,  $(S_n)_n$  converge uniformément sur  $X$ .  $\square$

*Remarque.* On peut écrire :

$$CVN \xRightarrow{\text{complet}} CVU \Rightarrow CVS,$$

mais les réciproques sont habituellement fausses.

**Corollaire 1.48.** Si  $f_n : X \rightarrow Y$  (avec  $Y$  un espace vectoriel normé complet) est t.q. :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : \exists M_n \geq 0 \text{ t.q. } \|f_{n+1} - f_n\|_{\infty, X} \leq M_n \\ \sum_{m \geq 0} M_m < +\infty, \end{cases}$$

alors  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $X$ .

Démonstration. La série de terme général  $u_n = f_{n+1} - f_n$  converge normalement sur  $X$  car elle vérifie le critère de Weierstrass sur  $X$ . Par complétude de  $Y$ , la série  $\sum u_n$  converge uniformément sur  $X$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on calcule :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = f_{n+1} - f_0.$$

Donc la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $X$ .  $\square$

### 1.4.3 Transformation d'Abel

**Théorème 1.49.** Soient  $Y$  un espace vectoriel normé complet,  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Y^{\mathbb{N}}$ , et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ . Supposons :

$$\begin{cases} \exists M \geq 0 \text{ t.q. } \forall n \in \mathbb{N} : \left\| \sum_{k=0}^n g_k \right\|_Y \leq M \\ f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ en décroissant.} \end{cases}$$

Alors  $f_n g_n$  est le terme général d'une série convergente.

Démonstration. On pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : G_k = \sum_{m=0}^k g_m$$

Calculons, pour  $n, p \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned}
S_{n+p} - S_n &= \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k g_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k (G_k - G_{k-1}) \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k G_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k G_{k-1} = \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k G_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} f_{k+1} G_k \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} G_k (f_k - f_{k+1}) + f_{n+p} G_{n+p} - f_{n+1} G_n.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\|S_{n+p} - S_n\|_Y &\leq M \sum_{k=n+1}^{n+p} (f_k - f_{k+1}) + M f_{n+p} + M f_{n+1} = M(f_{n+1} - f_{n+p}) + M(f_{n+p} + f_{n+1}) \\
&= 2M f_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,
\end{aligned}$$

et la convergence de dépend pas de  $p$ . On a alors que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy, et par complétude de  $Y$ ,  $S_n$  converge, ce qui implique que la série de terme général  $f_n g_n$  converge.  $\square$

**Théorème 1.50.** Soient  $X$  un espace vectoriel normé complet et  $X \neq 0$ . Soient :

$$\begin{aligned}
g_n &: X \rightarrow Y, \\
f_n &: X \rightarrow \mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$

Supposons :

- qu'il existe  $M \geq 0$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N} : \left\| \sum_{k=1}^n g_k \right\|_{\infty, X} \leq M$  ;
- que  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } X} 0$  en décroissant.

Alors  $f_n g_n$  est le terme général d'une série qui converge uniformément sur  $X$ .

Démonstration. Par la preuve précédente, on a :

$$\|S_{n+p} - S_n\|_Y \leq 2M f_{n+1}(x) \leq 2M \|f_{n+1}\|_{\infty, X}.$$

On déduit donc :

$$\|S_{n+p} - S_n\|_{\infty, X} \leq 2M \|f_{n+1}\|_{\infty, X}.$$

On sait donc que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $B(X, Y)$ . Par complétude de  $Y$ , la série de terme général  $f_n g_n$  converge uniformément sur  $X$ .

On remarque en effet que les  $S_n$  sont bornés car  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } X} 0$ , ce qui implique  $\|f_n\|_{\infty, X}$  bornée, au moins à partir d'un certain  $n \in \mathbb{N}$ . De plus,  $\left\| \sum_k g_k \right\| < M$  assure que  $g_k$  est uniformément bornée.  $\square$

#### 1.4.4 Exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ nulle part dérivable

Considérons la fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$  sur  $[-1, 1]$  et 2-périodique. La fonction  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Posons :

$$\forall k \in \mathbb{N} : u_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \left(\frac{3}{4}\right)^k \varphi(4^k x).$$

On sait que  $\forall k \in \mathbb{N} : \|u_k\|_\infty = \left(\frac{3}{4}\right)^k \in [0, 1]$ . Ainsi, la série de terme général  $u_k$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  par le critère de Weierstrass. Par le Théorème 1.42, la fonction :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k \geq 0} u_k(x)$$

est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Montrons maintenant la fonction  $f$  n'est jamais dérivable.

Construisons  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  tels que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n \leq x \leq \beta_n, \\ \beta_n - \alpha_n \rightarrow 0, \\ \forall n \in \mathbb{N} : \left| \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \right| \geq \frac{1}{2} 3^n. \end{cases}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Choisissez  $p \in \mathbb{Z}$  tel que  $p = \lfloor 4^n x \rfloor$  (et donc  $p \leq 4^n x < p + 1$ ). Posons  $\alpha_n = \frac{p}{4^n}$  et  $\beta_n = \frac{p+1}{4^n}$ . On a alors :

$$f(\beta_n) - f(\alpha_n) = \sum_{k \geq 0} \left( \varphi(4^k \beta_n) \left(\frac{3}{4}\right)^k - \varphi(4^k \alpha_n) \left(\frac{3}{4}\right)^k \right) = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left( \varphi(4^k \beta_n) - \varphi(4^k \alpha_n) \right)$$

On observe que :

— si  $k \leq n$ , alors  $4^k \beta_n = 4^{k-n}(p+1)$  et  $4^k \alpha_n = 4^{k-n}p$ . Puisque  $\varphi$  est lipschitzienne de constante 1, on a :

$$\varphi(4^k \beta_n) - \varphi(4^k \alpha_n) \leq 4^{k-n}(p+1 - p) = 4^{k-n};$$

— si  $k = n$ , alors  $|\varphi(4^k \beta_n) - \varphi(4^k \alpha_n)| = 1$ ;

— si  $k \geq n$ , alors  $4^k \alpha_n = 4^{k-n}p \in 4\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z}$  donc  $\varphi(4^k \alpha_n) = 0$ . De même, on a  $\varphi(4^k \beta_n) = 0$ .

Ainsi :

$$f(\beta_n) - f(\alpha_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left( \varphi(4^k \beta_n) - \varphi(4^k \alpha_n) \right) + \left(\frac{3}{4}\right)^n \left( \varphi(4^n \beta_n) - \varphi(4^n \alpha_n) \right).$$

Or, par inégalité triangulaire inversée, on a :

$$|f(\beta_n) - f(\alpha_n)| \geq \left(\frac{3}{4}\right)^n \left| \varphi(4^n \beta_n) - \varphi(4^n \alpha_n) \right| - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k 4^{k-n} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Et puisque  $\beta_n - \alpha_n = 4^{-n}$ , il vient :

$$\left| \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \right| \geq \frac{1}{2} 3^n,$$

ce qui contredit la dérivabilité en  $x$ .

## 1.5 Séries de puissances

### 1.5.1 Théorie du rayon

On se donne  $(Y, \|\cdot\|)$ , un  $\mathbb{C}$ -ev complet.

**Définition 1.51.** On appelle *série de puissance* toute série de fonctions :

$$u_n : \mathbb{C} \rightarrow Y,$$

dont le terme général est sous la forme  $u_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ , avec  $z_0 \in \mathbb{C}$  fixé et  $(a_n) \subset Y$ .

*Remarque.*  $Y = \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ .

**Définition 1.52.** Définissons  $\overline{\mathbb{R}^+} := \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ .

**Théorème 1.53.** Soit  $R := \left( \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|a_n\|_Y^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}$ . Quelque soit  $z \in \mathbb{C}$  :

- si  $|z - z_0| \leq R$ , alors  $\sum_{n \geq 0} u_n(z)$  converge absolument ;
- si  $|z - z_0| \geq R$ , alors  $\sum_{n \geq 0} u_n(z)$  diverge grossièrement (le terme général ne tend pas vers 0 pour  $n \rightarrow +\infty$  en norme dans  $Y$ ).

Démonstration. Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z - z_0| < R$ . Alors il existe  $R' \geq 0$  t.q.  $|z - z_0| < R' < R$  et :

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} < \frac{1}{|z - z_0|}.$$

Puisque  $R^{-1} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|a_n\|_Y^{\frac{1}{n}}$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  t.q. :

$$\forall n \geq N : \|a_n\|_Y^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|a_n\|_Y^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R} \leq \frac{1}{R'}.$$

Dès lors :  $\|a_n\|_Y \leq \frac{1}{(R')^n}$ , ou encore  $|z - z_0| \|a_n\|_Y \leq \frac{|z - z_0|^n}{(R')^n}$ . On a donc :

$$\|(z - z_0)^n a_n\|_Y \leq \left( \frac{|z - z_0|}{R'} \right)^n.$$

Et comme  $\left| \frac{|z - z_0|}{R'} \right| < 1$ , on sait que la série de terme général  $\frac{|z - z_0|^n}{R'^n}$  converge et donc de terme général  $\|(z - z_0)^n a_n\|_Y$  converge aussi.

Soit maintenant  $z \in \mathbb{C}$  t.q.  $|z - z_0| > R$ . Il existe  $R' > 0$  tel que  $|z - z_0| > R' > R$  et  $|z - z_0|^{-1} < (R')^{-1} + R^{-1}$ . Soit  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{R'} \leq \|a_{\varphi(n)}\|_Y^{\frac{1}{\varphi(n)}}.$$

On en déduit :

$$\left\| a_{\varphi(n)} (z - z_0)^{\varphi(n)} \right\|_Y = |z - z_0|^{\varphi(n)} \left\| a_{\varphi(n)} \right\|_Y \geq \left( \frac{|z - z_0|}{R'} \right)^{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Dès lors,  $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$  diverge grossièrement. □

**Théorème 1.54.** Soit  $a_n(z - z_0)^n$ , le terme général d'une série de puissance. Alors :

- lorsque  $0 < R < +\infty, \forall r \in (0, R)$  : la série de terme général  $z \mapsto a_n(z - z_0)^n$  converge normalement sur  $B(z_0, r)$  ;
- lorsque  $R = +\infty$ , la série de fonctions de terme général  $z \mapsto a_n(z - z_0)^n$  converge normalement sur  $B(z_0, r)$  pour tout  $r$ .

*Démonstration.* Si  $0 < r < R < +\infty$ , observons que  $|z_0 + r - z_0| < R$ . Ainsi, avec le Théorème 1.53, la série de terme général  $a_n(z_0 + r)$  converge absolument. Or :

$$\|a_n(z_0 + r)\|_Y = \|a_n\|_Y |z_0 + r - z_0|^n = \|a_n\|_Y r^n.$$

Donc la série de terme général  $\|a_n\|_Y r^n$  converge. Observons que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall z \in B(z_0, r) : \|u_n(z)\|_Y = \|a_n\|_Y |z - z_0|^n \leq \|a_n\|_Y r^n.$$

Ainsi  $\|u_n\|_{\infty, B(z_0, r)} \leq \|a_n\|_Y r^n$ . Or  $\|a_n\|_Y r^n$  est le terme général d'une série qui converge. Par le critère de Weierstrass, la série de terme général  $u_n$  converge normalement sur  $B(z_0, r]$ .

Si maintenant  $R = +\infty$ , on prend  $r \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $|z_0 + r - z_0| = r < R = +\infty$ . Avec le Théorème 1.53, on a : que  $\sum_{n \geq 0} u_n(z_0 + r)$  converge absolument. Or  $\|u_n(z_0 + r)\|_Y = \|a_n\|_Y r^n$ . Donc la série de terme général  $\|a_n\|_Y r^n$  converge. Puisque l'on a toujours :

$$\|u_n\|_{\infty, B(z_0, r]} \leq \|a_n\|_Y r^n,$$

on a donc  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge normalement sur  $B(z_0, r]$  par le critère de Weierstrass.  $\square$

**Corollaire 1.55.** Soit  $a_n(z - z_0)^n$  une série de puissance dans  $Y$  complet et  $R$  le rayon associé. Lorsque  $R \geq 0$ , la série converge normalement sur tout compact de  $B(0, r[$ .

*Démonstration.* Si  $0 < R < +\infty$ , soit  $K \subset B(z_0, R[$  un compact. Il existe  $r \in (0, R)$  tel que  $K \subset B(z_0, r] \subset B(z_0, R[$ . La convergence normale sur  $B(z_0, r]$  implique la convergence normale sur  $K$ .

Si  $R = +\infty$ , on a  $B(z_0, R[ = \mathbb{C}$ . Soit  $K$ , un compact de  $\mathbb{C}$ . Il existe  $r > 0$  tel que  $K \subset B(z_0, r]$ , et donc la convergence normale sur  $B(z_0, r]$  implique la convergence normale sur  $K$ .  $\square$

**Corollaire 1.56.** Lorsque  $R > 0$ , la fonction  $S(z) = \sum_{k \geq 0} a_k(z - z_0)^k$  est une fonction continue sur  $B(z_0, R[$ .

*Démonstration.* Les fonctions  $u_n : B(z_0, R[ \rightarrow Y : z \mapsto a_n(z - z_0)^n$  sont continues sur l'ouvert  $B(z_0, R[ \subset \mathbb{C}$ , et il y a convergence normale (et donc uniforme) de  $\sum_{n \geq 0} u_n$  sur les compacts de  $B(z_0, R[$ . Par le Théorème 1.54, on sait que  $S \in C^0(B(z_0, R[, Y)$ .  $\square$

## 1.5.2 Étude sur le cercle de convergence

**Définition 1.57.** On définit le cercle centré en  $z_0 \in \mathbb{C}$  et de rayon  $R > 0$  par :

$$\mathcal{C}(z_0, R] = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z - z_0| = R\}.$$

**Théorème 1.58.** Lorsque  $0 < R < +\infty$ , s'il existe  $z \in \mathcal{C}(z_0, R]$  tel que  $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$  converge absolument, alors la série de fonctions :  $u_n(z) = a_n(z - z_0)^n$  converge normalement sur  $B(z_0, R]$ .

*Démonstration.* Soit  $z \in \mathcal{C}(z_0, R]$  tel que  $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$  converge absolument. On a :

$$\|a_n(z - z_0)^n\|_Y = |z - z_0|^n \|a_n\|_Y = R^n \|a_n\|_Y.$$



Puisque  $\forall z \in B(z_0, R) : \forall n \in \mathbb{N} : \|u_n(z)\|_Y = |z - z_0| \|a_n\|_Y \leq R^n \|a_n\|_Y$ , il vient que :

$$\forall n \geq 0 : \|u_n\|_{\infty, B(z_0, R)} \leq R^n \|a_n\|_Y.$$

Et donc  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge normalement sur  $B(z_0, R)$  par le critère de Weierstrass.  $\square$

*Exemple 1.13.*  $Y = \mathbb{C}$ ,  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ . On a alors  $a_n = \frac{1}{n^2}$ , donc :

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = n^{-\frac{2}{n}} = \exp\left(-2 \frac{\ln n}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

d'où  $R = 1$ , et il y a convergence en  $z = 1$ , donc il y a convergence absolue de la série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\exp(in\theta)}{n^2} \quad \forall \theta \in \mathbb{R},$$

et la convergence de  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$  est normale sur  $B(0, 1]$ .

**Théorème 1.59** (Théorème d'Abel). Si  $R \in (0, +\infty)$  et  $\exists z \in \mathcal{C}(z_0, R]$  t.q.  $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$  converge, alors la série de fonctions de terme général  $z \mapsto a_n (z - z_0)^n$  converge uniformément sur le segment reliant  $z_0$  à  $z$ .

Démonstration. Prenons  $z_0 = 0$  et  $z \in \mathbb{R}_0^+$ . Prenons  $x \in [0, z]$ ,  $n, p \in \mathbb{N}^*$ . Écrivons :

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k x^k = \sum_{k=n}^{n+p} a_k z^k \left(\frac{x}{z}\right)^k.$$

Notons alors  $S_m := \sum_{k=0}^m a_k z^k$ , pour tout  $m$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+p} a_k x^k &= \sum_{k=n}^{n+p} (S_k - S_{k-1}) \left(\frac{x}{z}\right)^k = \sum_{k=n}^{n+p} (S_k - S_{n-1}) \left(\frac{x}{z}\right)^k - \sum_{k=n}^{n+p} (S_{k-1} - S_{n-1}) \left(\frac{x}{z}\right)^k \\ &= \sum_{k=n}^{n+p} (S_k - S_{n-1}) \left(\frac{x}{z}\right)^k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} (S_k - S_{n-1}) \left(\frac{x}{z}\right)^{k+1} \\ &= -(S_{n-1} - S_{n-1}) \left(\frac{x}{z}\right)^n + \sum_{k=n}^{n+p-1} (S_k - S_{n-1}) \left(\left(\frac{x}{z}\right)^k - \left(\frac{x}{z}\right)^{k+1}\right) + (S_{n+p} - S_{n-1}) \left(\frac{x}{z}\right)^{n+p}. \end{aligned}$$

Puisque la série de terme général  $z \mapsto a_k |z - z_0|^k$  converge, la suite  $(S_m)_n$  est de Cauchy dans  $Y$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . On sait qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  t.q. :

$$\forall k, n > N : \|S_k - S_{n-1}\|_Y \leq \varepsilon.$$

Soit un  $n \geq N$ , et  $p \in \mathbb{N}^*$ . Prenons  $x \in [0, z]$ . On a :

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=n}^{n+p} a_k x^k \right\|_Y &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \left\| (S_k - S_{n-1}) \left( \left( \frac{x}{z} \right)^{k+1} - \left( \frac{x}{z} \right)^k \right) \right\|_Y + \left\| (S_{n+p} - S_{n-1}) \left( \frac{x}{z} \right)^{n+p} \right\|_Y \\
&\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \|S_k - S_{n-1}\| \left( \left( \frac{x}{z} \right)^k - \left( \frac{x}{z} \right)^{k+1} \right) + \|S_{n+p} - S_{n-1}\| \left( \frac{x}{z} \right)^{n+p} \\
&\leq \varepsilon \sum_{k=n}^{n+p-1} \left( \left( \frac{x}{z} \right)^k - \left( \frac{x}{z} \right)^{k+1} \right) + \varepsilon \left( \frac{x}{z} \right)^{n+p} \\
&\leq \varepsilon \left( \left( \frac{x}{z} \right)^n - \left( \frac{x}{z} \right)^{n+p} \right) + \varepsilon \left( \frac{x}{z} \right)^{n+p} \\
&\leq \varepsilon \left( \frac{x}{z} \right)^n.
\end{aligned}$$

Par la suite, on peut dire que pour  $n \geq N, p \in \mathbb{N}^*$  :

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \cdot x^k \right\|_{\infty, [0, z]} \leq \varepsilon.$$

On en déduit que la série de terme général  $x \mapsto a_k x^k$  est de Cauchy dans  $B([0, z], Y)$ , et donc, par complétude de  $Y$ , convergente.  $\square$

*Remarque.* Soient  $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$ . On appelle la *suite de Cauchy* de  $(a_n)$  et  $(b_n)$  la suite de terme général :

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

**Théorème 1.60** (Théorème de Cauchy, version CDI 1). Si  $\sum_{n \geq 0} a_n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n$  convergent absolument, alors  $\sum_{n \geq 0} c_n$  converge absolument, et on a :

$$\left( \sum_{n \geq 0} a_n \right) \left( \sum_{n \geq 0} b_n \right) = \sum_{n \geq 0} c_n.$$

**Théorème 1.61** (Théorème de Cauchy, version CDI 2). Si  $\sum_{n \geq 0} a_n, \sum_{n \geq 0} b_n$ , et  $\sum_{n \geq 0} c_n$  convergent, alors :

$$\left( \sum_{n \geq 0} a_n \right) \left( \sum_{n \geq 0} b_n \right) = \sum_{n \geq 0} c_n.$$

Démonstration. Par hypothèse de convergence des séries, on a :

$$R_a := R \left( \sum_{n \geq 0} a_n z^n \right), R_b := R \left( \sum_{n \geq 0} b_n z^n \right), R_c := R \left( \sum_{n \geq 0} c_n z^n \right) \geq 1.$$

Posons :

$$\begin{aligned} A : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \\ B : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n \geq 0} b_n x^n, \\ C : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n \geq 0} c_n x^n. \end{aligned}$$

Si les  $R_n$  sont  $> 1$ , alors  $[0, 1]$  est un compact de  $B(0, R[$  et donc la somme de la série de terme général  $a_n z^n$  est  $C^0$  sur  $[0, 1]$ , et si  $R = 1$ , alors la série de puissance converge en  $1 \in \mathcal{C}(0, 1]$  et donc la série de terme général  $a_n z^n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

Puisque  $z \mapsto a_n z^n$  (pareil pour  $b_n, c_n$ ) est  $C^0$  sur  $[0, 1]$ , il vient que  $A, B, C \in C^0([0, 1], \mathbb{C})$ .

Pour  $x \in [0, 1]$ , les séries  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  convergent **absolument**. De plus :

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k \cdot b_{n-k} x^{n-k} = x^n \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = x^n c_n.$$

Par le Théorème 1.60, on a :

$$\forall x \in [0, 1] : A(x)B(x) = C(x).$$

De même, en passant à la limite (continuité)  $x \rightarrow 1$ , il vient :

$$\left( \sum_{n \geq 0} a_n \right) \left( \sum_{n \geq 0} b_n \right) = A(1)B(1) = C(1) = \sum_{n \geq 0} c_n.$$

□

### 1.5.3 Fonctions réelles analytiques

On considère la série de puissances  $u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ , avec  $x, x_0 \in \mathbb{R}$  et  $x_0$  fixé.

**Définition 1.62.** On appelle *série dérivée formelle* de  $u_n$  la série de terme général :

$$u'_n(x) = n a_n (x - x_0)^{n-1}, \quad n \geq 1$$

*Remarque.* La série dérivée formelle est toujours une série de puissances.

**Proposition 1.63.** Soient :

$$\begin{aligned} R_1 &:= \mathbb{R} \left( \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n \right), \\ R_2 &:= \mathbb{R} \left( \sum_{n \geq 1} n a_n (x - x_0)^{n-1} \right). \end{aligned}$$

Alors  $R_1 = R_2$ .

Démonstration. On observe aisément que :

$$R_1^{-1} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|a_n\|_Y^{\frac{1}{n}},$$

et donc :

$$R_2^{-1} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|na_n\|_Y^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}} \|a_n\|_Y^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|a_n\|_Y^{\frac{1}{n}} = R_1^{-1},$$

car  $n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ . □

**Proposition 1.64.** Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Supposons  $R \geq 0$ , et notons :

$$f : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow Y : x \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n.$$

Alors la fonction  $f$  est continue sur  $(x_0 \pm R)$ , et on a :

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in (x_0 \pm R) : f^{(p)}(x) &= \sum_{n \geq p} (n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)) a_n (x - x_0)^{n-p} \\ &= \sum_{n \geq p} \frac{n!}{(n-p)!} a_n (x - x_0)^{n-p}. \end{aligned}$$

Démonstration. On observe que le terme général  $u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$  est de classe  $C^\infty$  sur  $(x_0 \pm R)$ . La série  $u'_n(x) = na_n(x - x_0)^{n-1}$  converge normalement sur les compacts de  $(x_0 \pm R)$  par l'égalité des rayons. Donc  $f \in C^1((x_0 \pm R))$  et  $f'(x) = \sum_{n \geq 1} na_n(x - x_0)^{n-1}$ .

Par récurrence, on obtient le résultat désiré. □

**Corollaire 1.65.** Si  $f$  est une somme d'une série de puissances  $\sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n$  de rayon  $R \geq 0$  sur  $(x_0 \pm R)$ , alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Démonstration. Si  $f$  est somme de la série de puissance de terme général  $a_n(x - x_0)^n$ , alors  $f \in C^\infty$  sur  $(x_0 \pm R)$ . Par la Proposition 1.64, on trouve :

$$\forall p \in \mathbb{N} : f^{(p)}(x_0) = \sum_{n \geq p} \frac{n!}{(n-p)!} a_n (x_0 - x_0)^{n-p} = \frac{p!}{0!} a_p (x_0 - x_0)^{p-p} + 0 = p! a_p 1 = p! a_p,$$

et donc  $a_p = \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}$ . □

*Remarque.* Les notations suivantes sont dues à Landau :

$$\begin{aligned} u_n \sim v_n &\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : |u_n - v_n| < \varepsilon |u_n| \\ u_n = o(v_n) &\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N : |u_n| < \varepsilon |v_n| \\ u_n = O(v_n) &\iff \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall M \geq 0 : \forall n \geq N : u_n < M |v_n| \end{aligned}$$

**Définition 1.66.** Soit  $U \subset \mathbb{R}$ , un ouvert. Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *réelle analytique* lorsque :

$$\forall x_0 \in U : \exists \varepsilon > 0, (a_n) \subset \mathbb{R} \text{ t.q. } (x_0 \pm \varepsilon) \subset U \text{ et } \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k \text{ converge simplement sur } (x_0 \pm \varepsilon).$$

**Définition 1.67** (Définition équivalente).  $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *réelle analytique* lorsque  $f$  est somme de sa série de Taylor sur un voisinage de chaque point de  $U$ .

**Définition 1.68.** Pour  $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}$ , on pose  $\mathcal{A}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } f \text{ est réelle analytique sur } U\}$ .

**Proposition 1.69.** Soit  $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}$ . Alors  $\mathcal{A}(U) \subsetneq C^\infty(U, \mathbb{R})$ .

Démonstration. Montrons d'abord l'inclusion. Soit  $x_0 \in U$  et soit  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \text{ sur } (x_0 \pm \varepsilon).$$

On a donc  $f|_{(x_0 \pm \varepsilon)} \in C^\infty((x_0 \pm \varepsilon), \mathbb{R})$ .

Pour montrer l'inclusion stricte, soit :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \exp(-x^{-1}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On sait que  $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , et  $\forall k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(0) = 0$ . Donc  $f$  n'est somme de sa série de Taylor sur aucun voisinage de 0. On a donc  $f \notin \mathcal{A}(\mathbb{R})$ .  $\square$

*Remarque.*  $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$  peut avoir, en certains points, un rayon fini. Par exemple  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Pour  $|x| < 1$ , on a :

$$f(x) = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k x^{2k},$$

et  $R\left(\sum_{k \geq 0} (-1)^k x^{2k}\right) = \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} ((-1)^n)^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} = 1$ .

# Chapitre 2

## Intégration

### 2.1 Intégrales absolument convergentes

#### 2.1.1 Rappels concernant l'intégrale de Riemann

**Définition 2.1.** On se place sur un segment  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . On note :

$$\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) := \{ \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } \varphi \text{ est en escaliers sur } [a, b] \}.$$

*Remarque.*  $\int$  est bien définie sur  $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ .

**Définition 2.2.** La fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est *R-int* (Riemann intégrable, ou encore intégrable au sens de Riemann) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \text{ t.q.}$$

$$(i) \quad \varphi \leq f \leq \psi$$

$$(ii) \quad \int (\psi - \varphi) < \varepsilon$$

**Proposition 2.3.** De manière équivalente,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est R-int sur  $[a, b]$  lorsque :

$$\overline{\int} f := \inf_{f \leq \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})} \int \psi = \sup_{f \geq \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})} \int \varphi =: \underline{\int} f.$$

**Définition 2.4.** On note dans ce cas :

$$\int_a^b f(x) dx = \overline{\int}_a^b f(x) dx = \underline{\int}_a^b f(x) dx.$$

**Proposition 2.5.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est R-int sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est bornée sur  $[a, b]$ .

**Proposition 2.6.** Soient  $f, g$   $R$ -int, et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Alors les fonctions suivantes sont  $R$ -int :

$$\begin{aligned} &\lambda f + \mu g \\ &\min(f, g) \\ &\max(f, g) \\ &|f| \end{aligned}$$

Et on a :

(i)

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx ;$$

(ii)

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Démonstration. montrons que  $\min(f, g)$  est  $R$ -int sur  $[a, b]$ .

Fixons  $\varepsilon > 0$ . Soient  $\varphi_f, \varphi_g, \psi_f, \psi_g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$  tels que :

$$\begin{aligned} \varphi_f &\leq f \leq \psi_f, & \int_a^b (\psi_f - \varphi_f) &< \varepsilon \\ \varphi_g &\leq g \leq \psi_g, & \int_a^b (\psi_g - \varphi_g) &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Prenons  $x \in [a, b]$ , et remarquons que :

$$\min(\varphi_f, \varphi_g) \leq f \quad \min(\varphi_f, \varphi_g) \leq g,$$

et donc  $\min(\varphi_f, \varphi_g) \leq \min(f, g)$ .

Posons  $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \ni \tilde{\varphi} := \min(\varphi_f, \varphi_g), \tilde{\psi} := \min(\psi_f, \psi_g)$ . On remarque alors :

$$\tilde{\varphi} \leq \min(f, g) \leq \tilde{\psi}.$$

Prenons  $x \in [a, b]$ . On remarque :

— si  $\varphi_f(x) \leq \varphi_g(x)$ , on a :

$$\tilde{\psi}(x) - \tilde{\varphi}(x) \leq \psi_f(x) - \varphi_f(x) ;$$

— si  $\varphi_g(x) < \varphi_f(x)$ , on a :

$$\tilde{\psi}(x) - \tilde{\varphi}(x) \leq \psi_g(x) - \varphi_g(x).$$

Ainsi, en séparant les intégrales en un nombre fini où on a soit (i), soit (ii), on a :

$$\int_a^b (\tilde{\psi} - \tilde{\varphi}) \leq \int_a^b (\psi_f - \varphi_f) + \int_a^b (\psi_g - \varphi_g) \leq 2\varepsilon.$$

□

**Corollaire 2.7.**  $\left| \int_a^b (\lambda f + \mu g)(x) dx \right| \leq |\lambda| \int_a^b |f(x)| dx + |\mu| \int_a^b |g(x)| dx.$

## 2.1.2 Fonctions absolument intégrables sur un intervalle

**Définition 2.8.** Soit  $I \neq \emptyset$ , un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est *abs-int* (*absolument intégrable*) sur  $I$  lorsque :

- (i)  $\forall [a, b] \subset I : f|_{[a, b]}$  est R-int sur  $[a, b]$  ;
- (ii)  $\sup_{[a, b] \subset I} \int_a^b |f| \leq +\infty$ .

*Remarque.* La condition (ii) revient à dire que  $\exists M > 0$  t.q.  $\forall [a, b] \subset I : \int_a^b |f| \leq M$ .

**Définition 2.9.** Soit  $I \subset \mathbb{R}$ , un intervalle. On appelle *suite exhaustive de segments de I* toute suite  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  de segments de  $I$  tels que :

- (i) la suite est croissante (c-à-d  $\forall n \in \mathbb{N} : [a_{n+1}, b_{n+1}] \supseteq [a_n, b_n]$ ) ;
- (ii)  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = I$ .

**Proposition 2.10.** Soit  $I \neq \emptyset$ , un intervalle de  $\mathbb{R}$ .  $I$  admet une suite exhaustive.

*Démonstration.* Si  $I$  est un fermé, prenons  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $I = [a, b]$ . La suite  $([a_n, b_n])_n = ([a, b])_n$  est exhaustive.

Si  $I$  est un ouvert, prenons  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $I = (a, b)$ . La suite  $([a_n, b_n])_n = ([a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}])_n$  est exhaustive.

Si  $I$  est ouvert d'un côté, et fermé de l'autre, les suites exhaustives  $([a, b - \frac{1}{n}])_n$  et  $([a + \frac{1}{n}, b])_n$  sont exhaustives.  $\square$

**Proposition 2.11.** Soit  $I \neq \emptyset$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  abs-int sur  $I$ . Soit  $([a_n, b_n])_n$  une suite exhaustive de segments de  $I$ . Alors :

- (i) la suite définie par :

$$\left( \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx \right)_n \subset \mathbb{R}$$

est convergente ;

- (ii) la limite de cette suite ne dépend pas de la suite exhaustive de segments de  $I$  choisie.

**Définition 2.12.** On appelle *intégrale de  $f$  sur  $I$*  cette valeur, et on la note :

$$\int_I f(x) dx.$$

*Démonstration.* Soit  $([a_n, b_n])$  une suite exhaustive de segments de  $I$ . Posons pour  $n \in \mathbb{N} : \alpha_n = \int_{a_n}^{b_n} |f|$ . La suite  $(\alpha_n)_n$  est croissante et majorée donc  $(\alpha_n)$  converge vers un certain  $\ell \in \mathbb{R}^+$ . En particulier,  $(\alpha_n)$  est de Cauchy dans  $\mathbb{R}$ . Considérons maintenant  $(\beta_n)_n$ , où  $\beta_n := \int_{a_n}^{b_n} f$ . Observons que pour  $p, n \in \mathbb{N}$  :

$$\beta_{n+p} - \beta_n = \int_{a_{n+p}}^{b_{n+p}} f - \int_{a_n}^{b_n} f = \int_{a_{n+p}}^{a_n} f + \int_{a_n}^{b_n} f + \int_{b_n}^{b_{n+p}} f - \int_{a_n}^{b_n} f = \int_{a_{n+p}}^{a_n} f + \int_{b_n}^{b_{n+p}} f.$$

Ainsi :

$$|\beta_{n+p} - \beta_n| \leq \int_{a_{n+p}}^{a_n} |f| + \int_{b_n}^{b_{n+p}} |f| \leq \int_{a_{n+p}}^{a_n} |f| + \int_{a_n}^{b_n} |f| + \int_{b_n}^{b_{n+p}} |f| - \int_{a_n}^{b_n} |f| = \alpha_{n+p} - \alpha_n.$$

La suite  $(\beta_n)_n$  est donc bornée par une suite de Cauchy (et est donc de Cauchy) dans  $\mathbb{R}$ . Par complétude de  $\mathbb{R}$ ,  $(\beta_n)_n$  converge dans  $\mathbb{R}$ .



Montrons maintenant que cette limite ne dépend pas de la suite exhaustive. Soit  $[\tilde{a}_n, \tilde{b}_n]$  une suite exhaustive de  $I$ . On sait que  $\tilde{\beta}_n = \int_{\tilde{a}_n}^{\tilde{b}_n} f$  converge. On veut montrer que  $\tilde{\beta}_n$  a la même limite que  $\beta_n$ . On construit donc une nouvelle suite exhaustive de  $I$ . On choisit  $[\tilde{a}_0, \tilde{b}_0] = [a_0, b_0]$ . Il existe  $N_1 \geq 0$  t.q.  $\forall n \geq N_1 : [a_0, b_0] \subset [\tilde{a}_n, \tilde{b}_n]$ . On pose ensuite  $[\tilde{a}_1, \tilde{b}_1] = [\tilde{a}_{N_1}, \tilde{b}_{N_1}]$ . Il existe  $N_2 \geq N_1$  t.q.  $\forall n \geq N_2 : [\tilde{a}_1, \tilde{b}_1] \subset [a_n, b_n]$ . On pose donc  $[\tilde{a}_2, \tilde{b}_2] = [a_{N_2}, b_{N_2}]$ .

On construit donc  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que pour tout  $p$  :

$$\begin{aligned} [\tilde{a}_{2p}, \tilde{b}_{2p}] &= [a_{\varphi(2p)}, b_{\varphi(2p)}], \\ [\tilde{a}_{2p+1}, \tilde{b}_{2p+1}] &= [\tilde{a}_{\varphi(2p+1)}, \tilde{b}_{\varphi(2p+1)}]. \end{aligned}$$

Donc la suite  $([\tilde{a}_p, \tilde{b}_p])_p$  est exhaustive. La suite  $\left(\int_{\tilde{a}_p}^{\tilde{b}_p} f\right)_p$  converge vers  $\tilde{\beta}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Puisque :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{a}_{2p}}^{\tilde{b}_{2p}} f &= \int_{a_{\varphi(2p)}}^{b_{\varphi(2p)}} f = \beta_{\varphi(2p)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \beta = \tilde{\beta} \\ \int_{\tilde{a}_{2p+1}}^{\tilde{b}_{2p+1}} f &= \int_{\tilde{a}_{\varphi(2p+1)}}^{\tilde{b}_{\varphi(2p+1)}} f = \tilde{\beta}_{\varphi(2p+1)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \tilde{\beta} = \tilde{\beta}, \end{aligned}$$

on déduit  $\beta = \tilde{\beta} = \tilde{\beta}$ . Les limites sont donc les mêmes, peu importe les suites exhaustives choisies.  $\square$

**Proposition 2.13.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  R-int sur  $[a, b]$ . Alors  $f$  est abs-int sur  $[a, b]$ , et on a :

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f.$$

*Démonstration.*  $f$  est R-int, et donc est R-int sur tout segment de  $[a, b]$ . Soit  $([a_n, b_n])_n$ , une suite exhaustive de segments de  $[a, b]$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  t.q.  $\forall n \geq N : [a_n, b_n] = [a, b]$ . Ainsi, pour  $n \geq N$ , on a :

$$\int_{a_n}^{b_n} f = \int_a^b f.$$

En passant à la limite pour  $n \rightarrow +\infty$ , on a :

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f.$$

$\square$

**Proposition 2.14.** L'ensemble  $L^1(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } f \text{ est abs-int sur } I\}$  est un  $\mathbb{R}$ -ev. De plus, l'application :

$$\int : L^1(I) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_I f$$

est une forme linéaire sur  $L^1(I)$ .

$\square$

*Démonstration.* EXERCICE.

### 2.1.3 Fonctions absolument intégrables vues comme fonction des bornes

**Proposition 2.15.** Soit  $I \subset \mathbb{R}$ , un intervalle non-vidé de  $\mathbb{R}$ . Si la fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est abs-int sur  $I$ , alors elle l'est sur  $I \cap (-\infty, a]$  et  $[a, +\infty)$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , et on a :

$$\int_I f = \int_{I \cap (-\infty, a]} f + \int_{I \cap [a, +\infty)} f.$$

*Démonstration.* Soit  $[\alpha, \beta] \subset [a, +\infty) \cap I$ .  $[\alpha, \beta]$  est un segment de  $I$  et  $f$  est abs-int sur  $I$ .  $f$  est donc abs-int sur tout segment de  $I$ , en particulier sur  $[\alpha, \beta]$ . De plus, il existe  $M \geq 0$  tel que pour tout segment  $[u, v]$  de  $I$ , on a :

$$\int_u^v |f| \leq M.$$

Ainsi :

$$\int_\alpha^\beta |f| \leq M.$$

$f$  est donc abs-int sur  $I \cap [a, +\infty)$ . On raisonne de manière similaire pour  $(-\infty, a]$ .

Montrons maintenant l'égalité. Soit  $[\alpha_n, \beta_n]$ , une suite de segments de  $I$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N : \alpha_n \leq a \leq \beta_n.$$

Il vient alors que  $([\alpha_n, a])_n$  est une suite exhaustive de  $I \cap (-\infty, a]$ , et  $([a, \beta_n])_n$  est une suite exhaustive de  $I \cap [a, +\infty)$ . Pour  $n \geq N$ , on a alors :

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f = \int_{\alpha_n}^a f + \int_a^{\beta_n} f.$$

En passant à la limite pour  $n \rightarrow +\infty$ , on trouve :

$$\int_I f = \int_{I \cap (-\infty, a]} f + \int_{I \cap [a, +\infty)} f.$$

□

**Proposition 2.16.** Soient  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in I$ , et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  est abs-int sur  $I \cap (-\infty, a]$  et sur  $I \cap [a, +\infty)$ , alors  $f$  est abs-int sur  $I$ , et on a :

$$\int_I f = \int_{I \cap (-\infty, a]} f + \int_{I \cap [a, +\infty)} f.$$

*Démonstration.* Soit  $[\alpha, \beta]$  un segment de  $I$ . Si  $a < \alpha$ , ou  $a > \beta$ , c'est trivial.

Supposons alors  $\alpha \leq a \leq \beta$ .  $f$  est R-int sur  $[\alpha, a]$  et sur  $[a, \beta]$ .  $f$  est donc R-int sur  $[\alpha, \beta]$ . De plus, il existe  $M^+, M^- > 0$  tels que :

$$\sum_{[u,v] \subset (-\infty, a] \cap I} \int_u^v f \leq M^- \quad \text{et} \quad \sup_{[u,v] \subset I \cap [a, +\infty)} \int_u^v |f| \leq M^+.$$

On peut donc dire que  $\int_\alpha^\beta |f| \leq M^+ + M^-$ . On a alors  $f$  abs-int sur  $I$  et on peut appliquer la proposition précédente pour :

$$\int_I f = \int_{I \cap (-\infty, a]} f + \int_{I \cap [a, +\infty)} f.$$

□

**Proposition 2.17.** Soient  $I \subset \mathbb{R}$ , un intervalle non-vide, et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  abs-int. La fonction  $F : I \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \int_{I \cap (-\infty, x]} f$  est localement lipschitzienne.

Démonstration. Soit  $x_0 \in I$ . Supposons que  $x_0$  n'est pas un bord de  $I$  (sinon EXERCICE). Supposons qu'il existe  $\delta > 0$  t.q.  $(x_0 \pm \delta) \subset I$ . La fonction  $f$  est R-int sur  $[x_0 \pm \frac{\delta}{2}]$  et donc sa valeur absolue est bornée sur ce segment par  $M(x_0, \delta)$ . Pour  $x, y \in [x_0 \pm \frac{\delta}{2}]$ , avec  $x < y$ , on déduit :

$$F(y) - F(x) = \int_{I \cap (-\infty, y]} f - \int_{I \cap (-\infty, x]} f = \int_{I \cap (-\infty, x]} f + \int_x^y f - \int_{I \cap (-\infty, x]} f = \int_x^y f.$$

D'où :

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f \right| \leq M(x_0, \delta)(y - x).$$

□

**Corollaire 2.18.** Si  $f$  est abs-int sur  $I$ , alors  $F$  est continue sur  $I$ .

**Proposition 2.19.** Si  $f$  est abs-int sur  $I$ , et continue en  $x_0 \in I$ , alors  $F$  est dérivable en  $x_0$  et on a :

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

**Corollaire 2.20.** Si  $f$  est abs-int sur  $I$  et de classe  $C^k$  sur un voisinage de  $x_0 \in I$ , alors  $F$  est de classe  $C^{k+1}$  sur un voisinage de  $x_0$  et on a, sur ce voisinage :

$$\forall p \in \{0, \dots, k\} : F^{(p+1)}(x) = f^{(p)}(x).$$

*Remarque.* Si le voisinage est ouvert pour  $f$ , alors on a le même voisinage pour  $F$ .

Démonstration.  $F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^x f(t) dt$ .

□

*Remarque.* C'est donc le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral qui est revu ici.

## 2.1.4 Critères d'intégration absolue

**Proposition 2.21** (Critère de comparaison). Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle non-vide et  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  avec :

- $\forall x \in X : |f(x)| \leq g(x)$  ;
- $f, g$  R-int sur tout segment de  $I$ .

Si  $g$  est abs-int sur  $I$ , alors  $f$  l'est aussi, et on a :

$$\int_I |f| \leq \int_I g.$$

Démonstration. Il existe  $M_g \geq 0$  t.q. :

$$\forall [u, v] \subset I : \int_u^v g \leq M_g.$$

Ainsi, si  $[a, b] \subset I$  est un segment, on a  $f$  R-int sur  $[a, b]$  et :

$$\int_a^b |f| \leq \int_a^b g \leq M_g,$$

avec  $M_g$  donc indépendant de  $[a, b]$ . Ceci montre que  $f$  est abs-int sur  $I$  et que :

$$\int_I |f| \leq \int_I g.$$

□

*Remarque.* Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est *équivalent* à  $g$  en  $b^-$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall x \in [b - \eta, b) : |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |f(x)|.$$

**Proposition 2.22.** Soit  $I = [a, b]$ , et soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R$ -int sur tout segment de  $I$ . Alors :

1. si  $f \underset{b^-}{\sim} g(x)$ , alors  $f$  est abs-int sur  $I$  si et seulement si  $g$  l'est ;
2. dans le cas abs-int, on a :

$$\int_x^b |f| \underset{b^-}{\sim} \int_x^b g.$$

Dans le cas non-abs-int, on a :

$$\int_a^x |f| \underset{b^-}{\sim} \int_a^x g.$$

Démonstration.

- Supposons  $f$  abs-int. Pour  $\varepsilon = 1$ , il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall x \in [b - \eta, b) : \left| |f(x)| - g(x) \right| \leq \varepsilon |f(x)| = |f(x)|.$$

On en déduit  $(0 \leq g(x) \leq 2|f(x)|)$  sur  $[b - \eta, b)$ . Ainsi, par le critère de comparaison,  $g$  est abs-int sur  $[b - \eta, b)$ . De plus,  $g$  est abs-int sur  $[a, b - \eta]$  pour tout  $\eta$ , et donc  $g$  est abs-int sur  $[a, b]$ . On montre que si  $g$  est abs-int, alors  $f$  est abs-int, de la même manière (critère de comparaison).

- Dans le cas abs-int, fixons  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\eta > 0$  tel que pour  $x \in [b - \eta, b)$ , on a  $\left| |f(x)| - g(x) \right| \leq \varepsilon g(x)$ . Pour  $x > b - \eta$ , il vient :

$$\left| \int_x^b |f| - \int_x^b g \right| \leq \int_x^b \left| |f| - g \right|,$$

d'où  $\int_x^b |f(t)| dt$  abs-int.

Dans le cas non-abs-int, fixons  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\eta_1$  tel que pour  $x \in [b - \eta_1, b)$ , on a :

$$\left| |f(x)| - g(x) \right| \leq \varepsilon g(x).$$

Pour  $x \geq b - \eta_1$ , on a :

$$\left| \int_a^x |f| - \int_a^x g \right| \leq \int_a^{b-\eta_1} \left| |f(t)| - g(t) \right| dt + \int_{b-\eta_1}^x \left| |f(t)| - g(t) \right| dt.$$

Puisque  $g$  n'est pas abs-int sur  $[a, b]$ , il existe  $\eta_2 \in (b, b + \eta_1)$  tel que pour  $x \geq b - \eta_2$ , on a :

$$\frac{\int_a^{b-\eta_1} \left| |f| - g \right|}{\int_a^x g} \leq \varepsilon.$$

Par suite, on a pour  $x \geq b - \eta_2$  :

$$\left| \int_a^x |f| - \int_a^x g \right| \leq \varepsilon \int_a^x g + \varepsilon \int_{b-\eta_1}^x g \leq 2\varepsilon \int_a^x g.$$

□

### 2.1.5 Fonctions de référence de Riemann

**Proposition 2.23.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $x \mapsto x^{-\alpha}$  est abs-int sur  $[1, +\infty)$  si et seulement si  $\alpha > 1$ .

*Démonstration.* Remarquons que  $x \mapsto x$  est continue sur  $[1, +\infty)$ , et donc R-int sur tout segment de  $[1, +\infty)$ . De plus, elle est positive sur  $[1, +\infty)$ . Pour  $X \geq 1$ , on a :

$$\int_1^X \left| \frac{1}{x^\alpha} \right| dx = \int_1^X \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^X x^{-\alpha} dx.$$

— si  $\alpha \neq 1$ , alors :

$$\int_1^X x^{-\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} [x^{1-\alpha}]_1^X = \frac{X^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} ;$$

— si  $\alpha \geq 1$ , alors :

$$\int_1^X \frac{dx}{x^\alpha} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha},$$

et :

$$\int_1^X |x^{-\alpha}| dx \leq \frac{1}{1-\alpha}.$$

Donc l'intégrale de  $x \mapsto x^{-\alpha}$  sur les segments de  $[1, +\infty)$  est majorée indépendamment du segment, donc cette fonction est abs-int sur  $[1, +\infty)$ .

— si  $\alpha \leq 1$ , alors :

$$\int_1^X \frac{dx}{x^\alpha} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc l'intégrale de  $x \mapsto x^{-\alpha}$  sur les segments de  $[1, +\infty)$  n'est pas majorée indépendamment du segment, donc cette fonction n'est pas abs-int sur  $[1, +\infty)$ .

Finalement, si  $\alpha = 1$ , alors :

$$\int_1^X \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^X = \ln X \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty.$$

À nouveau, l'intégrale n'est pas bornée sur les segments de  $[1, +\infty)$ , indépendamment du segment, et donc  $x \mapsto x^{-1}$  n'est pas abs-int sur  $[1, +\infty)$ . □

**Proposition 2.24.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $x \mapsto x^{-\alpha}$  est abs-int sur  $(0, 1]$  si et seulement si  $\alpha \leq 1$ .

*Démonstration.* EXERCICE. □

*Exemple 2.1.* La fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$  est absolument intégrable sur  $(0, 1]$ .

### 2.1.6 Théorème du changement de variable

**Théorème 2.25.** Soient  $I, J$ , deux intervalles non-vides de  $\mathbb{R}$  et non réduits à un point. Soit  $\varphi : I \rightarrow J$  bijective et strictement croissante de classe  $C^1$  sur  $I$ . Soit  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  R-int sur tout segment de  $J$ . La fonction  $f$  est abs-int sur  $J$  si et seulement si  $(f \circ \varphi) \cdot \varphi' : I \rightarrow \mathbb{R}$  est abs-int sur  $I$ , et on a :

$$\int_I ((f \circ \varphi) \varphi') (x) dx = \int_J f(y) dy.$$

Démonstration. Soit  $([a_n, b_n])_n$  une suite exhaustive de segments de  $I$ . La suite  $([\varphi(a_n), \varphi(b_n)])_n$  est une suite exhaustive de segments de  $J$  (car  $\varphi$  est bijective). Puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \int_{a_n}^{b_n} |(f \circ \varphi) \varphi'| = \int_{a_n}^{b_n} |(f \circ \varphi)| \varphi' = \int_{\varphi(a_n)}^{\varphi(b_n)} |f|,$$

par CDI 1, on conclut que  $(f \circ \varphi) \varphi'$  est abs-int sur  $I$  si  $f$  l'est sur  $J$ .

On raisonne de manière similaire avec  $\varphi^{-1}$  (qui existe car  $\varphi$  est une bijection) pour montrer que  $f$  est abs-int sur  $J$  si  $(f \circ \varphi) \varphi'$  l'est sur  $I$ .

Dans ce cas, si  $([a_n, b_n])_n$  est une suite exhaustive de segments de  $I$ , on a :

$$\forall n \geq 0 : \int_{a_n}^{b_n} (f \circ \varphi) \varphi' = \int_{\varphi(a_n)}^{\varphi(b_n)} f.$$

En passant à la limite pour  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient :

$$\int_I (f \circ \varphi) \varphi' = \int_J f,$$

car  $([\varphi(a_n), \varphi(b_n)])_n$  est une suite exhaustive de  $J$ . □

## 2.2 Intégrales convergentes

### 2.2.1 Définitions et exemples

**Définition 2.26.** Soit  $I \subset \mathbb{R}$ , un intervalle non-vidé, et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  R-int sur tous les segments de  $I$ . On dit que l'intégrale de  $f$  sur  $I$  converge lorsque :

- (i)  $\forall ([a_n, b_n])_n$  exhaustive de  $I$  :  $\left( \int_{a_n}^{b_n} f \right)_n$  converge dans  $\mathbb{R}$  ;
- (ii) la limite ne dépend pas de la suite exhaustive choisie.

On note cette limite  $\int_I f$ .

**Proposition 2.27.** Si  $f$  est abs-int sur  $I$ , alors son intégrale sur  $I$  converge et on a :

$$\int_I f(x) dx = \int_I f(x) dx,$$

c-à-d, les deux notions ont le même sens pour la même notation.

Démonstration. Par le résultat X □

*Exemple 2.2.* La fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  a une intégrale convergente sur  $[1, +\infty)$  mais n'est pas abs-int sur  $[1, +\infty)$ .

On remarque que  $\frac{\sin x}{x}$  est continue sur  $[1, +\infty)$  et donc R-int sur tout segment de  $I$ . Soit  $([a_n, b_n])_n$ , une suite exhaustive de segments de  $[1, +\infty)$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , écrivons :

$$\int_{a_n}^{b_n} \frac{\sin x}{x} dx = \left[ \frac{-\cos x}{x} \right]_{a_n}^{b_n} + \int_{a_n}^{b_n} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

On sait que  $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$  sur  $[1, +\infty)$ . Par le critère de comparaison, puisque  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  est abs-int sur  $[1, +\infty)$ , on sait que  $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2}$  l'est également. Ainsi, la suite :

$$\left( \int_{a_n}^{b_n} \frac{\cos x}{x^2} dx \right)_n$$

converge dans  $\mathbb{R}$  vers une limite qui ne dépend pas de la suite  $([a_n, b_n])_n$  choisie. Par ailleurs :

$$\left[ -\frac{\cos x}{x} \right]_{a_n}^{b_n} = \frac{-\cos b_n}{b_n} + \frac{\cos a_n}{a_n} \xrightarrow{[a_n, b_n] \rightarrow [1, +\infty)} 0 + \cos 1.$$

Donc la suite  $\left( \int_{a_n}^{b_n} \frac{\sin x}{x} dx \right)_n$  converge vers une limite indépendante de la suite exhaustive de segments choisie. Donc l'intégrale de  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  converge dans  $[1, +\infty)$ .

Montrons maintenant que la fonction n'est pas abs-int. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On sait :

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi} dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\int_0^{\pi} |\sin x|}{(k+1)\pi} \\ &= \frac{\int_0^{\pi} |\sin x|}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

On a donc bien  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  non-abs-int sur  $[1, +\infty)$ .

*Exemple 2.3.*  $\text{sign} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$  n'admet pas d'intégrale convergente dans  $\mathbb{R}$ . Par exemple :

$$\int_{-n}^{n^2} \text{sign}(x) dx = n^2 - n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

**Proposition 2.28.** Soient  $I \subset \mathbb{R}$ , un intervalle non-vide,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R$ -int sur tout segment de  $I$ . L'intégrale de  $f$  converge sur  $I$  si et seulement si pour toute suite exhaustive de segments  $([a_n, b_n])_n$  de  $I$ , la suite  $\left( \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx \right)_n$  est de Cauchy.

Démonstration. TODO □

## 2.2.2 Rappel : deuxième formule de la moyenne

Pour rappel, la première formule de la moyenne est donnée par :

Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^0$  sur  $[a, b]$ , avec  $g \geq 0$ . Il existe  $c \in [a, b]$  tel que :

$$\int_a^b (fg)(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt.$$

**Proposition 2.29.** Soit  $[a, b]$ , un segment de  $\mathbb{R}$ , et soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $f$   $R$ -int sur  $[a, b]$ , et  $g \geq$ , décroissante sur  $[a, b]$ . Alors il existe  $c \in [a, b]$  tel que :

$$\int_a^b (fg)(t) dt = g(a) \int_a^c f(t) dt.$$

Démonstration. On fixe  $N \in \mathbb{N}^*$ , et on pose  $t_n := a + n \frac{b-a}{N}$  pour  $0 \leq n \leq N$ . Écrivons :

$$I_N := \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)g(t_k) dt.$$

On observe alors :

$$I_N - \int_a^b (fg)(t) dt = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)(g(t_k) - g(t)).$$

On trouve donc :

$$\begin{aligned} \left| I_N - \int_a^b (fg)(t) dt \right| &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t)| |g(t_k) - g(t)| dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t)| (g(t_k) - g(t)) dt \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t)| (g(t_k) - g(t_{k+1})) dt. \end{aligned}$$

Rappelons que la fonction  $K : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x |f(t)| dt$  est lipschitzienne de constante  $\|f\|_{\infty, [a, b]} =: M$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \left| I_N - \int_a^b (fg)(t) dt \right| &\leq \sum_{k=0}^{N-1} |K(t_{k+1}) - K(t_k)| (g(t_k) - g(t_{k+1})) \leq M \sum_{k=0}^{N-1} (t_{k+1} - t_k) (g(t_k) - g(t_{k+1})) \\ &= \frac{M(b-a)}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (g(t_k) - g(t_{k+1})) \leq \frac{M(b-a)}{N} (g(a) - g(b)) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

On en déduit que  $(I_N)_{N \geq 1}$  converge, et :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} I_N = \int_a^b (fg)(t) dt.$$

Par ailleurs, pour  $N \geq 1$ , on a :

$$I_N = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x) dx g(t_k).$$

Posons ensuite :

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t) dt.$$



On sait que  $F$  est continue sur le segment  $[a, b]$ , donc minorée par  $m$  et majorée par  $M$ . En appliquant une transformation d'Abel, on trouve :

$$\begin{aligned} I_N &= \sum_{k=0}^{N-1} (F(t_{k+1}) - F(t_k)) g(t_k) = \sum_{k=0}^{N-1} F(t_{k+1})g(t_k) - \sum_{k=0}^{N-1} F(t_k)g(t_k) \\ &= \sum_{k=1}^N F(t_k)g(t_{k-1}) - \sum_{k=0}^{N-1} F(t_k)g(t_k) \\ &= -F(t_0)g(t_0) + \sum_{k=1}^{N-1} F(t_k) (g(t_{k-1}) - g(t_k)) + F(t_N)g(t_{N-1}). \end{aligned}$$

Par suite, on sait que  $F(t_0) = F(a) = \int_a^a f = 0$ , on peut donc exprimer :

$$m \sum_{k=1}^{N-1} (g(t_k) - g(t_{k-1})) g(t_k) + mg(t_{N-1}) \leq I_N \leq M \sum_{k=1}^{N-1} (g(t_{k-1}) - g(t_k)) + Mg(t_{N-1}).$$

En développant les sommes, on trouve :

$$mg(a) \leq I_N \leq Mg(a).$$

En passant à la limite pour  $N \rightarrow +\infty$ , on trouve :

$$mg(a) \leq \int_a^b (fg)(t) dt \leq Mg(a).$$

Distinguons alors deux cas :

- si  $g(a) = 0$ , alors  $g \equiv 0$  sur  $[a, b]$ , et donc tout  $c \in [a, b]$  convient ;
- si  $g(a) \neq 0$ , alors :

$$m \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b (fg)(t) dt \leq M.$$

La fonction  $F$  étant continue sur le segment  $[a, b]$ , par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $c \in [a, b]$  tel que :

$$F(c) = \frac{1}{g(a)} \int_a^b (fg)(t) dt,$$

et donc en remultipliant par  $g(a)$  de par et d'autre, on obtient :

$$g(a)F(c) = g(a) \int_a^c f(t) dt = \int_a^b (fg)(t) dt.$$

□

### 2.2.3 Critère d'Abel

**Proposition 2.30** (Critère d'Abel pour la convergence des intégrales). Soient  $-\infty < a < b \leq +\infty$ ,  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

- $f$  est  $R$ -int sur tout segment de  $[a, b]$  et il existe  $M \geq 0$  tel que :

$$\forall x \in [a, b] : \left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq M ;$$

- $g$  est positive et décroissante vers 0 en  $b^-$  sur  $[a, b]$ .

Alors l'intégrale de  $fg$  converge sur  $I$ .

Démonstration. Soit  $([a_n, b_n])_n$  une suite exhaustive de segments de  $[a, b]$ . Posons, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\alpha_n := \int_{a_n}^{b_n} (fg)(t) dt.$$

Observons pour  $n, p \in \mathbb{N}$  :

$$\alpha_{n+p} - \alpha_n = \int_{a_{n+p}}^{b_{n+p}} (fg)(t) dt - \int_{a_n}^{b_n} (fg)(t) dt.$$

Puisque  $a_n = a$  à partir d'un certain  $N \in \mathbb{N}$ , on peut écrire :

$$\alpha_{n+p} - \alpha_n = \int_{b_n}^{b_{n+p}} (fg)(t) dt = g(b_n) \int_a^{c_{n+p}} f(t) dt,$$

pour un certain  $c_{n+p} \in [b_n, b_{n+p}]$  par la deuxième formule de la moyenne. On trouve finalement :

$$|\alpha_{n+p} - \alpha_n| \leq g(b_n) \left| \int_a^{c_{n+p}} f(t) dt - \int_a^{b_n} f(t) dt \right| \leq 2Mg(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

par décroissance de  $g$  vers 0.

La suite  $(\alpha_n)$  est donc une suite de Cauchy, ce qui implique que l'intégrale de  $(fg)$  converge sur  $[a, b]$ , par le critère de Cauchy.  $\square$

*Exemple 2.4.* Prenons  $\beta \in (0, 1)$ . La fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{x^\beta}$  est d'intégrale convergente sur  $[1, +\infty)$  car :

—  $f : [1, +\infty) : x \mapsto \sin x$  est R-int sur tous les segments de  $[1, +\infty)$ , et pour  $x \geq 1$ , on a :

$$\left| \int_1^x \sin t dt \right| \leq 2;$$

—  $g$  est positive et décroissante vers 0 en  $+\infty$ .

La convergence est assurée par le critère d'Abel.

*Exemple 2.5.* Les fonctions  $x \mapsto \sin(x^2)$  et  $x \mapsto \cos(x^2)$  sont d'intégrale convergente sur  $\mathbb{R}^+$ . Soit  $([\alpha_n, \beta_n])_n$ , une suite exhaustive de segments de  $\mathbb{R}^+$ . Pour  $n \geq 0$ , écrivons :

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} \sin(x^2) dx = \int_{\alpha_n^2}^{\beta_n^2} \sin t \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

pour  $t = x^2, dt = 2x dx$ . On a donc :

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha_n^2}^{\beta_n^2} \sin t \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_{\alpha_n^2}^{\beta_n^2} \sin t \frac{dt}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2} \int_{\alpha_n^2}^{\beta_n^2} \sin t \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

La fonction  $t \mapsto \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$  est  $C^0$  sur  $(0, 1]$  et prolongeable en 0 par continuité. Elle est donc abs-int sur  $(0, 1]$ . Donc  $\int_{\alpha_n^2}^1 \sin t \frac{dt}{\sqrt{t}}$  converge et la limite ne dépend pas de la suite  $\alpha_n \rightarrow 0$  choisie. La fonction  $t \mapsto \sin t$  est R-int sur tout segment de  $[1, +\infty)$ , avec :

$$\left| \int_1^x \sin t dt \right| \leq 2.$$

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$  est décroissante vers 0 en  $+\infty$ . Alors par le critère d'Abel,  $\int_1^{\beta_n^2} \sin t \frac{dt}{\sqrt{t}}$  converge et la limite ne dépend pas de la suite  $\beta \rightarrow +\infty$  choisie.

On en déduit que  $x \mapsto \sin(x^2)$  est d'intégrale convergente sur  $\mathbb{R}^+$ . On raisonne de manière similaire pour  $x \mapsto \cos(x^2)$ .

## Chapitre 3

# Intégrales à paramètres

### 3.1 Fonctions définies par une intégrale sur un segment fixe

#### 3.1.1 Un résultat de continuité

**Définition 3.1.** L'ensemble  $X$  est dit *localement compact* lorsque :

$$\forall x \in X : \forall O \text{ ouvert} : x \in O \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x) \text{ t.q. } O \subset V.$$

**Proposition 3.2.** Soit  $[a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$ , et  $(X, d)$  un espace métrique localement compact. Si  $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : (x, t) \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $X \times [a, b]$ , alors :

$$F : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$$

est définie, et continue sur  $X$ .

Démonstration. Soit  $x \in X$ .  $t \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $[a, b]$ , donc R-int sur  $[a, b]$ . La fonction  $F$  est donc en effet définie.

Soit  $x \in X$  et soit  $V \in \mathcal{V}(x)$  compact dans  $X$ . La fonction :

$$V \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : (x, t) \mapsto f(x, t)$$

est continue sur  $X \times [a, b]$ . En particulier, par le théorème de Heine, elle est uniformément continue sur  $V \times [a, b]$ , car  $V \times [a, b]$  est compact. Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $x_0 \in X$ . Il existe  $\eta > 0$  et  $\delta > 0$  tels que :  $\forall x, y \in X : \forall t, t' \in [a, b]$ , si  $d(x, y) < \eta$  et  $|t' - t| < \delta$ , et  $B(x_0, \eta) \subset V$ , alors  $|f(x, t) - f(y, t')| \leq \varepsilon$ .

En particulier, pour  $x \in B(x_0, \eta)$  et  $t \in [a, b]$ , on a :

$$|f(x, t) - f(x_0, t)| < \varepsilon.$$

Par intégration, on trouve :

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(x_0, t)| dt \leq \varepsilon(b - a).$$

□

*Remarque.* Cette proposition est encore vraie pour un compact  $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ , au lieu de  $[a, b]$ .

*Exemple 3.1.* Que dire de  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 \sin(\exp(-xt) - 1) dt$  ?

$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : (x, t) \mapsto \sin(\exp(-xt) - 1)$  est continue sur  $[0, 1] \times [0, 1]$ , d'où  $F(x) = \int_0^1 f(x, t) dt$  est de classe  $C^0$  sur  $[0, 1]$ , avec la proposition précédente. Donc  $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ .

### 3.1.2 Un résultat de dérivabilité

**Proposition 3.3.** Soient  $X \subset \mathbb{R}^d$ , un ouvert non-vide,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , un segment, et  $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $X \times [a, b]$  admettant une dérivée partielle par rapport à tout  $x_i$  en tout point de  $X$  tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) \in C^0(X \times [a, b], \mathbb{R}).$$

Alors la fonction  $F : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$  est de classe  $C^1$  sur  $X \times [a, b]$ , et on a :

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket : \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) dt.$$

*Démonstration.* Pour  $x_0 \in X, \delta > 0$  t.q.  $B(x_0, \delta) \subset X$ , puisque  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $C^1$  sur  $B(x_0, \delta)$ , pour  $t \in [a, b]$ , on peut écrire :

$$f(x_0 + h e_i, t) - f(x_0, t) = \int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + s e_i, t) ds.$$

Ces fonctions étant continues, elles sont R-int, et on a :

$$\int_a^b (f(x_0 + h e_i, t) - f(x_0, t)) dt = \int_a^b \int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + s e_i, t) ds dt = \int_a^b h \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + h s e_i, t) ds dt.$$

Pour  $h \in \left[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right] \setminus \{0\}$ , et en posant :

$$g = \left[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right] \times ([0, 1] \times [a, b]) : (h, (s, t)) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + h s e_i, t),$$

on a :

$$\frac{1}{h} \int_a^b (f(x_0 + h e_i, t) - f(x_0, t)) dt = \int_a^b \int_0^1 g(h, (s, t)) ds dt.$$

Or la fonction  $g$  est continue sur son compact de définition, par continuité de  $f$ . Par la Proposition 3.2, on sait que la fonction :

$$h \mapsto \int_a^b \int_0^1 g(h, (s, t)) ds dt \in C^0\left(\left[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right], \mathbb{R}\right).$$

Par cette continuité, on déduit que la fonction  $h \mapsto \frac{1}{h} (F(x_0 + h e_i) - F(x_0))$  admet une limite finie en  $h = 0$  qui est  $\int_a^b \int_0^1 g(0, (s, t)) ds dt$ . On en déduit que  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à  $x_i$  en  $x_0$ , et on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \int_a^b \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + 0, t) ds dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, t) \int_0^1 ds dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, t) dt.$$

À nouveau, par la Proposition 3.2 appliquée à  $(x, t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)$ , on obtient  $\frac{\partial F}{\partial x_i} \in C^0(X, \mathbb{R})$ , ce qui implique  $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ , et on a bien la formule ci-dessus.  $\square$

## 3.2 Fonction définies par des intégrales sur un segment variable

### 3.2.1 Un résultat de continuité

**Théorème 3.4.** Soit  $f : [\alpha, \beta] \times [a, b] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$ . La fonction  $F : [\alpha, \beta] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : (x, T) \mapsto \int_a^T f(x, t) dt$  est continue sur  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$ .

Démonstration. Soient  $(x, T) \in [\alpha, \beta] \times [a, b]$ ,  $(\Delta x, \Delta T) \in \mathbb{R}^2$  tels que :

$$(x + \Delta x, T + \Delta T) \in [\alpha, \beta] \times [a, b].$$

Écrivons alors :

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x, T + \Delta T) - F(x, T) &= \int_a^{T+\Delta T} f(x + \Delta x, t) dt - \int_a^T f(x, t) dt \\ &= \int_a^T f(x + \Delta x, t) dt + \int_T^{T+\Delta T} f(x + \Delta x, t) dt - \int_a^T f(x, t) dt \\ &= \int_a^T (f(x + \Delta x, t) - f(x, t)) dt + \int_T^{T+\Delta T} f(x + \Delta x, t) dt. \end{aligned}$$

Par continuité de  $f$  sur le compact  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$  et le théorème de Heine, on peut dire que  $f$  est uniformément continue sur ce compact. On a alors pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que si  $|\Delta x| \leq \eta$ , alors :

$$\forall t \in [a, b] : |f(x + \Delta x, t) - f(x, t)| < \frac{\varepsilon}{b - a},$$

et donc :

$$\left| \int_a^T (f(x + \Delta x, t) - f(x, t)) dt \right| \leq (T - a) \max_{t \in [a, b]} |f(x + \Delta x, t) - f(x, t)| \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, la fonction  $f$  est bornée sur son compact de définition. Donc il existe  $M > 0$  tel que  $\forall (y, t) \in [\alpha, \beta] \times [a, b] : |f(y, t)| \leq M$ . Si  $|\Delta T| < \frac{\varepsilon}{M}$ , on observe :

$$\left| \int_T^{T+\Delta T} f(x + \Delta x, t) dt \right| \leq M |\Delta T| < \varepsilon.$$

Dès lors, pour  $|\Delta x| < \eta$  et  $|\Delta T| < \frac{\varepsilon}{M}$ , on a :

$$|F(x + \Delta x, T) - F(x, T)| < \varepsilon.$$

On a en effet trouvé un voisinage de  $(x, T)$  qui est envoyé sur un voisinage de  $F(x, T)$ . La fonction  $F$  est donc continue.  $\square$

**Corollaire 3.5.** Soit  $f : [\alpha, \beta] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Soient  $\phi, \psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  continues sur  $[\alpha, \beta]$ . La fonction  $F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt$  est continue sur  $[\alpha, \beta]$ .

*Démonstration.* Posons  $G : [\alpha, \beta] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : (x, T) \mapsto \int_a^T f(x, t) dt$ . Par le théorème précédent, on peut dire  $G \in C^0([\alpha, \beta] \times [a, b], \mathbb{R})$ . De plus, pour  $x \in [a, b]$ , on peut écrire :

$$F(x) = \int_a^{\psi(x)} f(x, t) dt - \int_a^{\phi(x)} f(x, t) dt = G(x, \psi(x)) - G(x, \phi(x)).$$

Par continuité des fonctions  $G, \psi, \phi$ , on sait que  $x \mapsto G(x, \psi(x))$  et  $x \mapsto G(x, \phi(x))$  sont continues sur  $[\alpha, \beta]$  par composition de fonctions continues. Ensuite, on peut dire que  $F$  est continue sur  $[\alpha, \beta]$  par différence de fonctions continues.  $\square$

### 3.2.2 Un résultat de dérivabilité

**Théorème 3.6.** Soit  $f : [\alpha, \beta] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$  telle que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  existe en tout point de  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$  et  $(x, t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$ . Alors la fonction  $F : [\alpha, \beta] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : (x, T) \mapsto \int_a^T f(x, t) dt$  est de classe  $C^1$  sur  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$  avec :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = \int_a^T \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial T}(x, T) = f(x, T).$$

*Démonstration.* Avec le résultat de dérivabilité sur segment fixe (Proposition 3.3), on sait que  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, T)$  existe en tout point et vaut  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, T) = \int_a^T \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ , avec  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, T) \in C^0([\alpha, \beta] \times [a, b], \mathbb{R})$  par le Théorème 3.4.

De plus, par CDI 1, on sait que  $\frac{\partial F}{\partial T}(x, T)$  existe et vaut  $f(x, T)$  (continue par hypothèse) car  $f(x, \cdot) \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ . On sait également que  $T \mapsto \int_a^T \frac{\partial f}{\partial T}(x, t) dt \in C^1([\alpha, \beta] \times [a, b], \mathbb{R})$ .

On a donc bien  $F \in C^1([\alpha, \beta] \times [a, b], \mathbb{R})$ .  $\square$

**Proposition 3.7.** Soit  $f : [\alpha, \beta] \times [a, b] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$  telle que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  existe et est continue en tout point du compact de définition de  $f$ . Soient  $\psi, \phi : [\alpha, \beta] \xrightarrow{C^1} [a, b]$ . La fonction  $F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt$  est de classe  $C^1$  sur  $[\alpha, \beta]$  et on a :

$$\forall x \in [\alpha, \beta] : F'(x) = \psi'(x)f(x, \psi(x)) - \phi'(x)f(x, \phi(x)) + \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

*Démonstration.* La fonction  $G : [\alpha, \beta] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : (x, T) \mapsto \int_a^T f(x, t) dt$  est de classe  $C^1$  par le Théorème 3.6, et on a :

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, T) = \int_a^T \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial T}(x, T) = f(x, T).$$

Par composition de fonctions de classe  $C^1$ , on sait que  $x \mapsto G(x, \phi(x))$  et  $x \mapsto G(x, \psi(x))$  sont de classe  $C^1$  sur  $[\alpha, \beta]$ . Par ailleurs, pour  $x \in [\alpha, \beta]$ , on a :

$$F(x) = G(x, \psi(x)) - G(x, \phi(x)).$$

Par différence, on trouve donc  $F \in C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ , et pour  $x \in [\alpha, \beta]$ , on trouve :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\partial G}{\partial x}(x, \psi(x)) + \frac{\partial G}{\partial T}(x, \psi(x))\psi'(x) - \frac{\partial G}{\partial x}(x, \phi(x)) - \frac{\partial G}{\partial T}(x, \phi(x))\phi'(x) \\ &= \int_a^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + \psi'(x)f(x, \psi(x)) - \int_a^{\phi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt - \phi'(x)f(x, \phi(x)) \\ &= \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + \psi'(x)f(x, \psi(x)) - \phi'(x)f(x, \phi(x)). \end{aligned}$$

□

### 3.3 Fonctions définies par des intégrales convergentes

#### 3.3.1 Exemple

Soit  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : (x, t) \mapsto x \exp(-xt)$ . Que dire de  $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$  ?

Fixons  $x \in \mathbb{R}^+$ . La fonction  $t \mapsto x \exp(-xt)$  est R-int sur tout segment de  $\mathbb{R}^+$ . De plus,  $|f(x, t)| t^2 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  si  $x > 0$ . Donc il existe  $A_n \geq 0$  tel que :

$$\forall t \geq A_n : |f(x, t)| \leq \frac{1}{t^2}.$$

Par le critère de comparaison, la fonction  $t \mapsto f(\cdot, t)$  est abs-int sur  $[A_n, +\infty)$ . Si la fonction est abs-int sur  $[0, A_n]$ , alors elle l'est sur  $[0, +\infty)$ . Lorsque  $x = 0$ , alors la fonction  $t \mapsto f(x, t) = 0$ , donc  $F(0) = 0$  est bien défini.

Pour tout  $x \geq 0$ , on trouve :

$$F(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} - \int_0^T x \exp(-xt) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} - [\exp(-xt)]_0^T = \lim_{T \rightarrow +\infty} - (\exp(-xT) - 1) = 1.$$

On en déduit que la fonction  $F$  est discontinue en 0. La fonction  $f$  est en fait de classe  $C^\infty$ , mais  $F(x) := \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$  admet un point de discontinuité en  $x = 0$ .

#### 3.3.2 Notion d'intégrales uniformément convergentes

**Définition 3.8.** Soient  $X \neq \emptyset, I \subset \mathbb{R}$ , un intervalle non-vide. Soit  $f : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\forall x \in X : t \mapsto f(x, t) \text{ est d'intégrale convergente sur } I,$$

à savoir :

$$\forall x \in X : \forall \varepsilon > 0 : \exists K_{\varepsilon, x} \subset I \text{ segment t.q. } \forall \tilde{K} \subset I \text{ segment} : \left[ K_{\varepsilon, x} \subset \tilde{K} \Rightarrow \left| \int_{\tilde{K}} f(x, t) dt - \int_I f(x, t) dt \right| < \varepsilon. \right]$$

On dit que l'intégrale de  $f$  sur  $I$  converge uniformément sur  $X$  lorsque  $K_{\varepsilon, x}$  ne dépend pas de  $x$ , c'est-à-dire lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists K_\varepsilon \subset I \text{ segment t.q. } \forall \tilde{K} \subset I \text{ segment} : \left[ K_\varepsilon \subset \tilde{K} \Rightarrow \forall x \in X : \left| \int_{\tilde{K}} f(x, t) dt - \int_I f(x, t) dt \right| < \varepsilon \right].$$

*Remarque.* Lorsque  $I = [a, +\infty)$ , cela revient à avoir :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists Y > 0 \text{ t.q. } \forall x \in X : \left| \int_Y^{+\infty} f(x, t) dt \right| < \varepsilon.$$

Lorsque  $I = [a, b]$ , avec  $a < b < +\infty$ , cela revient à avoir :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta \in (0, b - a) \text{ t.q. } \forall x \in X : \left| \int_{b-\delta}^b f(x, t) dt \right| < \varepsilon.$$

Dans l'exemple 3.3.1,  $f(x, t) = x \exp(-xt)$ ,  $X = I = \mathbb{R}^+$ , on pouvait dire :

$$\int_Y^{+\infty} f(x, t) dt = \begin{cases} -\exp(-xt) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\sup_{x \in X} \left| \int_Y^{+\infty} f(x, t) dt \right| = 1.$$

On en déduit que l'intégrale de  $t \mapsto x \exp(-xt)$  n'est pas convergente uniformément sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Théorème 3.9.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique,  $I \subset \mathbb{R}$ , un intervalle non-vidé. Soit  $f : X \times I \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$ . On suppose que l'intégrale de  $t \mapsto f(x, t)$  converge sur  $I$  uniformément sur  $X$ . Alors la fonction  $F : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est continue sur  $X$ .

Démonstration. Soit  $([a_n, b_n])_n$ , une suite exhaustive de segments de  $I$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$F_n : X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_{a_n}^{b_n} f(x, t) dt.$$

On observe que ces  $F_n$  sont continues par le Théorème 3.2 car  $[a_n, b_n]$  est un segment fixe (compact) et  $f \in C^0(X \times I, \mathbb{R})$  par hypothèse.

Prenons,  $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $x \in X$ . Calculons :

$$\begin{aligned} F_{n+p}(x) - F_n(x) &= \int_{a_{n+p}}^{b_{n+p}} f(x, t) dt - \int_{a_n}^{b_n} f(x, t) dt \\ &= \int_{a_{n+p}}^{b_{n+p}} f(x, t) dt - \int_I f(x, t) dt + \int_I f(x, t) dt - \int_{a_n}^{b_n} f(x, t) dt. \end{aligned}$$

Pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tel que pour  $n, p \in \mathbb{N}$  et  $x \in X$ , par continuité des  $F_n$  et puisque  $[a_n, b_n] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I$ , on peut dire :

$$|F_{n+p}(x) - F_n(x)| \leq \left| \int_{a_{n+p}}^{b_{n+p}} f(x, t) dt - \int_I f(x, t) dt \right| + \left| \int_I f(x, t) dt - \int_{a_n}^{b_n} f(x, t) dt \right| \leq 2\varepsilon.$$

La suite  $(F_n)_n$  est donc uniformément de Cauchy, on en déduit qu'elle converge uniformément sur  $X$ . Sa limite simple (limite de convergence simple) étant  $F$ , il vient que  $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ .  $\square$



**Théorème 3.10.** Soient  $X \subset \mathbb{R}^d$ , un ouvert non-vide,  $I \subset \mathbb{R}$ , un intervalle non-vide, et  $f : X \times I \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$  telle que pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $f$  admet une dérivée partielle continue par rapport à  $x_i$  pour tout point de  $X \times I$ . Si l'intégrale sur  $I$  de  $t \mapsto f(x, t)$  converge uniformément sur  $X$  et si pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , l'intégrale sur  $I$  de  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)$  converge uniformément sur  $X$ , alors la fonction définie par :

$$F : X \times \mathbb{R} : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$$

est de classe  $C^1$  sur  $X$ , et on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) dt.$$

Démonstration. EXERCICE. □

### 3.3.3 Théorème de Fubini

**Théorème 3.11** (Théorème de Fubini, version CDI 1). Soit  $f : [\alpha, \beta] \times [a, b] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$ . Les fonctions :

$$\begin{cases} F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt \\ G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \int_\alpha^\beta f(x, t) dx \end{cases}$$

sont continues sur leur segment de définition, et on a :

$$\int_\alpha^\beta F(x) dx = \int_a^b G(t) dt.$$

Démonstration. Par la Proposition 3.2, on sait que  $F, G$  sont continues sur leur segment de définition. On pose :

$$\begin{cases} H_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} : X \mapsto \int_\alpha^X F(x) dx \\ H_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} : X \mapsto \int_a^X \int_\alpha^\beta f(x, t) dx dt \end{cases}$$

Par CDI 1, on sait que  $H_1 \in C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R})$  avec  $H_1'(x) = F(x)$ . Par la Proposition 3.3, on trouve  $H_2 \in C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R})$  avec  $H_2'(X) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} \int_\alpha^X f(x, t) dx dt = \int_a^b f(X, t) dt = F(X)$ .

On en déduit  $H_1'(x) = H_2'(x)$ , ou encore  $H_1'(x) - H_2'(x) = 0$ , ce qui indique que la fonction  $H_1 - H_2$  est constante sur le segment  $[\alpha, \beta]$ . De plus, on trouve :

$$H_1(\alpha) = \int_\alpha^\alpha F(x) dx = 0 = \int_a^b 0 dt = H_2(\alpha).$$

On a donc  $H_1 - H_2 = 0$ , ou encore  $H_1 = H_2$  sur  $[\alpha, \beta]$ . En particulier,  $H_1(\beta) = H_2(\beta)$ , ce qui est précisément :

$$\int_\alpha^\beta F(x) dx = H_1(\beta) = H_2(\beta) = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(x, t) dx dt = \int_a^b G(t) dt.$$

□

**Théorème 3.12** (Théorème de Fubini, version CDI 2). Soient  $[\alpha, \beta]$ , un segment,  $I \subset \mathbb{R}$ , un intervalle non-vide, et  $f : [\alpha, \beta] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$  telle que l'intégrale sur  $I$  de  $t \mapsto f(x, t)$  converge uniformément sur  $[\alpha, \beta]$ . Alors :

1. la fonction  $F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est continue sur  $[\alpha, \beta]$  ;
2. la fonction  $G : I \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \int_\alpha^\beta f(x, t) dx$  est continue sur  $I$  ;
3.  $G$  est d'intégrale convergente sur  $I$ .

De plus, on a :

$$\int_\alpha^\beta F(x) dx = \int_I G(t) dt.$$

*Démonstration.*  $F$  et  $G$  sont continues sur  $[\alpha, \beta]$  par la Proposition 3.2. Fixons  $\varepsilon > 0$ . Soit  $([a_n, b_n])_n$  une suite exhaustive de segments de  $I$ . Par convergence sur  $I$  uniforme sur  $[\alpha, \beta]$  de l'intégrale de  $t \mapsto f(x, t)$ , il existe  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N_\varepsilon : \forall x \in [\alpha, \beta] : \left| \int_{a_n}^{b_n} f(x, t) dt - \int_I f(x, t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}.$$

On en déduit :

$$\left| \int_\alpha^\beta \int_{a_n}^{b_n} f(x, t) dt dx - \int_\alpha^\beta \int_I f(x, t) dt dx \right| \leq \int_\alpha^\beta \left| \int_{a_n}^{b_n} f(x, t) dt - \int_I f(x, t) dt \right| dx \leq (\beta - \alpha) \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} = \varepsilon.$$

Par le théorème 3.12, on peut écrire :

$$\int_\alpha^\beta \int_{a_n}^{b_n} f(x, t) dt dx = \int_{a_n}^{b_n} \int_\alpha^\beta f(x, t) dx dt.$$

Prenons alors  $n \geq N_\varepsilon$ , on observe :

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq \left| \int_\alpha^\beta \int_{a_n}^{b_n} f(x, t) dt dx - \int_\alpha^\beta \int_I f(x, t) dt dx \right| = \left| \int_{a_n}^{b_n} \int_\alpha^\beta f(x, t) dx dt - \int_\alpha^\beta \int_I f(x, t) dt dx \right| \\ &= \left| \int_{a_n}^{b_n} G(t) dt - \int_\alpha^\beta F(x) dx \right|. \end{aligned}$$

Cela fournit la convergence de l'intégrale de  $G$  sur  $I$ , et le fait que :

$$\int_I G(t) dt = \int_\alpha^\beta F(x) dx.$$

□

### 3.3.4 Critères de convergence uniforme d'intégrales

**Théorème 3.13** (Équivalent du critère de Weierstrass des séries sur les intégrales). Soient  $X \neq \emptyset$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ , un intervalle non-vide, et  $f : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in X$ , on a  $t \mapsto f(x, t)$   $R$ -int sur tout segment de  $I$ . On suppose qu'il existe une fonction  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  abs-int sur  $I$  telle que :

$$\forall (x, t) \in X \times I : |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Alors l'intégrale de  $t \mapsto f(x, t)$  converge sur  $I$  uniformément sur  $X$ .

**Démonstration.** Fixons  $x \in X$ . La fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est abs-int sur  $I$  par le critère de comparaison avec  $\varphi$  (Proposition 2.21). Puisque  $\varphi$  est abs-int sur  $I$ , pour  $\varepsilon > 0$  fixé, il existe  $K_\varepsilon \subset I$  segment tel que :

$$\forall K \subset I \text{ segment} : \left( K_\varepsilon \subset K \Rightarrow \left| \int_K f(x, t) dt - \int_I f(x, t) dt \right| \leq \varepsilon \right).$$

Pour  $x \in X, K \subset I$  segment t.q.  $K_\varepsilon \subset K$ , écrivons :

$$\begin{aligned} \int_{K_\varepsilon} f(x, t) dt - \int_I f(x, t) dt &= \left| \int_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon} f(x, t) dt - \int_I f(x, t) dt \right| = \left| \int_{\inf I}^{a_\varepsilon} f(x, t) dt + \int_{b_\varepsilon}^{\sup I} f(x, t) dt \right| \\ &\leq \int_{\inf I}^{a_\varepsilon} |f(x, t)| dt + \int_{b_\varepsilon}^{\sup I} |f(x, t)| dt \leq \int_{\inf I}^{a_\varepsilon} \varphi(t) dt + \int_{b_\varepsilon}^{\sup I} \varphi(t) dt \\ &= \left| \int_I \varphi(t) dt - \int_{K_\varepsilon} \varphi(t) dt \right| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

par choix de  $K_\varepsilon$ . On a donc bien la convergence sur  $I$  uniforme sur  $X$  de  $t \mapsto f(x, t)$ .  $\square$

**Théorème 3.14** (Équivalent du critère d'Abel des séries sur les intégrales). Soit  $I = [a, b)$ , où  $a < b \leq +\infty$ . Soient  $X \neq \emptyset$ , et  $I \subset \mathbb{R}$ , un intervalle non-vide, et  $f, g : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :

- $\forall x \in X : t \mapsto f(x, t)$  et  $t \mapsto g(x, t)$  sont  $R$ -int sur tout segment de  $I$ ;
- $\exists M \geq 0, a \in I$  t.q.  $\forall T \in I : \forall x \in X : \left| \int_a^T f(x, t) dt \right| \leq M$ ;
- $t \mapsto g(x, t)$  converge vers 0 en décroissant en  $b^-$  uniformément par rapport à  $x$ .

Alors  $t \mapsto f(x, t)g(x, t)$  est d'intégrale convergente sur  $I$  uniformément sur  $X$ .

**Démonstration.** Soit  $([a_n, b_n])_n$  une suite exhaustive de segments de  $I$ . Puisque  $I = [a, b)$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour  $n \geq N$ , on a  $a_n \equiv a$ . Pour  $x \in X, n, p \in \mathbb{N}$ , écrivons :

$$\int_a^{b_{n+p}} f(x, t)g(x, t) dt - \int_a^{b_n} f(x, t)g(x, t) dt = \int_{b_n}^{b_{n+p}} f(x, t)g(x, t) dt = g(x, b_n) \int_{b_n}^{c_{n,p}(x)} f(x, t) dt,$$

par la seconde formule de la moyenne. On en déduit alors :

$$\left| \int_a^{b_{n+p}} f(x, t)g(x, t) dt - \int_a^{b_n} f(x, t)g(x, t) dt \right| \leq 2g(x, b_n)M.$$

Par hypothèse, on sait que  $g(\cdot, b_n)$  converge vers 0 uniformément par rapport à  $x$ . On sait donc qu'il existe  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tel que pour  $x \in X, n \geq N_\varepsilon$ , on a  $0 \leq g(x, b_n) \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ . Finalement, on en déduit :

$$\forall n \geq N_\varepsilon : \forall n, p \in \mathbb{N} : \forall x \in X : \left| \int_a^{b_{n+p}} f(x, t)g(x, t) dt - \int_a^{b_n} f(x, t)g(x, t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

En faisant tendre  $p \rightarrow +\infty$ , on obtient bien :

$$\forall n \geq N_\varepsilon : \forall x \in X : \left| \int_I f(x, t)g(x, t) dt - \int_a^{b_n} f(x, t)g(x, t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

On en déduit alors que  $t \mapsto f(x, t)g(x, t)$  admet une intégrale convergente.  $\square$

## 3.4 Application à la régularisation et à l'approximation à une dimension

### 3.4.1 Fonctions à support compact

**Définition 3.15.** Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}$  ouvert non-vide,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . On appelle le *support* de  $f$  l'ensemble :

$$\text{supp } f := \text{adh } \{x \in \Omega \text{ t.q. } f(x) \neq 0\}$$

*Remarque.* Le support est le plus petit fermé contenant tous les points où  $f$  ne s'annule pas. De même,  $\Omega \setminus \text{supp } f$  est le plus grand ouvert inclus dans l'ensemble des points de  $\Omega$  où  $f$  s'annule.

**Proposition 3.16.** Il existe une fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , définie positive sur  $\mathbb{R}$ , de support  $[-1, 1]$  et telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1.$$

Démonstration. Soit la fonction  $f$  définie par :

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \exp(-x^{-2}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On observe que  $h$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_0^+$  et  $\mathbb{R}_0^-$ . Également, on a :

$$h^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{3k}} \exp(-x^{-2}),$$

avec  $P_k \in \mathbb{R}[x]$ , et donc les dérivées sont telles que :

$$\forall k \geq 1 : h^{(k)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 = h^{(k)}(0^-)$$

De plus, on a  $\text{supp } h = \mathbb{R}^+$ . Posons alors :

$$\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto h(1-x)h(1+x).$$

$\rho$  est toujours  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et est de support  $[-1, 1]$ . Par positivité de  $\rho$  et par minoration de  $\rho$  par une fonction  $\geq 0$  sur un fermé contenu dans  $[-1, 1]$ , on peut dire que :

$$\alpha := \int_{[-1,1]} \rho(x) dx \geq 0.$$

Il suffit ensuite de poser :

$$\varphi := \frac{\rho}{\alpha}.$$

□

**Corollaire 3.17.** Soit  $\alpha > 0$ . La fonction  $\varphi_\alpha$  définie par :

$$\varphi_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \alpha \varphi(\alpha x)$$

est positive, de support  $\left[-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right]$ , de classe  $C^\infty$ , et d'intégrale valant 1.

### 3.4.2 Produit de convolution

**Proposition 3.18.** Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

- $f$  est  $R$ -int sur tout segment de  $\mathbb{R}$  ;
- $g$  est  $C^0$  sur  $\mathbb{R}$  et à support compact.

Alors, pour tout  $x$  réel, les fonctions :

$$t \mapsto f(x-t)g(t) \quad \text{et} \quad t \mapsto f(t)g(x-t)$$

sont abs-int, et on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt.$$

Démonstration. La fonction  $g$  est de support compact. Donc il existe un segment  $[a, b]$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [a, b] : g(x) = 0.$$

La fonction  $g$  est de plus continue sur un compact, donc bornée par  $M \geq 0$ . On peut alors écrire pour tout  $x, t \in \mathbb{R}$  :

$$|f(x-t)g(t)| \leq M|f(x-t)| I_{[a \leq t \leq b]}.$$

Par comparaison, on en déduit que  $|g(t)f(x-t)|$  est  $R$ -int sur  $\mathbb{R}$ . On sait alors que  $f(x-t)g(t)$  est abs-int sur  $\mathbb{R}$ , et par changement de variable, on trouve :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt$$

□

**Définition 3.19.** On appelle *produit de convolution de  $f$  par  $g$*  la fonction définie par :

$$f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt.$$

**Proposition 3.20.** Soient  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $f : \mathbb{R} \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$ ,  $R$ -int sur tout segment. La fonction  $(f * \varphi_k)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} : (f * \varphi_k)^{(n)} = f * (\varphi_k)^{(n)}.$$

Démonstration. Fixons  $[a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$ . Prenons  $x \in [a, b]$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . On peut écrire :

$$(f * \varphi_k)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi_k(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_k(x-t) dt = \int_{a-\frac{1}{k}}^{b+\frac{1}{k}} f(t)\varphi_k(x-t) dt.$$

On sait que  $t \mapsto f(t)\varphi_k(x-t)$  est de classe  $C^0$  car  $f$  est  $C^0$  par hypothèse, et  $\varphi_k$  est de classe  $C^\infty$ . De plus, on sait que  $t \mapsto f(t)\varphi_k(x-t)$  est dérivable en  $x$ , ce qui donne :

$$\frac{d}{dx}(f(t)\varphi_k(x-t)) \Big|_x = f(t)\varphi'_k(x-t).$$

Par la Proposition 3.3, on sait que  $(f * \varphi_k)$  est de classe  $C^1$ , et on peut écrire :

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{a-\frac{1}{k}}^{b+\frac{1}{k}} f(t) \varphi(x-t) dt \right) = \int_{a-\frac{1}{k}}^{b+\frac{1}{k}} f(t) \varphi'_k(x-t) dt = (f * \varphi'_k)(x).$$

En appliquant le résultat par récurrence, on obtient  $(f * \varphi_k)$  de classe  $C^\infty$  et :

$$(f * \varphi_k)^{(n)}(x) = \left( f * \left( \varphi_k^{(n)} \right) \right)(x).$$

□

**Proposition 3.21.** Soit  $f : \mathbb{R} \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$ . Alors :

$$f * \varphi_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur tout cpt de } \mathbb{R}} f.$$

Démonstration. Fixons  $[a, b]$ , un segment de  $\mathbb{R}$ . Prenons  $x \in [a, b]$  et  $k \geq 1$ , et calculons :

$$(f * \varphi_k)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \varphi_k(t) dt - f(x) \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(t) dt,$$

car  $\varphi_k(t)$  est d'intégrale valant 1 par le Corollaire 3.17. On sait donc :

$$(f * \varphi_k)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(x)) \varphi_k(t) dt.$$

On sait que  $f$  est  $C^0$  sur  $[a-1, b+1] \ni x-t$  par hypothèse. Par le théorème de Heine, on sait que  $f$  est uniformément continue sur  $[a-1, b+1]$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall z_1, z_2 \in [a-1, b+1] : |z_1 - z_2| < \eta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

On observe ensuite :

$$|(f * \varphi_k)(x) - f(x)| = \left| \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} (f(x-t) - f(x)) \varphi_k(t) dt \right|.$$

Pour  $k$  tel que  $\frac{1}{k} < \eta$ , on a :

$$\forall t \in \left( -\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) : |f(x) - f(x-t)| < \varepsilon.$$

Dès lors, pour de tels valeurs de  $k$ , on trouve :

$$|(f * \varphi_k)(x) - f(x)| = \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} |f(x, t) - f(x)| \varphi_k(t) dt \leq \varepsilon \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \varphi_k(t) dt = \varepsilon.$$

Ainsi, quel que soit  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , on sait :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists K_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall k \geq K_\varepsilon : \sup_{x \in [a, b]} |(f * \varphi_k)(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

□

**Proposition 3.22.** Soit  $f : \mathbb{R} \xrightarrow{C^k} \mathbb{R}$ . Alors :

$$\forall s \in \llbracket 0, K \rrbracket : (f * \varphi_k)^{(s)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur tout cpct de } \mathbb{R}} f^{(s)}.$$

*Démonstration.* Remarquons par un raisonnement similaire à la Proposition 3.20 que  $(f * \varphi_k)^{(s)} = f^{(s)} * \varphi_k$ , et appliquons la Proposition 3.21.  $\square$

**Théorème 3.23.** Soit  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , un segment et soit  $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ . Alors :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists P \in \mathbb{R}[x] \text{ t.q. } \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

*Démonstration.* Premièrement, on étend  $f$  sur  $[a-1, b+1]$  en y ajoutant les segments définis par les couples  $((a-1, 0), (a, f(a)))$  et  $((b, f(b)), (b+1, 0))$ . Ensuite, par translation et homothétie, on envoie  $f$  sur le segment  $[\pm \frac{1}{2}]$ .

Pour  $k \geq 1$ , on pose :

$$g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} (1-x^2)^k & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On remarque que  $g_k \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  à support compact et  $\int_{\mathbb{R}} g_k(x) dx =: \alpha_k \geq 0$ .

On peut alors définir :

$$h_k := \frac{g_k}{\alpha_k}.$$

$h_k$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , à support compact et d'intégrale valant 1. Étant donné que pour  $x \in [-1, 1]$ , on a  $x^2 \leq x$ , et donc  $-x^2 \geq -x$ , on peut écrire :

$$\alpha_k = \int_{-1}^1 (1-x^2)^k dx = 2 \int_0^1 (1-x^2)^k dx \geq 2 \int_0^1 (1-x)^k dx = \frac{2}{k+1}.$$

De plus :

$$\forall \delta \in (0, 1) : h_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } [-1, 1] \setminus [-\delta, \delta]} 0$$

En effet, pour  $|x| \in [\delta, 1]$ , on a :  $x^2 \in [\delta^2, 1] = [\delta^2, 1] \supset [\delta, 1]$ , et donc  $1-x^2 \in [0, 1-\delta^2]$ . Et donc :

$$h_k(x) = \frac{(1-x^2)^k}{\alpha_k} \leq \frac{(1-\delta^2)^k}{\alpha_k} \leq \frac{k+1}{2} (1-\delta^2)^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0,$$

avec le majorant  $\frac{k+1}{2} (1-\delta^2)^k$  ne dépendant pas de  $x$ . La convergence est donc uniforme.

Pour  $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^*$ , posons :

$$f_k(x) = f * h_k(x).$$

Observons que si  $x \in [\pm \frac{1}{2}]$ , alors :

$$\forall t \in \left[\pm \frac{1}{2}\right] : (x-t) \in [-1, 1],$$

et donc :

$$\forall t, x \in \left[ \pm \frac{1}{2} \right] : h_k(x-t) = \frac{(1-(x-t)^2)^k}{\alpha_k} = \sum_{p=0}^{2k} a_{kp}(t) x^p,$$

avec les  $a_{kp}(t)$  venant des coefficients du binôme de Newton.

Ainsi,  $f_k|_{\left[ \pm \frac{1}{2} \right]}$  est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à  $2k$ .

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et à support dans  $\left[ \pm \frac{1}{2} \right]$ , donc elle est :

- bornée par  $M \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$  ;
- uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ <sup>1</sup>.

Fixons  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Pour  $x \in \left[ \pm \frac{1}{2} \right]$  et  $k \geq 1$ , écrivons :

$$f_k(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) h_k(t) dt - f(x) \int_{\mathbb{R}} h_k(t) dt = \int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(x)) h_k(t) dt.$$

En prenant la valeur absolue, on trouve :

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f(x)| &\leq \int_{-\infty}^{-\eta} |f(x-t) - f(x)| h_k(t) dt + \int_{-\eta}^{\eta} |f(x-t) - f(x)| h_k(t) dt + \int_{\eta}^{+\infty} |f(x-t) - f(x)| h_k(t) dt \\ &= \int_{-1}^{-\eta} |f(x-t) - f(x)| h_k(t) dt + \int_{-\eta}^{\eta} |f(x-t) - f(x)| h_k(t) dt + \int_{\eta}^1 |f(x-t) - f(x)| h_k(t) dt \\ &\leq 2M \|h_k\|_{\infty, [-1, -\eta]} + \varepsilon \int_{-\eta}^{\eta} h_k(t) dt + 2M \|h_k\|_{\infty, [\eta, 1]} \\ &\leq 4M \|h_k\|_{\infty, [\eta, 1]} + \varepsilon, \end{aligned}$$

et le majorant ne dépend pas de  $x \in \left[ \pm \frac{1}{2} \right]$ .

Dès lors, en choisissant  $k_\varepsilon$  tel que  $\forall k \geq k_\varepsilon : \|h_k\|_{\infty, [\eta, 1]} \leq \frac{\varepsilon}{4M}$ , alors il vient que :

$$\forall k \geq k_\varepsilon : \sup_{x \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]} |f_k(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

□

---

1.  $\sim$  théorème de Heine.



## Chapitre 4

# Critère de compacité en dimension infinie : le théorème d'Arzela-Ascoli

### 4.1 Rappels de topologie métrique

#### 4.1.1 Densité et séparabilité

**Définition 4.1.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique, et soit  $A \subseteq X$ . On appelle *adhérence* de  $A$  l'ensemble :

$$\text{adh } A := \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ F \supset A}} F.$$

$\text{adh } A$  est, par construction, le plus petit (au sens de l'inclusion) fermé de  $X$  qui contient  $A$ .

*Remarque.*

- $x \in X$  est dans  $\text{adh } A$  si et seulement si  $\forall \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ;
- l'ensemble  $\text{adh } A$  peut également être défini par l'ensemble des limites de suites de  $A$  qui convergent dans  $X$ .

**Définition 4.2.** Soient  $X \neq \emptyset$  et  $A \subseteq X$ . On dit que  $A$  est *dense* dans  $X$  lorsque  $\text{adh } A = X$ .

**Définition 4.3.** L'ensemble  $A$  est dit *dénombrable* lorsqu'il existe  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$  bijective.

**Définition 4.4.** Soit  $(x_n)_n$  une suite de  $X$ . On dit que  $x^*$  est une *valeur d'adhérence* de  $(x_n)$  lorsqu'il existe une sous-suite  $(x_{\psi(n)})_n$  de  $(x_n)$  qui converge en  $x^*$ .

**Définition 4.5.** Une suite  $(x_n)_n$  est dite *dense dans*  $X$  lorsque l'ensemble de ses valeurs d'adhérence dans  $X$  est  $X$ .

**Définition 4.6.** Un espace métrique  $(X, d)$  est dit *séparable* lorsqu'il possède une suite dense.

**Proposition 4.7.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Il est séparable si et seulement si il admet une partie dense finie ou dénombrable

Démonstration. Soit  $(x_n)_n$  une suite dense dans  $X$ . La partie  $A$  définie par :

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\} = \{x_n \text{ t.q. } n \in \mathbb{N}\}$$

est finie ou dénombrable, dense dans  $X$  par définition.

Soit maintenant  $A$  dense dans  $X$ . Différencions les cas où  $A$  est finie et où  $A$  est dénombrable.

- si  $A = \{x_1, \dots, x_N\}$  est finie, alors  $X = \{x_0, \dots, x_N\} = A$ , et la suite  $(x_0, \dots, x_N, x_0, \dots, x_N, x_0, \dots)$  est dense dans  $X$ ;
- si  $A = \{x_1, \dots, x_N, \dots\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$  est dénombrable, alors la suite  $(x_0, x_0, x_1, x_0, x_1, x_2, x_0, \dots)$  est dense dans  $X$ .

□

*Exemple 4.1.*

- $A = \mathbb{Q}$  est dénombrable (et dense) dans  $\mathbb{R}$ , et donc  $(\mathbb{R}, | \cdot |)$  est séparable;
- $A = \mathbb{Q}^d$  est dénombrable (et dense) dans  $\mathbb{R}^d$ , et donc  $(\mathbb{R}, \| \cdot \|)$  est séparable<sup>1</sup>.

**Définition 4.8.** Soit  $X$  dénombrable. On appelle *énumération* toute bijection  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{N}$

**Proposition 4.9.** Soit  $A \subset \mathbb{R}^d$ . Alors  $A$  est séparable.

*Démonstration.* Montrons qu'il existe une partie dense dans  $A$  finie ou dénombrable. Soit  $(x_q)_{q \in \mathbb{N}}$ , une énumération de  $\mathbb{Q}^d$ . Pour  $n \geq 1$ , on a :

$$A \subset \bigcup_{q \in \mathbb{N}} B(x_q, n^{-1}) \subset \mathbb{R}^d,$$

par densité de  $\mathbb{Q}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

Pour  $n \geq 1$ , notons

$$C_n := \left\{ q \in \mathbb{N} \text{ t.q. } B(x_q, n^{-1}) \cap A \neq \emptyset \right\} \subseteq \mathbb{N}.$$

On sait donc que  $C_n$  est fini ou dénombrable. Pour tout  $n \geq 1$ , et  $q \in C_n$ , on peut choisir :

$$y_{n,q} \in B(x_q, n^{-1}) \cap A.$$

Pour  $n \geq 1$ , on pose alors :

$$X_n := \bigcup_{q \in C_n} \{y_{n,q}\} \neq \emptyset,$$

fini ou dénombrable, et donc :

$$X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

est non-nul, fini ou dénombrable.

Il reste à montrer que  $X$  est dense dans  $A$ .

Soient  $x \in A$  et  $\varepsilon > 0$  fixés. Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ . Ainsi :

$$x \in A \subset \bigcup_{q \in \mathbb{N}} B(x_q, n_0^{-1}).$$

Donc, il existe  $q_0 \in \mathbb{N}$  t.q.  $\|x - x_{q_0}\| < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ . De plus, on peut dire que  $y_{n_0, q_0} \in X_{n_0} \subset X$ . De plus, pour  $y_{n,q} \in X$  :

$$\|x - y_{n,q}\| \leq \|x - x_{q_0}\| + \|x_{q_0} - y_{n,q}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

□

1. La norme n'est pas précisée ici car dans  $\mathbb{R}^n$ , toutes les normes sont équivalentes.

## 4.2 L'espace $C_b^0(X, \mathbb{R})$

**Définition 4.10.** Soit  $X \subset \mathbb{R}^d$  non-nul. On définit :

$$C_b^0(X, \mathbb{R}) := \{f \in C^0(X, \mathbb{R}) \text{ t.q. } f \text{ est bornée}\}.$$

**Proposition 4.11.**

1.  $(C_b^0(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace vectoriel normé ;
2.  $C_b^0(X, \mathbb{R})$  est un fermé de  $(B(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  ;
3.  $C_b^0(X, \mathbb{R})$  est complet.

Démonstration.

1. EXERCICE.
2. Soit  $f_n \in C_b^0(X, \mathbb{R})$  t.q. :

$$\exists f \in B(X, \mathbb{R}) \text{ t.q. } f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_\infty} f.$$

$f$  est limite sur  $X$  d'une suite de fonctions continues sur  $X$ . Donc  $f \in C_b^0(X, \mathbb{R})$ , et donc  $C_b^0(X, \mathbb{R})$  est fermé dans  $B(X, \mathbb{R})$ .

3.  $C_b^0(X, \mathbb{R})$  est fermé dans  $(B(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  qui est complet, donc  $C_b^0(X, \mathbb{R})$  est complet.

□

**Proposition 4.12.** Soit  $X \subset \mathbb{R}^d$ . Si  $X$  est compact, alors  $C^0(X, \mathbb{R}) = C_b^0(X, \mathbb{R})$ .

Démonstration. On sait que  $C_b^0(X, \mathbb{R}) \subseteq C^0(X, \mathbb{R})$  pour tout ensemble  $X$ . Prenons  $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ . Une fonction continue sur un compact est bornée, du coup  $f \in C_b^0(X, \mathbb{R})$ , et donc  $C^0(X, \mathbb{R}) \subseteq C_b^0(X, \mathbb{R})$ . □

**Définition 4.13.** On note  $\mathcal{P}([a, b])$  l'ensemble des fonctions polynômiales définies sur  $[a, b]$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 4.14.**

1.  $\mathcal{P}([a, b]) \subset C^0([a, b], \mathbb{R}) = C_b^0([a, b], \mathbb{R})$  ;
2.  $\mathcal{P}([a, b])$  est dense dans  $(C^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ .

Démonstration.

1. EXERCICE.
2. Weierstrass.

□

**Corollaire 4.15.**  $(C^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  est séparable.

Démonstration.  $\mathbb{Q}[x]$  est dénombrable et dense dans  $(C^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ . En effet, si  $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$  et  $\varepsilon > 0$  sont fixés, alors par Weierstrass, il existe  $P \in \mathbb{R}[x]$  tel que :

$$\|f - P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On peut écrire  $P$  sous la forme :

$$P = \sum_{k=0}^d a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R}.$$

Par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ , il existe  $b_0, \dots, b_k \in \mathbb{Q}$  tels que :

$$\max_{i \in \llbracket 0, d \rrbracket} |a_i - b_i| \leq \frac{\varepsilon}{2 \sum_{x \in [a, b]} \sum_{\gamma=0}^d |x|^\gamma}.$$

Posons :

$$Q := \sum_{k=0}^d b_k x^k,$$

le polynôme associé à ces coefficients. On trouve alors :

$$\begin{aligned} \|P - Q\|_\infty &\leq \sum_{x \in [a, b]} |a_k - b_k| |x|^k \leq \sup_{x \in [a, b]} \sum_{k=0}^d \frac{\varepsilon}{2 \sup_{x' \in [a, b]} \sum_{\gamma=0}^d |x'|^\gamma} |x|^k \\ &= \frac{\varepsilon}{2 \sup_{x \in [a, b]} \sum_{k=0}^d |x|^k} \sup_{x \in [a, b]} \sum_{k=0}^d |x|^k = \varepsilon. \end{aligned}$$

Et finalement, on a :

$$\|f - Q\|_\infty \leq \|f - P\|_\infty + \|Q - P\|_\infty \leq \varepsilon.$$

□

## 4.3 Théorème d'Arzela-Ascoli

### 4.3.1 Motivation

Soit  $X \subset \mathbb{R}^d$  non-vidé.  $X$  est compact si et seulement si il est fermé et borné.

Dans l'espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|) = (C^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ , la suite :

$$f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^k$$

est bornée car pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $\|f_k\|_\infty \leq 1$ . Cependant, elle n'a pas de sous-suite convergente dans  $(C^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ . En effet, s'il existe  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante,  $f \in C^0$  telle que :

$$f_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_\infty} f,$$

alors  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto I_{[x=1]} \notin C^0([0, 1])$ , ce qui est une contradiction.

L'objectif du théorème d'Arzela-Ascoli est de donner un critère (condition suffisante) pour qu'une partie de  $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  soit d'adhérence compacte.

### 4.3.2 Énoncé et démonstration

**Définition 4.16.** Soient  $X \subset \mathbb{R}^d$  non-vide,  $B \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ , une partie de l'ensemble des fonctions  $X \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $B$  est *équicontinue* sur  $X$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall f \in B : \forall x, y \in X : (\|x - y\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

*Remarque.* Lorsque  $X = [0, 1]$  et  $B \subset (C^1(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ , si  $\exists M \geq 0$  t.q.  $\forall f \in B : \|f'\|_\infty < M$ , alors  $B$  est équicontinue sur  $X$ . En effet :

$$\forall f \in B : \forall x, y \in X : |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|,$$

par le théorème des accroissements finis. Dès lors,  $\eta = \frac{\varepsilon}{M}$  convient.

**Théorème 4.17** (Théorème d'Arzela-Ascoli). Soient  $A \subset \mathbb{R}^d$  compact et  $B \subset (C^0(A, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  non-nul. Si  $B$  est bornée (pour  $\|\cdot\|_{\infty, A}$ ) et équicontinue, alors  $B$  est d'adhérence compacte.

*Remarque.* Cela amène que pour toute suite de points de  $B$ , on peut extraire une sous-suite qui converge dans  $\text{adh } B \subset C^0(A, \mathbb{R})$ .

Démonstration.  $A \subset \mathbb{R}^d$  est compacte et donc séparable. Soit  $C$  une partie dénombrable ou finie dense dans  $A$ .

- Si  $C$  est finie, alors  $C = \{x_1, \dots, x_k\}$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $A = C$ . Soit  $(f_n)_n \subset B$ . La suite  $(f_n(x_1))_n \subset \mathbb{R}$  est bornée (car  $B$  est bornée) et admet une sous-suite  $(f_{\varphi_1(n)}(x_1))_n \subset \mathbb{R}$  convergente dans  $\mathbb{R}$ . La suite  $(f_{\varphi_1(n)}(x_2))_n \subset \mathbb{R}$  est bornée donc admet une sous-suite  $(f_{(\varphi_1 \circ \varphi_2)(n)}(x_2))$  convergente dans  $\mathbb{R}$ . En réitérant jusqu'à  $k$ , on trouve  $\varphi_1, \dots, \varphi_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissantes et il existe  $f(x_1), \dots, f(x_k) \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket : f_{(\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k)(n)}(x_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_i).$$

On a alors  $f \in C^0(A, \mathbb{R})$ , et on a bien :

$$\left\| f_{(\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k)(n)} - f \right\|_{\infty, A} = \max_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} \left| f_{(\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k)(n)}(x_i) - f(x_i) \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- Si  $C$  est dénombrable, on pose  $(x_n)$  une énumération de  $C$ . Soit  $(f_n) \subset B$ . La suite  $(f_n(x_0))$  est bornée dans  $\mathbb{R}$  car  $B$  est bornée et donc admet une sous-suite convergente, que l'on note  $(f_n^{(0)}(x_0))_n$ . Cette sous-suite est réelle et bornée donc admet une sous-suite convergente que l'on note  $(f_n^{(1)}(x_1))_n$ . En réitérant, on trouve une suite d'extractions  $(f_n^{(k)})_k$  telle que  $f_n^{(k)} = f_{\varphi_k(n)}^{(k-1)}$ , avec  $\varphi_i$  strictement croissante pour  $i \geq 0$ . Pour tout  $k$  naturel, on pose :

$$g_k = f_n^{(k)}.$$

$(g_k)_k$  est une extraction diagonale de Cantor. De plus, la suite  $(g_k)_k$  est une suite extraite de  $(f_n)_n$ . Pour tout  $p$  naturel, la suite  $(g_k(x_p))_k$  converge donc vers  $f(x_p)$  car :

$$\forall \ell \geq p : g_\ell(x_p) = f_\ell^{(\ell)}(x_p),$$

et donc  $(g_k(x_p))_k$  est extraite de  $(f_k^{(p)}(x_p))_k$  avec :

$$f_k^{(p)}(x_p) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f(x_p).$$

Montrons maintenant que la suite  $(g_k)_k$  est uniformément de Cauchy sur  $A$ . Fixons  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\eta > 0$  le module d'équicontinuité de  $B$  pour  $\varepsilon$ . Écrivons :

$$A \subset \bigcup_{y \in A} B \left( y, \frac{\eta}{2} \right).$$

Par compacité de  $A$ , on sait qu'il existe un recouvrement fini, et donc  $q \in \mathbb{N}$  et  $y_1, \dots, y_q \in A$  tels que :

$$A \subset \bigcup_{j=1}^q B \left( y_j, \frac{\eta}{2} \right).$$

Par définition de  $C$  (séparabilité de  $A$ ), on sait :

$$\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket : \exists x_{p_j} \text{ t.q. } \|x_{p_j} - y_j\| \leq \frac{\eta}{2}.$$

Les suites  $(g_k(x_{p_i}))_k$  convergent dans  $\mathbb{R}$  pour  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$  et donc de Cauchy. Puisqu'elles sont en nombre fini, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall m, n \geq N : |g_m(x_{p_j}) - g_n(x_{p_j})| \leq \varepsilon.$$

Soit  $x \in A$ . Par compacité de  $A$ , il existe  $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$  tel que  $\|x - y_j\| \leq \frac{\eta}{2}$ , et :

$$\|x - x_{p_j}\| \leq \|x - y_j\| + \|y_j - x_{p_j}\| \leq 2\frac{\eta}{2} = \eta.$$

Pour  $m, n > N$ , on trouve donc :

$$|g_m(x) - g_n(x)| \leq |g_m(x) - g_m(x_{p_j})| + |g_m(x_{p_j}) - g_n(x_{p_j})| + |g_n(x_{p_j}) - g_n(x)| \leq 3\varepsilon,$$

par Cauchy et équicontinuité. On en déduit que la suite  $(g_n)_n$  est de Cauchy dans  $(C^0(A, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ .

□

**Deuxième partie**

# **Équations différentielles**

## Chapitre 5

# Conditions suffisantes d'existence et d'unicité de solutions

### 5.1 Équations différentielles - forme normale - réduction à l'ordre 1

#### 5.1.1 Généralités

**Définition 5.1.** On appelle *équation différentielle* toute relation de la forme :

$$F(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(p)}(t)) = 0 \quad t \in I, \quad (*)$$

où :

- $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  ;
- $F : I \times \Omega_0 \times \Omega_1 \times \dots \times \Omega_p \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction ;
- $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_p$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^d$ .

$y : J \subset I \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une fonction inconnue définie sur un intervalle  $J$  inconnu également et  $p$  fois dérivable sur  $J$ , telle que :

$$\forall t \in J : \forall j \in \llbracket 0, p \rrbracket : y^{(j)}(t) \in \Omega_j,$$

et dont les dérivées sont liées par l'équation (\*\*).

**Définition 5.2.** Une équation différentielle est dite *résoluble* lorsqu'elle peut être mise de manière équivalente sous forme normale :

$$y^{(p)}(t) - f(t, y(t), \dots, y^{(p-1)}(t)) = 0, \quad (\#)$$

où  $f : I \times \Omega_0 \times \dots \times \Omega_{p-1} \rightarrow \Omega_p$ .

#### 5.1.2 Réduction à l'ordre 1

*Remarque.* Une équation sous forme normale (#) est équivalente à l'équation d'ordre 1  $Y'(t) - G(t, Y(t)) = 0$ , où :

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y^{(p-1)}(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G(t, Y(t)) = \begin{bmatrix} Y_0(t) \\ Y_1(t) \\ \vdots \\ Y_{p-1}(t) \\ f(t, Y_0(t), \dots, Y_{p-1}(t)) \end{bmatrix}.$$



*Remarque.* Toute équation différentielle résoluble étant équivalente à une équation différentielle d'ordre 1, on étudiera uniquement ces dernières, et cela permettra de résoudre les autres, sans perte de généralité.

### 5.1.3 Problème de Cauchy

**Définition 5.3.** On se donne un équation différentielle (ED) d'ordre 1 résoluble :

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$

avec :

- $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  ;
- $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , un ouvert.

On appelle *donnée de Cauchy* tout couple  $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ .

On appelle *problème de Cauchy* le fait de chercher  $J \subset I$  un intervalle et  $y : J \rightarrow \mathbb{R}^d$  tels que :

$$\begin{cases} \forall t \in J : y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{PC})$$

### 5.1.4 Formulation intégrale

**Proposition 5.4.** Si  $f \in C^0(I \times \Omega, \mathbb{R}^d)$ , alors  $y : J \xrightarrow{C^0} \Omega$ , avec  $t_0 \in J$  est solution de (PC) si et seulement si :

$$\forall t \in J : y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds. \quad (5.1)$$

Démonstration. Supposons d'abord  $y$  solution de (PC). Alors :

$$\forall t \in J : y'(t) = f(t, y(t)).$$

Par dérivabilité de  $y$  sur  $J$ , on sait que  $y \in C^0(J)$ . Puisque  $y$  est à valeurs dans  $\Omega$ , on sait que  $f \in C^0(I \times \Omega)$  avec  $J \subset I$ . La fonction  $t \mapsto f(t, y(t))$  est donc continue sur  $J$ . Ainsi,  $y'$  est continue sur  $J$ , et donc  $y \in C^1(J, \mathbb{R}^d)$ , et on a :

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t y'(t) \, dt,$$

ou encore :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds.$$

Maintenant, supposons que  $y$  vérifie (5.1). Puisque  $y \in C^0(J, \Omega)$ , la fonction  $s \mapsto f(s, y(s))$  est continue sur  $J$ . Elle est donc intégrable, et  $t \mapsto \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds$  est de classe  $C^1$  sur  $J$ . On a alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds = f(t, y(t)).$$

Par hypothèse, on a :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds.$$

Dès lors, en dérivant terme à terme, on trouve :

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$

et on a de plus :

$$y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, y(s)) ds = y_0 + 0 = y_0.$$

$y$  est donc bien solution de (PC). □

## 5.2 Existence et unicité locales

### 5.2.1 Théorème du point fixe de Banach

**Définition 5.5.** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques.  $f : X \rightarrow Y$  est dite *contractante* lorsque :

$$\exists k \in [0, 1) \text{ t.q. } \forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y).$$

**Théorème 5.6** (Théorème du point fixe de Banach). Soient  $(X, d)$  un espace métrique,  $A \subset X$  une partie complète non-vide et  $f : A \rightarrow A$  contractante sur  $A$ . Alors :

- $f$  admet un unique point fixe  $a^* \in A$ ;
- $\forall x_0 \in A$ , la suite  $x_n = f(x_{n-1})$  converge dans  $A$  en  $a^*$ .

Démonstration.

- Montrons d'abord l'existence de  $a^*$ . Fixons  $x_0 \in A$ . La suite  $x_n = f(x_{n-1})$  est bien définie dans  $A$  (car  $f(A) \subseteq A$ ). Observons que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n = f^n(x_0).$$

Soient  $n, p \in \mathbb{N}$ . On calcule :

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq k^{p-1} d(x_{n+1}, x_n) + k^{p-2} d(x_{n+1}, x_n) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \frac{1 - k^p}{1 - k} d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{1}{1 - k} d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \frac{1}{1 - k} k^n d(x_1, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

et ce, indépendamment de  $p$ . La suite  $(x_n)_n$  est donc de Cauchy, et par complétude de  $A$  (hypothèse), on sait que  $(x_n)_n$  converge dans  $A$ . Appelons cette limite  $a^*$ . On a alors :

$$a^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{n-1}) = f(a^*).$$

Le point  $a^*$  est donc un point fixe.

Montrons ensuite l'unicité de ce point fixe. Soient  $x, y \in A$  deux points fixes de  $f$ . On sait alors :

$$x = f(x) \quad \text{et} \quad y = f(y).$$

Or, puisque  $f$  est contractante, on sait :

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y),$$

ou encore :

$$(1 - k)d(x, y) \leq 0.$$

Or on sait que  $1 - k \geq 0$ . Donc on a  $d(x, y) \leq 0$ , et donc  $d(x, y) = 0$ , ce qui par séparabilité des points d'une métrique implique  $x = y$ .

- On a vu que  $x_n = f(x_{n-1})$  était convergente pour toute valeur initiale de  $x_0$ . Or, on sait également que le point fixe de  $f$  est unique, et donc pour tout  $x_0$ , la suite  $x_n = f(x_{n-1})$  converge vers  $a^*$  cet unique point fixe.

□

**Corollaire 5.7.** Soit  $A$  une partie non-vide et complète d'un espace métrique. Soit  $f : A \rightarrow A$ . Si  $f$  admet une puissance contractante, alors  $f$  admet un unique point fixe  $a^*$  dans  $A$ .

Démonstration. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^n$  est contractante. Par le théorème de Banach, on sait que  $f^n$  admet un unique point fixe  $a^*$  sur  $A$ . On peut alors écrire  $f^n(f(a^*)) = f(f^n(a^*)) = f(a^*)$ . Donc  $f(a^*)$  est un point fixe de  $f^n$ . Et par unicité, on sait que  $f(a^*) = a^*$ .

Soit  $a \in A$  un point fixe de  $f$ . Cela veut dire  $a = f(a) = f(f(a)) = \dots = f^n(a)$ . Donc  $a$  est un point fixe de  $f^n$ . À nouveau, par unicité,  $a = a^*$ . □

## 5.2.2 Cylindres en espace-temps

**Définition 5.8.** Soit  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle et  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  est un ouvert.

On dit que  $f$  est lipschitzienne en espace sur  $I \times \Omega$  lorsqu'il existe  $M \geq 0$  tel que :

$$\forall t \in I : \forall x, y \in \Omega : \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq M\|x - y\|.$$

On dit que  $f$  est localement lipschitzienne en espace sur  $I \times \Omega$  lorsque :

$$\forall J \times K \subset I \times \Omega \text{ compact } \exists M(J, K) \text{ t.q. } \forall t \in J : \forall x, y \in K : \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq M(J, K)\|x - y\|.$$

**Définition 5.9** (Définition équivalente de localement lipschitzien).  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  est localement lipschitzienne en espace lorsque :

$$\forall (t, x) \in I \times \Omega : \exists M \geq 0, \tilde{I} \times \tilde{\Omega} \text{ compacts } \subset I \times \Omega \text{ t.q. } \forall t \in \tilde{I} : \forall x, y \in \tilde{\Omega} : \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq M\|x - y\|.$$

**Proposition 5.10.** Si  $f \in C^1(I \times \Omega, \mathbb{R})$ , avec  $I \subset \mathbb{R}$ , et  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , tous deux ouverts, alors  $f$  est localement lipschitzienne par rapport à  $x$  (en espace).

Démonstration. Soient  $t \in I, x \in \Omega$ . On choisit  $\delta \geq 0$  tel que  $(t - \delta, t + \delta) \subset I$  et  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$ . La fonction  $(t, x) \mapsto d_x f(t, \cdot)$  est continue sur  $\left[t - \frac{\delta}{2}, t + \frac{\delta}{2}\right] \times B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$  compact car  $f$  est  $C^1$ . En particulier, elle est bornée, donc il existe  $M \geq 0$  tel que :

$$\|d_x f(t, \cdot)\| \leq M.$$

Soient  $y_1, y_2 \in B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$  deux valeurs en espace, et  $t \in \left[t_0 \pm \frac{\delta}{2}\right]$  une valeur en temps. On a alors :

$$f(t, y_2) - f(t, y_1) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial f}{\partial x}(t, y) dy = \int_0^1 d_{sy_2 + (1-s)y_1} f(t, \cdot)(y_2 - y_1) ds,$$

que l'on peut majorer en norme par :

$$\|f(t, y_2) - f(t, y_1)\| \leq \int_0^1 \|d_{s y_2 + (1-s) y_1} f(t, \cdot)(y_2 - y_1) ds\| \leq \int_0^1 M \|y_2 - y_1\| ds = M \|y_2 - y_1\|.$$

□

**Définition 5.11.** Pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^d, \ell, r \geq 0$ , on appelle *cylindre (en espace-temps)* centré en  $(t_0, y_0)$  de rayon  $r$  et de demi-axe  $\ell$  l'ensemble :

$$S(t_0, y_0, \ell, r) := \left\{ (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |t - t_0| \leq r, \|y - y_0\| \leq \ell \right\}.$$

*Remarque.*  $S(t_0, y_0, \ell, r)$  est un compact convexe de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ .

**Proposition 5.12.** Soit  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  localement lipschitzienne en espace. Soient  $(t_0, y_0) \in I \times \Omega, \ell, r \geq 0$  t.q. :

$$S(t_0, y_0, \ell, r) \subset I \times \Omega.$$

Alors  $f$  est localement lipschitzienne sur  $S(t_0, y_0, \ell, r)$ .

### 5.2.3 Théorème d'existence et d'unicité locales

**Proposition 5.13.** Soient  $f : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  localement lipschitzienne en espace,  $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$ . Il existe  $\ell, r \geq 0$  tels que :

- (i)  $S := S(t_0, y_0, \ell, r) \subset J \times \Omega$ ;
- (ii)  $\ell \|f\|_{\infty, S} \leq r$ .

*Démonstration.* Puisque  $J \times \Omega$  est ouvert, il existe  $\delta, \varepsilon \geq 0$  tels que  $S(t_0, y_0, \delta, \varepsilon) \subset J \times \Omega$ . Posons alors  $\varepsilon = r$ , et :

$$\ell := \min \left( \delta, \frac{\varepsilon}{\|f\|_{\infty, S(t_0, y_0, \delta, \varepsilon)}} \right).$$

Alors  $\ell > 0$ , et on a donc :

$$\ell \leq \frac{\varepsilon}{\|f\|_{\infty, S(t_0, y_0, \delta, \varepsilon)}} \leq \frac{\varepsilon}{\|f\|_{\infty, S(t_0, y_0, \ell, r)}},$$

car  $\ell \leq \delta$ .

□

**Théorème 5.14** (de Cauchy-Lipschitz local (TCL local)). Soient  $J \subset \mathbb{R}$  un intervalle non-vide et  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ouvert non-vide,  $f : J \times \Omega \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^d$  localement lipschitzienne en espace. Soit  $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$  et  $\ell, r \geq 0$  tels que :

$$S := S(t_0, y_0, \ell, r) \subset J \times \Omega \quad \text{et} \quad 0 < \ell < \frac{r}{\|f\|_{\infty, S}}.$$

Alors :

- il existe  $y \in C^1([t_0 - \ell, t_0 + \ell], \Omega)$  solution de (PC) ;

1. La notation  $d_x f(t, \cdot)$  correspond à la dérivée partielle de  $f$  par rapport à sa variable d'espace, évaluée en  $x$ . Donc  $d_{x_0} f(t, \cdot) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)$ .

— pour tout solution  $\tilde{y}$  de (PC) définie sur  $\tilde{I}$ , intervalle tel que  $t_0 \in \tilde{I}$  :

$$\forall t \in \tilde{I} \cap [t_0 \pm \ell] : y(t) = \tilde{y}(t).$$

*Remarque.* Ce théorème affirme l'unicité locale de la solution au sein d'un cylindre de sécurité centré en  $t_0$ .

*Démonstration.* Construisons une suite  $(y_n)_n \subset C^1([t_0 \pm \ell], \Omega)$  qui converge uniformément sur  $[t_0 \pm \ell]$  vers une solution de (PC).

Notons  $I = [t_0 \pm \ell]$  et :

$$A(I) := \left\{ y \in C^1(I, \Omega) \text{ t.q. } \forall t \in I : \|y(t) - y_0\| \leq r \right\}.$$

On remarque  $A(I) \subset C^0(I, \Omega)$  et  $A(I)$  est fermé dans  $(C^0(I, \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$  (et donc complet car fermé dans un complet). Posons  $y_0 \equiv y_0$ . On en déduit donc  $A(I) \neq \emptyset$ . Soit  $y \in A(I)$ . On pose :

$$\forall t \in I : Ty(t) := T(y)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

On remarque  $T(A(I)) \subset A(I)$ . En effet :  $Ty$  est continue sur  $I$  car de classe  $C^1$ . De plus :

$$\forall t \in I : \|Ty(t) - y_0\| \leq \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} \|f(s, y(s))\| ds \leq |t - t_0| \|f\|_{\infty, S} \leq \ell \frac{r}{\ell} = r.$$

Soient  $y_1, y_2 \in A(I)$ . Calculons pour  $t \in I$  :

$$T(y_1)(t) - T(y_2)(t) = \int_{t_0}^t (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))) ds.$$

Soit  $L$  une constante de Lipschitz pour  $f$  sur  $S$ . On trouve alors :

$$\|T(y_1)(t) - T(y_2)(t)\| \leq \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} L |y_1(s) - y_2(s)| ds \leq L \ell \|y_2 - y_1\|_\infty.$$

Montrons alors par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}^*$  que :

$$\forall t \in I : \|T^p(y_1)(t) - T^p(y_2)(t)\| \leq \frac{L^p |t - t_0|^p}{p!} \|y_1 - y_2\|_{\infty, I}. \quad (5.2)$$

Pour le cas initial  $p = 1$ , on vient en effet d'obtenir le résultat. Pour le pas de récurrence, supposons que (5.2) est vrai pour un certain  $p \geq 1$  et estimons :

$$\begin{aligned} \forall t \in I : \|T^{p+1}(y_1)(t) - T^{p+1}(y_2)(t)\| &\leq \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} L \|T^p(y_1)(t) - T^p(y_2)(t)\| ds \\ &\leq \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} L \frac{L^p |s - t_0|^p}{p!} ds \|y_1 - y_2\|_\infty \\ &= \frac{L^{p+1} |t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} \|y_1 - y_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Choisissons  $p_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $L^{p_0} \ell^{p_0} < p_0!$ . L'application  $T^{p_0}$  est donc une contraction de  $A(I)$  dans elle-même. Par le théorème de Banach, elle admet un unique point fixe  $y \in A(I)$ . On a alors  $T(y) = y$ , et en particulier :

$$\forall t \in I : y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad (5.3)$$

donc  $y \in C^1(I, \Omega)$  est solution de (PC) par la Proposition 5.4.

Soit  $\tilde{I}$  un intervalle tel que  $t_0 \in \tilde{I}$ , et soit  $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \Omega$  solution de (PC). Notons  $\bar{I} = \tilde{I} \cap I$ , un intervalle contenant  $t_0$ . Les fonctions  $y|_{\bar{I}}$  et  $\tilde{y}|_{\bar{I}}$  sont des solutions de (PC), et donc de sa forme intégrale (5.3). En particulier, elles sont fixes par  $T : A(\bar{I}) \rightarrow A(\bar{I})$ , donc elles coïncident sur  $\bar{I}$  (unicité par Banach).  $\square$

**Proposition 5.15.** Si  $f \in C^k(J \times \Omega)$  et  $y$  est une sol de (PC) sur  $I \subset J$  tel que  $t_0 \in I$ , alors  $y \in C^{k+1}(I, \Omega)$ .

*Démonstration.* On sait que  $y$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ , et donc  $y'$  est de classe  $C^1$  par composition de fonctions  $C^1$ . Similairement, on trouve  $y \in C^2(I)$ , etc. jusque  $y \in C^k$ . À nouveau, par composition de fonctions  $C^k$ , on trouve  $y \in C^{k+1}(I)$ .  $\square$

*Remarque.* On a donc montré que la suite  $(y_n)_n$  de fonctions définie par :

$$\begin{cases} y_0 & \equiv y_0 \\ y_{n+1}(t) & = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \end{cases}$$

vérifie :

$$\forall n \geq 1 : \forall t \in [t_0 \pm \ell] : \|y_n(t) - y(t)\| \leq \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} 2r.$$

Cette reformulation de la convergence des  $y_n$  vers une solution unique au sein du cylindre permet de déterminer numériquement des solutions au problème de Cauchy<sup>3</sup>.

## 5.3 Existence et unicité locale

### 5.3.1 Motivation

Soit  $f \in C^0(J \times \Omega, \mathbb{R}^d)$ , localement lipschitzienne en espace. Soit  $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$ . Appliquons le théorème de Cauchy-Lipschitz (TCL) local à (PC). On obtient  $Y$  une solution de (PC) sur un certain segment  $[t_0 \pm \ell]$ . On a  $t_0 + \ell \in J$  et  $Y(t_0 + \ell) \in \Omega$ . On y applique le TCL local :

Il existe  $\delta > 0$  et  $Z$  une solution du problème de Cauchy  $(t_0 + \ell, Y(t_0 + \ell)) \in J \times \Omega$  sur  $[(t_0 + \ell) \pm \delta]$ . Les fonctions  $Y$  et  $Z$  coïncident sur  $[(t_0 + \ell) \pm \delta] \cap [t_0 \pm \ell]$ .

La fonction définie par :

$$W : [t_0 - \ell, t_0 + \ell + \delta] \rightarrow \Omega : t \mapsto \begin{cases} Y(t) & \text{si } t \leq t_0 + \ell \\ Z(t) & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe  $C^1$  sur  $[t_0 - \ell, t_0 + \ell + \delta]$ .

2. C'est-à-dire que le premier élément de la suite  $(y_n)_n$  est la fonction constante  $t \mapsto y_0$ .

3. Bien que ce ne soit pas le plus efficace.

De plus, on remarque :

$$Y'(t) \xrightarrow[t \mapsto (t_0 + \ell)^-]{} f(t_0 + \ell, Y(t_0 + \ell)),$$

où :

$$f(t_0 + \ell, Z(t_0 + \ell)) = \lim_{t \mapsto (t_0 + \ell)^+} f(t, Z(t)).$$

La solution initiale  $Y$  a donc été *prolongée* de  $[t_0 \pm \ell]$  à  $[t_0 \pm \ell] \cup [(t_0 + \ell) \pm \delta]$ . Il vient cependant certaines questions :

- La solution  $y$  peut-elle être prolongée indéfiniment ?
- Peut-elle être étendue à  $J$  tout entier ?
- Existe-t-il un comportement « *maximal* » que l'on ne pourrait plus prolonger ?

### 5.3.2 Exemples

1. Prenons  $J = \mathbb{R}, \Omega = \mathbb{R}_0^+$  et intéressons-nous au problème :

$$y'(t) = -3 \sin(y) y(t)^{\frac{4}{3}}.$$

Pour pouvoir appliquer le TCL local, il faut que  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ : (t, y) \mapsto -3 \sin(t) y^{\frac{4}{3}}$  soit localement lipschitzienne et continue. On sait  $f \in C^1(J \times \Omega)$ , et donc par la Proposition 5.10, on sait  $f$  localement lipschitzienne en espace, et est continue.

Par séparation des variables, on résout :

$$-3 \left[ y^{-\frac{1}{3}} \right]_{y_0}^{y(t)} = -3 \left[ -\cos(t) \right]_{t_0}^t,$$

ou encore :

$$y(t) = \frac{1}{\left( y(t)^{-\frac{1}{3}} - \cos(t) + \cos(t_0) \right)^3}.$$

- Prenons  $J \times \Omega \ni (t_0, y_0) = \left( \frac{\pi}{2}, \frac{1}{8} \right)$ . On a alors :

$$y(t) = \frac{1}{(2 - \cos(t))^3},$$

où  $y$  est une solution du problème de Cauchy sur  $\mathbb{R}$ .

- Prenons  $J \times \Omega \ni (t_0, y_0) = \left( \frac{\pi}{2}, 8 \right)$ . On a alors :

$$y(t) = \frac{1}{\left( \frac{1}{2} - \cos(t) \right)^3},$$

où  $y$  est une solution du problème de Cauchy sur  $\left( \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right)$ .

En effet, on observe :

$$y(t) \xrightarrow[t \rightarrow \frac{\pi}{3}^+]{} +\infty \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow \frac{5\pi}{3}^-]{} +\infty.$$

2. Prenons  $J = \mathbb{R}_0^+, \Omega = \mathbb{R}$  et intéressons-nous au problème :

$$y'(t) = \frac{1}{t^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right).$$

Posons  $f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (t, x) \mapsto t^{-2} \sin(t^{-1})$ .  $f \in C^0(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  donc le TCL local s'applique.

Note : On remarque également que  $f$  ne dépend pas de  $y$ . On observe donc que la théorie des équations différentielles et des problèmes de Cauchy comprennent entre autres la théorie des primitives.

Prenons  $J \times \Omega \ni (t_0, y_0) = \left(\frac{1}{2\pi}, 1\right)$ . On a alors  $y(t) = \cos(t^{-1})$  est solution du problème de Cauchy sur  $\mathbb{R}_0^+$ . On observe également que  $y$  n'admet pas de limite en  $t \rightarrow 0$ , et que :

$$y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 1.$$

### 5.3.3 Bouts droites et bouts gauches

**Définition 5.16.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique et  $A \subset X$  non-vidé.

—  $x \in X$  est dit *adhérent* à  $A$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

—  $x \in X$  est appelé *point d'accumulation* de  $A$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

**Définition 5.17.** Soient  $X, Y$  deux ensembles. Soit  $f : X \rightarrow Y$ . On appelle *graphe* de  $f$  l'ensemble :

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \text{ t.q. } x \in X\} \subset X \times Y.$$

**Définition 5.18.** Soit  $y : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^+$  avec :

$$-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty.$$

- On appelle *bout droit* de  $y$  tout point d'accumulation de son graphe de la forme  $(\beta, z)$ , avec  $z \in \mathbb{R}^d$  ;
- on appelle *bout gauche* de  $y$  tout point d'accumulation de son graphe de la forme  $(\alpha, z)$ , avec  $z \in \mathbb{R}^d$ .

*Remarque.* Pour les exemples précédents, on remarque :

$I$	$y(t)$	bouts gauches	bouts droits
$I = \mathbb{R}$	$y(t) = (2 - \cos(t))^{-3}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$I = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$	$y(t) = \left(\frac{1}{2} \cos(t)\right)^{-3}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$I = \mathbb{R}_0^+$	$y(t) = \cos(t^{-1})$	$\{0\} \times [-1, 1]$	$\emptyset$

### 5.3.4 Solutions maximales

Soit  $f : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , avec  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ouvert et  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert.

**Définition 5.19.** Soient  $y_i : I_i \rightarrow \Omega, i = 1, 2$ , solutions de l'équation différentielle  $y'(t) = f(t, y(t))$ . Soit  $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$  tels que  $y_1, y_2$  soient solutions du problème de Cauchy  $y(t_0) = y_0$ .

Sur  $I_1$ , on dit que  $y_2$  est une sur-solution de  $y_1$  lorsque :

- $I_1 \subseteq I_2$  ;
- $y_1 = y_2$  sur  $I_1$ .

*Remarque.* On remarque qu'une solution est toujours sur-solution d'elle-même.

**Définition 5.20.** une solution  $y$  de (PC) définie sur  $I$  est dite *maximale* lorsque pour toute sur-solution  $\tilde{y}$  de  $y$  définie sur  $\tilde{I}$ , on a  $\tilde{I} \subseteq I$ .

### 5.3.5 Théorème de Cauchy-Lipschitz global



**Théorème 5.21** (Théorème de Cauchy-Lipschitz global). Soient  $J \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert non-vide,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert non-vide, et  $f \in C^0(J \times \Omega, \mathbb{R}^d)$  localement lipschitzienne en espace.

Alors pour tout couple  $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$ , il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy.

De plus, les bouts gauches et droits sont des éléments de  $\partial(J \times \Omega)$ <sup>4</sup>.

Démonstration.

## 1. Existence et unicité

Notons :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &:= \{I \subset J \text{ t.q. (PC) admet une solution sur } I\}, \\ \mathcal{N}^- &:= \{\text{extrémités gauches des éléments de } \mathcal{J}\}, \\ \mathcal{N}^+ &:= \{\text{extrémités droites des éléments de } \mathcal{J}\}. \end{aligned}$$

$f$  est continue et localement lipschitzienne par hypothèse, on peut alors appliquer le TCL local, par lequel on sait qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $[t_0 \pm \delta] \int \mathcal{J}$ . Dès lors,  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \in \mathcal{N}^- \times \mathcal{N}^+$ . Posons :

$$\alpha := \inf \mathcal{N}^- \quad \text{et} \quad \beta := \sup \mathcal{N}^+.$$

On a alors :

$$-\infty \leq \alpha \leq t_0 - \delta \leq t_0 + \delta \leq \beta \leq +\infty.$$

### 1.1. Existence

On va définir  $y$  une solution de (PC) sur  $(\alpha, \beta)$  et ensuite montrer qu'elle est maximale. Procédons sur  $[t_0, \beta)$ , le cas  $(\alpha, t_0]$  se déduit similairement.

Soit  $t \in (\alpha, \beta)$  et soient  $y_1, y_2$  deux solutions de (PC) définies respectivement sur  $I_1$  et  $I_2$  telles que  $t_0 \in I_1 \cap I_2$ .

Posons :

$$A := \{s \in [t_0, t] \text{ t.q. } y_1 = y_2 \text{ sur } [t_0, s]\}.$$

Par le TCL local, on sait que  $t_0 + \delta \in A$ , quitte à « réduire »  $\delta$  afin que  $t_0 + \delta \leq t$ . Posons ensuite :

$$\tau := \sup A \in [t_0 + \delta, t].$$

On observe alors que  $\tau \in A$ . En effet, si  $\varepsilon > 0$  est fixé,  $\tau - \varepsilon$  n'est plus un majorant de  $A$ . Donc il existe  $t_\varepsilon \in [\tau - \varepsilon, \tau]$  tel que  $t_\varepsilon \in A$ . Donc  $y_1(t_\varepsilon) = y_2(t_\varepsilon)$ . De plus, on sait que :

$$t_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau.$$

Dès lors, il vient par continuité de  $y_1$  et  $y_2$  en  $\tau \in I_1 \cap I_2$  que  $y_1(\tau) = y_2(\tau)$ , et donc  $\tau \in A$ .

Supposons maintenant par l'absurde  $\tau \not\leq t$ . On sait  $y_1(\tau) = y_2(\tau)$ . Appliquons alors le TCL local au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(\tau) &= y_1(\tau) = y_2(\tau). \end{cases}$$

---

4. Où  $\partial X$  représente le bord de l'ensemble  $X$ .

On obtient  $y_1$  et  $y_2$  coïncident sur  $(\tau \pm \ell)$  pour un certain  $\ell > 0$ . Par définition de  $\tau$ , cela implique que  $y_1$  et  $y_2$  coïncident sur  $[t_0, \tau + \ell)$ . Or  $\tau = \sup A$ . Il y a donc une contradiction. On en déduit  $\tau = t$ , et dès lors  $y_1(t) = y_2(t)$ .

On peut également définir :

$$Y : (\alpha, \beta) \rightarrow \Omega : \hat{t} \mapsto Y(\hat{t}),$$

où  $Y(\hat{t})$  est la valeur de n'importe quelle solution du problème de Cauchy en  $\hat{t} \in [t_0, t]$ . La fonction  $Y$  est bien définie et est de plus de classe  $C^1$  sur  $(\alpha, \beta)$  (ainsi que solution du problème de Cauchy).

Soit  $\tilde{Y}$  une sur-solution de  $Y$  sur un intervalle défini par  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  (ouvert ou fermé) avec :

$$\tilde{\alpha} \leq \alpha \leq \beta \leq \tilde{\beta}.$$

Par continuité de  $Y$ , on a  $\alpha = \inf N^-$  et  $\beta = \sup N^+$ . Or  $\tilde{\alpha} \in N^-$  et  $\tilde{\beta} \in N^+$ . Il en découle que  $\alpha = \tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta} = \beta$ . Les seules possibilités pour  $\tilde{I}$  sont alors :

- $\tilde{I} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  ;
- $\tilde{I} = [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  ;
- $\tilde{I} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$  ;
- $\tilde{I} = [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$ .

Si  $\tilde{\beta} \in \tilde{I}$ , le TCL local permet de prolonger  $\tilde{Y}$  (et donc  $Y$  par continuité) en une solution au-delà strictement de  $\beta = \tilde{\beta}$ . Il y a donc contradiction avec la définition même de  $\beta$ . Idem pour  $\tilde{\alpha} \in \tilde{I}$ .

Donc  $\tilde{I} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ , et  $Y = \tilde{Y}$ .  $Y$  est donc maximale.

#### Unicité

Idem,  $Y$  est la solution maximale ci-dessus et  $\tilde{Y}$  est une solution maximale de (PC).

## 2. Appartenance des bouts au bord

Soit  $y$  une solution maximale de (PC) sur  $(\alpha, \beta)$  et soit  $(\beta, z)$  un bout droit de  $y$  (la démonstration pour les bouts gauches se déduit similairement). On suppose par l'absurde  $(\beta, z) \notin \partial(J \times \Omega)$ .

Il existe  $\ell, r \geq 0$  tels que  $S(\beta, z, \ell, r) \subset J \times \Omega$  est de sécurité pour  $f$ . Par définition de  $(\beta, z)$ , il existe  $(t_n)_n \in (\alpha, \beta)^{\mathbb{N}}$  injective telle que :

$$t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta \quad \text{et} \quad y(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z.$$

Pour  $n$  suffisamment grand, on trouve alors  $(t_n, y(t_n)) \in S\left(\beta, z, \frac{\ell}{4}, \frac{r}{4}\right)$ . Ainsi :

$$S' := S\left(\beta, z, \frac{\ell}{2}, \frac{r}{2}\right) \subset S(\beta, z, \ell, r) =: S,$$

et donc :

$$\|f\|_{\infty, S'} \leq \|f\|_{\infty, S},$$

et on a  $(\beta, z) \in \text{int } S'$ . Puisque  $0 < \ell < r\|f\|_{\infty, S}^{-1}$  (car  $S$  est de sécurité pour  $f$ ), on sait :

$$0 < \frac{\ell}{2} < \frac{r}{2\|f\|_{\infty, S}} \leq \frac{r}{2\|f\|_{\infty, S'}}.$$

On en déduit que  $S'$  est également de sécurité pour  $f$ . Le TCL local appliqué à :

$$\begin{cases} Z'(t) &= f(t, Z(t)) \\ Z(t_n) &= y(t_n) \end{cases} \quad (b)$$

permet de s'assurer que la solution maximale de (I) vit encore en  $t_n + \frac{\ell}{2}$ . Or  $t_n + \frac{\ell}{2} \geq \beta$ , ce qui contredit le caractère maximal de  $y$ . Dès lors,  $(\beta, z) \in \partial(J \times \Omega)$ .  $\square$

*Remarque.* Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Notons :

$$K \subset\subset \Omega$$

lorsque  $K$  est un compact inclus dans  $\Omega$ .

**Corollaire 5.22** (Théorème de sortie de tout compact). *Soient  $J$  un intervalle réel non-vide,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ouvert non-vide, et soit :*

$$f : J \times \Omega \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^d,$$

*localement lipschitzienne en espace sur  $J \times \Omega$ . Soit  $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$  et soit  $y$ , la solution maximale de :*

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

*Notons  $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$  l'intervalle de définition de  $y$ .*

— *Si  $a \leq \alpha$ , alors pour toute suite  $(t_n)_n \subset (\alpha, \beta)$  telle que  $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha^+$  :*

$$\forall K \subset\subset \Omega : \left| \{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } y(t_n) \in K\} \right| < +\infty ;$$

— *si  $\beta \leq b$ , alors pour toute suite  $(t_n)_n \subset (\alpha, \beta)$  telle que  $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta^-$  :*

$$\forall K \subset\subset \Omega : \left| \{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } y(t_n) \in K\} \right| < +\infty.$$

Démonstration. Notons tout d'abord que, par ouverture de  $J \times \Omega$ , on sait :

$$\partial(J \times \Omega) = \text{adh}(J \times \Omega) \setminus (J \times \Omega).$$

Montrons ici le cas  $\beta \leq b$  (le cas  $a \leq \alpha$  se déduit similairement). Supposons par l'absurde qu'il existe  $(t_n)_n$ , une suite dans  $(\alpha, \beta)$  qui tend vers  $\beta^-$  pour  $n \rightarrow +\infty$  et  $K \subset\subset \Omega$  tels que :

$$\{n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } y(t_n) \in K\}$$

est infini dénombrable. Par compacité de  $K$ , il existe  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante et  $y^* \in K$  tels que :

$$y(t_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y^*.$$

Ainsi,  $(\beta, y^*)$  est un bout droit de  $y$ , qui est solution maximale. Par le théorème des bouts, on sait  $(\beta, y^*) \in \partial(J \times \Omega)$ . Or  $\beta \in (a, b)$  et  $y^* \in K$ , donc  $(\beta, y^*) \in J \times \Omega$ . Il y a donc une contradiction car le bord n'est pas contenu dans  $J \times \Omega$ .  $\square$

## 5.4 Flot d'une équation différentielle et intégrale première

### 5.4.1 Flot associé à une équation différentielle

Soient  $J \subset \mathbb{R}$  un intervalle non-vide,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ouvert non-vide et  $f \in C^0(J \times \Omega, \mathbb{R}^d)$  localement lipschitzienne en espace. L'existence et l'unicité de solution maximale au problème de Cauchy (PC) pour  $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$

permet de « définir une fonction »  $\Phi$  associée à l'équation différentielle  $y(t) = f(t, y(t))$  en posant :

$$\Phi(t_0, y_0, t) = \hat{y}(t),$$

où  $\hat{y}$  est la solution maximale de (PC).

$\Phi : J \times \Omega \times J \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^d$  n'est pas définie pour tous les triplets  $(t_0, y_0, t) \in J \times \Omega \times J$ . En revanche, lorsque  $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$  est fixé,  $t \mapsto \Phi(t_0, y_0, t)$  est définie sur un voisinage de  $t_0$  dans  $J$  par le TCL global.

Il y a même une certaine uniformité (par rapport à  $y_0$ ).

**Proposition 5.23.** Soit  $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$  et soit  $\varepsilon > 2$  tel que  $B(y_0, \varepsilon) \subset \Omega$ . Alors :

$$\exists \ell > 0 \text{ t.q. } \forall y \in B(y_0, \varepsilon) : t \mapsto \Phi(t_0, y, t) \text{ est définie sur } [t_0 \pm \ell].$$

*Remarque.* Cela veut dire que l'intersection des intervalles de définition des  $\Phi(t_0, y, t)$  pour  $y$  arbitrairement proche de  $y_0$  (au sens d'inclusion dans la boule de centre  $y_0$  et de rayon  $\varepsilon$ ) n'est pas le singleton  $\{t_0\}$  mais bien un intervalle de la forme  $[t_0 + \ell]$  pour un certain  $\ell > 0$ .

*Démonstration.*  $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$  est un fermé,  $B(y_0, \varepsilon)$  est un fermé de  $\Omega$ , et est borné, donc est compact, et  $\mathbb{R}^d \setminus \Omega \cap B(y_0, \varepsilon) = \emptyset$ . Ainsi :

$$\delta := \inf_{(x, y) \in (\mathbb{R}^d \setminus \Omega) \times B(y_0, \varepsilon)} \|x - y\| > 0.$$

En effet, si  $(x_n)_n$  est une suite d'éléments de  $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ , et si  $(y_n)_n$  est une suite d'éléments de  $B(y_0, \varepsilon)$  telles que ces suites minimisent  $\|x - y\|$ , supposons par l'absurde que  $\|x_n - y_n\|_n$  tende vers 0. On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = X = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n.$$

Par fermeture de  $B(y, \varepsilon)$  et  $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ , on détermine  $X \in B(y, \varepsilon)$  et  $X \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ . Et donc  $B(y, \varepsilon) \cap \mathbb{R}^d \cap \Omega \ni X$ , ce qui est une contradiction. Donc  $\delta \geq 0$ .

Notons alors :

$$A := \|f\|_{\infty, [t_0 \pm \ell_0] \times B(y_0, \varepsilon + \frac{\delta}{2})},$$

où  $\ell_0 > 0$  est fixé tel que  $[t_0 \pm \ell_0] \subset J$ . On peut alors choisir  $\ell > 0$  tel que :

$$0 < \ell < \min \left( \ell_0, \frac{\delta}{4A} \right).$$

Alors pour tout  $y \in B(y_0, \varepsilon)$ , le cylindre  $S(t_0, y_0, \ell, \frac{\delta}{4})$  est de sécurité pour  $f$ . En effet,  $S(t_0, y_0, \ell, \frac{\delta}{4}) \subset J \times \Omega$  et :

$$0 < \ell < \frac{\delta}{4A} \leq \frac{\delta}{4\|f\|_{\infty, S}}.$$

Par le TCL local, on sait que la solution maximale de :

$$\begin{cases} Z'(t) &= f(t, Z(t)) \\ Z(t_0) &= Z_0 \end{cases}$$

existe au moins sur  $[t_0 \pm \ell]$ , avec  $\ell$  qui dépend de  $\varepsilon$  mais qui ne dépend pas de  $y$ . □

*Remarque.* Une conséquence de cela est qu'au voisinage de tout point  $y_0$  en espace, les solutions maximales aux problèmes de Cauchy sont paramétrées par leur valeur en  $t_0$ .

**Proposition 5.24.** Pour  $y \in B(y_0, \varepsilon]$  et  $t \in [t_0 \pm \ell]$  sous les hypothèses précédentes, on a :

$$\Phi(t_0, \Phi(t, y, t_0), t) = y.$$

### 5.4.2 Intégrales premières

**Définition 5.25.** Soient  $J \subset \mathbb{R}$  un intervalle non-vide,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ouvert non-vide, et  $f \in C^0(J \times \Omega, \mathbb{R}^d)$  localement lipschitzienne en espace sur  $J \times \Omega$ . On appelle *intégrale première de l'équation (\*\*) :*

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (**)$$

toute fonction  $H : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  constante le long des solutions de l'équation différentielle, c-à-d :

$$t \mapsto H(t, y(t))$$

est constante pour toute fonction  $y$  solution de (\*\*).

**Proposition 5.26.**  $H \in C^1(J \times \Omega, \mathbb{R})$  est une intégrale première de (\*\*) si et seulement si :

$$\forall (t, y) \in J \times \Omega : \frac{\partial H}{\partial t}(t, y(t)) + \langle f(t, y), \nabla_y H(t, y(t)) \rangle = 0. \quad ^5$$

*Démonstration.* Soit  $H \in C^1(J \times \Omega)$  une intégrale première de (\*\*). Soit  $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$ , et soit  $y$  la solution maximale du problème de Cauchy  $(t_0, y_0)$ . On a  $t \mapsto H(t, y(t))$  est de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I \subset J$  et est constante. On en déduit, sur cet intervalle :

$$\frac{dH}{dt}(t, y(t)) = 0, \quad ^6$$

Ou encore :

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, y(t)) + \left\langle \frac{dy}{dt}(t), \frac{\partial H}{\partial y}(t, y(t)) \right\rangle = 0.$$

En particulier, en  $t = t_0$ , on trouve :

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t_0, y(t_0)) + \left\langle f(t_0, y(t_0)), \frac{\partial H}{\partial y}(t_0, y(t_0)) \right\rangle = 0.$$

Supposons maintenant  $H \in C(J \times \Omega)$  telle que pour toute solution  $y$  de (\*\*):

$$t \mapsto H(t, y(t)) \in C^1(I \subset J, \mathbb{R}) \text{ t.q. } \frac{dH}{dt}(t, y(t)) + \left\langle f(t, y(t)), \frac{\partial H}{\partial y}(t, y(t)) \right\rangle = 0.$$

On en déduit que  $t \mapsto H(t, y(t))$  est constante sur  $I$ , son intervalle de définition. □

5. La notation  $\nabla_y H(t, y(t))$  représente le gradient en espace de  $H$ , et donc  $\nabla_y H(t, y(t)) = \frac{\partial H}{\partial y}(t, y(t))$ .

6. La notation  $\frac{dH}{dt}(t, y(t))$  représente la dérivée ordinaire (ou totale) de  $H$  par rapport à  $t$ . On peut établir :

$$\frac{dH}{dt}(t, y(t)) = \frac{d\eta}{dt}(t),$$

où  $\eta : J \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto H(t, y(t))$ .

### 5.4.3 Exemple de système Hamiltonien

TODO.

## 5.5 Condition suffisante d'existence locale

**Théorème 5.27** (Théorème de Cauchy-Peano-Arzela). Soient  $J \subset \mathbb{R}$  un intervalle et  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ouverts. Soient  $f \in C^0(J \times \Omega, \mathbb{R}^d)$  et  $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$ . Alors (PC) admet une solution sur un intervalle  $[t_0 \pm \delta]$  pour  $\delta > 0$ .

*Remarque.* Par rapport au théorème de Cauchy-Lipschitz, en hypothèses, on a perdu le caractère lipschitzien en espace de  $f$  (même localement), et on a perdu l'unicité de la solution dans les conséquences.

*Démonstration.* On prolonge  $f$  par la valeur nulle de  $\mathbb{R}^d$  à  $J \times \Omega$ . Soit une suite  $\rho_k$  telle que  $\rho_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$  est régularisante (donc pour tout  $k \geq 1$ , on a  $\rho_k \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^+)$ ,  $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_k(x) dx = 1$ , et  $\text{supp } \rho_k \subset B(0, \frac{1}{k})$ ).

Pour  $(t, x) \in J \times \mathbb{R}^d$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$f_k(t, x) = (f_k(t, \cdot) * \rho_k)(x).$$

Alors  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , on a (EXERCICE) :

$$\begin{cases} f_k & \in C^0(J \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d), \\ f_k(t, \cdot) & \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur tout cpct de } J \times \Omega} f(t, \cdot), \\ f_k & \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur tout cpct de } J \times \Omega} f. \end{cases}$$

On choisit  $r > 0$  et  $\ell > 0$  tels que :

$$S := S(t_0, y_0, \ell, r) \subset J \times \Omega$$

$S$  est un compact de  $J \times \Omega$ , on donc :

$$f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur tout cpct de } S} f.$$

Par inégalité triangulaire, on sait  $\|f_k\|_{\infty, S} \leq \|f_k - f\|_{\infty, S} + \|f\|_{\infty, S}$ , avec  $\|f_k - f\|_{\infty, S} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$  par convergence uniforme.

On sait qu'il existe  $A \geq 0$  tel que :

$$\forall k \geq 1 : \|f - f_k\|_{\infty, S} \leq A.$$

Quitte à diminuer  $S$  en diminuant  $\ell$ , on peut supposer :

$$0 < \ell < \frac{r}{A},$$

et donc  $S$  est un cylindre de sécurité pour  $f_k$  quel que soit  $k \geq 1$ .

Remarquons ensuite (EXERCICE) que pour tout  $k \geq 1$ , on a :

$$\begin{cases} f_k & \in C^0(J \times \Omega, \mathbb{R}^d), \\ \forall t \in J & : f_k(t, \cdot) \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d), \end{cases}$$

et  $(t, y) \mapsto d_y f(t, \cdot)$  est  $C^0$  sur  $J \times \Omega$ .

On en déduit que  $f_k$  vérifie les hypothèses du TCL. Fixons  $k \geq 1$  et appliquons le TCL local pour obtenir une (unique) solution  $y_k$  de (PC) sur  $[t_0 \pm \ell]$  (car  $S$  est de sécurité pour les  $f_k$ ).

Montrons maintenant que la suite  $(y_k)_k \subset (C^0([t_0 \pm \ell]), \mathbb{R}^d)$  vérifie les hypothèses du théorème d'Arzela-Ascoli (Théorème 4.17). En effet :

- $\forall t \in [t_0 \pm \ell] : \forall k \geq 1 : (t, y_k(t)) \in S$ ,  
par construction de  $S$ , et donc  $\|y_k(t) - y_0\| \leq r$ ;
- $B = \{y_k \text{ t.q. } k \in \mathbb{N}^*\}$  est équicontinue sur  $[t_0 \pm \ell]$  car les  $y_k$  sont équi-lipschitziennes.  
En effet, prenons  $t, s \in [t_0 \pm \ell]$ , on trouve :

$$\|y_k(t) - y_0\| \leq \int_{\min(\ell, t)}^{\max(\ell, t)} \|f_k(\sigma, y_k(\sigma))\| d\sigma \leq |s - t| \|f_k\|_{\infty, S} \leq A|s - t|.$$

Dès lors, par Arzela-Ascoli, il existe  $y^* \in C^0([t_0 \pm \ell], \mathbb{R}^d)$  et  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante tels que :

$$y_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } [t_0 \pm \ell]} y^*.$$

Montrons alors maintenant que :

$$f_k(t, y_k(t)) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } [t_0 \pm \ell]} f(t, y^*(t)).$$

En effet, pour  $t \in I = [t_0 \pm \ell]$  et  $k \geq 1$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \|f_k(t, y_{\varphi(k)}(t)) - f(t, y^*(t))\| &\leq \|f_k(t, y_{\varphi(k)}(t)) - f(t, y_{\varphi(k)}(t))\| + \|f(t, y_{\varphi(k)}(t)) - f(t, y^*(t))\| \\ &\leq \|f - f_k\|_{\infty, S} + \sup_{t \in I} \|f(t, y_{\varphi(k)}(t)) - f(t, y^*(t))\|, \end{aligned}$$

qui tend vers 0 pour  $k \rightarrow +\infty$  par CVU de  $f_k$  vers  $f$  et de  $y_{\varphi(k)}$  vers  $y^*$ .

Finalement, par le TCL local, on observe :

$$\forall k \geq 1 : \forall t \in I : y_{\varphi(k)} = y_0 + \int_{t_0}^t f(\sigma, y_{\varphi(k)}(\sigma)) d\sigma,$$

et donc en passant à la limite  $k \rightarrow +\infty$ , on obtient :

$$\forall t \in I : y^*(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\sigma, y^*(\sigma)) d\sigma.$$

Ainsi, il existe au moins une solution de (PC), à savoir  $y^*$ . □

*Exemple 5.1.* Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) &= \sqrt{|y(t)|} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

On a  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (t, y) \mapsto \sqrt{|y|}$ .  $f$  est  $C^0$  sur  $\mathbb{R}^2$  donc le théorème de Cauchy-Peano s'applique. On sait alors qu'il existe une solution  $y$  définie sur  $[-\delta, \delta]$ .

On peut en effet trouver :

1.  $y \equiv 0$  est une sol sur  $\mathbb{R}$  ;
2.  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t^2}{4} & \text{si } t > 0 \end{cases}$  est également solution sur  $\mathbb{R}$ .
3. on peut généraliser cette dernière par :

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \alpha \\ \frac{(t-\alpha)^2}{4} & \text{si } t > \alpha, \end{cases}$$

pour  $\alpha \geq 0$ .



## Chapitre 6

# Équations différentielles linéaires

### 6.1 Existence et unicité des solutions globales

#### 6.1.1 Notations

On se donne  $J \subset \mathbb{R}$  un intervalle non-vide et  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ouvert non-vide et  $d(d+1)$  fonctions :

$$[a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq d} \quad \text{et} \quad [b_i]_{1 \leq i \leq d}$$

sur  $J$  et à valeurs dans  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . On souhaite résoudre le système :

$$y'_i(t) = \sum_{j=1}^d a_{ij}(t)y_j(t) + b_i(t)$$

pour  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ .

Posons :

$$Y(t) = [y_i(t)]_{1 \leq i \leq d} \quad A(t) = [a_{ij}(t)]_{1 \leq i, j \leq d} \quad B(t) = [b_i(t)]_{1 \leq i \leq d}.$$

Le système est équivalent à :

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t). \quad (\text{PCL})$$

#### 6.1.2 Théorie de Cauchy

**Lemme 6.1** (Lemme de Gronwall). Soient  $[a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$  et  $\alpha, \beta > 0$ . Soit :

$$u : [a, b] \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^+.$$

Si :

$$\forall t \in [a, b] : u(t) \leq \alpha + \beta \int_a^t u(s) ds,$$

alors :

$$u(t) \leq \alpha \exp(\beta(t-a)).$$

Démonstration. Si  $\beta = 0$ , alors le lemme est trivial. Sinon, posons :

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \exp(-\beta(t-a)) \left[ \frac{\alpha}{\beta} + \int_a^t u(s) ds \right].$$

On observe alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b] : f'(t) &= u(t) \exp(-\beta(t-a)) + \left[ \frac{\alpha}{\beta} + \int_a^t u(s) ds \right] \exp(-\beta(t-a)) \\ &= \exp(-\beta(t-a)) \left( u(t) - \left( \alpha + \beta \int_a^t u(s) ds \right) \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall t \in [a, b] : f(t) \leq f(a),$$

et donc :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\alpha}{\beta} + \int_a^t u(s) ds \right) \exp(-\beta(t-a)) &\leq \frac{\alpha}{\beta} \\ \frac{\alpha}{\beta} + \int_a^t u(s) ds &\leq \frac{\alpha}{\beta} (\beta(t-a)) \\ u(t) &\leq \alpha \exp(\beta(t-a)). \end{aligned}$$

□

**Théorème 6.2** (Théorème de Cauchy linéaire). *Si les fonctions  $a_{ij}$  et  $b_i$  sont continues, alors pour tout  $(t_0, Y_0) \in J \times \mathbb{K}^d$ , le problème de Cauchy (PCL) admet une unique solution définie sur  $J$ .*

Démonstration.  $J$  est un intervalle d'extrémités  $a < b$  (ouvert ou fermé). Si  $J$  est fermé en  $a$ , alors on prolonge  $A$  et  $B$  à gauche par  $A(a)$  et  $B(a)$ . De même, si  $J$  est fermé en  $b$ , on prolonge  $A$  et  $B$  à droite par  $A(b)$  et  $B(b)$ . On a alors des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ .

On peut alors considérer  $J$  ouvert sans perte de généralité. Montrons alors que l'on peut appliquer le TCL global à (PCL). Posons donc :

$$f(t, Y) = A(t)Y + B(t).$$

On remarque aisément que  $f \in C^0(J \times \mathbb{K}^d, \mathbb{R}^d)$ . Soit  $K \subset J$  compact. Il existe  $M_A \geq 0$  tel que :

$$\forall t \in K : \|A(t)\| \leq M_A.$$

Ainsi pour tout  $t \in K$  :

$$\forall Y, Z \in \mathbb{R}^d : \|f(t, Y) - f(t, Z)\| \leq \|A(t)(Y - Z)\| \leq \|A(t)\| \|Y - Z\| \leq M_A \|Y - Z\|,$$

car en posant la norme :

$$\|A\| := \sup_{X \in \mathbb{K}^d \text{ t.q. } \|X\|=1} \|AX\|,$$

on a bien :

$$\forall X \in \mathbb{K}^d : \|AX\| \leq \|A\| \|X\|.$$

La fonction  $f$  est donc localement en temps globalement lipschitzienne en espace, et donc localement lipschitzienne en espace.

Par le TCL global, il existe une unique solution maximale  $Y$  de classe  $C^1$  sur un intervalle de définition  $(\alpha, \beta) \subset J$ .

Supposons par l'absurde que  $\beta$  n'est pas l'extrémité droite de  $J$ . Il existe alors  $t_1 > \beta$  t.q.  $t_1 \in J$ . Puisque  $[t_0, t_1]$  est un segment de  $J$ , il existe  $\mu, \gamma > 0$  tels que :

$$\forall t \in [t_0, t_1] : \begin{cases} \|A(t)\| \leq \mu, \\ \|B(t)\| \leq \gamma. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout  $t \in [t_0, \beta)$  :

$$Y(t) = Y_0 + \int_{t_0}^t f(s, Y(s)) ds.$$

Et donc :

$$\|Y(t)\| \leq \|Y_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, Y(s))\| ds \leq \|Y_0\| + \int_{t_0}^t (\|A(s)\| \|Y(s)\| + \|B(s)\|) ds \leq \|Y_0\| + \gamma(t - t_0) + \mu \int_{t_0}^t \|Y(s)\| ds.$$

Par le lemme de Gronwall, on peut écrire :

$$\|Y(t)\| \leq (\|Y_0\| + \gamma(t - t_0)) \exp(\mu(t - t_0)) \leq (\|Y_0\| + \gamma(t - t_0)) \exp(\mu(\beta - t_0)).$$

Donc  $Y$  est bornée sur  $[t_0, \beta)$  et est solution maximale de (PCL) et  $\beta$  n'est pas l'extrémité droite de  $J$ . Cela contredit le théorème de sortie de tout compact. On en déduit que  $\beta$  est l'extrémité droite de  $J$ . Par un argument similaire, on trouve  $\alpha$  est l'extrémité gauche de  $J$ . La solution  $Y$  est donc l'unique solution maximale et est définie sur  $(\alpha, \beta) = J$ .  $\square$

*Remarque.* L'unicité vient du théorème de Cauchy-Lipschitz : la preuve fait appel au TCL global afin d'obtenir une solution  $Y$  maximale du problème de Cauchy et définie sur un intervalle inclus dans  $J$ . La seconde partie de la preuve est de montrer que ce sous-intervalle est  $J$ .

## 6.2 Systèmes différentiels linéaires homogènes — matrice résolvante

**Définition 6.3.** Avec les notations précédentes, un système différentiel  $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$  est dit *homogène* lorsque  $B \equiv 0$ .

*Remarque.* Lorsque  $A \in C^0(I, \text{Mat}_d(\mathbb{K}))$ , on note :

$$\Phi(t, t_0, y_0) = y(t)$$

pour  $t, t_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{K}^d$  la valeur de la solution globale du problème de Cauchy à l'instant  $t$  :

$$\begin{cases} Y'(s) &= A(s)Y(s) \\ Y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

**Définition 6.4.** Notons  $S_H$  l'ensemble des fonctions dérivables sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}^d$ , solutions de  $Y'(t) = A(t)Y(t)$ .

**Proposition 6.5.**  $S_H$  est un espace vectoriel.

*Démonstration.* EXERCICE. □

**Proposition 6.6.** Pour  $t \in I$ , l'application :

$$\varphi_t : S_H \rightarrow \mathbb{K}^d : y \mapsto y(t)$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

*Démonstration.* La linéarité est triviale par opérations sur les fonctions, et la bijection vient directement du théorème de Cauchy linéaire. □

**Corollaire 6.7.**  $\dim S_H = d$ .

**Définition 6.8.** Pour  $t, t_0 \in I$ , on appelle *matrice résolvante*  $R(t, t_0)$  la matrice de  $(\varphi_t \circ \varphi_{t_0}^{-1})$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}^d$ .

*Remarque.* Pour les notations précédentes, on a :

$$(\varphi_t \circ \varphi_{t_0}^{-1})(y_0) = \Phi(t, t_0, y_0) = R(t, t_0)y_0.$$

**Proposition 6.9.** Soient  $s, t, t_0 \in I$ . Alors :

1.  $R(t, t_0) \in GL_d(\mathbb{K})$  et  $R(t_0, t_0) = \text{Id}$  ;
2.  $R(t, s)R(s, t_0) = R(t, t_0)$  ;
3.  $R(t, t_0)^{-1} = R(t_0, t)$ .

*Démonstration.*

1.  $(\varphi_t \circ \varphi_{t_0}^{-1})$  est une application linéaire bijective de  $\mathbb{K}^d \rightarrow \mathbb{K}^d$  donc  $R(t, t_0) \in GL_d(\mathbb{K})$ . De plus,  $R(t_0, t_0) = (\varphi_{t_0} \circ \varphi_{t_0}^{-1}) = \text{Id}$ .
2. Soit  $y \in \mathbb{K}^d$ . Calculons :

$$R(t, s)R(s, t_0)y = \left( (\varphi_t \circ \varphi_s^{-1}) \circ (\varphi_s \circ \varphi_{t_0}^{-1}) \right) (y) = (\varphi_t \circ \varphi_{t_0}^{-1}) (y) = R(t, t_0)y.$$

Et donc  $R(t, s)R(s, t_0) = R(t, t_0)$ .

3. On observe :

$$R(t, t_0)^{-1} = \text{Mat}_{B_C} \left( \varphi_t \circ \varphi_{t_0}^{-1} \right)^{-1} = \text{Mat}_{B_C} \left( \varphi_{t_0} \circ \varphi_t^{-1} \right) = R(t_0, t),$$

où  $\text{Mat}_{B_C}(f)$  représente la matrice de l'application  $f$  dans la base canonique de son ensemble d'arrivée. □

**Définition 6.10.** On appelle *système fondamental de solutions* (abrégé SFS) de  $Y(= AY)$  toute base de l'espace  $S_H$ .

**Proposition 6.11.** Soient  $v_1, \dots, v_k \in S_H$ . Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

- $\{v_1, \dots, v_k\}$  forment un SFS ;
- $\forall t \in I : \det(v_1(t), \dots, v_k(t)) \neq 0$  ;

$$\text{— } \exists t \in I : \det(v_1(t), \dots, v_k(t)) \neq 0.$$

Démonstration. Montrons d'abord que (1)  $\Rightarrow$  (2). L'application  $\varphi_t$  envoie  $(v_i)_i$  sur une base de  $\mathbb{K}^d$  car c'est un isomorphisme. On en déduit que  $(v_i(t))_i$  est une base de  $\mathbb{K}^d$ . Le déterminant ne peut donc pas être nul.

Il est trivial que (2)  $\Rightarrow$  (3) car  $I \neq \emptyset$ .

Pour montrer que (3)  $\Rightarrow$  (1), on sait que  $\varphi_t$  envoie  $(v_i(t))_i$  sur une base de  $S_H$ , et donc  $(v_i)_i$  est une base de  $S_H$ , ou encore un système fondamental de solutions.  $\square$

**Définition 6.12.** On appelle *matrice fondamentale* de l'équation  $Y' = AY$  toute « matrice »  $t \mapsto C(t)$  dont les colonnes  $t \mapsto C_i(t)$  forment une base de  $S_H$ .

**Proposition 6.13.** Si  $t \mapsto C(t)$  est une matrice fondamentale de  $Y' = AY$  et  $R(t, t_0)$  en est la matrice résolvante, alors :

$$\forall (s, t) \in I^2 : R(t, s)C(s) = C(t),$$

et par suite :

$$\forall (t, s) \in I^2 : R(t, s) = C(t)C(s)^{-1}.$$

Démonstration. On prend  $t \mapsto C_i(t)$  pour  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$  les colonnes de la matrice  $t \mapsto C(t)$ . On pose  $D_i$  définie par :

$$t \mapsto D_i(t) := [R(t, s)C(s)]_i.$$

On sait que  $C_i$  est solution de  $Y' = AY$  sur  $I$  avec  $C_i(s) = [C(s)]_i$ .

$D_i$  est également solution de  $Y' = AY$  sur  $I$  avec  $D_i(s) = [R(t, s)C(s)]_i$ .

Par le théorème de Cauchy linéaire, on a unicité de la solution, et donc :

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket : C_i = D_i,$$

d'où la formule suivante :

$$R(t, s) = C(t)C(s)^{-1}.$$

$\square$

*Remarque.* Chaque colonne de  $t \mapsto R(t, t_0)$  est dérivable sur  $I$ , solution de  $Y' = AY$ . On en déduit que  $R(t, t_0)$  est dérivable sur  $I$  et vérifie le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall t \in I : Z'(t) = A(t)Z(t) \\ Z(t_0) = \text{Id}, \end{cases}$$

avec  $Z : I \rightarrow \text{Mat}_d(\mathbb{K})$ .

Ainsi  $t \mapsto R(t, t_0)$  est solution d'un problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 dont la matrice à l'instant  $t$  n'est (en général) par  $A(t)$ .

**Proposition 6.14.** Soit  $A \in \text{Mat}_d(\mathbb{C})$ . Alors :

$$\det(I + hA) \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 + h \text{Tr}(A) + O(h^2).$$

Démonstration. Il existe  $P \in GL_d(\mathbb{C})$  tel que :

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{bmatrix}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \det(I + hA) &= \det(I + hP(P^{-1}AP)P^{-1}) = \det(P(I + hP^{-1}AP)P^{-1}) = \det(I + hP^{-1}AP) \\ &= \prod_{i=1}^d (1 + h\lambda_i) = 1 + \sum_{i=1}^d \lambda_i h + O(h^2). \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A) &= \text{Tr} \left( P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{bmatrix} P^{-1} \right) = \text{Tr} \left( \begin{bmatrix} \lambda_1 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{bmatrix} P^{-1}P \right) \\ &= \text{Tr} \left( \begin{bmatrix} \lambda_1 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{bmatrix} \right) = \sum_{i=1}^d \lambda_i. \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\det(I + hA) = 1 + h \text{Tr}(A) + O(h^2).$$

□

**Proposition 6.15.** La fonction  $t \mapsto \Delta(t) := \det(R(t, t_0))$  est dérivable (en réalité de classe  $C^1$ ) sur  $I$  telle que :

$$\Delta'(t) = \text{Tr}(A(t))\Delta(t), \quad (\text{Équation de Jacobi})$$

et on en déduit :

$$\Delta(t) = \exp \left( \int_{t_0}^t \text{Tr}(A(s)) ds \right) \Delta(t_0). \quad (\text{Équation de Liouville})$$

Démonstration. Prenons  $t, t_0 \in I$ , et  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $h + t_0 \in I$ . Calculons :

$$\Delta(t + h) = \det(R(t + h, t_0)) = \det(R(t + h, t_0)R(t_0, t)R(t, t_0)) = \det(R(t + h, t)) \det(R(t, t_0)).$$

Or, puisque  $Z : t \mapsto R(t, t_0)$  satisfait  $Z'(t) = A(t)Z(t)$ , en développement d'ordre 1, on a :

$$R(t + h, t) \underset{h \rightarrow 0}{=} R(t, t) + hA(t)R(t, t) + o(h).$$

D'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} \Delta(t + h) &\underset{h \rightarrow 0}{=} \Delta(t) \det(I + hA(t) + o(h)) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \Delta(t) \det(I + hA(t)) + o(h) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \Delta(t) (1 + h \text{Tr}(A(t))) + O(h^2) + o(h). \end{aligned}$$

Puisque  $f = O(h^2) \Rightarrow f = o(h)$ , on trouve :

$$\Delta(t+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \Delta(t) + h\Delta'(t) + o(h).$$

Pour  $h \neq 0$ , on sait donc :

$$\frac{\Delta(t+h) - \Delta(t)}{h} = \Delta'(t) + o(1).$$

Dès lors,  $\Delta(t)$  est dérivable en  $t$  et  $\Delta'(t) = \text{Tr}(A(t))\Delta(t)$ .

De plus, les fonctions  $t \mapsto \Delta(t)$  et  $t \mapsto \Delta(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(s)) ds\right)$  sont solutions, sur  $I$ , de :

$$\begin{cases} y'(t) = \text{Tr}(A(t))y(t) \\ y(t_0) = \Delta(t_0) \end{cases}.$$

Par le théorème de Cauchy linéaire, les équations de Jacobi et de Liouville coïncident sur  $I$ . □

## 6.3 Systèmes linéaires linéaires inhomogènes — variation des constantes

### 6.3.1 Structure de l'espace des solutions

On revient au cas où  $B \neq 0$ , et on considère :

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t),$$

avec  $A \in C^0(I, \text{Mat}_d(\mathbb{K}))$  et  $B \in C^0(I, \mathbb{K}^d)$  données et  $Y : I \rightarrow \mathbb{K}^d$  dérivable et inconnue.

**Théorème 6.16.** *Si  $Y_p$  est une solution de  $Y' = AY + B$  (que l'on appelle solution particulière), alors :*

$$S = Y_p + S_H,$$

*où  $S$  est l'ensemble des fonctions dérivables solutions de  $Y' = AY + B$ , que l'on appelle également espace affine par  $Y_p$  de direction  $S_H$*

Démonstration. Montrons que  $S \subseteq S_H + Y_p$ . Soit  $Y \in S$ . Alors, on sait que  $Z := Y - Y_p$  est dérivable sur  $I$  tel que :

$$Z'(t) = Y'(t) - Y_p'(t) = (A(t)Y(t) + B(t)) - (A(t)Y_p(t) + B(t)) = A(t)(Y(t) - Y_p(t)) = A(t)Z(t).$$

Donc on sait que  $Z = Y - Y_p \in S_H$ , ou encore  $Y \in S_H + Y_p$ .

Montrons ensuite que  $S_H + Y_p \subseteq S$ . Soit  $Y \in S_H$ . La fonction  $Z := Y_p + Y$  est dérivable sur  $I$ , et on a :

$$Z'(t) = Y_p'(t) + Y'(t) = A(t)(Y_p(t) + Y(t)) + B(t).$$

On en déduit que la fonction  $Z = Y + Y_p \in S$ . Dès lors, on a bien :

$$S_H + Y_p \subseteq S \subseteq S_H + Y_p,$$

ou encore  $S_H + Y_p = S$ . □

### 6.3.2 Recherche d'une solution particulière — variation de la constante

Connaissant  $R(t, t_0)$ , soit un système fondamental de solutions où  $R(t, t_0)$  est la matrice résolvante de  $Y' = AY$ . On cherche une solution  $t \mapsto y(t)$  dérivable sur  $I$  de :

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$$

sous la forme  $y(t) = R(t, t_0)x(t)$ .

Si  $y$  est solution de  $Y' = AY + B$ , alors :

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t) = \frac{d}{dt} (R(t, t_0)x(t)) = \left( \frac{d}{dt} R(t, t_0) \right) x(t) + R(t, t_0)x'(t).$$

Or  $\frac{d}{dt} R(t, t_0) = A(t)R(t, t_0)$ . Ainsi :

$$y'(t) = A(t)R(t, t_0)x(t) + R(t, t_0)x'(t) = A(t)y(t) + B(t).$$

D'où  $R(t, t_0)x'(t) = B(t)$  par identité.

Soit  $x'(t) = R(t_0, t)B(t)$ . Ainsi :

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t R(t_0, s)B(s) ds,$$

ou encore :

$$R(t_0, t)y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t R(t_0, s)B(s) ds.$$

On trouve finalement pour solution particulière :

$$y(t) = R(t, t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^t R(t, s)B(s) ds. \quad (\text{Formule de Duhamel})$$

### 6.3.3 Équations scalaires — Wronskien

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$y^{(d)}(t) + u_{d-1}(t)y^{(d-1)}(t) + u_{d-2}(t)y^{(d-2)}(t) + \dots + u_1(t)y'(t) + u_0(t)y(t) = b(t),$$

où  $u_0, \dots, u_{d-1} \in C^0(I, \mathbb{K})$ ,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non-vide,  $b \in C^0(I, \mathbb{K})$  connus, et  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$   $d$  fois dérivable, inconnue.

Posons :

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y^{(d-1)}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^d.$$

Pour  $A$  définie par :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -u_0(t) & -u_1(t) & \dots & -u_{d-2}(t) & -u_{d-1}(t) \end{bmatrix},$$



et  $B(t)$  défini par :

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix},$$

on a :

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t).$$

**Définition 6.17.** Lorsque  $b \equiv 0$ , on appelle *Wronskien* de  $y_1, \dots, y_d$  la fonction :

$$W : I \rightarrow \mathbb{K} : t \mapsto \det(y_1(t), \dots, y_d(t)).$$

**Proposition 6.18.** Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

1.  $y_1, \dots, y_d$  forme un système fondamental de solutions ;
2.  $\forall t \in I : W(t) \neq 0$  ;
3.  $\exists t \in I$  t.q.  $W(t) \neq 0$ .

Démonstration. EXERCICE. □

**Proposition 6.19.**

$$\forall (t, t_0) \in I^2 : W(t) = \exp \left[ - \int_{t_0}^t u_{d-1}(s) ds \right] W(t_0) \quad (\text{Formule de Liouville pour le Wronskien})$$

## 6.4 Systèmes différentiels à coefficients constants

### 6.4.1 Rappels d'algèbre linéaire — forme normale de Jordan

**Proposition 6.20** (Réduction des matrices nilpotentes). Soit  $M \in \text{Mat}_d(\mathbb{C})$  une matrice nilpotente. Il existe  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{d-1}) \in \{0, 1\}^d$  et  $P \in \text{GL}_d(\mathbb{C})$  tels que :

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \epsilon_{d-1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Démonstration. Admis. □

**Définition 6.21.** Soit  $P \in \mathbb{K}[x]$  un polynôme. On dit que  $P$  est *scindé* lorsque  $P$  est le produit de polynômes de degré 1.

**Proposition 6.22** (Décomposition de Dunford). Soit  $M \in \text{Mat}_d(\mathbb{C})$ . Il existe  $D, N \in \text{Mat}_d(\mathbb{C})$  uniques

telles que :

$$\begin{cases} M &= D + N \\ DN &= ND \end{cases},$$

et  $D$  est diagonalisable et  $N$ , nilpotente.

*Remarque.* Les matrices  $D$  et  $N$  sont des polynômes en  $M$ .

Démonstration. Pour prouver cela, trouvons d'abord une expression pour les matrices  $D$  et  $N$ , et ensuite montrons qu'elles sont bien respectivement diagonalisable et nilpotente. Il ne restera plus alors qu'à prouver leur unicité.

Prenons  $\pi(M)$  le polynôme caractéristique de la matrice  $M^1$ . Le degré de  $\pi(M)$  est  $d$ . Par le théorème fondamental de l'algèbre (théorème de D'Alembert-Gauß),  $\pi(M)$  est scindé. En particulier, il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  dans  $\mathbb{C}$  deux à deux distincts et  $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}^*$  tels que  $\sum_{i=1}^p n_i = d$  et :

$$P = \prod_{j=1}^p (x - \lambda_j)^{n_j}.$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton, on sait que :

$$\pi(M)(M) = 0.$$

Par le théorème de décomposition du noyau, on a :

$$\mathbb{C}^d = \text{Ker}(\pi(M)(M)) = \bigoplus_{j=1}^p C_j,$$

pour  $C_j := \text{Ker}((M - \lambda_j I)^{n_j})$ .

Pour  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , on pose :

$$Q_i := \prod_{j \neq i} (x - \lambda_j)^{n_j}.$$

Les  $Q_i$  sont premiers entre eux dans leur ensemble. On peut donc y appliquer la relation de Bezout. Il existe  $U_1, \dots, U_p \in \mathbb{C}[x]$  tels que :

$$\sum_{i=1}^p U_i Q_i = 1.$$

Posons donc  $P_i := U_i Q_i$ . On peut donc écrire :

$$\sum_{i=1}^p P_i(M) = \text{Id}. \quad (\star)$$

Pour  $i \neq j$ , calculons :

$$P_i(M)P_j(M) = U_i(M)P_i(M)U_j(M)P_j(M) = 0,$$

car  $\pi(M) | Q_i Q_j$  et donc  $Q_i(M)Q_j(M) = 0$ .

---

1. Que l'on peut également noter  $\chi_M$ .

En multipliant  $(\star)$  par  $P_j(M)$ , on a :

$$P_j(M)^2 = P_j(M).$$

$P_j(M)$  est donc un projecteur (une application égale à son carré).

On sait que :

$$\begin{cases} \text{Im } P_i(M) & \subset C_i \\ \text{Ker } P_i(M) & \subset \bigoplus_{j \neq i} C_j. \end{cases}$$

Or, par le théorème du rang, on sait que  $d = \dim \text{Ker } P_i(M) + \dim \text{Im } P_i(M)$ , avec :

$$\begin{cases} \dim \text{Ker } P_i(M) & \leq \sum_{j \neq i} \dim C_j, \\ \dim \text{Im } P_i(M) & \leq \dim C_i. \end{cases}$$

Cela force donc  $\sum_{j=1}^p \dim C_j = d$ , et donc cela force les inégalités en égalités :

$$\begin{cases} \text{Ker } P_i(M) & = \bigoplus_{j \neq i} C_j, \\ \text{Im } P_i(M) & = C_i. \end{cases}$$

$P_i$  est donc plus précisément le projecteur sur  $C_i$  parallèlement à  $\bigoplus_{j \neq i} C_j$ .<sup>2</sup>

Posons :

$$D := \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i(M).$$

Alors  $D \in \mathbb{K}[M]$  et  $\exists N \in \mathbb{K}[M]$  t.q.  $M = D + N$  (prenons  $N := M - D$ ).

Il reste à voir que  $D$  est diagonalisable et  $N$  est nilpotente.

Soient  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $x \in C_i$ . Calculons :

$$Dx = \sum_{j=1}^p \lambda_j P_j(M)x = \lambda_i x.$$

Puisque  $\mathbb{K}^d = \bigoplus_{j=1}^p C_j$ , il vient  $D$  diagonalisable avec  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ .

En posant  $n := \max(n_1, \dots, n_p)$ , on a  $n \geq 1$ , et en prenant  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $x \in C_i$ , on trouve :

$$N^n x = (M - D)^n x = (M - D)^{n-n_i} (M - D)^{n_i} x = (M - D)^{n-n_i} (M - \lambda_i I)^{n_i} x,$$

car  $x \in C_i$ . On a donc  $N^n x = N^{n-n_i} \cdot 0 = 0$ . La matrice  $n$  est donc nilpotente d'ordre  $\leq n$ . Nous avons donc montré l'existence d'un tel couple  $(D, N)$  de matrices.

Prouvons maintenant l'unicité de ces matrices.

Supposons qu'il existe  $N_1, D_1$  respectivement nilpotente et diagonalisable telles que :

$$\begin{cases} M & = D_1 + N_1 \\ N_1 D_1 & = D_1 N_1. \end{cases}$$

---

2. Notons tout de même que les  $C_i$  sont des noyaux de polynômes en  $M$ . Ils sont donc  $M$ -stables, ou encore stables par la transformation linéaire associée à  $M$ .

Alors ces matrices commutent à  $M$ , et donc à tout polynôme en  $M$ . Or  $D$  et  $N$  sont des polynômes en  $M$ . Donc  $N_1$  et  $D_1$  commutent à  $N$  et  $D$ .

$D$  et  $D_1$  commutent et sont diagonalisables. Elles sont donc diagonalisables dans la même base, et donc  $D - D_1$  est diagonalisable également. Or puisque  $N + D = N_1 + D_1$ , on a  $D - D_1 = N - N_1$ . De plus,  $N$  et  $N_1$  commutent et sont nilpotentes. Donc la matrice  $N - N_1$  est nilpotente.

On en déduit que la seule valeur propre admise par  $D - D_1$  est 0, et donc  $D - D_1 = 0$  car elle est diagonalisable. Dès lors, on a  $D = D_1$  et  $N = N_1$ .  $\square$

**Définition 6.23.** On appelle *bloc de Jordan* pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $s \in \mathbb{N}^*$  les matrices de la forme :

$$J_s(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

**Théorème 6.24** (Décomposition de Jordan). Soit  $M \in \text{Mat}_d(\mathbb{C})$ . Il existe  $s_1, \dots, s_p \in \mathbb{N}^*$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$  et  $P \in \text{GL}_d(\mathbb{C})$  tels que :

$$M = PJP^{-1},$$

avec :

$$J = \begin{bmatrix} J_{s_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{s_p}(\lambda_p) \end{bmatrix}.$$

*Remarque.* La forme de la matrice  $J$  est donc une matrice diagonale avec les valeurs propres et certaines valeurs 1 sur la diagonale supérieure. C'est une matrice contenant des blocs de Jordan sur sa diagonale.

Démonstration. Par Dunford et par réduction des matrices nilpotentes.  $\square$

## 6.4.2 Exponentielle de matrice

**Proposition 6.25.** Soit  $A \in \text{Mat}_d(\mathbb{C})$ . La série de puissances de terme général  $\frac{t^k A^k}{k!}$  a un rayon de convergence infini.

**Définition 6.26.** On appelle cette série l'*exponentielle de  $A$* , et on la note :

$$\exp(tA) = \sum_{k \geq 0} \frac{(tA)^k}{k!}.$$

Démonstration. Soit  $\|\cdot\|$  une norme d'algèbre sur  $\text{Mat}_d(\mathbb{C})$  (par exemple une norme subordonnée à une norme sur  $\mathbb{C}^d$ ), en particulier telle que :

$$\forall M, N \in \text{Mat}_d(\mathbb{C}) : \|MN\| \leq \|M\| \|N\|.$$

Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \|A^k\| \leq \|A\|^k,$$

et donc :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \left\| \frac{(tA)^k}{k!} \right\| \leq \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k,$$

qui est le terme général d'une série qui converge.

On en déduit que  $\sum_{k \geq 0} \frac{(tA)^k}{k!}$  converge absolument quel que soit  $t \in \mathbb{C}$ . Dès lors,  $R = +\infty$ .  $\square$

**Proposition 6.27.** La fonction  $t \mapsto \exp(tA)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} : \forall p \in \mathbb{N} : \frac{d^p}{dt^p} \exp(tA) = A^p \exp(tA) = \exp(tA) A^p.$$

*Démonstration.* La fonction  $t \mapsto \frac{(tA)^p}{p!}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et la série converge normalement, et donc converge uniformément sur les segments de  $\mathbb{R}$ , de même que ses dérivées à tout ordre (cf Section 1.5), et il suffit de dériver terme à terme.  $\square$

**Proposition 6.28.** Soient  $A, B \in \text{Mat}_d(\mathbb{C})$ . On a :

$$\left( \forall t \in \mathbb{R} : \exp((A+B)t) = \exp(tA) \exp(tB) \right) \iff AB = BA.$$

*Démonstration.* Montrons d'abord que cette égalité implique que  $A$  et  $B$  commutent.

Par la proposition précédente, dérivons. On observe :

$$\frac{d}{dt} \exp(t(A+B)) = (A+B) \exp(t(A+B)) = A \exp(tA) \exp(tB) + B \exp(tA) \exp(tB).$$

De même, pour dérivée seconde, on a :

$$\frac{d^2}{dt^2} \exp(t(A+B)) = (A+B)^2 \exp(t(A+B)),$$

et également :

$$\frac{d^2}{dt^2} \exp(t(A+B)) = A^2 \exp(tA) \exp(tB) + A \exp(tA) B \exp(tB) + A \exp(tA) B \exp(tB) + \exp(tA) \exp(tB) B^2.$$

En évaluant ces deux dernières formules en  $t = 0$  et en les égalisant, on obtient :

$$(A+B)^2 I = A^2 I + A B I + A B I + I B^2.$$

On sait  $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ . En simplifiant, on trouve alors :

$$BA = AB.$$

Montrons alors que si  $AB = BA$ , alors l'égalité est vérifiée.

$$\exp(t(A+B)) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} (A+B)^k = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} \sum_{p=0}^k \frac{k!}{p!(k-p)!} A^p B^{k-p}.$$

En effet, la formule du binôme de Newton est ici applicable car  $AB = BA$ .

En simplifiant les  $k!$ , et en « rentrant »  $t^k$  dans la seconde sommation, on trouve :

$$\sum_{k \geq 0} \sum_{p=0}^k \frac{t^k}{p!(k-p)!} A^p B^{k-p} = \sum_{k \geq 0} \sum_{p=0}^k \frac{t^p}{p!} A^p \frac{t^{k-p}}{(k-p)!} B^{k-p}.$$

On y reconnaît le produit de Cauchy de :

$$\exp(tA) \exp(tB).$$

□

**Corollaire 6.29.** Pour  $s, t \in \mathbb{R}$ , et  $A \in \text{Mat}_d(\mathbb{C})$ , on a :

$$\exp((t+s)A) = \exp(tA) \exp(sA).$$

### 6.4.3 Systèmes différentiels à coefficients constants

Fixons  $A \in \text{Mat}_d(\mathbb{C})$  et considérons un système différentiel  $Y' = AY$ . On a vu que  $t \mapsto R(t, t_0)$  est solution de :

$$\begin{cases} Z'(t) &= A(t)Z(t) \\ Z(t_0) &= \text{Id}. \end{cases}$$

Or la fonction  $t \mapsto \exp(t - t_0)A$  est solution du même problème de Cauchy sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit :

$$\forall (t, t_0) \in \mathbb{R}^2 : R(t, t_0) = \exp((t - t_0)A).$$

*Remarque.* Pour les équations différentielles linéaires homogènes à coefficient constant, calculer un système fondamental de solutions (ou la matrice résolvante) revient à calculer  $t \mapsto \exp(tA)$ .

**Corollaire 6.30.**  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{Tr}(A))$

*Démonstration.* Prenons  $\Delta(t) = \det(R(t, t_0))$ . On sait également, par la formule de Liouville :

$$\Delta(t) = \Delta(0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(s)) ds\right).$$

Or on a  $\Delta(0) = \det(\text{Id}) = 1$ .

En  $t = 1$ , on a :

$$\det(R(1, 0)) = \det\left(\exp((1-0)A)\right) = \det(\exp(A)) = \exp\left(\int_0^1 \text{Tr}(A(s)) ds\right).$$

Puisque  $A$  ne dépend pas de  $t$ , on a :

$$\det(R(1, 0)) = \exp(\text{Tr}(A)).$$

□

**Proposition 6.31.** Si  $A$  et  $J$  sont semblables (c-à-d qu'il existe  $P \in GL_d(\mathbb{C})$  t.q.  $A = PJP^{-1}$ ), alors :

$$\forall s \in \mathbb{R} : \exp(sA) = P \exp(sJ) P^{-1}.$$

*Démonstration.* Passer à la limite dans :

$$\sum_{k=0}^n \frac{s^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{s^k (PJP^{-1})^k}{k!} = P \left( \sum_{k=0}^n \frac{s^k J^k}{k!} \right) P^{-1},$$

car  $(PJP^{-1})^2 = (PJP^{-1})(PJP^{-1}) = PJ(P^{-1}P)JP^{-1} = PJP^{-1}$ . Il reste à appliquer ce résultat par récurrence pour  $k$ .  $\square$

**Corollaire 6.32.** Si l'on sait calculer :

- une décomposition de Jordan de  $A$  (c-à-d  $A = PJP^{-1}$ ),
  - ou une exponentielle d'une matrice sous forme blocs de Jordan,
- alors on sait résoudre  $Y' = AY$  où  $A \in Mat_d(\mathbb{C})$  est fixé.

**Proposition 6.33.** Le flot  $\Phi$  de l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants  $Y'(t) = AY(t)$  est donné par :

$$\forall (t, t_0) \in \mathbb{R}^2 : Y(t) = \Phi(t, t_0, y_0) = \exp((t - t_0)A) Y_0.$$

$\exp((t - t_0)A) \in GL_d(\mathbb{K})$  et  $Y_0 \in \mathbb{K}^d$  et donc  $Y(t) \in \mathbb{K}^d$ .

#### 6.4.4 Exponentielle d'une matrice de Jordan

Soit  $J$ , une réduite de Jordan de  $A \in Mat_d(\mathbb{C})$ . On écrit  $A = PJP^{-1}$ , avec :

$$J = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k(\lambda_p) \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad J_i(\lambda_j) = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{bmatrix}.$$

Pour  $(t, \ell) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$ , on calcule :

$$J^\ell = \begin{bmatrix} J_1^\ell(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k^\ell(\lambda_p) \end{bmatrix},$$

car  $J$  est diagonale par morceaux. On en déduit alors :

$$\exp(tJ) = \begin{bmatrix} \exp(tJ_1(\lambda_1)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(tJ_k(\lambda_p)) \end{bmatrix},$$

et puisque :

$$\exp(tA) = P \exp(tJ) P^{-1},$$

il faut savoir calculer l'exponentielle d'un bloc de Jordan. On calcule :

$$\begin{aligned}
\exp(tJ_i(\lambda_j)) &= \sum_{\ell \geq 0} \frac{t^\ell}{\ell!} J_i^\ell(\lambda_j) = \sum_{\ell \geq 0} \frac{t^\ell}{\ell!} \left( \lambda_j I_{n_i} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \right)^\ell \\
&= \sum_{\ell \geq 0} \frac{t^\ell}{\ell!} \left( \sum_{m=0}^{\ell} \frac{\ell!}{m!(\ell-m)!} \lambda_j^m I_{n_i}^m \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}}_{:=D}^{\ell-m} \right) \\
&= \sum_{\ell \geq 0} \frac{\ell!}{\ell!} \sum_{m=0}^{\ell} \frac{t^m t^{\ell-m} \lambda_j^m}{m!(\ell-m)!} D^{\ell-m} \\
&= \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=0}^{\ell} \frac{(t\lambda_j)^m}{m!(\ell-m)!} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & t & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & t \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}}_{:=D_t}^{\ell-m}.
\end{aligned}$$

On observe :

$$D_t^2 = \begin{bmatrix} 0 & t & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & t \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & t^2 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & t^2 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}.$$

De même, on observe :

$$D_t^3 = \begin{bmatrix} 0 & t & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & t \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & t^3 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}.$$



On généralise pour  $K \in \mathbb{N}^*$  :

$$D_t^K = \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & t & & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & t & & \\ 0 & & & & t & 0 \end{array} \right]^K = \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & \dots & 0 & t^K & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & t^K \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & & 0 \end{array} \right].$$

On déduit l'expression suivante pour  $\exp(tJ_i(\lambda_j))$  :

$$\exp(tJ_i(\lambda_j)) = \exp(t\lambda_j) \cdot \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{array} \right] \quad (@)$$