

MATHF-3001 — Théorie de la mesure

Résolution des TPs

R. Petit

Année académique 2018 - 2019

1 Séance 1

Exercice 1.1. Soient (X, \mathcal{F}) un espace mesurable et $Y \subset X$. Mq $\mathcal{F}_Y := \mathcal{F} \cap Y$ est une σ -algèbre sur Y .

Exercice 1.2.

1. Soit X un ensemble infini. Décrire la σ -algèbre engendrée par la classe des parties finies de X . Que peut-on dire si X est fini ?
2. Dans $X = \llbracket 0, n \rrbracket$, on considère $\mathcal{A} = \{0\}$ et $\mathcal{B} = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$. Décrire $\sigma(\mathcal{A})$ et $\sigma(\mathcal{B})$.

Exercice 1.3. Soient X, Y deux ensembles, et $f : X \rightarrow Y$.

1. Si \mathcal{F} est une σ -algèbre sur Y , mq $\mathcal{A} := f^{-1}(\mathcal{F})$ est une σ -algèbre sur X .
2. Soit \mathcal{A} une σ -algèbre sur X .
 - (a) Mq $\mathcal{F} := \{B \in \mathcal{P}(Y) \text{ s.t. } f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une σ -algèbre sur Y .
 - (b) Que peut-on dire de $f(\mathcal{A})$?

Exercice 1.4. Soient $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ espaces mesurables. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$. Si $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$, mq $f : X \rightarrow Y$ est mesurable ssi $f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$.

Exercice 1.5.

1. Mq toute intersection (non-vide) de classes de Dynkin est une classe de Dynkin.
2. Mq pour tout $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ il existe une plus petite classe de Dynkin au sens de l'inclusion (notée $\lambda(\mathcal{F})$).
3. Mq si \mathcal{D} est une classe de Dynkin stable par intersections finies, alors \mathcal{D} est une σ -algèbre.
4. Mq si $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ est stable par intersections finies, alors $\lambda(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$.

2 Séance 2

Exercice 2.1. Soient (X, \mathcal{F}) un espace mesurable et μ une fonction additive sur \mathcal{A} à valeurs dans \mathbb{R}^+ . Mq les conditions suivantes sont équivalentes :

1. μ est σ -additive ;
2. μ est continue à gauche ;
3. μ est continue à droite.

Donner un exemple de mesure $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ qui ne satisfait pas le point 3. Que faut-il ajouter comme hypothèse pour ce résultat ?

Exercice 2.2. Soit X un ensemble non dénombrable et $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X) \text{ s.t. } A \text{ ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$. Soit $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$ où $\mu(A) = 0 \iff A$ est dénombrable. Mq μ est une mesure sur (X, \mathcal{A}) .

Exercice 2.3. Soit $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Mq $\mathcal{T} := \{A \in \mathcal{A} \text{ s.t. } \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}\}$ est une σ -algèbre.

Exercice 2.4. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, (Y, \mathcal{B}) un espace mesurable et $g : X \rightarrow Y$ une application mesurable. On pose :

$$\nu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty] : B \mapsto \mu(g^{-1}(B)).$$

Mq ν est une mesure sur (Y, \mathcal{B}) .

Exercice 2.5. Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable.

1. Pour $x \in X$, mq δ_x est une mesure.
2. Mq si μ est une mesure sur (X, \mathcal{A}) s.t. $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \iff x \notin A$ alors $\exists C \geq 0$ s.t. $\mu = C\delta_x$.

Exercice 2.6. Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable. Mq la mesure de comptage est une mesure.

Exercice 2.7. Soit X un ensemble fini non-vide. Mq $\mu = \frac{|\cdot|}{|X|}$ est une mesure de proba sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

Exercice 2.8. Soit (X, \mathcal{A}) un espace de mesure.

1. Soit $(\mu_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de mesures sur (X, \mathcal{A}) . Mq $\mu := \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n$ est une mesure.
2. Soit $(\mu_n)_{n \geq 0}$ une suite de mesures. Est-ce que $\mu := \sum_{n \geq 0} \mu_n$ est une mesure ?
3. Pour $n \geq 0$, on définit la mesure μ_n sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ par $\mu_n(A) = |A \cap [n, +\infty)|$.
 — Mq $\forall n \geq 0 : \mu_n$ est bien une mesure et que la suite $(\mu_n)_n$ est décroissante.
 — Est-ce que $\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n$ est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$? Caractériser entièrement μ .

Exercice 2.9. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $(A_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

1. Mq :

$$\mu \left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n \right) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

2. Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\mu \left(\bigcup_{n \geq n_0} A_n \right) < +\infty$, mq :

$$\mu \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n \right) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

Exercice 2.10. Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable. Soient μ, ν deux mesures finies sur (X, \mathcal{A}) telles que $\forall A \in \mathcal{A} :$

$$\mu(A) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \mu(A) = \nu(A).$$

1. *Mq $\mu = \nu$.*

2. *Mq le résultat est faux si l'inégalité est changée en inégalité stricte.*

Exercice 2.11. Soient (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et une partie stable par intersections finies $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ s.t. $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$. Si μ et ν sont deux mesures finies sur (X, \mathcal{A}) telles que $\nu(X) = \mu(X)$ et $\mu = \nu$ sur \mathcal{F} . Mq $\mu = \nu$.

3 Séance 3

Exercice 3.1. Soient \mathbb{B} la tribu borélienne sur \mathbb{R} et \mathcal{L} la mesure de Lebesgue sur \mathbb{B} .

1. $Mq \forall x \in \mathbb{R} : \{x\} \in \mathbb{B}$.
2. $Mq \mathbb{Q} \in \mathbb{B}$ et $\mathcal{L}(\mathbb{Q}) = 0$.
3. Mq une union non-dénombrable d'ensembles négligeables n'est pas nécessairement négligeable.
4. $Mq N \in \mathbb{B}$ est un ensemble négligeable ssi $\forall \varepsilon > 0 : \exists U_\varepsilon$ s.t. $N \subseteq U_\varepsilon$ et $\mathcal{L}(U_\varepsilon) < \varepsilon$.

Exercice 3.2. Montrer qu'une droite E dans \mathbb{R}^2 est de mesure nulle pour \mathcal{L} .

Exercice 3.3. Pour $B \in \mathbb{B}^n$ et $\lambda > 0$, on définit $\lambda B = \{\lambda b\}_{b \in B}$.

1. $Mq \forall \lambda > 0, B \in \mathbb{B}^n : \lambda B \in \mathbb{B}^n$.
2. $Mq \mathcal{L}(\lambda B) = \lambda^n \mathcal{L}(B)$.

Exercice 3.4 (Vrai ou Faux). Justifier les affirmations suivantes :

1. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ est négligeable, alors \bar{E} est négligeable.
2. Il existe un ensemble non-mesurable sur \mathbb{R}^n de complémentaire de mesure extérieure de Lebesgue nulle.
3. Il existe des ensemble non-mesurables dont l'union est mesurable.
4. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ satisfait $\mathcal{L}(\mathring{A}) = \mathcal{L}(\bar{A})$, alors A est mesurable.

4 Séance 4

Exercice 4.1. Soit $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$. Mq si $\forall q \in \mathbb{Q} : f^{-1}((q, +\infty)) \in \mathcal{A}$, alors f est mesurable.

Exercice 4.2. Mq les fonctions f et g sont mesurables sur (\mathbb{R}, \mathbb{B}) .

Exercice 4.3. Soient (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et $(f_k)_{k \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de X dans \mathbb{R} . Mq l'ensemble $A := \{x \in X \text{ s.t. } \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) \text{ existe}\}$ est mesurable.

Exercice 4.4. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-mesurable et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s.t. $g \neq f$ sur un ensemble D au plus dénombrable. Mq g est Borel-mesurable.

Exercice 4.5. Sur un espace mesurable (X, \mathcal{A}) , mq χ_A est mesurable ssi $A \in \mathcal{A}$.

Exercice 4.6. Soient (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Mq f^+ et f^- sont mesurables.

Exercice 4.7. Mq $f : [0, 1) \rightarrow [0, 1) : x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1/2) \\ 2x - 1 & \text{si } x \in [1/2, 1) \end{cases}$ est mesurable.

Mq pour tout $E \subseteq [0, 1)$ mesurable : $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(f^{-1}(E))$.

Exercice 4.8 (Vrai ou Faux). Justifier :

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s.t. $f \circ f$ est mesurable. Alors f est mesurable.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s.t. $|f|$ est mesurable. Alors f est mesurable.
3. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $g \circ f$ est mesurable.
4. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue presque partout, alors f est mesurable.

5 Séance 5

Exercice 5.1. 1. Mq la relation \sim définie sur $[0, 1]$ par $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ est une relation d'équivalence.

2. On note $\hat{x} := \mathbb{R} / \sim$. On pose $F := \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \rho(\hat{x})$ où $\rho(\hat{x})$ est un représentant de \hat{x} (ρ est bien définie par l'axiome du choix). Mq :

$$[0, 1] \subseteq \underbrace{\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (F + q)}_{=: \tilde{F}} \subseteq [-1, 2].$$

3. Mq si $q_1 \neq q_2 \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, alors $(F + q_1) \cap (F + q_2) = \emptyset$.

4. Mq F n'est pas \mathcal{L} -mesurable par l'absurde.

Exercice 5.2 (Ensemble triadique de Cantor). Pour $k \geq 0$, on pose :

$$A_k := \bigcup_{\alpha \in \{0, 2\}^k} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{3^i} \right) + [0, 3^{-k}].$$

On définit l'ensemble triadique de Cantor par $\mathcal{C} := \bigcap_{k \geq 0} A_k$.

1. Mq $\forall k \geq 0 : A_k$ est formé de 2^k intervalles fermés disjoints deux à deux et $\mathcal{L}(A_k) = (2/3)^k$.

2. Mq \mathcal{C} est un borélien non vide et de mesure de Lebesgue nulle.

3. Soit $x \in [0, 1]$. Notons $\alpha_k(x)$ le k chiffre de son développement en base 3. Mq $x \in \mathcal{C} \iff \forall k \geq 0 : \alpha_k(x) \neq 1$.

4. En déduire que \mathcal{C} est en bijection avec $[0, 1]$.

Exercice 5.3. On définit la bijection $f = \theta^{-1}$ (inverse de la bijection ci-dessus).

1. Mq f est strictement croissante et est non-continue.

2. Soit $E \subset [0, 1]$ un ensemble non-mesurable au sens de Lebesgue. Mq $f(E)$ est \mathcal{L} -mesurable mais non Borélien.

6 Séance 6

Exercice 6.1. Soient $X \neq \emptyset$, $a \in X$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Dans l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \delta_a)$, montrons que pour $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable :

$$\int_X f d\delta_a = f(a).$$

Exercice 6.2. Sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, on définit la mesure de Lebesgue \mathcal{L} et la mesure μ suivante :

$$\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^+ : B \mapsto \sum_{k \in B \cap \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + (k+1)^2}.$$

Déterminer si les fonctions suivantes sont intégrables :

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = 0 \\ \ln|x| & \text{si } 0 < |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-1} & \text{si } |x| < 1 \text{ et } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{si } |x| < 1 \text{ et } x \in \mathbb{Q}^c \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$h(x) \equiv 1$$

pour les mesures \mathcal{L} et μ comme défini ci-dessus (pour f et h).

Exercice 6.3. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $(f_k)_{k \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables telles que :

$$f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \dots \geq 0.$$

On définit $f := \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k$ la limite point par point. Mq si $f_1 \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, alors :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu.$$

Donner un contre-exemple avec $f_1 \notin L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Exercice 6.4. Supposons $\mu(X) < +\infty$. Soit $(f_k)_{k \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives sur X telles que $f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } X} f$. Mq si $\forall k \geq 0 : f_k \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, alors :

$$f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu.$$

Exercice 6.5. On définit pour $k \geq 0$:

$$\alpha_k := \int_0^k \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \exp(x/2) dx \quad \text{et} \quad \beta_k := \int_0^k \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \exp(-2x) dx.$$

Calculer $\alpha := \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k$ et $\beta := \lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k$.

Exercice 6.6. Soit $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \varepsilon.$$

7 Séance 7

Exercice 7.1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée. Mq :

1. si f est Riemann-intégrable, alors f est Lebesgue-intégrable et :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\mathcal{L}.$$

2. les fonctions h et H définies ci-dessous sont bien définies et $h \leq f \leq H$ sur $[a, b]$:

$$h(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{|y-x| < \delta} f(y),$$

$$H(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|y-x| < \delta} f(y).$$

3. f est continue en x ssi $H(x) = h(x)$.

4. H et h sont Lebesgue-mesurables et :

$$\int_{[a,b]} H d\mathcal{L} = \inf_P U(f; P) \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} h d\mathcal{L} = \sup_P L(f; P).$$

5. En déduire que f est Riemann-intégrable ssi l'ensemble des discontinuités de f est négligeable.

Exercice 7.2.

1. Mq si $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable et bornée sur $[a, b]$ pour tous $b > a$, alors :

$$\int_{[a, +\infty)} f d\mathcal{L} = \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

2. Mq si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable et bornée sur $[c, b]$ pour tous $c \in (a, b)$, alors :

$$\int_{[a,b]} f d\mathcal{L} = \int_a^b f(x) dx.$$

Exercice 7.3. \mathbb{Q} est dénombrable donc $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ l'est aussi. Donc $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_k\}_{k \geq 0}$. Pour $k \geq 0$, on définit :

$$f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{q_\ell\}_{\ell=0}^k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Mq $\forall k \geq 0 : f_k$ est Riemann-intégrable et déterminer :

$$\int_0^1 f_k(x) dx.$$

2. Mq $f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{CVS sur } [0,1]} f$. Que peut-on en déduire ?

3. Mq f est Lebesgue-intégrable et vérifier les hypothèses du théorème de la convergence dominée.

8 Séance 8

Exercice 8.1. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

1. Si $\mu(X) < +\infty$, mq si p et q sont des réels tels que $1 \leq q \leq p \leq +\infty$, alors :

$$L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \subset L^q(X, \mathcal{A}, \mu) \subset L^1(X, \mathcal{A}, \mu).$$

2. Considérons la fonction suivante :

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^{-\frac{1}{q}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{Mq } u \in L^p(\mathbb{R}) \setminus L^q(\mathbb{R}).$$

3. Considérons la fonction suivante :

$$v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^{-\frac{1}{p}} & \text{si } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{Mq } u \in L^q(\mathbb{R}) \setminus L^p(\mathbb{R}).$$

4. A-t-on $L^q(\mathbb{R}) \subseteq L^\infty(\mathbb{R})$ et $L^\infty(\mathbb{R}) \subseteq L^q(\mathbb{R})$?

Exercice 8.2 (Inégalité de Chebyshev). Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $f : X \rightarrow [0, +\infty)$ une application mesurable. Mq

$$\forall \alpha > 0 : \mu(\{x \in X \text{ s.t. } f(x) \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int f d\mu.$$

De plus, si $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une application mesurable croissante, alors :

$$\forall \alpha > 0 : \mu(\{x \in X \text{ s.t. } f(x) \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\Phi(\alpha)} \int \Phi(f(x)) d\mu(x).$$

Exercice 8.3. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable.

1. Mq :

$$\liminf_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L^p} \geq \|f\|_{L^\infty},$$

et donner un exemple où l'inégalité est infinie à gauche et finie à droite.

2. Supposons qu'il existe $q \in [1, +\infty)$ s.t. $f \in L^q(X)$.

(a) Mq f est finie μ -ae.

(b) Supposons que $0 \leq \|f\|_{L^\infty} < +\infty$. Mq si $p \in (q, +\infty)$, alors :

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{q}{p}} \cdot \|f\|_{L^q}^{\frac{q}{p}},$$

et en déduire que :

$$\limsup_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

(c) Conclure.

Exercice 8.4 (Inégalité d'interpolation). Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $1 \leq p \leq r \leq q \leq +\infty$ et

$\theta \in (0, 1)$ tels que :

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Ma si $u \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \cap L^q(X, \mathcal{A}, \mu)$, alors $u \in L^r(X, \mathcal{A}, \mu)$ et :

$$\|u\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p}^\theta \cdot \|u\|_{L^q}^{1-\theta}.$$

Remarque : En corolaire de ce théorème, on déduit que si $f \in L^1 \cap L^\infty$ (i.e. si f est μ -intégrable et essentiellement bornée), alors $f \in L^p$ pour tout p . Et ça, c'est chouette.

9 Séance 9

Exercice 9.1. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $p \in [1, +\infty)$, $(f_k)_{k \geq 0} \in L^p(\mathbb{N})$ s.t. $f_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mu\text{-a.e.}} f$. Mq les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- a) $\|f - f_k\|_{L^p} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$.
- b) $f \in L^p$ et $\|f_k\|_{L^p} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \|f\|_{L^p}$.

Exercice 9.2 (Lemme de Brézis-Lieb). Soient X un ouvert de \mathbb{R}^n , $p \in [1, +\infty)$ et $(u_k)_{k \geq 0} \in L^p(X, \mathcal{B}(X), \mathcal{L})^{\mathbb{N}}$ où \mathcal{L} est la mesure de Lebesgue sur X . On suppose que $(u_k)_k$ est bornée dans L^p et que $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}\text{-a.e.}} u$. Montrons que $u \in L^p(X)$ et :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\|u_k\|_{L^p}^p - \|u - u_k\|_{L^p}^p) = \|u\|_{L^p}^p.$$

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, mq $\exists C_\varepsilon = C(\varepsilon, p) > 0$ s.t. $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$\|a + b\|^p - |a|^p - |b|^p \leq \varepsilon |a|^p + C_\varepsilon |b|^p.$$

2. À $\varepsilon > 0$ fixé, on pose :

$$f_k^\varepsilon := \left(\|u_k\|^p - \|u - u_k\|^p - \|u\|^p - \varepsilon \|u_k - u\|^p \right)^+.$$

Calculer :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int f_k^\varepsilon d\mathcal{L}.$$

3. Conclure.

Exercice 9.3. Soit $p \in [1, +\infty)$. Montrer les affirmations suivantes :

1. L'espace des fonctions simples est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.
2. L'espace des fonctions en escalier est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.
3. L'espace des fonctions continues à support compact $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.
4. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^p} \xrightarrow[|h| \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Que dire du cas $p = +\infty$?

10 Séance 10

Exercice 10.1. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $(f_k)_{k \geq 0}$ suite d'applications mesurables de X dans \mathbb{R} et $p \in [1, +\infty]$. Justifier les affirmations suivantes :

1. La convergence μ -ae n'implique pas la convergence en L^p , sauf si la suite $(f_k)_k$ est bornée par $g \in L^p$.
2. La convergence en L^p implique la convergence en mesure.
3. La convergence μ -ae n'implique pas la convergence en mesure, sauf si $\mu(X) \leq +\infty$.
4. La convergence en mesure n'implique pas la convergence μ -ae, mais seulement la convergence μ -ae d'une sous-suite.
5. La convergence en mesure n'implique pas la convergence en L^p , sauf si la suite $(f_k)_k$ est bornée par $g \in L^p$.
6. La convergence presque uniforme implique la convergence en mesure.
7. La convergence μ -ae n'implique pas la convergence presque uniforme.
8. Si $\mu(X) \leq +\infty$, la convergence μ -ae implique la convergence presque uniforme.

11 Séance 11

Exercice 11.1. On considère l'espace mesuré $([0, 1]^2, \mathcal{M}, \mu)$ avec $\mu = \mathcal{L}_1 \times \#$ où $\#$ est la mesure de comptage. On pose $\Delta := \{(x, x)\}_{x \in [0, 1]}$. Calculer :

$$\int_{[0, 1]} \left(\int_{[0, 1]} \chi_{\Delta}(x, y) d\mathcal{L} \right) d\#$$

et

$$\int_{[0, 1]} \left(\int_{[0, 1]} \chi_{\Delta}(x, y) d\# \right) d\mathcal{L}$$

Ceci contredit-il le théorème de Tonelli (Fubini pour les fonctions positives) ?

Exercice 11.2. Soit la fonction suivante :

$$f : [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est Lebesgue-mesurable.

2. Calculer :

$$I := \int_{[-1, 1]} \int_{[-1, 1]} f(x, y) dx dy$$

et :

$$J := \int_{[-1, 1]} \int_{[-1, 1]} f(x, y) dy dx.$$

3. La fonction f est-elle intégrable sur $[-1, 1]^2$?

Exercice 11.3. Soit l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$. On définit :

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow [-1, 1] : (m, n) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ -1 & \text{si } m = n + 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. f est-elle $\# \otimes \#$ intégrable ?

2. Calculer :

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(m, n) d\#(m) d\#(n) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(m, n) d\#(n) d\#(m).$$

3. Le résultat est-il compatible avec le théorème de Fubini ?

Exercice 11.4. Déterminer la valeur de :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

12 Séance 12

Exercice 12.1. Soient (X, \mathcal{A}, μ) , un espace mesuré et $g : X \rightarrow \mathbb{R}^+$, une application mesurable. On définit la mesure $\nu := g \cdot \mu$. Mq si $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une application mesurable, alors :

$$\int_X f d\nu = \int_X fg d\mu.$$

En conclure que le résultat est valable pour $f \in L^1(\nu)$.

Exercice 12.2 (Dérivées de Radon-Nikodym). Soient μ, ν et m des mesures finies sur (X, \mathcal{A}) . Montrer les affirmations suivantes :

1. Si $\mu \ll m$ et $\nu \ll m$, alors $\mu + \nu \ll m$ et :

$$\frac{d(\mu + \nu)}{dm} \stackrel{m\text{-ae}}{=} \frac{d\mu}{dm} + \frac{d\nu}{dm}.$$

2. Si $\mu \ll \nu$ et $\nu \ll m$, alors $\mu \ll m$ et :

$$\frac{d\mu}{dm} \stackrel{m\text{-ae}}{=} \frac{d\mu}{d\nu} \frac{d\nu}{dm}.$$

3. Si $\nu \ll \mu$ et $\mu \ll \nu$, alors :

$$\frac{d\mu}{d\nu} \stackrel{m\text{-ae}}{=} \frac{d\nu}{d\mu}^{-1}.$$

4. Si $\nu \ll \mu$ et f est ν -intégrable, alors :

$$\int f d\nu = \int f \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

Exercice 12.3. Pour $i = 1, 2$, soient μ_i, ν_i mesures finies sur (X, \mathcal{A}) avec $\mu_i \ll \nu_i$. Posons $\nu := \nu_1 \times \nu_2$ et $\mu := \mu_1 \otimes \mu_2$ les mesures produits sur $(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$. Montrer les affirmations suivantes :

1. $\mu \ll \nu$.

- 2.

$$\frac{d\mu}{d\nu}(x, y) \stackrel{\nu\text{-ae}}{=} \frac{d\mu_1}{d\nu_1}(x) \frac{d\mu_2}{d\nu_2}(y).$$