MATHF-105 : Probabilités
Résumé

R. Petit

Année académique 2015 - 2016

Contents

1 Espaces de probabilités

1.1 Rappel sur les séries

Les fonctions logarithmique et exponentielle ont un développement de Taylor exact. Pour la fonction logarithmique, on a, pour $x \in (-1, 1)$:

$$\log(1-x) = -\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}.$$

Si on pose $S_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} u_k$, on a $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite des sommes partielles, et $n \mapsto S_n$, une application croissante si (u_n) est une suite positive. Il y a donc deux situations distinctes possibles :

- (S_n) est une suite bornée ($\exists M \in \mathbb{R}\,\text{t. q.}\, \forall n \in \mathbb{N} : S_n \leq M$) et donc converge vers $S \in \mathbb{R}$;
- (S_n) n'est pas bornée ($\forall M \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}\,\text{t. q.}\, S_n > M$) et donc diverge vers $+\infty$.

1.1.1 Exemple sur les séries

Prenons $u_n \coloneqq x^n$, avec $x > 0$.

- Si $x = 1$, on a $n \to +\infty \Rightarrow S_n \to +\infty$;
- si $x \neq 1$, on a $(1-x)S_n = x - x^{n+1}$, et donc :

$$S_n \coloneqq x\frac{1-x^n}{1-x}.$$

  - Si $x < 1$, alors $x^n \to 0$ pour $n \to +\infty$, et donc $S_n \to \frac{x}{1-x}$;
  - si $x > 1$, alors $x^n \to +\infty$ pour $n \to +\infty$, et donc $S_n \to +\infty$.

1.1.2 Conclusion de la suite géométrique

On voit alors :

$$\sum_{n \geq 1} x^n = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{si } x \in [0,1) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

Si la suite commene à l'indice 0, on a :

$$\sum_{n \geq 0} x^n = 1 + \sum_{n \geq 1} x^n = \begin{cases} 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} & \text{si } x \in [0,1) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

1.2 Définition

Définition 1.1. L'ensemble Ω est l'**espace des chances**, l'ensemble des résultats possibles d'un phénomène aléatoire.

Remarque.

- Ω peut être fini (dénombrable) ou infini ;
- $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites à valeur dans $\{0,1\}$;

- Ω peut être un espace dit *fonctionnel* quand le résultat d'une expérience est une fonction.

Définition 1.2. Un événement E est un ensemble de réalisations possibles à une expérience tel que $E \subseteq \Omega$.

Remarque. L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ n'est pas toujours dénombrable. Et donc l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ est-il le bon ensemble pour décrire les événements ?

- Si $|\Omega| \in \mathbb{N}$: oui ;
- si $|\Omega| \notin \mathbb{N}$: non.

Définition 1.3. $\mathcal{F}$ est la **classe des événements**. On mesure la *probabilité d'occurrence* d'un événement $A \in \mathcal{F}$. On introduit une fonction d'ensemble $\mathbb{P}$ où :

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1] : A \mapsto \mathbb{P}(A).$$

On impose :

(*i*) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

(*ii*) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(*iii*) $\forall A, B \in \mathcal{F} : A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Proposition 1.4. *Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$. On a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_i \le n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{\gamma=1}^{i} A_{k_\gamma}\right).$$

1.2.1 Loi uniforme sur un ensemble fini (ou dénombrable)

Définition 1.5. Soient $m < n \in \mathbb{N}$. On définit l'**intervalle entier** $[\![m,n]\!]$ par :

$$[\![m,n]\!] : \{x \in \mathbb{N} \,\text{t. q.}\, m \le x \le n\}.$$

Définition 1.6. Soit $\Omega = [\![1,n]\!]$. Soit $A \subseteq \Omega$. La loi uniforme est donnée par :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n}.$$

Remarque. Il arrive que $|A|$ soit difficile à déterminer et qu'il faille aller chercher du côté de l'analyse combinatoire.

1.2.2 Loi uniforme sur un ensemble infini (intervalle)

Définition 1.7. Soit $\Omega = [0,1]$ et soit $A = [a,b] \subseteq \Omega$. La loi uniforme est donnée par :

$$\mathbb{P}(A) = (b - a).$$

Remarque. La définition de loi uniforme sur un intervalle fait intervenir la notion de mesure et donc de mesurabilité. Or il existe des parties de Ω sur lesquelles la mesure n'a pas de sens. En général, $\mathcal{P}(\Omega)$ est *trop grand*, et il faut donc remplacer l'utilisation de l'ensemble des parties par la notion de tribu.

Définition 1.8. Soit Ω un ensemble de chances et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ une famille de parties de Ω. On dit que $\mathcal{F}$ est une tribu s'il respecte les trois propriétés suivantes :

- $\emptyset \in \mathcal{F}$;
- $\forall A : A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathcal{F}$;
- $\forall A_1, \ldots, A_n, \ldots : A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{k \geq 1} A_k \in \mathcal{F}$.

Une autre appellation pour une tribu est une σ-algèbre.

Remarque.

- On remarque que $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu, mais une tribu trop grande pour être intéressante ;
- Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors $T := \{\emptyset, A, A^{\complement}, \mathcal{P}(\Omega)\}$ est une tribu. T est la plus petite tribu contenant A, et on l'appelle la **tribu engendrée par** A, que l'on note $\sigma(A)$.

Définition 1.9. Soit I une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$. On appelle la *tribu engendrée par* I la plus petite tribu contenant I et on la note $\sigma(I)$.

En prenant $I := \{$ intervalles ouverts de $[0, 1]\}$, on obtient $\sigma(I)$ que l'on appelle **tribu des boréliens**. [1]

Définition 1.10. Soit Ω un ensemble de chances et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une tribu sur Ω. Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une fonction $\mathbb{P}$ définie par :

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1] : A \mapsto \mathbb{P}(A),$$

où $\mathbb{P}$ satisfait :

(*i*) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

(*ii*) $\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(aA) + \mathbb{P}(A^{\complement}) = 1$;

(*iii*) $\forall A_1, \ldots, A_n, \ldots$ disjoints deux à deux, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k\right) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A_k).$$

Définition 1.11. On appelle $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités.

Remarque. Probabiliser un expérience revient à déterminer :

- Ω, l'espace des chances ;
- $\mathcal{F}$, la classe des événements ;
- $\mathbb{P}$, la fonction d'ensembles sur $\mathcal{F}$.

1.3 Modèles

1.3.1 Modèles discrets

Remarque. On prend Ω un ensemble fini ou dénombrable. On prend également $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Si Ω est fini, on parle de tirages, et si Ω est infini dénombrable, on parle de populations.

[1] Le nom de *borélien* vient du mathématicien français Émile Borel suite à ses travaux sur la théorie de la mesure.

On pose :

$$\mathbb{P} : \{k\} \mapsto p_k \in [0,1],$$

où :

$$\sum_{k\in\Omega} p_k = 1$$

et pour $A = \{k_1, \ldots, k_n\} \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\gamma=1}^{n} p_{k_\gamma}.$$

Définition 1.12 (Modèle de Bernoulli)**.** On prend $\Omega = \{0,1\}$ où :

$$\begin{cases} p_0 & = 1-p \\ p_1 & = p \end{cases}.$$

Remarque. Il est évident que $p + (1-p) = 1 = P(\Omega)$.

Définition 1.13 (Modèle binomial)**.** On prend $\Omega = [\![0, N]\!]$ (et donc $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$) et $p \in [0,1]$. Le modèle binomial est défini par $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{N-k}$ pour tout $k \in [\![0, N]\!]$.

Remarque. On remarque que $\sum_{k\geq 1} p_k = 1$ car les p_k représentent les termes du binôme de Newton $(p + (1-p))^N = 1^N = 1$.

Définition 1.14 (Modèle géométrique)**.** On prend $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Omega) \simeq \mathbb{R}$, et $p \in (0,1)$. Le modèle géométrique est défini par $p_k = (1-p)^{k-1} p$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque. On remarque que :

$$\sum_{k\geq 1} p_k = \sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k\geq 0} (1-p)^k = p \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1,$$

où on utilise la formule de la somme des termes d'une suite géométrique u définie par $u_n = u_{n-1} q$ pour $n \geq 1$ (avec $0 < q < 1$) qui donne :

$$\sum_{k=0}^{N} u_k = u_0 \frac{1-q^{N+1}}{1-q},$$

et pour la série, il suffit de passer à la limite :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} u_k = \lim_{N\to+\infty} u_0 \frac{1-q^{N+1}}{1-q} = u_0 \frac{1}{1-q}.$$

Définition 1.15 (Modèle de Poisson)**.** On prend $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, et un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$. Le modèle poissonien est défini par $p_k = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque. On remarque que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ en utilisant la formule de Taylor de l'exponentielle :

$$\exp(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}.$$

On a effectivement :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(\{k\}) = \sum_{k\geq 0} p_k = \sum_{k\geq 0} \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(-\lambda)\exp(\lambda) = 1.$$

1.3.2 Modèles continus (à densité)

Remarque. On prend Ω un intervalle (fini ou infini[2]) sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{F} = \mathcal{B}(I)$, la tribu des boréliens sur I[3].

Définition 1.16. Soit $f : I \to \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable telle que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Soit $A \in \mathcal{F}$, on pose $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x$. f est appelée fonction de densité de modèle stochastique.

Définition 1.17 (Loi uniforme continue)**.** On prend $I = [a, b]$ avec $a < b ß\mathbb{R}$. Le modèle uniforme est défini par f constante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [a,b] \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \end{cases}.$$

Remarque. On remarque effectivement $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{d}x + 0 = 1.$$

Définition 1.18 (Modèle exponentiel)**.** [4] On prend $I = \mathbb{R}^+$ et $\lambda > 0$. Le modèle exponentiel est défini par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Remarque. On peut calculer l'intégrale impropre comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \lim_{M\to+\infty}\int_0^M f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{M\to+\infty}\big[-\exp(-\lambda x)\big]_0^M = \lim_{M\to+\infty}\big(1-\exp(-\lambda M)\big) = 1. \end{aligned}$$

Définition 1.19 (Modèle gaussien)**.** [5] On prend $I = \mathbb{R}$, et $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$. Le modèle gaussien est défini par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Remarque. Pour que $\mathbb{P}$ soit une probabilité, il faut que f soit définie positive. Or f est une exponentielle multipliée par un coefficient positif. Il faut également $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, ce qui peut se vérifier par :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

en posant $y \coloneqq x - \mu$, et donc $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right).$$

En posant $z \coloneqq \frac{y}{\sigma}$ (et donc $\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{\sigma}$), on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\mathrm{d}z.$$

---

[2] On parle d'intervalle fini pour $[a, b]$, avec $a < b \in \mathbb{R}$ et d'intervalle semi-infini pour $(-\infty, b]$ ou $[a, +\infty)$ et d'intervalle infini pour $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

[3] Ou encore la tribu engendrée par les intervalles de I.

[4] Également appelé *modèle des files d'attente*.

[5] Également appelé *modèle des erreurs* ou encore *modèle normal*.

Une primitive de $\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$ est :

$$\int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}} = \operatorname{Erf}(z).$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Omega)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}}\right) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}}\right) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{2\pi}.
\end{aligned}$$

En passant en coordonnées polaires, on obtient :

$$\mathbb{P}(\Omega)^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \frac{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \mathrm{d}r = \left[-\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right]_0^{+\infty} = 1.$$

On en déduit alors $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ également. $\mathbb{P}$ est donc bien une probabilité.

Définition 1.20. On a défini une probabilité sur $\left(R^+, (R^+)\right)$ via la fonction $f(r) = r\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)$. On l'appelle la *probabilité de Rayleigh.*

1.3.3 Divergence sur la fonction Gamma d'Euler

Définition 1.21 (Fonction Gamma d'Euler)**.** La fonction Gamma d'Euler est définie comme suit :

$$\Gamma : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_0^{+\infty} \exp(-x) x^{t-1}\,\mathrm{d}x.$$

Remarque. On note $\gamma \coloneqq -\Gamma'(1) > 0$ la constante d'Euler-Mascheroni. La question $\gamma \overset{?}{\in} \mathbb{Q}$ est toujours ouverte.

Proposition 1.22. $\forall t > 0 : \Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$.

Démonstration. Soit $t > 0$. Par l'intégration par parties, on a :

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} \exp(-x) x^t\,\mathrm{d}x = \left[-x^t \exp(-x)\right]_0^{+\infty} + t\int_0^{+\infty} \exp(-x) x^{t-1}\,\mathrm{d}x = t\Gamma(t).$$

□

Remarque. Par la proposition 1.22, on peut définir la factorielle de tout nombre naturel par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : n! = \Gamma(n+1)$$

Proposition 1.23 (Formule des compléments)**.** *Soit* $t \in (0,1)$. *Alors :*

$$\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin(\pi t)}.$$

1.3.4 Retour aux modèles stochastiques

Définition 1.24 (Modèle Gamma). [6] On prend $\Omega = \mathbb{R}^+$. Le modèle Gamma est défini par :

$$f_t(x)\frac{x^t - \exp(-x)}{\Gamma(t)}.$$

1.4 Notion de variables aléatoires

[6] Le modèle Γ est une généralisation du modèle exponentiel (définition 1.18).