INFOF-302 — Informatique fondamentale

R. Petit

Année académique 2016 - 2017

Table des matières

1 Introduction et Logique

Définition 1.1. *Réduire* un problème de décision A en un problème de décision B correspond à trouver un algorithme permettant d'encoder toute entrée I_A du problème A en une entrée I_B du problème B telle que I_A a une solution pour le problème A si et seulement si I_B a une solution pour le problème B.
Définition 1.2. *Réduire* un problème général A en un problème B correspond à trouver un algorithme d'encodage de toute entrée I_A du problème A en une entrée I_B du problème B et de décodage de toute sortie O_B en une sortie O_A.
Axiome 1.3. *Pour $\prec$, une relation d'ordre sur la priorité des opérateurs logiques. On prend :*

$$\Leftrightarrow \quad \prec \quad \Rightarrow \quad \prec \quad \bigvee \quad \prec \quad \bigwedge \quad \prec \quad \neg.$$

Afin d'étudier une formule logique, on peut construire son *arbre de lecture* en séparant la formule aux opérateurs, par ordre croissant de priorité.
Définition 1.4. Pour P, un ensemble de propositions, on appelle *fonction d'interprétation* (ou *valuation*) toute fonction :

$$V : P \to \{0,1\} : p \mapsto V(p).$$

Définition 1.5. Soit ϕ une formule bien formée sur un ensemble de propositions P. On définit sa *valeur de vérité* évaluée en $V \in \{0,1\}^P$ par la fonction :

$$[\![\phi]\!]_{.} : \{0,1\}^P \to \{0,1\} : V \mapsto [\![\phi]\!]_V \,,$$

dont la valeur est induite syntaxiquement.

Pour V une valuation, lorsque $[\![\phi]\!]_V = 1$, on note $V \models \phi$, que l'on lit V *satisfait* ϕ.
Définition 1.6. Soit ϕ, une formule sur P.
— lorsque $[\![\phi]\!]_{.}^{-1}(\{1\}) \neq \emptyset$, on dit que ϕ est *satisfaisable* ;
— lorsque $[\![\phi]\!]_{.}^{-1}(\{1\}) = \{0,1\}^P$, on dit que ϕ est *valide*.
Lemme 1.7. *Soit ϕ, une formule sur P. Si ϕ est valide, alors ϕ est satisfaisable.*
Définition 1.8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\{\phi_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ et ϕ, des formules sur P. On dit que ϕ est une conséquence logique de $\{\phi_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ lorsque la formule :

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i \Rightarrow \phi$$

est valide. On note cela $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \phi$.
Définition 1.9. Deux formules ϕ et ψ sur P sont dites *équivalentes* lorsque $\phi \Leftrightarrow \psi$ est valide. On note cela $\phi \equiv \psi$.
Théorème 1.10. *Une formule ϕ sur P est valide si et seulement si sa négation est non-satisfaisable.*

Démonstration. Soit ϕ, une formule valide sur P. On sait alors que $[\![\phi]\!]_{.}^{-1}(\{1\}) = \{0,1\}^P$. On en déduit que :

$$[\![\phi]\!]_{.}^{-1}(\{0\}) = \{0,1\}^P \setminus [\![\phi]\!]_{.}^{-1}(\{1\}) = \emptyset.$$

Or $\forall V \in \{0,1\}^P : [\![\phi]\!]_V = 1 - [\![\neg\phi]\!]_V$. On en déduit que :

$$[\![\neg\phi]\!]_{.}^{-1}(\{1\}) = [\![\phi]\!]_{.}^{-1}(\{0\}) = \emptyset.$$

Idem pour $\Leftarrow$ $\square$

Remarque. On en déduit qu'un algorithme qui détermine la satisfaisabilité d'une expression permet également de déterminer la validité.

Définition 1.11. Un *littéral* est soit une proposition $x \in P$, soit la négation $\neg x$ d'une proposition.
Définition 1.12. Un ensemble S de littéraux est dit *satisfaisable* lorsqu'il ne contient pas une paire de littéraux complémentaires, i.e. :

$$\forall x \in S : \neg x \notin S.$$

Pour déterminer la satisfaisabilité d'une formule, on peut créer son arbre sémantique par application des $\wedge$-règles et $\vee$-règles. Pour cela, on part de de la formule, et on applique le pas de simplification soit dur une conjonction, soit sur une disjonction (en ayant transformé tous les autres opérateurs en conjonctions/disjonctions au préalable).
Exemple 1.1.

$$\begin{aligned}\phi \coloneqq &(x \vee y) \wedge (\neg x \wedge \neg y)\\ &\big\{(x \vee y) \wedge (\neg x \wedge \neg y)\big\}\\ &\big\{(x \vee y, \neg x \wedge y\big\}\\ &\{x \vee y, \neg x, \neg y\}\\ &\{x, \neg x, \neg y\} \quad \{y, \neg x, \neg y\}.\end{aligned}$$

Tous les sous-ensembles de littéraux sont non-satisfaisables, donc la formule ϕ est non-satisfaisable (i.e. $\neg\phi$ est valide).

L'algorithme de création de tableau sémantique pour SAT est le suivant. Soit ϕ une formule sur P. On construit l'arbre T_ϕ comme suit :

1. Initialisation : l'arbre est défini par $T_\phi = \{\phi\}$.
2. Tant qu'il existe une feuille $\mathcal{L} \in T_\phi$ telle que $\exists \psi \in \mathcal{L}$, une formule simplifiable (donc contenant une conjonction ou une disjonction) :
   — si ψ est simplifiable par une $\wedge$-règle, on ajoute une feuille $\mathcal{L}'$ à $\mathcal{L}$ telle que :

   $$\mathcal{L}' = \big(\mathcal{L} \setminus \{\psi\}\big) \cup \{\psi_1, \psi_2\},$$

   pour ψ_1 et ψ_2, les deux sous-formules simplifiées de ψ ;
   — si ψ est simplifiable par une $\vee$-règle, on ajoute deux feuilles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ à $\mathcal{L}$ telles que :

   $$\forall i \in [\![1, 2]\!] : \mathcal{L}_i = \big(\mathcal{L} \setminus \{\psi\}\big) \cup \{\psi_i\},$$

   avec ψ_1 et ψ_2, les deux sous-formules simplifiées de ψ.i
3. S'il existe $\mathcal{L} \in T_\phi$, une feuille telle que $\mathcal{L}$ est satisfaisable, alors retourner `SATISFAISABLE`, sinon retourner `NON-SATISFAISABLE`.

2 Déduction naturelle

Définition 2.1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\{\phi_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$, ψ des formules sur P. Si ψ peut être dérivé des $\{\phi_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$, on appelle ces derniers des *prémisses* et ψ la *conclusion*. On note cela :

$$\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi.$$

On appelle cela un *séquent*.

La déduction naturelle fonctionne par élimination et introduction successives d'opérateurs.

— $\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge_i$ se lit *si ϕ et si ψ, alors ϕ et ψ* ;

— $\frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge_{e_1}$ se lit *si* ϕ *et* ψ*, alors en particulier* ψ.

De même pour $\wedge_{e_2}$, et $\vee_i$. La double négation fonctionne également par introduction et élimination.

La règle d'élimination de l'implication s'appelle *Modus Ponens* (MP) et la règle d'élimination de l'implication par contraposée s'appelle *Modus Tollens* (MT) :
— $\frac{\phi \quad \phi \Rightarrow \psi}{\psi}$ MP se lit *si* ϕ *et si* ϕ *implique* ψ*, alors* ψ *;*
— $\frac{\neg\psi \quad \phi \Rightarrow \psi}{\neg\phi}$ MT se lit *si* ϕ *implique* ψ *et non-*ψ*, alors non-*ϕ.

Afin d'introduire l'implication, on se sert du MT :

1.	$x \Rightarrow y$	prémisse	
2.	$\neg y$	hyp.	
3.	$\neg x$	MT 1, 2 ; fin hyp. 2	On déduit donc $\neg y \Rightarrow \neg x$.
4.	$\neg \Rightarrow \neg y$	$\Rightarrow_i$ 2, 3	

De manière plus générale, si en faisant l'hypothèse ϕ, on arrive à la conclusion ψ, pour ϕ, ψ deux formules sur P, alors :

$$\cfrac{\begin{array}{ll} \phi & \text{hyp.} \\ \vdots & \\ \psi & \text{fin hyp.} \end{array}}{\phi \Rightarrow \psi} \Rightarrow_i$$

Remarque. Les prémisses et les hypothèses sont fondamentalement différentes ! Une hypothèse peut être émise même sans hypothèse, e.g. :

1.	p	hyp.
2.	$\neg\neg p$	$\neg\neg_i$ 1 ; fin hyp. 1
3.	$p \Rightarrow \neg\neg p$	$\Rightarrow_i$ 1, 2

On peut donc déduire de cela que $\vdash p \Rightarrow \neg\neg p$.

Afin d'éliminer la disjonction, on procède de la sorte :

$$\cfrac{\begin{array}{lllll} & \phi_1 & \text{hyp.} & \phi_2 & \text{hyp.} \\ & \vdots & & \vdots & \\ \phi_1 \vee \phi_2 & \psi & \text{fin hyp.} & \psi & \text{fin hyp.} \end{array}}{\psi} \vee_e$$

Définition 2.2. Toute formule ϕ sur P telle que $\vdash \phi$ est appelée *théorème*.

Un théorème n'a donc pas besoin de prémisse. De plus, $\vdash \phi$ si et seulement si $\models \phi$, donc les théorèmes coïncident avec les formules valides.

Lemme 2.3. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$, $\{\phi_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$, ψ *des formules sur* P. *Alors :*

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi \qquad \textit{si et seulement si} \qquad \vdash \phi_1 \Rightarrow \phi_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \phi_n \Rightarrow \psi.$$

Afin d'introduire la négation, on suppose une formule, et on en dérive $\perp$, ce qui permet d'en déduire sa négation. Cela se formule :

$$\cfrac{\begin{array}{ll} \phi & \text{hyp.} \\ \vdots & \\ \perp & \text{fin hyp.} \end{array}}{\neg\phi} \neg_i$$

Un raisonnement par l'absurde (reductio ad absurdum) se formalise par une introduction de double négation :

$$\dfrac{\begin{array}{ll} \neg\phi & \text{hyp.} \\ \vdots & \\ \bot & \text{fin hyp.} \end{array}}{\neg\neg\phi}\,\mathsf{RAA},$$

qui se note :

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\neg\neg_i.$$

Ce qui est également équivalent à la loi du tiers exclus, que l'on peut formuler $\phi \Rightarrow \neg(\neg\phi)$, ou encore :

$$\frac{}{\phi \vee \neg\phi}\mathsf{LEM}.$$

Théorème 2.4. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$, $\{\phi_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$, ψ *des formules sur* P. *Alors :*
(Adéquation) $(\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi) \Rightarrow (\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi)$;
(Complétude) $(\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi) \Rightarrow (\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi)$.

Définition 2.5. Une formule ϕ sur P est dit en *forme normale conjonctive* lorsqu'elle s'exprime comme suit :

$$\phi \equiv \bigwedge_{i=1}^{n}\left(\bigvee_{j=1}^{m}\ell_{ij}\right),$$

et est dite en *forme normale disjonctive* lorsqu'elle s'exprime comme suit :

$$\phi \equiv \bigvee_{i=1}^{n}\left(\bigwedge_{j=1}^{m}\ell_{ij}\right),$$

avec ℓ_{ij} des littéraux sur P.