Espaces fonctionnels et séries de Fourier — Notes de cours de Pr. P. Godin

Robin Petit

Année académique 2017-2018

Table des matières

Chapitre 1

Transformation de Fourier

1.1 Définitions

On considère $\mathbb{R}^n$ à n fixé en tant qu'espace de mesure $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \lambda)$ avec $\mathcal{M}$ la famille des ensembles Lebesgue-mesurables et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on définit sa *transformée de Fourier* par :

$$\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x)\, dx. \tag{1.1}$$

Cette fonction est bien définie car $x \mapsto e^{-i\langle x,\xi\rangle}$ est continue, et f est intégrable, donc $x \mapsto e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)$ est intégrable

Proposition 1.2. *Pour* $f \in L^1$, $\hat{f}$ *est continue.*

Démonstration. Soient $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ et $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \in {\mathbb{R}^n}^{\mathbb{N}}$ t.q. $h_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

$$\hat{f}(\xi_0 + h_k) = \int e^{-i\langle x,\xi_0\rangle} e^{-i\langle x,h_k\rangle} f(x)\, dx.$$

Puisque $\left| e^{-i\langle x,\xi_0\rangle} e^{-i\langle x,h_k\rangle} f(x) \right| = |f(x)|$ et $x \mapsto e^{-i\langle x,\xi_0\rangle} e^{-i\langle x,h_k\rangle} f(x)$ converge partout (en particulier presque partout), par le théorème de la convergence dominée :

$$\hat{f}(\xi_0 + h_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int e^{-i\langle x,\xi_0\rangle} f(x)\, dx = \hat{f}(\xi_0).$$

□

Proposition 1.3. *Pour* $f \in L^1$ *t.q.* $\forall j \in [\![1, n]\!] : x_j f \in L^1$ *:* $\hat{f} \in C^1$ *et :*

$$\forall j \in [\![1, n]\!] : \left.\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}\right|_{\xi} = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}(-ix_j) f(x)\, dx. \tag{1.2}$$

Démonstration. Soit $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ t.q. $h_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, et prenons $\{e_j\}_{j=1}^n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$$\frac{\hat{f}(\xi + h_k e_j) - \hat{f}(\xi)}{h_k} = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} \underbrace{\frac{e^{-ih_k x_j} - 1}{h_k}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} -ix_j} dx.$$

En module :
$$\left|e^{-i\langle x,\xi\rangle}\frac{e^{-ih_kx_j}-1}{h_k}f(x)\right| = \left|e^{-i\langle x,\xi\rangle}\right|\left|\frac{e^{-ih_kx_j}-1}{h_k}\right|\left|f(x)\right| \leqslant C\left|x_j\right|\left|f(x)\right|,$$
qui est intégrable par hypothèse.

En effet, si $x_j = 0$, alors tout est nul et l'inégalité devient une égalité ; et si $x_j \neq 0$, alors $\frac{\left|e^{-ih_kx_j}-1\right|}{|x_jh_k|}$ est borné.

Dès lors, par le théorème de convergence dominée, la limite passe sous l'intégrale et on a (1.2). □

Corollaire 1.4. *Pour* $m \in \mathbb{N}^*$, *si* $(1+|x|)^m f \in L^1$, *alors* $f \in C^m$ *et on peut dériver* m *fois sous le signe.*

Démonstration. Exercice (récurrence sur m). □

Définition 1.5. On définit l'ensemble de Schwartz :
$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \forall\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n : x^\alpha\partial^\beta u \text{ est borné dans } \mathbb{R}^n\right\}. \tag{1.3}$$

Proposition 1.6. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Démonstration. TODO □

Proposition 1.7. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \bigcap_{1\leqslant p<+\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Pour $u \in \mathcal{S}$ et $+\infty > p \geqslant 1$:
$$\int |u|^p\,dx = \int \Big(\underbrace{|u|\,(1+|x|)^N}_{\text{borné pour tout } N}\Big)^p (1+|x|)^{-Np}\,dx \leqslant \int (C_N)^p \underbrace{(1+|x|)^{-Np}}_{\text{intégrable pour } Np>n}\,dx.$$

Dès lors, pour N suffisamment grand ($Np > n$), on a $\int |u|\,dx \leqslant c^{\text{ste}}$ □

Proposition 1.8. *Pour* $u \in \mathcal{S}$ *et* $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$, *alors :* $x^\alpha\partial^\beta u \in \mathcal{S}$.

Démonstration. Soient $\lambda,\mu \in \mathbb{N}^n$. Par Leibniz :
$$\partial^\mu(fg) = \sum_{\sigma\leqslant\mu}\binom{\mu}{\sigma}\partial^\sigma f\partial^{\mu-\sigma}g.$$

Donc :
$$x^\lambda\partial^\mu(x^\alpha\partial^\beta u) = \sum_{\sigma\leqslant\mu}\binom{\mu}{\sigma}x^\lambda\partial^\sigma(x^\alpha)\partial^{\mu-\sigma}u,$$
où $x^\lambda\partial^\sigma(x^\alpha) \leqslant c^{\text{ste}}x^\gamma$. On en déduit que $x^\lambda\partial^\mu(x^\alpha\partial^\beta u)$ est une somme finie de termes bornés et est donc bornée. □

À défaut de définir une topologie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on définit uniquement une notion de convergence.

Définition 1.9. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^\mathbb{N}$, $u \in \mathcal{S}$, on dit que u_k converge vers u lorsque $k \to +\infty$ (noté $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}} u$) lorsque :
$$\forall\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n : \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha\partial^\beta(u-u_k)\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0. \tag{1.4}$$

Théorème 1.10. *Soit* $u \in \mathcal{S}$. *Alors :*

1. $\hat{u} \in \mathcal{S}$. *De plus si* $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}} u$, *alors* $\hat{u_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}} \hat{u}$.

2. $\widehat{D_j u}(\xi) = \xi_j \hat{u}(\xi)$ *(de plus $\widehat{x_j u} = D_j \hat{u}$).*

Démonstration. Pour le premier point, on calcule :

$$D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \int D_\xi^\alpha (e^{-i\langle x,\xi\rangle}) u(x)\, dx = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} (-x)^\alpha u(x)\, dx.$$

Donc :

$$\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \int \xi^\beta e^{-i\langle x,\xi\rangle} (-x)^\alpha u(x)\, dx = \int (-D_x)^\beta (e^{-i\langle x,\xi\rangle})(-x)^\alpha u(x)\, dx = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} D_x^\beta \left((-x)^\alpha u(x)\right) dx.$$

Pour montrer cette dernière égalité, intégrons par partie. D'abord observons pour $\phi \in \mathcal{S}$ et $j \in [\![1,n]\!]$:

$$\int \partial_j \phi\, dx = \int \ldots \int \left(\int \partial_j \phi\, dx_j \right) dx_1 \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots dx_n.$$

Or :

$$\int \partial_j \phi\, dx_j = \lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} \partial_j \phi(x)\, dx_j = \lim_{N\to+\infty} \left(\underbrace{\phi(x_1,\ldots,x_{j-1},N,x_{j+1},\ldots,x_n)}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0} - \underbrace{\phi(x_1,\ldots,x_{j-1},N,x_{j+1},\ldots,x_n)}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0} \right) = 0,$$

puisque $\phi \in \mathcal{S}$.

On en déduit donc que $\int \partial_j \phi\, dx = 0$.

Dès lors, puisque $e^{-i\langle x,\xi\rangle}(-x)^\alpha u(x) \in \mathcal{S}$ et par récurrence :

$$\int (-D_x)^\beta (e^{-i\langle x,\xi\rangle})(-x)^\alpha u(x)\, dx = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} D_x^\beta \left((-x)^\alpha u(x)\right) dx.$$

Montrons alors que $\forall N \in \mathbb{N} : \exists C_N \geqslant 0$ t.q. $\left| D_x^\beta ((-x)^\alpha u(x)) \right| \leqslant C_N (1+|x|)^{-N}$. Par Leibniz :

$$(1+|x|)^N \partial^\beta (x^\alpha u(x)) = (1+|x|)^N \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial^\gamma x^\alpha \partial^{\beta-\gamma} u(x)$$

est borné car $u \in \mathcal{S}$. Dès lors :

$$\left| \xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x) \right| \leqslant C_N \int (1+|x|)^{-N}\, dx.$$

Pour N suffisamment grand ($N > n$), on a $\left| \xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x) \right| \leqslant c^{\text{ste}}$.

Dès lors, on trouve :

$$\left| \xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x) \right| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-N} \left| D_x^\beta ((-x)^\alpha (u-u_k)) \right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit donc $\acute{u}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}} \hat{u}$.

Pour le second point, la seconde formule découle directement du premier pour $\alpha = e_j$:

$$D_j \hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} (-x_j) u(x)\, dx = \widehat{x_j u}(\xi).$$

La première égalité se démontre par :

$$\widehat{D_j u}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} D_j u(x)\,dx = -\int D_{x,j}\left(e^{-i\langle x,\xi\rangle}\right) u(x)\,dx = \xi_j \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x)\,dx = \xi_j \hat{u}(\xi).$$

□

1.2 Formule d'inversion

Théorème 1.11. *Soit* $u \in \mathcal{S}$. *Alors :*

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{u}(\xi)\,d\xi. \tag{1.5}$$

La fonction $(y,\xi) \mapsto e^{i\langle x,\xi\rangle} e^{-i\langle y,\xi\rangle} u(y)$ n'est pas intégrable pour (y,ξ). On ne va donc pas pouvoir appliquer Fubini.

Démonstration. Pour $\chi \in \mathcal{S}$, $(y,\xi) \mapsto e^{-i\langle y,\xi\rangle} e^{i\langle x,\xi\rangle} \chi(\xi) u(y)$ est intégrable. Donc par Fubini :

$$\int e^{i\langle x,\xi\rangle} \chi(\xi) \hat{u}(\xi)\,d\xi = \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \chi(\xi) \int e^{-i\langle y,\xi\rangle} u(y)\,dy\,d\xi = \int u(y) \int e^{-i\langle y-x,\xi\rangle} \chi(\xi)\,d\xi\,dy = \int u(y) \hat{\chi}(y-x)\,dy.$$

Pour $\psi \in \mathcal{S}$, $\delta > 0$ tels que $\chi(\xi) = \psi(\delta\xi)$:

$$\hat{\chi}(\xi) = \int e^{-i\langle y,\xi\rangle} \psi(\delta\xi)\,d\xi = \delta^{-n} \hat{\psi}(\xi/\delta).$$

Alors :

$$\int e^{i\langle x,\xi\rangle} \psi(\delta\xi) \hat{u}(\xi)\,d\xi = \int u(x+y) \delta^{-n} \psi(y/\delta)\,dy = \int u(x+\delta y) \hat{\psi}(y)\,dy.$$

Par le théorème de convergence dominée :

$$\int u(x+\delta y) \hat{\psi}(y)\,dy \xrightarrow[\delta\to+\infty]{} u(x) \int \hat{\psi}(y)\,dy,$$

or :

$$\int e^{i\langle x,\xi\rangle} \psi(\delta\xi) \hat{u}(\xi)\,d\xi \xrightarrow[\delta\to+\infty]{} \psi(0) \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{u}(\xi)\,d\xi.$$

Par unicité de la limite, si $\int \hat{\psi}\,dy \neq 0$:

$$u(x) = \frac{\psi(0)}{\int \hat{\psi}(y)\,dy} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{u}(\xi)\,d\xi$$

Dans le cas $n = 1$, on prend $\psi_1 : x \mapsto e^{-x^2/2}$. En intégrant $z \mapsto e^{-z^2/2}$ sur un chemin rectangulaire $[a,b,c,d] \subset \mathbb{C}$, on trouve :

$$\int_a^b e^{-x^2/2}\,dx + \int_b^c e^{-z^2/2}\,dz + \int_c^d e^{-z^2/2}\,dz + \int_d^a e^{-z^2/2}\,dz = 0$$

par Cauchy. Pour $(a, b) \to (-\infty, +\infty)$, on trouve que $\int_b^c e^{-z^2/2}$ et $\int_d^a e^{-z^2/2}$ tendent vers 0. Donc à la limite :

$$\int_a^b e^{-x^2/2}\, dx = \int_{\Im z = t} e^{-z^2/2}\, dz = \int e^{(x^2 - t^2)/2} e^{-itx}\, dx.$$

Donc $\hat{\psi}(t) = \psi(t) \int \psi\, dx$. On en déduit :

$$\int \hat{\psi}(t)\, dt = \left(\int \psi(x)\, dx \right)^2 = \left(\int e^{-x^2/2} \right)^2 = 2\pi.$$

Dès lors $\psi(0) = 1$ et $\int \hat{\psi}\, dx = 2\pi$, qui donne bien la formule.

Dans le cas général $n > 1$, on prend $\psi(x) = e^{-|x|^2/2} = \prod_{j=1}^n \psi_1(x_j)$. Donc :

$$\hat{\psi}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \psi(x)\, dx = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2}\, dx = \int \prod_{j=1}^n e^{-ix_j \xi_j} \prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2}\, dx = \int \prod_{j=1}^n \left(e^{-ix_j \xi_j} e^{-x_k^2/2} \right) dx.$$

Par Fubini :

$$\hat{\psi}(\xi) = \prod_{j=1}^n \int e^{-ix_j \xi_j} e^{-x_j^2/2}\, dx = \prod_{j=1}^n \hat{\psi}_1(\xi_j).$$

On trouve alors :

$$\int \hat{\psi}(\xi)\, d\xi = \int \prod_{j=1}^n \hat{\psi}_j(\xi_j)\, d\xi = \prod_{j=1}^n \int \hat{\psi}_1(\xi_j)\, d\xi_j = (2\pi)^{-n},$$

où l'avant dernière égalité s'obtient en appliquant Fubini.

Puisque $\hat{\psi}(0) = 1$, on a bien (1.5). □

On définit une application *transformée de Fourier* $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S} : u \mapsto \mathcal{F}u := \hat{u}$.

Proposition 1.12. *$\mathcal{F}$ est une bijection linéaire.*

Démonstration. Par la formule d'inversion, $\mathcal{F}$ est injective : si $\mathcal{F}u = 0$, alors $u = 0$.

De plus, $\mathcal{F}$ est surjective. Pour $f \in \mathcal{S}$, montrons qu'il existe $u \in \mathcal{S}$ t.q. $\mathcal{F}u = f$. Prenons $u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} f(\xi)\, d\xi$. Alors :

$$\mathcal{F}f(x) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(\xi)\, d\xi = (2\pi)^n u(-x).$$

De plus :

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(x)\, dx = (2\pi)^n (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(x)\, dx = (2\pi)^n u(-\xi),$$

donc $\hat{f} = \hat{\hat{u}}$ pour tout x, et puisque $\mathcal{F}$ est injective, $f = \hat{u}$. Donc $\mathcal{F}$ est surjective, et donc surjective.

La linéarité est triviale :

$$\mathcal{F}(f + \lambda g)(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} (f + \lambda g)(x)\, dx = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x)\, dx + \lambda \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} g(x)\, dx = \left(\hat{f} + \lambda \hat{g} \right)(\xi).$$

□

En posant $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S} \to \mathcal{S} : u \mapsto \tilde{\mathcal{F}}u$ où $\tilde{\mathcal{F}}u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} u(\xi)\, d\xi$. Par un raisonnement similaire à la Proposition précédente, on trouve $\tilde{\mathcal{F}}$ est une bijection linéaire. De plus $\mathcal{F}^{-1} = \tilde{\mathcal{F}}$.

De plus, puisque $\mathcal{F}$ transforme des suites convergentes en suites convergentes sur $\mathcal{S}$, $\tilde{\mathcal{F}}$ fait de même.

Cela veut dire que $\mathcal{F}$ est une homéomorphisme linéaire de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ pour la topologie non définie ici.
Proposition 1.13. *Pour* $u, v \in \mathcal{S}$ *:*

1. $\int u\hat{v} = \int \hat{u}v$ *;*
2. $\int u\bar{v} = (2\pi)^{-n} \int \hat{u}\hat{\bar{v}}$. *Cette égalité est appelée identité de Parseval.*

<u>*Démonstration.*</u> Le premier point se montre par la formule de la preuve du Théorème 1.11 pour $u, \chi \in \mathcal{S}$:

$$\int e^{i\langle x,\xi\rangle} \chi(\xi)\hat{u}(\xi)\, d\xi = \int u(x+y)\hat{\chi}(y)\, dy$$

en $x = 0$.

Le second point, prenons $u, w \in \mathcal{S}$ et posons $v \coloneqq (2\pi)^{-n}\overline{\hat{w}}$. Par le premier point :

$$\int \hat{u}v = \int u\hat{v} = \int u(2\pi)^{-n}\hat{\overline{\hat{w}}}.$$

On peut voir que :

$$(2\pi)^{-n}\hat{\overline{\hat{w}}}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\overline{\hat{w}}(x)\, dx = (2\pi)^{-n}\overline{\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{w}(x)\, dx} = \overline{w(\xi)}.$$

Dès lors :

$$\int \hat{u}(2\pi)^{-n}\overline{\hat{w}} = \int u\overline{w}.$$

□

Corollaire 1.14 (Formule de Plancherel)**.** *Pour* $u \in \mathcal{S}$*, on a :*

$$\int |u|^2\, dx = (2\pi)^{-n} \int |\hat{u}|^2\, d\xi \tag{1.6}$$

1.3 Discussion sur la définition de la transformée

On peut définir la transformée de Fourier de plusieurs manières, paramétrisé par $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}_{a,b}u(\xi) = a \int e^{-ib\langle x,\xi\rangle} u(x)\, dx.$$

La théorie reste la même à homothétie près puisque :

$$\mathcal{F}u(\xi) = \frac{1}{a}\mathcal{F}_{a,b}u(\xi/b).$$

$$(2\pi)^{-n} \int \hat{u}(\xi)\bar{\hat{v}}(\xi)\, d\xi = \frac{(2\pi)^{-n}b^n}{a^n} \int \mathcal{F}_{a,b}u(\eta)\overline{\mathcal{F}_{a,b}v(\eta)}\, d\eta.$$

Donc on peut choisir $a = 1$ et $b = 2\pi$ ou encore $a = (2\pi)^{n/2}$ et $b = 1$ afin de simplifier la formule de Parseval qui devient :

$$\int u\bar{v} = \int \mathcal{F}u\overline{\mathcal{F}v}.$$

Cependant le choix $a = b = 1$ permet de ne pas avoir de terme b^k lors des dérivations sous le signe intégral.

1.4 Extension de la transformée à $L^1 \cap L^2$

Proposition 1.15. *Il existe une unique application linéaire continue $\mathbb{F} : L^2 \to L^2$ tel que $\mathbb{F}\Big|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}$ et :*

$$\int u\bar{v} = (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}u\overline{\mathbb{F}v}\,d\xi,$$

i.e. $\mathbb{F}$ préserve l'identité de Parseval.

Démonstration. Admettons que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Puisque $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Par cette densité, pour $u \in \mathcal{S}$, il existe $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^\mathbb{N}$ tel que $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} u$, et donc (u_k) est de Cauchy pour cette norme. $(\hat{u_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est également de Cauchy car :

$$\|\hat{u_k} - \hat{u_m}\| = (2\pi)^{n/2}\|u_k - u_m\|.$$

Par cette complétude, il existe $z \in \mathcal{S}$ t.q. $\hat{u_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} z$. On pose alors $\mathbb{F}u := z$. Montrons que z ne dépend pas de la suite $(\hat{u_k})$ choisie pour montrer que $\mathbb{F}$ est bien définie.

Soit $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ t.q. $v_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} z$. Alors $v_k - u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} 0$. Par Plancherel, $\hat{v_k} - \hat{u_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} 0$. Dès lors $\hat{v_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} z$.

Montrons alors que $\mathbb{F}$ est linéaire.

Soient $u, v \in L^2$. Soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}, (v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^\mathbb{N}$ telles que $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} u$ et $v_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} v$. Alors $u_k + v_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} u + v$. Par linéarité de $\mathcal{F}$, $\hat{u_k} + \hat{v_k} = \widehat{u_k + v_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} \mathbb{F}(u + v)$.

Donc $\hat{u_k} + \hat{v_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} \mathbb{F}u + \mathbb{F}v$ et $\hat{u_k} + \hat{v_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} \mathbb{F}(u + v)$. On en déduit $\mathbb{F}u + \mathbb{F}v = \mathbb{F}(u + v)$. Il est également trivial que pour $\lambda \in \mathbb{R} : \mathbb{F}(\lambda u) = \lambda\mathbb{F}u$.

Pour montrer que $\mathbb{F}\Big|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}$, prenons $u \in \mathcal{S}$, et la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ constante $u_k = u$. Par définition de $\mathbb{F}$, on a $\mathbb{F}u = \hat{u}$ car $\forall k \in [\![1, n]\!] : \hat{u_k} = \hat{u}$, donc $\hat{u_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \hat{u}$.

Montrons finalement que $\mathbb{F}$ vérifie Parseval.

Premier cas : $u \in L^2$ et $v \in \mathcal{S}$. Il existe $\mathcal{S}^\mathbb{N} \ni (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} u$. Donc :

$$\int u\bar{v} = \int u_k\bar{v} + \int (u - u_k)\bar{v}.$$

Puisque :

$$\left|\int (u-u_k)\overline{v}\right| \leqslant \underbrace{\|u-u_k\|_{L^2}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}0}\|v\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

on sait :

$$\int u_k\overline{v} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int u\overline{v}.$$

Or $u_k, v \in \mathcal{S}$. Donc pour $k \to +\infty$, par Cauchy-Schwartz et par Parseval pour $\mathcal{F}$:

$$\int u\overline{v} = \int u_k\overline{v} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} (2\pi)^{-n}\int \mathbb{F}u\overline{\hat{v}}.$$

Dans le cas général $u, v \in L^2$, par le premier point pour $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ t.q. $v_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} v$:

$$\int u\overline{v_k} = (2\pi)^{-n}\int \mathbb{F}u\overline{\hat{v_k}}.$$

Or $v_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} \mathbb{F}v$. Par Cauchy-Schwartz, on a :

1. $\int u\overline{v_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} \int u\overline{v}$;
2. et $\int \mathbb{F}u\overline{\hat{v_k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} \int \mathbb{F}u\overline{\mathbb{F}v}$.

L'identité de Parseval est donc bien vérifiée pour $\mathbb{F}$. Il reste à vérifier que $\mathbb{F}$ est continue et qu'elle est unique.

La continuité découle de Parseval :

$$\|u\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2}\|\mathbb{F}u\|_{L^2},$$

donc pour $\varepsilon > 0$, pour $\delta = (2\pi)^{-n/2}\varepsilon$, on a que si $\|u-v\|_{L^2} < \delta$, alors $\|\mathbb{F}u - \mathbb{F}v\|_{L^2} < \varepsilon$.

Si il existe $\mathbb{F}_1 : L^2 \to L^2$ continue et linéaire telle que $\mathbb{F}_1\Big|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}$, alors par densité, pour $u \in L^2$, il existe $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} u$, et donc, par continuité :

$$\underbrace{\mathbb{F}(u_k)}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}\mathbb{F}(u)} = \underbrace{\mathbb{F}_1(u_k)}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}\mathbb{F}_1(u)}.$$

Donc puisque deux application continues qui coïncident sur une sous-ensemble dense coïncident partout, on a bien que $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1$. □

De la même manière, $\tilde{\mathcal{F}}$ se prolonge sur L^2 en $\tilde{\mathbb{F}}$

Proposition 1.16. $\mathbb{F}\circ\tilde{\mathbb{F}} = \mathrm{Id}_{L^2} = \tilde{\mathbb{F}}\circ\mathbb{F}$.

Démonstration. Ceci vient directement de la même propriété sur $\mathcal{F}$ et $\tilde{\mathbb{F}}$. Soit $u \in L^2$ et soit $\mathcal{S}^{\mathbb{N}} \ni (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} u$. On sait :

$$\mathcal{S} \ni \tilde{\mathcal{F}}(u_k) = \tilde{\mathbb{F}}(u_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} \tilde{\mathbb{F}}(u)$$

par continuité de $\tilde{\mathbb{F}}$. Par continuité de $\mathbb{F}$, on a :

$$\mathcal{F}\circ\tilde{\mathcal{F}}(u_k) = \mathbb{F}\circ\tilde{\mathbb{F}}(u_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} \mathbb{F}\circ\tilde{\mathbb{F}}(u).$$

Or $\mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}}(u_k) = u_k \xrightarrow[k \to +\infty]{L^2} u$. Par unicité de la limite, on a $\mathbb{F} \circ \tilde{\mathbb{F}}(u)$. L'autre égalité se démontre de la même manière. $\square$

À ce stade, il est légitime de se demander si les définitions que l'on a sur L^1 (la formule intégrale définie depuis $\mathcal{S}$) et sur L^2 (la définition de $\mathbb{F}$) sont compatibles, i.e. si pour $u \in L^1 \cap L^2$ on a bien $\hat{u} = \mathbb{F}u$. Cette égalité tient bien (démonstration à venir).

1.5 Exemple d'application de la théorie de Fourier

Pour $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$ le Laplacien sur $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{S}$, soit la PDE suivante :

$$(1 + \sum_{j=1}^n D_j^2)u = u - \Delta u = f, \tag{1.7}$$

ou plus généralement, pour des $a_\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\underbrace{\sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha}_{P(D) \text{ polynôme}} u = f, \tag{1.8}$$

dans le cas du Laplacien, ce polynôme est $P(\xi) = 1 + |\xi|^2$.

Sous l'hypothèse $\inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left|P(\xi)\right| \gneqq 0$, trouvons u t.q. $P(D)u = f$.

Formellement :

$$\begin{aligned} \widehat{P(D)u}(\xi) &= \hat{f}(\xi) \\ P(\xi)\hat{u}(\xi) &= \hat{f}(\xi) \\ \hat{u}(\xi) &= \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} \\ u(x) &= (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} \, d\xi. \end{aligned}$$

Plus rigoureusement, puisque $f \in \mathcal{S}$, on sait $\hat{f} \in \mathcal{S}$. De plus, P est borné par dessous. Donc $\left|\hat{f}/P\right| \leqslant C_N(1 + |\xi|)^{-N}$, et du coup la fonction sous l'intégrale ($\xi \mapsto e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)}$) est L^1, et cette intégrale est bien définie pour $N > n$.

De plus, puisque la dérivation selon x sur u fait juste descendre du ξ de l'exponentielle, par récurrence avec le théorème de convergence dominée et par la borne supérieure ci-dessus, on trouve que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On peut alors vérifier que la fonction u ainsi trouvée est bien une solution de (1.8) :

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha u = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \underbrace{\sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha \xi^\alpha}_{= P(\xi)} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} \, d\xi = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) \, d\xi = f(x).$$

Chapitre 2

Espaces de Hilbert

Définition 2.1. Soit H un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Un produit scalaire (forme hermitienne définie positive) sur H est une application $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathrm{H}\times\mathrm{H}\to\mathbb{C}$ t.q. :

(i) à $y\in\mathbb{C}$ fixé : $x\mapsto\langle x,y\rangle$ est une application linéaire de H dans $\mathbb{C}$;

(ii) pour $x,y\in\mathbb{C}$: $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$;

(iii) pour $x\in\mathbb{C}$: $\langle x,x\rangle\geqslant 0$ où $\langle x,x\rangle=0 \iff x=0$.

Sur un produit scalaire, on peut définir une norme $\|x\|\coloneqq\langle x,x\rangle^{1/2}$.

Proposition 2.2. $\|\cdot\| : \mathrm{H}\to\mathbb{R}^+$ *est une norme.*

Proposition 2.3. $\|\cdot\|$ *vérifie Cauchy-Schwartz, i.e. :*

$$\forall x,y\in\mathrm{H} : \left|\langle x,y\rangle\right|\leqslant\|x\|\|y\|\,.$$

Démonstration. Soit $\alpha\in\mathbb{C}$ t.q. $|\alpha|=1$ et $\alpha\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^+$ ($\alpha\langle x,y\rangle=\left|\langle x,y\rangle\right|$). Soit $r\in\mathbb{R}$.

$$0\leqslant\langle x-r\alpha y,x-r\alpha y\rangle=\langle x,x\rangle-r\alpha\langle y,x\rangle-r\overline{\alpha}\langle x,y\rangle+r^2\langle y,y\rangle=A-2Br+Cr^2,$$

pour $A=\langle x,x\rangle\in\mathbb{R}^+$, $B=\alpha\langle x,y\rangle=\left|\langle x,y\rangle\right|\in\mathbb{R}^+$, $C=\langle y,y\rangle\in\mathbb{R}^+$.

Si $C=0$, alors $B=0$, et donc $\langle y,x\rangle=0$ et Cauchy-Schwartz est vérifié.

Si $C\gneqq 0$, alors pour $r=B/C$: $0\leqslant A-2Br+Cr^2=\frac{AC-B^2}{C}$, donc $B^2\leqslant AC$, donc Cauchy-Schwartz est vérifié. □

Proposition 2.4. $\|\cdot\|$ *vérifie l'inégalité triangulaire, i.e. :*

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+\|y\|^2\,.$$

Démonstration. $\|x+y\|^2=\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2$. □

On a donc $(\mathrm{H},\|\cdot\|)$ un e.v. normé, depuis lequel on peut alors définir une distance : $d(x,y)\coloneqq\|x-y\|$.

Définition 2.5. Si H est complet pour d, on dit que H est un espace de Hilbert.

Quelques exemples d'espaces de Hilbert :

(0) $\mathbb{C}^n$ pour $\langle x,y\rangle\coloneqq\sum_{j=1}^n x_j\overline{y_j}$;

(1) Pour $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ un espace de mesure, $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle\coloneqq\int f\overline{g}\,d\mu$;

(2) Pour $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),|\cdot|)$ comme espace de mesure, on a l'équivalent dénombrable de l'exemple (0) : $\int f\overline{g}=\sum_{k\geqslant 1}f_k\overline{g_k}$. On note $\ell^2(\mathbb{N})\coloneqq L^2(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),|\cdot|)$.

Un dernière exemple bien moins trivial : les espaces de Sobolev.

Définition 2.6. Soit $s \geqslant 0$ un paramètre, on définit l'espace de Sobolev d'ordre s sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } (2\pi)^{-n} \int \left|\mathbb{F}u(\xi)\right|^2 (1+|\xi|)^s \, d\xi \lneqq +\infty \right\}. \tag{2.1}$$

On y définit le produit scalaire suivante pour $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle u, v \rangle_s := (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}u\overline{\mathbb{F}v}(1+|\xi|)^s \, d\xi. \tag{2.2}$$

Remarque. Remarquons que $u \in H^s \iff \xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{s/2}\mathbb{F}u(\xi)$ est dans L^2.

Proposition 2.7. $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_s$ *est un produit scalaire.*

Démonstration. À v fixé, $u \mapsto \langle u, v \rangle_s$ est linéaire par linéarité de $\mathbb{F}$ et par linéarité de l'intégrale.

Soient $u, v \in H^s$.

$$\langle u, v \rangle_s = (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}u\overline{\mathbb{F}v} \underbrace{(1+|\xi|)^s}_{\in \mathbb{R}^+} d\xi = (2\pi)^{-n} \overline{\int \mathbb{F}v\overline{\mathbb{F}u}(1+|\xi|)^s \, d\xi} = \overline{\langle v, u \rangle_s}.$$

Finalement, pour $u \in H^s$:

$$\langle u, u \rangle_s = (2\pi)^{-n} \int \underbrace{|\mathbb{F}u|^2}_{\geqslant 0} \underbrace{(1+|\xi|)^s}_{\geqslant 0} d\xi \geqslant 0,$$

et de plus, il est évident que $\langle u, u \rangle_s = 0 \iff u = 0$. □

Par linéarité de Fourier, $H^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel, et de plus il est normé par le produit scalaire défini ci-dessus. Montrons alors que c'est un espace ce Hilbert.

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in H^s$ une suite de Cauchy. $(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathbb{F}u_k$ est de Cauchy dans L^2, qui est complet. Donc il en existe une limite $V \in L^2$ t.q. $(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathbb{F}u_k \xrightarrow[k \to +\infty]{L^2} V$. Il existe $u \in L^2$ t.q. $(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathbb{F}u = V$ car $(1+|\xi|^2)^{-s/2}V \in L^2$, et $\mathbb{F}$ est une bijection sur L^2. De plus, $u \in H^s$ car $V = (1+|\xi|^2)^{s/2}\mathbb{F}u \in L^2$. Puisque $u_k \xrightarrow[k \to +\infty]{H^s} u$, on a que H^s est complet.

Pour un contre-exemple, on a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle := \int f\overline{g} \, dx$ n'est pas un Hilbert. En effet, pour $f \in L^2 \setminus C_0^\infty$, par densité de D_0^∞ dans L^2, $\exists (f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in C_0^{\infty\mathbb{N}}$ t.q. $f_k \xrightarrow[k \to +\infty]{L^2} f$. De plus, (f_k) est de Cauchy dans C_0^∞. Par l'absurde, si $\exists g \in C_0^\infty$ t.q. $f_k \xrightarrow[k \to +\infty]{L^2} g$, par unicité de la limite, $g = f$, or $f \notin C_0^\infty$.

À partir d'ici, H désigne un espace de Hilbert quelconque.

Définition 2.8. Soit $y \in H$. On définit :

$$\begin{cases} f_1 : x \mapsto \langle x, y \rangle \\ f_2 : x \mapsto \langle y, x \rangle \\ f_3 : x \mapsto \|x\| \end{cases}$$

Proposition 2.9. f_i *est continue pour* $i = 1, 2, 3$.

Démonstration.

1. $\left|f_1(x_1) - f_1(x_2)\right| = \left|\langle x_1 - x_2, y \rangle\right| \leqslant \|x_1 - x_2\| \|y\| \xrightarrow[x_1 \to x_2]{} 0$. ($f_1$ est même uniformément continue et Lipschitzienne).
2. Idem pour f_2, à permutation près.

3. La continuité vient directement de $\big|\|x\| - \|z\|\big| \leqslant \|x - z\|$.

□

Proposition 2.10. *Pour* $F \leqslant H$, $\overline{F} \leqslant H$.

<u>*Démonstration.*</u> Pour $x, y \in \overline{F}$, il existe $(x_k), (y_k) \in F^{\mathbb{N}}$ t.q. $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$ et $y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} y$. Donc $\underbrace{x_k + y_k}_{\in F} \xrightarrow[k\to+\infty]{} x + y$.

De plus, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\underbrace{\lambda x_k}_{\in F} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \lambda x \in \overline{F}$. □

Remarque. Contrairement aux e.v. de dimension finie, en dimension infinie, il est possible d'avoir un sous-e.v. *strict* dense (e.g. C_0^∞ dans L^2).

Proposition 2.11. $F \coloneqq \{f \in L^2$ *t.q.* $f = 0$ *sur* $x_n > 0\}$ *est un e.v. fermé dans* L^2.

<u>*Démonstration.*</u> Soit $g \in \overline{F}$. Il existe $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ t.q. $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} g$. Pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_{x_n>0} |g|^2 \, dx = \int_{x_n>0} |g - f_k|^2 \, dx \leqslant |g - f_k|_{L^2}^2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

car $f_k \in F$ et $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} g$. Dès lors $\int_{x_n>0} |g|^2 \, dx = 0$, i.e. $g \in F$. Donc $\overline{F} = F$. □

2.1 Orthogonalité

Définition 2.12. Pour $x, y \in H$, x et y sont *orthogonaux*, noté $x \perp y$ lorsque $\langle x, y\rangle = 0$.

Pour $x \in H$, on définit $x^\perp \coloneqq \{y \in H \text{ t.q. } \langle x, y\rangle = 0\}$, et pour $M \subset H$, on définit $M^\perp \coloneqq \{y \in H \text{ t.q. } \forall x \in M : \langle x, y\rangle = 0\} = \bigcap_{x\in M} x^\perp$.

Proposition 2.13. *Pour* $x \in H$, $x^\perp \leqslant H$, *et* $x^\perp$ *est fermé.*

<u>*Démonstration.*</u> À $x \in H$ fixé, on remarque que $x^\perp = f_2^{-1}(\{0\})$, or f_2 est continue. Donc $x^\perp$ est fermé. Vérifier que $x^\perp$ est un sous-e.v. est trivial. □

Corollaire 2.14. *Pour* $M \leqslant H$, $M^\perp$ *est un sous-e.v. fermé de* H.

Ce résultat découle directement du fait que $M^\perp$ est une intersection d'e.v. fermés.

Définition 2.15. $E \subseteq H$ est dit *convexe* lorsque $\forall x, y \in E : \forall t \in [0, 1] : (1 - t)x + ty \in E$.

Exemple 2.1.
- tout sous-e.v. de H est convexe ;
- toute boule (ouverte ou fermée) dans H est convexe ;
- pour $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $u \in L^2(\Omega)$, $E = \{v \in L^2 \text{ t.q. } u = v \text{ sur } \Omega\}$ est convexe.

Montrons également que ce dernier ensemble est fermé dans L^2. Soit $f \in \overline{E}$. Il existe $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ t.q. $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} f$.

$$\int_\Omega |u - f|^2 \, dx = \int_\Omega |f_k - f| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f|^2 \, dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Théorème 2.16. *Soit* $E \neq \emptyset$ *convexe fermé dans* H. *Alors* $\exists! x \in E$ *t.q.* $\|x\| = \min_{z\in E} \|z\| =\in_{z\in E} \|z\| =: \delta$.

Démonstration. **unicité** :soient $x, y \in E$ t.q. $\|x\| = \|y\| = \delta$. Par la formule du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 = \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Par convexité de E, $(x + y)/2 \in E$, donc $\left\|(x + y)/2\right\| \geqslant \delta$. En multipliant de part et d'autre par 1/4 au préalable, on trouve alors :

$$\|x - y\|^2 \leqslant 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - 4\delta^2 = 0.$$

On en déduit $\|x - y\| = 0$, i.e. $x = y$.

existence :Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ t.q. $y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \delta$ qui existe par définition de l'infimum.

$$\|y_k - y_m\|^2 \leqslant 2\underbrace{(\|y_k\|^2 + \|y_m\|^2)}_{\to 2\delta^2} - 4\delta^2.$$

Donc (y_k) est de Cauchy. Par complétude de H, $\exists x_0 \in H$ t.q. $y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x_0$, et par fermeture de E, $x_0 \in E$.

De plus, par continuité de la norme, $\|y_k\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} \|x_0\|$, et par unicité de la limite, $\|x_0\| = \delta$. □

Exemple 2.2. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert, $u \in L^2(\Omega)$, $E = \{v \in L^2 \text{ t.q. } u = v \text{ sur } \Omega\}$ est un convexe fermé, donc par ce théorème, il existe un unique $u^* \in E$ qui minimise la norme : $u^* = u$ sur Ω et $u^* = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Théorème 2.17 (Décomposition orthogonale)**.** *Soit* $M \leqslant H$ *fermé. Alors :*

1. $\forall x \in H : \exists!(y, z) \in M \times M^\perp$ *t.q.* $x = y + z$ *;*
2. *ces valeurs* y, z *sont les points les plus proches de* x *dans* M *et* $M^\perp$ *respectivement ;*
3. *Les applications* $P : x \mapsto y$ *et* $Q : x \mapsto z$ *sont linéaires ;*
4. $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ *(et donc* P, Q *sont continues) ;*
5. P *et* Q *sont les projections orthogonales de* x *sur* M *et* $M^\perp$ *respectivement.*

Démonstration.

1. **unicité** :si $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, pour $y_1, y_2 \in M$ et $z_1, z_2 \in M^\perp$, on a $\underbrace{y_1 - y_2}_{\in M} = \underbrace{z_2 - z_1}_{\in M^\perp}$. Or $M \cap M^\perp = \{0\}$. Donc $y_1 = y_2$ et $z_1 = z_2$.
   existence :$x + M$ est convexe (trivial par le fait que $M \leqslant H$). Montrons que $x + M$ est fermé. Soit $u \in \overline{x + M}$. Il existe $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (x + M)^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} u$. $\forall k \in \mathbb{N} : x + M \ni u_k = x + y_k$. On en déduit $y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{u} -x$. Par fermeture de M, on a $u - x \in M$, et donc $u \in x + M$ (i.e.$x + M$ est fermé).
   Soit $z \in x + M$ l'élément qui minimise la norme. On pose $y := x - z \in M$. Montrons alors que $z \in x + M$. Soit $w \in M$; WLOG, supposons $\|w\| = 1$. Puisque $z \in x + M$, $\forall \alpha \in \mathbb{C} : z - \alpha w \in x + M$. Donc :
   $$\|z\|^2 \leqslant \|z - \alpha w\|^2 = \|z\|^2 - 2\Re\alpha \langle w, z\rangle + |\alpha|^2 .$$
   $0 = 2\Re\alpha \langle w, z\rangle - |\alpha|^2$. En particulier, pour $\alpha = \langle z, w\rangle : 0 = \left\|\langle z, w\rangle\right\|^2$, donc $\langle z, w\rangle = 0$. Dès lors $z \in M^\perp$.
2. Soit $Y \in M$. Montrons que $\|x - Y\| \geqslant \|x - y\| = \|z\|$:
   $$\|x - Y\| = \|y + z - Y\| = \left\|(y - Y) + z\right\| = \|y - Y\| + \|z\| \geqslant \|z\| .$$
   Idem pour $Z \in M^\perp$: $\|x - Z\| \geqslant \|x - z\| = y$.

3. Soient $x_1, x_2 \in H$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. On a $\alpha_1 x_1 = \alpha_1 P x_1 + \alpha_1 Q x_1$, et $\alpha_2 x_2 = \alpha_2 P x_2 + \alpha_2 Q x_2$. Donc :
$$P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + Q(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 P x_1 + \alpha_1 Q x_1 + \alpha_2 P x_2 + \alpha_2 Q x_2,$$
et donc :
$$\underbrace{P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \alpha_1 P x_1 - \alpha_2 p x_2}_{\in M} = \underbrace{\alpha_1 Q x_1 + \alpha_2 Q x_2 - Q(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}_{\in M^\perp}.$$
Or $M \cap M^\perp = \{0\}$, donc $P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 P x_1 - \alpha_2 p x_2$, et $\alpha_1 Q x_1 + \alpha_2 Q x_2 = Q(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$.
4. Par Pythagore $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$. Donc $\|Px\| \leqslant \|x\|$ et $\|Qx\| \leqslant \|x\|$, i.e. P et Q sont Lipschitziennes, donc en particulier continues.

□

Corollaire 2.18. *Si* $M \leqslant H$, *avec* $M \neq H$, *il existe* $y \in H$ *t.q.* $y \perp M$.

Démonstration. Pour $x \in H \setminus M$, $x = Px + Qx$, où $Qx \neq 0$, et $Qx \perp M$. □

Corollaire 2.19. *Si* $M \leqslant H$ *est fermé, alors* $M = M^{\perp\perp}$.

Démonstration. La première inclusion est triviale : si $x \in M$, alors $x \perp M^\perp$.

La seconde inclusion se démontre comme suit : soit $x \in M^{\perp\perp} \subseteq H$. $x = y + z$ où $y \in M$ et $z \in M^\perp$. Or $0 = \langle x, z\rangle = \langle y + z, z\rangle = \langle y, z\rangle + \|z\|^2$, et $\langle y, z\rangle = 0$ par définition d'orthogonalité. Donc $|z| = 0$ et $z = 0$, i.e. $x = y \in M$. □

Lemme 2.20 (Lemme de Riesz). *Soit* $L : H \to \mathbb{C}$, *une forme linéaire continue. Alors* $\exists! y \in H$ *t.q.* $L = \langle \cdot, y\rangle$.

Démonstration. **unicité** :pour $y_1, y_2 \in H$ t.q. $\forall x \in H : \langle x, y_1\rangle = \langle x, y_2\rangle$, on a $\langle x, y_1 - y_2\rangle = 0$, donc $y_1 - y_2 \in H^\perp = \{0\}$, i.e. $y_1 = y_2$.

existence :si $L \equiv 0$, alors $y = 0$. Supposons alors que L n'est pas identiquement nulle. $\operatorname{Ker} L \subsetneqq H$ et est fermé par continuité de L. Dès lors, il existe $z \in H$, $z \neq 0$ t.q. $z \perp \operatorname{Ker} L$. WLOG, supposons $\|z\| = 1$. Posons $y := \overline{Lz} z$ et $u := (Lx)z - (Lz)x$. Calculons :
$$Lu = (Lx)Lz - (Lz)Lx = 0,$$
donc $u \in \operatorname{Ker} L$, et donc $0 = \langle u, z\rangle = (Lx)\langle z, z\rangle - (Lz)\langle x, z\rangle = Lx - (Lz)\langle x, z\rangle$. Dès lors, $Lx = (Lx)\langle x, z\rangle = \langle x, y\rangle$. □

2.2 Systèmes orthonormaux

Définition 2.21. Pour V un e.v. et $S \subseteq V$, on note Vect S l'e.v. engendré par S.

$(e_\alpha)_{\alpha \in A} \subset V$ est appelé *orthonormal* lorsque $\forall \alpha, \beta \in A : \langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta}$.

Pour $x \in H$, on définit $\hat{x}(\alpha) := \langle x, e_\alpha\rangle$.

Les $\hat{x}(\alpha)$ sont les coefficients de Fourier relativement au système $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$.
Exemple 2.3. Sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, les $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}}$ sont les $e_\alpha : [0, 2\pi) \to \mathbb{C} : t \mapsto \frac{e^{i\alpha t}}{\sqrt{2\pi}}$.
Théorème 2.22. *Pour* H *un espace de Hilbert et* $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ *un système orthonormal,* $F \subset A$ *fini, et* $M_F := \operatorname{Vect} e_{\alpha\, \alpha \in F}$, *on a :*

1. *si* $\varphi : A \to \mathbb{C}$ *est nulle sur* $A \setminus F$, *pour* $y = \sum_{\alpha \in F} \varpi(\alpha) e_\alpha$, *alors :*

$$\forall \alpha \in A : \varphi(\alpha) = \hat{y}(\alpha).$$

   De plus, $\|y\|^2 = \sum_{\alpha \in F} \left|\varphi(\alpha)\right|$.
2. *Si* $x \in H$, $s_F(x) \coloneqq \sum_{\alpha \in F} \hat{x}(\alpha) e_\alpha \in M_F$. *Si* $s \in M_F \setminus \{s_F(x)\}$, *alors :*

$$\left\|x - s_F(x)\right\| \lneqq \|x - s\|.$$

   De plus : $\sum_{\alpha \in F} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 \leqslant \|x\|^2$.