MATHF-105 : Probabilités
Résumé

R. Petit

Année académique 2015 - 2016

Contents

1 Rappels

1.1 Rappel sur les séries

Les fonctions logarithmique et exponentielle ont un développement de Taylor exact. Pour la fonction logarithmique, on a, pour $x \in (-1, 1)$:

$$\log(1-x) = -\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}.$$

Si on pose $S_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} u_k$, on a $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite des sommes partielles, et $n \mapsto S_n$, une application croissante si (u_n) est une suite positive. Il y a donc deux situations distinctes possibles :

- (S_n) est une suite bornée ($\exists M \in \mathbb{R}\,\text{t.q.}\,\forall n \in \mathbb{N} : S_n \leq M$) et donc converge vers $S \in \mathbb{R}$;
- (S_n) n'est pas bornée ($\forall M \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}\,\text{t.q.}\,S_n > M$) et donc diverge vers $+\infty$.

1.1.1 Exemple sur les séries

Prenons $u_n \coloneqq x^n$, avec $x > 0$.

- Si $x = 1$, on a $n \to +\infty \Rightarrow S_n \to +\infty$;
- si $x \neq 1$, on a $(1-x)S_n = x - x^{n+1}$, et donc :

$$S_n \coloneqq x\frac{1-x^n}{1-x}.$$

  - Si $x < 1$, alors $x^n \to 0$ pour $n \to +\infty$, et donc $S_n \to \frac{x}{1-x}$;
  - si $x > 1$, alors $x^n \to +\infty$ pour $n \to +\infty$, et donc $S_n \to +\infty$.

1.1.2 Conclusion de la suite géométrique

On voit alors :

$$\sum_{n\geq 1} x^n = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{si } x \in [0,1) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

Si la suite commence à l'indice 0, on a :

$$\sum_{n\geq 0} x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} x^n = \begin{cases} 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} & \text{si } x \in [0,1) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

1.2 Rappels d'analyse

Définition 1.1. Une fonction $f : X \to Y$ est dite mesurable si :

$$\forall A \subset \mathcal{B}(Y) : \{\omega \in \Omega\,\text{t.q.}\,X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F},$$

où $\mathcal{B}(Y)$ représente la tribu des boréliens (voir définition 2.9).

2 Espaces de probabilités

2.1 Définition

Définition 2.1. L'ensemble Ω est l'**espace des chances**, l'ensemble des résultats possibles d'un phénomène aléatoire.

Remarque.

- Ω peut être fini (dénombrable) ou infini ;
- $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites à valeur dans $\{0,1\}$;
- Ω peut être un espace dit *fonctionnel* quand le résultat d'une expérience est une fonction.

Définition 2.2. Un événement E est un ensemble de réalisations possibles à une expérience tel que $E \subseteq \Omega$.

Remarque. L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ n'est pas toujours dénombrable. Et donc l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ est-il le bon ensemble pour décrire les événements ?

- Si $|\Omega| \in \mathbb{N}$: oui ;
- si $|\Omega| \notin \mathbb{N}$: non.

Définition 2.3. $\mathcal{F}$ est la **classe des événements**. On mesure la *probabilité d'occurrence* d'un événement $A \in \mathcal{F}$. On introduit une fonction d'ensemble $\mathbb{P}$ où :

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1] : A \mapsto \mathbb{P}(A).$$

On impose :

(*i*) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

(*ii*) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(*iii*) $\forall A, B \in \mathcal{F} : A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Proposition 2.4. *Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$. On a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_i \le n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{\gamma=1}^{i} A_{k_\gamma}\right).$$

2.1.1 Loi uniforme sur un ensemble fini (ou dénombrable)

Définition 2.5. Soient $m < n \in \mathbb{N}$. On définit l'**intervalle entier** $[\![m,n]\!]$ par :

$$[\![m,n]\!] : \{x \in \mathbb{N} \,\text{t.q.}\, m \le x \le n\}.$$

Définition 2.6. Soit $\Omega = [\![1,n]\!]$. Soit $A \subseteq \Omega$. La loi uniforme est donnée par :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n}.$$

Remarque. Il arrive que $|A|$ soit difficile à déterminer et qu'il faille aller chercher du côté de l'analyse combinatoire.

2.1.2 Loi uniforme sur un ensemble infini (intervalle)

Définition 2.7. Soit $\Omega = [0, 1]$ et soit $A = [a, b] \subseteq \Omega$. La loi uniforme est donnée par :

$$\mathbb{P}(A) = (b - a).$$

Remarque. La définition de loi uniforme sur un intervalle fait intervenir la notion de mesure et donc de mesurabilité. Or il existe des parties de Ω sur lesquelles la mesure n'a pas de sens. En général, $\mathcal{P}(\Omega)$ est *trop grand*, et il faut donc remplacer l'utilisation de l'ensemble des parties par la notion de tribu.

Définition 2.8. Soit Ω un ensemble de chances et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ une famille de parties de Ω. On dit que $\mathcal{F}$ est une tribu s'il respecte les trois propriétés suivantes :

- $\emptyset \in \mathcal{F}$;
- $\forall A : A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathcal{F}$;
- $\forall A_1, \ldots, A_n, \ldots : A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{k \geq 1} A_k \in \mathcal{F}$.

Une autre appellation pour une tribu est une σ-algèbre.

Remarque.

- On remarque que $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu, mais une tribu trop grande pour être intéressante ;
- Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors $T \coloneqq \{\emptyset, A, A^{\complement}, \mathcal{P}(\Omega)\}$ est une tribu. T est la plus petite tribu contenant A, et on l'appelle la **tribu engendrée par** A, que l'on note $\sigma(A)$.

Définition 2.9. Soit I une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$. On appelle la *tribu engendrée par* I la plus petite tribu contenant I et on la note $\sigma(I)$.

En prenant $I \coloneqq \{$ intervalles ouverts de $[0, 1]\}$, on obtient $\sigma(I)$ que l'on appelle **tribu des boréliens**. [1]

Définition 2.10. Soit Ω un ensemble de chances et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une tribu sur Ω. Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une fonction $\mathbb{P}$ définie par :

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1] : A \mapsto \mathbb{P}(A),$$

où $\mathbb{P}$ satisfait :

(*i*) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

(*ii*) $\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(aA) + \mathbb{P}(A^{\complement}) = 1$;

(*iii*) $\forall A_1, \ldots, A_n, \ldots$ disjoints deux à deux, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k\right) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A_k).$$

Définition 2.11. On appelle $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités.

Remarque. Probabiliser un expérience revient à déterminer :

- Ω, l'espace des chances ;
- $\mathcal{F}$, la classe des événements ;
- $\mathbb{P}$, la fonction d'ensembles sur $\mathcal{F}$.

[1] Le nom de *borélien* vient du mathématicien français Émile Borel suite à ses travaux sur la théorie de la mesure.

2.2 Modèles

2.2.1 Modèles discrets

Remarque. On prend Ω un ensemble fini ou dénombrable. On prend également $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Si Ω est fini, on parle de tirages, et si Ω est infini dénombrable, on parle de populations.

On pose :

$$\mathbb{P} : \{k\} \mapsto p_k \in [0, 1],$$

où :

$$\sum_{k \in \Omega} p_k = 1$$

et pour $A = \{k_1, \dots, k_n\} \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\gamma=1}^{n} p_{k_\gamma}.$$

Définition 2.12 (Modèle de Bernoulli)**.** On prend $\Omega = \{0, 1\}$ où :

$$\begin{cases} p_0 & = 1 - p \\ p_1 & = p \end{cases}.$$

Remarque. Il est évident que $p + (1 - p) = 1 = P(\Omega)$.

Définition 2.13 (Modèle binomial)**.** On prend $\Omega = [\![0, N]\!]$ (et donc $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$) et $p \in [0, 1]$. Le modèle binomial est défini par $p_k = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{N-k}$ pour tout $k \in [\![0, N]\!]$.

Remarque. On remarque que $\sum_{k \geq 1} p_k = 1$ car les p_k représentent les termes du binôme de Newton $(p + (1 - p))^N = 1^N = 1$.

Définition 2.14 (Modèle géométrique)**.** On prend $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Omega) \simeq \mathbb{R}$, et $p \in (0, 1)$. Le modèle géométrique est défini par $p_k = (1 - p)^{k-1} p$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque. On remarque que :

$$\sum_{k \geq 1} p_k = \sum_{k \geq 1} p(1 - p)^{k-1} = p \sum_{k \geq 0} (1 - p)^k = p \frac{1}{1 - (1 - p)} = \frac{p}{p} = 1,$$

où on utilise la formule de la somme des termes d'une suite géométrique u définie par $u_n = u_{n-1} q$ pour $n \geq 1$ (avec $0 < q < 1$) qui donne :

$$\sum_{k=0}^{N} u_k = u_0 \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q},$$

et pour la série, il suffit de passer à la limite :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} u_k = \lim_{N \to +\infty} u_0 \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = u_0 \frac{1}{1 - q}.$$

Définition 2.15 (Modèle de Poisson)**.** On prend $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, et un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$. Le modèle poissonien est défini par $p_k = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque. On remarque que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ en utilisant la formule de Taylor de l'exponentielle :

$$\exp(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}.$$

On a effectivement :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(\{k\}) = \sum_{k\geq 0} p_k = \sum_{k\geq 0} \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} = \exp(-\lambda)\exp(\lambda) = 1.$$

2.2.2 Modèles continus (à densité)

Remarque. On prend Ω un intervalle (fini ou infini[2]) sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{F} = \mathcal{B}(I)$, la tribu des boréliens sur I[3].

Définition 2.16. Soit $f : I \to \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable telle que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Soit $A \in \mathcal{F}$, on pose $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x$. f est appelée fonction de densité de modèle stochastique.

Définition 2.17 (Loi uniforme continue)**.** On prend $I = [a, b]$ avec $a < b$ßℝ. Le modèle uniforme est défini par f constante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [a,b] \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \end{cases}.$$

Remarque. On remarque effectivement $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{d}x + 0 = 1.$$

Définition 2.18 (Modèle exponentiel)**.** [4] On prend $I = \mathbb{R}^+$ et $\lambda > 0$. Le modèle exponentiel est défini par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Remarque. On peut calculer l'intégrale impropre comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \lim_{M\to+\infty}\int_0^M f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{M\to+\infty}\big[-\exp(-\lambda x)\big]_0^M = \lim_{M\to+\infty}\big(1-\exp(-\lambda M)\big) = 1. \end{aligned}$$

Définition 2.19 (Modèle gaussien)**.** [5] On prend $I = \mathbb{R}$, et $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$. Le modèle gaussien est défini par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

[2] On parle d'intervalle fini pour $[a, b]$, avec $a < b \in \mathbb{R}$ et d'intervalle semi-infini pour $(-\infty, b]$ ou $[a, +\infty)$ et d'intervalle infini pour $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

[3] Ou encore la tribu engendrée par les intervalles de I.

[4] Également appelé *modèle des files d'attente.*

[5] Également appelé *modèle des erreurs* ou encore *modèle normal.*

Remarque. Pour que $\mathbb{P}$ soit une probabilité, il faut que f soit définie positive. Or f est une exponentielle multipliée par un coefficient positif. Il faut également $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, ce qui peut se vérifier par :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

en posant $y \coloneqq x - \mu$, et donc $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right).$$

En posant $z \coloneqq \frac{y}{\sigma}$ (et donc $\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{\sigma}$), on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\mathrm{d}z.$$

Une primitive de $\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$ est :

$$\int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}} = \mathrm{Erf}(z).$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Omega)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}}\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}}\right) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{2\pi}.
\end{aligned}$$

En passant en coordonnées polaires, on obtient :

$$\mathbb{P}(\Omega)^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \frac{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\mathrm{d}r = \left[-\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right]_0^{+\infty} = 1.$$

On en déduit alors $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ également. $\mathbb{P}$ est donc bien une probabilité.

Définition 2.20. On a défini une probabilité sur $\left(R^+, (R^+)\right)$ via la fonction $f(r) = r\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)$. On l'appelle la *probabilité de Rayleigh*.

2.2.3 Divergence sur la fonction Gamma d'Euler

Définition 2.21 (Fonction Gamma d'Euler)**.** La fonction Gamma d'Euler est définie comme suit :

$$\Gamma : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_0^{+\infty} \exp(-x)x^{t-1}\,\mathrm{d}x.$$

Remarque. On note $\gamma \coloneqq -\Gamma'(1) > 0$ la constante d'Euler-Mascheroni. La question $\gamma \overset{?}{\in} \mathbb{Q}$ est toujours ouverte.

Proposition 2.22. $\forall t > 0 : \Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$.

Démonstration. Soit $t > 0$. Par l'intégration par parties, on a :

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} \exp(-x)x^t \, \mathrm{d}x = \left[-x^t \exp(-x)\right]_0^{+\infty} + t\int_0^{+\infty} \exp(-x)x^{t-1} \, \mathrm{d}x = t\Gamma(t).$$

□

Remarque. Par la proposition 2.22, on peut définir la factorielle de tout nombre naturel par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : n! = \Gamma(n+1)$$

Proposition 2.23 (Formule des compléments)**.** *Soit $t \in (0,1)$. Alors :*

$$\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin(\pi t)}.$$

2.2.4 Retour aux modèles stochastiques

Définition 2.24 (Modèle Gamma)**.** [6] On prend $\Omega = \mathbb{R}^+$. Le modèle Gamma est défini par :

$$f_t(x)\frac{x^t - \exp(-x)}{\Gamma(t)}.$$

2.3 Notion de variables aléatoires

2.3.1 Cas discret

Définition 2.25. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une variable aléatoire discrète[7] est une application $X : \Omega \to E$ où E est un ensemble fini ou infini dénombrable. On demande à cette application d'être mesurable.

Remarque.

- Bien souvent, on a $E = \Omega$, et $X(\omega) = \omega$. Dans ce cas, on *identifie* l'espace des chances avec l'espace d'arrivée. La probabilité $\mathbb{P}$ s'appelle alors la **loi** de la variable aléatoire X.
- Il arrive parfois que l'espace de probabilités soit plus gros que l'espace d'état.

Définition 2.26. Plus formellement, la **loi** d'une v.a.d. X est l'ensemble :

$$\{\mathbb{P}(X = x) \, \mathrm{t.\,q.}\, x \in E\}.$$

Définition 2.27. Pour toute valeur $k \in E$ que peut prendre la variable aléatoire X, on note $\mathbb{P}(X = k)$ la probabilité que la variable X prenne la valeur k. C'est équivalent à $\mathbb{P}\big(X(\omega) = k\big)$ pour $\omega \in \Omega$.

Définition 2.28. Lorsqu'une v.a.d. X suit une certaine loi $\mathcal{L}$, on note $X \sim \mathcal{L}$.

Par exemple, une variable Y suivant une poisson de paramètre λ se note $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

[6] Le modèle Γ est une généralisation du modèle exponentiel (définition 2.18).
[7] Souvent écrite v.a.d. ou V.A.-D.

2.3.2 Cas absolument continu

Définition 2.29. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une variable aléatoire absolument continue[8] est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable au sens où :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \{\omega \in \Omega \,\mathrm{t.\,q.}\, X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F},$$

et *absolument continue* au sens où :

$$\exists f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

mesurable et telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

avec :

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Définition 2.30. On appelle f_X la **densité** de X.

Remarque. La *loi* de X est donnée par (1).

Définition 2.31. On note $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$, ou encore $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$ (en prenant $A = (-\infty, t]$).

Remarque. La fonction $t \mapsto F_X(t)$ est continue et est (presque) partout dérivable avec :

$$\frac{\partial F_X}{\partial t}(t) = f_X(t) \geq 0.$$

Donc F_X est croissante avec :

$$\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0,$$

et :

$$\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1.$$

Remarque. On peut associer une fonction de répartition F_X à toute variable aléatoire X, même si X est une v.a.d. Dans ce cas, on construit F_X constante par morceaux (et présente donc des points de discontinuité).

Définition 2.32. Si F_X est continue, on dit que X est continue.

Remarque. Donc si X est continue, alors $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim_{y \to x} F_X(y) = 0$. Ce résultat peut également être observé en utilisant le fait que $\mathbb{P}(X = x) = \int_x^x f(x)\,\mathrm{d}x$, et une intégration sur un point est nulle.
Remarque. Il existe des fonction continues nulle part dérivables. On peut donc avoir $F_X(t)$ continue mais pas sous la forme suivante :

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

pour une fonction f_X donnée.

Définition 2.33. On dit qu'une variable fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **absolument continue** si elle admet une représentation intégrale de type (2).

Définition 2.34. Soit E un ensemble. La fonction 1_E est appelée **fonction indicatrice** est est définie telle que :

$$\forall x : 1_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

[8]Souvent écrite v.a.c. ou V.A.-C.

Exemples

1. Si $X_1 \sim U_{[a,b]}$ est une v.a.c. uniforme sur $[a,b]$, alors :

$$F_{X_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ t-a & \text{si } a < t < b \\ 1 & \text{si } t > b \end{cases}.$$

2. Si $X_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ est une v.a.c. exponentielle de paramètre λ, alors :

$$F_{X_2}(t) = \int_{-\infty}^{t} \lambda \exp(-\lambda t) 1_{(0,+\infty)}(t) = -\exp(-\lambda t) 1_{(0,+\infty)}(t).$$

3. Si $x_3 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est une v.a.c. normale de moyenne μ est de variance σ^2, alors :

$$F_{X_3}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Erf}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right).$$

4. Si $X_4 \sim \mathcal{C}$ est une v.a.c. de Cauchy de densité donnée par :

$$f_{X_4}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

alors :

$$F_{X_4}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(t).$$

2.4 Théorème de de Moivre-Laplace

Soient $p \in (0,1)$ et $n \geq 1$. On pose $X_{n,p} \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Soit $Y_{n,p}$ défini par :

$$Y_{n,p} := \frac{X_{n,p} - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

On remarque que $Y_{n,p}$ est une binomiale renormalisée.

Théorème 2.35 (Théorème de de Moivre-Laplace)**.** *Si $t \in \mathbb{R}$, alors :*

$$\mathbb{P}(Y_{n,p} \leq t) \overset{n \to +\infty}{\to} F_{\mathcal{N}(0,1)}(t).$$

Remarque. La signification de ce théorème est qu'une binomiale renormalisée se comporte comme une gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque $n \to +\infty$.

Proposition 2.36 (Formule de Stirling)**.**

$$n! \overset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

2.5 Convergence en loi

Définition 2.37.

- Soit Z une v.a.c. Soit $\{Z_n, n \geq 1\}$ une suite de v.a. quelconques. On dit que Z_n *converge en loi vers* Z si :
$$\forall x : F_{Z_n}(x) = \mathbb{P}(Z_n \leq x) \overset{n \to +\infty}{\to} F_Z(x).$$
On note cela :
$$Z_n \overset{\mathcal{D}}{\to} Z.$$
- Soient Z une v.a.d. et une $\{Z_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires discrètes. On dit que Z_n *covnerge en loi vers* Z si :
$$\forall x \in E : \mathbb{P}(Z_n = x) \overset{n \to +\infty}{\to} \mathbb{P}(Z = x).$$
On note cela :
$$Z_n \overset{\mathcal{D}}{\to} Z.$$

Remarque. Un exemple typique de convergence en loi de variables discrètes est :
$$\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right) \overset{\mathcal{D}}{\to} \mathcal{P}(\lambda).$$

3 Espérance

3.1 Pari de pascal

Le terme *espérance* vient de Blaise Pascal et de son traitement de la question « Faut-il croire en Dieu ? ». On pose la variable X qui décrit le résultat de l'existence de Dieu définie comme suit :
$$X = \begin{cases} 0 & \text{si Dieu n'existe pas} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a alors $\mathbb{P}(X = 0) = p$ et $\mathbb{P}(X = +\infty) = 1 - p$. Prenons $p < 1$ (car si $p = 1$, on suppose que Dieu n'existe pas). Alors $\bar{X}$, la valeur moyenne de X est donnée par :
$$\bar{X} = p \cdot 0 + (1 - p) \cdot +\infty.$$

Blaise Pascal a appelé cette valeur **espérance** et l'a noté $\mathbb{E}(X)$.

3.2 Espérance et variables aléatoires

Remarque. Il existe plusieurs méthodes pour décrire le comportement d'une variable aléatoire. On s'intéresse ici aux **indicateurs de position**. Il existe d'autres types d'indicateurs dont les **indicateurs de répartition** qui seront vus plus loin.

Définition 3.1. On considère X une variable aléatoire sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Méthode de la médiane :

   On évalue le nombre $\widetilde{x}$ tel que $\mathbb{P}(X \leq \widetilde{x}) = \mathbb{P}(X \geq \widetilde{x}) = \frac{1}{2}$.

   Lorsque X est continue, la médiane existe toujours. Si X est discrète, la médiane n'existe pas obligatoirement et n'est pas forcément unique.

2. Méthode de l'espérance :

   On évalue une *moyenne pondérée* des valeurs que peut prendre X par leur probabilité.

3.3 Définition de l'espérance

3.3.1 Cas positif

Définition 3.2 (Cas discret)**.** Soit X une v.a.d. à valeurs positives. On note $p_k := \mathbb{P}(X = x_k)$. On pose :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 0} p_k x_k.$$

Remarque. Dans ce cas, l'espérance fait toujours sens et existe toujours mais peut valoir $+\infty$.

Définition 3.3 (Cas absolument continu)**.** Soit X une v.a.c. définie positive de densité f_X et de répartition F_X. On note :

$$\begin{cases} F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) \\ f_X(t) = \frac{\partial}{\partial t} F_X(t) \end{cases}.$$

On définit alors :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} x f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Remarque.

- L'intégrale démarre en 0 car la variable aléatoire X est définie positive ;
- à nouveau, l'espérance existe toujours mais peut valoir $+\infty$.

3.4 Exemples d'espérance

Exemple 1. (exemple de 3.2.) Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ une binomiale. Par définition, on évalue :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k = np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{\gamma=0}^{n-1} \binom{n-1}{\gamma} p^\gamma (1-p)^{n-1-\gamma} = np(p + (1-p))^{n-1} = np. \end{aligned}$$

Exemple 2. (exemple de 3.2.) Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ une poisson de paramètre λ. On évalue :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X = k) k = \sum_{k \geq 0} \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!} k = \exp(-\lambda) \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda^k}{k!} k \\ &= \exp(-\lambda) \lambda \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \exp(-\lambda) \sum_{\gamma \geq 0} \frac{\lambda^\gamma}{\gamma!} = \lambda \exp(-\lambda) \exp(\lambda) = \lambda. \end{aligned}$$

Exemple 3. (exemple de 3.2.) Soit $X \sim$ Bâle. La loi de X est donnée par $\mathbb{P}(X = k) = \frac{6}{(\pi k)^2}$ pour tout $k \geq 1$. On évalue :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X = k)k \sum_{k\geq 1} \frac{6}{\pi^2} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} k = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} = +\infty.$$ [9]

[9] La série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} = +\infty$ se démontre en utilisant le fait que $\sum_{i=2^\alpha}^{2^{\alpha+1}} \frac{1}{i} \gneqq \frac{1}{2} \forall \alpha \in \mathbb{N}$ et donc en faisant tendre $\alpha \to +\infty$, on obtient $+\infty$.