Espaces fonctionnels et séries de Fourier — Notes de cours de Pr. P. Godin

Robin Petit

Année académique 2017-2018

Contents

Chapitre 1

Transformation de Fourier

1.1 Définitions

On considère $\mathbb{R}^n$ à n fixé en tant qu'espace de mesure $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \lambda)$ avec $\mathcal{M}$ la famille des ensembles Lebesgue-mesurables et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on note $\int f \,\mathrm{d}x$ l'intégrale de f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1. Pour $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on définit sa *transformée de Fourier* par :

$$\hat{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \xi \mapsto \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x) \,\mathrm{d}x. \tag{1.1}$$

Cette fonction est bien définie car $x \mapsto e^{-i\langle x,\xi\rangle}$ est bornée en module (et donc L^∞), et u est intégrable, donc $x \mapsto e^{-i\langle x,\xi\rangle}u(x)$ est intégrable par Hölder. Ou plus simplement, pour $x \in \mathbb{R}^n$: $\left|e^{-\langle x,\xi\rangle}u(x)\right| = \left|u(x)\right|$, et donc $x \mapsto e^{-i\langle x,\xi\rangle}u(x)$ est intégrable.

Proposition 1.2. *Pour $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{u}$ est continue.*

Démonstration. Soient $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ et $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ t.q. $h_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

$$\hat{f}(\xi_0 + h_k) = \int e^{-i\langle x,\xi_0\rangle} e^{-i\langle x,h_k\rangle} f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Puisque $\left|e^{-i\langle x,\xi_0\rangle} e^{-i\langle x,h_k\rangle} f(x)\right| = \left|f(x)\right|$ et $e^{-i\langle \cdot,\xi_0\rangle} e^{-i\langle \cdot,h_k\rangle} f(\cdot) \xrightarrow[k\to+\infty]{\lambda\text{-p.p.}} e^{-i\langle \cdot,\xi_0\rangle} f(\cdot)$ (la suite converge même partout), par le théorème de la convergence dominée, on sait :

$$\hat{f}(\xi_0 + h_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int e^{-i\langle x,\xi_0\rangle} f(x) \,\mathrm{d}x = \hat{f}(\xi_0).$$

$\square$

Proposition 1.3. *Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si $\forall j \in [\![1,n]\!] : x_j f \in L^1$, alors : $\hat{u} \in \mathcal{C}^1$ et :*

$$\forall j \in [\![1,n]\!] : \left.\frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi_j}\right|_{\xi} = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}(-ix_j)u(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

Démonstration. Soit $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ t.q. $h_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, et prenons $\{e_j\}_{j=1}^n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\hat{u}(\xi + h_k e_j) - \hat{u}(\xi)}{h_k} = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} \underbrace{\frac{e^{-ih_k x_j} - 1}{h_k}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} -ix_j} u(x)\,\mathrm{d}x.$$

En module :

$$\left|e^{-i\langle x,\xi\rangle}\frac{e^{-ih_k x_j} - 1}{h_k} f(x)\right| = \left|e^{-i\langle x,\xi\rangle}\right|\left|\frac{e^{-ih_k x_j} - 1}{h_k}\right|\left|f(x)\right| \le C\left|x_j\right|\left|f(x)\right|,$$

qui est intégrable par hypothèse.

En effet, si $x_j = 0$, alors tout est nul et l'inégalité devient une égalité ; et si $x_j \neq 0$, alors $\frac{\left|e^{-ih_k x_j}-1\right|}{\left|x_j h_k\right|}$ est borné.

Dès lors, par le théorème de convergence dominée, la limite passe sous l'intégrale et on a (1.2). □

Corollaire 1.4. *Pour $m \in \mathbb{N}^*$, si $(1+|x|)^m u \in L^1$, alors $u \in \mathcal{C}^m$ et on peut dériver m fois sous le signe:*

$$\partial^\alpha \hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}(-i)^{|\alpha|}x^\alpha u(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. Exercice (récurrence sur m). □

Définition 1.5. On définit l'ensemble de Schwartz :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\coloneqq \left\{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n : x^\alpha\partial^\beta u \text{ est borné dans } \mathbb{R}^n\right\} \\ &= \left\{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n : x^\alpha\partial^\beta u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\right\}.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Dans l'idée, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions dont toutes les dérivées décroissent plus vite vers 0 aux infinis que tout polynôme.

Proposition 1.6. *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.*

Démonstration. Immédiat par le fait que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ sont des $\mathbb{C}$-evs. □

Proposition 1.7. *Si $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, alors :*

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \bigcap_{1\leq p\leq +\infty} L^p(\mathbb{R}^n).$$

Démonstration.

(*i*) Pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $+\infty > p \geq 1$:

$$\int |u|^p \,\mathrm{d}x = \int \Big(\underbrace{|u|\,(1+|x|)^N}_{\text{borné pour tout } N} \Big)^p (1+|x|)^{-Np}\,\mathrm{d}x \leq \int (C_N)^p \underbrace{(1+|x|)^{-Np}}_{\text{intégrable pour } Np>n} \mathrm{d}x.$$

Dès lors, pour N suffisamment grand ($Np > n$), on a $\|u\|_{L^p}^p = \int |u|^p\,\mathrm{d}x < +\infty$.

Le cas $p = +\infty$ vient uniquement du fait que pour $u \in \mathcal{S}$, pour $\alpha = \beta = (0,\dots,0) \in \mathbb{N}^n$:

$$u = x^\alpha \partial^\beta u \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

(*ii*) Soit $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$: $\{x^\alpha \partial^\beta u \neq 0\} \subseteq \operatorname{supp} u$ compact. Par Heine-Cantor, u est uniformément continue sur $\operatorname{supp} u$, donc uniformément bornée (et donc dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$).

□

Proposition 1.8. *Pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, alors : $x^\alpha \partial^\beta u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{N}^n$. Par Leibniz :

$$\partial^\mu(fg) = \sum_{\sigma\leq\mu} \binom{\mu}{\sigma} \partial^\sigma f \partial^{\mu-\sigma} g.$$

Donc :

$$x^\lambda \partial^\mu(x^\alpha \partial^\beta u) = \sum_{\sigma\leq\mu} \binom{\mu}{\sigma} x^\lambda \partial^\sigma(x^\alpha) \partial^{\mu-\sigma+\beta} u,$$

où $x^\lambda \partial^\sigma(x^\alpha) \leq \mathrm{c}^{\mathrm{ste}} x^\gamma$. On en déduit que $x^\lambda \partial^\mu(x^\alpha \partial^\beta u)$ est une somme finie de termes essentiellement bornés et est donc essentiellement bornée. □

À défaut de définir une topologie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on définit uniquement une notion de convergence.

Définition 1.9. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on dit que u_k *converge vers u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lorsque* $k \to +\infty$ (noté $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} u$) lorsque :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta (u - u_k) \right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

i.e. lorsque :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : \left\| x^\alpha \partial^\beta (u_k - u) \right\|_{L^\infty} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Théorème 1.10. *Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors :*

1. *$\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De plus si $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} u$, alors $\widehat{u_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \hat{u}$.*
2. *$\widehat{D_j u}(\xi) = \xi_j \hat{u}(\xi)$ (de plus $\widehat{x_j u} = -D_j \hat{u}$) où $D_j = \frac{1}{i}\partial_j$.*

Démonstration. Pour le premier point, on calcule :

$$D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \int D_\xi^\alpha \left(e^{-i\langle x,\xi\rangle}\right) u(x)\,\mathrm{d}x = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}(-x)^\alpha u(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donc :

$$\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \int \xi^\beta e^{-i\langle x,\xi\rangle}(-x)^\alpha u(x)\,\mathrm{d}x = \int (-D_x)^\beta (e^{-i\langle x,\xi\rangle})(-x)^\alpha u(x)\,\mathrm{d}x = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} D_x^\beta \left((-x)^\alpha u(x)\right)\mathrm{d}x.$$

Pour montrer cette dernière égalité, intégrons par partie. D'abord observons pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $j \in [\![1,n]\!]$:

$$\int \partial_j \phi\,\mathrm{d}x = \int \cdots \int \left(\int \partial_j \phi\,\mathrm{d}x_j\right)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{j-1}\,\mathrm{d}x_{j+1}\ldots \mathrm{d}x_n.$$

En effet, $\partial_j \phi$ est Borélienne, donc par Fubini, on peut passer de l'intégrale sur $\mathbb{R}^n$ à n intégrale itérées sur $\mathbb{R}$. Or :

$$\begin{aligned}\int \partial_j \phi\,\mathrm{d}x_j &= \lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} \partial_j \phi(x)\,\mathrm{d}x_j \\ &= \lim_{N\to+\infty} \left(\underbrace{\phi(x_1,\ldots,x_{j-1},N,x_{j+1},\ldots,x_n)}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0} - \underbrace{\phi(x_1,\ldots,x_{j-1},N,x_{j+1},\ldots,x_n)}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0} \right) = 0,\end{aligned}$$

puisque $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ implique $\phi(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0$. On en déduit donc que $\int \partial_j \phi\,\mathrm{d}x = 0$.

Dès lors, puisque $e^{-i\langle x,\xi\rangle}(-x)^\alpha u(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et par récurrence :

$$\int (-D_x)^\beta (e^{-i\langle x,\xi\rangle})(-x)^\alpha u(x)\,\mathrm{d}x = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} D_x^\beta \left((-x)^\alpha u(x)\right)\mathrm{d}x.$$

Montrons alors que $\forall N \in \mathbb{N} : \exists C_N \geq 0$ t.q. $\left|D_x^\beta \left((-x)^\alpha u(x)\right)\right| \leq C_N (1+|x|)^{-N}$. Par Leibniz :

$$(1+|x|)^N \partial^\beta (x^\alpha u(x)) = (1+|x|)^N \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial^\gamma x^\alpha \partial^{\beta-\gamma} u(x)$$

est borné car $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dès lors :

$$\left|\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x)\right| \leq C_N \int (1+|x|)^{-N}\,\mathrm{d}x.$$

Pour N suffisamment grand ($N > n$), on a $\left|\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x)\right| < +\infty$, et donc on en déduit $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Pour montrer que $\widehat{u_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \hat{u}$ si $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} u$:

$$\left|\xi^\beta D_\xi^\alpha \left((\widehat{u_k} - u)\right)(\xi)\right| = \left|\int e^{-i\langle x,\xi\rangle} D_x^\beta \left((-x)^\alpha (u_k - u)\right) \mathrm{d}x\right| \leq \int \left|D_x^\beta \left((-x)^\alpha (u_k - u)\right)\right| \mathrm{d}x \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

puisque $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$ implique $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^1(\mathbb{R}^n)} 0$. Par passage au sup sur ξ, on déduit $\widehat{u_k} - \hat{u} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$.

Pour le second point, la seconde formule découle directement du premier pour $\alpha = e_j$:

$$D_j \hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} (-x_j) u(x) \,\mathrm{d}x = -\widehat{x_j u}(\xi).$$

La première égalité se démontre par :

$$\widehat{D_j u}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} D_j u(x) \,\mathrm{d}x = -\int D_{x,j} \left(e^{-i\langle x,\xi\rangle}\right) u(x) \,\mathrm{d}x = \xi_j \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x) \,\mathrm{d}x = \xi_j \hat{u}(\xi).$$

□

1.2 Formule d'inversion

Théorème 1.11. *Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors :*

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{u}(\xi) \,\mathrm{d}\xi. \tag{1.4}$$

La fonction $(y,\xi) \mapsto e^{i\langle x,\xi\rangle} e^{-i\langle y,\xi\rangle} u(y)$ n'est pas intégrable pour (y,ξ). On ne va donc pas pouvoir appliquer Fubini naïvement.

Démonstration. Pour $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $(y,\xi) \mapsto e^{-i\langle y,\xi\rangle} e^{i\langle x,\xi\rangle} \chi(\xi) u(y)$, à x fixé, est intégrable. Donc par Fubini :

$$\begin{aligned} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \chi(\xi) \hat{u}(\xi) \,\mathrm{d}\xi &= \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \chi(\xi) \int e^{-i\langle y,\xi\rangle} u(y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}\xi \\ &= \int u(y) \int e^{-i\langle y-x,\xi\rangle} \chi(\xi) \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}y = \int u(y) \hat{\chi}(y-x) \,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\delta > 0$ tels que $\chi(\xi) = \psi(\delta\xi)$, par changement de variable :

$$\hat{\chi}(\xi) = \int e^{-i\langle y,\xi\rangle} \psi(\delta y) \,\mathrm{d}y = \delta^{-n} \hat{\psi}\left(\frac{\xi}{\delta}\right).$$

Alors :

$$\int e^{i\langle x,\xi\rangle} \psi(\delta\xi) \hat{u}(\xi) \,\mathrm{d}\xi = \int u(x+y) \delta^{-n} \hat{\psi}\left(\frac{y}{\delta}\right) \mathrm{d}y = \int u(x+\delta y) \hat{\psi}(y) \,\mathrm{d}y.$$

Par le théorème de convergence dominée :

$$\int u(x+\delta y) \hat{\psi}(y) \,\mathrm{d}y \xrightarrow[\delta\to+\infty]{} u(x) \int \hat{\psi}(y) \,\mathrm{d}y,$$

or :

$$\int e^{i\langle x,\xi\rangle} \psi(\delta\xi) \hat{u}(\xi) \,\mathrm{d}\xi \xrightarrow[\delta\to+\infty]{} \psi(0) \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{u}(\xi) \,\mathrm{d}\xi.$$

Par unicité de la limite, si $\int \hat{\psi}\,\mathrm{d}y \neq 0$:

$$u(x) = \frac{\psi(0)}{\int \hat{\psi}(y)\,\mathrm{d}y} \int e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{1.5}$$

Dans le cas $n = 1$, on prend $\psi_1 : x \mapsto e^{-x^2/2}$. En intégrant $z \mapsto e^{-z^2/2}$ sur un chemin rectangulaire $[a, b, c, d] \subset \mathbb{C}$, avec $b = M \in \mathbb{R}^+, a = -b, c = b + it, d = a + it$, on trouve :

$$\int_a^b e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x + \int_b^c e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z + \int_c^d e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z + \int_d^a e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z = 0$$

par Cauchy. Si $z = x + it$: $\left|e^{-z^2/2}\right| = e^{-\frac{1}{2}(x^2-t^2)} \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0$. Donc $\int_b^c e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z$ et $\int_d^a e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z$ tendent uniformément vers 0 pour $|a|, |b| \to +\infty$. Donc à la limite, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \int_{\Im z=t} e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z = \int e^{-\frac{1}{2}(x^2-t^2)}e^{-itx}\,\mathrm{d}x = e^{t^2/2}\int e^{-itx}e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \psi_1(-t)\hat{\psi}_1(t) = \frac{1}{\psi_1(t)}\hat{\psi}_1(t).$$

Donc $\hat{\psi}_1(t) = \psi_1(t)\int \psi_1\,\mathrm{d}x$. On en déduit :

$$\int \hat{\psi}_1(t)\,\mathrm{d}t = \int \psi_1(t)\int \psi_1(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \left(\int \psi_1(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = 2\pi.$$

Dès lors $\psi_1(0) = 1$ et $\int \hat{\psi}_1\,\mathrm{d}x = 2\pi$. Dès lors, par (1.5), on a bien la formule d'inversion (1.4).

Dans le cas général $n > 1$, on prend $\psi(x) = e^{-|x|^2/2} = \prod_{j=1}^n \psi_1(x_j)$. Donc :

$$\hat{\psi}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\psi(x)\,\mathrm{d}x = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2}\,\mathrm{d}x = \int \prod_{j=1}^n e^{-ix_j\xi_j}\prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2}\,\mathrm{d}x = \int \prod_{j=1}^n \left(e^{-ix_j\xi_j}e^{-x_j^2/2}\right)\mathrm{d}x.$$

Par Fubini :

$$\hat{\psi}(\xi) = \prod_{j=1}^n \int e^{-ix_j\xi_j}e^{-x_j^2/2}\,\mathrm{d}x_j = \prod_{j=1}^n \hat{\psi}_1(\xi_j).$$

On trouve alors :

$$\int \hat{\psi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int \prod_{j=1}^n \hat{\psi}_1(\xi_j)\,\mathrm{d}\xi = \prod_{j=1}^n \int \hat{\psi}_1(\xi_j)\,\mathrm{d}\xi_j = \left(\int \hat{\psi}_1\,\mathrm{d}x\right)^2 = (2\pi)^n,$$

en réappliquant Fubini.

Puisque $\hat{\psi}(0) = 1$, on a bien (1.4). □

On définit une application *transformée de Fourier* $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : u \mapsto \mathcal{F}u := \hat{u}$.

Proposition 1.12. *$\mathcal{F}$ est une bijection linéaire.*

Démonstration. Par la formule d'inversion, $\mathcal{F}$ est injective : si $\mathcal{F}u = 0$, alors $u = 0$.

De plus, $\mathcal{F}$ est surjective. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, montrons qu'il existe $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\mathcal{F}u = f$. Prenons $u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$. Alors :

$$\mathcal{F}f(x) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^n u(-x).$$

De plus :

$$\hat{\hat{u}}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} \hat{u}(x)\,\mathrm{d}x = (2\pi)^n (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} \hat{u}(x)\,\mathrm{d}x = (2\pi)^n u(-\xi),$$

donc $\hat{f} = \hat{\hat{u}}$ sur $\mathbb{R}^n$, et puisque $\mathcal{F}$ est injective, $f = \hat{u} = \mathcal{F}u$. Donc $\mathcal{F}$ est surjective, et donc bijective.

La linéarité est triviale :

$$\mathcal{F}(f+\lambda g)(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}(f+\lambda g)(x)\,\mathrm{d}x = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x + \lambda \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} g(x)\,\mathrm{d}x = \left(\hat{f} + \lambda \hat{g}\right)(\xi).$$

□

Posons la transformation de Fourier inverse $\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : u \mapsto \tilde{\mathcal{F}}u$ où $\tilde{\mathcal{F}}u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi$. Par un raisonnement similaire à la Proposition précédente, on trouve $\tilde{\mathcal{F}}$ est une bijection linéaire. De plus $\mathcal{F}^{-1} = \tilde{\mathcal{F}}$.

Également, puisque $\mathcal{F}$ transforme des suites convergentes en suites convergentes sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{\mathcal{F}}$ fait de même.

Remarque. Cela veut dire que $\mathcal{F}$ est une homéomorphisme linéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour la topologie non définie ici.

Proposition 1.13. *Pour $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:*

1. $\int u\hat{v} = \int \hat{u}v$;
2. $\int u\overline{v} = (2\pi)^{-n} \int \hat{u}\overline{\hat{v}}$. *Cette égalité est appelée identité de Parseval.*

Démonstration. Le premier point se montre par la formule de la preuve du Théorème 1.11 pour $u, \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\int e^{i\langle x,\xi\rangle} \chi(\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int u(x+y)\hat{\chi}(y)\,\mathrm{d}y$$

en $x = 0$.

Pour le second point, prenons $u, w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et posons $v := (2\pi)^{-n}\overline{\hat{w}}$. Par le premier point :

$$\int \hat{u}v = \int u\hat{v} = \int u(2\pi)^{-n}\hat{\overline{\hat{w}}}.$$

Par la formule d'inversion de Fourier, on peut voir que :

$$(2\pi)^{-n}\hat{\overline{\hat{w}}}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} \overline{\hat{w}}(x)\,\mathrm{d}x = (2\pi)^{-n}\overline{\int e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{w}(x)\,\mathrm{d}x} = \overline{w(\xi)}.$$

Dès lors :

$$\int \hat{u}(2\pi)^{-n}\overline{\hat{w}} = \int u\overline{w}.$$

□

Corollaire 1.14 (Formule de Plancherel)**.** *Pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a :*

$$\int |u|^2 \,\mathrm{d}x = (2\pi)^{-n} \int |\hat{u}|^2 \,\mathrm{d}\xi \tag{1.6}$$

Démonstration. Par Parseval :

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int u\overline{u} \,\mathrm{d}x = (2\pi)^{-n} \int \hat{u}\overline{\hat{u}} \,\mathrm{d}x = (2\pi)^{-n} \|\hat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

□

1.3 Discussion sur la définition de la transformée

On peut définir la transformée de Fourier de plusieurs manières, paramétrisées par $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}_{a,b}u(\xi) = a \int e^{-ib\langle x,\xi\rangle} u(x) \,\mathrm{d}x.$$

La théorie reste la même à homothétie près puisque :

$$\mathcal{F}u(\xi) = \frac{1}{a}\mathcal{F}_{a,b}u(\xi/b).$$

$$(2\pi)^{-n} \int \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}}(\xi) \,\mathrm{d}\xi = \frac{(2\pi)^{-n}b^n}{a^n} \int \mathcal{F}_{a,b}u(\eta)\overline{\mathcal{F}_{a,b}v(\eta)} \,\mathrm{d}\eta.$$

Donc on peut choisir $a = 1$ et $b = 2\pi$ ou encore $a = (2\pi)^{n/2}$ et $b = 1$ afin de simplifier la formule de Parseval qui devient :

$$\int u\overline{v} = \int \mathcal{F}u\overline{\mathcal{F}v}.$$

Cependant le choix $a = b = 1$ permet de ne pas avoir de terme b^k lors des dérivations sous le signe intégral.

1.4 Extension de la transformée à $L^2(\mathbb{R}^n)$

Proposition 1.15. *Il existe une unique application linéaire continue $\mathbb{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\mathbb{F}\Big|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{F}$ et :*

$$\int u\overline{v} \,\mathrm{d}x = (2\pi)^{-n} \int \mathbb{F}u\overline{\mathbb{F}v} \,\mathrm{d}\xi,$$

i.e. $\mathbb{F}$ préserve l'identité de Parseval.

Démonstration. Admettons que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Puisque $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Par cette densité, pour $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, il existe $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} u$, et donc (u_k) est de Cauchy pour cette norme. $(\widehat{u_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est également de Cauchy car par Plancherel :

$$\left\|\widehat{u_k} - \widehat{u_m}\right\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2}\|u_k - u_m\|_{L^2}.$$

Par complétude de L^2, il existe $z \in L^2(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\widehat{u_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} z$. On pose alors $\mathbb{F}u \coloneqq z$. Montrons que z ne dépend pas de la suite $(u_k)_k$ choisie pour montrer que $\mathbb{F}$ est bien définie.

Soit $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ t.q. $v_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} u$. Alors $v_k - u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} 0$. Par Plancherel, $\widehat{v_k} - \widehat{u_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} 0$. Dès lors $\widehat{v_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} z$.

Montrons que $\mathbb{F}$ est linéaire.

Soient $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}, (v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telles que $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2(\mathbb{R}^n)} u$ et $v_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2(\mathbb{R}^n)} v$. Alors $u_k + v_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2(\mathbb{R}^n)} u + v$. Par linéarité de $\mathcal{F}$, $\widehat{u_k} + \widehat{v_k} = \widehat{u_k + v_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2(\mathbb{R}^n)} \mathbb{F}(u+v)$.

Donc $\widehat{u_k} + \widehat{v_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2(\mathbb{R}^n)} \mathbb{F}u + \mathbb{F}v$ et $\widehat{u_k} + \widehat{v_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2(\mathbb{R}^n)} \mathbb{F}(u+v)$. Par unicité de la limite dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, on en déduit $\mathbb{F}u + \mathbb{F}v = \mathbb{F}(u+v)$. Il est également trivial que pour $\lambda \in \mathbb{R} : \mathbb{F}(\lambda u) = \lambda \mathbb{F}u$.

Pour montrer que $\mathbb{F}\Big|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{F}$, prenons $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ constante $u_k = u$. Par définition de $\mathbb{F}$, on a $\mathbb{F}u = \hat{u}$ car $\forall k \in \mathbb{N} : \widehat{u_k} = \hat{u}$, donc $\widehat{u_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2(\mathbb{R}^n)} \hat{u}$.

Montrons alors que $\mathbb{F}$ vérifie Parseval.

Premier cas : $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Il existe $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \supset (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} u$. Donc :

$$\int u\overline{v} = \int u_k\overline{v} + \int (u - u_k)\overline{v}.$$

Puisque :

$$\left|\int (u-u_k)\overline{v}\right| \leq \underbrace{\|u-u_k\|_{L^2}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} 0}\|v\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

on sait :

$$\int u_k\overline{v} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int u\overline{v}.$$

De même, puisque :

$$\left|\int (\mathbb{F}u - \widehat{u_k})\overline{\hat{v}}\,\mathrm{d}x\right| \leq \left\|\mathbb{F}u - \widehat{u_k}\right\|_{L^2}\left\|\overline{\hat{v}}\right\|_{L^2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

on sait :

$$\int \widehat{u_k}\overline{\hat{v}}\,\mathrm{d}\xi \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int \mathbb{F}u\overline{\hat{v}}\,\mathrm{d}\xi.$$

Or $u_k, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Donc pour $k \to +\infty$, par Cauchy-Schwarz et par Parseval pour $\mathcal{F}$:

$$\int u\overline{v}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty}\int u_k\overline{v}\,\mathrm{d}x = (2\pi)^{-n}\lim_{k\to+\infty}\int \widehat{u_k}\overline{\hat{v}}\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{-n}\int \mathbb{F}u\overline{\hat{v}}\,\mathrm{d}\xi.$$

Dans le cas général $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, par le premier point pour $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ t.q. $v_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} v$:

$$\int u\overline{v_k}\,\mathrm{d}x = (2\pi)^{-n}\int \mathbb{F}u\overline{\hat{v}_k}\,\mathrm{d}x.$$

Or $v_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} \mathbb{F}v$. Par Cauchy-Schwarz, on a :

1. $\int u\overline{v_k}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} \int u\overline{v}\,\mathrm{d}x$;
2. et $\int \mathbb{F}u\overline{\hat{v}_k}\,\mathrm{d}\xi \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} \int \mathbb{F}u\overline{\mathbb{F}v}\,\mathrm{d}\xi$.

L'identité de Parseval est donc bien vérifiée pour $\mathbb{F}$. Il reste à vérifier que $\mathbb{F}$ est continue et qu'elle est unique.

Montrons que $\mathbb{F}$ est continue.

La continuité découle de Parseval :

$$\|u\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2}\|\mathbb{F}u\|_{L^2}\,,$$

donc pour $\varepsilon > 0$, pour $\delta = (2\pi)^{-n/2}\varepsilon$, on a que si $\|u-v\|_{L^2} < \delta$, alors $\|\mathbb{F}u - \mathbb{F}v\|_{L^2} < \varepsilon$.

Montrons finalement que $\mathbb{F}$ est unique.

Si il existe $\mathbb{F}_1 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ continue et linéaire telle que $\mathbb{F}_1\Big|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}$, alors par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, pour $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, il existe $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ t.q. $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} u$, et donc, par continuité :

$$\mathbb{F}(u) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{F}(u_k) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{F}_1(u_k) = \mathbb{F}_1(u).$$

Donc puisque deux application continues qui coïncident sur une sous-ensemble dense coïncident partout, on a bien que $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1$. □

De la même manière, $\tilde{\mathcal{F}}$ se prolonge sur L^2 en $\tilde{\mathbb{F}}$

Proposition 1.16. $\mathbb{F}\circ\tilde{\mathbb{F}} = \mathrm{Id}_{L^2} = \tilde{\mathbb{F}}\circ\mathbb{F}$.

Démonstration. Ceci vient directement de la même propriété sur $\mathcal{F}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$. Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ t.q. $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} u$. On sait :

$$\mathcal{S} \ni \tilde{\mathcal{F}}(u_k) = \tilde{\mathbb{F}}(u_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} \tilde{\mathbb{F}}(u)$$

par continuité de $\tilde{\mathbb{F}}$. Par continuité de $\mathbb{F}$, on a :

$$\mathcal{F}\circ\tilde{\mathcal{F}}(u_k) = \mathbb{F}\circ\tilde{\mathbb{F}}(u_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} \mathbb{F}\circ\tilde{\mathbb{F}}(u).$$

Or $\mathcal{F}\circ\tilde{\mathcal{F}}(u_k) = u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} u$. Par unicité de la limite, on a $\mathbb{F}\circ\tilde{\mathbb{F}}(u)$. L'autre égalité se démontre de la même manière. □

À ce stade, il est légitime de se demander si les définitions que l'on a sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ (la formule intégrale définie depuis $\mathcal{S}$) et sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ (la définition de $\mathbb{F}$) sont compatibles.

Proposition 1.17. *Si $u \in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $\hat{u} = \mathbb{F}u$ dans $L^2\big(B(0,R)\big)$ pour tout $R > 0$.*

Démonstration. Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ car :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n : \left|\hat{u}(\xi)\right| \leq \int |u| \,\mathrm{d}x = \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < +\infty.$$

Supposons d'abord que u est à support compact. On prend $(u_k)_k \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^1(\mathbb{R}^n)} u$ et $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2(\mathbb{R}^n)} u$. Par linéarité de $\mathcal{F}$:

$$\left\|\widehat{u_k} - \hat{u}\right\|_{L^\infty} = \left\|\widehat{u_k - u}\right\|_{L^\infty} \leq \|u_k - u\|_{L^1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

par convergence des u_k vers u dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. De plus : $\widehat{u_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2(\mathbb{R}^n)} \mathbb{F}u$. Puisque les intégrales sont faites sur le support de u (car u est nulle sur $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} u$) qui est de mesure finie, on a que la convergence dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ implique la convergence dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Donc par unicité de la limite dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, on a bien $\hat{u} = \mathbb{F}u$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Dans le cas général $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$: $u_k \coloneqq u\chi_{B(0,k)}$. $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^{1,2}(\mathbb{R}^n)} u$ et $u_k \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque $\operatorname{supp} u_k$ est compact pour tout k, par le point précédent, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \widehat{u_k} = \mathbb{F}u_k \qquad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Or $\widehat{u_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \hat{u}$ et $\mathbb{F}u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2(\mathbb{R}^n)} \mathbb{F}u$. Pour $R > 0$, on a donc $\widehat{u_k}\chi_{B(0,R)} \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2(B(0,R))} \hat{u}\chi_{B(0,R)}$, et donc, sur $B(0,R)$, on a bien $\hat{u} = \mathbb{F}u$ dans L^2. □

1.5 Exemple d'application de la théorie de Fourier

Pour $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$ le Laplacien sur $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, soit la PDE suivante :

$$(1 + \sum_{j=1}^n D_j^2)u = u - \Delta u = f, \tag{1.7}$$

ou plus généralement, pour des $a_\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\underbrace{\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha}_{P(D) \text{ polynôme}} \; u = f, \tag{1.8}$$

dans le cas du Laplacien, ce polynôme est $P(\xi) = 1 + |\xi|^2$.

Sous l'hypothèse $\inf_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left|P(\xi)\right| \gneqq 0$, trouvons u t.q. $P(D)u = f$.

Formellement :

$$\begin{aligned}
\widehat{P(D)u}(\xi) &= \hat{f}(\xi) \\
P(\xi)\hat{u}(\xi) &= \hat{f}(\xi) \\
\hat{u}(\xi) &= \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} \\
u(x) &= (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} \,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Plus rigoureusement, puisque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on sait $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De plus, P est borné par dessous. Donc $\left|\hat{f}/P\right| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}$, et du coup la fonction sous l'intégrale ($\xi \mapsto e^{i\langle x,\xi\rangle}\frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)}$) est L^1, et cette intégrale est bien définie pour $N > n$.

De plus, puisque la dérivation selon x sur u fait juste descendre du ξ de l'exponentielle, par récurrence avec le théorème de convergence dominée et par la borne supérieure ci-dessus, on trouve que $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. On peut alors vérifier que la fonction u ainsi trouvée est bien une solution de (1.8) :

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha u = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle} \underbrace{\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \xi^\alpha}_{=P(\xi)} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x).$$

Chapitre 2

Espaces de Hilbert

Définition 2.1. Soit H un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Un produit scalaire (forme hermitienne définie positive) sur H est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ t.q. :

(i) à $y \in \mathbb{C}$ fixé : $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est une application linéaire de H dans $\mathbb{C}$;

(ii) pour $x, y \in \mathbb{C}$: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;

(iii) pour $x \in \mathbb{C}$: $\langle x, x \rangle \geq 0$ où $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Sur un produit scalaire, on peut définir une norme $\|x\| \coloneqq \langle x, x \rangle^{1/2}$.

Remarque. Une forme hermitienne définie positive est donc anti-linéaire pour le 2e paramètre : $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$.

Proposition 2.2. $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}^+$ *est une norme.*

Proposition 2.3. $\|\cdot\|$ *vérifie Cauchy-Schwarz, i.e. :*

$$\forall x, y \in H : \left| \langle x, y \rangle \right| \leq \|x\| \|y\| .$$

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ t.q. $|\alpha| = 1$ et $\alpha \langle y, x \rangle \in \mathbb{R}^+$ (i.e. $\alpha \langle y, x \rangle = \left| \langle x, y \rangle \right|$). Soit $r \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x - r\alpha y, x - r\alpha y \rangle &= \langle x, x \rangle - r\alpha \langle y, x \rangle - r\overline{\alpha} \langle x, y \rangle + r^2 \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - r \underbrace{\alpha \langle y, x \rangle}_{=\left|\langle y,x \rangle\right|} - r \underbrace{\overline{\alpha} \langle x, y \rangle}_{=\left|\langle y,x \rangle\right|} + r^2 \underbrace{\alpha\overline{\alpha}}_{=|\alpha|=1} \langle y, y \rangle = A - 2Br + Cr^2, \end{aligned}$$

pour $A = \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$, $B = \alpha \langle x, y \rangle = \left| \langle x, y \rangle \right| \in \mathbb{R}^+$, $C = \langle y, y \rangle \in \mathbb{R}^+$.

Si $C = 0$, alors $B = 0$, et donc $\langle y, x \rangle = 0$ et Cauchy-Schwarz est vérifié.

Si $C \gneqq 0$, alors pour $r = B/C$: $0 \leq A - 2Br + Cr^2 = \frac{AC - B^2}{C}$, donc $B^2 \leq AC$, donc Cauchy-Schwarz est vérifié. □

Proposition 2.4. $\|\cdot\|$ *vérifie l'inégalité triangulaire, i.e. :*

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Démonstration. $\|x+y\|^2 = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$. □

On a donc $(H, \|\cdot\|)$ un e.v. normé, depuis lequel on peut alors définir une distance : $d(x,y) \coloneqq \|x-y\|$.

Définition 2.5. Si H est complet pour d, on dit que H est un espace de Hilbert.

Quelques exemples d'espaces de Hilbert :

(0) $\mathbb{C}^n$ pour $\langle x,y\rangle \coloneqq \sum_{j=1}^n x_j\overline{y_j}$;

(1) Pour $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure, $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle \coloneqq \int f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$;

(2) Pour $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ comme espace de mesure, on a l'équivalent dénombrable de l'exemple (0) :

$$\langle f,g\rangle_{\ell^2} \coloneqq \int f\overline{g}\,\mathrm{d}\# = \sum_{k\geq 1} f_k\overline{g_k}.$$

On note $\ell^2(\mathbb{N}) \coloneqq L^2(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$.

Un dernière exemple bien moins trivial : les espaces de Sobolev.

Définition 2.6. Soit $s \geq 0$ un paramètre, on définit l'espace de Sobolev d'ordre s sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$H^s(\mathbb{R}^n) \coloneqq \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } (2\pi)^{-n}\int \left|\mathbb{F}u(\xi)\right|^2 (1+|\xi|)^s\,\mathrm{d}\xi \lneqq +\infty \right\}. \tag{2.1}$$

On y définit le produit scalaire suivante pour $u,v \in H^s(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle u,v\rangle_s \coloneqq (2\pi)^{-n}\int \mathbb{F}u\overline{\mathbb{F}v}(1+|\xi|)^s\,\mathrm{d}\xi. \tag{2.2}$$

Remarque. Remarquons que $u \in H^s \iff \xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{s/2}\mathbb{F}u(\xi)$ est dans L^2.

Proposition 2.7. $(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle_s$ *est un produit scalaire.*

Démonstration. À v fixé, $u \mapsto \langle u,v\rangle_s$ est linéaire par linéarité de $\mathbb{F}$ et par linéarité de l'intégrale.

Soient $u,v \in H^s$.

$$\langle u,v\rangle_s = (2\pi)^{-n}\int \mathbb{F}u\overline{\mathbb{F}v}\underbrace{(1+|\xi|)^s}_{\in\mathbb{R}^+}\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{-n}\overline{\int \mathbb{F}v\overline{\mathbb{F}u}(1+|\xi|)^s\,\mathrm{d}\xi} = \overline{\langle v,u\rangle_s}.$$

Finalement, pour $u \in H^s$:

$$\langle u,u\rangle_s = (2\pi)^{-n}\int \underbrace{|\mathbb{F}u|^2}_{\geq 0}\underbrace{(1+|\xi|)^s}_{\geq 0}\mathrm{d}\xi \geq 0,$$

et de plus, il est évident que $\langle u,u\rangle_s = 0 \iff u = 0$ puisque $\hat{u} = 0 \iff u = 0$. □

Par linéarité de Fourier, $H^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel, et de plus il est normé par le produit scalaire défini ci-dessus. Montrons alors que c'est un espace ce Hilbert.

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H^s$ une suite de Cauchy. $(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathbb{F}u_k$ est de Cauchy dans L^2, qui est complet. Donc il en existe une limite $V \in L^2$ t.q. $(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathbb{F}u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} V$. Il existe $u \in L^2$ t.q. $(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathbb{F}u = V$ car $(1+|\xi|^2)^{-s/2}V \in L^2$, et $\mathbb{F}$ est une bijection sur L^2. De plus, $u \in H^s$ car $V = (1+|\xi|^2)^{s/2}\mathbb{F}u \in L^2$. Puisque $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{H^s} u$, on a que H^s est complet.

Pour un contre-exemple, on a $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle := \int f\overline{g}\,\mathrm{d}x$ n'est pas un Hilbert. En effet, pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, par densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\exists (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2(\mathbb{R}^n)} f.$$

De plus, (f_k) est de Cauchy dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$, mais $(f_k)_k$ ne converge pas dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. En effet, par l'absurde, si $\exists g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.q. $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2(\mathbb{R}^n)} g$, par unicité de la limite, $g = f$, or $f \notin \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

À partir d'ici, H désigne un espace de Hilbert quelconque muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Définition 2.8. Soit $y \in H$. On définit :

$$\begin{cases} f_1 : x \mapsto \langle x, y\rangle \\ f_2 : x \mapsto \langle y, x\rangle \\ f_3 : x \mapsto \|x\| \end{cases}$$

Proposition 2.9. *f_i est continue pour $i = 1, 2, 3$.*

Démonstration.

1. $\left|f_1(x_1) - f_1(x_2)\right| = \left|\langle x_1 - x_2, y\rangle\right| \leq \|x_1 - x_2\|\|y\| \xrightarrow[x_1\to x_2]{} 0$. ($f_1$ est même uniformément continue et Lipschitzienne).
2. Idem pour f_2, à permutation près.
3. La continuité vient directement de $\left|\|x\| - \|z\|\right| \leq \|x - z\|$, et donc $\|\cdot\|$ est Lipschitzienne.

$\square$

Proposition 2.10. *Si $F \leq H$, alors $\overline{F} \leq H$.*

Démonstration. Pour $x, y \in \overline{F}$, il existe $(x_k)_k, (y_k)_k \subset F$ t.q. $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$ et $y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} y$.

Donc $F \ni x_k + y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x + y$. De plus, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\underbrace{\lambda x_k}_{\in F} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \lambda x \in \overline{F}$. $\square$

Remarque. Contrairement aux e.v. de dimension finie, en dimension infinie, il est possible d'avoir un sous-e.v. *strict* dense (e.g. $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$).

Proposition 2.11. $F := \{f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *t.q.* $f = 0$ *sur* $x_n > 0\}$ *est un e.v. fermé dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Soit $g \in \overline{F}$. Il existe $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset F$ t.q. $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} g$. Pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_{x_n>0} |g|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{x_n>0} |g - f_k|^2 \,\mathrm{d}x \leq \|g - f_k\|_{L^2}^2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

car $f_k \in F$ et $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} g$. Dès lors $\int_{x_n>0} |g|^2 \,\mathrm{d}x = 0$, i.e. $g \in F$. Donc $\overline{F} = F$. □

2.1 Orthogonalité

Définition 2.12. Pour $x, y \in H$, x et y sont *orthogonaux*, noté $x \perp y$ lorsque $\langle x, y\rangle = 0$.

Pour $x \in H$, on définit $x^\perp := \{y \in H \text{ t.q. } \langle x, y\rangle = 0\}$, et pour $M \subset H$, on définit $M^\perp := \{y \in H \text{ t.q. } \forall x \in M : \langle x, y\rangle = 0\} = \bigcap_{x\in M} x^\perp$.

Proposition 2.13. *Pour* $x \in H$, $x^\perp \leq H$, *et* $x^\perp$ *est fermé.*

Démonstration. À $x \in H$ fixé, on remarque que $x^\perp = f_2^{-1}(\{0\})$, or f_2 est continue. Donc $x^\perp$ est fermé. Vérifier que $x^\perp$ est un sous-e.v. est trivial. □

Corollaire 2.14. *Pour* $M \leq H$, $M^\perp$ *est un sous-e.v. fermé de* H.

Ce résultat découle directement du fait que $M^\perp$ est une intersection d'e.v. fermés.

Définition 2.15. $E \subseteq H$ est dit *convexe* lorsque :

$$\forall x, y \in E : \forall t \in [0, 1] : (1 - t)x + ty \in E.$$

Exemple 2.1.

- tout sous-e.v. de H est convexe ;
- toute boule (ouverte ou fermée) dans H est convexe ;
- pour $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, u \in L^2(\Omega)$, $E = \{v \in L^2 \text{ t.q. } u = v \text{ sur } \Omega\}$ est convexe.

Montrons également que E est fermé dans L^2. Soit $f \in \overline{E}$. Il existe $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E$ t.q. $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L^2} f$.

$$\int_\Omega |u - f|^2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f_k - f|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f|^2 \,\mathrm{d}x = \|f_k - f\|_{L^2}^2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Théorème 2.16. *Soit* $E \neq \emptyset$ *convexe fermé dans* H. *Alors :*

$$\exists! x \in E \text{ t.q. } \|x\| = \min_{z\in E} \|z\| = \inf_{z\in E} \|z\| =: \delta.$$

Démonstration. **unicité :** soient $x, y \in E$ t.q. $\|x\| = \|y\| = \delta$. Par la formule du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Par convexité de E, $\frac{1}{2}(x+y) \in E$. Donc $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \geq \delta$. On trouve alors :

$$\|x-y\|^2 \leq 2(\underbrace{\|x\|^2 + \|y\|^2}_{=2\delta^2}) - 4\delta^2 = 0.$$

On en déduit $\|x-y\| = 0$, i.e. $x = y$.

existence : Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ t.q. $\|y_k\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} \delta$ qui existe par définition de l'infimum. Par la règle du parallélogramme :

$$\|y_k - y_m\|^2 \leq 2(\underbrace{\|y_k\|^2 + \|y_m\|^2}_{\xrightarrow[k,m\to+\infty]{} 2\delta^2}) - 4\delta^2 \xrightarrow[k,m\to+\infty]{} 0.$$

Donc (y_k) est de Cauchy. Par complétude de H, $\exists x_0 \in H$ t.q. $y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x_0$, et par fermeture de E, $x_0 \in E$. De plus, par continuité de la norme, $\|y_k\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} \|x_0\|$, et par unicité de la limite, $\|x_0\| = \delta$. □

Exemple 2.2. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert, $u \in L^2(\Omega)$, $E = \{v \in L^2$ t.q. $u = v$ sur $\Omega\}$ est un convexe fermé, donc par ce théorème, il existe un unique $u^* \in E$ qui minimise la norme : $u^* = u$ sur Ω et $u^* = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Théorème 2.17 (Décomposition orthogonale)**.** *Soit $M \leq H$ fermé. Alors :*

1. *$\forall x \in H : \exists!(y, z) \in M \times M^\perp$ t.q. $x = y + z$;*
2. *ces valeurs y, z sont les points les plus proches de x dans M et $M^\perp$ respectivement ;*
3. *Les applications $P : x \mapsto y$ et $Q : x \mapsto z$ sont linéaires ;*
4. *$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ (et donc P, Q sont continues) ;*
5. *P et Q sont les projections orthogonales de x sur M et $M^\perp$ respectivement.*

Démonstration.

1. **unicité :** si $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, pour $y_1, y_2 \in M$ et $z_1, z_2 \in M^\perp$, on a $\underbrace{y_1 - y_2}_{\in M} = \underbrace{z_2 - z_1}_{\in M^\perp}$. Or $M \cap M^\perp = \{0\}$. Donc $y_1 = y_2$ et $z_1 = z_2$.

   existence : $x + M$ est convexe (trivial par le fait que $M \leq H$). Montrons que $x + M$ est fermé. Soit $u \in \overline{x + M}$. Il existe $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset x + M$ t.q. $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} u$. $\forall k \in \mathbb{N} : x + M \ni u_k = x + y_k$. On en déduit $y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} u - x$. Par fermeture de M, on a $u - x \in M$, et donc $u \in x + M$ (i.e. $x + M$ est fermé).

   Soit $z \in x + M$ l'élément qui minimise la norme. On pose $y \coloneqq x - z \in M$. Montrons alors que $z \in x + M$. Soit $w \in M$; WLOG, supposons $\|w\| = 1$. Puisque $z \in x + M$, $\forall \alpha \in \mathbb{C} : z - \alpha w \in x + M$. Dès lors :

   $$\|z\|^2 \leq \|z - \alpha w\|^2 = \|z\|^2 - 2\Re(\alpha \langle w, z\rangle) + |\alpha|^2,$$

   et donc $0 = 2\Re(\alpha \langle w, z\rangle) - |\alpha|^2$. En particulier, pour $\alpha = \langle z, w\rangle$: $0 = \left|\langle z, w\rangle\right|^2$, donc $\langle z, w\rangle = 0$. Dès lors $z \in M^\perp$.

2. Soit $Y \in M$. Montrons que $\|x-Y\| \geq \|x-y\| = \|z\|$. Par Pythagore :

$$\|x-Y\|^2 = \|y+z-Y\|^2 = \left\|(y-Y)+z\right\|^2 = \|y-Y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2 .$$

Idem pour $Z \in M^\perp$: $\|x-Z\|^2 \geq \|y\|^2$.

3. Soient $x_1, x_2 \in H, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. On a $\alpha_1 x_1 = \alpha_1 P x_1 + \alpha_1 Q x_1$, et $\alpha_2 x_2 = \alpha_2 P x_2 + \alpha_2 Q x_2$. Donc :

$$P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + Q(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 P x_1 + \alpha_1 Q x_1 + \alpha_2 P x_2 + \alpha_2 Q x_2,$$

et donc :

$$\underbrace{P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \alpha_1 P x_1 - \alpha_2 P x_2}_{\in M} = \underbrace{\alpha_1 Q x_1 + \alpha_2 Q x_2 - Q(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}_{\in M^\perp}.$$

Or $M \cap M^\perp = \{0\}$, donc $P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 P x_1 + \alpha_2 P x_2$, et $\alpha_1 Q x_1 + \alpha_2 Q x_2 = Q(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$.

4. Par Pythagore $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$. Donc $\|Px\| \leq \|x\|$ et $\|Qx\| \leq \|x\|$, i.e. P et Q sont Lipschitziennes, donc en particulier continues.

□

Corollaire 2.18. *Si $M \leq H$ est fermé, avec $M \neq H$, il existe $y \in H \setminus \{0\}$ t.q. $y \perp M$.*

Démonstration. Pour $x \in H \setminus M$, $x = Px + Qx$, où $Qx \neq 0$, et $Qx \perp M$. □

Corollaire 2.19. *Si $M \leq H$ est fermé, alors $M = M^{\perp\perp}$.*

Démonstration. La première inclusion est triviale : si $x \in M$, alors $x \perp M^\perp$.

La seconde inclusion se démontre comme suit : soit $x \in M^{\perp\perp} \subseteq H$. $x = y + z$ où $y \in M$ et $z \in M^\perp$. Or $0 = \langle x, z\rangle = \langle y+z, z\rangle = \langle y, z\rangle + \|z\|^2$, et $\langle y, z\rangle = 0$ par définition d'orthogonalité. Donc $|z| = 0$ et $z = 0$, i.e. $x = y \in M$. □

Lemme 2.20 (Lemme de Riesz)**.** *Soit $L : H \to \mathbb{C}$, une forme linéaire continue. Alors :*

$$\exists! y \in H \text{ t.q. } L = \langle \cdot, y\rangle .$$

Démonstration. **<u>unicité :</u>** pour $y_1, y_2 \in H$ t.q. $\forall x \in H : \langle x, y_1\rangle = \langle x, y_2\rangle$, on a $\langle x, y_1 - y_2\rangle = 0$, donc $y_1 - y_2 \in H^\perp = \{0\}$, i.e. $y_1 = y_2$.

<u>existence :</u> si $L \equiv 0$, alors $y = 0$. Supposons alors que L n'est pas identiquement nulle. $\operatorname{Ker} L \subsetneqq H$ et est fermé par continuité de L. Dès lors, il existe $z \in H$, $z \neq 0$ t.q. $z \perp \operatorname{Ker} L$. WLOG, supposons $\|z\| = 1$. Posons $y \coloneqq (\overline{Lz})z$ et $u \coloneqq (Lx)z - (Lz)x$. Calculons :

$$Lu = (Lx)Lz - (Lz)Lx = 0,$$

donc $u \in \operatorname{Ker} L$, et donc $0 = \langle u, z\rangle = (Lx)\langle z, z\rangle - (Lz)\langle x, z\rangle = Lx - (Lz)\langle x, z\rangle$. Dès lors, $Lx = (Lz)\langle x, z\rangle = \langle x, y\rangle$. □

2.2 Systèmes orthonormaux

Définition 2.21. Pour V un e.v. et $S \subseteq V$, on note $\operatorname{Vect} S = \operatorname{Span} S$ l'e.v. engendré par S.

$(e_\alpha)_{\alpha \in A} \subset V$ est appelé *orthonormal* lorsque $\forall \alpha, \beta \in A : \langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta}$.

Pour $x \in H$, on définit $\hat{x}(\alpha) \coloneqq \langle x, e_\alpha \rangle$.

Les $\hat{x}(\alpha)$ sont les coefficients de Fourier relativement au système $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Exemple 2.3. Sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, les $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}}$ sont les $e_\alpha : [0, 2\pi) \to \mathbb{C} : t \mapsto \frac{e^{i\alpha t}}{\sqrt{2\pi}}$.

Théorème 2.22. *Pour H un espace de Hilbert et $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ un système orthonormal, $F \subset A$ fini, et $M_F \coloneqq \operatorname{Vect} \{e_\alpha\}_{\alpha \in F}$, on a :*

1. *si $\varphi : A \to \mathbb{C}$ est nulle sur $A \setminus F$, pour $y = \sum_{\alpha \in F} \varphi(\alpha) e_\alpha$, alors :*
$$\forall \alpha \in A : \varphi(\alpha) = \hat{y}(\alpha).$$
De plus, $\|y\|^2 = \sum_{\alpha \in F} |\varphi(\alpha)|^2$.
2. *Si $x \in H$, $s_F(x) \coloneqq \sum_{\alpha \in F} \hat{x}(\alpha) e_\alpha \in M_F$. Si $s \in M_F \setminus \{s_F(x)\}$, alors :*
$$\|x - s_F(x)\| \lneqq \|x - s\|.$$
De plus : $\sum_{\alpha \in F} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$ (inégalité de Bessel).

Démonstration.

1. $\hat{y}(\alpha) = \langle y, e_\alpha \rangle = \sum_{\beta \in F} \varphi(\beta) \langle e_\beta, e_\alpha \rangle = \varphi(\alpha)$ et :
$$\|y\|^2 = \left\| \sum_{\beta \in F} \varphi(\beta) e_\beta \right\|^2 \overset{\text{Pythagore}}{=} \sum_{\beta \in F} |\varphi(\beta)|^2 \|e_\beta\|^2 = \sum_{\beta \in F} |\varphi(\beta)|^2.$$
2. Soit $s \in M_F$. $\forall \alpha \in F : x - s_F(x) \perp e_\alpha$ et $x - s_F(x) \perp s_F(x) - s \in M_F$. En effet :
$$\langle x - s_F(x), e_\alpha \rangle = \langle x, e_\alpha \rangle - \langle s_F(x), e_\alpha \rangle = \hat{x}(\alpha) - \hat{x}(\alpha) = 0.$$
Dès lors :
$$x - s = (x - s_F(x)) + (s_F(x) - s),$$
et donc, par Pythagore :
$$\|x - s\|^2 = \|x - s_F(x)\|^2 + \|s_F(x) - s\|^2. \tag{2.3}$$
Cette norme est minimisée (strictement) en $s = s_F(x)$ et donc :
$$\|x - s_F(x)\| \lneqq \|x - s\|$$
si $s \neq s_F(x)$. Ensuite :
$$\|s_F(x)\|^2 \leq \|s_F(x)\|^2 + \|x - s_F(x)\|^2.$$

Par l'équation 2.3 : si $s = 0$:

$$\left\|s_F(x)\right\|^2 \leq \left\|s_F(x)\right\|^2 + \left\|x - s_F(x)\right\|^2 = \|x\|^2 .$$

Or :

$$\left\|s_F(x)\right\|^2 = \sum_{\alpha\in F} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 ,$$

et donc l'inégalité de Bessel est bien vérifiée.

□

Remarque. Sur A, on a un espace mesuré canonique : $(A, \mathcal{P}(A), \#)$ pour lequel on adopte les notations :

$$\forall B \in \mathcal{P}(A) : \int_B \varphi \, \mathrm{d}\# =: \sum_{\alpha\in B} \varphi(\alpha).$$

Remarquons également que par définition de l'intégrale, si $\varphi : A \to [0, +\infty]$:

$$\sum_{\alpha\in A} \varphi(\alpha) = \sup_{\substack{B\subset A \\ |B|\lneqq+\infty}} \sum_{\alpha\in B} \varphi(\alpha).$$

Et si $\varphi \in \ell^1(A)$ et $\varphi \geq 0$, alors pour $A_k = \{\varphi \geq k^{-1}\}$ $(k \geq 1)$, on a $|A_k| \lneqq +\infty$ puisque $\varphi \in \ell^1(A)$. Or $\bigcup_{k\geq 1} A_k = \{\varphi \gneqq 0\}$, et donc $\{\varphi \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Dans le cas général, pour $\varphi \in \ell^1(A)$, alors $(\Re\varphi)^\pm$ et $(\Im\varphi)^\pm$ sont non-nulles sur un ensemble au plus dénombrable, et donc $\{\varphi \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Lemme 2.23. *Pour $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, l'ensemble des fonctions simples mesurables nulles hors d'un ensemble de mesure finie est dense dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ pour $p \in [1, +\infty)$.*

Lemme 2.24. *Soient X un espace métrique complet, Y un espace métrique, et $X_0 \subset X$, un sous-ensemble dense. Si $f \in \mathcal{C}^0(X, Y)$ telle que $f\Big|_{X_0}$ une isométrie et $f(X_0)$ est dense dans Y, alors f est surjective et est une isométrie.*

Démonstration. Fixons $x, y \in X$. Il existe $(x_k)_{k\geq 0}, (y_k)_{k\geq 0} \subset X_0$ telles que $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$ et $y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} y$. Pour $k \geq 0$:

$$d(x_k, y_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} d(x, y)$$

car la distance est continue sur un espace métrique. De plus :

$$d(x_k, y_k) = d\left(f(x_k), f(y_k)\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} d\left(f(x), f(y)\right) ,$$

à nouveau par continuité de la métrique, et par continuité de f. Donc par unicité de la limite, on a $d(x, y) = d(f(x), f(y))$, et donc f est une isométrie.

Il reste à montrer que f est surjective. Soit $y \in Y$. $f(X_0)$ est dense dans Y, et donc par continuité de f, on sait : $\exists (x_k)_{k\geq 0} \subset X_0$ telle que $f(x_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} y$. $(f(x_k))_k$ est de Cauchy dans Y, et puisque f est une isométrie, $(x_k)_k$ est de Cauchy dans X. Par complétude, on sait que $\exists x \in X$ t.q. $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$.

Finalement, par continuité de f : $f(x_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(x)$, et par construction $f(x_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} y$. Par unicité de la limite dans les espaces métriques, on a $f(x) = y$, et donc y admet une préimage par f. □

Théorème 2.25. *Soit* $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$*, un système orthonormal dans* H*. Soit* $P = \mathrm{Span}\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$*. Alors :*

1. $\forall x \in H : \sum_{\alpha\in A} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 \leq \|x\|^2$ *(inégalité de Bessel généralisée) ;*
2. $f : H \to \ell^2(A) : x \mapsto \hat{x}$ *est linéaire, continue, et surjective ;*
3. $f\Big|_{\overline{P}}$ *est une isométrie surjective* $\overline{P} \to \ell^2(A)$*.*

Démonstration.

1. Pour tout $F \subset A$ fini, on a :
$$\sum_{\alpha\in F} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 \leq \|x\|^2 .$$
Or par la remarque précédente :
$$\sum_{\alpha\in A} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 = \sup_{\substack{B\subset A\\ |B|\lneqq+\infty}} \sum_{\alpha\in B} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 \leq \|x\|^2$$
par passage au supremum (à la limite) et par l'inégalité de Bessel finie.
2. Soit $x \in H$. Puisque $\|x\|^2 \lneqq +\infty$, par l'inégalité de Bessel, on sait $\sum_{\alpha\in A} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 \lneqq +\infty$, i.e. $\hat{x} \in \ell^2(A)$.
f est linéaire par linéarité de $x \mapsto \langle x, e_\alpha\rangle$ pour tout $\alpha \in A$.
f est continue car Lipschitzienne :
$$\left\|f(x) - f(y)\right\|^2_{\ell^2(A)} = \sum_{\alpha\in A} \left|\widehat{x-y}(\alpha)\right|^2 \leq \|x-y\|^2_H .$$
La surjectivité vient du point 3 : si $f\Big|_{\overline{P}}$ est surjective, alors en particulier f est surjective.
3. Pour $X = \overline{P}$, $X_0 = P$, $Y = \ell^2(A)$, remarquons que :
$$\underbrace{\Big\{\chi \in \ell^2(A) \text{ t.q. } \chi(\alpha) = 0 \text{ si } \alpha \notin F \subset A \text{ fini}\Big\}}_{\text{dense dans } \ell^2(A)} \subset f(P).$$
De plus $f\Big|_P$ est une isométrie. En effet, pour $x \in P$, on sait qu'il existe $F \subset A$ fini et $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}$ $(\alpha \in F)$ tels que $x = \sum_{\alpha\in F} \lambda_\alpha e_\alpha$. Dès lors :
$$\left\|f(x)\right\|^2_{\ell^2(A)} = \|\hat{x}\|^2_{\ell^2(A)} = \sum_{\alpha\in A} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 = \sum_{\alpha\in F} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 = \sum_{\alpha\in A} \left|\sum_{\beta\in F} \lambda_\beta \left\langle e_\beta, e_\alpha\right\rangle\right|^2 = \sum_{\alpha\in F} |\lambda_\alpha|^2 ,$$
et :
$$\|x\|^2_H = \langle x, x\rangle_H = \left\langle \sum_{\alpha\in F} \lambda_\alpha e_\alpha, \sum_{\beta\in F} \lambda_\beta e_\beta \right\rangle = \sum_{\alpha\in F}\sum_{\beta\in F} \lambda_\alpha \overline{\lambda_\beta} \left\langle e_\alpha, e_\beta\right\rangle = \sum_{\alpha\in F} |\lambda_\alpha|^2 .$$
Finalement, puisque $\overline{P}$ est complet (car sous-ensemble fermé de H), on peut ensuite appliquer le lemme 2.24 qui affirme que $f\Big|_{\overline{P}}$ est une isométrie surjective sur Y.

□

Définition 2.26. Un *système orthonormal maximal* (SOM) est un système orthonormal qui est maximal au sens de l'inclusion.

Théorème 2.27. *Soit $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ un système orthonormal dans H. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$(e_\alpha)_\alpha$ est un SOM.*
2. *$M \coloneqq \mathrm{Span}\{e_\alpha\}_\alpha$ est dense dans H.*
3. *$\forall x \in H : \|\hat{x}\|^2_{\ell^2(A)} = \sum_{\alpha\in A}\left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 = \|x\|^2_H$.*
4. *$\forall x, y \in H : \langle \hat{x}, \hat{y}\rangle_{\ell^2(A)} = \sum_{\alpha\in A}\hat{x}(\alpha)\overline{\hat{y}(\alpha)} = \langle x, y\rangle$ (Identité de Parseval).*
5. *$\forall x \in H : \forall \varepsilon > 0 : \exists A_0 \subset A$ fini tel que $\forall A_1 \supset A_0$: si A_1 est fini, alors $\left\|x - \sum_{\alpha\in A_1}\hat{x}(\alpha)e_\alpha\right\| \leq \varepsilon$.*

Démonstration.

$1 \Rightarrow 2$ Par l'absurde, supposons que $\overline{M} \subsetneq H$. Alors par le Corollaire 2.18, il existe $y \in H \setminus \{0\}$ tel que $y \perp \overline{M}$ et donc le système $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ n'est pas maximal car on peut lui ajouter $\frac{y}{\|y\|_H}$.

$2 \Rightarrow 3$ Par le Théorème 2.25 (point 3), on sait que $\overline{M} \to \ell^2(A) : x \mapsto \hat{x}$ est une isométrie, ce qui revient à dire que si $x \in \overline{M}$, alors l'inégalité de Bessel est une égalité, i.e. :

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A}\left|\hat{x}(\alpha)\right|^2.$$

$3 \Rightarrow 4$ On veut montrer que $\|\hat{\cdot}\|_{\ell^2(A)} = \|\cdot\|_H \Rightarrow \langle\hat{\cdot},\hat{\cdot}\rangle_{\ell^2(A)} = \langle\cdot,\cdot\rangle_H$. Dans $\mathcal{H}$, un espace de Hilbert quelconque (e.g. $\mathcal{H} = H$ ou $\mathcal{H} = \ell^2(A)$), on a :

$$4\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}} = \|x+y\|^2_{\mathcal{H}} - \|x-y\|^2_{\mathcal{H}} + i\|x+iy\|^2_{\mathcal{H}} - i\|x-iy\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Or par hypothèse, $\|\cdot\|_H = \|\hat{\cdot}\|_{\ell^2(A)}$. Donc :

$$\begin{aligned} 4\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle_{\ell^2(A)} &= \|\hat{x}+\hat{y}\|^2_{\ell^2(A)} - \|\hat{x}-\hat{y}\|^2_{\ell^2(A)} + i\|\hat{x}+i\hat{y}\|^2_{\ell^2(A)} - i\|\hat{x}-i\hat{y}\|^2_{\ell^2(A)} \\ &= \|x+y\|^2_H - \|x-y\|^2_H + i\|x+iy\|^2_H - i\|x-iy\|^2_H = 4\langle x, y\rangle_H. \end{aligned}$$

$4 \Rightarrow 1$ Par l'absurde, supposons qu'il existe $u \neq 0$ tel que $\forall \alpha \in A : u \perp e_\alpha$. Alors $\forall \alpha \in A : \hat{u}(\alpha) = 0$. Or $0 \neq \|u\|^2 = \sum_{\alpha\in A}\hat{u}(\alpha)\overline{\hat{u}(\alpha)} = \sum_{\alpha\in A}\left|\hat{u}(\alpha)\right|^2 = 0$, ce qui est une contradiction.

$5 \Rightarrow 2$ Fixons $x \in H$ et $\varepsilon = \frac{1}{k}$. Pour tout k, il existe $x_k = \sum_{\alpha\in A_1}\langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha \in M$ tel que $\|x - x_k\| \leq \frac{1}{k} = \varepsilon$

$3 \Rightarrow 5$

$$\sum_{\alpha\in A}\left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 = \sup_{B\subset A \text{ fini}}\sum_{\beta\in B}\left|\hat{x}(\beta)\right|^2.$$

Par définition du sup : $\forall \varepsilon > 0 : \exists A_0$ fini $\subset A$ t.q. $\forall A_1$ fini $\supset A_0$:

$$\left\|x - \sum_{\alpha\in A_1}\hat{x}(\alpha)e_\alpha\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\alpha\in A_1}\left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 \leq \varepsilon^2.$$

□

Théorème 2.28. *Tout espace de Hiblert possède un système orthonormal maximal.*

Démonstration. Soit A l'ensemble des SOMs de H. $(A, \subseteq)$ est ordonné. Soit $\mathcal{S} \subset A$ une partie totalement ordonnée. On pose :

$$\hat{S} \coloneqq \bigcup_{s \in \mathcal{S}} s.$$

Mq $\hat{S} \in A$.

Soient $a_1, a_2 \in \hat{S}$. Il existe $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ tels que $a_1 \in s_1$ et $a_2 \in s_2$, or $\mathcal{S}$ est totalement ordonné. Donc soit $s_1 \subseteq s_2$, soit $s_2 \subseteq s_1$, donc $a_1, a_2 \in s_1$ ou $a_1, a_2 \in s_2$. En particulier, ils sont orthogonaux, et de plus $\hat{S}$ majore tout $s \in \mathcal{S}$.

Par le lemme de Zorn, on a l'existence d'un élément maximal pour l'inclusion, i.e. un SOM. $\square$

Théorème 2.29 (Gram-Schmidt)**.** *Soit $\{x_1, x_2, \ldots\} \subseteq H$ une suite finie ou dénombrable de vecteurs linéairement indépendants. Alors il existe un système orthonormal $\{u_1, u_2, \ldots, \}$ fini et de même cardinalité que $\{x_1, \ldots\}$ si ce dernier est fini ou dénombrable si $\{x_1, x_2, \ldots\}$ est dénombrable tel que* $\operatorname{Span}\{u_1, \ldots, \} = \operatorname{Span}\{x_1, \ldots\}$.

Démonstration. Les x_j sont non-nuls car $\{x_1, x_2, \ldots\}$ est linéairement indépendant. Posons $y_1 \coloneqq x_1$ et $u_1 \coloneqq \frac{y_1}{\|y_1\|}$ et pour tout $n > 1$ posons $y_n \coloneqq x_n - \sum_{j=1}^{n} \langle x_n, u_j \rangle u_j$ et $u_n \coloneqq \frac{y_n}{\|y_n\|}$.

Il faut maintenant s'assurer que pour tout $n \geq 1$: $y_n \neq 0$ afin que les u_n soient bien définis. Par l'absurde, supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $y_n = 0$. Alors :

$$x_n \in \operatorname{Span}\{u_1, \ldots, u_{n-1}\} \subseteq \operatorname{Span}\{y_1, \ldots, y_{n-1}\} \subseteq \operatorname{Span}\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}.$$

Or les x_j sont linéairement indépendants.

Il est évident que $u_n \in \operatorname{Span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $x_n \in \operatorname{Span}\{u_1, \ldots, u_n\}$ pour tout $n \geq 1$. Il reste alors uniquement à montrer que $u_n \perp u_j$ $(j < n)$, ou de manière équivalente $y_n \perp u_j$, et cette dernière formulation est évidente par définition de y_n. $\square$

Définition 2.30. Un espace topologique E est dit *séparable* s'il admet une partie dense dénombrable.

Théorème 2.31. *Un espace de Hilbert est séparable ssi il possède un système orthonormal maximal fini ou dénombrable.*

Démonstration. $\underline{\Rightarrow :}$ Soit $\{a_1, a_2, \ldots\}$ une suite dense dans H. Soit $\{a'_1, a'_2, \ldots\}$ la suite partielle (possiblement finie) de $\{a_1, \ldots\}$ consitituée des $a_i \notin \operatorname{Span}\{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$. Par définition, on a que les a'_i sont indépendants et tous les a_j sont combinaisons linéaires des a'_i, i.e. $\{a_1, a_2, \ldots\} \subset \operatorname{Span}\{a'_1, a'_2, \ldots\}$.

On en déduit alors que $\operatorname{Span}\{a'_1, a'_2, \ldots\}$ est dense dans H Par Gram-Schmidt sur $\{a'_1, a'_2, \ldots\}$, on a un système orthonormal $\{u_1, \ldots\}$ tel que $\operatorname{Span}\{u_1, \ldots\}$ est dense dans H. Dès lors, par le Théorème 2.27, $\{u_1, \ldots\}$ est un SOM.

$\underline{\Leftarrow :}$ Soit $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un SOM. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$E_N \coloneqq \left\{ \sum_{j=1}^{N} q_j e_j \text{ t.q. } q_j \in \mathbb{Q}[i] \right\}.$$

E_N est dénombrable, et donc $E \coloneqq \bigcup_{N>0} E_N$ est également dénombrable. Par le théorème 2.27, on a $\forall \varepsilon > 0 : \exists A_0 \subset A$ fini tel que :

$$\forall A_1 \supset A_0 : \left\| x - \sum_{\alpha \in A_1} \hat{x}(\alpha) e_\alpha \right\| \leq \varepsilon.$$

Montrons que $\forall \varepsilon > 0 : \exists y \in E$ t.q. $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Soit $(q_\alpha)_{\alpha \in A_1} \subset \mathbb{Q}[i]$ t.q. $\sum_{\alpha \in A_1} \left\| q_\alpha - \hat{x}(\alpha) \right\|^2 \leq \varepsilon^2$. De tels q_α existent bien par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, et donc par densité de $\mathbb{Q}[i]$ dans $\mathbb{C}$.

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in A_1} q_\alpha e_\alpha \right\|^2 = \left\| x - \sum_{\alpha \in A_1} \hat{x}(\alpha) e_\alpha \right\|^2 + \sum_{\alpha \in A_1} \left\| q_\alpha - \hat{x}(\alpha) \right\| \leq 2\varepsilon^2.$$

Donc pour $y = \sum_{\alpha \in A_1} q_\alpha e_\alpha$, on a bien le résultat. $\square$

Exemple 2.4. $\mathbb{C}^N$ muni du produit scalaire usuel admet une base canonique. Cette dernière est orthonormale et maximale.

Exemple 2.5. Dans $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, posons le suites e_k ($k \in \mathbb{Z}$) telles que $e_{k,j} = 1$ si $k = j$ et 0 sinon. $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est un système orthonormal maximal car :

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{j \geq 1} x_j \overline{x_j} = \sum_{j \geq 1} \left| x_j \right|^2.$$

Par le point 3 du Théorème 2.27, on a que $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est un SOM.

Exemple 2.6. Dans $L^2[0, 2\pi)$, on définit (pour $k \in \mathbb{Z}$) :

$$e_k : [0, 2\pi) \to \mathbb{C} : t \mapsto \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Pour le produit scalaire usuel de L^2, on a :

$$\langle e_k, e_\ell \rangle_{L^2} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(k-\ell)t}}{2\pi} \, \mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{si } k - \ell = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour montrer que $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est maximal, prenons $f \in L^2[0, 2\pi)$. $S_k f \coloneqq \sum_{m=-k}^{k} \langle f, e_m \rangle e_m$. Montrons que $S_k f \xrightarrow[k \to +\infty]{L^2} f$. Pour $\varepsilon > 0, \exists \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty((0, 2\pi)) : \|f - \varphi\|_{L^2} \leq \varepsilon$ (par densité de $\mathcal{C}_0^\infty$ dans L^2).

On a $S_k \varphi \xrightarrow[k \to +\infty]{\text{CVU}} \varphi$ (théorème de Dirichlet global), ce qui implique $S_k \varphi \xrightarrow[k \to +\infty]{L^2} \varphi$. Finalement, remarquons :

$$\|f - S_k f\|_{L^2} \leq \|f - S_k \varphi\|_{L^2} \leq \|f - \varphi\|_{L^2} + \|\varphi - S_k \varphi\| \leq 2\varepsilon$$

si k est assez grand.

Attention, $\{e_k\}_k$ n'est **pas** une base au sens algébrique car $\forall k \in \mathbb{Z} : e_k \in \mathcal{C}^\infty$. Donc si $\{e_k\}_k$ est une base, toute fonction $f \in L^2$ est égale à $\sum_{j=1}^{N} c_j e_{k_j} \in \mathcal{C}^\infty$. Or $L^2 \not\subseteq \mathcal{C}^\infty$.

2.3 Applications linéaires entre espaces vectoriels normés

Soient E, F deux espaces de Banach. Pour $T : E \to F$ linéaire, on dit que T est *bornée* lorsque :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \lneqq +\infty.$$

Remarque. *borné* doit se comprendre *borné sur la boule unité* car T n'est pas borné puisque linéaire.

Proposition 2.32. *Soit $T : E \to F$ linéaire.*

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \lneqq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Tx\|.$$

Démonstration. On note $A \coloneqq \{\|Tx\| \text{ t.q. } \|x\| \leq 1\}$, $B \coloneqq \{\|Tx\| \text{ t.q. } \|x\| \lneqq 1\}$, et $C \coloneqq \{\|Tx\| \text{ t.q. } \|x\| = 1\}$. Notons également $a = \sup A$, $b = \sup B$ et $c = \sup C$.

Puisque $A \supset B \cup C$, on sait que $a \geq b$ et $a \geq c$. Maintenant, si $x \neq 0$ t.q. $\|x\| \leq 1$, alors :

$$C \ni \left\| T \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|Tx\| \geq \|Tx\| \in A.$$

En particulier, $c \geq a$, et donc $c = a$.

Si $a \lneqq +\infty$, alors $\forall \delta > 0 : \exists x$ t.q. $\|x\| = 1$ et $\|Tx\| \geq a - \delta$ (par définition du sup et puisque $a = c$). Pour $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$\left\| T((1-\varepsilon)x) \right\| = (1-\varepsilon)\|Tx\| \geq (1-\varepsilon)(a-\delta) \geq a - \eta,$$

pour $\eta = \varepsilon a - \varepsilon\delta + \delta$. Pour $\delta, \varepsilon \to 0$, on a $\eta \to 0$ et donc $b \geq a$.

Finalement, si $a = +\infty$, alors $\forall M > 0 : \exists x_M$ t.q. $\|x_M\| \leq 1$ et $\|Tx_M\| \geq M$. Or par linéarité de T, on a $\left\| x_{M/2} \right\| \lneqq 1$, et finalement :

$$\forall M > 0 : \exists \tilde{x}_M (= x_{M/2}) \text{ t.q. } \|\tilde{x}_M\| \leq 1 \text{ et } \|T\tilde{x}_M\| \geq M.$$

On en déduit également que $a = b$.

Dès lors, on a bien $a = b = c$. □

Définition 2.33. L'ensemble des applications linéaires bornées de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$. On munit cet ensemble de la norme :

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)} : \mathcal{L}(E, F) \to \mathbb{R}^+ : T \mapsto \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \coloneqq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

On note également $\mathcal{L}(E) \coloneqq \mathcal{L}(E, E)$.

Remarque. Il est à noter que cette norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ dépend des normes sur E et sur F !

Proposition 2.34. $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ *est une norme.*

Démonstration. TODO: Exercice □

Proposition 2.35. *Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $y \in E$, on a $\|Ty\| \leq \|T\| \|y\|$.*

Démonstration. Si $y = 0$, alors $Ty = 0$, et donc ok. Sinon, $Ty = \|y\| T \frac{y}{\|y\|}$. Par passage à la norme dans F :

$$\|Ty\| = \|y\| \underbrace{\left\| T \frac{y}{\|y\|} \right\|}_{\leq \|T\|} \leq \|y\| \|T\| .$$

□

On remarque également que $\left\|(T_2 \circ T_1)(x)\right\| \leq \|T_2\| \|T_1 x\| \leq \|T_2\| \|T_1\| \|x\|$, et donc $\|T_2 T_1\| \leq \|T_2\| \|T_1\|$. Dès lors si $T_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $T_2 T_1 \in \mathcal{L}(E, G)$.

Théorème 2.36. *Soit $T : E \to F$ linéaire. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est bornée ;*

(ii) *T est continue en tous points ;*

(iii) *$\exists x_0 \in E$ t.q. T est continue en x_0.*

Démonstration.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Soit $y \in E$. $\|Tx - Ty\| = \left\|T(x - y)\right\| \leq \|T\| \|x - y\|$. Dès lors, T est Lipschitzienne et donc continue.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Trivial (je cite : *Si vous avez un problème ici, je crois qu'il y a un sérieux problème dans l'enseignement*).

$(iii) \Rightarrow (i)$ Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x - x_0\| < \delta$, alors $\left\|T(x - x_0)\right\| < \varepsilon$. En posant $y \coloneqq x - x_0$, si $\|y\| < \delta$, alors $\|Ty\| < \varepsilon$. Autrement dit, $T(B(0, \delta)) \subset B(0, \varepsilon)$. Pour $z \in B(0, 1)$ (i.e. $\|z\| < 1$), on a :

$$\|Tz\| = \frac{1}{\delta} \left\|T(\delta z)\right\| < \frac{1}{\delta} \varepsilon.$$

Dès lors $\forall z : \|z\| < 1 \Rightarrow \|Tz\| < \varepsilon / \delta$, et donc $\|T\| \lneqq +\infty$, i.e. T est bornée.

□

Exemple 2.7. Un opérateur linéaire $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ est déterminé par une matrice $(T_{k\ell})_{k,\ell}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{C}^m$ et $\mathbb{C}^n$. T est continu[1] donc bornée.

Exemple 2.8. $T : L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{C} : f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\mu$ est borné car :

$$|Tf| = \left| \int f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_{L^1} .$$

Dès lors l'opérateur T d'intégration est continue.

Exemple 2.9. Si $1 \leq p, q \leq +\infty$ sont conjugués, pour $g \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ on définit :

$$T_g : L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{C} : f \mapsto \int f g \,\mathrm{d}\mu.$$

T_g est bien défini par l'inégalité de Hölder. De plus : $\left|T_g f\right| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$, et donc $\left\|T_g\right\| \leq \|g\|_{L^q}$.

[1] En dimension finie, toute application linéaire entre espaces vectoriels est continue.

Exemple 2.10. $\mathbb{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur linéaire. De plus, par Plancherel, on a $\|\mathbb{F}f\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2}\|f\|_{L^2}$, et donc $\|\mathbb{F}\| = (2\pi)^{n/2}$, i.e. la transformée de Fourier est un opérateur borné (donc continu).

Exemple 2.11. Pour H, un espace de Hilbert quelconque et M un sous-espace vectoriel fermé, $P : H \to M$, la projection orthogonale sur M est bornée car Lipschitzienne (et donc également continue).

Exemple 2.12. Dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, on fixe $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu)$, et on pose :

$$T : L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) : f \mapsto \int_\Omega K(\cdot, y) f(y) \,\mathrm{d}\mu(y).$$

Par Fubini, $\forall x \in \Omega : \int_\Omega \left|K(x,y)\right|^2 \mathrm{d}\mu(y)$ est bien défini, et pour presque tout $x \in \Omega : \left|K(x,\cdot)\right|^2 \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. En particulier, $\left|K(x,\cdot)\right| \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Dès lors, à $x \in \Omega$ fixé, $y \mapsto K(x,y)f(y)$ est L^1 par Hölder. Donc il existe $N \in \mathcal{A}$ t.q. $\mu(N) = 0$ et $\forall x \in \Omega \setminus N : K(x,\cdot)f(\cdot) \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. On pose alors :

$$g : x \mapsto \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega K(x,y) f(y) \,\mathrm{d}\mu(y) & \text{si } x \notin N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons que $g = Tf \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Si $x \in \Omega \setminus N$, alors par Cauchy-Schwarz :

$$\left|g(x)\right|^2 \leq \left(\int \left|K(x,y)\right|\left|f(y)\right| \mathrm{d}\mu(y)\right)^2 \leq \int_\Omega \left|K(x,y)\right|^2 \mathrm{d}\mu(y) \int_\Omega \left|f(y)\right|^2 \mathrm{d}\mu(y).$$

Or le second facteur ($= \|f\|_{L^2}^2$) ne dépend pas de x et est fini puisque $f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Dès lors :

$$\|Tf\|_{L^2}^2 = \int \left|g(x)\right|^2 \mathrm{d}\mu(x) \leq \|f\|_{L^2}^2 \int_\Omega \left(\int_\Omega \left|K(x,y)\right|^2 \mathrm{d}\mu(y)\right) \mathrm{d}\mu(y).$$

Par Fubini (puisque $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu)$), on a finalement :

$$\int_\Omega \left|g(x)\right|^2 \mathrm{d}\mu(x) \leq \|f\|_{L^2}^2 \int_{\Omega \times \Omega} \left|K(x,y)\right|^2 \mathrm{d}(\mu \otimes \mu)(x,y) \lneqq +\infty.$$

On en déduit également $\|g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|K\|_{L^2}$, et donc $\|T\| \leq \|K\|_{L^2}$.

Définition 2.37. Un opérateur de la forme suivante :

$$T : L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) : f \mapsto \int_\Omega K(\cdot, y) f(y) \,\mathrm{d}\mu(y),$$

pour $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu)$ est appelé *opérateur intégral de Hilbert-Schmidt.*

Définition 2.38. Soient H un espace de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$, $x \in H$ et $\Phi : H \to \mathbb{C} : y \mapsto \langle Ty, x\rangle$, une forme linéaire bornée. Par Cauchy-Schwarz : $|\Phi y| \leq \|Ty\|\|x\| \leq \|T\|\|y\|\|x\|$. Par le lemme de Riesz (Lemme 2.20), on sait qu'il existe un unique $z_x \in H$ tel que $\forall y \in H : \Phi y = \langle y, z_x\rangle$. On a alors une application $x \mapsto z_x$. Notons-la T^*. Cet opérateur T^* est appelé *l'opérateur adjoint de* T.

Proposition 2.39. *T^* est une application linéaire.*

Démonstration. Soient $x_1, x_2 \in H, \lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\left\langle y, T^*(\lambda x_1 + x_2)\right\rangle = \langle Ty, \lambda x_1 + x_2\rangle = \overline{\lambda}\langle Ty, x_1\rangle + \langle Ty, x_2\rangle = \overline{\lambda}\langle y, T^* x_1\rangle + \langle y, T^* x_2\rangle = \langle y, \lambda T^* x_1 + x_2\rangle.$$

Or cette égalité vaut pour pour tous $x_1, x_2 \in H$, donc $T^*(\lambda x_1 + x_2) = \lambda T^* x_1 + T^* x_2$. □

Lemme 2.40. $\sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1,\|y\|\leq 1}\left|\langle Tx, y\rangle\right|$.

Démonstration. Par Cauchy-Schwarz, si $\|y\| \leq 1$: $\left|\langle Tx, y\rangle\right| \leq \|Tx\|\|y\| \leq \|Tx\|$. En particulier, par passage au sup, on a l'inégalité $\geq$.

Pour l'autre inégalité, Si $T \equiv 0$, le résultat est trivial. Donc supposons $T \not\equiv 0$. On sait alors que $\operatorname{Ker} T \neq H$, et donc $\exists x \in H \setminus \operatorname{Ker} T$. En posant $z \coloneqq \frac{Tx}{\|Tx\|}$, on observe :

$$\sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} \left|\langle Tx, y\rangle\right| \geq \sup_{\|x\|\leq 1} \left|\langle Tx, z\rangle\right| = \sup_{\|x\|\leq 1} \frac{\|Tx\|^2}{\|Tx\|}.$$

□

Théorème 2.41. *Pour $T \in \mathcal{L}(H)$, on a $\|T\| = \|T^*\|$.*

Démonstration. Par le lemme précédent :

$$\|T^*\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T^*x\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} \left|\langle T^*x, y\rangle\right| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} \left|\langle y, T^*x\rangle\right| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} \left|\langle Ty, x\rangle\right| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \|T\|$$

□

Proposition 2.42. *Soient $S, T \in \mathcal{L}(H)$. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a :*

1. $(\alpha S + \beta T)^* = \overline{\alpha} S^* + \overline{\beta} T^*$;
2. $(ST)^* = T^* S^*$.

Démonstration.

1. Fixons $x, y \in H$.

$$\left\langle x, (\alpha S + \beta T)^* y\right\rangle = \left\langle (\alpha S + \beta T)x, y\right\rangle = \alpha \langle Sx, y\rangle + \beta \langle Tx, y\rangle = \alpha \langle x, S^*y\rangle + \beta \langle x, T^*y\rangle = \left\langle x, \overline{\alpha} S^* y + \overline{\beta} T^* y\right\rangle.$$

2. Montrons que $\forall x \in H : (ST)^*x = T^*S^*x$. Soient $x, y \in H$.

$$\left\langle y, (ST)^*x\right\rangle = \langle STy, x\rangle = \langle Ty, S^*x\rangle = \langle y, T^*S^*x\rangle.$$

□

Définition 2.43. Si $T = T^*$, on dit que T est auto-adjoint.

Exemple 2.13.

(1) Soit un opérateur linéaire $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. T est défini par une matrice $(T_{k\ell})_{k,\ell} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. L'adjoint T^* de T est également un opérateur linéaire de $\mathbb{C}^n$ et est donc également définit par une matrice $({T^*}_{k\ell})_{k,\ell}$. Fixons $z, w \in \mathbb{C}^n$ et calculons :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} {T^*}_{jk} z_k \overline{w_j} = \langle T^*z, w\rangle = \langle z, Tw\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} z_k \overline{T_{kj}}\,\overline{w_j}.$$

Cette égalité étant vraie $\forall z, w \in \mathbb{C}^n$, on en déduit ${T^*}_{jk} = \overline{T_{kj}}$, i.e. la matrice adjointe est la conjuguée de la transposée.

D'ailleurs, si $T = T^*$, alors $(T_{jk})_{jk}$ est une matrice hermitienne.

(2) Pour un opérateur intégral de Hilbert-Schmidt, fixons $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu)$ et considérons :

$$T_K : L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) : f \mapsto \int K(\cdot, y) f(y) \, \mathrm{d}\mu(y).$$

Soient $f, g \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Partons de $\langle T_K f, g \rangle = \left\langle f, T_K^* f \right\rangle$ et calculons :

$$\langle Tf, g \rangle = \int_\Omega \overline{g}(x) \int_\Omega K(x,y) f(y) \, \mathrm{d}\mu(y) \, \mathrm{d}\mu(x) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_\Omega f(y) \int_\Omega K(x,y) \overline{g}(x) \, \mathrm{d}\mu(x) \, \mathrm{d}\mu(y) = \langle f, T_K^* g \rangle .$$

Donc :

$$T_K^* g(y) = \overline{\int_\Omega K(x,y) \overline{g}(x) \, \mathrm{d}\mu(x)},$$

ou en changeant simplement les variables x et y :

$$T_K^* g(x) = \int_\Omega \overline{K}(y,x) g(y) \, \mathrm{d}\mu(y).$$

T_K^* est donc également un opérateur intégral de Hilbert-Schmidt et on a bien *transposé/conjugué* le noyau K de T_K pour trouver celui de T_K^*.

(2) Reconsidérons M un sous-espace fermé de H et la projection orthogonale $P : H \to M$. Montrons que $P = P^*$.

Soient $x_1, x_2 \in H$ et soit Q la projection orthogonale sur $M^\perp$. Calculons :

$$\langle Px_1, x_2 \rangle = \langle Px_1, Px_2 + Qx_2 \rangle = \langle Px_1, Px_2 \rangle + \underbrace{\langle Px_1, Qx_2 \rangle}_{=0} = \langle Px_1, Px_2 \rangle .$$

Et :

$$\langle x_1, Px_2 \rangle = \langle Px_1 + Qx_1, Px_2 \rangle = \langle Px_1, Px_2 \rangle + \underbrace{\langle Qx_1, Px_2 \rangle}_{=0} = \langle Px_1, Px_2 \rangle .$$

On a donc $\forall x_1, x_2 \in H : \langle x_1, P^* x_2 \rangle = \langle Px_1, x_2 \rangle = \langle x_1, Px_2 \rangle$. Dès lors $P = P^*$. La projection orthogonale est donc auto-adjointe.

Pour E, F espaces vectoriels normés, plusieurs normes semblent canoniques. À $p \geq 1$ fixé, on peut définir :

$$\left\| (e,f) \right\|_{E \times F; p} \coloneqq \left(\|e\|_E^p + \|f\|_F^p \right)^{1/p} .$$

De même, si E et F sont munis d'un produit scalaire, on a un produit scalaires canonique sur $E \times F$:

$$\left\langle (e_1, f_1), (e_2, f_2) \right\rangle_{E \times F} \coloneqq \langle e_1, e_2 \rangle_E + \langle f_1, f_2 \rangle_F ,$$

et donc la norme $\|\cdot\|_{E \times F; 2}$ semble particulièrement intuitive.

Il est cependant à noter que les normes $\|\cdot\|_{E \times F; p}$ sont équivalentes pour toutes les valeurs de $p \geq 1$, et donc que les topologies induites par ces normes sont homéomorphes (elles sont même strictement identiques, et cette topologie est la topologie produit). Dès lors, la norme $\|\cdot\|_{E \times F; 1}$ va être posée canoniquement sur $E \times F$, mais les résultats qui suivront seront également valables pour toute valeur de $p > 1$.

Définition 2.44. Pour un opérateur linéaire $T : E \to F$, on note $\Gamma_T = \{(x, Tx)\}_{x \in E} \subset E \times F$ le graphe de T.

Théorème 2.45. *Si T est bornée, alors Γ_T est fermé dans $E \times F$.*

Démonstration. Soit $(x, y) \in \overline{\Gamma_T}$. Prenons une suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Gamma_T$ telle que $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x, y)$. De plus T est continue car bornée. Dès lors :

$$\begin{cases} Tx_n = y_n \\ Tx_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Tx \\ y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y. \end{cases}$$

Or $x \in E$ et par unicité de la limite, $Tx = y$. Dès lors, $(x, y) \in \Gamma_T$. □

Définition 2.46. Une application $f : E \to F$ est *ouverte* si l'image de tout ouvert de E par f est un ouvert de F.

Théorème 2.47 (de Baire)**.** *Soit X un espace métrique complet. Si $(V_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'ouverts denses dans X, alors $\bigcap_{n\geq 0} V_n$ est également dense dans X.*

Démonstration. Soient $(V_n)_n$ ouverts denses dans X. Si pour tout $W \subset X$ ouvert non vide, $W \cap \bigcap_{n\geq 0} V_n \neq \emptyset$, alors $\bigcap_{n\geq 0} V_n$ est dense dans X. Fixons donc $W \subset X$ ouvert de X non vide et trouvons $x \in W \cap \bigcap_{n\geq 0} V_n$.

V_1 est dense. Donc $\exists x_1 \in W \cap V_1$ et $r_1 \in (0, 1)$ tel que $\overline{B(x_1, r_1)} \subset W \cap V_1$. $B(x_1, r_1)$ est un ouvert de X, donc $\exists x_2 \in B(x_1, r_1) \cap V_2$ et $r_2 \in (0, 1/2)$ tel que $\overline{B(x_2, r_2)} \subset B(x_1, r_1) \cap V_2$, etc. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(r_n)_{n\geq 1}$ tels que :

$$\forall n \geq 2 : x_n \in B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap V_n \text{ et } r_n \in (0, 1/n) \text{ t.q. } \overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap V_n.$$

À n fixé, pour $k \geq n$, $x_k \in B(x_n, r_n)$ et donc pour $k, \ell \geq n$: $d(x_k, x_\ell) \leq d(x_k, x_n) + d(x_\ell, x_n) \leq 2r_n = \frac{2}{n}$. Donc la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans X. Dès lors $\exists x \in X$ t.q. $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. De plus, pour $k \geq n$:

$$x_k \in \overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap V_n \subset V_n.$$

Dès lors $\forall n \geq 1 : \forall k \geq n : x_k \in V_n$, et donc $\forall k \geq 1 : x_k \in \bigcap_{n=1}^{k} V_n$. En particulier : $x \in \bigcap_{n\geq 1} V_n$.

Finalement, puisque $x \in \overline{B(x_1, r_1)} \subset W$, on a bien $x \in W \cap \bigcap_{n\geq 1} V_n$. □

Remarque. Le théorème de Baire peut se formuler de la manière équivalente suivante: si dans X, $(F_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fermés d'intérieur vide, alors $\bigcup_{n\geq 0} F_n$ est également d'intérieur vide.

Théorème 2.48 (de l'application ouverte, Banach)**.** *Soient E, F espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si T est surjective, alors T est ouverte.*

Démonstration. Notons B_E (resp. B_F) la boule unité dans E (resp. dans F). Il suffit de montrer que $\exists \delta > 0$ t.q. $T(B_E) \supset \delta B_F$. En effet, en supposant que cette inclusion est vérifiée, on a $T(x_0 + \lambda B_E) = Tx_0 + \lambda T(B_E)$. Dès lors, si U est un voisinage de x_0 dans E, alors $T(U)$ est un voisinage de Tx_0 dans F. Si de plus U est ouvert, U est un voisinage de tout $y \in U$, et donc $T(U)$ est un voisinage de tout $Ty \in T(U)$, et donc $T(U)$ est ouvert dans F.

Montrons donc qu'il existe un tel $\delta > 0$. On sait que $E = \bigcup_{n\geq 0} nB_E$, et donc :

$$F = T(E) = T\left(\bigcup_{n\geq 0} nB_E\right) = \bigcup_{n\geq 0} T(nB_E).$$

Supposons alors par l'absure que $\forall n \geq 0 : \overset{\circ}{\overline{T(nB_E)}} = \emptyset$. Par Baire, on a $F = \overset{\circ}{F} = \emptyset$, ce qui est une contradiction.

Dès lors, il existe $n > 0$ tel que $T(nB_E) \supseteq \overset{\circ}{\overline{T(nB_E)}} \neq \emptyset$, et donc il existe un ouvert $W \subset \overline{T(nB_E)}$. Soient $y_0 \in W$ et $r > 0$ t.q. $y_0 + rB_F \subset W$. Fixons également $y \in F$ t.q. $\|y\| < r$. Soit également $(x'_k)_{k\geq 0} \subset nB_E$ t.q. $Tx'_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} y_0$.

Puisque $y_0 + y \in W \subset \overline{T(nB_E)}$, prenons une autre suite $(x''_k)_{k\geq 0} \subset nB_E$ t.q. $Tx''_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} y_0 + y$.

On note $x_k \coloneqq x''_k - x'_k$. $\|x_k\| \leq \left\|x'_k\right\| + \left\|x''_k\right\| \leq 2n$ et $Tx_k = Tx''_k - Tx'_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} y_0 + y - y_0 = y$. Dès lors $\forall \varepsilon > 0 : \forall y \in rB_F : \exists x \in E$ t.q. $\|x\| \leq 2n$ et $\|Tx - y\| \leq \varepsilon$. Ce qui est équivalent à :

$$\forall y \in F : \forall \varepsilon > 0 : \exists x \in E \text{ t.q. } \|x\| \leq \frac{4n}{r}\|y\| \text{ et } \|Tx - y\| \leq \varepsilon. \tag{Δ}$$

En effet, si $y = 0$, on prend $x = 0$, et si $y \neq 0$, on pose $\widetilde{y} \coloneqq \frac{r}{2\|y\|}y$ et on sait qu'il existe $\widetilde{x} \in E$ t.q. $\|x\| \leq 2n$ et $\|T\tilde{x} - \widetilde{y}\| \leq \frac{\varepsilon r}{2\|y\|}$. On peut dès lors poser $x \coloneqq \frac{2\|y\|}{r}\widetilde{x}$. Dans ce cas, on a $\|x\| = \frac{2\|y\|}{r}\|\tilde{x}\| \leq \frac{4n}{r}\|y\|$ et :

$$\|Tx - y\| = \left\|T\left(\frac{2\|y\|}{y}\widetilde{x}\right) - \frac{2\|y\|}{r}\widetilde{y}\right\| = \frac{2\|y\|}{r}\|T\widetilde{x} - \widetilde{y}\| \leq \frac{2\|y\|}{r}\frac{\varepsilon r}{2\|y\|} = \varepsilon.$$

Posons $\delta \coloneqq \frac{r}{4n}$, et prenons $\omega > 0$. Montrons alors que :

$$\forall y \in F : \|y\| \leq \delta \Rightarrow \exists x \in E \text{ t.q. } \|x\| \leq 1 + \omega \text{ et } Tx = y. \tag{$\sharp$}$$

Fixons $y \in \delta B_F$. Par (Δ) :

$$\exists x_1 \in E \text{ t.q. } \|x_1\| \leq \frac{1}{\delta}\|y\| \leq 1 \text{ et } \|Tx_1 - y\| \leq \frac{\delta\omega}{2}.$$

De même :

$$\exists x_2 \in E \text{ t.q. } \|x_2\| \leq \frac{4n}{r}\|Tx_1 - y\| \leq \frac{\omega}{2} \text{ et } \left\|(y - Tx_1) - Tx_2\right\| \leq \frac{\delta\omega}{2^2}.$$

On construit ainsi $x_1, \ldots, x_n$ tels que $\|x_n\| \leq 2^{-(n-1)}\omega$. Pour $\varepsilon = 2^{-n}\delta\omega$, on a l'existence de x_n t.q. $\|x_n\| \leq 2^{-(n-1)}\omega$ et $\|y - Tx_1 - \ldots - Tx_n\| \leq \varepsilon$.

De plus, puisque $(x_n)_n$ est de Cauchy, la suite $(\sum_{j=1}^n x_j)_n$ est également de Cauchy. Donc par complétude de E :

$$\exists x \in E \text{ t.q. } \sum_{j=1}^n x_j \xrightarrow[n\to+\infty]{} x.$$

Par continuité de la norme $\|\cdot\|$, on a également $\left\|\sum_{j=1}^n x_j\right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|x\|$. Or :

$$\left\|\sum_{j=1}^n x_j\right\| \leq \sum_{j=1}^n \left\|x_j\right\| \leq 1 + \sum_{j=2}^n \left\|x_j\right\| \leq 1 + \sum_{j=1}^n \omega 2^{-(j-1)} = 1 + \omega(1 - 2^{-(n+1)}) \leq 1 + \omega,$$

donc $\|x\| \leq 1+\omega$. Finalement, par continuité de T, on a $T(\sum_{j=1}^{n} x_j) \xrightarrow[n\to+\infty]{} Tx$. Or puisque $T(\sum_{j=1}^{n} x_j) = \sum_{j=1}^{n} Tx_j \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$, par unicité de la limite (dans les espaces métriques complets), on a $Tx = y$, ce qui montre bien ($\sharp$).

Finalement, par ($\sharp$), on a bien $\delta B_F \subset T(B_E)$ puisque pour tout $y \in \delta B_F$ (i.e. $\|y\| \leq \delta$), on a $x \in E$ t.q. $\|x\| \leq 1$ et $Tx = y$. $\square$

Théorème 2.49 (du graphe fermé, Banach)**.** *Soient E, F espaces de Banach, $T : E \to F$ linéaire. Si Γ_T est fermé dans $E \times F$, alors T est bornée.*

Démonstration. Γ_T est un sous-espace vectoriel fermé de $E \times F$. Or $E \times F$ est un espace de Banach puisque le produit d'espaces de Banach en est un. Dès lors Γ_T est un espace de Banach également. On décompose T en $T_1 : E \to \Gamma_T : x \mapsto (x, Tx)$ et $T_2 : E \times F \to F : (x, y) \mapsto y$ ($T = T_2T_1$). T_1 est bijective par définition du graphe d'une application et ${T_1}^{-1} : (x, Tx) \mapsto x$ est bornée (donc continue). Par le théorème de l'application ouverte de Banach, on déduit que ${T_1}^{-1}$ est ouverte, i.e. T_1 est continue.

De plus, T_2 est continue car les projections sont toujours continues pour la topologie produit. Donc $T = T_2T_1$ est composition d'applications continues, et est donc continue. $\square$

Chapitre 3

Équations aux dérivées partielles

3.1 Rappels

Dans le cadre des EDOs, on cherche une fonction $u : [-T, T] \to \mathbb{C}$ telle que :

$$F(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t)) = 0.$$

On généralise à $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, et une EDP est donc sous la forme :

$$F\left(x, \left(\partial^\alpha u(x)\right)_{|\alpha| \leq m}\right) = 0.$$

Dans le cadre des EDOs, la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + Au(t) = f(t) \\ u(0) = u^0, \end{cases}$$

pour $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ continue, et $u^0 \in \mathbb{C}^n$ est donnée par :

$$u(t) = u^0 e^{-tA} + \int_0^t e^{(s-t)A} f(s) \,\mathrm{d}s,$$

où l'exponentielle d'une matrice est définie par la série :

$$e^A \coloneqq \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}.$$

3.1.1 Normes et matrices

Remarquons que les matrices définissent des opérateurs linéaires. Elles sont donc canoniquement munies de la norme associée :

$$\|A\| \coloneqq \sup_{|x|=1} |Ax|.$$

Proposition 3.1. *Les normes* $\|\cdot\|$ *et* $\|\cdot\|_\infty : A \mapsto \|A\|_\infty \coloneqq \sup_{1 \leq i,j \leq m} |A_{ij}|$ *sont équivalentes.*

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Pour tous $1 \le i, j \le m$, on a :

$$\left|A_{ij}\right| \le \left|Ae_j\right| \le \|A\|$$

car $\left|e_j\right| = 1$. De plus :

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax| = \sup_{|x|=1} \left(\sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{m} A_{ij} x_j \right|^2 \right)^{1/2} \le \sup_{|x|=1} \|A\|_\infty \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left|x_j\right|^2 \right)^{1/2}.$$

Or $x \mapsto \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left|x_j\right|^2$ est continue sur $\{x \in \mathbb{C}^m \text{ t.q. } |x| = 1\}$ (qui est fermé), et donc $\exists M > 0$ tel que :

$$\|A\| \le M \|A\|_\infty .$$

□

Proposition 3.2. *Pour* $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *:* $\left\|\exp(A)\right\| \le \exp(\|A\|)$.

Démonstration. Par propriété de la norme opérateur :

$$\left\|e^A\right\| = \left\| \sum_{k\ge0} \frac{A^k}{k!} \right\| \le \sum_{k\ge0} \frac{\left\|A^k\right\|}{k!} \le \sum_{k\ge0} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}.$$

Plus précisément, puisque pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, on a $\left\|A^k\right\| \le \|A\|^k$ et par continuité de la norme opérateur :

$$\left\|e^A\right\| = \lim_{K\to+\infty} \left\| \sum_{k=0}^{K} \frac{A^k}{k!} \right\| \le \lim_{K\to+\infty} \sum_{k=0}^{K} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}.$$

□

3.2 Fonctions holomorphes

Définition 3.3. Pour $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, $A : \Omega \to \mathbb{C}^{m\times m} : z \mapsto A(z)$ est holomorphe dans Ω si A_{ij} est holomorphe dans Ω pour tous $1 \le i, j \le m$. On note cela $A \in \mathscr{H}(\Omega)$.

Définition 3.4. Pour $A \in \mathscr{H}(\Omega)$ et γ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux dont l'image est dans Ω, on définit $\int_\gamma A(z)\,\mathrm{d}z$ comme étant la matrice telle que :

$$\forall\, 1 \le i, j \le m : \left(\int_\gamma A(z)\,\mathrm{d}z \right)_{ij} = \int_\gamma A_{ij}(z)\,\mathrm{d}z.$$

Proposition 3.5. *Pour* $S \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *:*

1. $\operatorname{spectre}(S) \subset \{z \in \mathbb{C} \textit{ t.q. } |z| \le \|S\|\}$ *;*
2. $\mathbb{C} \setminus \operatorname{spectre}(S) \to \mathbb{C}^{m\times m} : z \mapsto (z - S)^{-1} := (zI - S)^{-1}$ *est holomorphe dans* $\mathbb{C} \setminus \operatorname{spectre}(S)$.

Démonstration.

1. Soit $\lambda \in \operatorname{spectre}(S)$. Il existe $v \neq 0$ t.q. $Sv = \lambda v$. Dès lors $\langle Sv, v\rangle = \lambda |v|^2$. De plus, par Cauchy-Schwarz : $\left|\langle Sv, v\rangle\right| \leq |Sv||v| \leq \|S\||v||v| = \|S\||v|^2$. On en déduit $|\lambda| \leq \|S\|$.
2. ${(z-S)^{-1}}_{ij}$ est une fonction rationnelle complexe dont le dénominateur $z \mapsto \det(z-S)$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{C} \setminus \operatorname{spectre}(S)$. ${(z-S)^{-1}}_{ij}$ est donc holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \operatorname{spectre}(S)$, et donc $(z-S)^{-1}$ également.

$\square$

Démonstration alternative du point 1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geq \|S\|$. On pose $T \coloneqq \sum_{k\geq 0} z^{-k-1} S^k$. Cette série converge (en norme opérateur) car les sommes partielles forment une suite de Cauchy :

$$\left\|\sum_{k=K_1}^{K_2} z^{-k-1} S^k\right\| \leq \sum_{k=K_1}^{K_2} |z|^{-k-1}\left\|S^k\right\| \leq \sum_{k=K_1}^{K_2} |z|^{-k-1}\|S\|^k = |z|^{-1} \sum_{k=K_1}^{K_2} \underbrace{\left(\frac{\|S\|}{|z|}\right)}_{\in[0,1)}^k \xrightarrow[K_1,K_2\to+\infty]{} 0.$$

De plus :

$$(z-S)\sum_{k=0}^{K} s^{-k-1} S^k = \sum_{k=0}^{K} z^{-k} S^k - \sum_{k=1}^{K+1} z^{-k-1} S^{k+1} = I - z^{-K-1} S^{K+1}.$$

Or puisque :

$$\left\|z^{-(K+1)} S^{K+1}\right\| = \left(\frac{\|S\|}{|z|}\right)^{K+1} \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0,$$

on trouve $(z-S)\sum_{k=0}^{K} z^{-k-1} S^k \xrightarrow[K\to+\infty]{} (z-S)T$ et $I - z^{-K-1} S^{K+1} \xrightarrow[K\to+\infty]{} I$. Par unicité de la limite dans les espaces métriques, on a $T = (z-S)^{-1}$, i.e. $(z-S)$ est inversible. Donc z ne peut être une valeur propre de S. $\square$

Corollaire 3.6. *Soient Ω un disque ouvert, $S \in \mathbb{C}^{m\times m}$ t.q.* $\operatorname{spectre}(S) \subset \Omega$ *et $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Alors $z \mapsto f(z)(z-S)^{-1} \in \mathscr{H}(\Omega \setminus \operatorname{spectre}(S))$ et pour γ_1, γ_2 chemins $\mathcal{C}^1$ par morceaux à valeurs dans $\Omega \setminus \operatorname{spectre}(S)$ homotopes dans $\Omega \setminus \operatorname{spectre}(S)$:*

$$\int_{\gamma_1} f(z)(z-S)^{-1}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)(z-S)^{-1}\,\mathrm{d}z.$$

Proposition 3.7 (Forme matricielle de la forme intégrale de Cauchy)**.** *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un disque ouvert, $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $f(z) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$, une série de puissance qui converge dans $\Omega \supset \overline{B(0, \|S\|)}$. Considérons le chemin $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \Omega : t \mapsto (\|S\| + \varepsilon)e^{it}$. Soit γ, chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux, homotope à γ_1 dans $\Omega \setminus \operatorname{spectre}(S)$. Alors :*

$$\sum_{k=0}^{K} \alpha_k S^k \xrightarrow[K\to+\infty]{} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)(z-S)^{-1}\,\mathrm{d}z.$$

Démonstration. $f(z) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k z^k$ converge uniformément sur $\operatorname{Im}\gamma$, et donc :

$$\sum_{k=0}^{K} \alpha_k z^k (z-S)^{-1} \xrightarrow[K\to+\infty]{\text{CVU sur } \operatorname{Im}\gamma} f(z)(z-S)^{-1}.$$

En effet :
$$\left\| f(z)(z-S)^{-1} - \sum_{k=0}^{K} \alpha_k z^k (z-S)^{-1} \right\| \leq \left| \sum_{k\geq K+1} \alpha_k z^k \right| \left\| (z-S)^{-1} \right\|.$$

Dès lors :
$$\sum_{k=0}^{K} \alpha_k \int_\gamma z^k (z-S)^{-1}\,\mathrm{d}z \xrightarrow[K\to+\infty]{} \int_\gamma f(z)(z-S)^{-1}\,\mathrm{d}z.$$

Par le Corollaire 3.6 :
$$\int_\gamma z^k (z-S)^{-1}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} z^k (z-S)^{-1}\,\mathrm{d}z.$$

Puisque $(z-S)^{-1} = \sum_{\ell\geq 0} z^{-\ell-1} S^\ell$ converge uniformément sur $\{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| > \|S\| + \varepsilon/2\}$, on a :
$$\int_{\gamma_1} z^k (z-S)^{-1}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} z^k \sum_{\ell\geq 0} z^{-\ell-1} S^\ell\,\mathrm{d}z = \lim_{L\to+\infty} \sum_{\ell=0}^{L} \int_{\gamma_1} z^{k-\ell-1}\,\mathrm{d}z S^\ell.$$

Or $\int_{\gamma_1} z^{k-\ell-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \delta_\ell^k$. Donc :
$$\int_{\gamma_1} z^k (z-S)^{-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i S^k.$$

On conclut alors par :
$$\sum_{k=0}^{K} \alpha_k S^k = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{K} \alpha_k \int_\gamma z^k (z-S)^{-1}\,\mathrm{d}z \xrightarrow[K\to+\infty]{} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)(z-S)^{-1}\,\mathrm{d}z.$$

□

Corollaire 3.8. *Pour $\mu \in \mathbb{C}$, $f(z) = e^{\mu z}$, $S \in \mathbb{C}^{m\times m}$, γ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux, homotope au cercle γ_1 dans $\mathbb{C} \setminus \mathrm{spectre}(S)$:*
$$e^{\mu S} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\mu z} (z-S)^{-1}\,\mathrm{d}z.$$

Lemme 3.9. *Soient $A(z)$ holomorphe et γ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors :*
$$\left\| \int_\gamma A(z)\,\mathrm{d}z \right\| \leq \int_\gamma \|A(z)\| |\mathrm{d}z| := \int_\gamma \|A(\gamma(t))\| |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Par intégration de Riemann :
$$\int_\gamma A(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 A(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{k\to+\infty} \underbrace{\sum_{j=0}^{n_k} A(\gamma(\tau_j^k))\gamma'(\tau_j^k)(t_j^k - t_{j-1}^k)}_{=:a_k}$$
$$\int_\gamma \|A(z)\| |\mathrm{d}z| = \lim_{k\to+\infty} \underbrace{\sum_{j=0}^{n_k} \left\|A(\gamma(\tau_j^k))\right\| \left|\gamma'(\tau_j^k)\right| (t_j^k - t_{j-1}^k)}_{=:b_k}.$$

$a_k \in \mathbb{C}^{m\times m}$ et $\forall k \geq 0 : \|a_k\| \leq b_k$. Or $\|a_k\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} \left\|\int_\gamma A(z)\,\mathrm{d}z\right\|$ et $b_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int_\gamma \|A(z)\| |\mathrm{d}z|$. Donc par passage à la limite :

$$\left\|\int_\gamma A(z)\,\mathrm{d}z\right\| \leq \int_\gamma \|A(z)\| |\mathrm{d}z| .$$

$\square$

Lemme 3.10. *Soit $S \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Alors $\forall \delta > 0 : \exists C_m > 0$ t.q. $\forall z \in \mathbb{C}$, si $\operatorname{dist}(z, \operatorname{spectre}(S)) \geq \delta$, alors :*

$$\left\|(z-S)^{-1}\right\| \leq C_m(1 + |z| + \|S\|)^{m-1}.$$

Démonstration. Fixsons $\delta > 0$ et soit $z \in \mathbb{C}$ t.q. $\operatorname{dist}(z, \operatorname{spectre}(S))$. Posons $T = z - S$ et $P(\lambda) = \det(\lambda - T) = \lambda^m + \sum_{j=1}^m a_j \lambda^{m-j}$. Par Hamilton-Cayley :

$$T^m + \sum_{j=1}^m a_j T^{m-j} = 0,$$

ou encore :

$$T\left(T^{m-1} + a_1 T^{m-2} + \ldots + a_{m-1}\right) + a_m = 0.$$

Or T est inversible par hypothèse, donc :

$$T^{-1} = \frac{-1}{a_m}\left(T^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\right)$$
$$\left\|T^{-1}\right\| \leq |a_m|^{-1}\|T\|^{m-1} + \left|\frac{a_1}{a_m}\right|\|T\|^{m-2} + \ldots + \left|\frac{a_{m-1}}{a_m}\right|.$$

De plus $\|T\| = \|z - S\| \leq |z| + \|S\|$.

Montrons alors qu'il existe $\rho > 0$ indépendant de z et S qui borne uniformément les coefficicents $\frac{1}{|a_m|}, \left|\frac{a_1}{a_m}\right|, \ldots, \left|\frac{a_{m-1}}{a_m}\right|$.

En effet, par hypothèse, toutes les racines de P satisfont $|\lambda| \geq \delta$ puisque $\det(\lambda - T) = \det((\lambda - z) + S) = 0$, i.e. $\lambda - z \in \operatorname{spectre}(S)$, et donc :

$$|\lambda| = \left|z - (\lambda - z)\right| \geq \min_{s\in\operatorname{spectre}(S)} |z - s| \geq \delta$$

par hypothèse.

Posons alors $Q(\tau) \coloneqq \tau^m + \frac{a_{m-1}}{a_m}\tau^{m-1} + \ldots + \frac{1}{a_m}$, et observons que pour $\tau \neq 0$:

$$P(\tau^{-1}) = \tau^{-m} + \sum_{j=1}^{m-1} a_j \tau^{j-m} + a_m \tau^{-m} = a_m \tau^{-m}\left(\frac{1}{a_m} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{a_j}{a_m}\tau^j + 1\right) = a_m \tau^{-m} Q(\tau).$$

Donc $P(\tau^{-1}) = 0 \iff Q(\tau)$, et donc les racines de Q satisfont $|\tau| \leq \delta^{-1}$. On en déduit :

$$Q(\tau) = C\prod_{j=1}^m (\tau - \tau_j),$$

où les $\tau_j \in \overline{B(0,1/\delta)}$ sont les racines de Q et sont des paramètres du polynôme. Par continuité sur le compact $\overline{B(0,1/\delta)}$, les coefficients de Q sont uniformément bornés. Finalement, on conclut par :

$$\left\|(z-S)^{-1}\right\| = \left\|T^{-1}\right\| \leq \sum_{j=0}^{m-1} \rho\|T\|^j \leq \rho \sum_{j=0}^{m-1} (|z| + \|S\|)^j \leq C_m(1 + |z| + \|S\|)^{m-1}.$$

□

3.3 Problème de Cauchy pour les EDPs

On va étudier des problèmes sous la forme (P.C.) avec $u = [u_1, \ldots, u_m]^\top$ où $u_j : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $f = [f_1, \ldots, f_n]^\top$ où $f_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $A_j \in \mathbb{C}^{m\times m}$, et $u^0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f \\ u\Big|_{t=0} = u^0 \end{cases} \tag{P.C.}$$

Proposition 3.11. *Le problème de Cauchy suivant (équivalent à* (P.C.) *pour* $n = m = 1$*) :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = f \\ u\Big|_{t=0} = u^0, \end{cases}$$

pour $a \in \mathbb{C}$, $u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *et* $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ *possède une unique solution* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ *si* $a \in \mathbb{R}$ *(et ne possède en général pas de solution* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ *si* $a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$*).*

Démonstration. Supposons que $a \in \mathbb{R}$. On procède au changement de variable $(t, x) \mapsto (t, y)$ (et $u(t, x) = U(t, y)$). On a alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\partial y}{\partial t} + a\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial y}.$$

En particulier, pour $y = x - at$ (afin d'annuler la parenthèse), on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = f(t, y + at) \\ U(0, y) = u^0(y) \end{cases}$$

qui revient à résoudre une EDO pour tout $y \in \mathbb{R}$. On a donc la solution :

$$U(t, y) = u^0(y) + \int_0^t f(s, y + as)\,\mathrm{d}s,$$

ou encore, pour u et non U :

$$u(t, x) = u^0(x - at) + \int_0^t f(s, x - a(t - s))\,\mathrm{d}s.$$

Dans le cas où $a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, justifions pourquoi trouver une solution est en général pas faisable.

On peut réécrire $a = \alpha + i\beta$ avec $\beta \neq 0$. En faisant le même changement de variable que précédemment ($y = x - \alpha t$), on trouve :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + i\beta \dfrac{\partial U}{\partial y} = f(t, y + \alpha t) \\ U\Big|_{t=0} = u^0. \end{cases}$$

on peut supposer WLOG que $a = i$ car en posant $y' \coloneqq \frac{y}{\beta}$ (bien défini car $\beta \neq 0$), on trouve :

$$\frac{\partial U'}{\partial t} + i \frac{\partial U'}{\partial y'} = f(t, \beta y' + \alpha t).$$

Dans le cas le plus simple, supposons $f \equiv 0$ et regardons le P.C. :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + i \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u\Big|_{t=0} = u^0 \end{cases}$$

La première équation est celle de Cauchy-Riemann en $t + ix$, et donc u doit être une fonction holomorphe de $t + ix$. Si une solution u existe à ce problème, alors :

$$u(t, x) = \sum_{k \geq 0} c_k (t + ix)^k,$$

qui converge uniformément en les variables d'origine. En particulier, pour $t = 0$:

$$u^0(x) = u(0, x) = \sum_{k \geq 0} c_k (ix)^k.$$

Dès lors u^0 est analytique, et donc $u^0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. On a donc une condition extrêmement restrictive sur le choix de u^0 : il est nécessaire (mais pas suffisant !) que $u^0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ pour que le système admette une solution. $\square$

Définissons alors des espaces dans lesquelles on espère pouvoir résoudre (P.C.)

Définition 3.12. Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit :

$$\mathcal{C}_b^p(\mathbb{R}^n) \coloneqq \left\{ v \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq p \Rightarrow \partial^\alpha v \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

De manière similaire, pour $T > 0$, on introduit :

$$\mathcal{C}_b^p([-T, T] \times \mathbb{R}^n) \coloneqq \left\{ v \in \mathcal{C}^p([-T, T] \times \mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq p \Rightarrow \partial^\alpha v \in L^\infty([-T, T] \times \mathbb{R}^n) \right\}.$$

Proposition 3.13. *L'application suivante est une norme sur $\mathcal{C}_b^p(\mathbb{R}^n)$:*

$$\|\cdot\|_{\mathcal{C}_b^p(\mathbb{R}^n)} : \mathcal{C}_b^p(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+ : v \mapsto \|v\|_{\mathcal{C}_b^p(\mathbb{R}^n)} \coloneqq \sum_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \partial^\alpha v(x) \right| = \sum_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha v\|_{L^\infty}.$$

Proposition 3.14. *$\mathcal{C}_b^p(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. TODO $\square$

Proposition 3.15. *Soient $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\mu \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{C}^m$. Si $Bw = \mu w$, alors $e^B w = e^\mu w$.*

Démonstration. Par définition de l'exponentielle matricielle :

$$e^B w = \left(\sum_{k\geq 0} \frac{B^k}{k!}\right) w = \sum_{k\geq 0} \frac{B^k w}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{\mu^k w}{k!} = e^\mu w.$$

□

3.4 Théorème de Petrowsky

Théorème 3.16 (Petrowsky, 1937)**.** *Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Si il existe $T > 0$, $p \in \mathbb{N}$ tels que :*

$$\forall F \in \mathcal{C}_b^p([-T,T]\times\mathbb{R}^n), u^0 \in \mathcal{C}_b^p(\mathbb{R}^n) : \exists! u \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^n) \ \textit{t.q.} \ :$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \dfrac{\partial u}{\partial x_j} = F & \textit{si } |t| \leq T, x \in \mathbb{R}^n \\ u = u^0 & \textit{si } t = 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Alors $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$: spectre$\left(\sum_{j=1}^m \xi_j A_j\right) \subset \mathbb{R}$.

Remarque. Pour simplifier les notations, on pose $L \coloneqq \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^m A_j \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Démonstration. Le problème de Cauchy induit une application (l'application *solution*) :

$$\Phi : \mathcal{C}_b^p([-T,T]\times\mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}_b^p(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^n) : (F, u^0) \mapsto \Phi(F, u^0) \coloneqq u.$$

Montrons que Φ est linéaire. Soient $(F, u^0), (\tilde{F}, \tilde{u}^0) \in \mathcal{C}_b^p([-T,T]\times\mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}_b^p(\mathbb{R}^n)$.

On prend $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^n) \ni z \coloneqq \Phi\left((F,u^0) + (\tilde{F},\tilde{u}^0)\right) = \Phi(F + \tilde{F}, u^0 + \tilde{u}^0)$ qui satisfait $Lz = F + \tilde{F}$ (pour $|t| \leq T, x \in \mathbb{R}^n$) et $z\Big|_{t=0} = u^0 + \tilde{u}^0$ (pour $x \in \mathbb{R}$). Prenons également $z_1 = \Phi(F, u^0)$ et $z_2 = \Phi(\tilde{F}, \tilde{u}^0)$. Or par linéarité de l'opérateur L :

$$\begin{cases} L(z_1 + z_2) = Lz_1 + Lz_2 = F + \tilde{F} \\ (z_1 + z_2)\Big|_{t=0} = u^0 + \tilde{u}^0. \end{cases}$$

Dès lors z et $z_1 + z_2$ satisfont le même problème de Cauchy et par hypothèse, cette solution est unique, i.e. $z = z_1 + z_2$.

Notons maintenant que Φ est une application linéaire entre des espaces de Banach (par la Proposition 3.14). Notons $E = \operatorname{dom}\Phi$ et $G = \operatorname{Im}\Phi$

Montrons que Γ_Φ, le graphe de Φ, est fermé dans $E \times G$. Soit $(\zeta, \psi) \in \overline{\Gamma_\Phi}$. Il existe des suites $(\zeta_k)_k \subset E$ et $(\psi_k)_k \subset G$ telles que $\zeta_k \xrightarrow[k\to+\infty]{E} \zeta$ et $\psi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{G} \psi$. En notant $\zeta_k = (F_k, u_k^0)$ et $\zeta = (F, u^0)$, on a $F_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{C}_b^p([-T,T]\times\mathbb{R}^n)} F$ et $u_k^0 \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{C}_b^p(\mathbb{R}^n)} u^0$.

Par définition de l'application Φ : $L\Phi(\zeta_k) = F_k$ et $\Phi(\zeta_k)\Big|_{t=0} = u_k^0$. Or, puisque $\Phi(\zeta_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{G} \psi$:

$$L\Phi(\zeta_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^n)} L\psi \qquad \text{et} \qquad \Phi(\zeta_k)\Big|_{t=0} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^n)} \psi\Big|_{t=0},$$

et donc, en sachant $\Phi(\zeta_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^n)} \psi$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\Phi(\zeta_k) + \sum_{j=1}^{n} A_j\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,\Phi(\zeta_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^n)} \frac{\partial}{\partial t}\,\psi + \sum_{j=1}^{n} A_j\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,\psi.$$

En effet, puisque $\dfrac{\partial}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ sont des opérateurs bornés de $\mathcal{C}_b^1([-T,T]\times\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{C}_b^0([-T,T]\times\mathbb{R}^n)$ et que A_j est un opérateur borné de $\mathcal{C}_b^0([-T,T]\times\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, la convergence se fait terme à terme car borné $\equiv$ continu.

Montrons donc que $\dfrac{\partial}{\partial t}$ est un opérateur borné ($\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ se fait de manière similaire). Pour $v \in \mathcal{C}_b^1([-T,T]\times\mathbb{R}^n)$:

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{\mathcal{C}_b^0([-T,T]\times\mathbb{R}^n)} = \sup_{t,x}\left|\frac{\partial v}{\partial t}\,(t,x)\right| \le \sup_{t,x}\left|\frac{\partial v}{\partial t}\,(t,x)\right| + \sup_{t,x}\left|v(t,x)\right| + \sum_{j=1}^{n}\sup_{t,x}\left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\,(t,x)\right| = \|v\|_{\mathcal{C}_b^1([-T,T]\times\mathbb{R}^n)}.$$

Dès lors, puisque $F_k = L\Phi(\zeta_k)$:

$$F_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{C}_b^p(\mathbb{R}^n)} F \qquad \text{et} \qquad L\Phi(\zeta_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^n)} L\psi.$$

Or la convergence dans $\mathcal{C}_b^p(\mathbb{R}^n)$ implique la convergence $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^n)$ car $\mathcal{C}_b^p(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^n)$ et :

$$\forall v \in \mathcal{C}_b^p(\mathbb{R}^n) : \|v\|_{\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^n)} \le \|v\|_{\mathcal{C}_b^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Donc par unicité de la limite dans les espaces métriques (ici, dans $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^n)$) : $F = L\psi$. De la même manière, on a :

$$\Phi(\zeta_k)\Big|_{t=0} = \psi_k\Big|_{t=0} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^n)} \psi \qquad \text{et} \qquad \psi_k\Big|_{t=0} = u_k^0 \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{C}_b^p(\mathbb{R}^n)} u^0.$$

À nouveau, par unicité de la limite (cette fois dans $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^n)$, puisque $p \ge 1$) : $\psi\Big|_{t=0} = u^0$. Dès lors $\Phi(\zeta) = \Phi(F,u^0) = \psi$, et donc $(\zeta,\psi) \in \Gamma_\Phi$. Dès lors par le théorème du graphe fermé de Banach (Théorème 2.49), on sait que Φ est bornée, i.e. $\exists C > 0$ ($C = \|\Phi\|$) tel que pour tout $(F,u^0) \in E$, si u dénote $\Phi(F,u^0)$:

$$\begin{aligned}
\|u\|_G = \left\|\Phi(F,u^0)\right\|_{\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^n)} &= \sum_{|\alpha|\le 1}\ \sup_{|t|\le T,x\in\mathbb{R}^n}\left|\partial^\alpha u(t,x)\right| \\
&\le C\left[\sum_{|\beta|\le p}\left(\sup_{|t|\le T,x\in\mathbb{R}^n}\left|\partial^\beta F(t,x)\right| + \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\partial^\beta u^0(x)\right|\right)\right] \qquad (3.1)\\
&= C\left\|(F,u^0)\right\|_{\mathcal{C}_b^p([-T,T]\times\mathbb{R}^n)\times\mathcal{C}_b^p(\mathbb{R}^n)} = C\left\|(F,u^0)\right\|_E.
\end{aligned}$$

Finalement, raisonnons par l'absurde. Posons $F \equiv 0$ et $u^0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : x \mapsto e^{i\langle x,\xi\rangle}v^0$ pour $v^0 \in \mathbb{C}^m$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$. Fabriquons alors u, une solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{pour } |t| \leq T, x \in \mathbb{R}^n \\ u\Big|_{t=0} = u^0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{PC 1}$$

Par séparation des variables :

$$u(t,x) = e^{i\langle x,\xi\rangle}v(t,\xi),$$

et pour $A(\xi) \coloneqq \sum_{j=1}^m \xi_j A_j$:

$$Lu = e^{i\langle x,\xi\rangle}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + iA(\xi)v\right) = 0.$$

Donc on a l'EDO suivante :

$$\begin{cases} v' + iA(\xi)v = 0 \\ v\Big|_{t=0} = v^0 \end{cases} \tag{PC 2}$$

(PC 2) admet pour solution :

$$v(t,\xi) = e^{-itA(\xi)}v^0,$$

ce qui permet de déterminer la solution de (PC 1) :

$$u(t,x) = e^{i\langle x,\xi\rangle}e^{-itA(\xi)}v^0.$$

Or par (3.1), on a :

$$\sup_{|t|\leq T}\left|u(t,0)\right| \leq C\sum_{|\beta|\leq p}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\partial^\beta u^0(x)\right|. \tag{3.2}$$

De plus, puisque $\left|\partial^\beta u^0(x)\right| = \left|\partial^\beta e^{i\langle x,\xi\rangle}v^0\right| \leq C|\xi|^{|\beta|}\left|v^0\right|$:

$$\sup_{|t|\leq T}\left|u(t,0)\right| \leq C(1+|\xi|^p)\left|v^0\right|.$$

Or $\left|u(t,0)\right| = \left|e^{-itA(\xi)}v^0\right|$.

Supposons maintenant qu'il existe un $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $A(\xi^0)$ admette une valeur propre $\lambda = \lambda(\xi^0) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, et notons le vecteur propre associé $v^0 = v(\xi^0)$. Pour $\sigma > 0$:

$$A(\sigma\xi^0)v^0 = \sigma\lambda(\xi^0)v^0,$$

et donc :

$$-itA(\sigma\xi^0)v^0 = -it\sigma\lambda(\xi^0)v^0.$$

Dès lors :

$$e^{-itA(\sigma\xi^0)}v^0 = e^{-it\sigma\lambda(\xi^0)}v^0,$$

et en particulier :

$$\left|e^{-itA(\sigma\xi^0)}v^0\right| = \left|e^{-it\sigma\lambda(\xi^0)}\right|\left|v^0\right| = e^{t\sigma\Im\lambda(\xi^0)}\left|v^0\right|.$$

(3.2) nous dit finalement que :

$$\forall \sigma > 0 : \forall t \in [-T, T] : \left|v^0\right| e^{t\sigma \Im\lambda(\xi^0)} \le C \left(1 + \left|\sigma\xi^0\right|\right)^p \left|v^0\right|.$$

Or, pour t^0 tel que $t^0 \Im\lambda(\xi^0) > 0$ (et un tel t^0 existe, par exemple $\frac{T}{2}\,\mathrm{sgn}(\Im\lambda(\xi^0))$ est bien dans $[-T, T]$), on a une contradiction car $\sigma \mapsto e^{t^0 \Im\lambda(\xi^0)\sigma}$ croît exponentiellement et ne peut pas être bornée par un polynôme en σ. $\square$

Définition 3.17. Si $L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ satisfait la condition de Petrowsky (i.e. $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$: spectre$\big(A(\xi)\big) \subset \mathbb{R}$), on dit que L est *hyperbolique* dans la direction $\frac{\partial}{\partial t}$.

Remarque. Le terme *hyperbolicité* vient du fait que les courbes de niveau de la forme quadratique associée à la transformée de Fourier de L sont hyperbolique.

Exemple 3.1. Pour $m = n = 1$: $L = \frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$: $A(\xi) = a\xi$. Donc la condition de Petrowsky revient à imposer que $a \in \mathbb{R}$.

Exemple 3.2. On prend $L = \partial_t^2 + 2b\partial_{t,x}^2 + c\partial_x^2$ et l'EDP associée $Lu = f$. En posant $v = \partial_t u$ et $w = \partial_x u$, l'EDP devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + 2b\,\dfrac{\partial v}{\partial x} + c\,\dfrac{\partial w}{\partial x} = f \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial w}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

ou sous forme matricielle :

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b & c \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La condition d'hyperbolicité dit alors que spectre$\left(\begin{bmatrix} 2b & c \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) \subset \mathbb{R}$, i.e. $b, c \in \mathbb{R}$ et $b^2 - c \ge 0$.

Le Laplacien est un cas particulier de cet exemple avec $b = 0$ et $c = 1$. Donc le Laplacien n'est pas hyperbolique car $b^2 - c = -1 \not\ge 0$. Par contre $\partial_t^2 - \partial_x^2$ est hyperbolique car $b^2 - c = 1 \ge 0$.

Exemple 3.3. Les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{rot} H \\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{rot} E \end{cases}$$

pour $E, H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}$ sont hyperboliques et peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

pour $A_j = \begin{bmatrix} 0 & \omega_j \\ -\omega_j & 0 \end{bmatrix}$ pour $\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\omega_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, et $u = \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}$. En effet, les A_j sont symétriques réelles, donc pour tout $\xi \in \mathbb{R}^3$, les valeurs propres de $A(\xi) = \sum_{j=1}^3 \xi_j A_j$ sont réelles car $A(\xi)$ est également symétrique réelle.

Exemple 3.4. Pour $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, on pose $A_j \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{bmatrix}$. L'opérateur :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} A_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

est l'*opérateur de Dirac.* L est hyperbolique puisque pour $\xi \in \mathbb{R}^3$: $\sum_{j=1}^{3} \xi_j A_j$ est hermitienne.

Définition 3.18. on pose l'ensemble :

$$\widetilde{\mathcal{S}}([-T,T] \times \mathbb{R}^n) \coloneqq \left\{ u \in \mathcal{C}^\infty([-T,T] \times \mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n : \forall k \in \mathbb{N} : x^\alpha \partial_x^\beta \partial_t^k u \in L^\infty([-T,T] \times \mathbb{R}^n) \right\}.$$

Remarque. $\widetilde{\mathcal{S}}([-T,T] \times \mathbb{R}^n)$ est une variante de l'espace de Schwartz où la première variable n'est pas définie sur $\mathbb{R}^n$ mais sur un compact $[-T,T]$.

Théorème 3.19 (Réciproque de Petrowsky)**.** *Soit L un opérateur hyperbolique dans la direction $\frac{\partial}{\partial t}$. Alors :*

$$\forall F \in \widetilde{\mathcal{S}}([-T,T] \times \mathbb{R}^n) : \forall u^0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \exists! u \in \widetilde{\mathcal{S}}([-T,T] \times \mathbb{R}^n) \text{ t.q.}$$

$$\begin{cases} Lu = F & \text{pour } |t| \leq T, x \in \mathbb{R}^n \\ u\Big|_{t=0} = u^0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Démonstration. **<u>existence :</u>** Si une solution u existe, alors à $t \in [-T,T]$ fixé, on peut appliquer Fourier en x :

$$\mathcal{F}_\xi u(t,\xi) \coloneqq \widetilde{u}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(t,x) \, \mathrm{d}x,$$

et $\widetilde{u}$ doit satisfaire le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \widetilde{u} + iA(\xi)\widetilde{u} = \widetilde{F} \\ \\ \widetilde{u}\Big|_{t=0} = \widehat{u^0}, \end{cases}$$

qui admet pour solution :

$$\widetilde{u} = e^{-itA(\xi)}\widehat{u^0} + \int_0^t e^{-i(t-s)} \widetilde{F}(s,\xi) \, \mathrm{d}s.$$

Posons :

$$P(t,\xi) \coloneqq e^{-itA(\xi)}\widehat{u^0}(\xi)$$
$$Q(t,\xi) \coloneqq \int_0^t e^{-i(t-s)} \widetilde{F}(s,\xi) \, \mathrm{d}s.$$

Affirmation 3.20. $\forall k \geq 0 : \partial_t^k P, \partial_t^k Q \in \mathcal{S}_\xi(\mathbb{R}^n)$, *où $f \in \mathcal{S}_\xi(\mathbb{R}^n)$ veut dire :*

$$\forall t \in [-T,T] : \xi \mapsto f(t,\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Par cette affirmation, $P+Q \in \mathcal{S}_\xi$. Posons alors $u \coloneqq \mathcal{F}_\xi^{-1}(P+Q)$. On trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \mathcal{F}_\xi^{-1} P + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \mathcal{F}_\xi^{-1} Q \\
&= \mathcal{F}_\xi^{-1}\Big(\big(\partial_t + iA(\xi)\big)\,(P+Q)\Big),
\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle directement de :

$$\begin{aligned}
\left(\partial_t + \sum_{j=1}^n A_j \partial_{x_j}\right) \mathcal{F}_\xi^{-1} P &= \left(\partial_t + \sum_{j=1}^n A_j \partial_{x_j}\right) \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} P(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\partial_t + \sum_{j=1}^n A_j \partial_{x_j}\right) \left(e^{i\langle x,\xi\rangle} P(t,\xi)\right) \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t \left(e^{i\langle x,\xi\rangle} P(t,\xi)\right) + \left(\sum_{j=1}^n A_j \partial_{x_j} e^{i\langle x,\xi\rangle}\right) P(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} \partial_t P(t,\xi) + \sum_{j=1}^n A_j i \xi_j e^{i\langle x,\xi\rangle} P(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} \left(\partial_t + i\sum_{j=1}^n \xi_j A_j\right) P(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \mathcal{F}_\xi\left(\left(\partial_t + i\sum_{j=1}^n \xi_j A_j\right) P\right).
\end{aligned}$$

Par symétrie, on a le même résultat sur Q. Donc $\partial_t u + \sum_{j=1}^n A_j \partial_{x_j} u = \mathcal{F}_\xi^{-1} \widetilde{F} = F$ (car à t fixé, $\xi \mapsto F(t,\xi) \in \mathcal{S}$). Donc u est bien solution de $Lu = F$, et par la formule d'inversion de Fourier (dans l'espace de Schwartz) :

$$P + Q\Big|_{t=0} = P\Big|_{t=0} + Q\Big|_{t=0} = \widehat{u^0} + \int_0^0 \ldots \,\mathrm{d}s = \widehat{u^0},$$

et donc $u\Big|_{t=0} = u^0$.

u est donc bien solution du problème de Cauchy. Il reste à montrer que $u \in \widetilde{\mathcal{S}}([-T,T]\times\mathbb{R}^n)$. Pour cela, il est suffisant de montrer que $P, Q \in \widetilde{\mathcal{S}}([-T,T]\times\mathbb{R}^n)$ puisque la transformée de Fourier est une bijection sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Affirmation 3.21. *$(t,\xi) \mapsto e^{-itA(\xi)}$ est $\mathcal{C}^\infty$.*

Donc $(t,\xi) \mapsto e^{-itA(\xi)}\widehat{u^0}(\xi)$ est $\mathcal{C}^\infty$ également, i.e. $P \in \mathcal{C}^\infty$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, k \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
\xi^\alpha \partial_t^k D_\xi^\beta P &= \xi^\alpha \partial_t^k D_\xi^\beta \left(e^{-itA(\xi)}\widehat{u^0}(\xi)\right) \\
&= \xi^\alpha \partial_t^k \sum_{\beta' \leq \beta} \left[\binom{\beta}{\beta'} D_\xi^{\beta'}(e^{-itA(\xi)}) D_\xi^{\beta-\beta'}\widehat{u^0}(\xi)\right] \\
&= \xi^\alpha \sum_{\beta' \leq \beta} \binom{\beta}{\beta'} \underbrace{\partial_t^k D_\xi^{\beta'} e^{-itA(\xi)}}_{(*)} D_\xi^{\beta-\beta'}\widehat{u^0}(\xi) \\
&= \xi^\alpha \sum_{\beta' \leq \beta} \binom{\beta}{\beta'} D_\xi^{\beta'} \left(\left(-iA(\xi)\right)^k e^{-itA(\xi)}\right) D_\xi^{\beta-\beta'}\widehat{u^0}(\xi) \\
&= \xi^\alpha \sum_{\beta' \leq \beta} \binom{\beta}{\beta'} \left[\sum_{\gamma \leq \beta'} \binom{\beta'}{\gamma} D_\xi^\gamma \left(-iA(\xi)\right)^k D_\xi^{\beta'-\gamma}\left(e^{-itA(\xi)}\right)\right] D_\xi^{\beta-\beta'}\widehat{u^0}(\xi)
\end{aligned}
$$

(*) les dérivées commutent puisque $(t, \xi) \mapsto e^{-itA(\xi)} \in \mathcal{C}^\infty$.

Affirmation 3.22. *Pour $\mu \in \mathbb{N}^n$: $\exists C > 0, e_\mu > 0$ t.q. $\left|D_\xi^\mu e^{-itA(\xi)}\right| \leq C(1+|\xi|)^{e_\mu}$.*

Avec cette affirmation, on peut finalement majorer :

$$
\begin{aligned}
\left|\xi^\alpha \partial_t^k D_\xi^\beta P\right| &\leq \sum_{\beta', \gamma} C|\xi|^\alpha \underbrace{\left|D_\xi^\gamma(-iA(\xi))^k\right|}_{\text{polynôme} \leq C(1+|\xi|)^{K_\gamma}} \underbrace{\left|D_\xi^{\beta'-\gamma} e^{-itA(\xi)}\right|}_{\leq C(1+|\xi|)^{e_\gamma}} \underbrace{\left|D_\xi^{\beta-\beta'}\widehat{u^0}(\xi)\right|}_{\leq C_N(1+|\xi|)^{-N}} \\
&\leq C(1+|\xi|)^{-K} \leq C
\end{aligned}
$$

pour N suffisamment grand.

On a donc bien finalement $\xi^\alpha \partial_t^k D_\xi^\beta P$ borné. On a exactement la même chose pour Q. Dès lors, u est une solution au problème de Cauchy et $u \in \widetilde{\mathcal{S}}([-T,T] \times \mathbb{R}^n)$. L'existence est donc démontrée. De plus, cela montre l'Affirmation 3.20.

unicité : Soient $u_{(1)}, u_{(2)}$, deux solutions du problème de Cauchy dans $\widetilde{\mathcal{S}}([-T,T] \times \mathbb{R}^n)$, alors on pose $w := u_{(1)} - u_{(2)}$. $w \in \widetilde{\mathcal{S}}([-T,T] \times \mathbb{R}^n))$ est solution du problème de Cauchy :

$$
\begin{cases}
Lw = 0 \\
w\Big|_{t=0} = 0
\end{cases}
$$

En en prenant la transformée de Fourier à $|t| \leq T$ fixé :

$$
\begin{cases}
\partial_t \widetilde{w} + iA(\xi)\widetilde{w} = 0 \\
\widetilde{w}\Big|_{t=0} = 0
\end{cases}
$$

qui admet pour unique solution $\widetilde{w} = 0$, et donc $w = 0$ par formule d'inversion de Fourier, et donc $u_{(1)} = u_{(2)}$. $\square$

Proposition 3.23. *Il existe $C_m > 0$ tel que $\forall S \in \mathbb{C}^{m\times m}$ t.q.* $\text{spectre}(S) \subset \mathbb{R} : \left\|e^{iS}\right\| \leq C_m(1+\|S\|)^m$.

Démonstration. Trouvons un chemin γ tel que :

$$\left\|e^{iS}\right\| = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{iz}(z-S)^{-1}\,\mathrm{d}z.$$

Prenons le chemin $\gamma = \big[(-\|S\|-1-i) \to (\|S\|+1-i) \to (\|S\|+1+i) \to (-\|S\|-1+i) \to (-\|S\|-1-i)\big]$. γ est homotope à $\gamma' : t \mapsto (\|S\|+\varepsilon)e^{it}$. Par la forme intégrale de Cauchy pour $f(z) = e^{iz}$:

$$e^{iS} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{iz}(z-S)^{-1}\,\mathrm{d}z,$$

et donc :

$$\left\|e^{iS}\right\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \left|e^{iz}\right|\left\|(z-S)^{-1}\right\||\mathrm{d}z|\,.$$

Par le Lemme 3.10, $\left\|(z-S)^{-1}\right\| \leq C_m(1+|z|+\|S\|)^{m-1}$. De plus $\left|e^{iz}\right| \leq \kappa$ sur le chemin γ. De plus, pour z dans le chemin γ :

$$|z| \leq \sqrt{1+(1+\|S\|)^2} \leq \sqrt{2}(\|S\|+1).$$

Dès lors :

$$\left\|e^{iS}\right\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \kappa C(1+\|S\|)^{m-1}|\mathrm{d}z| = \frac{C(1+\|S\|)^{m-1}\kappa}{2\pi}\int_\gamma |\mathrm{d}z| \leq \frac{C\kappa(\|S\|+1)^{m-1}}{\pi}(\|S\|+2) \leq C(1+\|S\|)^m.$$

$\square$

Démonstration (de l'Affirmation 3.21). Montrons que $(t,\xi) \mapsto e^{-itA(\xi)}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-T,T]\times\mathbb{R}^n$.

On fixe $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$. Si $\text{spectre}\big(A(\xi)\big) \subset (-\chi^0,\chi^0)$ où $\chi^0 = \left\|A(\xi^0)\right\|+1$, on peut prendre le chemin γ_{ξ^0} défini par :

$$\gamma_{\xi^0} = \Big[(-\chi^0-i) \to (\chi^0-i) \to (\chi^0+i) \to (-\chi^0+i) \to (-\chi^0-i)\Big]\,.$$

Or puisque :

$$\left\|A(\xi)\right\| \leq \left\|A(\xi^0)\right\| + \left\|A(\xi-\xi^0)\right\| \leq \left\|A(\xi^0)\right\| + \|A\|\left|\xi-\xi^0\right| \lneqq \left\|A(\xi^0)\right\| + 1$$

pour $\left|\xi-\xi^0\right|$ suffisament petit, on sait qu'à ξ fixé, $\exists\xi^0$ t.q. $\text{spectre}\big(A(\xi)\big) \subset (-\chi^0,\chi^0)$.

Donc, par le Corollaire 3.8 :

$$e^{-itA(\xi)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\xi^0}} e^{-itz}(z-A(\xi))^{-1}\,\mathrm{d}z. \tag{3.3}$$

Il faut donc voir que $\xi \mapsto (z-A(\xi))^{-1}$ est bien $\mathcal{C}^\infty$ pour $z \in \operatorname{Im}\gamma_{\xi^0}$. Or par choix de ξ^0, on sait que $\forall z \in \operatorname{Im}\gamma : z \notin \text{spectre}\big(A(\xi)\big)$. Dès lors, pour $1 \leq j,k \leq m$:

$$(z-A(\xi))^{-1}{}_{jk} = \frac{\text{polynôme en } \xi \text{ et } z}{\det(z-A(\xi))}$$

est une fonction rationnelle complexe dont le dénominateur ne s'annule pas. Dès lors elle est bien $\mathcal{C}^\infty$. $\square$

Démonstration (de l'Affirmation 3.22). Il reste donc uniquement à vérifier que les dérivées de $\xi \mapsto z^{-itA(\xi)}$ sont à croissance polynômiale.

Puisque :

$$0 = \frac{\partial}{\partial \xi_j} I = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \Big((z - A(\xi))^{-1} (z - A(\xi)) \Big) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} (z - A(\xi))^{-1} \right) (z - A(\xi)) + (z - A(\xi))^{-1} (-A_j),$$

on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} (z - A(\xi))^{-1} = (z - A(\xi))^{-1} A_j (z - A(\xi_j))^{-1}. \tag{3.4}$$

De plus, par l'équation (3.3) (et parce que l'intégration ne dépend pas de ξ_j) :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{-itA(\xi)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\xi^0}} e^{-itz} (z - A(\xi))^{-1} A_j (z - A(\xi))^{-1} \, \mathrm{d}z,$$

que l'on majore comme suit :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{-itA(\xi)} \right\| \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\xi^0}} \kappa_t \left\| (z - A(\xi))^{-1} \right\| \left\| A_j \right\| \left\| (z - A(\xi))^{-1} \right\| |\mathrm{d}z| \, .$$

De plus, par le Lemme 3.10 :

$$\left\| (z - A(\xi))^{-1} \right\| \leq C \left(1 + |z| + \left\| A(\xi) \right\| \right)^{m-1},$$

et par choix du chemin d'intégration :

$$|z| \leq \left(\left(\left\| A(\xi^0) \right\| + 1 \right)^2 + 1 \right)^{1/2} \leq C \left(\left\| A(\xi^0) \right\| + 1 \right) \leq C \left(\left| \xi^0 \right| + 1 \right).$$

Dès lors $\left\| (z - A(\xi))^{-1} \right\| \leq C(1 + \left| \xi^0 \right| + |\xi|)$, et donc :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{-itA(\xi)} \right\| \leq C \left(1 + \left| \xi^0 \right| + |\xi| \right)^{2(m-1)} \int_{\gamma_{\xi^0}} |\mathrm{d}z| \leq C \left(1 + \left| \xi^0 \right| + |\xi| \right)^{2(m-1)} \cdot K \left(1 + \left| \xi^0 \right| \right).$$

Et finalement, puisque :

$$\left| \xi^0 \right| \leq |\xi| + \left| \xi - \xi^0 \right| \leq |\xi| + c \leq C(1 + |\xi|),$$

on peut conclure avec :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{-itA(\xi)} \right\| \leq C(1 + \xi)^{2(m-1)} (1 + \xi) = C(1 + |\xi|)^{2m-1}.$$

De là, il ne reste plus qu'à effectuer une récurrence sur base du Lemme 3.10 et de l'équation (3.4) pour montrer que toutes les dérivées de $\xi \mapsto e^{-itA(\xi)}$ sont à croissance polynômiale. $\square$

Chapitre 4

Théorie des distributions

On pose $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, un ouvert quelconque.

4.1 Introduction

Définition 4.1. Soit $u : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ linéaire. On dit que u est une *distribution* sur Ω si pour toute suite $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\exists K \subset\subset \Omega$ t.q. $\forall k \geq 0 : \operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ et :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n : \partial^\alpha \varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\text{CVU}} 0,$$

on a :

$$\langle u, \varphi_k \rangle \coloneqq u(\varphi_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \qquad \text{dans } \mathbb{C}.$$

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.[1]

Remarque. Cette condition correspond à une forme de *continuité généralisée*. De fait, on peut construire une topologie sur $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que cette condition correspond exactement à la notion topologique de continuité. Cependant, les résultats sont plus généraux car ce n'est pas une topologie d'espace normé.

Proposition 4.2. *$\mathcal{D}'(\Omega)$ est un $\mathbb{C}$-e.v.*

Exemple 4.1. On introduit l'espace :

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) \coloneqq \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ t.q. } \forall K \subset\subset \Omega : f\chi_K \in L^1(\Omega) \right\}.$$

Note : $L^1(\Omega) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ trivialement, mais $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \neq L^1(\Omega)$. En effet $x \mapsto e^x \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \setminus L^1(\Omega)$.

Pour $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, on définit l'application :

$$u_f : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto \int_\Omega \varphi f \,\mathrm{d}x.$$

u_f est bien une distribution. En effet, fixons pour une suite $(\varphi_k)_k$ satisfaisant les hypothèses. On sait que $\varphi_k f \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ ponctuellement. De plus, $\exists M > 0$ t.q. $\forall k \geq 0 : |\varphi_k f| \leq M|f|\,\chi_K \in L^1(\Omega)$. Par la convergence

[1] Cette notation vient du fait que $\mathcal{D}'(\Omega)$ est le *dual* de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, qui est aussi noté $\mathcal{D}(\Omega)$.

dominée :

$$\lim_{k\to+\infty}\int \varphi_k f\,\mathrm{d}x = \int \lim_{k\to+\infty}\varphi_k f\,\mathrm{d}x = 0.$$

De plus, $f \mapsto u_f$ est injective, donc on peut identifier f à u_f. Les distributions généralisent donc la notion de fonction.

Exemple 4.2. Soit μ une mesure borélienne sur Ω et finie sur les compacts. On définit :

$$u_\mu : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto \int_\Omega \varphi\,\mathrm{d}\mu.$$

Montrons que u_μ est une distribution. La linéarité vient de la linéarité de l'intégrale. Soit $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ satisfaisant les hypothèses. Le support de toutes les applications φ_k est contenu dans un compact K, donc $\exists M > 0$ t.q. $\forall k \geq 0 : \varphi_k \leq M\chi_K \in L^1(\mu)$. Dès lors par la convergence dominée : $\int_\Omega \varphi_k\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

À nouveau, $\mu \mapsto u_\mu$ est injective et donc on peut identifier μ avec u_μ. La notion de distribution généralise donc également la notion de mesure.

Exemple 4.3. $u : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto \varphi'(0)$ est une distribution puisque :

$$u(\varphi_k) = \varphi_k'(0) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

4.2 Dérivées de distributions

Définition 4.3. Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on définit :

$$\partial_j u : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto \langle \partial_j u, \varphi\rangle := -\langle u, \partial_j\varphi\rangle.$$

Proposition 4.4. *$\partial_j u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pour tout $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $j \in [\![1,n]\!]$.*

Démonstration. $\partial_j u$ est bien une forme linéaire par linéarité de u et de ∂_j. Pour $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, si il existe $K \subset\subset \Omega$ t.q. $\forall k \geq 0 : \operatorname{supp}\varphi_k \subseteq K$ et si $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n : \partial^\alpha\varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\text{CVU}} 0$, on sait que $(\partial_j\varphi_k)_k$ satisfait les mêmes propriétés. Dès lors, par définition de u :

$$-\langle u, \partial_j\varphi_k\rangle \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

□

Définition 4.5. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on définit $\partial^\alpha u := \partial_1^{\alpha_1}\dots\partial_n^{\alpha_n} u$.

Proposition 4.6. *$\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

Démonstration. par récurrence avec la Proposition 4.4. □

Proposition 4.7. *Pour $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $u_{\partial_j f} = \partial_j u_f$ (au sens de l'exemple 4.1).*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. On calcule :

$$\langle u_{\partial_j f}, \varphi \rangle = \int_\Omega \varphi \partial_j f \, \mathrm{d}x,$$

et :

$$\langle \partial u_f, \varphi \rangle = -\int_\Omega f \partial_j \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Par intégration par partie, par un raisonnement similaire à celui dans la démonstration du Théorème 1.10, on trouve :

$$\int_\Omega \varphi \partial_j f \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \partial_j \varphi f \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \partial_j(\varphi f) \, \mathrm{d}x = 0$$

car par Fubini :

$$\int_K \partial(\varphi f) \, \mathrm{d}x = \int_{-L_1}^{L_1} \dots \underbrace{\int_{-L_n}^{L_n} \partial(\varphi f) \, \mathrm{d}x_n}_{=0} \dots \mathrm{d}x_1$$

où $\Omega \supset \prod_{j=1}^n [-L_j, L_j] = K \supseteq \operatorname{supp} \varphi$, donc $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ si $\left|x_j\right| \geq L_j$. $\square$

Exemple 4.4. Pour $f = \chi_{\overline{\mathbb{R}^+}}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_f = (u_f)' : \varphi \mapsto -\int_{\overline{\mathbb{R}^+}} \varphi'(x) \, \mathrm{d}x = -\left(\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) - \varphi(0) \right) = \varphi(0),$$

puisque φ est à support compact.

Donc $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_{\chi_{\overline{\mathbb{R}^+}}} = \delta_0$ (la mesure de Dirac en 0).

Proposition 4.8. *Pour $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\partial_j \partial_k u = \partial_k \partial_j u$.*

Démonstration. u est définie sur $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ donc pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, les dérivées commutent. Donc :

$$\langle \partial_j \partial_k u, \varphi \rangle = -\langle \partial_k u, \partial_j \varphi \rangle = \langle u, \partial_k \partial_j \varphi \rangle = \langle u, \partial_j \partial_k \varphi \rangle = \langle \partial_k \partial_j u, \varphi \rangle.$$

$\square$

Définition 4.9. Pour $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit :

$$au : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto \langle au, \varphi \rangle := \langle u, a\varphi \rangle.$$

Proposition 4.10. *Pour $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, au est une distribution.*

Démonstration. Par linéarité de u. $\square$

Proposition 4.11. *Soient $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Alors $u_{af} = au_f$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

$$\langle u_{af}, \varphi \rangle = \int_\Omega \varphi(af) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega (a\varphi) f \, \mathrm{d}x = \langle u_f, a\varphi \rangle = \langle au_f, \varphi \rangle.$$

$\square$

Exemple 4.5. Soient δ_0 la mesure de Dirac en 0, u la distribution associée et $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \ni a : x \mapsto x_j$. Par définition de a :

$$\langle au, \varphi \rangle = (a\varphi)(0) = 0.$$

Proposition 4.12. *Les distributions vérifient la formule de Leibniz : si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, alors :*

$$\partial_j(au) = \partial_j au + a\partial_j u$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

$$\begin{aligned}\left\langle \partial_j(au), \varphi \right\rangle &= -\left\langle au, \partial_j\varphi \right\rangle = \left\langle u, -a\partial_j\varphi \right\rangle = \left\langle u, -\partial_j(au) + \partial_j a\varphi \right\rangle = \left\langle \partial_j u, a\varphi \right\rangle + \left\langle \partial_j au, \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle a\partial_j u, \varphi \right\rangle + \left\langle \partial_j au, \varphi \right\rangle = \left\langle \partial_j au + a\partial_j u, \varphi \right\rangle.\end{aligned}$$

□

4.3 Distributions tempérées

On se place dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Définition 4.13. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. u est dite *tempérée* si pour toute suite $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$ (au sens de la Définition 1.9), on a :

$$\langle u, \varphi_k \rangle \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distributions tempérées.

Remarque. Si $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle qu'il existe $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ avec $\forall k \geq 0 : \operatorname{supp}\varphi_k \subset K$ et :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n : \partial^\alpha \varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\text{CVU}} 0,$$

alors $\varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$, i.e. la topologie sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est plus fine que celle de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 4.14. *Soit $u : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire. u est tempérée ssi :*

$$\exists C, m > 0 \text{ t.q. } \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \left|\langle u, \varphi \rangle\right| \leq C \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq m} \left\| x^\alpha \partial^\beta \varphi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Remarque. Cette proposition est une généralisation du Théorème 2.36.

Démonstration. $\underline{\Leftarrow :}$ Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on note :

$$p_m(\varphi) := \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq m} \left\| x^\alpha \partial^\beta \varphi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Soit $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$. Par définition de la convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on sait que $p_m(\varphi_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Dès lors, $\langle u, \varphi_k \rangle \leq Cp_m(\varphi_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, et donc u est tempérée.

$\underline{\Rightarrow :}$ Par contraposée, supposons que :

$$\forall C > 0, m > 0 : \exists \varphi_{C,m} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \left| \left\langle u, \varphi_{C,m} \right\rangle \right| > C p_m(\varphi_{C,m}).$$

En particulier, si $C = m = j$, il existe $\varphi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\left| \left\langle u, \varphi_j \right\rangle \right| \gneqq j p_j(\varphi_j)$. WLOG supposons $\left| \left\langle u, \varphi_j \right\rangle \right| = 1$ (quitte à normaliser φ_j). Alors $p_j(\varphi_j) < \frac{1}{j}$, et donc pour $m \leq j$: $p_m(\varphi_j) < \frac{1}{j}$. On a donc construit une suite $(\varphi_j)_j \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Cependant pour tout j, $\left| \left\langle u, \varphi_j \right\rangle \right| = 1$, et donc $\left\langle u, \varphi_j \right\rangle$ ne converge pas vers 0. Donc u n'est pas tempérée. □

Proposition 4.15. *$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{C}$-e.v.*

Lemme 4.16. *Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Il existe $C > 0$ tel que :*

$$\forall y, z \in \mathbb{R}^n : \left| \psi(y) - \psi(z) \right| \leq C |y - z| \, .$$

Lemme 4.17. *Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\exists (\varphi_k)_k \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\varphi_k \xrightarrow[k \to +\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \varphi$, i.e. $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\psi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$. Pour $k \geq 1$, on pose :

$$\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : x \mapsto \varphi(x) \psi\left(\frac{x}{k}\right).$$

On a alors $(\varphi_k - \varphi)(x) = \varphi(x) \left(\psi\left(\frac{x}{k}\right) - 1 \right)$. Par Leibniz :

$$\begin{aligned} \left| x^\alpha \partial^\beta (\varphi_k - \varphi) \right| &= \left| \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} x^\alpha \partial^\gamma \varphi \partial^{\beta - \gamma} \left(\psi\left(\frac{x}{k}\right) - 1 \right) \right| \\ &\leq \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} |x^\alpha| \left| \partial^\beta \varphi \right| \left| \partial^{\beta - \gamma} \left(\psi\left(\frac{x}{k}\right) - 1 \right) \right| \end{aligned}$$

Si $\beta - \gamma \neq 0$, un facteur $k^{-|\beta - \gamma|}$ sort du dernier facteur, et si $\beta = \gamma$, par le Lemme 4.16, il existe C tel que $\left| \psi\left(\frac{x}{k}\right) - 1 \right| = \left| \psi\left(\frac{x}{k}\right) - \psi(0) \right| \leq C \left| \frac{x}{k} \right| = C \frac{|x|}{k}$.

Dès lors, tous les termes de la somme tendent uniformément vers 0 et :

$$\varphi_k - \varphi \xrightarrow[k \to +\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0.$$

□

Théorème 4.18. *Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. u possède un unique prolongement $\widetilde{u}$ à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tel que :*

1. *$\widetilde{u} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ est linéaire ;*

2. $\exists C, m > 0$ *t.q.* $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \left|\langle \widetilde{u}, \varphi \rangle\right| \leq C p_m(\varphi)$.

Démonstration. Par le Lemme 4.17, il existe $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \varphi$. Pour tout k, $\langle u, \varphi_k \rangle$ est bien défini et $(\langle u, \varphi_k \rangle)_k$ est de Cauchy puisque :

$$\left|\langle u, \varphi_k \rangle - \langle u, \varphi_\ell \rangle\right| = \left|\langle u, \varphi_k - \varphi_\ell \rangle\right| \leq C p_m(\varphi_k - \varphi_\ell) \xrightarrow[k,\ell\to+\infty]{} 0$$

par la Proposition 4.14. On pose alors :

$$\langle \widetilde{u}, \varphi \rangle \coloneqq \lim_{k\to+\infty} \langle u, \varphi_k \rangle .$$

Pour montrer que $\widetilde{u}$ est linéaire, on fixe $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On prend $(\varphi_k)_k, (\psi_k)_k \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que :

$$\varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \varphi \qquad \text{et} \qquad \psi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \psi.$$

Alors en particulier $\varphi_k + \psi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \varphi + \psi$, et donc :

$$\langle \widetilde{u}, \varphi + \psi \rangle = \lim_{k\to+\infty} \langle u, \varphi_k + \psi_k \rangle = \lim_{k\to+\infty} \langle u, \varphi_k \rangle + \lim_{k\to+\infty} \langle u, \psi_k \rangle = \langle \widetilde{u}, \varphi \rangle + \langle \widetilde{u}, \psi \rangle .$$

De plus, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \lambda\varphi$, donc :

$$\langle \widetilde{u}, \lambda\varphi \rangle = \lim_{k\to+\infty} \langle u, \lambda\varphi_k \rangle = \lambda \lim_{k\to+\infty} \langle u, \varphi_k \rangle = \lambda \langle \widetilde{u}, \varphi \rangle .$$

Montrons alors le deuxième point et fixons $\varepsilon > 0$. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \varphi$, on a à k fixé :

$$\left|\langle \widetilde{u}, \varphi \rangle\right| \leq \left|\langle \widetilde{u}, \varphi_k \rangle\right| + \left|\langle \widetilde{u}, \varphi - \varphi_k \rangle\right| = \left|\langle u, \varphi_k \rangle\right| + \left|\langle \widetilde{u}, \varphi - \varphi_k \rangle\right| \leq C p_m(\varphi_k) + \left|\langle \widetilde{u}, \varphi \rangle - \langle u, \varphi_k \rangle\right| .$$

Or par convergence des φ_k vers φ dans $\mathcal{S}$, on a :

$$p_m(\varphi_k) = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq m} \left\| x^\alpha \partial^\beta \left(\varphi + [\varphi_k - \varphi]\right)\right\|_{L^\infty} \leq \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq m} \left\| x^\alpha \partial^\beta \varphi \right\|_{L^\infty} + \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq m} \left\| x^\alpha \partial^\beta (\varphi_k - \varphi)\right\|_{L^\infty} \leq p_m(\varphi) + \varepsilon$$

pour $k > K_1$ suffisamment grand. De plus, par définition de $\widetilde{u}$, pour $k > K_2$: $\left|\langle \widetilde{u}, \varphi \rangle - \langle u, \varphi_k \rangle\right| \leq \varepsilon$. Pour $k > \max\{K_1, K_2\}$, on a donc :

$$\left|\langle \widetilde{u}, \varphi \rangle\right| \leq C p_m(\varphi) + (C+1)\varepsilon.$$

Or le résultat tient pour tout $\varepsilon > 0$, donc :

$$\left|\langle \widetilde{u}, \varphi \rangle\right| \leq C p_m(\varphi).$$

Il reste à montrer que $\widetilde{u}$ est unique. Soit $\bar{u} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ telle que $\bar{u}\Big|_{\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)} = u$ et telle que $\exists C_1, m_1$ t.q. $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \left|\langle \bar{u}, \varphi \rangle\right| \leq C_1 p_{m_1}(\varphi)$. Alors en posant $\hat{C} \coloneqq \max\{C, C_1\}$ et $\hat{m} \coloneqq \max\{m, m_1\}$, à $\varepsilon > 0$ fixé, pour tout k, on trouve :

$$\begin{aligned} \left|\langle \widetilde{u}, \varphi \rangle - \langle \bar{u}, \varphi \rangle\right| &= \left|\langle \widetilde{u}, \varphi \rangle - \langle u, \varphi_k \rangle - \langle \bar{u}, \varphi \rangle + \langle u, \varphi_k \rangle\right| = \left|\langle \widetilde{u}, \varphi - \varphi_k \rangle - \langle \bar{u}, \varphi - \varphi_k \rangle\right| \\ &\leq C p_m(\varphi - \varphi_k) + C_1 p_{m_1}(\varphi - \varphi_k) \leq 2\hat{C} p_{\hat{m}}(\varphi - \varphi_k) \end{aligned}$$

puisque $\varphi - \varphi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De plus, puisque $\varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \varphi$, on sait qu'il existe $K > 0$ tel que si $k > K$, alors :

$$2\hat{C}p_{\hat{m}}(\varphi - \varphi_k) < \varepsilon.$$

Dès lors :

$$\forall \varepsilon > 0 : \left|\langle \widetilde{u}, \varphi\rangle - \langle \bar{u}, \varphi\rangle\right| \leq \varepsilon,$$

i.e. $\langle \widetilde{u}, \varphi\rangle = \langle \bar{u}, \varphi\rangle$. □

Proposition 4.19. *Pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\widetilde{u}$ son prolongement, alors $\widetilde{\partial_j u} = \partial_j \widetilde{u}$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et soit $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \varphi$. Alors :

$$\left\langle \widetilde{\partial_j u}, \varphi \right\rangle = \lim_{k\to+\infty} \left\langle \partial_j u, \varphi_k \right\rangle = \lim_{k\to+\infty} \left\langle u, -\partial_j \varphi_k \right\rangle = \left\langle \widetilde{u}, -\partial_j \varphi \right\rangle = \left\langle \partial_j \widetilde{u}, \varphi \right\rangle$$

car $\partial_j \varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \partial_j \varphi$. □

Exemple 4.6. Pour $p \in [1, +\infty]$, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, et donc $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Montrons que la distribution associée :

$$u_f : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi \,\mathrm{d}x$$

est une distribution tempérée.

Soit $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$. Pour q conjugué à p :

$$\left|\left\langle u_f, \varphi_k \right\rangle\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi_k \,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f\varphi_k| \,\mathrm{d}x = \|f\varphi_k\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|\varphi_k\|_{L^q}$$

car $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \bigcap_{q\in[1,+\infty]} L^q(\mathbb{R}^n)$. Distinguons les deux cas :

- si $q = +\infty$, alors $\|\varphi_k\|_{L^\infty} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ puisque $\varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$,
- et si $q \in [1, +\infty)$, alors :

$$\|\varphi_k\|_{L^q}^q = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_k|^q \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left|(1 + |x|)^m \varphi_k\right|^q}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0} \underbrace{(1 + |x|)^{-mq}}_{\in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ si } mq > n} \,\mathrm{d}x.$$

  Donc pour $m > n/q$: $\|\varphi_k\|_{L^q} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

Dans tous les cas, $\left|\left\langle u_f, \varphi_k \right\rangle\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

Exemple 4.7. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice, $f : x \mapsto x^\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Montrons que $u_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Soit $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Par un raisonnement similaire :

$$\left|\left\langle u_f, \varphi_k \right\rangle\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(x^\alpha (1 + |x|)^{-N}\right) \left((1 + |x|)^N \varphi_k\right) \mathrm{d}x \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

pour $N > |\alpha| + n$.

Remarque. Par la Proposition 4.15 et par l'exemple précédent, on trouve que la distribution associée à un polynôme quelconque est tempérée.

Exemple 4.8. Soient δ_0 la mesure de Dirac en 0 et $u_\delta : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto \varphi(0)$, sa distribution associée. Montrons que u_δ est tempérée. Soit $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$.

$$\langle u_\delta, \varphi_k \rangle = \varphi_k(0) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) = \|\varphi_k\|_{L^\infty} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

car φ_k est continue.

Proposition 4.20. *Si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$: $\partial^\alpha u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $x^\alpha u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. La preuve repose sur le fait que si $\varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$, alors pour tout $\alpha \in N^n$: $\partial^\alpha \varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$ et $x^\alpha \varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$ par définition. Dès lors :

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi_k \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi_k \rangle \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

et :

$$\langle x^\alpha u, \varphi_k \rangle = \langle u, x^\alpha \varphi_k \rangle \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

□

4.4 Transformations de Fourier de distributions tempérées

Définition 4.21. Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On définit :

$$\mathcal{F}u : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto \langle \widetilde{u}, \widehat{\varphi} \rangle,$$

où $\widehat{\varphi}$ est la transformée de Fourier *classique* (au sens de la définition 1.1) et est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ car par la Proposition 1.7, on sait que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 4.22. *Pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. $\mathcal{F}u$ est bien une application linéaire par linéarité de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et par linéarité de $\widetilde{u}$.

De plus, pour $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$:

$$\left| \langle \widetilde{u}, \widehat{\varphi_k} \rangle \right| \leq C p_m(\widehat{\varphi_k}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

car $\widehat{\varphi_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \widehat{0} = 0$ par le Théorème 1.10. □

Proposition 4.23. *Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Alors $\mathcal{F}D_j u = x_j \mathcal{F}u$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors :

$$\left\langle \mathcal{F} D_j u, \varphi \right\rangle = \left\langle \widetilde{D_j u}, \widehat{\varphi} \right\rangle = \left\langle \widetilde{u}, -D_j \widehat{\varphi} \right\rangle = \left\langle \mathcal{F} u, x_j \varphi \right\rangle = \left\langle x_j \mathcal{F} u, \varphi \right\rangle$$

par la Propriété 4.19. □

Proposition 4.24. *pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$: $u_{\mathbb{F}f} = \mathcal{F} u_f$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour $(\psi_k)_k \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\psi_k \xrightarrow[k \to +\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \widehat{\varphi}$.

$$\left\langle \mathcal{F} u_f, \varphi \right\rangle = \left\langle \widetilde{u_f}, \widehat{\varphi} \right\rangle = \lim_{k \to +\infty} \left\langle u_f, \psi_k \right\rangle = \lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f \psi_k \, \mathrm{d}x.$$

Or :

$$\left| \int f \psi_k \, \mathrm{d}x - \int f \widehat{\varphi} \, \mathrm{d}x \right| \leq \int \left| f(\psi_k - \widehat{\varphi}) \right| \mathrm{d}x \leq \|f\|_{L^2} \|\psi_k - \widehat{\varphi}\|_{L^2} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

En effet, puisque $\psi_k \xrightarrow[k \to +\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \widehat{\varphi}$, pour $N > \frac{n}{2}$:

$$\begin{aligned} \|\psi_k - \widehat{\varphi}\|_{L^2}^2 &= \int |\psi_k - \widehat{\varphi}|^2 \, \mathrm{d}x = \int \Big((1 + |x|)^N |\psi_k - \widehat{\varphi}| \Big)^2 (1 + |x|)^{-2N} \, \mathrm{d}x \\ &\leq \int \left\| (1 + |x|)^N (\psi_k - \widehat{\varphi}) \right\|_{L^\infty}^2 (1 + |x|)^{-2N} \, \mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\left\| (1 + |x|)^N (\psi_k - \widehat{\varphi}) \right\|_{L^\infty}^2}_{\xrightarrow[k \to +\infty]{} 0} \underbrace{\int (1 + |x|)^{-2N} \, \mathrm{d}x}_{< +\infty} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Donc :

$$\left\langle \mathcal{F} u_f, \varphi \right\rangle = \int f \widehat{\varphi} \, \mathrm{d}x.$$

De même :

$$\left\langle u_{\mathbb{F}f}, \varphi \right\rangle = \int f \widehat{\varphi} \, \mathrm{d}x.$$

En effet, pour $(f_k)_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ t.q. $f_k \xrightarrow[k \to +\infty]{L^2(\mathbb{R}^n)} f$:

$$\int \mathbb{F} f_k \varphi \, \mathrm{d}x = \int \widehat{f_k} \varphi \, \mathrm{d}x = \int f_k \widehat{\varphi} \, \mathrm{d}x,$$

et par Hölder :

$$\left| \int f_k \widehat{\varphi} \, \mathrm{d}x - \int f \widehat{\varphi} \, \mathrm{d}x \right| \leq \int |f_k \widehat{\varphi} - f \widehat{\varphi}| \, \mathrm{d}x = \int |f_k - f| |\widehat{\varphi}| \, \mathrm{d}x \leq \|f_k - f\|_{L^2} \|\widehat{\varphi}\|_{L^2} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

De plus, puisque $\widehat{f_k} = \mathbb{F} f_k \xrightarrow[k \to +\infty]{L^2(\mathbb{R}^n)} \mathbb{F} f$:

$$\left| \int \mathbb{F} f_k \varphi \, \mathrm{d}x - \int \mathbb{F} f \varphi \, \mathrm{d}x \right| \leq \int |\mathbb{F} f_k - \mathbb{F} f| |\varphi| \, \mathrm{d}x \leq \|\mathbb{F} f_k - \mathbb{F} f\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

Dès lors, par unicité de la limite dans $L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\int \mathbb{F} f \varphi \,\mathrm{d}x = \int f \widehat{\varphi} \,\mathrm{d}x.$$

□

Définition 4.25. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on définit l'application :

$$\check{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : x \mapsto \varphi(-x).$$

Pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, On définit également :

$$\check{u} : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto \langle u, \check{\varphi} \rangle .$$

Remarque. $\check{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 4.26. *Si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, alors $\check{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. De plus, si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors $\check{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. Soient $K \subset\subset \mathbb{R}^n, (\varphi_k)_k \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.q. $K \supset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{supp} \varphi_k$. Alors on pose $\check{K} \coloneqq -K$ tel que $\check{K} \supset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{supp} \widecheck{\varphi_k}$. Alors, pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$\|\partial^\alpha \widecheck{\varphi_k}\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\check{K}} \partial^\alpha \widecheck{\varphi_k}(x) = \sup_{x\in K} \partial^\alpha \varphi_k(x) = \|\partial^\alpha \varphi_k\|_{L^\infty} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

De même, si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors pour $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$:

$$\langle u, \widecheck{\varphi_k} \rangle \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

puisque $\widecheck{\varphi_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0$ également. □

Lemme 4.27. *Soient $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors $\left\langle \widetilde{\mathcal{F}u}, \psi \right\rangle = \left\langle \widetilde{u}, \widehat{\psi} \right\rangle$*

Démonstration. Soit $(\psi_k)_k \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\psi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \psi$. Alors :

$$\left\langle \widetilde{\mathcal{F}u}, \psi \right\rangle = \lim_{k\to+\infty} \langle \mathcal{F}u, \psi_k \rangle = \lim_{k\to+\infty} \left\langle u, \widehat{\psi_k} \right\rangle = \left\langle u, \widehat{\psi} \right\rangle$$

car $\widehat{\psi_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \widehat{\psi}$. □

Proposition 4.28. *Pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:*

$$\mathcal{F}^2 u = \mathcal{F}\mathcal{F}u = (2\pi)^n \check{u}.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Par le Lemme 4.27 :

$$\left\langle \mathcal{F}^2 u, \varphi \right\rangle = \left\langle \widetilde{u}, \widehat{\widehat{\varphi}} \right\rangle.$$

Or par la formule d'inversion de Fourier :

$$\breve{\varphi}(x) = \varphi(-x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} \widehat{\varphi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{-n} \widehat{\widehat{\varphi}}(x).$$

Donc :

$$\left\langle \mathcal{F}^2 u, \varphi \right\rangle = (2\pi)^n \left\langle \widetilde{u}, \breve{\varphi} \right\rangle = (2\pi)^n \left\langle u, \breve{\varphi} \right\rangle$$

car $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\widetilde{u} = u$ sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. □

Corollaire 4.29. *$\mathcal{F}$ est une bijection de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration.

Injectivité $\mathcal{F}$ est linéaire, donc il est suffisant de montrer que $\operatorname{Ker}\mathcal{F} = \{0\}$. Soit $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\mathcal{F}u = 0$. Alors :

$$\breve{u} = \mathcal{F}^2 u = \mathcal{F}0 = 0,$$

et donc $u = 0$.

Surjectivité Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On pose $u := \mathcal{F}\left((2\pi)^{-n}\breve{f}\right)$. On a alors :

$$\mathcal{F}u = \mathcal{F}^2 (2\pi)^{-n}\breve{f} = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}^2\breve{f} = (2\pi)^{-n}(2\pi)^n \breve{\breve{f}} = f.$$

□

Exemple 4.9. Soit δ la mesure de Dirac en 0 sur $\mathbb{R}^n$. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle \mathcal{F}u_\delta, \varphi \rangle = \langle \widetilde{u_\delta}, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle u_{\mathbf{1}}, \varphi \rangle.$$

De plus :

$$\mathcal{F}u_{\mathbf{1}} = \mathcal{F}\mathcal{F}u_\delta = \mathcal{F}^2 u_\delta = (2\pi)^n \breve{u_\delta} = (2\pi)^n u_\delta$$

4.5 Convolution et distributions

Définition 4.30. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on définit la *convolution* de f et φ par :

$$(f * \varphi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Définition 4.31. Pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on définit l'application convolution par :

$$u * \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : x \mapsto \langle u, \varphi(x - \cdot) \rangle.$$

Exemple 4.10. Pour δ la mesure de Dirac en 0 sur $\mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : (\delta * \varphi)(x) = \varphi(x),$$

i.e. $\delta * \varphi = \varphi$.

Lemme 4.32. *Si $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors pour $x, y \in \mathbb{R}^n$:*

$$\left|\psi(x) - \psi(y) - \sum_{j=1}^n \partial_j \psi(y)(x_j - y_j)\right| \leq C|x-y|^2 .$$

Remarque. Ce lemme généralise le Lemme 4.16.

Théorème 4.33. *Soient $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors $u * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n : \partial^\alpha(u * \delta) = (\partial^\alpha u) * \varphi = u * (\partial^\alpha \varphi).$$

Démonstration. Montrons tout d'abord la continuité de $u*\varphi$. Soit $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ t.q. $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$ et posons $\varphi_k \coloneqq \varphi(x_k - \cdot)$.

$$(u * \varphi)(x_k) = \langle u, \varphi_k \rangle$$

De plus, comme la suite $(x_k)_k$ est convergente, elle est bornée, i.e. $\exists M > 0$ t.q. $\forall k \in \mathbb{N} : |x_k| \leq M$, et donc :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{supp} \varphi_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (x_k - \operatorname{supp} \varphi) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{x_k\} - \operatorname{supp} \varphi \subseteq \overline{B(0,M)} - \operatorname{supp} \varphi.$$

Donc $K \coloneqq \overline{B(0,M)} - \operatorname{supp} \varphi = \Big\{x - y \text{ t.q. } x \in \overline{B(0,M)}, y \in \operatorname{supp} \varphi\Big\}$ est un compact (car $\overline{B(0,M)}$ et $\operatorname{supp}\varphi$ sont compacts) qui contient le support de tous les φ_k.

De plus, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n : \partial^\alpha \varphi_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\text{CVU}} \partial^\alpha \varphi(x - \cdot)$. En effet, par le Lemme 4.16, pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$\big\|\partial^\alpha \varphi_k - \partial^\alpha \varphi(x - \cdot)\big\|_{L^\infty} = \sup_{y\in K} \big|\partial^\alpha \varphi(x_k - y) - \partial^\alpha \varphi(x-y)\big| \leq \sup_{y\in K} C|x_k - y - x + y| = C|x_k - x| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Dès lors, par définition des distributions :

$$\langle u, \varphi_k \rangle - \big\langle u, \varphi(x - \cdot)\big\rangle = \big\langle u, \varphi_k - \varphi(x-\cdot)\big\rangle \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

i.e.

$$(u*\varphi)(x_k) = \langle u, \varphi_k \rangle \xrightarrow[k\to+\infty]{} \big\langle u, \varphi(x-\cdot)\big\rangle = (u*\varphi)(x).$$

Montrons alors que $u * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Soient $(h_\ell)_\ell \subset \mathbb{R}$ t.q. $h_\ell \xrightarrow[\ell\to+\infty]{} 0$ et $k \in \{1, \dots, n\}$.

$$\frac{(u*\varphi)(x + h_\ell e_k) - (u*\varphi)(x)}{h_\ell} = \left\langle u, \underbrace{\frac{\varphi(x + h_\ell e_k - \cdot) - \varphi(x - \cdot)}{h_\ell}}_{=:\varphi_{k,h_\ell}} \right\rangle.$$

Par le Lemme 4.32 :

$$\begin{aligned}\big|\varphi(x + h_\ell e_k - y) - \varphi(x-y) - \partial_k \varphi(x-y) h_\ell\big| &= \left|\varphi(x + h_\ell e_k - y) - \varphi(x-y) - \sum_{j=1}^n \partial_j \varphi(h_\ell e_k)(h_\ell e_k)_j\right| \\ &\leq C|h_\ell e_k|^2 = Ch_\ell^2 \xrightarrow[\ell\to+\infty]{} 0,\end{aligned}$$

i.e. :

$$\left|\varphi_{k,h_\ell}(y) - \partial_k(x-y)\right| = \left|\frac{\varphi(x+h_\ell e_k - y) - \varphi(x-y)}{h_\ell} - \partial_k\varphi(x-y)\right| \leq \frac{Ch_\ell^2}{h_\ell} = Ch_\ell \xrightarrow[\ell\to+\infty]{} 0, \tag{4.1}$$

ou encore :

$$\varphi_{k,h_\ell} \xrightarrow[\ell\to+\infty]{\text{CVU}} \partial_k\varphi.$$

En effet, la convergence est uniforme puisque dans l'équation (4.1), $\left|\varphi_{k,h_\ell}(y) - \partial_k\varphi(x-y)\right|$ est borné (uniformément pour y) par Ch_ℓ. De même, par le même raisonnement que pour la continuité :

$$\left\|\partial^\alpha\varphi_{k,h_\ell} - \varphi(x-\cdot)\right\|_{L^\infty} \leq Ch_\ell \xrightarrow[\ell\to+\infty]{} 0.$$

Donc par définition des distributions, on a :

$$\left\langle u, \varphi_{k,h_\ell}\right\rangle \xrightarrow[\ell\to+\infty]{} \left\langle u, \partial_k\varphi(x-\cdot)\right\rangle.$$

Il reste à montrer que $\partial_k(u*\varphi) = (\partial_k u)*\varphi$, or cela suit directement de la définition de $\partial_k u$:

$$((\partial_k u)*\varphi)(x) = \langle\partial_k u, \varphi\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial}{\partial y_k}\varphi(x-y)\right\rangle = \left\langle u, \partial_k\varphi(x-y)\right\rangle = (u*\partial_k\varphi)(x).$$

On fonctionne ensuite par récurrence pour montrer que $u*\varphi$ est bien $\mathcal{C}^\infty$: exercice. $\square$

Définition 4.34. Pour $P(\partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha\partial^\alpha$, on dit que $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est une *solution élémentaire* de $P(\partial)$ lorsque $P(\partial)E = \delta$ où δ est la mesure de Dirac en 0.