Espaces fonctionnels et séries de Fourier — Notes de cours de Pr. P. Godin

Robin Petit

Année académique 2017-2018

Table des matières

Chapitre 1

Transformation de Fourier

1.1 Définitions

On considère $\mathbb{R}^n$ à n fixé en tant qu'espace de mesure $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \lambda)$ avec $\mathcal{M}$ la famille des ensembles Lebesgue-mesurables et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on définit sa *transformée de Fourier* par :

$$\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\,dx. \tag{1.1}$$

Cette fonction est bien définie car $x \mapsto e^{-i\langle x,\xi\rangle}$ est continue, et f est intégrable, donc $x \mapsto e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)$ est intégrable

Proposition 1.2. *Pour* $f \in L^1$, $\hat{f}$ *est continue.*

Démonstration. Soient $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ et $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \in {\mathbb{R}^n}^{\mathbb{N}}$ t.q. $h_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

$$\hat{f}(\xi_0 + h_k) = \int e^{-i\langle x,\xi_0\rangle} e^{-i\langle x,h_k\rangle} f(x)\,dx.$$

Puisque $\left|e^{-i\langle x,\xi_0\rangle} e^{-i\langle x,h_k\rangle} f(x)\right| = \left|f(x)\right|$ et $x \mapsto e^{-i\langle x,\xi_0\rangle} e^{-i\langle x,h_k\rangle} f(x)$ converge partout (en particulier presque partout), par le théorème de la convergence dominée :

$$\hat{f}(\xi_0 + h_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int e^{-i\langle x,\xi_0\rangle} f(x)\,dx = \hat{f}(\xi_0).$$

□

Proposition 1.3. *Pour* $f \in L^1$ *t.q.* $\forall j \in [\![1, n]\!] : x_j f \in L^1$ *:* $\hat{f} \in C^1$ *et :*

$$\forall j \in [\![1, n]\!] : \left.\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}\right|_{\xi} = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}(-ix_j) f(x)\,dx. \tag{1.2}$$

Démonstration. Soit $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ t.q. $h_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, et prenons $\{e_j\}_{j=1}^n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$$\frac{\hat{f}(\xi + h_k e_j) - \hat{f}(\xi)}{h_k} = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} \underbrace{\frac{e^{-ih_k x_j} - 1}{h_k}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} -ix_j} dx.$$

En module :
$$\left|e^{-i\langle x,\xi\rangle}\frac{e^{-ih_kx_j}-1}{h_k}f(x)\right| = \left|e^{-i\langle x,\xi\rangle}\right|\left|\frac{e^{-ih_kx_j}-1}{h_k}\right|\left|f(x)\right| \leqslant C\left|x_j\right|\left|f(x)\right|,$$
qui est intégrable par hypothèse.

En effet, si $x_j = 0$, alors tout est nul et l'inégalité devient une égalité ; et si $x_j \neq 0$, alors $\frac{\left|e^{-ih_kx_j}-1\right|}{|x_jh_k|}$ est borné.

Dès lors, par le théorème de convergence dominée, la limite passe sous l'intégrale et on a (1.2). □

Corollaire 1.4. *Pour* $m \in \mathbb{N}^*$, *si* $(1+|x|)^m f \in L^1$, *alors* $f \in C^m$ *et on peut dériver* m *fois sous le signe.*

Démonstration. Exercice (récurrence sur m). □

Définition 1.5. On définit l'ensemble de Schwartz :
$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \forall\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n : x^\alpha\partial^\beta u \text{ est borné dans } \mathbb{R}^n\right\}. \tag{1.3}$$

Proposition 1.6. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Démonstration. TODO □

Proposition 1.7. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \bigcap_{1\leqslant p<+\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Pour $u \in \mathcal{S}$ et $+\infty > p \geqslant 1$:
$$\int |u|^p\, dx = \int \Big(\underbrace{|u|\,(1+|x|)^N}_{\text{borné pour tout } N}\Big)^p (1+|x|)^{-Np}\, dx \leqslant \int (C_N)^p \underbrace{(1+|x|)^{-Np}}_{\text{intégrable pour } Np>n} dx.$$

Dès lors, pour N suffisamment grand ($Np > n$), on a $\int |u|\, dx \leqslant c^{ste}$ □

Proposition 1.8. *Pour* $u \in \mathcal{S}$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, *alors :* $x^\alpha\partial^\beta u \in \mathcal{S}$.

Démonstration. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{N}^n$. Par Leibniz :
$$\partial^\mu(fg) = \sum_{\sigma\leqslant\mu}\binom{\mu}{\sigma}\partial^\sigma f\partial^{\mu-\sigma}g.$$

Donc :
$$x^\lambda\partial^\mu(x^\alpha\partial^\beta u) = \sum_{\sigma\leqslant\mu}\binom{\mu}{\sigma}x^\lambda\partial^\sigma(x^\alpha)\partial^{\mu-\sigma}u,$$
où $x^\lambda\partial^\sigma(x^\alpha) \leqslant c^{ste}x^\gamma$. On en déduit que $x^\lambda\partial^\mu(x^\alpha\partial^\beta u)$ est une somme finie de termes bornés et est donc bornée. □

À défaut de définir une topologie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on définit uniquement une notion de convergence.

Définition 1.9. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^\mathbb{N}$, $u \in \mathcal{S}$, on dit que u_k converge vers u lorsque $k \to +\infty$ (noté $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}} u$) lorsque :
$$\forall\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n : \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha\partial^\beta(u-u_k)\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0. \tag{1.4}$$

Théorème 1.10. *Soit* $u \in \mathcal{S}$. *Alors :*

1. $\hat{u} \in \mathcal{S}$. *De plus si* $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}} u$, *alors* $\hat{u_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}} \hat{u}$.

2. $\widehat{D_j u}(\xi) = \xi_j \hat{u}(\xi)$ *(de plus $\widehat{x_j u} = D_j \hat{u}$).*

Démonstration. Pour le premier point, on calcule :

$$D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \int D_\xi^\alpha (e^{-i\langle x,\xi\rangle}) u(x)\, dx = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} (-x)^\alpha u(x)\, dx.$$

Donc :

$$\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \int \xi^\beta e^{-i\langle x,\xi\rangle} (-x)^\alpha u(x)\, dx = \int (-D_x)^\beta (e^{-i\langle x,\xi\rangle})(-x)^\alpha u(x)\, dx = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} D_x^\beta \left((-x)^\alpha u(x)\right) dx.$$

Pour montrer cette dernière égalité, intégrons par partie. D'abord observons pour $\phi \in \mathcal{S}$ et $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\int \partial_j \phi \, dx = \int \dots \int \left(\int \partial_j \phi \, dx_j \right) dx_1 \dots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \dots dx_n.$$

Or :

$$\int \partial_j \phi \, dx_j = \lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} \partial_j \phi(x)\, dx_j = \lim_{N\to+\infty} \left(\underbrace{\phi(x_1, \dots, x_{j-1}, N, x_{j+1}, \dots, x_n)}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0} - \underbrace{\phi(x_1, \dots, x_{j-1}, N, x_{j+1}, \dots, x_n)}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0} \right) = 0,$$

puisque $\phi \in \mathcal{S}$.
On en déduit donc que $\int \partial_j \phi \, dx = 0$.
Dès lors, puisque $e^{-i\langle x,\xi\rangle}(-x)^\alpha u(x) \in \mathcal{S}$ et par récurrence :

$$\int (-D_x)^\beta (e^{-i\langle x,\xi\rangle})(-x)^\alpha u(x)\, dx = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} D_x^\beta \left((-x)^\alpha u(x)\right) dx.$$

Montrons alors que $\forall N \in \mathbb{N} : \exists C_N \geqslant 0$ t.q. $\left| D_x^\beta ((-x)^\alpha u(x)) \right| \leqslant C_N (1 + |x|)^{-N}$. Par Leibniz :

$$(1 + |x|)^N \partial^\beta (x^\alpha u(x)) = (1 + |x|)^N \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial^\gamma x^\alpha \partial^{\beta-\gamma} u(x)$$

est borné car $u \in \mathcal{S}$. Dès lors :

$$\left| \xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x) \right| \leqslant C_N \int (1 + |x|)^{-N}\, dx.$$

Pour N suffisamment grand ($N > n$), on a $\left| \xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x) \right| \leqslant c^{\text{ste}}$.

Dès lors, on trouve :

$$\left| \xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(x) \right| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-N} \left| D_x^\beta ((-x)^\alpha (u - u_k)) \right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit donc $\hat{u_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{S}} \hat{u}$.

Pour le second point, la seconde formule découle directement du premier pour $\alpha = e_j$:

$$D_j \hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} (-x_j) u(x)\, dx = \widehat{x_j u}(\xi).$$

La première égalité se démontre par :

$$\widehat{D_j u}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} D_j u(x)\,dx = -\int D_{x,j}\left(e^{-i\langle x,\xi\rangle}\right) u(x)\,dx = \xi_j \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x)\,dx = \xi_j \hat{u}(\xi).$$

□

1.2 Formule d'inversion

Théorème 1.11. *Soit* $u \in \mathcal{S}$. *Alors :*

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{u}(\xi)\,d\xi. \tag{1.5}$$

La fonction $(y,\xi) \mapsto e^{i\langle x,\xi\rangle} e^{-i\langle y,\xi\rangle} u(y)$ n'est pas intégrable pour (y,ξ). On ne va donc pas pouvoir appliquer Fubini.

Démonstration. Pour $\chi \in \mathcal{S}$, $(y,\xi) \mapsto e^{-i\langle y,\xi\rangle} e^{i\langle x,\xi\rangle} \chi(\xi) u(y)$ est intégrable. Donc par Fubini :

$$\int e^{i\langle x,\xi\rangle} \chi(\xi) \hat{u}(\xi)\,d\xi = \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \chi(\xi) \int e^{-i\langle y,\xi\rangle} u(y)\,dy\,d\xi = \int u(y) \int e^{-i\langle y-x,\xi\rangle} \chi(\xi)\,d\xi\,dy = \int u(y) \hat{\chi}(y-x)\,dy.$$

Pour $\psi \in \mathcal{S}$, $\delta > 0$ tels que $\chi(\xi) = \psi(\delta\xi)$:

$$\hat{\chi}(\xi) = \int e^{-i\langle y,\xi\rangle} \psi(\delta\xi)\,d\xi = \delta^{-n} \hat{\psi}(\xi/\delta).$$

Alors :

$$\int e^{i\langle x,\xi\rangle} \psi(\delta\xi) \hat{u}(\xi)\,d\xi = \int u(x+y) \delta^{-n} \psi(y/\delta)\,dy = \int u(x+\delta y) \hat{\psi}(y)\,dy.$$

Par le théorème de convergence dominée :

$$\int u(x+\delta y) \hat{\psi}(y)\,dy \xrightarrow[\delta \to +\infty]{} u(x) \int \hat{\psi}(y)\,dy,$$

or :

$$\int e^{i\langle x,\xi\rangle} \psi(\delta\xi) \hat{u}(\xi)\,d\xi \xrightarrow[\delta \to +\infty]{} \psi(0) \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{u}(\xi)\,d\xi.$$

Par unicité de la limite, si $\int \hat{\psi}\,dy \neq 0$:

$$u(x) = \frac{\psi(0)}{\int \hat{\psi}(y)\,dy} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{u}(\xi)\,d\xi$$

Dans le cas $n = 1$, on prend $\psi_1 : x \mapsto e^{-x^2/2}$. En intégrant $z \mapsto e^{-z^2/2}$ sur un chemin rectangulaire $[a,b,c,d] \subset \mathbb{C}$, on trouve :

$$\int_a^b e^{-x^2/2}\,dx + \int_b^c e^{-z^2/2}\,dz + \int_c^d e^{-z^2/2}\,dz + \int_d^a e^{-z^2/2}\,dz = 0$$

par Cauchy. Pour $(a,b) \to (-\infty,+\infty)$, on trouve que $\int_b^c e^{-z^2/2}$ et $\int_d^a e^{-z^2/2}$ tendent vers 0. Donc à la limite :

$$\int_a^b e^{-x^2/2}\,dx = \int_{\Im z = t} e^{-z^2/2}\,dz = \int e^{(x^2-t^2)/2} e^{-itx}\,dx.$$

Donc $\hat{\psi}(t) = \psi(t)\int \psi\,dx$. On en déduit :

$$\int \hat{\psi}(t)\,dt = \left(\int \psi(x)\,dx\right)^2 = \left(\int e^{-x^2/2}\right)^2 = 2\pi.$$

Dès lors $\psi(0) = 1$ et $\int \hat{\psi}\,dx = 2\pi$, qui donne bien la formule.

Dans le cas général $n > 1$, on prend $\psi(x) = e^{-|x|^2/2} = \prod_{j=1}^n \psi_1(x_j)$. Donc :

$$\hat{\psi}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\psi(x)\,dx = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2}\,dx = \int \prod_{j=1}^n e^{-ix_j\xi_j}\prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2}\,dx = \int \prod_{j=1}^n \left(e^{-ix_j\xi_j}e^{-x_k^2/2}\right)dx.$$

Par Fubini :

$$\hat{\psi}(\xi) = \prod_{j=1}^n \int e^{-ix_j\xi_j}e^{-x_j^2/2}\,dx = \prod_{j=1}^n \hat{\psi}_1(\xi_j).$$

On trouve alors :

$$\int \hat{\psi}(\xi)\,d\xi = \int \prod_{j=1}^n \hat{\psi}_j(\xi_j)\,d\xi = \prod_{j=1}^n \int \hat{\psi}_1(\xi_j)\,d\xi_j = (2\pi)^{-n},$$

où l'avant dernière égalité s'obtient en appliquant Fubini.

Puisque $\hat{\psi}(0) = 1$, on a bien (1.5). □

On définit une application *transformée de Fourier* $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S} : u \mapsto \mathcal{F}u := \hat{u}$.
Proposition 1.12. *$\mathcal{F}$ est une bijection linéaire.*

Démonstration. Par la formule d'inversion, $\mathcal{F}$ est injective : si $\mathcal{F}u = 0$, alors $u = 0$.

De plus, $\mathcal{F}$ est surjective. Pour $f \in \mathcal{S}$, montrons qu'il existe $u \in \mathcal{S}$ t.q. $\mathcal{F}u = f$. Prenons $u(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle} f(\xi)\,d\xi$.
Alors :

$$\mathcal{F}f(x) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(\xi)\,d\xi = (2\pi)^n u(-x).$$

De plus :

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\hat{u}(x)\,dx = (2\pi)^n(2\pi)^{-n}\int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\hat{u}(x)\,dx = (2\pi)^n u(-\xi),$$

donc $\hat{f} = \hat{\hat{u}}$ pour tout x, et puisque $\mathcal{F}$ est injective, $f = \hat{u}$. Donc $\mathcal{F}$ est surjective, et donc surjective.

La linéarité est triviale :

$$\mathcal{F}(f+\lambda g)(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}(f+\lambda g)(x)\,dx = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\,dx = \lambda\int e^{-i\langle x,\xi\rangle} g(x)\,dx = \left(\hat{f}+\lambda\hat{g}\right)(\xi).$$

□