Mini-projet Groupe 1 – Optimisation

MINES ParisTech
http://campus.mines-paristech.fr 2020-2021

Ce mini-projet, à effectuer en binôme au sein du même groupe de PC, fera l'objet d'un rapport incluant notamment équations et graphiques obtenus par des simulations sous Python. La forme de ce rapport est laissée libre (pdf, notebook, version papier...). Plusieurs rendus intermédiaires sont attendus auprès de votre chargé de PC.

Harry Markowitz et les quarante portefeuilles

L'optimisation de portefeuille a pour objectif de définir un choix "optimal" d'investissement d'un capital dans un ensemble de n actifs. Pour ce faire, on note x_i l'investissement dans le i-ème actif, de sorte que le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ décrit l'allocation globale du portefeuille à travers l'ensemble des actifs. Ceci génère un rendement r pour l'ensemble du portefeuille, incertain, dont on cherche à minimiser le risque.
On considère le vecteur $p \in \mathbb{R}^m$ de variation du prix des actifs sur le long terme, supposé gaussien, de moyenne $\bar{p}$ et de matrice de covariance Σ, semi-définie positive. Pour tenir compte du budget à investir, on a

$$1^\top x = 1 \tag{1}$$

où $1^\top$ désigne le vecteur ligne $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$. Par ailleurs, pour un rendement r donné, on sait que

$$\bar{p}^\top x = r \tag{2}$$

et que le risque associé à un investissement x peut s'exprimer comme sa variance

$$x^\top \Sigma x. \tag{3}$$

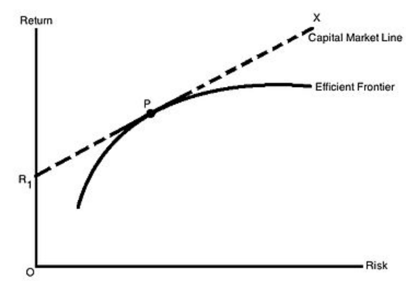

Fig.1 : Frontière efficiente et allocation optimale de capital.

Il est demandé de regrouper autant que possible les courbes sur une même figure tout en préservant la lisibilité et sans oublier les légendes. Toute affirmation doit être justifiée.

1 Etude de l'expression d'origine par Markowitz

1. Interprétez en termes financiers le problème décrit ci-dessus. Commentez en particulier la signification de l'équation (1).
2. Formulez le problème d'optimisation sous la forme

$$\min_{c_{eq}(z)=0} f(z) \tag{4}$$

On précisera les variables de décision z, leur nombre n, les contraintes c_{eq} ainsi que la fonction objectif f à minimiser.

3. On considère également la possibilité de limiter les positions courtes/*short*, pour ne pas trop s'exposer. Ceci se traduit par la contrainte supplémentaire

$$1^\top \max(-x, 0) \leq s_M \tag{5}$$

où 0 désigne le vecteur $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$, le max s'entend composante par composante, cad $(\max(-x, 0))_i = \max(-x_i, 0)$, et $s_M \in \mathbb{R}$ est une constante. Interprétez la signification de cette contrainte. Quelle difficulté pose-t-elle dans le cadre d'un algorithme d'optimisation ?

4. Justifier que (5) peut être reformulée en introduisant $s \in \mathbb{R}^m$ comme suit

$$s \geq -x\,, \quad s \geq 0\,, \quad 1^\top s \leq s_M \tag{6}$$

et modifier la formulation du problème de la question 2 en conséquence.

2 Etude numérique du problème de Markowitz

On s'intéresse dans un premier temps au problème (4), correspondant à la formulation d'origine de la théorie du portefeuille due à Harry Markowitz.

5. De quel type de problème d'optimisation s'agit-il ? Quels algorithmes pouvez-vous utiliser dans ce cas ?
6. Résolvez numériquement le problème pour les valeurs numériques suivantes : $\bar{p}_1 = 5\%$, $\bar{p}_2 = 15\%$, $\bar{p}_3 = 30\%$, $\sigma_1 = 10\%$, $\sigma_2 = 30\%$, $\sigma_3 = 80\%$, $\rho = 0.1$, $r = 0.1$ et :

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 & 0 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$$

7. Réitérez cette résolution pour $\rho = 0.5$ puis $\rho = -0.5$. Pour ces deux valeurs de ρ et la précédente, représentez pour $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$ et $x_3 = 0$, sous la contrainte $1^\top x = 1$, les valeurs $(\sqrt{x^\top \Sigma x}, \bar{p}^\top x)$ dans un plan 2D avec un maillage assez fin. Représentez sur le même diagramme en changeant de couleurs/formes ces valeurs pour $x_1 \in [-2, 0]$, puis pour $x_2 \in [-2, 0]$. Comment interpréter ρ et son effet ? Comparez avec vos résultats d'optimisation.
8. Réitérez cette résolution pour $r = 0.2$, puis $r = 0.15$ (pour la valeur $\rho = 0.1$). Comment la solution pour $r = 0.15$ se compare-t-elle à celles obtenues pour $r = 0.1$ et $r = 0.2$? Justifier le principe suivant : investir dans deux fonds optimaux suffit à les exprimer tous (Two-fund theorem). (*Bonus : le démontrer en résolvant explicitement le problème* (4)). Que se passerait-il si $\sigma_3 = 0$?
9. Résolvez numériquement le problème formulé en question 4, pour $r = 0.4$, $s_M = 0.5$ et les valeurs ci-dessus. Observez l'effet de la limitation des positions courtes par rapport au problème précédent.

3 Expression comme un problème bi-objectif : Bonus time in finance [1]

On cherche maintenant à minimiser le critère suivant

$$-\bar{p}^\top x + \mu x^\top \Sigma x \tag{7}$$

pour une constante $\mu > 0$, sous la contrainte (1).

1. *"This is the season in which many investment banks hand out their bonus letters, each having waited to see what the others were doing. It is also the season in which the investment banking industry sees some of its most childish and least dignified behaviour."* **The more dignified way to react as a banker at bonus time**, Daniel Davies, FT 27/02/15

10. Interprétez le signe de $-\bar{p}^\top x$ et discutez du cas $\mu = 0$. Si les x_i sont aussi contraints à être tous positifs, quelles sont selon vous les solutions pour $\mu = 0$ et $\mu \to +\infty$ et à quel type de comportement d'investisseur cela correspondrait-il ? Vérifiez ces comportements numériquement en simulation, pour les valeurs de la question 6.

11. Expliquez pourquoi il existe r tel que ce problème a la même solution que (4). (*Bonus : le démontrer.*)

12. En pratique on ne peut qu'estimer Σ, et on dispose d'un certain nombre de valeurs potentielles $\hat{\Sigma}_k$ ($k \in [\![1, l]\!]$). En lieu et place de (7), on cherche alors à minimiser le critère

$$-\bar{p}^\top x + \mu \max_{k \in [\![1,l]\!]} x^\top \hat{\Sigma}_k x \tag{8}$$

    (a) Proposez une méthodologie de résolution adaptée à ce problème.

    (b) Implémentez cette méthode pour $l = 6$, les mêmes valeurs numériques que précédemment et 6 valeurs de Σ correspondant à $\rho = -0.5, -0.1, 0, 0.1, 0.2$ et 0.5. Représentez la courbe 2D correspondante quand $\mu \in [0, 100]$ et comparez les résultats obtenus et l'impact de l'incertitude sur Σ. Faites de même pour $\rho = 0.1$ et $\sigma_1 = [0.05,\ 0.08,\ 0.11,\ 0.14,\ 0.17,\ 0.20]$, puis pour $\rho = 0.1$ et $\sigma_3 = [0.5,\ 0.6,\ 0.7,\ 0.8,\ 0.9,\ 1]$.

    (c) *Bonus : résolvez le problème* (4) *avec objectif* (7) *explicitement et représentez sur un même graphe 2D les frontières estimées pour* $\mu \in [0, 100]$ *(correspondant à* $(\sqrt{x^\top \hat{\Sigma}_k x}, \bar{p}^\top x)$ *pour le portefeuille optimal* $x = \hat{x}^*_{k,\mu}$ *de votre estimation), réalisées (en appliquant* $x = \hat{x}^*_{k,\mu}$ *à* $(\sqrt{x^\top \Sigma x}, \bar{p}^\top x)$*) et efficiente (la valeur pour* $(\sqrt{x^\top \Sigma x}, \bar{p}^\top x)$ *pour* $x = x^*_\mu$ *l'optimum de* (4) *muni de* (7)*)*

    (d) *Bonus : Estimez par la méthode de votre choix la moyenne et la variance d'une série aléatoire de loi normale multivariée* $(\bar{p}, \Sigma)$ *à partir de 25, 50 et 100 échantillons. Répétez deux fois chaque expérience pour obtenir six paires d'estimations* $(\hat{p}_k, \hat{\Sigma}_k)_{k \in [\![1,6]\!]}$*, reprenez avec ces valeurs la question précédente.*