Analyse de sensibilité - Optimisation linéaire

Robinson Beaucour

Octobre 2022

1 Problème à résoudre

On cherche à minimiser le coût de production d'électricité sur une journée. Les données du problèmes sont ci-dessous.

Nom	**Description**	**Type de variable**
t	heure de la journée	indice
$X \in \{A, B, C\}$	type de centrale	indice
$n^{(X)}$	nombre de centrales de type X	constante
$C_{MWh}^{(X)}$	Coût de production d'un MWh par une centrale de type X	constante
$P_{max}^{(X)}$	La puissance maximale d'une centrale de type X	constante
$P_t^{(X)}$	La puissance totale des centrales de type X à l'heure t	variable de décision

Récapitulatif des variables du problème

Type	N	P_{max} **(MW)**	C_{MWh}
A	*12*	*2000*	*1.50*
B	*10*	*1750*	*1.38*
C	*5*	*4000*	*2.75*

Données des centrales du parc

Heure	*0-5*	*6-8*	*9-14*	*15-17*	*18-23*
Consommation(GW)	*15*	*30*	*25*	*40*	*27*

Données de consommation

On a le problème $\mathcal{P}$ d'optimisation linéaire suivant:

$$\underset{\forall t, \forall X, P_t^{(X)} \geq 0}{\text{minimize}} \sum_{t=0}^{23} \sum_{X \in \{A,B,C\}} P_t^{(X)}.C_{MWh}^{(X)}$$

$$\text{subject to} \left\{ \begin{array}{ll} \forall t \in [\![0, 23]\!], \forall X \in \{A, B, C\}, & P_t^{(X)} \leq n^{(X)} P_{max}^{(X)} \\ \forall t \in [\![0, 23]\!], & \displaystyle\sum_{X \in \{A,B,C\}} P_t^{(X)} \geq d_t \end{array} \right.$$

On note $\mathcal{P}_{standard}$ un forme standard du problème $\mathcal{P}$ définit par:

$$\underset{P_t^{(X)} \geq 0, S_t^{(X)} \geq 0, S_t^{(d)} \geq 0}{\text{minimize}} \sum_{t=0}^{23} \sum_{X \in \{A,B,C\}} P_t^{(X)}.C_{MWh}^{(X)}$$

$$\text{subject to} \left\{ \begin{array}{ll} \forall t \in [\![0, 23]\!], \forall X \in \{A, B, C\}, & P_t^{(X)} + S_t^{(X)} = n^{(X)} P_{max}^{(X)} \\ \forall t \in [\![0, 23]\!], & \displaystyle\sum_{X \in \{A,B,C\}} P_t^{(X)} - S_t^{(d)} = d_t \end{array} \right.$$

On pose $X \in \mathbb{R}^{24 \cdot 7}$, la matrice de blocs de taille 7×1.
On pose $C \in \mathbb{R}^{24 \cdot 7}$, la matrice de blocs de taille 7×1.

On pose $B \in \mathbb{R}^{24 \cdot 4}$, la matrice de blocs de taille 4×1.
Dont les blocs sont définis par :

$$X_t = \begin{pmatrix} P_t^{(A)} \\ P_t^{(B)} \\ P_t^{(C)} \\ S_t^{(A)} \\ S_t^{(B)} \\ S_t^{(C)} \\ S_t^{(d)} \end{pmatrix}, C_t = \begin{pmatrix} C_{MWh}^{(A)} \\ C_{MWh}^{(B)} \\ C_{MWh}^{(C)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B_t = \begin{pmatrix} P_{max}^{(A)} n^{(A)} \\ P_{max}^{(B)} n^{(B)} \\ P_{max}^{(C)} n^{(C)} \\ d_t \end{pmatrix},$$

Enfin on pose $A \in \mathbb{R}^{24 \cdot 4 \times 24 \cdot 7}$, la matrice bloc de taille 4×7 :

$$A_{t,t'} = 0 \text{ si } t \neq t'$$

$$A_{t,t'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ si } t = t'$$

La matrice A est diagonale par bloc. $\mathcal{P}_{standard}$ peut maintenant s'écrire :

$$\underset{X \geq 0}{minimize}\ X \cdot C^\top$$

$$subject\ to\ A \cdot X = B$$

2 Base optimale

Rappel de cours

> Soit $\mathcal{P}$ et sa forme standard $\mathcal{P}_{standard}$: $min\{cx | Ax = B, x \geq 0\}$.
> β est une base optimale si et seulement si :
>
> $$\begin{array}{rcl} x_\beta & = & A_\beta^{-1} b \geq 0, x_{\neg\beta} = 0 \\ u & = & c_\beta^\top \\ \overline{c}^\top & = & c^\top - u^\top A \geq 0 \end{array}$$

On note $\beta_t = (t+1, t+3, t+4, t+5)$ si $t \in [\![0, 5]\!]$, $\beta_t = (t, t+1, t+3, t+5)$ sinon. Nous allons montrer que $\beta = \bigcup_{t \in [\![0,23]\!]} \beta_t$ est une base optimale de $\mathcal{P}_{standard}$.
On peut deviner la base grâce aux équivalences suivantes :

t appartient à la base	$\Leftrightarrow P_t^{(A)}$ est non nul*	$\equiv$ Les centrales A produisent à t
$t+1$ appartient à la base	$\Leftrightarrow P_t^{(B)}$ est non nul*	$\equiv$ Les centrales B produisent à t
$t+2$ appartient à la base	$\Leftrightarrow P_t^{(C)}$ est non nul*	$\equiv$ Les centrales C produisent à t
$t+3$ appartient à la base	$\Leftrightarrow S_t^{(A)}$ est non nul*	$\equiv$ Les centrales A ne produisent pas au max possible à t
$t+4$ appartient à la base	$\Leftrightarrow S_t^{(B)}$ est non nul*	$\equiv$ Les centrales B ne produisent pas au max possible à t
$t+5$ appartient à la base	$\Leftrightarrow S_t^{(C)}$ est non nul*	$\equiv$ Les centrales C ne produisent pas au max possible à t
$t+6$ appartient à la base	$\Leftrightarrow S_t^{(d)}$ est non nul*	$\equiv$ Les centrales produisent plus que la demande à t

* Sauf si la solution est dégénérée.

On peut raisonner séparément pour chaque t car la matrice A est diagonale par bloc.
Pout $t \in [\![0, 5]\!]$,

$$A_{t|\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{t|\beta}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule :

$$X_{t|\beta} = \begin{pmatrix} d_t \\ n^{(A)}P_{max}^{(A)} \\ n^{(B)}P_{max}^{(B)} - d_t \\ n^{(C)}P_{max}^{(C)} \end{pmatrix} \geq 0, U_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{MWh}^{(B)} \end{pmatrix}, \overline{C}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ C_{MWh}^{(A)} - C_{MWh}^{(B)} \\ C_{MWh}^{(C)} - C_{MWh}^{(B)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{MWh}^{(B)} \end{pmatrix} \geq 0$$

Pout $t \in [\![5, 23]\!]$,

$$A_{t|\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{t|\beta}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule :

$$X_{t|\beta} = \begin{pmatrix} d_t - n^{(B)}P_{max}^{(B)} \\ n^{(B)}P_{max}^{(B)} \\ n^{(A)}P_{max}^{(A)} + n^{(B)}P_{max}^{(B)} - d_t \\ n^{(C)}P_{max}^{(C)} \end{pmatrix} \geq 0, U_t = \begin{pmatrix} 0 \\ C_{MWh}^{(B)} - C_{MWh}^{(A)} \\ 0 \\ C_{MWh}^{(A)} \end{pmatrix}, \overline{C}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{MWh}^{(C)} - C_{MWh}^{(A)} \\ 0 \\ 0 \\ C_{MWh}^{(A)} - C_{MWh}^{(B)} \\ C_{MWh}^{(A)} \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\boxed{\text{On a vérifié que } X_\beta \geq 0, \overline{C} \geq 0. \ \beta \text{ est une base optimale.}}$$

3 Analyse de sensibilité

3.1 Dégénérescence

Pour tout $t \in [\![0, 23]\!]$, $X_{t|\beta} > 0$. La base est donc non-dégénérée. Pour que la base soit dégénérée il suffit que une des coordonnées de X_β soit nulle :
Pour $t \in [\![0, 5]\!]$

$$\begin{aligned} d_t &= 0 \quad ou \\ n^{(A)}P_{max}^{(A)} &= 0 \quad ou \\ n^{(B)}P_{max}^{(B)} &= d_t \quad ou \\ n^{(C)}P_{max}^{(C)} &= 0 \end{aligned}$$

Pour $t \in [\![6, 23]\!]$

$$\begin{aligned} d_t &= n^{(B)}P_{max}^{(B)} \quad ou \\ n^{(A)}P_{max}^{(A)} &= 0 \quad ou \\ n^{(B)}P_{max}^{(B)} + n^{(A)}P_{max}^{(A)} &= d_t \quad ou \\ n^{(C)}P_{max}^{(C)} &= 0 \end{aligned}$$

On peut donc par exemple mettre d_t ou $n^{(C)}$ à 0. Mais aussi mettre $d_t = n^{(B)}P_{max}^{(B)}$.

3.2 Augmentation consommation

On suppose que la consommation augmente de $\delta_t \geq 0$. β reste optimale si $A_\beta^{-1}(b + \delta) \geq 0$, c'est à dire:

$$\forall t \in [\![0, 5]\!], d_t + \delta_t \leq n^{(B)}P_{max}^{(B)}$$

$$\forall t \in [\![5, 23]\!], d_t + \delta_t \leq n^{(B)}P_{max}^{(B)} + n^{(A)}P_{max}^{(A)}$$

Si ces conditions sont respectées on a le tableau de résultats suivant:

Période	Surcoût 1 MW par heure	Surcoût max par heure
0-5	1.38	12420
6-8	1.5	17500
9-14	1.5	24750
15-17	1.5	2250
18-23	1.5	14500

3.3 Augmentation centrale B

Rien ne change sur la **période 1** si on ajoute une centrale $B.P_t^{(B)}$ reste égal à d_t
Rappel :

$$X_{t|\beta} = \begin{pmatrix} d_t \\ n^{(A)}P_{max}^{(A)} \\ n^{(B)}P_{max}^{(B)} - d_t \\ n^{(C)}P_{max}^{(C)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 17.5 \\ 24 - 15 \\ 20 \end{pmatrix} \geq 0$$

Sur la **période 2**, le coût diminue par une augmentation de $P_t^{(B)}$ et une diminution de $P_t^{(A)}$. Après avoir vérifié que :

$$X_{t|\beta} = \begin{pmatrix} d_t - (n^{(B)}+1)P_{max}^{(B)} \\ n^{(B)}P_{max}^{(B)} \\ n^{(A)}P_{max}^{(A)} + (n^{(B)}+1)P_{max}^{(B)} - d_t \\ n^{(C)}P_{max}^{(C)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 - 24 \\ 24 \\ 24 + 17.5 - 30 \\ 20 \end{pmatrix} \geq 0$$

On constate que $P_t^{(A)}$ passe de $d_t - n^{(B)}P_{max}^{(B)}$ à $d_t - (n^{(B)}+1)P_{max}^{(B)}$. et que $P_t^{(B)}$ passe de $n^{(B)}P_{max}^{(B)}$ à $(n^{(B)}+1)P_{max}^{(B)}$.
Le coût varie de $P_{max}^{(B)} \cdot (C_{MWh}^{(B)} - C_{MWh}^{(A)})$ soit 240 d'économies par heure.

3.4 Diminution Centrale B

Rien ne change sur la **période 1** si on retire une centrale $B.P_t^{(B)}$ reste égal à d_t car :

$$X_{t|\beta} = \begin{pmatrix} d_t \\ n^{(A)}P_{max}^{(A)} \\ (n^{(B)}-1)P_{max}^{(B)} - d_t \\ n^{(C)}P_{max}^{(C)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 17.5 \\ 24 - 2 - 15 \\ 20 \end{pmatrix} \geq 0$$

Sur la **période 2**, le coût diminue par une diminution de $P_t^{(B)}$ et une augmentation de $P_t^{(A)}$. Après avoir vérifié que :

$$X_{t|\beta} = \begin{pmatrix} d_t - (n^{(B)}-1)P_{max}^{(B)} \\ n^{(B)}P_{max}^{(B)} \\ n^{(A)}P_{max}^{(A)} + (n^{(B)}-1)P_{max}^{(B)} - d_t \\ n^{(C)}P_{max}^{(C)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 - 24 - 2 \\ 24 \\ 17.5 + 24 - 30 \\ 20 \end{pmatrix} \geq 0$$

En revanche, sur la **période 3**, la perte de la centrale B rend la base β non optimale car on a:

$$n^{(A)}P_{max}^{(A)} + (n^{(B)}-1)P_{max}^{(B)} - d_t = 39.5 - 40 < 0$$

3.5 Diminution coût centrale C

Si le coût du MWh des centrales C diminue de 1, la base reste optimale si le coût réduit $\overline{C}$ reste positif. Vérifions :

$$\forall t \in [\![0,5]\!], \overline{C}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ C^{(A)}_{MWh} - C^{(B)}_{MWh} \\ C^{(C)}_{MWh} - 1 - C^{(B)}_{MWh} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C^{(B)}_{MWh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.50 - 1.38 \\ 2.75 - 1.38 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.38 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\forall t \in [\![6,23]\!], \overline{C}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C^{(C)}_{MWh} - 1 - C^{(A)}_{MWh} \\ 0 \\ 0 \\ C^{(A)}_{MWh} - C^{(B)}_{MWh} \\ C^{(A)}_{MWh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.75 - 1 - 1.50 \\ 0 \\ 0 \\ 1.50 - 1.38 \\ 1.50 \end{pmatrix} \geq 0$$

D'après la description de $\overline{C}$, Si $C^{(B)}_{MWh}$ diminue alors $\overline{C}$ reste positif. Ce qui prouve que la base reste optimale.