



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE LA ZONA METROPOLITANA DE GUADALAJARA

Explicación de la Convención Denavit-Hartenberg

Eduardo Robles Vázquez

Universidad Politécnica de la Zona Metropolitana de Guadalajara

Profesor: Carlos Enrique Morán Garabito

24 de septiembre del 2019

Índice general

1	Introducción	3
2	Asignación de Sistemas de Referencia	4
2.1.	Z_i y $Z_{(i-1)}$ no son paralelos	5
2.2.	Z_i y $Z_{(i-1)}$ son paralelos	5
3	Transformación de Coordenadas	7
4	Consideraciones Finales	8
	Bibliografía	9

Introducción

Se trata de un procedimiento sistemático para describir la estructura cinemática de una cadena articulada constituida por articulaciones con un solo grado de libertad. Para ello, a cada articulación se le asigna un Sistema de Referencia Local con origen en un punto Q_i y ejes ortonormales X_i, Y_i, Z_i , comenzando con un primer sistema de referencia fijo e inmóvil dado por los ejes X_0, Y_0, Z_0 , anclado a un punto fijo Q_0 de la base sobre la que está montada toda la estructura de la cadena. Este sistema de referencia no tiene por qué ser el universal con el origen en $(0, 0, 0)$ y la base canónica.

Asignación de Sistemas de Referencia

Las articulaciones se numeran desde 1 hasta n . A la articulación i -ésima se le asocia su propio eje de rotación como Eje Z_{i-1} , de forma que el eje de giro de la 1ª articulación es Z_0 y el de la n -ésima articulación, Z_{n-1} . En la figura 2.1 se muestra la estructura del Robot PUMA junto con sus articulaciones y ejes de rotación.

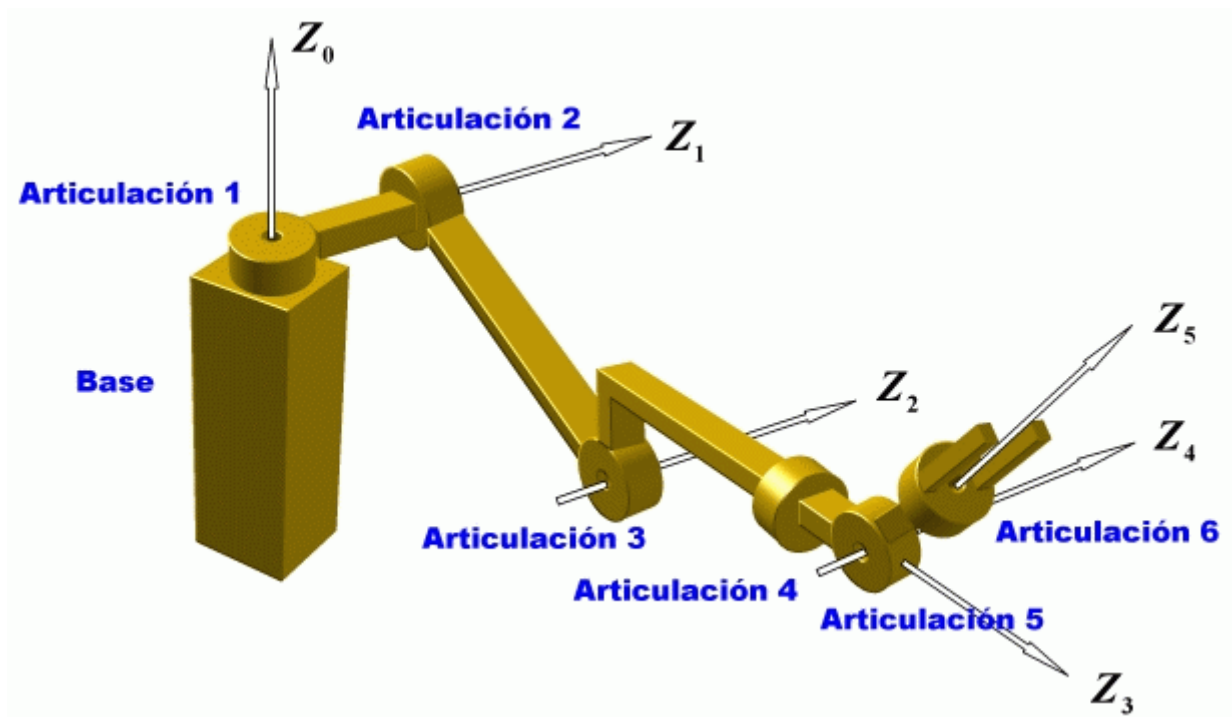


Figura 2.1: Robot Puma

Para la articulación i -ésima, la elección del origen de coordenadas Q_i y del Eje X_i sigue reglas muy precisas en función de la geometría de los brazos articulados, el Eje Y_i por su parte, se escoge para que el sistema X_i, Y_i, Z_i sea dextrógiro. La especificación de cada Eje X_i depende de la relación espacial entre Z_i y Z_{i-1} , distinguiéndose 2 casos:

2.1. Z_i y Z_{i-1} no son paralelos

Entonces existe una única recta perpendicular a ambos, cuya intersección con los ejes proporciona su mínima distancia. Esta distancia, a_i , medida desde el eje Z_{i-1} hacia el eje Z_i , es uno de los parámetros asociados a la articulación i -ésima. La distancia d_i desde Q_{i-1} a la intersección de la perpendicular común entre Z_{i-1} y Z_i con Z_{i-1} es el segundo de los parámetros. En este caso, el eje X_i es esta recta, siendo el sentido positivo el que va desde el eje Z_{i-1} al Z_i si a_i es menor que 0. El origen de coordenadas Q_i es la intersección de dicha recta con el eje Z_i .

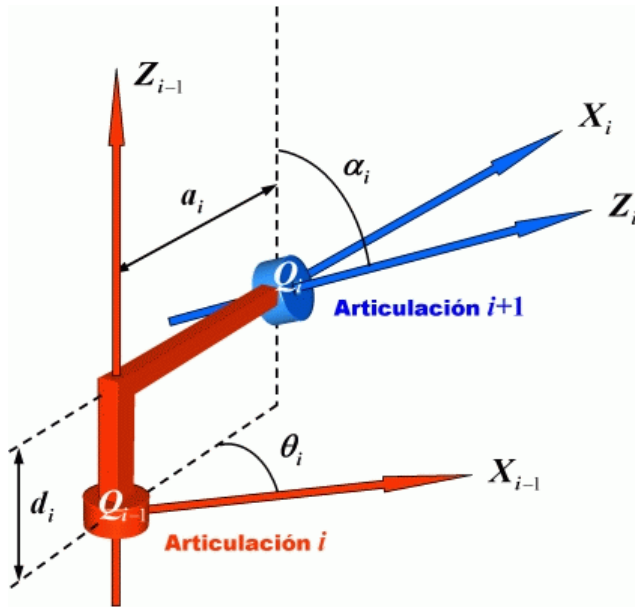


Figura 2.2: Movimiento articulaciones

2.2. Z_i y Z_{i-1} son paralelos

En esta situación el eje X_i se toma en el plano conteniendo a Z_{i-1} y Z_i y perpendicular a ambos. El origen Q_i es cualquier punto conveniente del eje Z_i . El parámetro a_i es, como antes, la distancia perpendicular entre los ejes Z_{i-1} y Z_i , y d_i es la distancia desde Q_{i-1} .

Una vez determinado el Eje X_i , a la articulación i -ésima se le asocia un tercer parámetro fijo α_i que es el ángulo que forman los ejes Z_{i-1} y Z_i en relación al eje X_i . Nótese que cuando el brazo i -ésimo (que une rígidamente las articulaciones i e $i + 1$) gira en torno al eje Z_{i-1} , los parámetros a_i , d_i , y α_i permanecen constantes, pues dependen exclusivamente de las posiciones/orientaciones relativas entre los ejes Z_{i-1} y Z_i , que son invariables. Por tanto, a_i , d_i , y α_i pueden calcularse a partir de cualquier configuración de la estructura articulada, en particular a partir de una configuración inicial estándar. Precisamente el ángulo θ_i de giro que forman los ejes X_{i-1} y X_i con respecto al eje Z_{i-1} es el cuarto parámetro asociado a la articulación i y el único de ellos que varía cuando el brazo i gira. Es importante observar que el conjunto de los 4 parámetros a_i , d_i , α_i y θ_i determina totalmente el Sistema de Referencia de la articulación $i + 1$ en función del Sistema de Referencia de la articulación i .

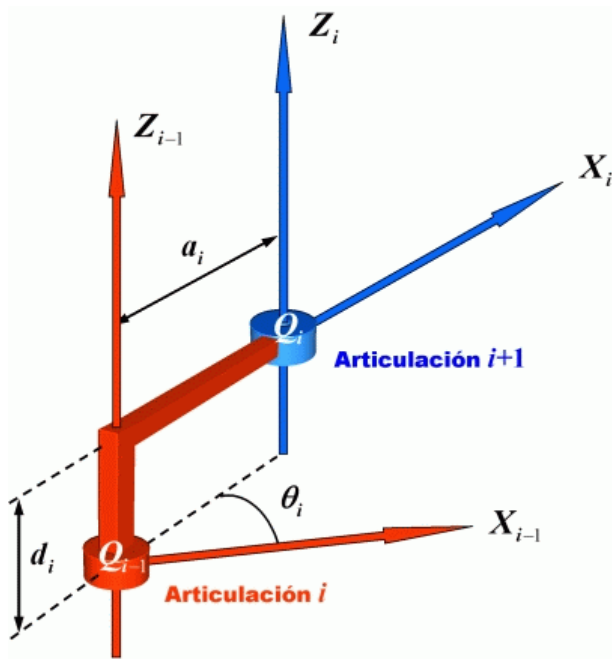


Figura 2.3: Movimiento articulaciones 2

Transformación de Coordenadas

De los 4 parámetros asociados a una articulación, los 3 primeros son constantes y dependen exclusivamente de la relación geométrica entre las articulaciones i e $i + 1$, mientras que el cuarto parámetro θ_i es la única variable de la articulación, siendo el ángulo de giro del eje X_{i-1} alrededor del eje Z_{i-1} para llevarlo hasta X_i . Sabemos que dados 2 Sistemas de Referencia:

$$\mathbf{R}_1 = \{ Q_1, [u_1, u_2, u_3] \} \text{ y } \mathbf{R}_2 = \{ Q_2, [v_1, v_2, v_3] \}$$

Con bases ortonormales asociadas, el cambio de coordenadas del segundo Sistema de Referencia al primero viene dado por:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \lambda_1 \\ & R & & \lambda_2 \\ & & & \lambda_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ son las coordenadas de un punto en el Sistema de Referencia R_2 , R es la matriz del Cambio de Base tal que:

$$[v_1 | v_2 | v_3] = [u_1 | u_2 | u_3]$$

R y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son las coordenadas del origen del segundo Sistema de Referencia, Q_2 respecto al primero. La expresión permite entonces obtener las coordenadas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ del punto en cuestión con respecto al primero de los Sistema de Referencia. En nuestro caso, para pasar de la $(i + 1)$ -ésima articulación a la i -ésima, los Sistemas de Referencia son:

$$\mathbf{R}_1 = \{ Q_{i-1}, [X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1}] \} \text{ y } \mathbf{R}_2 = \{ Q_i, [X_i, Y_i, Z_i] \}$$

Consideraciones Finales

La representación Denavit-Hartenberg presupone que cuando se realiza una rotación alrededor de uno de los ejes, digamos Z_{i-1} , la orientación del eje Z_i varía debido a la acción del brazo que los une (exceptuando el caso en el que Z_{i-1} y Z_i son paralelos), aunque naturalmente el ángulo α_i entre ambos ejes permanece constante. Esta observación implica que es imposible que el eje Z_i tenga una orientación constante e independiente de la rotación que se efectúe alrededor de Z_{i-1} , lo cual implica que la transformación de un sistema a otro no puede en ningún caso expresarse como una rotación de ángulos de Euler de *EjesFijos*, como la RPY.

Bibliografía

- [1] Antonio Barrientos. Fundamentos de robótica. Technical report, e-libro, Corp., 2007.