



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE LA ZONA METROPOLITANA DE GUADALAJARA

Explicar el Operador Jacobiano

Eduardo Robles Vázquez

Universidad Politécnica de la Zona Metropolitana de Guadalajara

Profesor: Carlos Enrique Morán Garabito

15 de Octubre de 2019

Índice general

1	Operador Jacobiano	3
1.1.	Función escalar	4
1.2.	Función vectorial	4
	Bibliografía	6

Operador Jacobiano

La matriz Jacobiana es una matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de una función. Una de las aplicaciones más interesantes de esta matriz es la posibilidad de aproximar linealmente a la función en un punto. En este sentido, el jacobiano representa la derivada de una función multivariable. Propiamente deberíamos hablar más que de matriz jacobiana, de diferencial jacobiana o aplicación lineal jacobiana ya que la forma de la matriz dependerá de la base o coordenadas elegidas. Es decir, dadas dos bases diferentes la aplicación lineal jacobiana tendrá componentes diferentes aun tratándose del mismo objeto matemático. La propiedad básica de la "matriz" jacobiana es la siguiente, dada una aplicación cualquiera:

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Continua, es decir:

$$\mathbf{F} \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

Se dirá que es diferenciable si existe una aplicación lineal:

$$\lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

Tal que:

$$\lim_{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \rightarrow 0} \frac{\|(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})) - \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = 0$$

1.1. Función escalar

Empecemos con el caso más sencillo de una función escalar:

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

En este caso la matriz jacobiana será una matriz formada por un vector fila que coincide con el gradiente. Si la función admite derivadas parciales para cada variable puede verse que basta definir la "matriz" jacobiana como:

$$\lambda(\mathbf{x}) := \nabla F(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right]$$

Ya que entonces se cumplirá la relación automáticamente, por lo que en este caso la "matriz jacobiana" es precisamente el gradiente.

1.2. Función vectorial

Supongamos:

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Es una función que va del espacio euclídeo n-dimensional a otro espacio euclídeo m-dimensional. Esta función está determinada por m funciones escalares reales:

$$y_i = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \dots, F_m(\mathbf{x}))$$

Cuando la función anterior es diferenciable, entonces las derivadas parciales de estas m funciones pueden ser organizadas en una matriz m por n, la matriz jacobiana de F:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Esta matriz es notada de diversas maneras:

$$J_{\mathbf{F}}(x_1, \dots, x_n), \quad \text{o} \quad \frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}, \quad \text{o} \quad D\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n), \quad \text{o} \quad \nabla \mathbf{F}(x_1, \dots, x_n)$$

Nótese que la fila, i -ésima fila coincidirá dada con el gradiente de la función Y_i , para $i = 1, \dots, m$. Si p es un punto de R_n y F es diferenciable en p , entonces su derivada está dada por $J_F(p)$. En este caso, la aplicación lineal descrita por $J_F(p)$ es la mejor aproximación lineal de F cerca del punto p , de esta manera:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{p}) + J_{\mathbf{F}}(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p})$$

Para x cerca de p . O con mayor precisión:

$$\lim_{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{p}) - J_{\mathbf{F}}(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} = 0$$

Bibliografía

- [1] Carlos F Rodríguez, Juan C Botero, and Hugo Quintero. Aplicación de la teoría de robots manipuladores a la biomecánica del brazo humano¹. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 4(4):51–57, 2007.