Explicación de la Convención Denavit-Hartenberg

Eduardo Robles Vázquez

Universidad Politécnica de la Zona Metropolitana de Guadalajara

Profesor: Carlos Enrique Morán Garabito

24 de septiembre del 2019

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Se trata de un procedimieto sistemático para describir la estructura cinemática de una cadena articulada constituida por articulaciones con un solo grado de libertad. Para ello, a cada articulación se le asigna un Sistema de Referencia Local con origen en un punto Qi y ejes ortonormales Xi, Yi, Zi, comenzando con un primer sistema de referencia fijo e inmóvil dado por los ejes $X0, Y0, Z0$, anclado a un punto fijo $Q0$ de la base sobre la que está montada toda la estructura de la cadena. Este sistema de referencia no tiene por qué ser el universal con el origen en $(0, 0, 0)$ y la base canónica.

Capítulo 2

Asignación de Sistemas de Referencia

Las articulaciones se numeran desde 1 hasta n. A la articulación i-ésima se le asocia su propio eje de rotación como Eje $Zi-1$, de forma que el eje de giro de la 1ª articulación es $Z0$ y el de la n-ésima articulación, $Zn-1$. En la figura 2.1 se muestra la estructura del Robot PUMA junto con sus articulaciones y ejes de rotación.

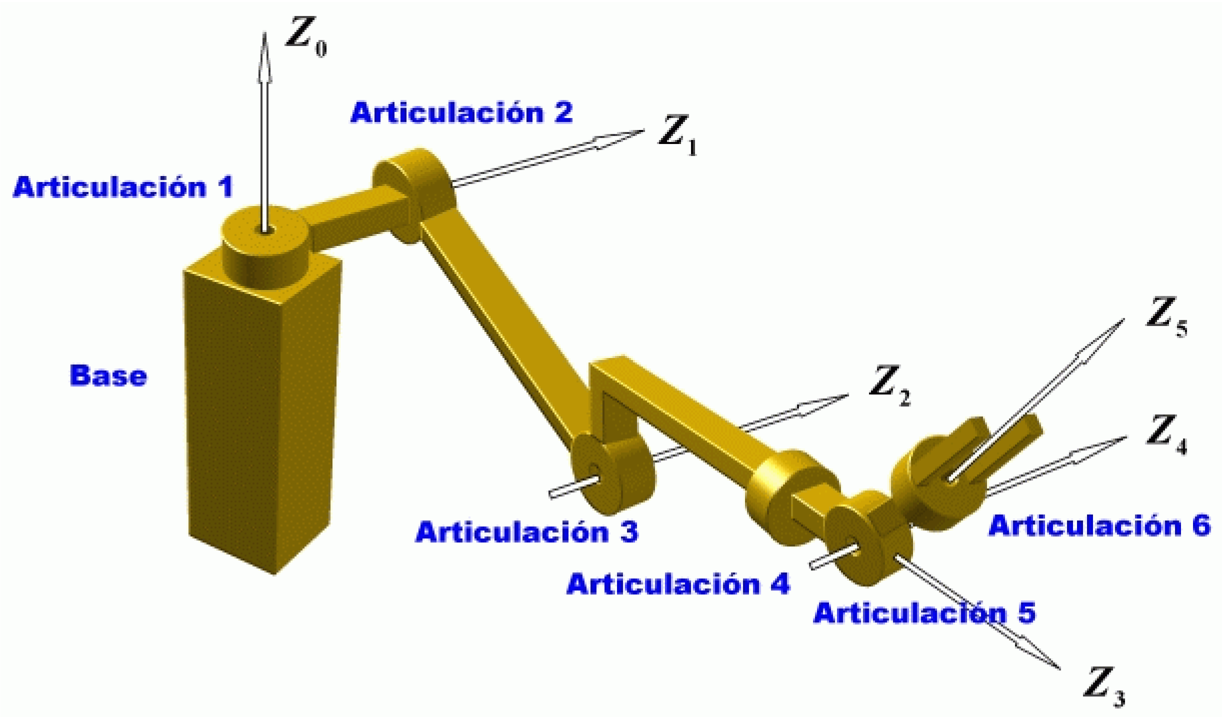

Figura 2.1: Robot Puma

Para la articulación i-ésima, la elección del origen de coordenadas Qi y del Eje Xi sigue reglas muy precisas en función de la geometría de los brazos articulados, el Eje Yi por su parte, se escoge para que el sistema Xi, Yi, Zi sea dextrógiro. La especificación de cada Eje Xi depende de la relación espacial entre Zi y $Zi-1$, distinguiéndose 2 casos:

2.1. Zi y Z(i-1) no son paralelos

Entonces existe una única recta perpendicular a ambos, cuya intersección con los ejes proporciona su mínima distancia. Esta distancia, ai, medida desde el eje $Zi-1$ hacia el eje Zi, es uno de los parámetros asociados a la articulación i -ésima. La distancia di desde $Qi-1$ a la intersección de la perpendicular común entre $Zi-1$ y Zi con $Zi-1$ es el segundo de los parámetros. En este caso, el eje Xi es esta recta, siendo el sentido positivo el que va desde el eje $Zi-1$ al Zi si ai es menor que 0. El origen de coordenadas Qi es la intersección de dicha recta con el eje Zi.

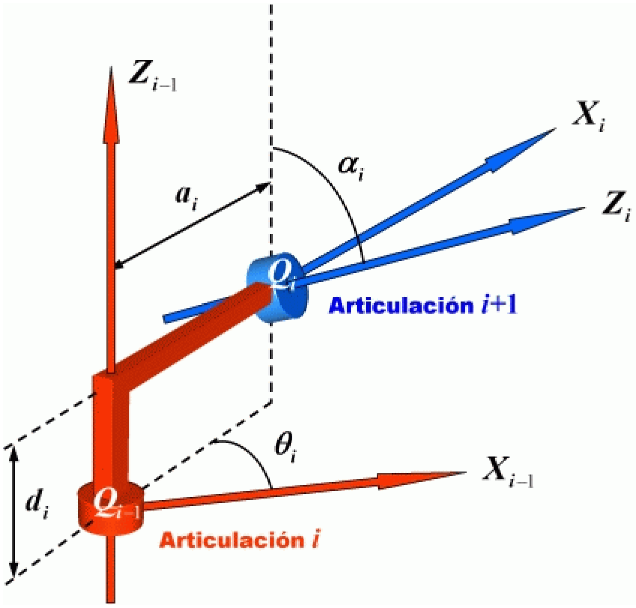

Figura 2.2: Movimiento articulaciones

2.2. Zi y Z(i-1) son paralelos

En esta situación el eje Xi se toma en el plano conteniendo a $Zi-1$ y Zi y perpendicular a ambos. El origen Qi es cualquier punto conveniente del eje Zi. El parámetro ai es, como antes, la distancia perpendicular entre los ejes $Zi-1$ y Zi, y di es la distancia desde $Qi-1$.

Una vez determinado el Eje Xi, a la articulación i -ésima se le asocia un tercer parámetro fijo ai que es el ángulo que forman los ejes $Zi-1$ y Zi en relación al eje Xi. Nótese que cuando el brazo i -ésimo (que une rígidamente las articulaciones i e $i+1$) gira en torno al eje $Zi-1$, los parámetros ai, di, y αi permanecen constantes, pues dependen exclusivamente de las posiciones/orientaciones relativas entre los ejes $Zi-1$ y Zi, que son invariables. Por tanto, ai, di, y αi pueden calcularse a partir de cualquier configuración de la estructura articulada, en particular a partir de una configuración inicial estándar. Precisamente el ángulo θi de giro que forman los ejes $Xi-1$ y Xi con respecto al eje $Zi-1$ es el cuarto parámetro asociado a la articulación i y el único de ellos que varía cuando el brazo i gira. Es importante observar que el conjunto de los 4 parámetros ai, di, αi y θi determina totalmente el Sistema de Referencia de la articulación $i+1$ en función del Sistema de Referencia de la articulación i.

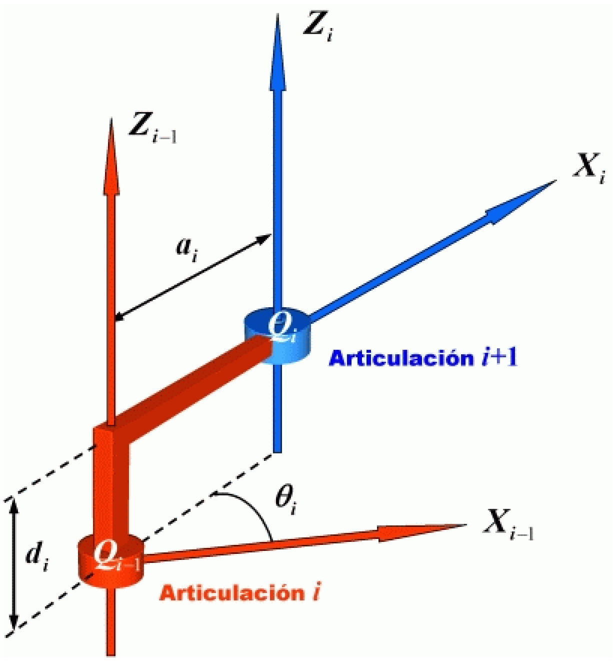

Figura 2.3: Movimiento articulaciones 2

Capítulo 3

Transformación de Coordenadas

De los 4 parámetros asociados a una articulación, los 3 primeros son constantes y dependen exclusivamente de la relación geométrica entre las articulaciones i e $i+1$, mientras que el cuarto parámetro θi es la única variable de la articulación, siendo el ángulo de giro del eje $Xi-1$ alrededor del eje $Zi-1$ para llevarlo hasta Xi. Sabemos que dados 2 Sistemas de Referencia:

$\mathbf{R}_1 = \{ Q_1, [u_1, u_2, u_3]\}$ y $\mathbf{R}_2 = \{ Q_2, [v_1, v_2, v_3]\}$

Con bases ortonormales asociadas, el cambio de coordenadas del segundo Sistema de Referencia al primero viene dado por:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \lambda_1 \\ & R & & \lambda_2 \\ & & & \lambda_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde $\beta 1$, $\beta 2$, $\beta 3$ son las coordenadas de un punto en el Sistema de Referencia $R2$, R es la matriz del Cambio de Base tal que:

$$[v_1 | v_2 | v_3] = [u_1 | u_2 | u_3]$$

R y $\lambda 1$, $\lambda 2$, $\lambda 3$ son las coordenadas del origen del segundo Sistema de Referencia, $Q2$ respecto al primero. La expresión permite entonces obtener las coordenadas $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$ del punto en cuestión con respecto al primero de los Sistema de Referencia. En nuestro caso, para pasar de la $(i+1)$-ésima articulación a la i -ésima, los Sistemas de Referencia son:

$$\mathbf{R}_1 = \{ Q_{i-1}, [X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1}] \} \text{ y } \mathbf{R}_2 = \{ Q_i, [X_i, Y_i, Z_i] \}$$

Capítulo 4

Consideraciones Finales

La representación Denavit-Hartenberg presupone que cuando se realiza una rotación alrededor de uno de los ejes, digamos $Zi - 1$, la orientación del eje Zi varía debido a la acción del brazo que los une (exceptuando el caso en el que $Zi - 1$ y Zi son paralelos), aunque naturalmente el ángulo αi entre ambos ejes permanece constante. Esta observación implica que es imposible que el eje Zi tenga una orientación constante e independiente de la rotación que se efectúe alrededor de $Zi - 1$, lo cual implica que la transformación de un sistema a otro no puede en ningún caso expresarse como una rotación de ángulos de Euler de $EjesFijos$, como la RPY.

Bibliografía

[1] Antonio Barrientos. Fundamentos de robótica. Technical report, e-libro, Corp., 2007.