

座线位移引起的有侧移杆 BD 都是剪力静定杆, 为了简化计算, 可以只按 2 个未知角位移计算; 以上剪力静定杆均按下端固定、上端平行于此杆的定向支座确定杆端弯矩。

例 2: 图 5 所示结构^[1,2]的铰结体系如图 5(b), $W = 2, K = 2$ (在 C, E 处), 所以, $S = W - K = 0$ 。

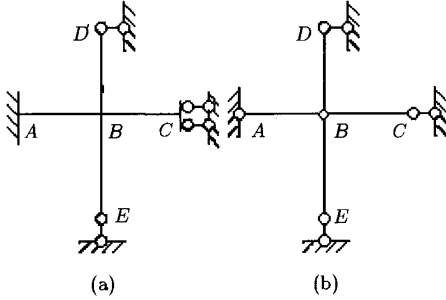


图 5

例 3: 图 6 所示结构^[2]的铰结体系如图 6(b), 当 BC 杆与水平线的夹角 $\alpha \neq 0$ 时, $W = 2, K = 1$ (在 E 处), 所以, $S = W - K = 1$ 。

4 结 语

本文论证了简单刚架在链杆支座或定向支座处的线位移

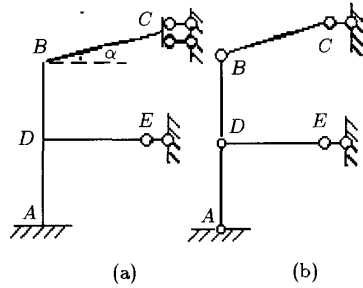


图 6

对位移法中结点线位移数目的影响, 及结点线位移数目的简单计算公式, 所得结论可以推广运用于确定复杂刚架或结构的结点线位移数目, 简单计算公式可作为求解超静定结构的一个补充, 可用于材料力学和结构力学的教学中。

参 考 文 献

- 1 包世华等编. 《结构力学》(下册). 武汉: 武汉工业大学出版社, 2001. 8~34
- 2 龙驭球等编. 《结构力学》(I). 北京: 高教出版社, 2003. 409~435
- 3 周竟欧等编. 《结构力学》(下册). 上海: 同济大学出版社, 1994. 8

关于圆环在均匀水压力作用下稳定问题的讨论

单 建 张 瑶

(东南大学土木工程学院, 南京 210096)

摘要 从稳定微分方程的一般解出发, 严格利用周期性计算了圆环在均匀水压力作用下的临界荷载, 澄清了某些不正确表述, 并对一般解中包含的与荷载无关的项作了深入的分析, 明确了它们的物理意义。

关键词 稳定, 周期性, 圆环, 均匀水压力, 临界荷载

1 引 言

众所周知, 当荷载小于临界值时, 受均匀水压力作用的圆环中只有轴力而没有弯矩和剪力; 当荷载达到临界值时, 圆环将失稳并产生弯曲内力和变形. 这一问题按小变形理论研究的早期成果在文献 [1,2] 中有详细的介绍, 然而解法比较繁琐, 并且必须事先假定圆环在失稳后仍具有两根相互垂直的对称轴 (图 1(a)) 而没有说明为什么不能按其他形式例如图 1(b) 所示的形式失稳; 一些结构力学教科书例如文献 [3,4] 首先对均匀水压力作用下的一般圆弧形拱求出稳定微分方程的一般解, 然后将圆环视为圆拱的特例, 利用周期性求出临界荷载, 这一方法思路清晰, 并且无须事先假定失稳

形式, 但文献 [4] 在表述上有欠妥之处, 因而有加以澄清的必要。

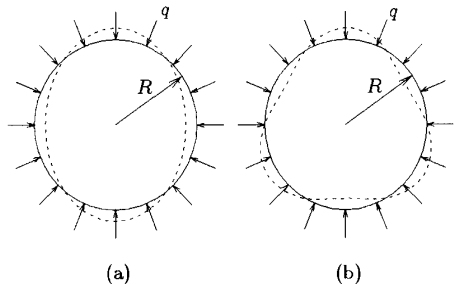


图 1

用静力法研究均匀水压力下圆环的稳定问题, 大体上分为两步: 第 1 步, 考虑圆拱在屈曲状态下的几何关系、物理关系和平衡条件, 建立关于位移的平衡微分方程, 并求得位移和内力的一般解; 第 2 步, 考虑位移或内力的周期性以及屈曲后变形或内力非零且必与荷载有关的条件, 建立稳定方

程或特征方程, 解特征方程便得到临界荷载值. 文献 [4] 在表述上的问题出在第 2 步上; 然而本文为完整和清楚起见, 首先对第一步也予以扼要的叙述.

2 稳定微分方程及其解答

稳定微分方程基于以下两条基本假定: (1) 变形和位移是微小的; (2) 屈曲前后轴线的长度不变.

2.1 几何关系

设圆环的半径为 R , 某一微段的长度和圆心角分别为 ds 和 $d\theta$, 则微段由于切向位移 $u = u(s)$ 和法向位移 $w = w(s)$ 的伸长分别为 $d\lambda_1 = du$ 和 $d\lambda_2 = -wd\theta = -wds/R$. 根据假定 (2), 有 $d\lambda_1 + d\lambda_2 = du - wds/R = 0$, 因此

$$\frac{du}{ds} = \frac{w}{R} \quad (1)$$

或

$$\frac{du}{d\theta} = w \quad (2)$$

另一方面, 微段起点的法线由于切向位移和法向位移的转角分别为 u/R 和 dw/ds , 总转角为 $u/R + dw/ds$; 由此可知微段终点法线转角的增量 (即两端点法线的相对转角) 为

$$\Delta d\theta = \frac{d}{ds} \left(\frac{u}{R} + \frac{dw}{ds} \right) ds = \left(\frac{du}{Rds} + \frac{d^2w}{ds^2} \right) ds$$

将式 (1) 代入上式, 得

$$\Delta d\theta = \left(\frac{w}{R^2} + \frac{d^2w}{ds^2} \right) ds = \left(\frac{w}{R^2} + \frac{d^2w}{R^2 d\theta^2} \right) ds \quad (3)$$

因此, 曲率的增量为

$$\kappa = \frac{\Delta d\theta}{ds} = \frac{1}{R^2} \left(w + \frac{d^2w}{d\theta^2} \right) \quad (4)$$

设微段变形后的曲率半径为 $R + \Delta R$, 则有

$$\frac{1}{R + \Delta R} - \frac{1}{R} = \kappa = \frac{1}{R^2} \left(w + \frac{d^2w}{d\theta^2} \right)$$

根据假定 1, $R(R + \Delta R) \approx R^2$, 故由上式得曲率半径的增量为

$$\Delta R = - \left(w + \frac{d^2w}{d\theta^2} \right) \quad (5)$$

2.2 物理关系

弯矩与曲率增量的关系为 $M = -EI\kappa$, EI 为抗弯刚度, 负号是因为假定弯矩以使环的内侧受拉者为正, 从而正弯矩使微段的曲率变小. 由式 (4) 得

$$M = - \frac{EI}{R^2} \left(w + \frac{d^2w}{d\theta^2} \right) \quad (6)$$

2.3 平衡方程

在失稳前, 微段在荷载作用下只产生轴力且轴力为常数, $F_{N0} = -qR$; 失稳后, 微段除产生弯矩 M 和剪力 F_Q 外, 轴力 F_N 也将发生变化. 由平衡条件可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_N}{ds} &= \frac{F_Q}{R + \Delta R} \\ \frac{dF_Q}{ds} &= - \frac{F_N}{R + \Delta R} - q \\ \frac{dM}{ds} &= F_Q \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中 $F_N = F_{N0} + \Delta F_N = -qR + \Delta F_N$, ΔF_N 为失稳后新增的轴力; $ds = (R + \Delta R)d\theta \approx Rd\theta$. 利用这些关系, 可将式 (7) 简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\Delta F_N)}{d\theta} &= F_Q \\ \frac{dF_Q}{d\theta} &= -(\Delta F_N + q\Delta R) \\ \frac{dM}{d\theta} &= F_Q R \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

最后, 从式 (8) 消去 ΔF_N 和 F_Q , 可得

$$\frac{d^3 M}{d\theta^3} + \frac{dM}{d\theta} + qR \frac{d(\Delta R)}{d\theta} = 0 \quad (9)$$

2.4 稳定微分方程及其一般解

将几何关系式 (5), 物理关系式 (6) 代入平衡方程式 (9) 得

$$\frac{d^5 w}{d\theta^5} + \frac{d^3 w}{d\theta^3} + \left(1 + \frac{qR^3}{EI} \right) \left(\frac{d^3 w}{d\theta^3} + \frac{dw}{d\theta} \right) = 0 \quad (10)$$

这就是关于位移 w 的稳定微分方程. 由此得 w 的一般解为

$$w = C_1 + C_2 \sin \theta + C_3 \cos \theta + C_4 \sin \beta \theta + C_5 \cos \beta \theta \quad (11)$$

其中

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{qR^3}{EI}} \quad (12)$$

利用式 (2) 和式 (6) 可得切向位移 u 和弯矩 M 的一般解

$$\begin{aligned} u &= C_0 + C_1 \theta - C_2 \cos \theta + C_3 \sin \theta - \\ &\quad \frac{C_4}{\beta} \cos \beta \theta + \frac{C_5}{\beta} \sin \beta \theta \end{aligned} \quad (13)$$

$$M = - \frac{EI}{R^2} [C_1 + C_4(1 - \beta^2) \sin \beta \theta + C_5(1 - \beta^2) \cos \beta \theta] \quad (14)$$

此外, 利用式 (8) 的第 3 式还可得到剪力 F_Q 的一般解

$$F_Q = - \frac{EI}{R} \beta (1 - \beta^2) (C_4 \cos \beta \theta - C_5 \sin \beta \theta) \quad (15)$$

3 特征方程及临界荷载

圆环的封闭性要求一般解具有周期性 (周期为 2π), 而对积分常数提出了限制条件, 也为建立稳定方程提供了依据. 在此问题上, 文献 [4] 的表述可归结如下:

(1) 切向位移 w 应是以 2π 为周期的函数, 故

$$w(0) = w(2\pi) \quad (16)$$

(2) 将式 (11) 代入式 (16) 并化简可得

$$C_4 \sin 2\pi\beta = C_5(1 - \cos 2\pi\beta) \quad (17)$$

(3) 由式 (11) 可知, C_4 和 C_5 不能全等于零, 否则圆拱失稳后的位移将与荷载无关, 这显然是不正确的. 要使 C_4 和 C_5 不全为零, 就必须

$$\sin 2\pi\beta = 0, \quad 1 - \cos 2\pi\beta = 0 \quad (18)$$

(4) 由式 (18) 可知, β 为整数; 又由式 (12), $\beta > 1$. 因此 β 的最小值为 2, 从而最小临界荷载为

$$q_{cr} = (\beta^2 - 1) \frac{EI}{R^3} = \frac{3EI}{R^3} \quad (19)$$

以上推导过程中, 第 3 步由式 (17) 推出式 (18) 是缺乏说服力的. 要使 C_4 和 C_5 不全为零且式 (17) 成立并非“必须”有式 (18), 或者说, 式 (18) 只是充分条件而不是必要条件. 除式 (18) 以外, 由式 (17) 以及 C_4 和 C_5 不全为零还可得出

$$\frac{C_4}{C_5} = \frac{1 - \cos 2\pi\beta}{\sin 2\pi\beta}, \quad C_5 \neq 0, \quad \sin 2\pi\beta \neq 0 \quad (20a)$$

或

$$\frac{C_5}{C_4} = \frac{\sin 2\pi\beta}{1 - \cos 2\pi\beta}, \quad C_4 \neq 0, \quad \cos 2\pi\beta \neq 1 \quad (20b)$$

由这两个式子中的任一个都可以得出无限多组既满足式 (17) 又满足 C_4 和 C_5 不全为零条件的 (C_4, C_5, β) , 并且相应的荷载 q 小于式 (19) 所给出的临界荷载, 例如由式 (20a) 得

$$C_4 = C_5 = 1, \quad \beta = 5/4, \quad q = 0.5625EI/R^3$$

或

$$C_4 = 1, \quad C_5 = -1, \quad \beta = 7/4, \quad q = 2.0625EI/R^3$$

或

$$C_4 = 1, \quad C_5 = \sqrt{3}/3, \quad \beta = 4/3, \quad q = 0.7778EI/R^3$$

等等. 将这些 (C_4, C_5, β) 的值代入式 (11) 将会发现所得的 w 的都不以 2π 为周期, 因而它们都是不正确的, 相应的荷载都不是真实的临界荷载. 按文献 [4] 的方法求临界荷载, 必须对这些似是而非的荷载加以排除, 但这样一来又将使论证过程变得繁冗.

还应该指出, 式 (16) 只是 w 以 2π 为周期的必要条件而非充分条件, 满足式 (16) 的 w 不一定是以 2π 为周期的函数, 例如与上述错误的 (C_4, C_5, β) 相应的 w 虽然都不以 2π 为周期, 但不难验证, 它们都是满足式 (16) 的.

与文献 [4] 相比, 文献 [3] 的论述比较严谨, 简述如下:

由周期性可得

$$M(0) = M(2\pi), \quad F_Q(0) = F_Q(2\pi)$$

将式 (14), 式 (15) 代入上两式, 得

$$C_4 \sin 2\pi\beta - C_5(1 - \cos 2\pi\beta) = 0$$

以及

$$C_4(1 - \cos 2\pi\beta) + C_5 \sin 2\pi\beta = 0$$

由 C_4 和 C_5 不全为零的条件可知, 以上两式组成的方程组的系数行列式必等于零. 于是得

$$\sin^2 2\pi\beta(1 - \cos 2\pi\beta)^2 = 0$$

即

$$\cos 2\pi\beta = 1$$

因此 β 为整数. 以下从略.

以上论述不存在将充分条件说成必要条件的问題, 但比文献 [4] 多用了—个周期性条件.

本问题只用一个周期性条件也是可以解决的, 表述如下.

w 应是以 2π 为周期的函数, 即

$$w(\theta) = w(\theta + 2\pi) \quad (21)$$

此式应对于 θ 的任意值 (而不仅是 $\theta = 0$) 均成立. 将式 (11) 代入式 (21) 并化简可得

$$C_4 \sin \beta\theta + C_5 \cos \beta\theta = C_4 \sin \beta(\theta + 2\pi) + C_5 \cos \beta(\theta + 2\pi)$$

上式经过三角恒等变换可化为

$$[C_4 \cos \beta(\theta + \pi) + C_5 \sin \beta(\theta + \pi)] \sin \beta\pi = 0 \quad (22)$$

因此应有

$$C_4 \cos \beta(\theta + \pi) + C_5 \sin \beta(\theta + \pi) = 0 \quad (23)$$

或

$$\sin \beta\pi = 0 \quad (24)$$

由式 (23) 以及 C_4 和 C_5 不全为零的条件得

$$\tan \beta(\theta + \pi) = -C_4/C_5, \quad C_5 \neq 0$$

或

$$\cot \beta(\theta + \pi) = -C_5/C_4, \quad C_4 \neq 0$$

即 $\tan \beta(\theta + \pi)$ 或 $\cot \beta(\theta + \pi)$ 为常数, 这是不可能的 (除非 $\beta = 0$; 但由式 (12) 已知 $\beta > 1$). 因此由式 (22) 只能得出式 (24), 从而 β 为整数, 其满足 $\beta > 1$ 的最小值为 $\beta = 2$, 最小临界荷载为

$$q_{cr} = \frac{3EI}{R^3} \quad (25)$$

4 关于微分方程一般解的讨论

式 (11), 式 (13) 和式 (14) 给出了圆拱受均匀水压力作用而屈曲时位移和弯矩的一般解, 其中共包含 6 个积分常数. 在一般解中, 只有 C_4 和 C_5 所对应的项与荷载有关, 其余都是与荷载无关的. 对于圆环, 这些项有明确的物理意义, 试分析如下:

首先, 因为切向位移 u 是以 2π 为周期的函数, 故有

$$u(\theta) = u(\theta + 2\pi) \quad (26)$$

将式 (13) 代入式 (26) 并利用前面关于 β 为整数的结论可得 $2\pi C_1 = 0$, 因此 $C_1 = 0$, 从而对于圆环, 位移和弯矩的一般解可以简化为

$$w = C_2 \sin \theta + C_3 \cos \theta + C_4 \sin \beta \theta + C_5 \cos \beta \theta \quad (27)$$

$$u = C_0 - C_2 \cos \theta + C_3 \sin \theta - \frac{C_4}{\beta} \cos \beta \theta + \frac{C_5}{\beta} \sin \beta \theta \quad (28)$$

$$M = -\frac{EI}{R^2} [C_4(1 - \beta^2) \sin \beta \theta + C_5(1 - \beta^2) \cos \beta \theta] \quad (29)$$

实际上, 圆环属多连体, 由位移单值条件可知式 (13) 中的 $C_1 \theta$ 必定为零.

式 (28) 中, 常数项 C_0 代表圆环上的各点沿切向发生相同的位移, 相应于圆环绕圆心发生了刚体转动; 式 (27) 和式 (28) 中, C_2 和 C_3 对应的项分别代表圆环沿着 $\theta = \pi/2$ 和 $\theta = 0$ 的方向发生了刚体平移 C_2 和 C_3 . 因此毫不奇怪, C_0 , C_2 和 C_3 没有出现在内力的一般解中.

5 结束语

在涉及到函数周期性的问题中, 将周期性简单地归结为 $f(0) = f(T)$ (T 为函数的周期) 有时是不够的, 甚至可能导致错误的结论. 本文对有关文献在均匀水压力作用下圆环的临界荷载问题上的不严密表述进行了分析, 有助于澄清这一问题.

本问题的关键是明确 β 为整数. 关于这一点其实还可以论证得更简洁些. 因为 C_4 和 C_5 不全为零, 所以由 w 的一般解式 (11) 可见, w 必包含以 $2\pi/\beta$ ($\beta > 1$) 为周期的项; 同时, w 又以 2π 为周期, 因此 2π 一定是 $2\pi/\beta$ 的整数倍, 即 β 为整数.

参 考 文 献

- 1 Timoshenko SP, Gere JM. Theory of Elastic Stability (2nd edition). New York: McGraw-Hill, 1961
- 2 金宝桢, 杨式德, 朱宝华. 结构力学. 北京: 人民教育出版社, 1964
- 3 Ржаницын АР. Строительная Механика. Высшая школа, Москва, 1982
- 4 李廉锟. 结构力学 (下册, 第三版). 北京: 高等教育出版社, 1996

关于 Lindelöf 方程¹⁾ —— 分析力学札记之十四

梅凤翔

(北京理工大学力学系, 北京 100081)

摘要 研究 Lindelöf 方程的历史作用以及现实意义. 失败是成功之母, 科学错误也是有功劳的.

关键词 分析力学, Lindelöf 方程, 约化

1 Lindelöf 方程的历史作用

1895 年芬兰著名数学家 Lindelöf E 在研究有回转面刚体沿水平面纯滚动问题时, 写出两个非完整约束方程并将其代入动能中, 认为这样就完全考虑了非完整性, 而因此可建立第二类 Lagrange 方程^[1]. 文献 [2] 指出, 这样所建立的微分方程组是比较简单并可求出积分. Lindelöf 所得到的方程称为 Lindelöf 方程, 或 Lindelöf 错误. 类似的错误也发生在 Crescini(1889) 和 Schouten(1899) 的工作中. Lindelöf 的解使 Appell 非常高兴, 并把它作为第二类 Lagrange 方程的应用例子写在他的《理性力学》第一版中 (1896).

Lindelöf 的这个错误是相当著名的, 因为由此吸引了当时许多学者对非完整力学的注目^[3], 而因此成就了如 Chap-

lygin, Voronets, Appell, Hamel 等非完整力学的奠基人物. 因此, 在总结非完整力学的历史经验时, 千万不要忘记 Lindelöf 方程和 Lindelöf 错误的功劳.

2 Lindelöf 方程的现实意义

研究 Lindelöf 方程仍有现实意义. 这里指它在运动方程约化方面的意义. 非完整系统运动方程的约化成为几何动力学的热点之一^[4~7], 大多工作用近代微分几何表述. 实际上, Chaplygin 方程本身已经把约束方程与运动方程自然地分开了, 而约化便自然地实现了. 假设系统受有线性、齐次、定常非完整约束

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_{\varepsilon+\beta} &= B_{\varepsilon+\beta, \sigma}(q_{\nu}) \dot{q}_{\sigma} \\ (\nu, \sigma &= 1, \dots, \varepsilon; \varepsilon = n - g; \beta = 1, \dots, g) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

所受主动力有势, 动能和势能不含 $q_{\varepsilon+\beta}$ 和 t , 则系统的运动微分方程表为 Chaplygin 形式^[8]

本文于 2004-11-18 收到.

1) 国家自然科学基金 (10272021) 资助项目.