NTNU
Institutt for teknisk kybernetikk

TTK4100 Kybernetikk introduksjon

Øving 2 - Løsningsforslag

Oppgave 1: Hastighet

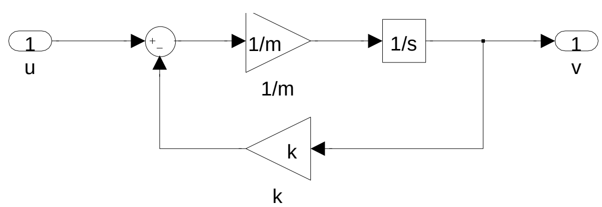
I Øving 1 så vi at foroverhastigheten til en AUV kan modelleres med differensialligningen

$$\dot{v} = \frac{1}{m}u - \frac{k}{m}v \tag{1}$$

hvor v er hastigheten til AUVen. Massen benevnes med m, u er propellkraften og k er en konstant som angir motstanden i vannet.

a) Tegn blokkdiagram for systemet gitt av (1). Er systemet mono- eller multivariabelt? Er det noen tilbakekoblinger i systemet

Løsning:



Simulinkdiagram; hastighet som subsystem.

Systemet har en inngang og en utgang $\Longrightarrow$ *monovariabelt. Naturlig (negativ) tilbakekobling fra* v.

b) Beskriv framgangsmåten for Eulers metode for simulering.

Løsning: Se eksempel 25 i kompendiet.

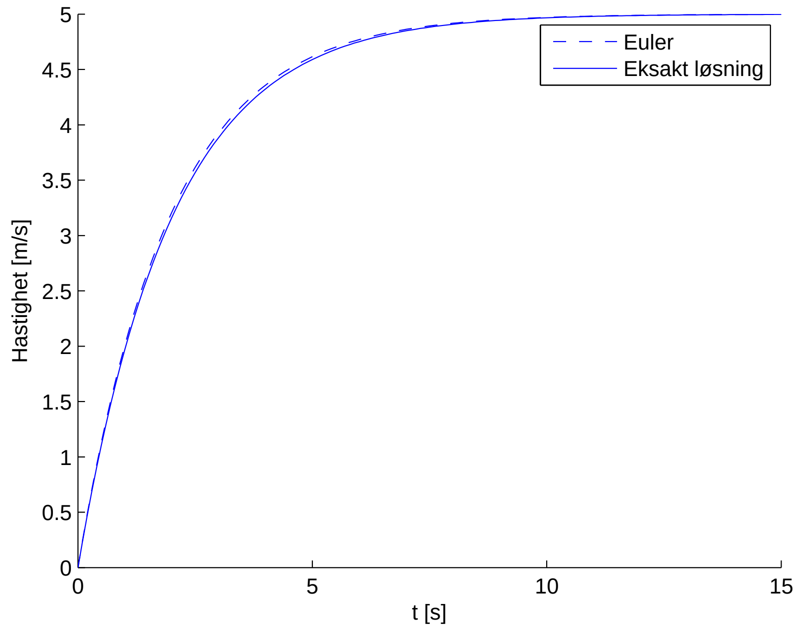
c) Hva bestemmer nøyaktigheten av løsningen ved bruk av Eulers metode?

Løsning: Nøyaktigheten er begrenset av tidsskrittet.

d) Skriv et MATLAB-script hvor du bruker Eulers metode for å simulere hastigheten til AUVen i 15 s. Anta at AUVen er i ro ved $t = 0$, dvs $v(t)|_{t=0} = v(0) = 0$. Velg $u = 500\,\mathrm{N}$, $m = 200\,\mathrm{kg}$, $k = 100\,\mathrm{kg/s}$ og tidsskritt $h = 0.1\,\mathrm{s}$. Legg ved plot og script som løsning.

Løsning:

Se vedlagt MATLAB-kode.



Hastighet gitt av Eulers metode sammenliknet med eksakt løsning.

e) Løsningen til (1) ble i Øving 1 funnet å være

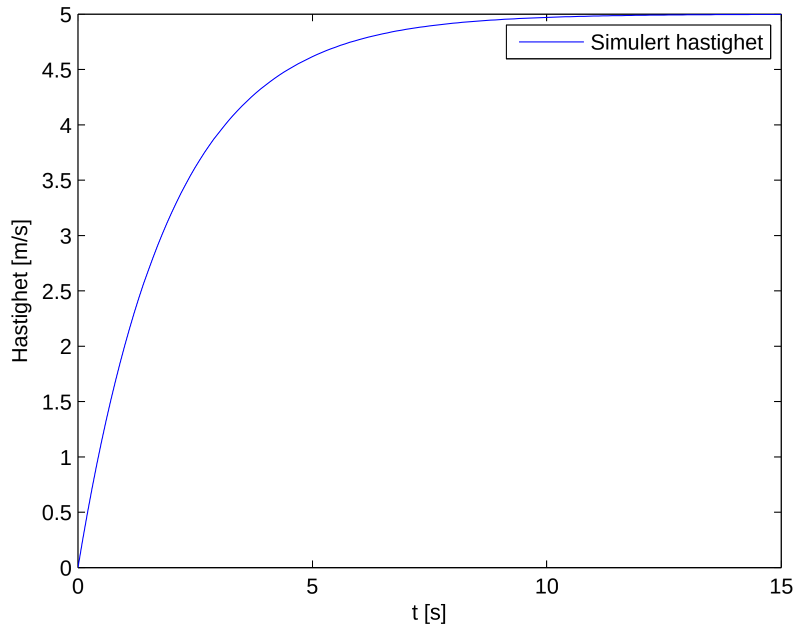
$$v(t) = e^{-\frac{k}{m}t}\left(v_0 - \frac{u}{k}\right) + \frac{u}{k}.$$

Dette kan implementeres i MATLAB ved hjelp av kodelinjen:

```
v_eksakt=exp((-(k/m)*t))*(v0-(u/k))+(u/k);
```

Plot den eksakte løsningen sammen med løningen i d). Kommenter resultatet.
Hint: plot to kurver i samme diagram ved å benytte `plot(t,v,'--',t,v_eksakt)` eller `hold on; plot(t,v,'--'); plot(t,v_eksakt); hold off`.
Løsning: Se plot ovenfor.

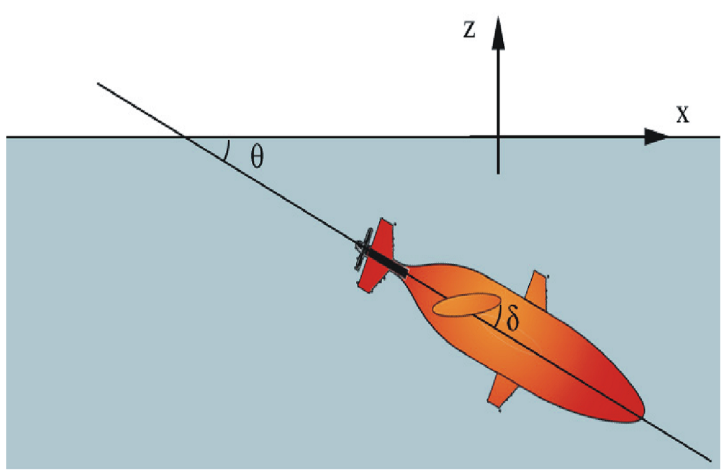
f) Simulér det samme scenario i Simulink. Bruk Euler simuleringsmetode (ODE1). Simulink-diagrammet følger direkte fra blokkdiagrammet du tegnet i a). I tillegg må du legge inn en kilde ('source' block) u som er konstant, samt et 'scope' for å lese av resultatet på utgangen. Resultatet blir det samme som i d), så fremt samme tidsskritt benyttes.
Løsning:



Modelert hastighet i Simulink.

Oppgave 2: Pitch

AUV-modellen skal nå utvides, slik at bevegelse i $xz-$planet kan simuleres. For å gjøre dette trengs bevegelsesligninger for fartøyets pitch, som framkommer ved å sette opp en momentbalanse (se eksempel 15 i kompendiet). Pitch er fartøyets vinkel i forhold til overflaten, som vist i figuren under. Når AUVen ligger horisontalt er $\theta = 0$, mens $\theta = \pi/2$ betyr at den peker rett ned. Vi antar for enkelhets skyld at fartøyets massetetthet er lik vannets, slik at vi kan se bort fra tyngdekraft og oppdrift. (I realiteten vil mange fartøy av denne typen være designet med positiv oppdrift, slik at fartøyet vil flyte til overflaten dersom motorene skulle bli slått ut.)



For AUVen innebærer momentbalansen at vi setter treghetsmomentet J multiplisert med vinkelakselerasjonen

$\ddot{\theta}$ lik summen av momenter. Hydrodynamisk demping ('friksjon' i vannet) gir et moment som er proporsjonalt med vinkelhastigheten $\dot{\theta}$ (proporsjonalitetskonstant k_2). Positiv $\dot{\theta}$ gir moment i negativ rotasjonsretning.

På grunn av utformingen av AUVen, virker tyngdepunktet med et moment som er proporsjonalt med vinkelen(proporsjonalitetskonstant k_3). Positiv θ gir moment i negativ retning. Denne kraften sørger for at farkosten retter seg opp dersom styreflatens vinkel er null.

Pitchvinkelen θ kan styres ved hjelp av vinger/styreflater. Styreflatene gir et momentbidrag som er proporsjonalt med vingens vinkel δ(proporsjonalitetskonstant k_4). Negativ pitchvinkel gir positivt moment.

a) Sett opp momentbalansen og det resulterende ligningssystemet. Av hvilken orden er systemet?
Løsning: Som 2. ordens differensial-ligningen

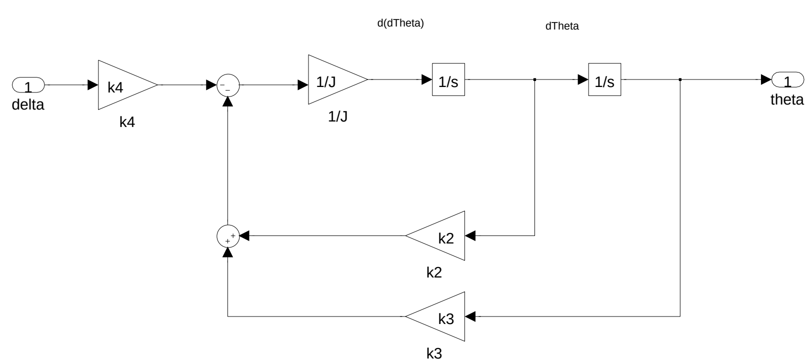
$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} &= -k_2\dot{\theta} - k_3\theta - k_4\delta \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{J}\left(-k_2\dot{\theta} - k_3\theta - k_4\delta\right) \end{aligned}$$

eller koblede 1. ordens differensial-likninger

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{1}{J}\left(-k_2\dot{\theta} - k_3\theta - k_4\delta\right) \end{aligned}$$

der $\theta_1 = \theta$ og $\theta_2 = \dot{\theta}$. Dette er et andreordens system.

b) Tegn blokkdiagram for pitch-systemet og implementer dette som et subsystem i Simulink, med δ som inngang og θ som utgang. Ta med skjermbilde av simulinkdiagrammet som besvarelse.
Løsning:



Simulinkdiagram

Oppgave 3: Posisjon

Vi tenker oss at fartøyet starter i $(x, z) = (0, 0)$.

a) Hva blir bevegelsesligningen i $x-$retning?
Hint: Bruk trigonometriske betrakninger i 3a) og 3b).
Løsning:

$$\dot{x} = \cos(\theta)\, v$$

b) Hva blir bevegelsesligningen i $z-$retning?
Løsning:

$$\dot{z} = -\sin(\theta)\, v$$

c) Sett opp fullstendig modell for fartøyets bevegelse i $xz-$planet (hastighet, pitch og posisjon). Av hvilken orden er modellen? Er modellen mono- eller multivariabel? Er modellen lineær eller ulineær?
Løsning:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \cos(\theta)\, v \\
\dot{z} &= -\sin(\theta)\, v \\
\dot{v} &= \frac{1}{m}u - \frac{k}{m}v \\
\dot{\theta}_1 &= \theta_2 \\
\dot{\theta}_2 &= \frac{1}{J}\left(-k_2\theta_2 - k_3\theta_1 - k_4\delta\right)
\end{aligned}$$

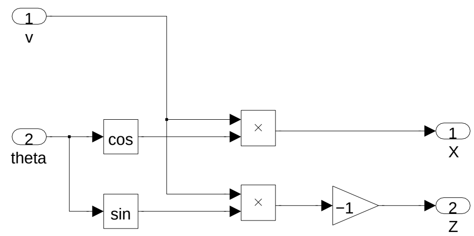
der $\theta_1 = \theta$ og $\theta_2 = \dot{\theta}$. Dette er et femteordens system siden det består av 5 tilstander(det kreves 5 integratorer for å implementere modellen i Simulink). Modellen er multivariabel, siden det er flere innganger og utganger. Modellen er ulineær, siden den inneholder flere ulineære ledd: Cosinus- og sinusleddene, samt produktene av disse med v.

d) Implementer hele fartøymodellen i Simulink. Tips: Implementer posisjon, hastighet og pitchvinkel som tre ulike subsystemer. Koble så sammen det hele i et overordnet system, som har u og δ som innganger. Til inngangene kobles konstante kilder. For hastigheten kan du modifisere simulinkdiagrammet du lagde i oppgave 1.

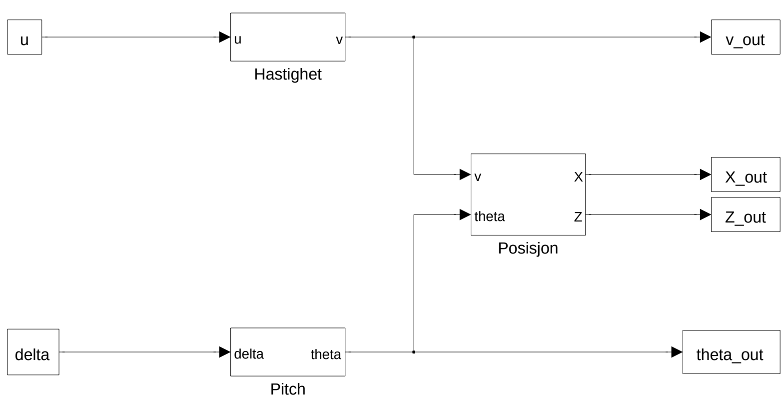
Benytt med følgende parameterverdier:

$$\begin{aligned}
J &= 15 \\
m &= 200 \\
k &= 100 \\
k_2 &= 5 \\
k_3 &= 1 \\
k_4 &= 1
\end{aligned}$$

Løsning:



Posisjon



UAV-dynamikk. Simulinkdiagram nivå 2.

e) Med koordinatsystemet vi har brukt, vil en negativ δ føre til at AUVen dykker nedover. Tilsvarende vil en positiv rorvinkel føre til at AUVen stiger. Siden dette er en svært forenklet simuleringsmodell, vil en positiv rorvinkel føre til at AUVen stiger, selv om vi starter i $(x, z) = (0, 0)$, noe som skulle tilsi en flyvende AUV.

Den praktiske fartøydynamikken er imidlertid ikke så viktig i denne øvingen, siden vi er mer opptatt av grunnleggende teoretiske aspekter, samt en introduksjon til Simulink. Vi kan også tenke oss at origo ikke er lagt på overflaten, men at et koordinatsystem er lagt nede i havet.
Simuler følgende scenarioer:

1. Hold θ_0(initialverdi for θ kan settes i integratorblokkene i Simulink) konstant og endre δ. Hva skjer med trajektoren når vi øker rorvinkelen (bruk negative δ)?

2. Hold δ og u konstant og endre θ_0. Hva skjer med trajektoren når vi øker θ_0?

3. Hold θ_0 og δ konstant, og endre u. Hva skjer med trajektoren når vi øker u?

Løsning:

1. *AUVen dykker raskere.*

2. *AUVen dykker raskere.*

3. *AUVen kjører lengre i x-retning*