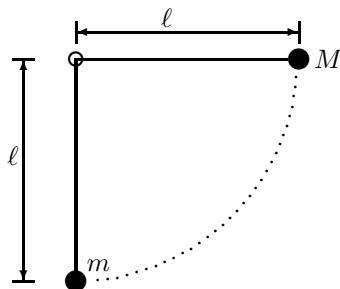


# TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)

## Løsningsforslag for øving 4

**Oppgave 1.****a.** Energibevaring gir

$$\frac{1}{2}MV^2 = Mgl \Rightarrow V = \sqrt{2gl}.$$

Snorkrafta  $S$  gitt av Newton 2 med sentripentalakselerasjon oppover:

$$\sum F = S - Mg = MV^2/\ell \Rightarrow S = Mg + MV^2/\ell = 3Mg.$$

M.a.o er snorkrafta gitt av summen av vekta  $Mg$  og “sentrifugalkrafta”  $MV^2/\ell$ ,

**b.** Siden støtet mellom  $M$  og  $m$  er perfekt elastisk, er både energi og bevegelsesmengde (impuls) bevart. Derved har vi to likninger til bestemmelse av de to ukjente  $V'$  og  $v'$ . Siden vi regnet  $V$  som positiv, innebærer det at hastigheter rettet mot venstre er positive, mens de som er rettet mot høyre er negative. (Vi kunne selvsagt valgt omvendt fortegnskonvensjon, den vi vanligvis bruker). De to likningene er

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad MV &= MV' + mv' && \text{(bevaring bev.mengde)} \\ \text{(II)} \quad MV^2/2 &= MV'^2/2 + mv'^2/2 && \text{(energibevaring - elastisk støt).} \end{aligned}$$

Likningene kan omskrives til

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad M(V - V') &= mv' \\ \text{(II)} \quad M(V - V')(V + V') &= mv'^2 \end{aligned}$$

Vi dividerer så likning (II) med (I) og finner

$$V + V' = v'.$$

Sammen med likning (I), dividert med  $M$ , gir denne siste likningen umiddelbart

$$v' = \frac{2V}{1 + m/M} = \frac{2M}{M + m}V,$$

og derved, ved (I),

$$V' = \frac{M - m}{M + m}V.$$

Dersom  $m \gg M$  vil vi forvente at  $M$  spretter tilbake. I den grensen gir resultatet over  $V' = -V$ , og  $v' = 0$ , som forventet. Omvendt, dersom  $m \ll M$  vil vi forvente at  $M$  fortsetter med (tilnærmet) uendret hastighet etter støtet. Vårt resultat gir, ganske riktig,  $V' = V$  i denne grensen (der  $v' = 2V$ ).

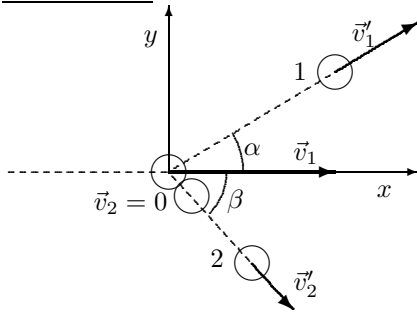
**c.** Snorkreftene etter støtet finnes igjen som summen av vekt og sentrifugalkraft

$$\begin{aligned} S' &= Mg + M\frac{V'^2}{\ell} = Mg \left[ 1 + \frac{V^2}{g\ell} \left( \frac{M - m}{M + m} \right)^2 \right] = \underline{Mg \left[ 1 + 2 \left( \frac{M - m}{M + m} \right)^2 \right]}, \\ s' &= mg + m\frac{v'^2}{\ell} = mg \left[ 1 + \frac{V^2}{g\ell} \left( \frac{2M}{M + m} \right)^2 \right] = \underline{mg \left[ 1 + 2 \left( \frac{2M}{M + m} \right)^2 \right]}. \end{aligned}$$

**d.**

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{2gl} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,00} \text{ m/s} = 4,43 \text{ m/s} \\ V' &= \frac{M - m}{M + m}V = \frac{10 - 20}{20 + 10} \cdot 4,43 \text{ m/s} = -1,48 \text{ m/s} \\ v' &= \frac{2M}{M + m}V = \frac{2 \cdot 10}{20 + 10} \cdot 4,43 \text{ m/s} = 2,95 \text{ m/s} \\ S &= 3Mg = 3 \cdot 0,0100 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 0,294 \text{ N} \\ S' &= 0,120 \text{ N} \\ s' &= 0,371 \text{ N}. \end{aligned}$$

### Oppgave 2.



**a.** Figur til venstre

**b.** De to massene er like og kan derfor forkortes bort fra alle regninger. Bevegelsesmengdebarelse forenkles da til bevarelse av vektorsummen  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ,

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$$

siden puck nr. 2 lå stille før den ble truffet av puck nr. 1. På komponentform blir dette

$$v_1 = v_1' \cos \alpha + v_2' \cos \beta$$

$$0 = v_1' \sin \alpha - v_2' \sin \beta.$$

Med  $\alpha = 30^\circ$  og  $\beta = 45^\circ$  er  $\cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ,  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$  og  $\cos \beta = \sin \beta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ , som gir

$$2v_1 = v_1'\sqrt{3} + v_2'\sqrt{2}$$

$$0 = v_1' - v_2'\sqrt{2}$$

med løsning

$$\underline{v_1' = 29 \text{ m/s} \quad ; \quad v_2' = 21 \text{ m/s.}}$$

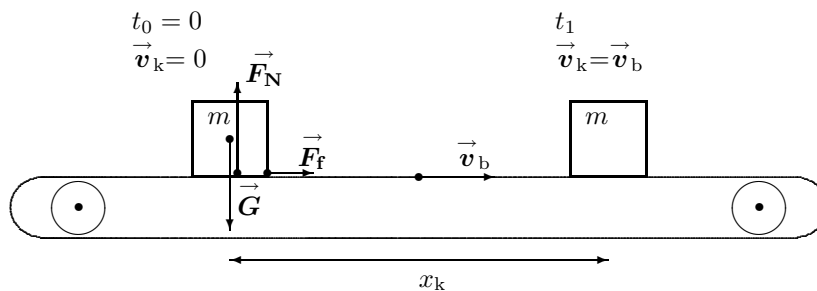
**c.** De kinetiske energiene før og etter støtet er

$$E_K = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad ; \quad E_K' = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2.$$

Det relative energitapet i støtet er derved

$$\frac{E_K - E_K'}{E_K} = \frac{v_1^2 - v_1'^2 - v_2'^2}{v_1^2} = \underline{20\%}.$$

### Oppgave 3.



**a.** De kreftene som virker på legemet er tyngden  $\vec{G}$ , normalkrafta  $\vec{F}_N$  og friksjonskrafta  $\vec{F}_f$ , som vist i figuren. Newtons 2. lov i vertikal retning samt uttrykk for friksjonskraft gir oss

$$F_N = G = mg \quad F_f = \mu_k F_N = \mu_k mg.$$

Kartongens økte kinetiske energi må være lik tilført arbeid. Det er kun friksjonskrafta som gjør arbeid, og dennes arbeid **på kartongen** blir derfor

$$\underline{W_{f,kart} = \Delta E_k = E_k(t_1) - E_k(t_0) = \frac{1}{2}mv_b^2.} \quad (1)$$

**b.** Kartongen har flytta seg strekning  $x_k$  i forhold til laboratoriesystemet (bakken) den tida friksjonskrafta virker (se figuren over). Friksjonsarbeidet er lik friksjonskraft ganger strekning:

$$W_{f,kart} = F_f x_k = \mu_k mg x_k \quad \xrightarrow{(1)} \quad x_k = \frac{v_b^2}{2\mu_k g}.$$

**c.** Akselerasjonen er konstant og da er  $x_k = \langle v \rangle \cdot t_1$ , der  $\langle v \rangle = \frac{1}{2}v_b$  er gjennomsnittsfarten. Dette gir

$$t_1 = \frac{x_k}{\langle v \rangle} = 2 \frac{x_k}{v_b} = \frac{v_b}{\mu_k g}.$$

Akselerasjonen er  $a = F_f/m = \mu_k g$ , og vi kunne alternativt benyttet  $v_k(t_1) = v_b = \frac{v_b}{a} = \frac{v_b}{\mu_k g}$ .

Eller vi kunne bruke impulsloven og få  $F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v \Rightarrow t_1 = \Delta t = \frac{mv_b}{F_f} = \frac{mv_b}{\mu_k mg} = \frac{v_b}{\mu_k g}$ .

**d.** Transportbåndet har beveget seg en avstand  $x_b(t_1) = v_b t_1 = v_b \frac{v_b}{\mu_k g} = \underline{2x_k}$ .

**e.** Bandet flytter seg altså  $2x_k$  den tida friksjonskrafta  $F_f$  virker. Arbeid **på bandet** fra friksjonskrafta er derfor

$$W_{f,\text{band}} = F_f \cdot 2x_k = 2W_{f,\text{kart}} = \underline{mv_b^2},$$

og dette er energi som bandet må tilføres for å holde konstant fart. (At tilført energi er  $2 \times$  friksjonsarbeid vil gjelde uansett størrelse av friksjonskoeffisient, form på pakke o.l.) Vi kan alternativt argumentere med at bandet må tilføres energi tilsvarende friksjonsarbeidet på kartongen (tapt som varme) pluss økning i kinetisk energi (konserverte energi), totalt

$$W_{\text{band}} = W_{f,\text{kart}} + \Delta E_k = 2 \cdot \Delta E_k = \underline{mv_b^2}.$$

#### Oppgave 4.

Hydrogenatomets masse er  $m_H$  og oksygenatomets masse er  $m_O = 16 m_H$ . Massefellespunktet er definert som:

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Vannmolekylets massefellespunkt blir:

$$\begin{aligned} x_{\text{cm}} &= \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{2 \cdot m_H \cdot d \cdot \cos(105^\circ/2)}{m_O + 2m_H} = \frac{2 \cdot m_H \cdot d \cdot \cos(105^\circ/2)}{18 m_H} = \underline{0,068 \cdot d} \\ y_{\text{cm}} &= \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \underline{0} \quad \text{Pga. symmetri om } x\text{-aksen} \end{aligned}$$

Vannmolekylets massefellespunkt ligger altså veldig nærme oksygenatomets massefellespunkt.

#### Oppgave 5.

Når raketten ikke utsettes for ytre krefter, viser utledningen gjort i forelesningene at Newtons 2. lov får formen

$$m(t) \frac{dv}{dt} = \beta u_{\text{ex}}, \quad (2)$$

der  $\beta u_{\text{ex}}$  er skyvkrafta, med  $\beta$  som forbrenningsraten og  $u_{\text{ex}}$  eksosgassens relative hastighet.

**a.** Med oppgitte verdier for forbrenningsraten  $\beta$  og relativ hastighet  $u_{\text{ex}}$ , blir skyvkrafta

$$\beta \cdot u_{\text{ex}} = 480 \text{ kg/s} \cdot 3,27 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 1,57 \cdot 10^6 \text{ N} = \underline{1,57 \text{ MN}}.$$

**b.** Etter forbrenningen er massen redusert til

$$m(t_b) = m_0 - \beta t_b = 2,55 \cdot 10^5 \text{ kg} - 480 \text{ kg/s} \cdot 50 \text{ s} = \underline{2,31 \cdot 10^5 \text{ kg}}.$$

Kapteinen har ennå mye drivstoff (181-24=157 tonn) til rådighet!

**c.** Hastighetsendringen finnes ved å integrere likn. (2) fra  $t = 0$  til  $t = t_b$ . Med  $m(t) = m_0 - \beta t$  gir dette

$$\begin{aligned} \int_{v(0)}^{v(t_b)} dv &= \beta u_{\text{ex}} \int_0^{t_b} \frac{dt}{m_0 - \beta t} = \beta u_{\text{ex}} \left[ -\frac{1}{\beta} \ln(m_0 - \beta t) \right]_0^{t_b} \\ v(t_b) - v(0) = \Delta v &= u_{\text{ex}} \ln \frac{m_0}{m_0 - \beta t_b} = 3,27 \text{ km/s} \cdot \ln \frac{2,55}{2,31} = \underline{323 \text{ m/s}} \quad (= 1163 \text{ km/h}). \end{aligned}$$