Løsningsforslag øving 5

Oppgave 1

a) Se tabell 4.2 i lærboka side 149. Denne tabellen sammen med generell elemineringsteknikk gir løsningen:

O1: D O2: B O3: A O4: C O5: E O6: F

b) I tabellen fra øving 4 finner vi sprangresponsen for et 2. ordens system med $\zeta < 1$. Vi vet at vi har lokale ekstrema hvilket vil si at $\sin(\beta t_1) = 1$ og $\sin(\beta t_2) = -1$. Dette bruker vi når vi setter inn de oppgitte verdiene og får følgende to likninger:

$$h(t_1) = K\frac{\omega_0^2}{\beta}e^{-\alpha t_1} = 0.8 \tag{1}$$

$$h(t_2) = -K\frac{\omega_0^2}{\beta}e^{-\alpha t_2} = -0.25 \tag{2}$$

I tillegg har vi at:

$$t_2 - t_1 = \frac{\pi}{\beta} \tag{3}$$

Vi kan kombinere likning (1) og (2):

$$\frac{h(t_1)}{h(t_2)} = \frac{K\frac{\omega_0^2}{\beta}e^{-\alpha t_1}}{K\frac{\omega_0^2}{\beta}e^{-\alpha t_2}} = \frac{e^{-\alpha t_1}}{e^{-\alpha t_2}} = \frac{0,8}{-(-0,25)} = \frac{0.8}{0.25} \tag{4}$$

Dette kan vi kombinere med likning (3)

$$\frac{e^{-\alpha t_1}}{e^{-\alpha t_2}} = e^{\alpha(t_2 - t_1)} = e^{\frac{\pi}{\beta}} = \frac{0.8}{0.25} \tag{5}$$

Som skrives om til:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{ln\left(\frac{0.8}{0.25}\right)}{\pi} \tag{6}$$

$\frac{\alpha}{\beta} = tan(\varphi)$, noe som medfører at φ vi kan skrive om til formen:

$$\varphi = arctan\left(\frac{ln\left(\frac{0.8}{0.25}\right)}{\pi}\right) \tag{7}$$

Tatt i betraktning at $\zeta = sin(\varphi)$ får vi følgende utrykk for ζ:

$$\zeta = sin\left(arctan\left(\frac{ln\left(\frac{0.8}{0.25}\right)}{\pi}\right)\right) \approx \underline{0.35} \tag{8}$$

Svaralternativ B, 0.35 er korrekt.

Merk at vi ikke trenger verdiene til tidspunktene $t1$ og $t2$. Dette er et vesentlig poeng ved oppgaven: Når det er *relativ* dempingsfaktor vi er ute etter, trenger vi bare å vite hvor mye oscillasjonene avtar per (halv) periode, men (halv)periodens virkelige lengde (og posisjon langs t-aksen) er uinteressant. Med andre ord gjelder oppgaven, og resultatet, uansett hvor hurtig eller langsomt systemet er.

Oppgave 2

Likning (2.1) i boka gir

$$m_1 c_1 \dot{x}_1 = u_1 - g_1 (x_1 - x_2) \tag{9}$$

Vi ser bort i fra dynamikken i varmeelementet, noe som er ekvivalent med å sette $c_1 m_1 = 0$. Da har vi ingen akkumulering av energi i varmeelementet. Likning (9) gir da:

$$u_1 = g_1 (x_1 - x_2) = u \tag{10}$$

Likning (2.2) i boka, sammen med (10), gir:

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_2 c_2} (u + q\rho c_2 v_1 - q\rho c_2 x_2 - g_2 (x_2 - v_2(s))) \tag{11}$$

Vi ønsker likningen på formen:

$$y(s) = x_2(s) = \frac{K}{1 + Ts} (u(s) + v(s)) \tag{12}$$

Laplacetransformasjon av (11) gir:

$$\begin{aligned}
s x_2(s) &= \frac{1}{m_2 c_2} (u(s) + q\rho c_2 v_1(s) - q\rho c_2 x_2(s) - g_2 (x_2(s) - v_2(s))) && (13) \\
\left(s + \frac{q\rho c_2 + g_2}{m_2 c_2}\right) x_2(s) &= \frac{1}{m_2 c_2} (u(s) + q\rho c_2 v_1(s) + g_2 v_2(s)) && (14) \\
x_2(s) &= \frac{\frac{1}{m_2 c_2}}{s + \frac{q\rho c_2 + g_2}{m_2 c_2}} (u(s) + (q\rho c_2 v_1(s) + g_2 v_2(s))) && (15) \\
x_2(s) &= \frac{\left(\frac{1}{q\rho c_2 + g_2}\right)}{1 + \left(\frac{m_2 c_2}{q\rho c_2 + g_2}\right) s} (u(s) + (q\rho c_2 v_1(s) + g_2 v_2(s))) && (16)
\end{aligned}$$

Dermed:

a)

$$T = \underline{\underline{\frac{m_2 c_2}{q\rho c_2 + g_2}}} \tag{17}$$

b)

$$K = \underline{\underline{\frac{1}{q\rho c_2 + g_2}}} \tag{18}$$

c)

$$v = \underline{\underline{q\rho c_2 v_1 + g_2 v_2}} \tag{19}$$

Oppgave 3

Sprangresponsen $k_1(t)$:

$$k_1(t) = \underline{\underline{\mu_1(t-1)}}$$

Sprangresponsen $k_2(t)$:

Vi multipliserer først med 8 over og under brøkstreken, og utfører så divisjon:

$$\begin{array}{l} \big(s^2-4s+8\big) \quad : \big(s^2+4s+8\big) = 1 \\ \underline{-(s^2+4s+8)} \\ \quad -8s \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$h_2(s) = 1 - \frac{8s}{s^2+4s+8}$$

$$k_2(s) = h_2(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{8}{s^2+4s+8}$$

$$\Downarrow$$

$$k_2(t) \quad = \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{8}{s^2+4s+8}\right)}_{\text{fra tabell i appendiks B eller øving 4}} = \underline{\underline{1 - 4e^{-2t}\sin 2t}}$$

Sprangresponsene er skissert i figur 1.

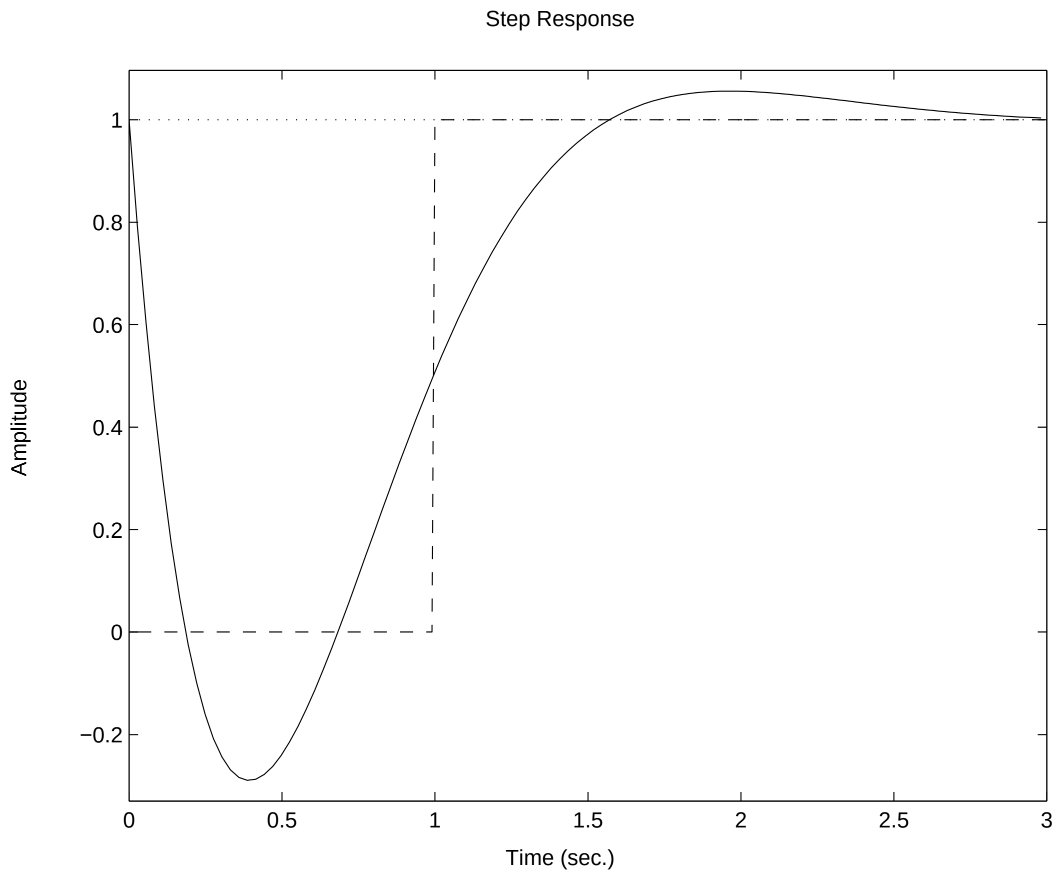

Figure 1: Sprangresponsene $k_1(t)$ (stiplet) og $k_2(t)$ (heltrukket)