

# TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)

## Løsningsforslag for øving 6

### Oppgave 1.

**a.** Treghetsmomentet til ei skive er  $I_0$ , og treghetsmomentet til begge skivene er  $2I_0$ . Spinnnet må være bevart siden det er ingen netto kraftmoment på skivene:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{tot}} = \frac{dL}{dt} = 0 & \Rightarrow L_i = L_f \\ I_0 \omega_i = 2I_0 \omega_f & \Rightarrow \omega_f = \frac{\omega_i}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

**b.** Endringen i kinetisk energi er:

$$\Delta E_k = E_{k,2} - E_{k,1} = \frac{1}{2} \cdot 2I_0 \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_0 \omega_i^2 = I_0 \frac{1}{4} \omega_i^2 - \frac{1}{2} I_0 \omega_i^2 = -\frac{1}{4} I_0 \omega_i^2 \quad (2)$$

Halve rotasjonsenergien går over til varme pga friksjonen mellom platene. Slik var det også for translasjonsenergien når en kartong ble sluppet ned på et transportband i en tidligere øving.

### Oppgave 2.

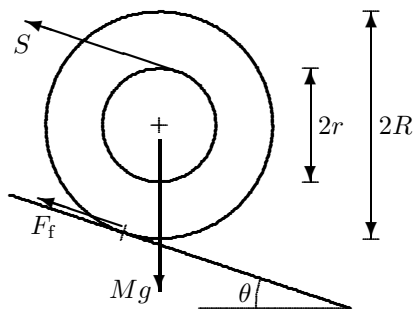
**a.** Treghetsmomentet til skiva er  $I_s = \frac{1}{2} MR^2$ , og treghetsmomentet til ett prosjektil skutt inn i skiva ved radius  $r$  er  $I_p = mr^2$ . Det totale treghetsmomentet for skiva med  $n$  prosjektil blir:

$$I_{\text{tot}} = I_s + nI_p = \frac{1}{2} MR^2 + nmr^2 \quad (3)$$

**b.** Ved starten er det kun prosjektilene som har spinn, dvs  $L_i = nL_0$ . Når prosjektilene treffer skiva, vil skiva starte å rotere. Skiva med  $n$  prosjektiler vil få en vinkelhastighet  $\omega_f$ , og spinnnet er  $L_f = I_{\text{tot}} \omega_f$ . I denne prosessen er spinnnet bevart:

$$\begin{aligned} L_i &= L_f \\ nL_0 &= I_{\text{tot}} \omega_f \\ \omega_f &= \frac{nL_0}{I_{\text{tot}}} = \frac{nL_0}{\frac{1}{2} MR^2 + nmr^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

### Oppgave 3.



**a.** Her har vi fire ukjente:  $\theta_0$ ,  $S$ ,  $F_f$ ,  $F_N$ . Dette krever fire likninger. Når snella holdes i ro av snora og friksjonen, gjelder Newton 1:

$$\text{Normalt skråplan: } \sum F_{\perp} = 0 \Rightarrow F_N = Mg \cos \theta \quad (\text{I})$$

$$\text{Langs skråplan: } \sum F_{\parallel} = 0 \Rightarrow Mg \sin \theta = F_f + S \quad (\text{II})$$

hvor  $F_f$  er friksjonskrafta.

$$\text{Spinnlikning: } \sum \tau = 0 \Rightarrow S r = F_f R \quad (\text{III})$$

$$\text{Statisk friksjonskraft kan ligge mellom null og en øvre grense: } F_f \leq \mu_S F_N = \mu_S Mg \cos \theta \quad (\text{IV})$$

Ved grensa  $\theta = \theta_0$  – dvs. der hvor snella akkurat glipper fra underlaget og begynne å rulle/slure – er friksjonskrafta lik det maksimale:  $F_f = \mu_S Mg \cos \theta_0$ .

Likning (III) gir  $S = (R/r)F_f$  som settes inn i likn. (II) og gir

$$Mg \sin \theta_0 - F_f - (R/r)F_f = 0 \quad (5)$$

Innsetting i dette av grenseverdien av  $F_f$  gir ei likning for  $\theta_0$ :

$$Mg \sin \theta_0 = \mu_S Mg \cos \theta_0 (1 + R/r) \quad \Rightarrow \quad \tan \theta_0 = \mu_S (1 + R/r), \quad (6)$$

og dermed

$$\theta_0 = \arctan [\mu_S (1 + R/r)], \quad (7)$$

og snorkrafta

$$S = \frac{R}{r} F_f = \frac{R}{r} \mu_S Mg \cos \theta_0, \quad \text{Alternative uttrykk: } S = \frac{mgR}{r+R} \sin \theta_0 = Mg (\sin \theta_0 - \mu_S \cos \theta_0). \quad (8)$$

**b.** Når snella har begynt å slure, må likn. (II) og (III) erstattes av Newtons 2.lov. Vinkelen er nå gitt lik  $\theta (\geq \theta_0)$ , og de fire ukjente blir:  $a$ ,  $S_1$ ,  $F_f$ ,  $F_N$ . Snorkrafta blir en annen enn tidligere, derfor nytt symbol, og akselerasjonen  $a$  langs skråplanet blir en ukjent. Friksjonskrafta nå er gitt av den *kinetiske* friksjonskoeffisienten  $\mu_K$ :

$$F_f = \mu_K F_N = \mu_K Mg \cos \theta. \quad (9)$$

Likning (I) bestemmer  $F_N$  og likn. (9) bestemmer  $F_f$ , slik at vi har igjen bare to ukjente,  $a$  og  $S_1$ . To likninger:

$$\text{Newton 2 langs skråplan: } \sum F_{||} = Ma \quad \Rightarrow \quad Mg \sin \theta - F_f - S_1 = Ma \quad (\text{IIb})$$

$$\text{Spinnlikning: } \sum \tau = I\dot{\omega} \quad \Rightarrow \quad -F_f R + S_1 r = I\dot{\omega} \quad (\text{IIIb})$$

der  $I$  = treghetsmomentet om hjulaksen. Vi har valgt  $a$  positiv nedover og positiv  $\omega$  mot klokka (= den retningen der virkelig går). Når snella rutsjer nedover rulles snora ut med hastighet  $v = \omega r$  (IKKE  $v = \omega R$ !), og  $\dot{\omega} = \dot{v}/r = a/r$ . N2-likningene (IIb) og (IIIb) gir da (vi venter litt med å sette inn for  $F_f$ ):

$$Mg \sin \theta - F_f - S_1 = Ma \quad (10)$$

$$-F_f R + S_1 r = I(a/r). \quad (11)$$

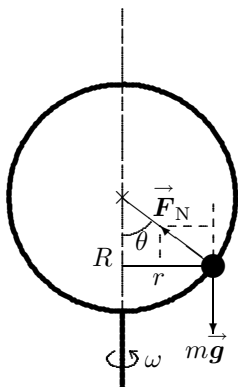
To likninger og to ukjente ( $a$  og  $S_1$ ). Eliminerer  $S_1$  fra likn. (10) og setter inn i likn. (11):

$$S_1 = Mg \sin \theta - F_f - Ma \xrightarrow{(11)} -F_f R + Mgr \sin \theta - F_f r = I(a/r) + Mar. \quad (12)$$

Løsning av  $a$ , litt smarte divisjoner og innsetting av  $F_f$  gir

$$a = g \frac{\sin \theta - \mu_K \cos \theta (1 + \frac{R}{r})}{1 + I/(Mr^2)}. \quad (13)$$

#### Oppgave 4.



**a.** Om vi analyserer med Newtons lover i labsystem eller i et system som følger kula og betrakter sentrifugalkraften, skjønner vi at kula pga. tyngdekraften må legge seg i bunnen ( $\theta = 0$ ) når  $\omega = 0$  og ved svært stor hastighet vil kula presses så langt ut som mulig, dvs.  $\theta \rightarrow 90^\circ$  når  $\omega \rightarrow \infty$ .

**b.** To krefter virker på kula: Tyngdekraft  $m\vec{g}$  og normalkraft fra underlaget:  $\vec{F}_N$ . Normalkrafta kan dekomponeres i vertikal og horisontal retning, se nedenfor.

**c.** Når kula er i "likevekt", roterer den med ringen i en avstand  $r = R \sin \theta$  fra rotasjonsaksen (se figuren). Rotasjonshastigheten er:

$$v = \frac{\text{omkrets}}{\text{omløpstid}} = \frac{2\pi r}{2\pi/\omega} = \omega r.$$

I  $z$ -retning (langs rotasjonsaksen) er et ingen akselerasjon, slik at sum av krefter må være lik null:

$$mg = F_N \cdot \cos \theta \quad \Rightarrow \quad F_N = \frac{mg}{\cos \theta}$$

I radiell retning har vi sentripetalakselerasjon  $a_c = \omega^2 r = \omega^2 R \sin \theta$ , og den eneste krafta som kan bidra til dette er komponenten av  $F_N$  i radiell retning. Derfor:

$$ma_c = F_N \cdot \sin \theta \quad \Rightarrow \quad m\omega^2 R \sin \theta = \frac{mg}{\cos \theta} \cdot \sin \theta \quad (14)$$

Vi løser mhp.  $\theta$  og finner hva likevektsvinkelen er for gitt  $\omega$ :

$$\cos \theta = \frac{g}{\omega^2 R} \quad \text{eller} \quad \theta(\omega) = \arccos \frac{g}{\omega^2 R}. \quad (15)$$

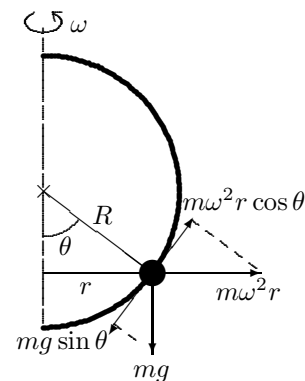
**d.** Grenseverdien  $\omega \rightarrow \infty$  gir  $\theta(\omega) = \arccos 0 = \pi/2$  som stemmer med det vi resonnerer oss frem til under pkt.a.

Men for små verdier av  $\omega$  er resultatet ikke helt som ventet! Som kjent kan ikke  $\cos \theta$  bli større enn 1, slik at når  $\frac{g}{\omega^2 R} > 1$  har ikke likn. (15) løsning.

For å forstå fysikken bak dette, kan vi velge å se det fra koordinatsystem som følger kula, slik at vi inkluderer sentrifugalkrafta  $F_s = m\omega^2 r = m\omega^2 R \sin \theta$ . Se figuren. Denne vil trekke kula *oppover* ringen med sin komponent  $F_s \cos \theta$ , mens tyngdens komponent  $mg \sin \theta$  trekker nedover ringen. Skal kula stå i ro må disse være like:

$$mg \sin \theta = m\omega^2 R \sin \theta \cdot \cos \theta. \quad (16)$$

Når faktoren  $\sin \theta$  forkortes bort, gjenstår den konstante vekta  $mg$ , som skal balanseres mot sentrifugalkraftleddet  $m\omega^2 R \cos \theta$ . Men når  $\omega$  blir liten nok, har dette leddet ingen sjanse i konkurransen, konstanten  $mg$  vinner uansett og likevektsposisjon blir i bunnen av ringen,  $\theta = 0$ . Eneste mulighet å oppfylle likn. (16) og (14) er at  $\sin \theta = 0$ . Denne løsningsmuligheten mister vi når vi forkorter med  $\sin \theta$  for å oppnå likn. (15).



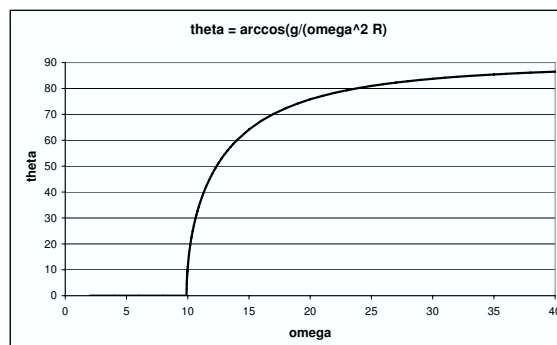
**e. Tallverdier:** Med  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$  får vi

A.  $\omega = 2\pi \cdot 3 \text{ s}^{-1} = 18,85 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \theta = \arccos \left( \frac{9,81 \text{ m/s}^2}{(18,85 \text{ s}^{-1})^2 \cdot 0,10 \text{ m}} \right) = \arccos(0,276) = \underline{74^\circ}.$

B.  $\omega = 2\pi \cdot 1 \text{ s}^{-1} = 6,28 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \theta = \arccos \left( \frac{9,81}{(6,28)^2 \cdot 0,10} \right) = \arccos(2,48).$

Men  $\cos \theta$  kan ikke bli større enn 1, som betyr at det ikke finnes noen vinkel som svarer til  $\arccos(2,48)$ , som diskutert ovenfor. Ved rotasjonsfrekvenser under grensetilfellet  $\cos \theta = g/\omega^2 R \equiv 1$  vil kula forbli ved  $\theta = 0$ . Denne minste frekvensen er  $\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{R}} = 9,90 \text{ s}^{-1}$ , dvs.  $f_{\min} = \frac{1}{2\pi} \cdot \omega = 1,6 \text{ Hz}$ .

En graf av  $\theta(\omega) = \arccos \frac{g}{\omega^2 R}$  vil forklare hva som skjer (se figuren). Grafen viser at  $\theta$  øker veldig brått når grensehastigheten  $\omega_{\min}$  er passert. Merk deg at det ikke er friksjonen som er årsak til dette forløpet, vi har null friksjon mellom kule og ring.

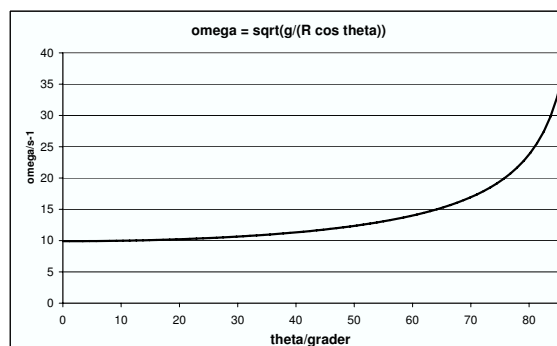


**f.** For kjeglependelen er snorkrafta  $S$  analog med normalkrafta  $F_N$  ovenfor. Ellers er argumentasjonen helt lik og likn. (15) gir

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R \cos \theta}}.$$

Graf til høyre. For  $\theta \rightarrow 90^\circ$  vil  $\omega \rightarrow \infty$ . For  $\theta \rightarrow 0^\circ$  vil  $\omega \rightarrow \sqrt{\frac{g}{R}}$ .

For kjeglependelen er det naturlig å betrakte vinkelen  $\theta$  som pådraget mens resultatet er vinkelhastigheten  $\omega$  som pendelen innstiller seg på. Ved eksperimenter finner vi at  $\omega$  nærmer seg en fast verdi (ikke null) når  $\theta$  går mot null. Vi ser av uttrykket over at denne verdien er  $\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{R}}$ . Det er det samme vi observerer i ringproblemet ovenfor, men her er  $\omega$  pådraget: Når vi lar rotasjonen bli langsam har vi løsning bare inntil frekvensen er  $\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{R}}$ . Under denne frekvensen har vi bare løsningen  $\theta = 0$  og ringen faller brått ned.



Det kan bemerkes at en planpendel med lengde  $R$  har ved små vinkelutslag den samme frekvensen:  $\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{R}}$  (forelesning eller Ch. 14.5 i Y & F). En planpendel får noe lavere  $\omega$  ved større vinkelutslag, mens en kjeglependel får høyere  $\omega$  ved større vinkelutslag.