TTK 4240 – Løsningsforslag 7

Utlervert dato: 01.10.2015
Veiledningstime: 09.09.2015
Innleveringsfrist: 13.10.2015
Ansvarlig: Atle Rygg (atle.rygg@itk.ntnu.no)

1 TRANSFERFUNKSJON TIL FØRSTE ORDENS FILTRE

For hvert av filtrene, gjør følgende:

a) Sett opp transferfunksjonen $H(s)=\frac{V_o}{V_i}$ for, og finn også $H(j\omega)$

Svar:

Finner transferfunksjonene direkte ved å bruke spenningsdeling:

$$H_a(s)=\frac{R}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{sRC}{1+sRC} \qquad H_b(s)=\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{1}{1+sRC} \qquad H_c(s)=\frac{R}{R+sL} \qquad H_d(s)=\frac{sL}{R+sL}$$

$$H_a(j\omega)=\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC} \qquad H_b(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega RC} \qquad H_c(j\omega)=\frac{R}{R+j\omega L} \qquad H_d(j\omega)=\frac{j\omega L}{R+j\omega L}$$

b) Finn et uttrykk for knekkfrekvensen

Knekkfrekvensen er den frekvensen hvor utgangen er redusert med en faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ i forhold til sin maksimalt oppnåelige verdi. Den maksimale verdien er ofte lik inngangsignalet. I disse tilfellene finner vi dermed knekkfrekvensen ved å sette $|V_o|=\frac{|V_i|}{\sqrt{2}} \Rightarrow |H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{2}}$:

Filter a):

$$|H_a(j\omega_c)|=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$
$$\Rightarrow 1+(\omega_c RC)^2=2(\omega_c RC)^2 \Rightarrow \omega_c=\frac{1}{RC}$$

Filter b):

$$|H_b(j\omega_c)|=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$
$$\Rightarrow 1+(\omega_c RC)^2=2 \Rightarrow \omega_c=\frac{1}{RC}$$

Filter c)

$$|H_c(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega_c L)^2}}$$

$$\Rightarrow R^2 + (\omega_c L)^2 = 2R^2 \Rightarrow \omega_c = \frac{R}{L}$$

Filter d)

$$|H_d(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\omega_c L}{\sqrt{R^2 + (\omega_c L)^2}}$$

$$\Rightarrow R^2 + (\omega_c L)^2 = 2(\omega_c L)^2 \Rightarrow \omega_c = \frac{R}{L}$$

Med andre ord, filter a) og b) har samme knekkfrekvens, samt filter c) og d) har samme knekkfrekvens. Men filteret trenger ikke ha samme oppførsel likevel, se neste deloppgave...

c) Bestem om de er et lavpassfilter eller et høypassfilter. Prøv å svar på denne oppgaven gjennom å betrakte kretsens oppførsel for veldig lave (0 Hz) og veldig høye (∞ Hz) frekvenser.

Svar:

Filter a): Dette er et *høypassfilter* siden kondensatoren sperrer for lave frekvenser, men blir en tilnærmet kortslutning for høye frekvenser. Vi kan også konkludere dette fra transferfunksjonen:

$$H_a(j0) = \frac{0}{1+0} = 0 \quad , \quad H_a(j\infty) = \frac{1}{\frac{1}{j\omega RC} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{\infty} + 1} = 1$$

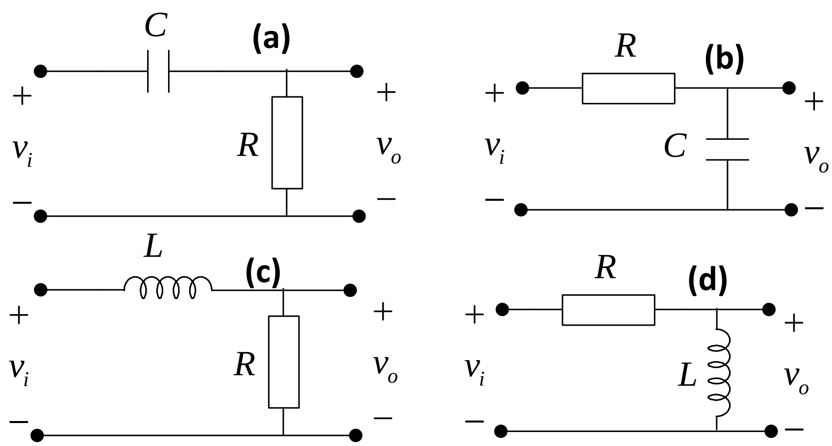
Filter b): Dette er et *lavpassfilter* siden utgang blir lik inngang for lave frekvenser (basert på antagelsen fra introduksjonen om at utgangsterminalene er åpne). For høye frekvenser oppfører kondensatoren seg som en kortslutning, og utgangspenningen vil kollapse til null. Kan også vises ved transferfunksjonen:

$$H_b(j0) = \frac{1}{1+0} = 1 \quad , \quad H_b(j\infty) = \frac{1}{1 + j\infty RC} = 0$$

Filter c): Dette er et *lavpassfilter* siden spolen oppfører seg som en kortslutning for lave frekvenser, dermed blir utgang lik inngang. For høye frekvenser oppfører spolen seg som en kortslutning, og utgang blir lik null siden det går ingen strøm gjennom motstanden. Kan også vises ved transferfunksjonen:

$$H_c(j0) = \frac{R}{R + j0L} = 1 \quad , \quad H_c(j\infty) = \frac{R}{R + j\infty L} = 0$$

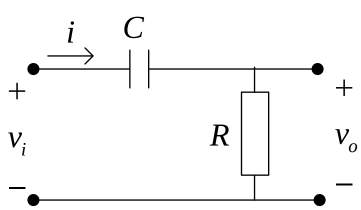
Filter d): Dette er et *høypassfilter* siden spolen vil gjøre at utgangen blir kortsluttet for lave frekvenser. For høye frekvenser går det ingen strøm i spolen og utgang blir lik inngang. Kan også vises ved transferfunksjonen: $H_d(j0) = \frac{j0L}{R + j0L} = 0 \quad , \quad H_d(j\infty) = \frac{j\infty L}{R + j\infty L} = 1$



Figur 1: Fire første ordens filtre

2 DESIGN AV RC HØYPASSFILTER

Figur 2 viser et RC høypassfilter (første orden) mellom inngang v_i og utgang v_o .



Figur 2: RC høypassfilter

I denne oppgaven skal vi dimensjonere høypassfilteret etter to kriterier:

- Knekkfrekvens lik $f_c = 500\ Hz$
- Aktive tap i filteret skal begrenses til $2\,W$ når inngangsspenningen er 10 V, og frekvensen er lik knekkfrekvensen

a) Finn verdiene til R og C som oppfyler kriteriene over. Hva er båndbredden til filteret? Hva er tidskonstanten?

Svar: Setter først opp transferfunksjonen mellom inngang og utgang:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sRC}{sRC + 1}$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1}$$

Knekkfrekvensen er den frekvensen hvor amplituden til *H* er redusert til $\frac{1}{\sqrt{2}}$ av maksimalverdien.

Maksimalverdien er her lik 1 (når $\omega \to \infty$). Finner et uttrykk for knekkfrekvensen

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \left| \frac{j\omega_c RC}{j\omega_c RC + 1} \right| = \frac{\omega_c RC}{\sqrt{(\omega_c RC)^2 + 1}}$$

$$(\omega_c RC)^2 + 1 = 2(\omega_c RC)^2$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

Tapene i filteret er lik tapene i motstanden *R*. Setter opp et uttrykk for disse, og benytter samtidig at frekvensen er lik knekkfrekvensen ω_c :

$$P_{loss} = 2 = \frac{|V_o|^2}{R} = \frac{|V_i|^2 \frac{(\omega_c RC)^2}{(\omega_c RC)^2 + 1}}{R} = |V_i|^2 \frac{R(\omega_c C)^2}{(\omega_c RC)^2 + 1}$$

$$(\omega_c RC)^2 + 1 = \frac{10^2}{2} R(\omega_c C)^2$$

Vi kan så benytte oss av relasjonen ovenfor, dvs. $\omega_c = \frac{1}{RC}$:

$$P_{loss} = 2 = 10^2 \frac{1}{R} \frac{1^2}{1^2 + 1}$$

$$R = \frac{10^2}{4} = 25 \ \Omega$$

$$C = \frac{1}{2\pi 500 \cdot R} = 12.73 \ \mu F$$

Båndbredden er definert som frekvensområdet hvor filteret lar inngangssignalet «passere». Definisjonen henger nøye sammen med definisjonen på knekkfrekvens, og er ekvivalent med frekvensområdet hvor $\frac{V_o}{V_i} > \frac{1}{\sqrt{2}}$. For et høypassfilter er dermed båndbredden lik alle frekvenser over knekkfrekvensen. Med andre ord, båndbredden til dette filteret er $500 < f < \infty \ Hz$

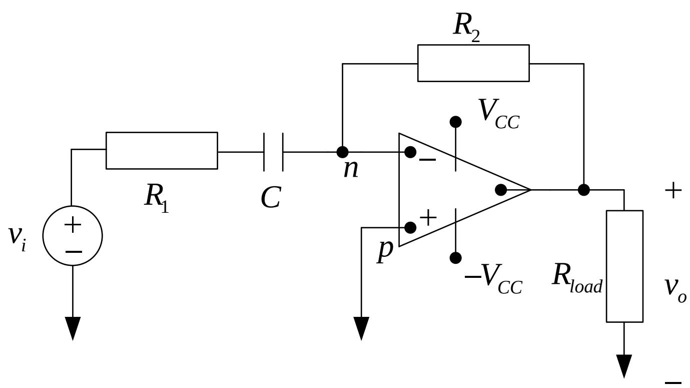
Tidskontanten til en RC-krets er alltid definert som $\tau = RC = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{2\pi 500} = 318 \ \mu s$

3 AKTIVT HØYPASSFILTER (OPERASJONSFORSTERKER)

Vi skal i denne oppgaven analysere oppførselen til kretsen vist i Figur 3. Denne representerer et første ordens aktivt høypassfilter. Betydningen av ordet *aktiv* er relatert med operasjonsforsterkeren, og dens evne til å regulere utgangsspenning basert på differansen mellom inngangsspenningene.

Bruk følgende tallverdier:

$R_1 = 10\ k\Omega$
$R_2 = 10\ k\Omega$
$C = 100\ \mu F$



Figur 3: Første ordens aktivt høypassfilter

a) Finn transferfunksjonen til filteret, dvs. $H(s) = \dfrac{V_o(s)}{V_i(s)}$. Hva blir knekkfrekvensen og båndbredden til filteret?

Svar:

Setter opp Kirchoffs spenningslov i node «n», og benytter samtidig at spenningen $v_n = v_p = 0$:

$$\frac{0 - V_i}{R_1 + \frac{1}{sC}} + \frac{0 - V_o}{R_2} = 0$$

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{sC}} = -\frac{sR_2C}{sR_2C + 1} = -\frac{s}{s+1}$$

Knekkfrekvensen er frekvensen hvor $|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \max\left(|H(j\omega_c)|\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|H(j\omega_c)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c = 1 \text{ rad/s}$$

Båndbredden til et høypassfilter er lik alle frekvenser høyere enn knekkfrekvensen: $1 < \omega < \infty$ rad/s

4 AKTIVT LAVPASSFILTER, KNEKKFREKVENS OG BODEPLOTT

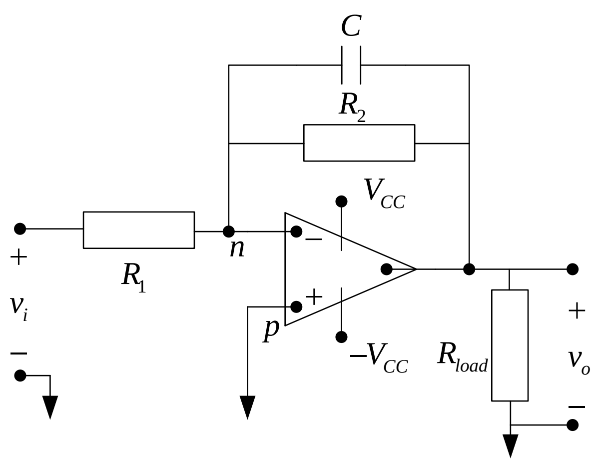
a) Vis at transferfunksjonen blir $H(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+sR_2C}$

(NB: Vi antar her at operasjonsforsterkeren ikke går i metning)

Svar: Bruker KCL i node «n»:

$$\frac{V_i}{R_1} + V_o\left(\frac{1}{R_2} + sC\right) = 0$$

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + sR_1C} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+sR_2C}$$



Figur 4: Høyre: aktivt lavpassfilter:

b) Finn et uttrykk for knekkfrekvensen til filteret

Svar:

Finner først et uttrykk for amplituden til transferfunksjonen:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \left(\omega R_1 C\right)^2}} = \frac{R_2}{R_1}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\omega R_2 C\right)^2}}$$

For lave frekvenser så er amplituden lik $K = \frac{R_2}{R_1}$, dette kalles «passband gain» i Nilson&Riedel. Observer at dette er den maksimale amplituden til transferfunksjonen, dermed er knekkfrekvensen definert ved at $|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{R_2}{R_1}$, og vi finner den som følger:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_2}{R_1}\frac{1}{\sqrt{1+(\omega_c R_2 C)^2}}$$
$$\Rightarrow \sqrt{1+(\omega_c R_2 C)^2} = \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow \omega_c = \frac{1}{R_2 C}$$

I neste deloppgave, bruk at $C = 100\ \mu F$, $R_2 = 10\ k\Omega$

c) Ved hjelp av MATLAB sin *bode()*-funksjon, lag plott av $H(j\omega)$ sin amplitude og vinkel for følgende verdier av $R_1 = \{1,10,100\}\ k\Omega$. Identifiser knekkfrekvensen grafisk, og se om dette stemmer med beregnet verdi fra b). Se i hint-seksjonen for tips ang. MATLAB.

Svar:

Følgende kode løser oppgaven:

```
clear all;

C=100e-6;
R2=10e3;

s=tf('s'); % MATLAB-syntaks for å definere Laplace-operatoren "s"

R1_a=1e3;
R1_b=10e3;
R1_c=100e3;

H_a = - (R2/R1_a) * 1/(1+s*R2*C);
H_b = - (R2/R1_b) * 1/(1+s*R2*C);
H_c = - (R2/R1_c) * 1/(1+s*R2*C);

figure(1); % Oppretter ny figur
cla; % Tømmer figurvinduet
hold on; % Tillater at flere grafer kan plottes i samme vindu
bode(H_a,'bx-');
bode(H_b,'rd-');
bode(H_c,'k');
grid on;
legend('R1_a','R1_b','R1_c');
```

Ser at det kun er amplituden til $H(j\omega)$ som blir påvirket av R_1, dette er forventet av uttrykket fra a). Amplituden reduseres med 20 dB for hver gang vi multipliserer motstanden med 10, dette er i henhold til definisjonen av desibel siden $|H(j\omega)|$ er omvendt proporsjonal med R_1.

For å finne knekkfrekvensen grafisk må vi finne frekvensen der amplituden er reduser til $\frac{1}{\sqrt{2}}$ av den initielle verdien. Dette tilsvarer $20\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3\,dB$ Dette er forsøkt vist ved piler og linjer i figuren.

Knekkfrekvensen er lik for alle tre verdiene til R_1: $\omega_c = 10^0 = 1\text{ rad/s}$. Innsatt numeriske verdier fra b):

$$\omega_c = \frac{1}{R_2 C} = 1\text{ rad/s}$$

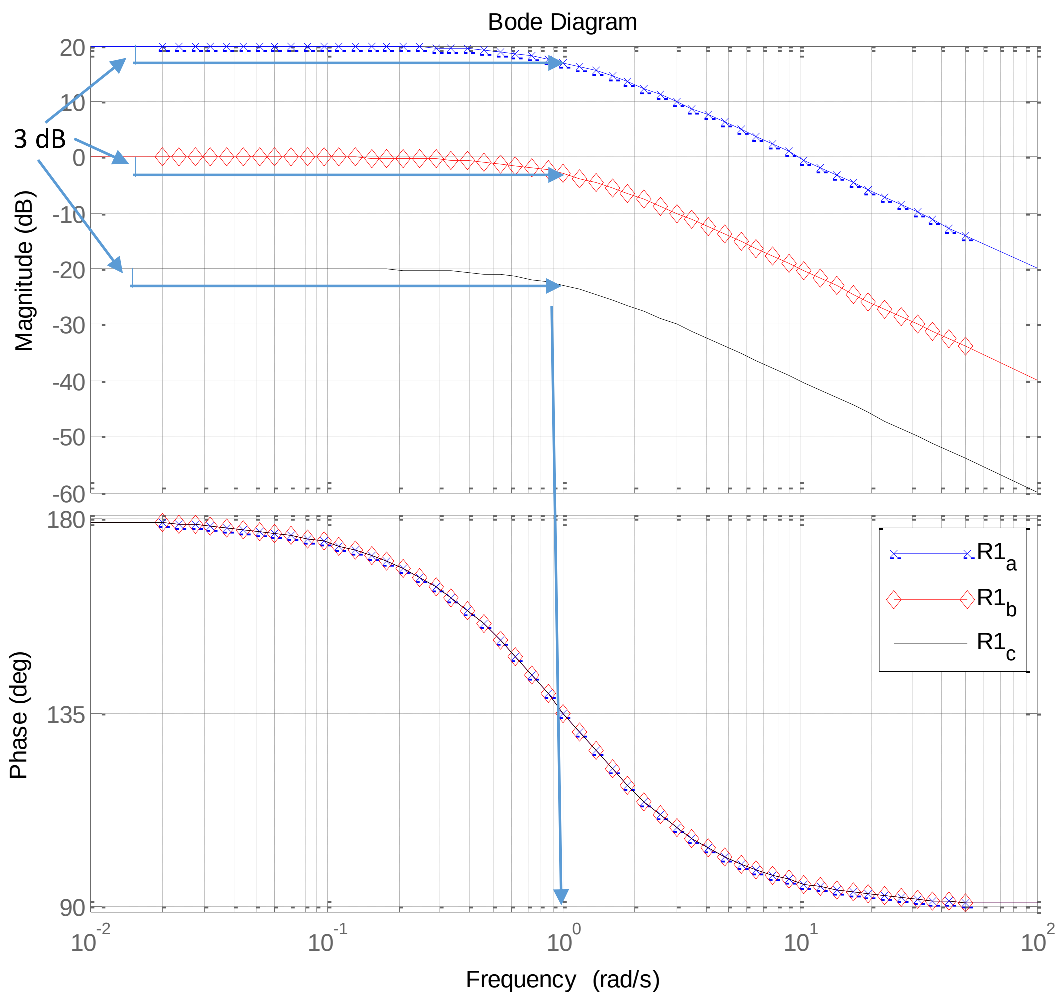


Figure 1: Bodeplott til oppgave 5c