TTK 4240 – Løsningsforslag øving 1

Utlervert dato: 17.08.2015
Veiledningstime: 28.08.2015
Innleveringsfrist: 02.09.2015
Ansvarlig: Atle Rygg (atle.rygg@itk.ntnu.no)

Oppgave 1 – RMS

a) For det periodiske spenningssignalet gitt av Figur 1, hvor stor er periodetiden T?

Svar: Periodetiden finnes ved å observere at etter **T=100 us** så repeterer spenningsforløpet seg selv

b) Hva blir RMS-verdien til signalet?

Svar: Benytter definisjonen av RMS:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}\left(v(t)\right)^2}$$

Det er ikke nødvendig å sette opp uttrykket for funksjonen *v(t)* siden integralet kan finnes ved å summere bidraget fra hvert lineære segment:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}\left(v(t)\right)^2}$$

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{100}\left(10^2 \cdot 25 + 20^2 \cdot 25 + (-20)^2 \cdot 25 + (-10)^2 \cdot 25\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{100}\left(2 \cdot 100 + 2 \cdot 400\right)} = \sqrt{250} = 15.81 \text{ V}$$

Merk: Enheten µs er her strøket da den forekommer både i teller (25) og nevner (100).

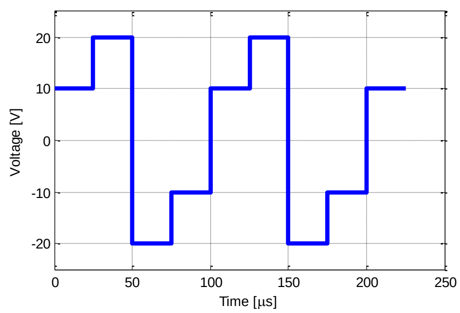
c) Hvis denne spenningen blir påtrykt terminalene til en 4 Ω mostand, hvor stor blir den gjennomsnittlige avgitte effekten, målt i watt?

Svar: RMS-verdier benyttes til å beregne gjennomsnittseffekt i vekselstrømskretser. Siden vi har beregnet V_{rms} i forrige oppgave kan vi finne effekten direkte:

$$P_{avg} = \frac{V_{rms}^2}{R} = \frac{\sqrt{250}^2}{4} = 62.5 \text{ W}$$

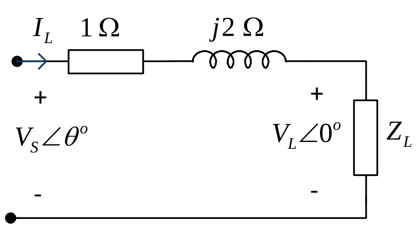
Alternativt kan gjennomsnittseffekten finnes ved å integrere momentanteffekten og ta gjennomsnittet over en periode. Momentaneffekten i en motstand er gitt av: $P(t) = v(t)i(t) = v(t) \cdot \dfrac{v(t)}{R}$. Dette gir:

$$P_{avg} = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} P(t) = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \frac{v(t)^2}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \frac{v(t)^2}{R}\right) = \frac{V_{rms}^2}{R}$$, dvs. samme resultat som over



Figur 1: Tid-spenningsforløp for oppgave 1

OPPGAVE 2 – VISERBEREGNINGER OG IMPEDANS



Figur 2 – krets for oppgave 2

I en gitt driftsituasjon er *V_L=250 V, og tilsynelatende* (apparent) effekt i Z_L er $S_L = 2500\angle 36.87^o\ VA$

a) *Finn verdien til impedansen Z_L basert på oppgitt effekt og spenning*

Svar: Definisjonen av kompleks impedans er $Z = \dfrac{V}{I}$. Ved å kombinere dette med definisjonen av tilsynelatende effekt $S = V \cdot I^*$ får vi:

$$I_L^* = \frac{S_L}{V_L} \Rightarrow I = \frac{S_L^*}{V_L^*} \Rightarrow Z_L = \frac{V_L \cdot V_L^*}{S_L^*} = \frac{|V_L|^2}{S_L^*}$$

Med tallverdier:

$$Z_L = \frac{|V_L|^2}{S_L^*} = \frac{250^2}{\left(2500e^{j36.87}\right)^*} = \frac{250^2}{2500e^{-j36.87}} = 25e^{j36.87}\ \Omega$$

Merk #1: Alle symboler ovenfor er visere (phasors), dvs. komplekse tall. Stjerne (*) betyr kompleks konjugert. For alle komplekse tall X gjelder $X \cdot X^{*} = |X|^{2}$.

Merk #2: Vinkelen til forsyningspenningen er ikke oppgitt, og det er heller ikke nødvendig for å løse oppgaven.

Merk #3: Siden absoluttverdien til spenningen har vinkel 0, ser vi at impedansen alltid har samme vinkel som den tilsynelatende effekten.

b) *Hva blir effektfaktoren (power factor) til lasten Z_L? Er effektfaktoren induktiv eller kapasitiv?*

Svar: Effektfaktoren er $\cos\varphi = \cos 36.87 = 0.8$. Det er også viktig å spesifisere om effektfaktoren er induktiv (lagging) eller kapasitiv (leading). I dette tilfellet er effektfaktoren **induktiv** siden impedansen (og den tilsynelatende effekten) har en positiv vinkel. Den enkleste måten å huske dette på er at en induktans har positiv impedansvinkel siden $X_L = j\omega L$, mens en kapasitans har negativ impedansvinkel siden $X_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$

c) *Hva blir strømmen I_L som går i lasten (NB: amplitude og vinkel). Anta at V_L har vinkel 0.*

Strømmen kan finnes ved å f.eks. bruke spenning og impedans:

$$I_L = \frac{V_L}{Z_L} = \frac{250}{25e^{j36.87}} = 10e^{-j36.87} \text{ A}$$

Merk: Dette er en induktiv strøm, siden den ligger «bak» spenningen (lagging).

d) *Hva blir forsyningsspenningen V_s (NB: amplitude og vinkel)*

Forsyningsspenningen kan finnes slik:

$$V_S = I_L \cdot (1 + j2) + V_L$$
$$V_S = 10e^{-j36.87}(1 + j2) + 250$$
$$V_S = 10e^{-j36.87} \cdot 2.2361e^{j63.43} + 250 = 250 + 22.361\cos(26.56) + j22.361\sin(26.56)$$
$$V_S = 270.0 + j10.0 = 270.19e^{j2.12} \text{ V}$$

e) Finn aktiv *(P),* reaktiv *(Q)* og tilsynelatende *(S)* effekt gitt fra kilden

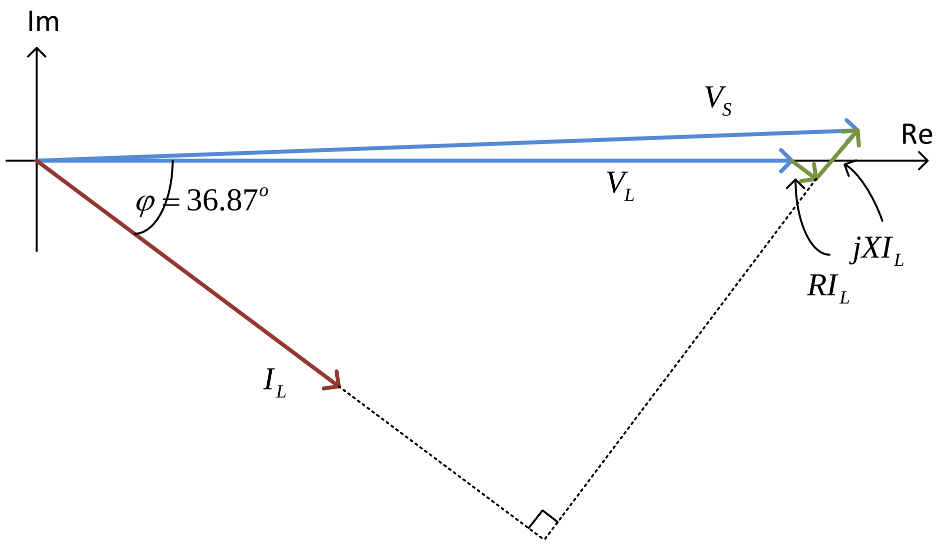
Dette kan finnes vha. definisjonen av tilsynelatende effekt:

$$S_S = V_S \cdot I_L^{*} = 270.19e^{j2.12} \cdot 10e^{j36.87} = 2701.9e^{j39.0} = 2100 + j1700$$
$$S = 2702 \text{ VA}$$
$$P = 2100 \text{ W}$$
$$Q = 1700 \text{ VAr}$$

Har her snudd fortegnet til I_L pga. konjugering. Positiv reaktiv effekt = induktiv last.

f) Tegn et viserdiagram (phasor diagram) som inneholder V_L, V_s, I_L, samt spenningsfallet over overføringsmotstand/induktans.

Svar: Et viserdiagram er vist i Figur 3. V_S, V_L og I_L er tegnet in basert på utregnede verdier ovenfor. Spenningsfallet over impedansene R og X er tegnet inn basert på at de skal være henholdsvis parallelle og normale på strømmen I_L.



Figur 3: Viserdiagram

Oppgave 3 – Maksimal effektoverføring

Anta først at $Z_L = 90 - j30\ \Omega$

Hvis lasten er frakoblet ($I_L = 0$ *A*), er spenningen $V_{ab} = 240\angle 0^o$ V (rms).

Hvis lasten er tilkoblet, er spenningen $V_{ab} = 115.2 - j86.4$ V (rms).

a) Etabler Thevenin-ekvivalenten til kraftforsyningen (V_{th}, R_{th} og X_{th})

Svar: Det er enkelt å finne Theveninspenningen V_{th} siden vi vet at $V_{th}=V_{ab}$ når $I_L=0$:

$$V_{th} = 240\angle 0^o$$

For å finne Theveninimpedansen kan vi sette opp uttrykket for spenningsdeling

$$V_{ab} = V_{th} \cdot \frac{Z_L}{Z_L + Z_{th}}$$

$$Z_{th} = \frac{V_{th} Z_L}{V_{ab}} - Z_L$$

Alternativt kan vi gå via Ohms lov:

$$V_{ab} = Z_L I_L$$
$$V_{ab} = V_{th} - Z_{th} \cdot I_L$$
$$\Rightarrow V_{ab} = V_{th} - Z_{th} \frac{V_{ab}}{Z_L}$$
$$\Rightarrow Z_{th} = \frac{V_{th} Z_L}{V_{ab}} - Z_L$$

Med numeriske verdier:

$$Z_{th} = \frac{240e^{j0}\left(90 - j30\right)}{115.2 - j86.4} - \left(90 - j30\right) = 60 + j80 = 100e^{j53.13}$$
$$R_{th} = 60$$
$$X_{th} = 80$$

b) Finn verdien av Z_L som gir maksimal effektoverføring

For å oppnå maksimal overføring av effekt må total lastimpedans være lik total kildeimpedans konjugert. På denne måten blir den imaginære impedansen kansellert (sett fra kilden), og den reelle impedansen blir like stor på kilde- og lastside.

Dette gir:

$$Z_L = Z_{th}^*$$
$$Z_L = 60 - j80\ \Omega$$

c) Finn effekten som blir overført til lasten Z_L

Total impedans sett fra Thevenin-spenningen (kilden) blir

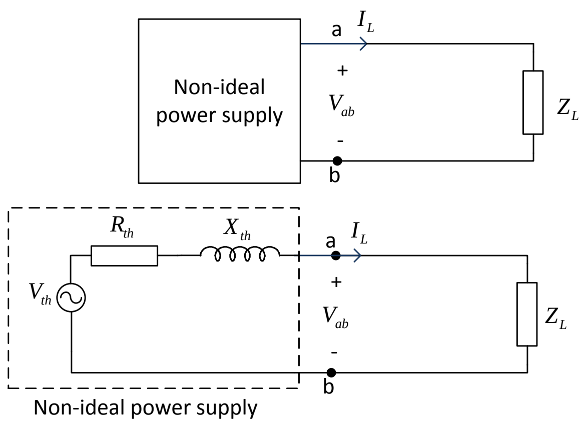
$$Z_{tot} = Z_{th} + Z_L = 60 + j80 + 60 - j80 = 120\ \Omega$$

Strømmen blir da

$$I_L = \frac{V_{th}}{Z_{tot}} = \frac{240}{120} = 2\ \text{A}$$

Effekten forbrukt i Z_L blir da

$$S_L = Z_L I_L^2 = \left(60 - j80\right) \cdot 2^2 = 240 - j320\ \text{VA}$$



Figur 4: Krets for oppgave 3