

## Løsningsforslag øving 8

Oppgave 1

a) Vi begynner med å finne  $M_2(s)$  fra figur 2 i oppgaveteksten.

$$M_2(s) = \frac{\omega}{r_2} \quad (1)$$

$$\omega = h_m(s)h_a(s)(h_{R2}(s)(r_2 - \omega) - K_v\omega) \quad (2)$$

$$= h_m(s)h_a(s)h_{R2}(s)r_2 - h_m(s)h_a(s)h_{R2}(s)\omega - K_vh_m(s)h_a(s)\omega \quad (3)$$

$$\Updownarrow \quad (4)$$

$$\omega(1 + h_m(s)h_a(s)(h_{R2}(s) + K_v)) = h_m(s)h_a(s)h_{R2}(s)r_2 \quad (5)$$

$$\Updownarrow \quad (6)$$

$$\frac{\omega}{r_2} = \frac{h_m(s)h_a(s)h_{R2}(s)}{1 + h_m(s)h_a(s)(h_{R2}(s) + K_v)}. \quad (7)$$

Vi benytter så at  $N_2 + M_2 = 1$

$$N_2(s) = 1 - M_2(s) \quad (8)$$

$$= 1 - \frac{h_m(s)h_a(s)h_{R2}(s)}{1 + h_m(s)h_a(s)(h_{R2}(s) + K_v)} \quad (9)$$

$$= \frac{1 + h_m(s)h_a(s)h_{R2}(s) + h_m(s)h_a(s)K_v - h_m(s)h_a(s)h_{R2}(s)}{1 + h_m(s)h_a(s)(h_{R2}(s) + K_v)} \quad (10)$$

$$= \frac{1 + h_m(s)h_a(s)K_v}{1 + h_m(s)h_a(s)(h_{R2}(s) + K_v)} \quad (11)$$

Vi setter så inn for  $h_m(s)$ ,  $h_a(s)$  og  $h_{R2}(s)$  i ligning 7 og 11, som gir

$$\begin{aligned} M_2(s) &= \frac{K_T K_{p2}}{(R_a + L_a s)(B + Js) + K_T K_{p2} + K_T K_V} \\ N_2(s) &= \frac{(R_a + L_a s)(B + Js) + K_T K_V}{(R_a + L_a s)(B + Js) + K_T K_{p2} + K_T K_V} \end{aligned}$$

Vi fant her uttrykket algebraisk, det er også mulig og komme frem til dette uttrykket ved å forenkle blokkdiagrammet i figur 2 i oppgaveteksten.

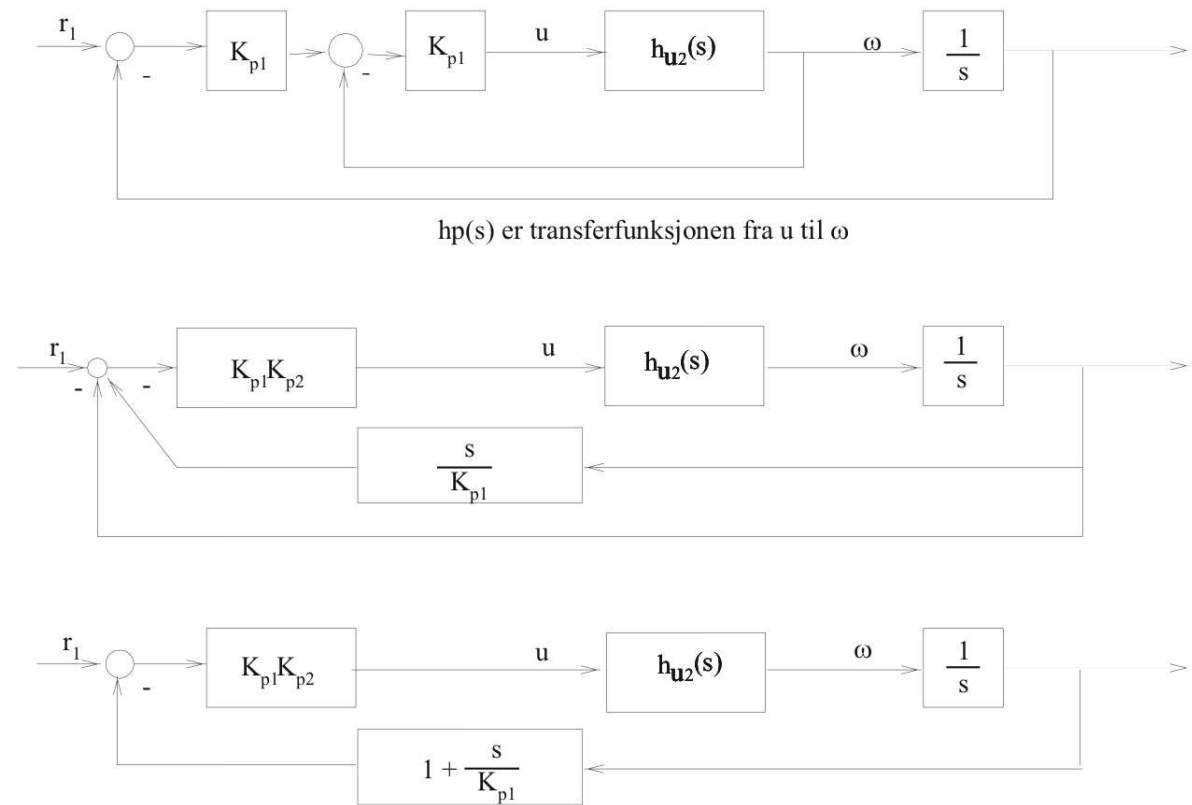
Med utgangspunkt i figur 2 i oppgaveteksten kan vi finne uttrykk for  $M_1(s)$  og  $\frac{e}{v}(s)$ :

- $M_1(s) = \frac{h_{R1}(s)M_2(s)\frac{1}{s}}{1+h_{R1}(s)M_2(s)\frac{1}{s}}$ . Vi ser av uttrykket for  $M_2(s)$  at større  $K_{p2}$  i den indre sløyfen medfører at  $M_2(s) \approx 1$  opp til høyere frekvenser. Den ytre sløyfen kan dermed gis større båndbredde med akseptable stabilitetsmarginer.
- $\frac{e}{v}(s) = -N_1(s)h_{v2}(s)N_2(s)\frac{1}{s}$ , der  $N_1(s) = \frac{e}{r_1}(s) = \frac{1}{1+h_{R1}M_2(s)\frac{1}{s}}$ . Ser av uttrykket for  $N_2(s)$  og  $M_2(s)$  at stor  $K_{p2}$  medfører at  $N_2(s)$  blir liten og  $M_2(s) \approx 1$  opp til høyere frekvenser. Den indre sløyfen reduserer dermed forstyrrelsens innvirkning. Merk at vi har dannet en ny transferfunksjon mellom forstyrrelsen  $v$  og målingen  $\theta$ ,  $h_v = h_{v2}(s)N_2(s)\frac{1}{s}$ , slik at  $\frac{e}{v}(s) = -N_1(s)h_v$ .

b) Forenklingen av blokkdiagrammet er vist i figur 1 under. Ved å skrive ut siste blokkdiagram får vi at

$$u(t) = K_{p1}K_{p2}e(t) = K_{p1}K_{p2}(r_1(t) - (y(t) + \frac{1}{K_{p1}}\dot{y}(t))) = K_{p1}K_{p2}(e(t) + (-\frac{1}{K_{p1}}\dot{y}(t))) \quad (12)$$

Dermed er  $K_p = K_{p1}K_{p2}$  og  $T_d = \frac{1}{K_{p1}}$



Figur 1: Forenklinger når vi setter  $h_{R1} = K_{p1}$  og  $h_{R2} = K_{p2}$ .

c) Med utgangspunkt i strukturen i figur 9.53 i boka sammen med figur 3 oppgaveteksten, kan vi slå fast at vi har én integrasjon i  $h_{v2}N_2\frac{1}{s}$  og én integrasjon i  $M_2\frac{1}{s}$ .  $h_0(s) = h_{r1}M_2\frac{1}{s}$  må da ha to integrasjoner, jfr. side 367 i læreboka. Dermed bør regulatoren i den ytre sløyfen,  $h_{r1}$ , ha integralvirkning. Vi velger en PI-regulator.

## Oppgave 2

a)  $h_{fv}$  må være slik at den motvirker forstyrrelsen  $v$ . Transferfunksjonen fra  $v$  til  $y$  (åpen sløyfe) blir:

$$h_{vy} = h_{fv}h_p + 1$$

Den ideelle foroverkoblingen  $h_{fvi}$  fjerner all innvirkning fra  $v$ , dvs

$$\underline{\underline{h_{vy} = h_{fv}h_p + 1 = 0 \Rightarrow h_{fvi} = -\frac{1}{h_p}}}$$

b)

$$h_{fv} = -\frac{1}{h_p} = -\frac{1 + Ts}{K}$$

Denne transferfunksjonen er ikke proper og dermed ikke realiserbar:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |h_{fv}(j\omega)| \rightarrow \infty$$

Den statiske foroverkoblingen er gitt av:

$$\underline{\underline{h_{fv}(j\omega)|_{\omega=0} = -\frac{1}{K}}}$$

Den statiske foroverkoblingen motvirker konstante forstyrrelser. Den statiske foroverkoblingen fra forstyrrelsen innvirker ikke på stabilitetsegenskapene til den lukkede sløyfen.

### Oppgave 3

a)

$$h_r(s) = K_p \left( \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \right), \alpha < 1$$

Diskretisering, erstatter alle  $s$  med  $\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ :

$$h_r(z) = K_p \frac{1 + \frac{2T_d}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (13)$$

$$= K_p \frac{(1 + z^{-1}) + \frac{2T_d}{T}(1 - z^{-1})}{(1 + z^{-1}) + \frac{2\alpha T_d}{T}(1 - z^{-1})} \quad (14)$$

$$= K_p \frac{(1 + \frac{2T_d}{T}) + (1 - \frac{2T_d}{T})z^{-1}}{(1 + \frac{2\alpha T_d}{T}) + (1 - \frac{2\alpha T_d}{T})z^{-1}} \quad (15)$$

$$= K_p \frac{\left( \frac{1 + \frac{2T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \right) + \left( \frac{1 - \frac{2T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \right) z^{-1}}{1 + \left( \frac{1 - \frac{2\alpha T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \right) z^{-1}} \quad (16)$$

Dette gir

$$u[k] = - \left( \frac{1 - \frac{2\alpha T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \right) u[k-1] + K_p \left( \frac{1 + \frac{2T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \right) e[k] + K_p \left( \frac{1 - \frac{2T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \right) e[k-1]$$

b) Hvis vi velger  $K_p = 1$ ,  $T_d = 1$ ,  $\alpha = 0.1$ , og tastetid  $T = 0.02$ , dvs  $T = 1/5$  av minste tidskonstant i  $h_r(s)$ , før vi at

$$u[k] = 0.8182u[k-1] + 9.182e[k] - 9e[k-1]$$

$h_r(z)$  kan finnes i MATLAB, på følgende måte:

```
>>Td=1; alpha=0.1; Kp=1; T=0.2*alpha*Td;
>>hr=tf([Td 1],[alpha*Td1]);
>>dh=c2d(hr,T,'tustin')
Transfer function:
9.182z-9
-----
z-0.8182
```

c) (*Valgfri*) Derivatvirkning med hensyn på referensen  $r$  gir

$$u(s) = h_r(s)e(s) = h_r(s)r(s) - h_r(s)y(s)$$

Ikke derivatvirkning med hensyn på referensen  $r$  gir

$$u(s) = K_p r(s) - h_r(s)y(s)$$

Diskretisering a  $K_p$  er  $K_p$  og diskretisering av  $h_r(s)$  er gitt i (16). Tilsammen gir dette

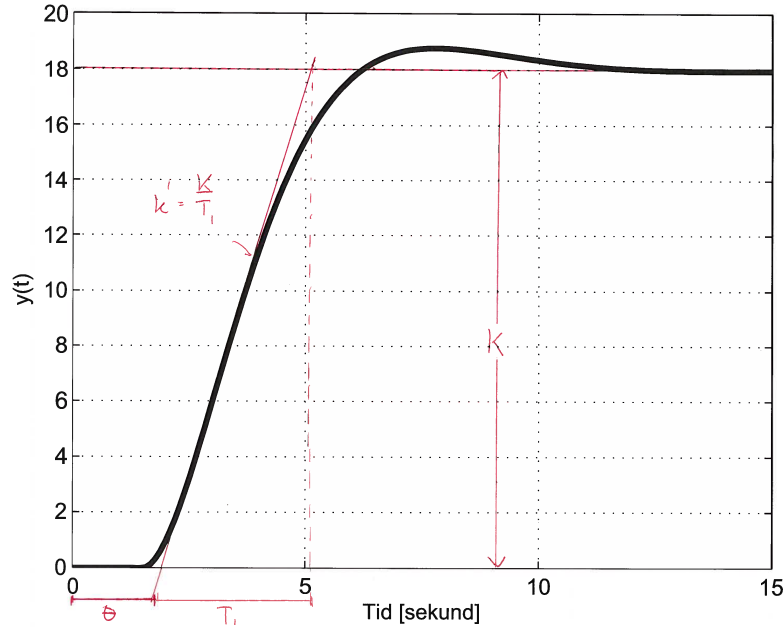
$$\begin{aligned} u(z) &= K_p r(z) - K_p \frac{\left( \frac{1 + \frac{2T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \right) - \left( \frac{1 - \frac{2T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \right) z^{-1}}{1 + \left( \frac{1 - \frac{2\alpha T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \right) z^{-1}} y(z) \\ &= \frac{K_p \left( 1 + \left( \frac{1 - \frac{2\alpha T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \right) z^{-1} \right) r(z) - K_p \left( \left( \frac{1 + \frac{2T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \right) - \left( \frac{1 - \frac{2T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \right) z^{-1} \right) y(z)}{1 + \left( \frac{1 - \frac{2\alpha T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \right) z^{-1}} \end{aligned}$$

og dermed

$$u[k] = - \left( \frac{1 - \frac{2\alpha T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \right) u[k-1] + K_p r[k] + K_p \left( \frac{1 - \frac{2\alpha T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \right) r[k-1] - K_p \left( \frac{1 + \frac{2T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \right) y[k] + K_p \left( \frac{1 - \frac{2T_d}{T}}{1 + \frac{2\alpha T_d}{T}} \right) y[k-1]$$

#### Oppgave 4 SIMC

a) Grafisk metode for å finne parameterne  $K$ ,  $T_1$  og  $\theta$  er vist i figur 2.



Figur 2: Sprangrespons med tilhørende parametre.

Basert på avlesning av verdier fra figur 2 velges

$$K = 18, \quad T_1 = 3.3, \quad \theta = 1.5. \quad (17)$$

Disse verdiene vil selvsagt være noe unøyaktige. Dette gir 1.ordens approksimert transferfunksjon

$$h_p(s) = \frac{18}{1 + 3.3s} e^{-1.5s} \quad (18)$$

Sprangrespons av (18) er vist i figur 3. Den tilnærmede transferfunksjonen mister noe nøyaktighet i stige-fasen, og får ikke med oversvinget til den egentlige sprangresponsen (egentlig sprangrespons er generert av en svakt underdempet 2. ordens funksjon med tidsforsinkelse). I mange tilfeller er likevel en 1.ordens tilnærmet transferfunksjon bra nok, og den gir muligheter for enkel regulatortuning.

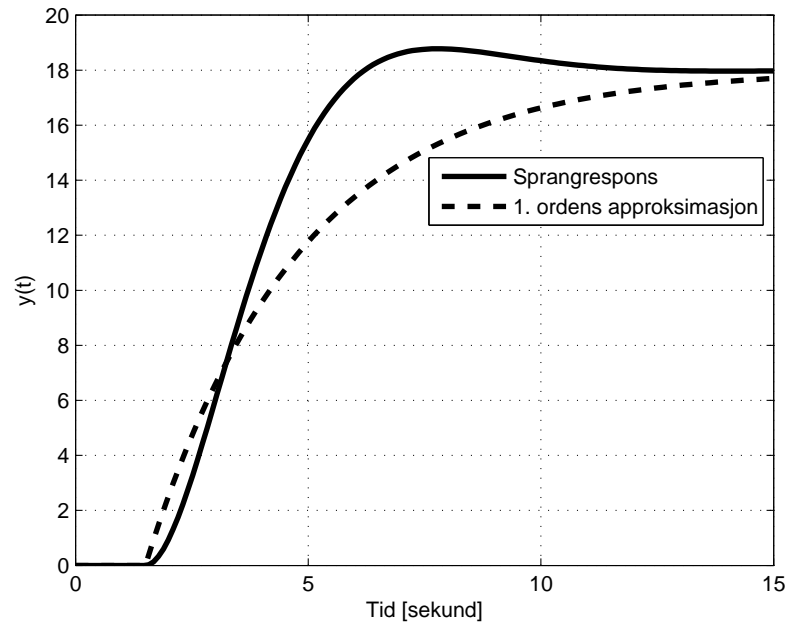
b) Valg av regulatorparametere gjøres på bakgrunn av SIMC tuningsregler for 1.ordens approksimert prosess,

$$K_p = \frac{1}{K} \frac{T_1}{\tau_c + \theta}, \quad (19)$$

$$T_i = \min(T_1, 4(\tau_c + \theta)), \quad (20)$$

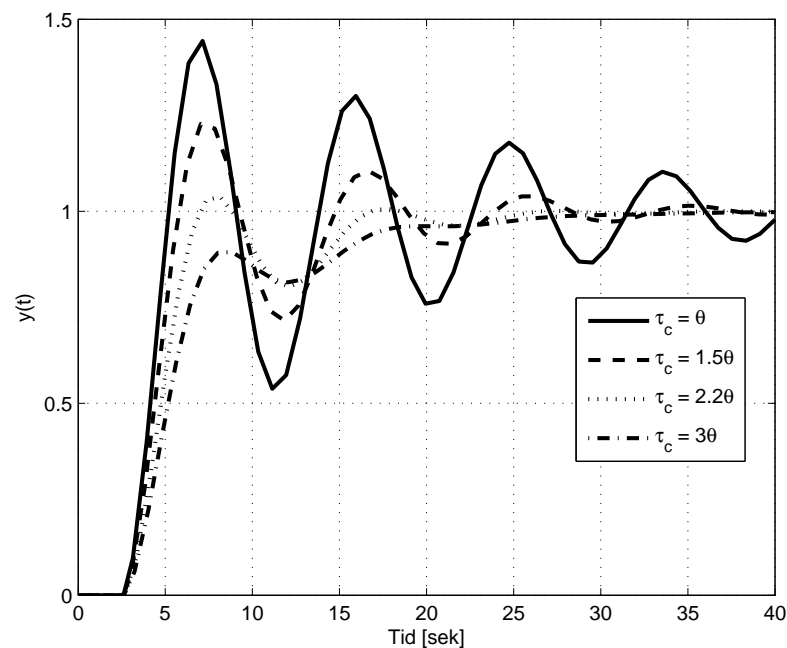
hvor  $\tau_c$  er en tuningsparameter for ønsket lukket-sløyfe respons,

$$y = M(s)r = \frac{e^{-\theta s}}{\tau_c s + 1}. \quad (21)$$



Figur 3: Sprangrespons sammenliknet med 1.ordens approksimert transferfunksjon.

Valg av verdi for  $\tau_c$  påvirker lukketsløyfe respons. Figur 4 viser lukketsløyfe sprangrespons for forskjellige valg av  $\tau_c$ . Høy verdi for  $\tau_c$  gir tregere, men mer robust sprangrespons. Liten verdi av  $\tau_c$  gir mer oscilatorisk oppførsel, men raskere respons. Et kompromi er å velge  $\tau_c = 2.2$ . Oppgaven viser også at regulator tuning basert på 1.ordens approksimasjon ikke gir perfekt tuning, men at akseptabel lukketsløyfe respons kan oppnås ved fornuftig valg av  $\tau_c$ . Det kan legges til at det finnes egne SIMC tuningsregler for systemer med dominerende 2.ordens dynamikk (ikke pensum).



Figur 4: Sprangrespons for lukketsløyfe for forskjellige valg av  $\tau_c$ .