

## Løsningsforslag Dataøving 2

Oppgave 1

a) Modellen er gitt ved:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_1 x_1 - c_1 x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_2 x_2 + c_2 x_1 x_2\end{aligned}\quad (1)$$

Setter de deriverte lik 0:

$$\begin{aligned}x_1(a_1 - c_1 x_2) &= 0 \\ x_2(-a_2 + c_2 x_1) &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

Det gir oss likevektspunktene  $x_1, x_2 = (0, 0)$  og  $x_1, x_2 = (\frac{a_2}{c_2}, \frac{a_1}{c_1})$ .

Konstantene fra *harerev.mdl* har verdiene

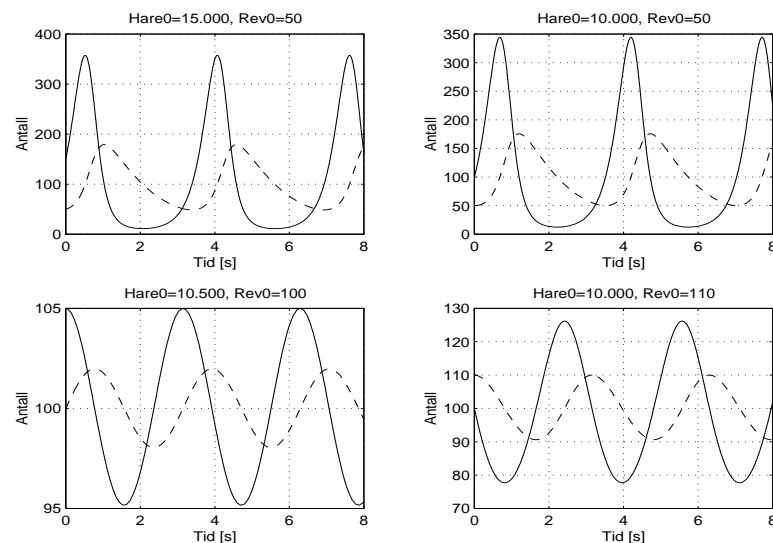
$$\begin{aligned}a_1 &= 5.0 & c_1 &= 0.05 \\ a_2 &= 0.8 & c_2 &= 8.0e^{-5}\end{aligned}$$

Settes disse inn i det generelle uttrykket fås likevektspunktene:

$$x_1, x_2 = (0, 0) \cup (10000, 100)$$

Det første likevektspunktet er trivielt, og ignoreres fra nå av.

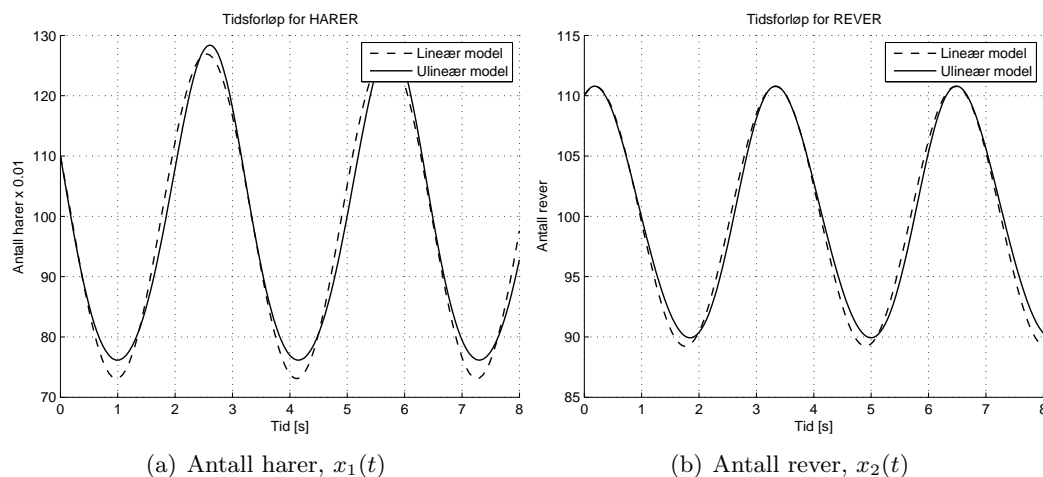
b) Systemresponsen for forskjellige startverdier blir som i figur 1. Merk at antall harer er nedskallert med  $10^{-2}$  i figuren for letter å sammenlikning av de to bestandene. Vi ser at modellen virker rimelig. For alle startverdier svinger antallet rever og harer rundt likevektspunktet. Dessuten ser vi at når antallet harer er over likevektspunktet, øker antallet rever når revebestanden er lav i utgangspunktet. Økende revebestand fører imidlertid til at antall harer synker, i neste omgang fører dette til at revebestanden går ned, osv., slik som allerede diskutert i øving 3.



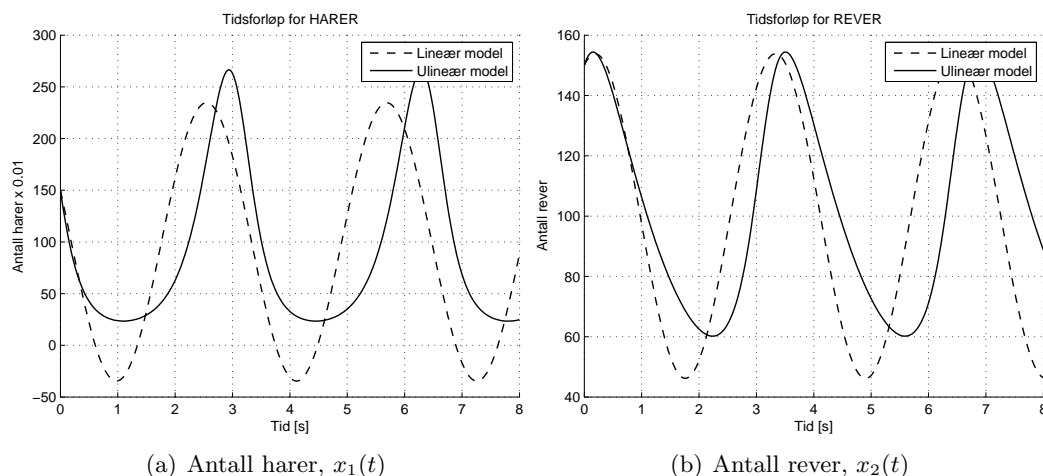
Figur 1: Systemrespons fra Simulink model for harer  $\times 10^{-2}$  (heltrukket) og rever (stiplet)

c) De to nederste grafene i figur 1 viser responsen når man starter nær likevekt. Kurvene er tilnærmet sinusformet. Det bekrefter at en linearisering om likevekt vil gi en god approksimasjon for svingningene i det ulineære systemet når man starter nær likevektspunktet. Når egenverdiene er rent imaginære, vil responsen til lineært system svinge som en (co-)sinusfunksjon.

d) Algebraisk løsning av linearisert modell og simulering av den ulineære modellen med samme startverdier er vist i figur 2 og 3. Vi ser som forventet at lineariseringen gir en god approksimasjon hvis vi starter når likevektspunktet. Ved større utslag kommer den ulineære modellens karakteristikk bedre til syne, og den algebraiske løsningen blir lite tilfredsstillende sammenliknet med den ulineære modellen.

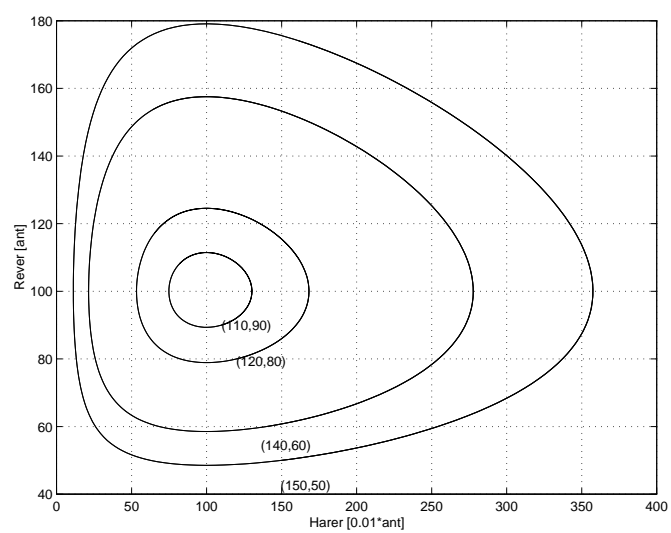


Figur 2: Algebraisk løsning av linearisert modell sammenliknet med ulineær modell simulert i Simulink med initialverdier (11000,110)



Figur 3: Algebraisk løsning av linearisert modell sammenliknet med ulineær modell simulert i Simulink med initialverdier (15000,150)

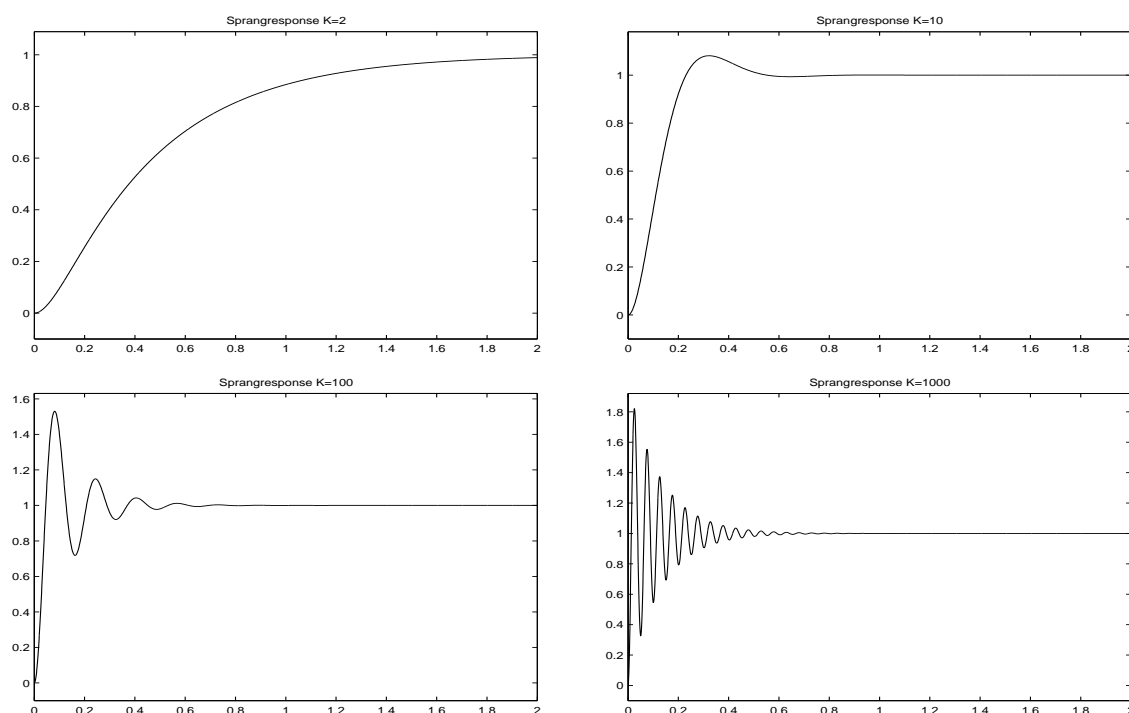
I figur 4 er forløpet simulert for både rever og harer i en XY-graf i Simulink (når man framstiller et tidsforløp med en tilstand langs x-aksen og den andre tilstanden langs y-aksen, kalles dette ofte for en "faseplan"-kurve). Vi ser at dersom man starter når likevektspunktet, vil kurvene bli elliptiske. Det betyr at forløpene er (co-)sinusformet, dvs. systemet er tilnærmet lineært. Kurven blir mer og mer eggformet for startverdier med økende avvik fra likevektspunktet. Ikke-elliptiske kurver betyr større grad av ulinearitet i systemet.



Figur 4: Antallet harer og rever i samme diagram. Startverdier er angitt.

## Oppgave 2

a) Sprangresponsen for et utvalg forsterkninger er vist i figur 5.



Figur 5: Sprangrespons for deloppgave a)

Vi observerer at sprangresponsen blir mer og mer oscillatorisk ("underdempet") med økende forsterkning  $K$ , mens den svinger seg eksponensielt uten oscillasjoner ("overdempet") mot stasjonærverdien 1 ved minkende  $K$ . En annen viktig observasjon er at jo mindre forsterkningen  $K$  blir, jo "tregere" blir systemet, dvs. det tar lengre og lengre tid får utgangen  $y(t)$  oppnår sin stasjonærverdi. Det er også verdt å merke seg at utgangen  $y(t)$  svinger seg inn mot en konstant verdi (som er 1 i dette tilfellet), uansett forsterkning  $K$ . Dette skyldes at det lukkede systemets poler ligger i venstre halvplan, uansett forsterkning  $K$  (stabilt system).

Vi ser av figur 6 at dersom vi øker  $K$ , beveger polene seg mot hverandre langs den negative reelle akse, inntil de møtes når

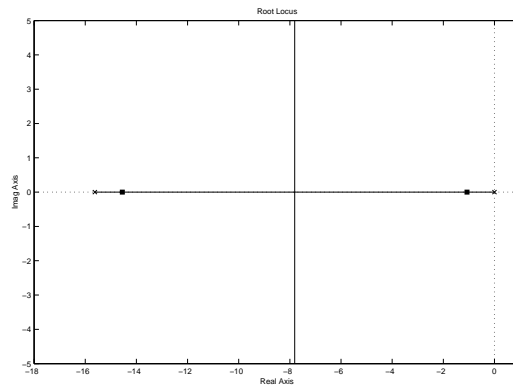
$$K = \frac{1}{4T_1} \quad (3)$$

som gir røttene  $\lambda_1 = \lambda_2 = -7.81$ . Øker vi  $K$  ytterligere beveger polene seg fra hverandre som kompleks konjugerte par langs en vertikal linje gjennom  $-7.81$  på den reelle akse. Se også side 154 i læreboka.

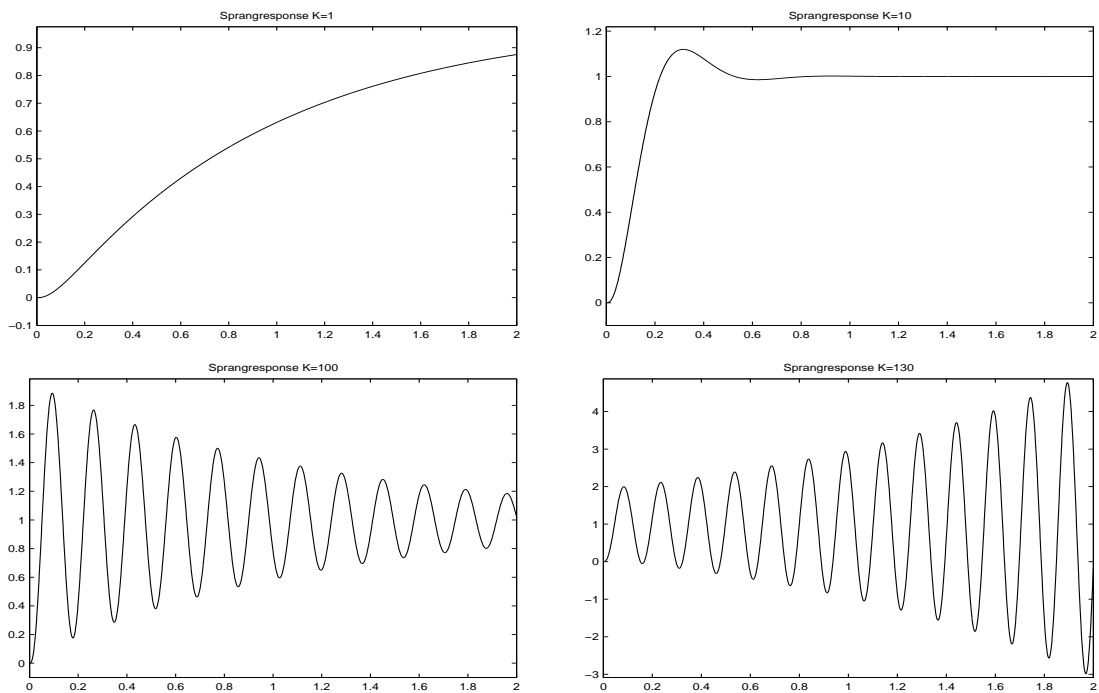
b) Sprangresponsen til reguleringssystemet i deloppgave b) er gitt av figur 7.

Som i deloppgave a), ser vi at minkende  $K$  medfører at  $y(t)$  svinger seg langsomt og overdempet mot 1, mens økende  $K$  (opptil en kritisk verdi  $K_{krit}$ ) medfører at sprangresponsen blir mer og mer oscillatorisk. Av figur 7 ser vi at den kritiske forsterkningsverdien  $K_{krit}$  ligger mellom 100 og 130. Et analytisk uttrykk for  $K_{krit}$  kan f.eks. finnes ved å anvende det såkalte Rouths kriterium (kap. 8.3). Øker vi  $K$  ytterligere ( $K > K_{krit}$ ) blir sprangresponsen ustabil; dette kommer av at minst én pol i det lukkede system nå ligger i høyre halvplan.

Plotter vi polene som funksjon av  $K$  i det komplekse plan får vi følgende resultat: Polene starter sin bevegelse fra polene for det "åpne" (=uregulert) systemet, dvs. når  $K = 0$ . Når  $K$  økes vil den av polene som opprinnelig hadde størst negativ verdi bevege seg mot venstre, mens de to andre beveger seg mot hverandre langs den reelle akse inntil de møtes. Økes  $K$  ytterligere, vil den første polen forsette mot venstre (den går mot  $-\infty$  når  $K$  går mot  $\infty$ ), mens de to andre vil bli komplekse og



Figur 6: Polenes plassering som funksjon av  $K$



Figur 7: Sprangrespons til reguleringssystemet i deloppgave 2b)

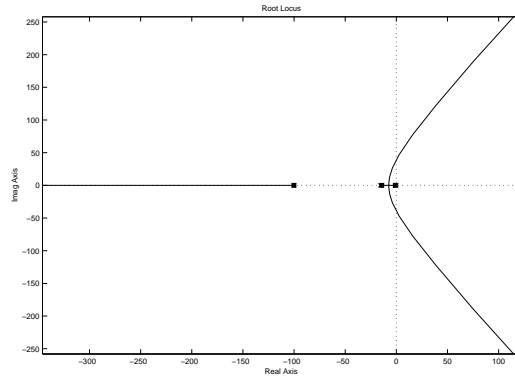
bevege seg fra hverandre mot høyre. Se figur 8. Siden de beveger seg mot høyre, så vil de få eller senere krysse den imaginære akse. Ved å flytte polene i root-locus kurven inntil disse to polene ligger på den imaginære akse, finner vi at  $K_{krit} \approx 115$ .

c) Sprangresponsen er gitt av figur 9.

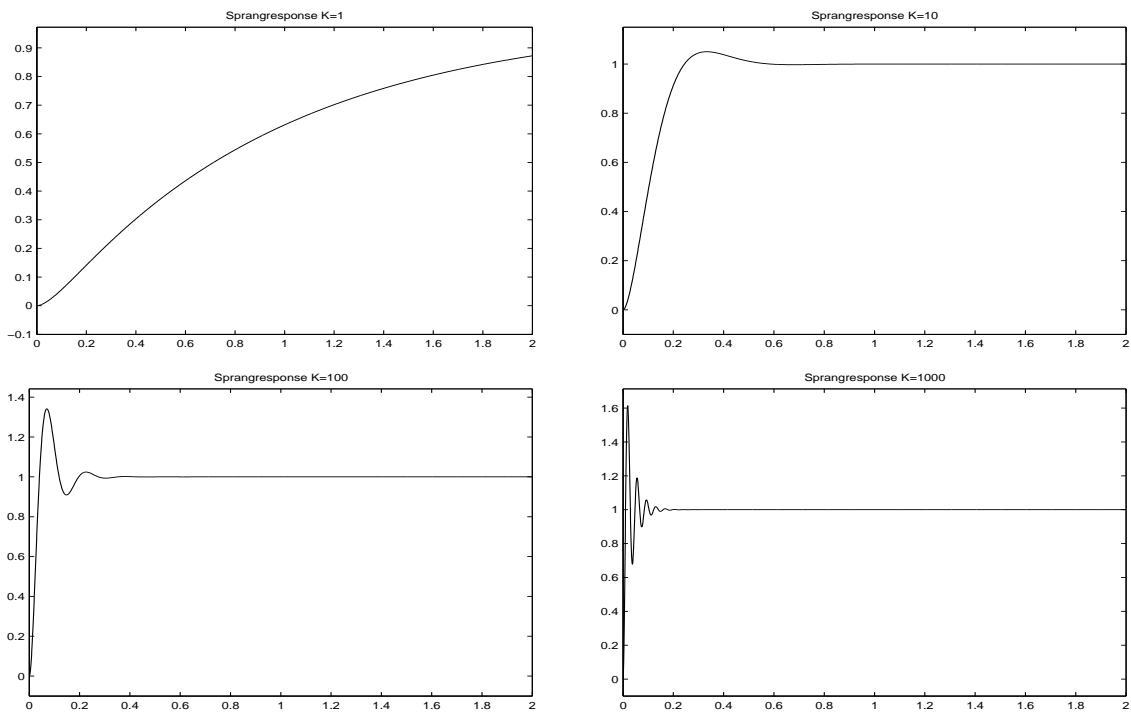
Som tidligere ser vi at minkende  $K$  gir en treg og overdempet sprangrespons, mens økende  $K$  gir en rask og oscillatorisk respons. Polene starter sin bevegelse som tidligere ved  $K \neq 0$ . Når  $K$  økes, vil den av polene som opprinnelig hadde størst negativ verdi bevege seg mot høyre, mens de to andre ( $\lambda_1$  og  $\lambda_2$ ) beveger seg mot hverandre langs den reelle akse inntil de møtes. Økes  $K$  ytterligere fra denne verdien, vil den første polen fortsette mot høyre (og går mot det eneste nullpunktet når  $K$  går mot  $\infty$ ), mens de to andre vil bli komplekse og bevege seg fra hverandre mot venstre (se figur 10). Polenes plassering som funksjon av  $K$  er gitt i rotkurven i figur 10.

### Oppgave 3

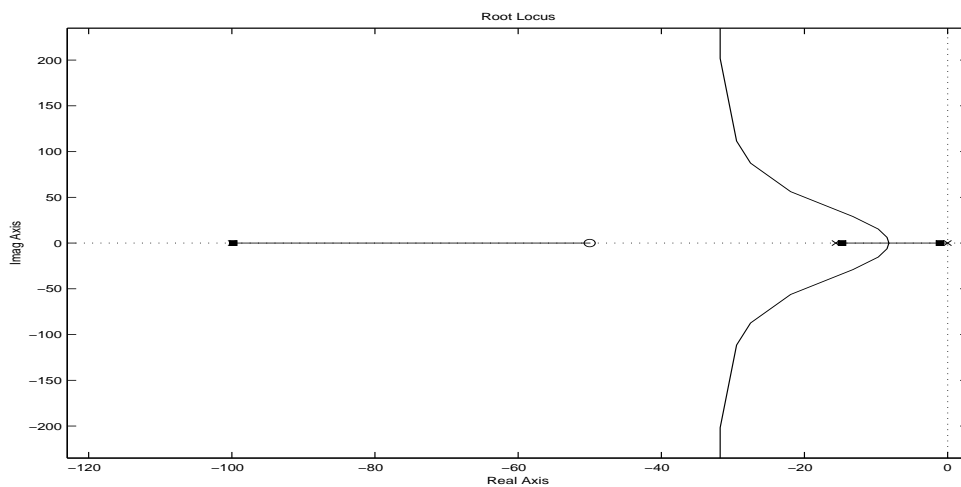
a) Den ene programlinjen som trengs for å plote Bode-diagram er:



Figur 8: Polenes plassering som funksjon av  $K$



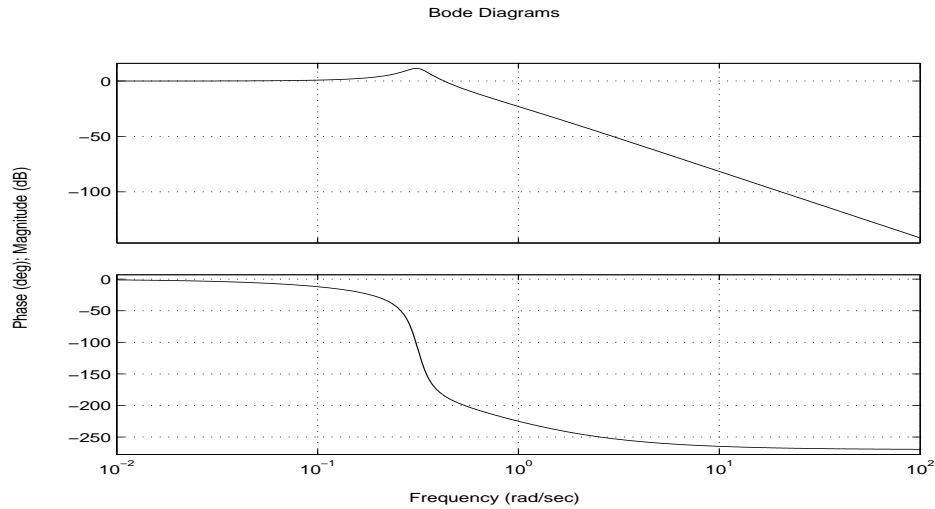
Figur 9: Sprangrespons for deloppgave 2c)



Figur 10: Polenes plassering som funksjon av  $K$ . Små svarte firkanter viser plassering av systemets poler, mens sirkelen er nullpunkt.

$$bode(sys); \quad (4)$$

Bode-diagrammet blir da som i figur 11.

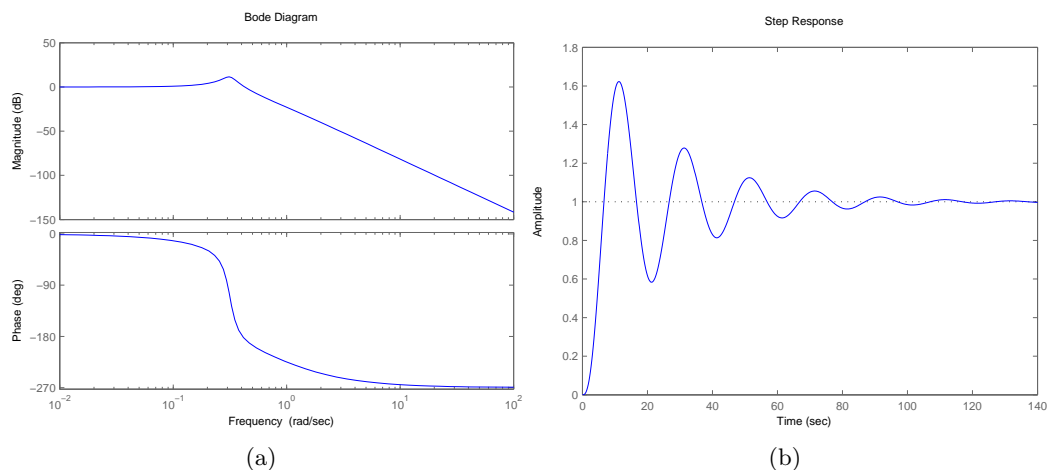


Figur 11: Bode-diagram for  $K = 0.15$

b) En tabell over  $\left| \frac{y(j\omega)}{y_0(j\omega)} \right|_{\max}$  for en mengde utvalgte  $K$ -verdier er gitt under.

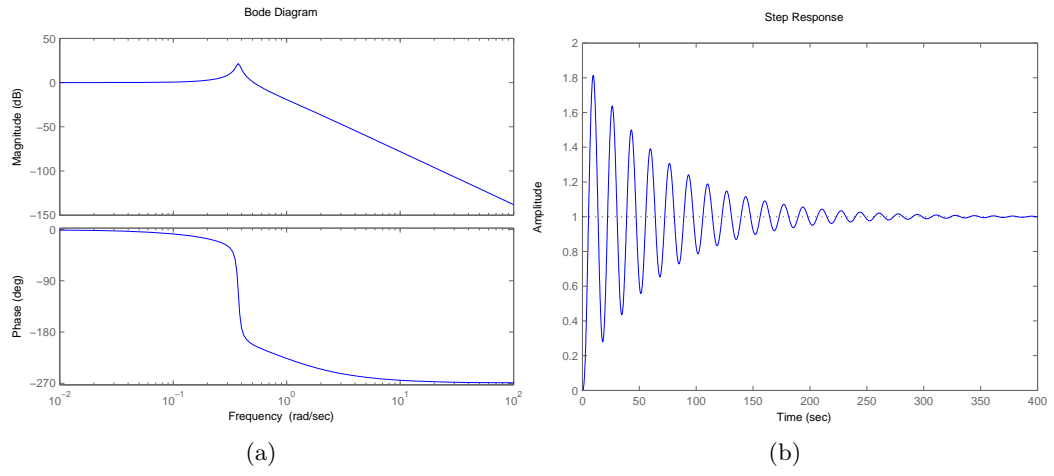
$K$	$\left  \frac{y(j\omega)}{y_0(j\omega)} \right _{\max}$
0.5	3.7224
0.75	11.8883
0.9	113.5367
0.91	335.2472
$\frac{T_1+T_2}{T_1*T_2}$	7.1235E3

Bode-diagram og sprangresponsen for noen  $K$ -verdier er gitt av figur 12- 14 under.

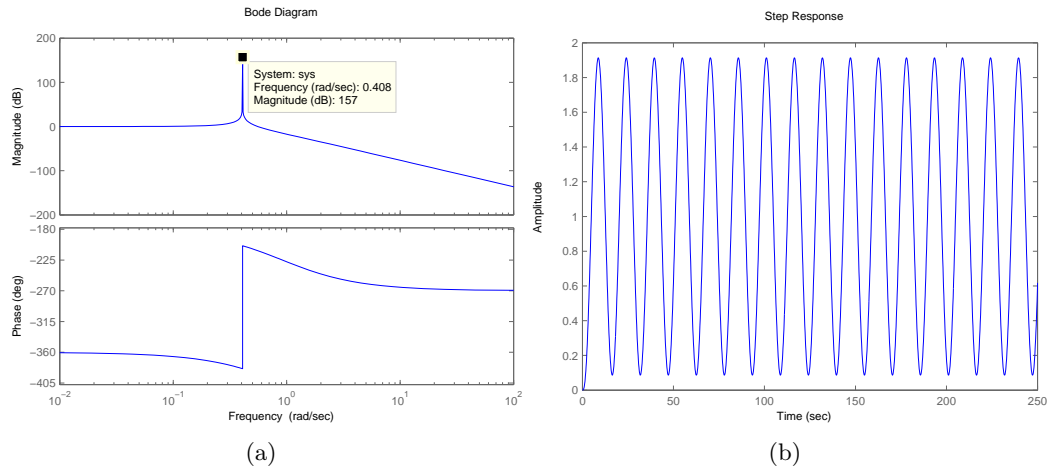


Figur 12:  $K = 0.5$

Bodeplottene over viser at  $\left| \frac{y(j\omega)}{y_0(j\omega)} \right|$  er tilnærmet lik 1 (0 [dB]) ved lave frekvenser, opptil ca. 0.4 rad/s. I dette frekvensområdet har vi godt følgeførløp, dvs  $y(t) \approx y_0(t)$ . I frekvensområdet 0.5 – 0.6 rad/s er det en resonanstopp, som blir kraftigere jo nærmere ustabilitet systemet er. Lukket sløyfe forsterkning  $\left| \frac{y(j\omega)}{y_0(j\omega)} \right|$  går raskt mot 0 ( $-\infty$  [dB]) for frekvenser  $\omega > 0.6$  rad/s. I figur 14 ligger to poler (kompleks konjugerte) på den imaginære akse, og step responsen 14(b) viser stående svingninger.



Figur 13:  $K = 0.75$



Figur 14:  $K = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = 0.9167$