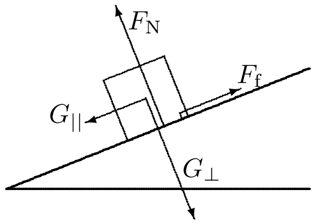
TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)
Løsningsforslag for øving 3

Oppgave 1.



a. Tyngdekrafta mg kan dekomponeres i en kraft normal på planet, $G_\perp = mg\cos\theta$ og en kraft nedover langs planet, $G_{||} = mg\sin\theta$. Normalkraft fra underlaget $F_N = G_\perp = mg\cos\theta$ motsatt retta. Friksjonskrafta F_f vil virke oppover langs planet.

b. Normalkrafta er $F_N = mg\cos\theta$ og dermed er friksjonskrafta når klossen har begynt å gli

$$F_f = \mu_k mg\cos\theta = 0,40 \cdot 1,00\,\text{kg} \cdot 9,81\,\text{m/s}^2 \cdot 0,866 = 3,398\,\text{N} = \underline{3,4\,\text{N}}\,.$$

Parallellkrafta nedover langs skråplanet er

$$F_{||} = mg\sin\theta = 1,00\,\text{kg} \cdot 9,81\,\text{m/s}^2 \cdot 0,50 = 4,905\,\text{N}$$

og dermed blir akselerasjonen nedover skråplanet

$$a = \frac{F_{||} - F_f}{m} = \frac{4,905\,\text{N} - 3,398\,\text{N}}{1,00\,\text{kg}} = \underline{1,51\,\text{m/s}^2}\,.$$

b. Vi må sjekke om klossen vil gli under disse forhold. Friksjonskrafta er alltid retta mot bevegelsen vi ville fått dersom det ikke var friksjon. Uten friksjon ville netto akselererende kraft nedover skråplanet vært

$$F_{\text{aks}} = mg\sin\theta - F = 1,00\,\text{kg} \cdot 9,81\,\text{m/s}^2 \cdot 0,50 - 2,00\,\text{N} = 2,905\,\text{N}\,.$$

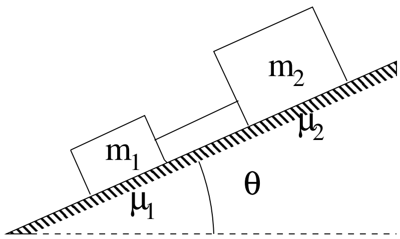
Positiv, altså retta nedover. Friksjonskrafta er da retta oppover. Vi må sjekke om F_{aks} er stor nok til å sette klossen i gang. Den maksimale statiske friksjonskrafta er

$$F_{\text{f,max}} = \mu_s mg\cos\theta = 0,43 \cdot 1,00\,\text{kg} \cdot 9,81\,\text{m/s}^2 \cdot 0,866 = 3,653\,\text{N}\,,$$

altså større enn $F_{\text{aks}} = 2,905$ N, så klossen vil forbli i ro ($\underline{a = 0}$), summen av krefter er lik null og $\underline{F_f = F_{\text{aks}} = 2,9\,\text{N}}$.

Oppgave 2. To sammenbundne klosser på skråplanet

a. Vi tar det som en *arbeidshypotese* at snora er stram, slik at snorkrafta virker oppover på m_1 og nedover på m_2. Regningene vil bekrefte eller avkrefte denne hypotesen.



Med stram snor må akselerasjonen være den samme for de to klossene, altså

$$\begin{aligned}
\frac{\sum F_1}{m_1} &= \frac{\sum F_2}{m_2} \\
\frac{m_1 g\sin\theta - m_1 g\mu_1\cos\theta - T}{m_1} &= \frac{m_2 g\sin\theta - m_2 g\mu_2\cos\theta + T}{m_2} \\
g(\sin\theta - \mu_1\cos\theta) - T/m_1 &= g(\sin\theta - \mu_2\cos\theta) + T/m_2 \quad (1)
\end{aligned}$$

Løses denne likningen med hensyn på T er resultatet

$$T = g\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\mu_2 - \mu_1)\cos\theta\,.$$

Som vi ser er åpenbart $T > 0$ uansett massenes størrelse, bare $\mu_2 > \mu_1$, som var oppgitt til å gjelde.

Alternativt kunne vi beregne akselerasjonen kloss 1 og 2 hadde fått dersom de ikke var forbundet med snor:

$$a_1 = g\sin\theta - g\mu_1\cos\theta\,, \qquad a_2 = g\sin\theta - g\mu_2\cos\theta\,.$$

Hvis kloss 1 akselererer fortere enn kloss 2 vil ei snor som forbinder klossene forbli stram, dvs. kravet er

$$a_1 > a_2 \quad \Rightarrow \quad -g\mu_1\cos\theta > -g\mu_2\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \mu_2 > \mu_1\,,\ \text{altså oppfylt krav.}$$

b. Når vi har vist at snora er stram betrakter vi 1+2 som ett legeme med tyngdekomponenten og friksjonskrefter langs skråplanet (snorkrafta motsatt like stor på begge), og finner som vi skulle vise:

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)a &= \sum F = (m_1+m_2)g\sin\theta - \mu_1 m_1 g\cos\theta - \mu_2 m_2 g\cos\theta \\ a &= g\left(\sin\theta - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1+m_2}\cos\theta\right).\end{aligned}$$

c. Klossene sklir med konstant hastighet når $a = 0$, d.v.s. når $\tan\theta = \dfrac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1+m_2}$. Forutsatt at klossene allerede er i gang slik at den kinematiske friksjonskoeffisienten kan brukes. Siden den statiske friksjonskoeffisienten er større en den kinetiske, vil klossene uten dytt bli liggende i ro ved denne helningsvinkelen.

Oppgave 3.

a. Energibevaring $E_\mathrm{A} = E_\mathrm{B}$ gir

$$\begin{aligned}E_\mathrm{p,A} + E_\mathrm{k,A} &= E_\mathrm{p,B} + E_\mathrm{k,B} \\ mgL + 0 &= mg\cdot(2r) + \frac{1}{2}mv_\mathrm{B}^2 \\ 2gL &= 4gr + v_\mathrm{B}^2\,.\end{aligned}$$

Innsatt $r = L - x$ i likningen får vi

$$v_\mathrm{B} = \sqrt{2gL - 4g(L-x)} = \underline{\sqrt{2g(2x-L)}}\,. \tag{2}$$

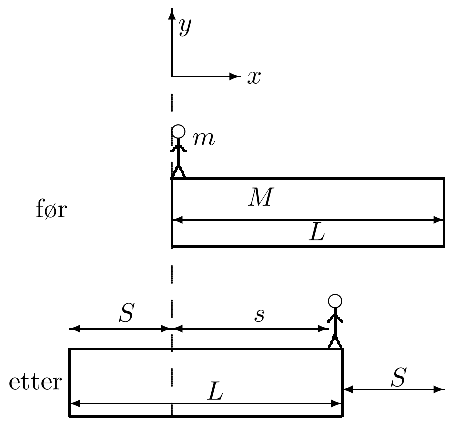
b. Snorkrafta S og tyngden virker på kula. Vi bruker Newtons 2. lov og uttrykket for sentripetalakselerasjonen:

$$S + mg = ma = \frac{mv^2}{r} \quad\Rightarrow\quad S = \frac{mv^2}{r} - mg\,. \tag{3}$$

Snora er stram for $S > 0$, som fra likn. (3) gir kravet $v^2 > gr$. Vi bruker så uttrykket for v_B i likn. (2) og at $r = L - x$:

$$2g(2x-L) > g(L-x) \quad\Rightarrow\quad 5x > 3L \quad\Rightarrow\quad \underline{x > \frac{3}{5}L}\,.$$

Oppgave 4.



Siden det ikke er ytre krefter er bevegelsesmengden bevart: $mv = MV$. Her er v er mannens fart og V flåtens fart, begge relativt laboratoriesystemet (stille vann). Vi veit at v og V er i motsatt retning og regner derfor disse uten fortegn.

Vi kan anta hastighetene er konstant under hele bevegelsen som foregår i en tid t og da er $v = s/t$ og $V = S/t$, der S er lengden flåten beveger seg (det søkte svar) og $s = L - S$ er lengden mannen beveger seg. Da får vi

$$mv = MV \quad\Rightarrow\; ms = Md \quad\Rightarrow\; m(L-S) = Md$$

$$\Rightarrow\; S = \frac{m}{m+M}L \;=\; \frac{100}{400}\cdot 10,0\ \mathrm{m} \;=\; \underline{2,50\ \mathrm{m}}\,.$$

Eller, om du tenker kjappere: Mannens forflytning og flåtens forflytning står i et forhold motsatt til masseforholdet (stor masse gir liten bevegelse):

$$\frac{\text{flåtens } \Delta x}{\text{mannens } \Delta x} = \frac{S}{L-S} = \frac{m}{M},$$

som gir samme løsning.

Oppgave 5. Ikke-konstant akselerasjon

a. I denne oppgaven er ikke akselerasjonen konstant slik at konstant-a-likningene $v = at$ og $s = \frac{1}{2}at^2$ ikke kan brukes. Akselerasjonen til partikkelen er gitt av:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_0}{m}\mathrm{e}^{-t/T}\,. \tag{4}$$

Vi integrerer $\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t$ med $a(t)$ fra likn. (4). Bruker t' som integrasjonsvariabel for å skille fra øvre integrasjonsgrense t. Vi integrerer fra 0 til vilkårlig t og bruker initialbetingelsen $v(0) = 0$.

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t')\,\mathrm{d}t' = \left[\frac{-F_0T}{m}\mathrm{e}^{-t'/T}\right]_0^t = \frac{F_0T}{m}[1-\mathrm{e}^{-t/T}]\,. \tag{5}$$

For $t = T$ får vi:

$$\underline{v(T) = \frac{F_0T}{m}[1-\mathrm{e}^{-1}]}\,.$$

b. For å finne posisjonen integrerer vi $\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t$ med $v(t)$ fra likn. (5) og bruker initialbetingelsen $x(0) = 0$. (Merk at det er ikke nok å finne bare $v(T)$ i a), vi må finne $v(t)$ for å muliggjøre videre integrering her i b.)

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t')\,\mathrm{d}t' = \frac{F_0T}{m}\left[t' + T\mathrm{e}^{-t'/T}\right]_0^t = \frac{F_0T}{m}\left[t + T(\mathrm{e}^{-t/T} - 1)\right]\,.$$

For $t = T$ får vi:

$$\underline{x(T) = \frac{F_0T^2}{m}\mathrm{e}^{-1}}\,.$$

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 2. sep. 14.