TTK 4240 – Løsningsforslag 2

OPPGAVE 1 – INDUKTANS

En induktans kobles til en spenningskilde som vist i Figur 1. Ved *t=0* er induktansen energiløs, dvs. $i_L=0$. Tid-spenningsforløpet er vist til høyre i figuren. Etter 10 ms. endrer spenningen seg til – 25 V. Tidspunktet *T* i figuren ukjent.

a) Finn i_L(t) for $0 \le t \le 10$ ms. **NB: Det er ikke nødvendig med omfattende regning her.**

Svar: Det er nyttig å kunne formulere spoleligningen både på differensial og på integral form:

$$v_s = L\frac{di_L}{dt}$$
$$v_s dt = L \cdot di_L$$
$$\int_0^t v_s dt = L\int_0^t di_L = L\left[i(t) - i(0)\right]$$

I dette tilfellet trenger vi spoleligningen på integral form siden vi er ute etter strømmen. Siden spenningen er konstant i intervallet $0 \le t \le 10$ ms. kan den trekkes ut av integralet:

$$\left[i(t) - i(0)\right] = \frac{1}{L}\int_0^t v_s dt = \frac{v_s}{L}\int_0^t dt = v_s t$$
$$i(t) = \frac{v_s}{L}t + i(0)$$

Med numeriske verdier:

$$i(t) = 800000t \quad ,0 \le t \le 10 \text{ ms.}$$

b) Finn tidspunktet T når det er definert ut fra at induktansen skal være energiløs (i_L=0) når t=T. Finn også uttrykket for i_L(t) for $10 \le t \le T$ ms.

Svar:

For $t \ge 10$ ms. gjelder følgende ligning:

$$\frac{1}{L}\int_{0.01}^t v_s dt = \left[i(t) - i(0.01)\right]$$
$$i(t) = \frac{v_s}{L}\cdot\left(t - 0.01\right) + i(0.01)$$
$$i(t) = -250000\left(t - 0.01\right) + 8000 \text{ A}$$

Hvor initialbetingelsen $i(0.01)=8000$ fås ved å sette inn *t=0.01* i uttrykket fra a), samt det faktum at strømmen gjennom en induktans ikke kan forandres momentant.

Verdien til *T* kan finnes ved å sette $i(t)=0$:

$$i(T)=-250000\left(T-0.01\right)+8000=0$$
$$T=\frac{8000}{250000}+0.01=42\text{ ms.}$$

<u>Alternativ måte for å beregne *T:*</u>

Den enkleste måten å finne *T* på er ved å observere at spolestrømmen skal returnere til sin intialverdi. Med andre ord, *i(T)=i(0).*

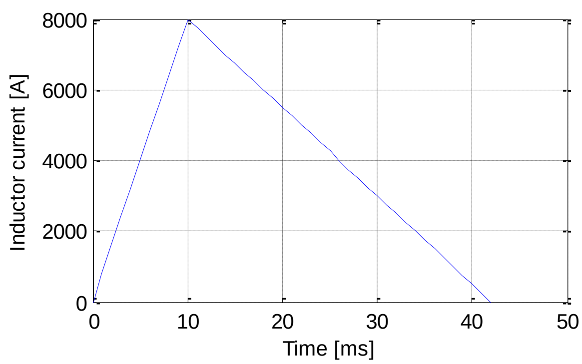
$$\int_0^t v_s dt = L\cdot\left[i(T)-i(0)\right]=0$$

Dette er det samme som at arealet under tid-spenningsgrafen må være 0:

$$\int_0^t v_s dt = 0 \Rightarrow 80\cdot 0.01+\left(-25\right)\cdot\left(T-0.01\right)=0$$
$$T=\frac{0.8}{25}+0.01=42\text{ ms.}$$

c) Skisser hele forløpet for i_L(t) for $0\le t\le T$

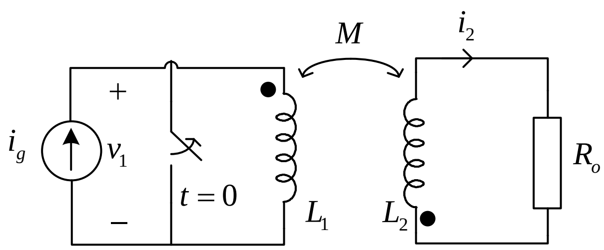
Svar: Følgende graf viser forløpet til $i_L(t)$



Figur 1: Strøm i spolen som funksjon av tid

OPPGAVE 2 – GJENSIDIG INDUKTANS OG PRIKK-KONVENSJONEN

$L_1 = 5\ H$
$L_2 = 0.2\ H$
$M = 0.5\ H$
$R_0 = 10\ \Omega$



Figur 2: Krets for oppgave 2

a) **Sett opp differensialligningen for i_2. Anta at $i_g(\mathrm{t})$ er en kjent tidsfunksjon.**

Svar: Setter opp spenningsbalansen (Kirchoffs spenningslov) i høyre sløyfe

$$M\frac{di_g}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} + R_o i_2 = 0$$

Ang. fortegn: Vi observerer at både i_g og i_2 er definert inn på prikk, dermed blir alle spenningsfall positive «referert til prikken». Når vi benytter Kirchoffs spenningslov i høyre sløyfe, og går med klokken, vil spenningsfallet fra den gjensidige induktansen dermed bli positivt slik vi får i ligningen.

Med tallverdier:

$$0.2\frac{di_2}{dt} + 10 i_2 = -0.5\frac{di_g}{dt}$$

Anta nå at $i_g(t) = e^{-10t} - 10\ \mathrm{A},\ \ t \geq 0$

b) **Vis at følgende uttrykk oppfyller diff. ligningen fra a): $i_2(t) = 0.625e^{-10t} - 0.25e^{-50t}\ \ , t \geq 0$. NB: Du trenger ikke løse ligningen.**

Svar: Setter inn løsningen på venstre side av diff.ligningen

$$0.2\frac{di_2}{dt} + 10 i_2 = -0.5\frac{di_g}{dt}$$

$$
\begin{aligned}
VHS &= 0.2\frac{di_2}{dt} + 10i_2 \\
&= 0.2\left(-6.25e^{-10t} + 12.5e^{-50t}\right) + 6.25e^{-10t} - 2.5e^{-50t} \\
&= \left(-0.2\cdot 6.25 + 6.25\right)e^{-10t} + \left(0.2\cdot 12.5 - 2.5\right)e^{-50t} \\
&= 5e^{-10t}
\end{aligned}
$$

Sammenligner dette med høyre side:

$$
\begin{aligned}
RHS &= -0.5\frac{di_g}{dt} \\
&= -0.5\frac{d\left(e^{-10t} - 10\right)}{dt} \\
&= -0.5\cdot\left(-10\right)e^{-10t} \\
&= 5e^{-10t}
\end{aligned}
$$

Siden VHS=RHS har vi bevist at løsningen stemmer.

c) Finn $v_1(t),\ t \geq 0$**.**

Svar: Setter opp spenningsbalansen (Kirchoffs spenningslov) i venstre sløyfe

$$v_1 = L_1\frac{di_g}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

$$
\begin{aligned}
v_1(t) &= 5\frac{di_g}{dt} + 0.5\frac{di_2}{dt} \\
v_1(t) &= 5\cdot\left(-10\right)e^{-10t} + 0.5\left(-6.25e^{-10t} + 12.5e^{-50t}\right) \\
v_1(t) &= -53.125e^{-10t} + 6.25e^{-50t}\ \text{V},\ t \geq 0
\end{aligned}
$$

Ang. fortegn: Også her blir spenningsfallet over den gjensidige induktansen positivt siden vi gjør Kirchoffs spenningslov i samme retning som strømmen i_g er definert. På samme måte som i a) er begge strømmene definert «inn på prikk».

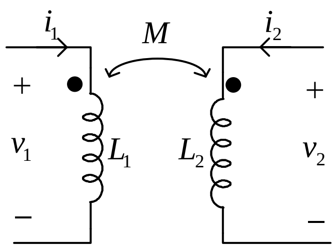
Kommentar til oppgaven:

Noen har kanskje prøvd å løse diff.ligningene enten ved hjelp av Laplace eller andre metoder. Dette er tilsynelatende komplisert å få til selv om kretsen ser enkel ut. Problemet er at vi ikke kjenner initialbetingelsen til i_2. Vanligvis benytter vi at strømmen i en spole ikke kan endres umiddelbart, som i dette tilfellet hadde gitt $i_2(0^+) = 0$. Men siden vi påtrykker en strømkilde så vil ikke dette gjelde lenger. I praksis ville ikke dette vært mulig å få til, da vi trenger en Dirac-puls med spenning for å endre strømmen i en spole som et sprang (en Dirac-puls har uendelig amplitude og er uendelig kort). Med andre ord er ikke oppgaven spesielt pedagogisk, og den blir nok modifisert til neste års øvingsopplegg.

OPPGAVE 3 – GJENSIDIG INDUKTANS OG ENERGIBETRAKTNINGER

Oppgaven omhandler kretsen i Figur 3.

$L_1 = 18 \text{ mH}$
$L_2 = 32 \text{ mH}$



Figur 3: Krets for oppgave 3

Anta først at *k=0.85*.

a) Finn verdien til den gjensidige induktansen *M*.

Svar: Gjensidig induktans finnes ved hjelp av $M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.85 \cdot \sqrt{0.018 \cdot 0.032} = 20.4 \text{ mH}$

Anta at i et gitt tidspunkt er $i_1 = 6 \text{ A}, i_2 = 9 \text{ A}$

b) Hvor mye energi ligger lagret i kretsen?

Svar: Energien lagret i en spole med selvinduktans *L* er gitt av:

$$W = \frac{1}{2} L i^2$$

Med magnetisk kobling blir det enten lagt til eller trukket fra et energibidrag, avhengig av retning på strømmene, samt orientering av spolene (prikk-konvensjonen). Total energi i to spoler med magnetisk kobling er gitt av:

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2$$

Regel for fortegn til energibidraget fra den magnetiske koblingen ($\pm M i_1 i_2$): Hvis begge strømmene i_1 og i_2 er definert inn på prikk, skal energibidraget ha positivt fortegn. Det samme gjelder hvis begge strømmene er definert ut av prikk.
Hvis en av strømmene er definert inn på prikk, og den andre ut av prikk, så blir fortegnet negativt.

OBS: Merk at disse fortegnsreglene refereres til *definisjonen* av strømretninger. Faktiske strømretninger finnes ved å løse kretsligningene.

Se for øvrig side 199 i Nilson&Riedel 10th ed.

I vårt tilfelle blir fortegnet positivt, siden begge strømmene er definert inn på prikk.

Med numeriske verdier:

$$W = \frac{1}{2}\cdot 0.018\cdot 6^2 + \frac{1}{2}\cdot 0.032\cdot 9^2 + 0.0204\cdot 6\cdot 9 = 2.7216 \text{ J}$$

Anta nå at $i_1 = 6 \text{ A}, i_2 = -9 \text{ A}$

c) Hvor mye energi ligger lagret i kretsen i dette tilfellet?

Svar: Benytter samme formel og tankemåte som i b):

$$W = \frac{1}{2}\cdot 0.018\cdot 6^2 + \frac{1}{2}\cdot 0.032\cdot (-9)^2 + 0.0204\cdot 6\cdot (-9) = 0.5184 \text{ J}$$

Til slutt antar vi at *k=1.0* (perfekt magnetisk kobling), samt at $i_1 = 6 \text{ A}$

d) Finn verdien til *i₂* som gir null lagret energi i kretsen. Finnes det en kombinasjon av *i₁* og *i₂* som gir negativ lagret energi i kretsen?

Svar: Finner ny verdi for gjensidig induktans:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 1\cdot\sqrt{0.018\cdot 0.032} = 24.0 \text{ mH}$$

Setter inn all kjent informasjon i uttrykket $W = 0$:

$$W = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 = 0$$
$$\frac{1}{2}\cdot 18\cdot 6^2 + \frac{1}{2}\cdot 32\cdot i_2^2 + 24\cdot 6\cdot i_2 = 0$$
$$324 + 16 i_2^2 + 144 i_2 = 0$$
$$i_2 = -4.5 \text{ A}$$

(Andregradsligningen gir en dobbel løsning for $i_2 = -4.5$)

I læreboken s. 199 er det bevist at det er umulig med negativ lagret energi i en magnetisk koblet krets. Det finnes derfor ingen kombinasjon av i_1 og i_2 som gir dette. Det er også tilstrekkelig å skrive at det er ikke fysisk mulig med negativt lagret energi. Negativ lagret energi ville medført at kretsen en gang i fremtiden kommer til å kreve energi fra systemet hvis den skal nå tilbake til likevekt ($i_1 = i_2 = 0$).

OPPGAVE 4: INDUKTANS OG MAGNETISK FLUKS (FARADAYS LOV)

Vi antar $v(t) = 10 \cdot \sin(100t)$, $\Re = 100\frac{At}{Wb}$, samt at mostsanden i viklingen er null, dermed blir $v(t) = \varepsilon(t)$ (påtrykt spenning er lik viklingens induserte spenning)

a) Finn $\varphi(t)$ og $i(t)$

Svar: Fluksen finnes direkte fra Faradays lov:

$$\varepsilon(t) = N\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon(t)}{N} \Rightarrow \varphi(t) = \frac{1}{N}\int_0^t \varepsilon(t)$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{100}\cdot 10\left[\sin(100t) - \sin(0)\right] + = \frac{1}{40}\sin(100t)$$

Strømmen finnes ved hjelp av fluks og reluktans:

$$N \cdot i(t) = \Re \cdot \varphi(t)$$

$$i(t) = \frac{\Re\cdot\varphi(t)}{N} = \frac{100}{4}\cdot\frac{1}{40}\sin(100t) = \frac{5}{8}\sin(100t)$$

b) Vis at $L = \frac{N^2}{R}$ basert på uttrykkene ovenfor, samt definisjonen $v_L = L\frac{di_L}{dt}$. Uttrykket viser at induktansen *L* kun er avhengig av viklingstallet, samt geometri og materialegenskap til kjernen.

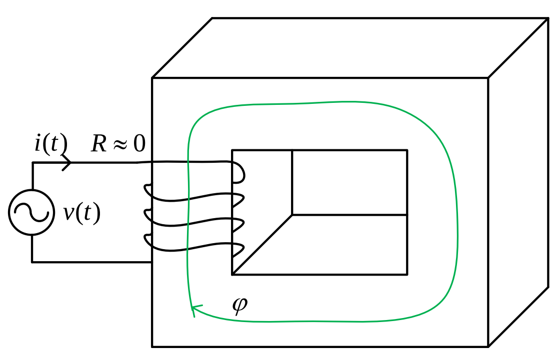
Svar:

Denne utledningen kan gjøres på mange måter. En måte er å finne et utrykk for $\frac{di_L}{dt} = \frac{di}{dt}$ som inneholder $v_L(t) = \varepsilon(t)$.

$$i(t) = \frac{\Re\cdot\varphi(t)}{N} \qquad \frac{di}{dt} = \frac{\Re}{N}\frac{d\varphi}{dt}$$

Setter så inn fra Faradays lov: $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon}{N} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{\Re}{N}\frac{\varepsilon(t)}{N}$

Det siste uttrykket kan skrives som $\varepsilon(t) = \frac{N^2}{\Re}\frac{di}{dt} \Rightarrow L = \frac{N^2}{\Re}$



Figur 4: Krets for oppgave 4: Spenningskilde koblet til jernkjerne (N=4)