

# TTK 4240 – Løsningsforslag 4

Utløst dato: 09.09.2015

Veiledningstime: 18.09.2015

Innleveringsfrist: 22.09.2015

Ansvarlig: Atle Rygg ([atle.rygg@itk.ntnu.no](mailto:atle.rygg@itk.ntnu.no))

## OPPGAVE 1 – MAGNETISKE KRETSBEREGNINGER #1

Bruk følgende tallverdier:

$N = 50$  (antall viklinger til spolen)

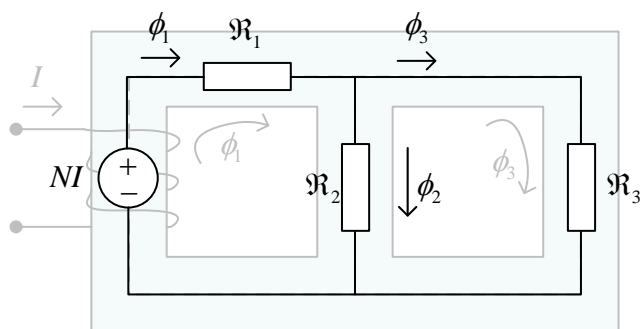
$I = 1 \text{ A}$

$\mu = 5000\mu_0$ , hvor  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  er en av fysikkens *universalkonstanter* som har det kledelige navnet *tomromspermeabiliteten*

- a) Tegn en magnetisk kretsekvivalent av jernkjernen. Indiker fluksene  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  i tegningen, samt kilden som representerer spolen (blir det en strøm- eller spenningskilde?). Dette kan gjøres på flere måter, men det trengs minst 3 reluktanser (kan ha flere).

**Svar:**

Den enkleste kretsekvivalenten er gitt i Figur 1. Spolen erstattes av en spenningskilde med spenning  $NI$ . Det er hensiktsmessig å slå sammen hver av jernveiene til en felles reluktans, dvs. totalt tre reluktanser.



Figur 1: Kretsekvivalent av jernkjernen

- b) Regn ut fluksene  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  og de tilsvarende flukstettheter ( $B_1, B_2, B_3$ ). Er jernet i metning noe sted i jernkjernen?

**Svar:**

Starter med å finne reluktansene. Alle har samme tverrsnittsareal  $A = 0.02 \cdot 0.02 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$  (NB: viktig å gjøre om til kvadratmeter!). Lengden på fluksbanen (jernveien) blir som følger:

$$l_1 = 6 + 8 + 6 = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}$$

$$l_2 = 8 \text{ cm} = 0.08 \text{ m}$$

$$l_3 = 6 + 8 + 6 = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}$$

Vi kan dermed bestemme reluktansene:

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{0.2}{4 \cdot 10^{-4} \cdot 5000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 79577 \text{ At/Wb}$$

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{0.08}{4 \cdot 10^{-4} \cdot 5000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 31831 \text{ At/Wb}$$

$$\mathfrak{R}_3 = \frac{0.2}{4 \cdot 10^{-4} \cdot 5000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 79577 \text{ At/Wb}$$

Spenningskilden får verdien  $NI = 50 \cdot 1 = 50 \text{ At}$

Finner så total reluktans sett fra kilden:

$$\mathfrak{R}_{tot} = \mathfrak{R}_1 + \frac{\mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_3}{\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3} = 102310 \text{ At/Wb}$$

Kan finne  $\phi_1$  basert på denne:

$$NI = \phi_1 \mathfrak{R}_{tot} \Rightarrow \phi_1 = \frac{50}{102310} = 4.887 \cdot 10^{-4} \text{ Wb (milli-Weber)}$$

$\phi_2, \phi_3$  finnes nå enklest via strømdeling (mer presist: fluks-delning), men kan også finnes ved andre metoder.

$$\phi_2 = \phi_1 \cdot \frac{\mathfrak{R}_3}{\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3} = 3.491 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$\phi_3 = \phi_1 \cdot \frac{\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3} = 1.396 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

Til slutt finner vi fluks-tetthetene:

$$B_1 = \frac{\phi_1}{A} = 1.218 \text{ T}$$

$$B_2 = \frac{\phi_2}{A} = 0.872 \text{ T}$$

$$B_3 = \frac{\phi_3}{A} = 0.349 \text{ T}$$

Ingen av flukstetthetene overstiger  $2 \text{ T}$ , dermed konkluderer vi med at jernkjernen ikke går i metning i denne driftstilstanden.

## OPPGAVE 2 – MAGNETISKE KRETSBEREGNINGER #2

Bruk følgende tallverdier:

$$N_1 = N_2 = 100 \text{ (antall viklinger til spolene)}$$

$$\mu_{jern} = 5000\mu_0, \text{ hvor } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

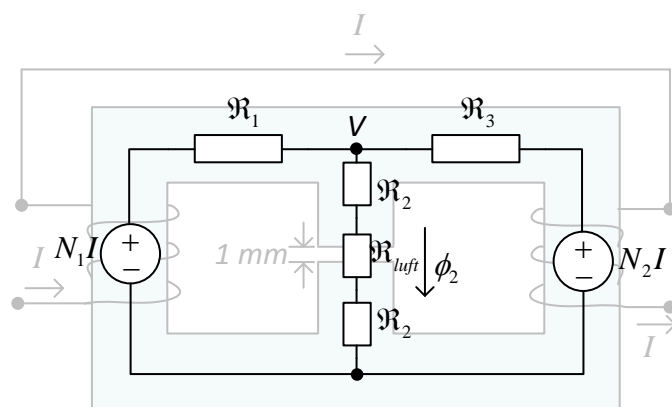
$$\mu_{luft} = \mu_0$$

- a) Tegn magnetisk kretsekvivalent til jernkjernen. Inkluder en egen reluktans for luftgapet. Bruk høyrehåndsregelen til å bestemme retningen/fortegnet til spenningskildene som representerer de to spolene.

**Svar:**

Kretsekvivalenten blir som vist i Figur 2. Fortegnene til spenningskildene blir på denne måten siden høyrehåndsregelen gir at fluksen i både venstre og høyre ben vil gå oppover (la høyre hånd følge spoleviklingen i samme retning som strømmen  $I$ ). Siden dette er en kilde så skal fluksen gå ut av «+» til kilden på samme måte som for en elektrisk krets.

Jernveien tilhørende venstre ben slås sammen til  $\mathfrak{R}_1$ , og høyre ben representeres ved  $\mathfrak{R}_1$ . Midtbenet representeres ved to jern-reluktanser  $\mathfrak{R}_2$ , en over og en under luftgapet. På grunn av symmetri blir disse like (vi kunne også slått de sammen til en pga. seriekobling). Luftgapets reluktans er vist ved  $\mathfrak{R}_{luft}$



Figur 2: Magnetisk kretsekvivalent til jernkjernen i Figur 3

- b) Hva må strømmen  $I$  være for at flukstettheten i luftgapet skal bli lik  $0.25 \text{ T}$ ?

**Svar:** Finner først lengdene til fluksbanene:

$$l_1 = 6 + 8 + 6 = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}$$

$$l_2 = \frac{8 - 0.1}{2} \text{ cm} = 0.0395 \text{ m}$$

$$l_3 = 6 + 8 + 6 = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}$$

$$l_{luft} = 0.001 \text{ m}$$

Vi kan dermed bestemme reluktansene:

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_3 = \frac{0.2}{4 \cdot 10^{-4} \cdot 5000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 79577 \text{ At/Wb}$$

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{0.0395}{4 \cdot 10^{-4} \cdot 5000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 15717 \text{ At/Wb}$$

$$\mathfrak{R}_{\text{luft}} = \frac{0.001}{4 \cdot 10^{-4} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 1989400 \text{ At/Wb}$$

**NB:** Noen benytter en formel fra læreboken om *fringing* i luftgap som gjør at ekvivalent areal blir høyere ( $A = (2\text{cm} + 1\text{mm}) \cdot (2\text{cm} + 1\text{mm})$ ). Dette er noe mer korrekt enn metoden overfor som antar samme areal i luftgapet som i jernkjernen.

Merk at reluktansen i luft er mye høyere enn samtlige jernreluktanser selv om lengden til luftgapet bare er 1 mm! Dette understreker hvor motvillig magnetisk fluks er til å passere gjennom luft sammenlignet med jern.

Spenningskildene får verdien  $NI = 100 \cdot I$

Kretsen kan løses ved å børste støv av nodespenningsmetoden fra kretsteknikk. I denne kretsen har vi bare 2 noder (markert med prikker i figuren). Definer nedre node som referansenode, og øvre node med spenning  $V$  som vist i figuren. Setter så opp Kirchoffs strømløp for øvre node.

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0$$

$$\frac{\overbrace{V - NI}^{\phi_1}}{\mathfrak{R}_1} + \frac{\overbrace{V}^{\phi_2}}{2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_{\text{luft}}} + \frac{\overbrace{V - NI}^{\phi_3}}{\mathfrak{R}_3} = 0$$

Løser så denne ligningen for strømmen  $I$ :

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0$$

$$\frac{\overbrace{V - NI}^{\phi_1}}{\mathfrak{R}_1} + \frac{\overbrace{V}^{\phi_2}}{2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_{\text{luft}}} + \frac{\overbrace{V - NI}^{\phi_3}}{\mathfrak{R}_3} = 0$$

$$NI \left( \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_3} \right) = V \left( \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_{\text{luft}}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_3} \right)$$

$$\Rightarrow I = \frac{V \left( \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_{\text{luft}}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_3} \right)}{N \left( \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_3} \right)}$$

I denne ligningen er det to ukjente,  $I$  og  $V$ . Vi trenger dermed en ytterligere ligning, og denne får vi fra betingelsen om at flukstettheten i luftgapet skal være  $B_{\text{luft}} = 0.25 \text{ T}$ . Dette gir:

$$\phi_2 = \phi_{\text{luft}} = B_{\text{luft}} A$$

Kan så benytte følgende relasjon for å finne  $V$ :

$$V = (2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_{luft})\phi_2 = (2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_{luft})B_{luft}A$$

Setter dette inn i uttrykket for  $I$ :

$$I = \frac{B_{luft}A(2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_{luft})}{N} \frac{\left(\frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_{luft}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_3}\right)}{\left(\frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_3}\right)}$$

Nå er alle størrelser på høyre side kjent, og vi kan finne strømmen som gir ønsket flukstetthet:

$$I = \frac{0.25 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 2020900}{100} \frac{2.5628 \cdot 10^{-5}}{2.5133 \cdot 10^{-5}} = 2.0607 \text{ A}$$

Ved å sammenligne med svaret fra oppgave 1 ser vi at det trengs en høyre strøm i spolen selv om flukstettheten i midtbenet er lavere. Dette er nok et kjennetegn ved luftgap: det trengs mer strøm (=pådrag) for å oppnå ønsket fluks.

#### Alternativ løsning

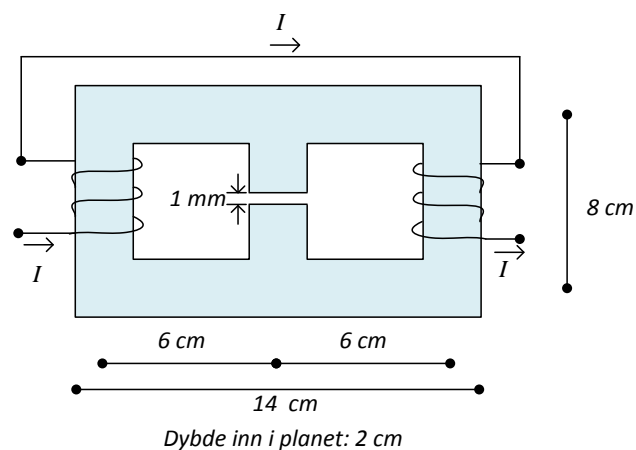
Vi sparer oss for en del utregning ved å observere symmetrien mellom venstre og høyre ben. Begge spenningskildene og reluktansene er like store, med andre ord kan vi betrakte dette som en parallelkobling hvor netto reluktans blir halvert og spenningskilden blir uforandret.

Dermed består kretsen av en ren seriekobling og vi kan finne et uttrykk for fluksen i midtbenet direkte:

$$NI = \left(\frac{\mathfrak{R}_1}{2} + 2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_{luft}\right)\phi_2$$

$$\Rightarrow \phi_2 = B_{luft}A = \frac{NI}{\left(\frac{\mathfrak{R}_1}{2} + 2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_{luft}\right)}$$

$$\Rightarrow I = \frac{B_{luft}A}{N} \left(\frac{\mathfrak{R}_1}{2} + 2\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_{luft}\right) = 2.0607 \text{ A}$$



Figur 3: Jernkjerne for oppgave 2

## OPPGAVE 3 – IDEELL VS. IKKE-IDEELL TRANSFORMATOR

---

Bruk følgende numeriske verdier i utregningene:

$$R_1 = 15 \, \Omega$$

$$R_2 = 0.1 \, \Omega$$

$$X_1 = 120 \, \Omega$$

$$X_2 = 1.5 \, \Omega$$

$$X_m = 30 \, \text{k}\Omega$$

$$R_m = 200 \, \text{k}\Omega$$

$$N_1 : N_2 = 2400 : 240$$

$$V_S = 2400 \, \text{V (rms)}$$

Det oppgis videre at i merkedrift, så er  $R_0 = 12.0 \, \Omega$ , mens i tomgang er  $R_0 = \infty$  (dvs.  $I_2 = 0$ ).

- a) Anta at lasten driftes i *tomgang*. Hvor stor blir strømmen  $I_1$  ved bruk av henholdsvis ideell og realistisk transformatormodell? Hvor stor er tilført aktiv, reaktiv og tilsynelatende effekt?

**Svar:**

Ideell modell:

I tomgang når  $I_2 = 0$  blir også  $I_1 = 0$  når vi regner med ideell transformatormodell. Dermed blir også tilført effekt lik 0:

$$P = 0 \, \text{W}$$

$$Q = 0 \, \text{VAr}$$

$$S = 0 \, \text{VA}$$

Realistisk modell:

Med  $I_2 = 0$  blir strømmen  $I_1' = 0$  siden  $I_1' N_1 = I_2 N_2$ . Dermed kan vi se bort fra den delen av kretsen som er til høyre for  $X_m$ . For å finne strømmen  $I_1$  er det hensiktsmessig å finne total impedans sett fra kilden.

Finner først total impedans i magnetiseringsgrenen:

$$\begin{aligned} Z_m &= R_m \parallel jX_m = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot j30 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^3 + j30 \cdot 10^3} = \frac{j600 \cdot 10^3}{20 + j3} \\ &= \frac{600 \cdot 10^3 e^{j90}}{20.223 e^{j8.53}} = 29.669 \cdot 10^3 e^{j81.47} = 4.401 \cdot 10^3 + j29.341 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Finner så total impedans sett fra kilden:

$$Z_{tot} = R_1 + jX_1 + Z_m = 15 + j120 + 4401 + j29341 = 4416 + j29461 = 29790 e^{j81.47}$$

Kan så finne strømmen  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{V_s}{Z_{tot}} = \frac{2400}{29790e^{j81.47}} = 0.0806e^{-j81.47} \text{ A}$$

For å finne tilført effekt benytter vi definisjonen på kompleks effekt:

$$S_s = P_s + jQ_s = V_s I_s^* = 2400 \cdot 0.0806e^{j81.47} = 193.44e^{j81.47} = 28.69 + j191.3$$

$$S = 193.44 \text{ VA}$$

$$P = 28.69 \text{ W}$$

$$Q = 191.3 \text{ VAr}$$

- b) Anta at lasten driftes i *merkedrift*. Argumenter for hvorfor det nå er en rimelig antagelse å se bort fra parallellgrenen med  $R_m$  og  $X_m$ . Regn så ut strømmen  $I_L$ , både med bruk av ideell og realistisk transformatormodell (NB: Du får lov til å se bort fra  $R_m$  og  $X_m$ , men må gjerne inkludere dem hvis du ønsker). Hvor stor er tilført aktiv, reaktiv og tilsynelatende effekt?

**Svar:**

Ideell modell:

Strømmen kan finnes slik:

$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}$$

$$I_1 N_1 = I_2 N_2$$

$$V_2 = R_o I_2$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{N_1} = \frac{I_2 R_o}{N_2} = \frac{\frac{I_1 N_1}{N_2} R_o}{N_2}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{V_1}{R_o} \frac{N_2^2}{N_1^2} = \frac{2400}{12} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 2 \text{ A}$$

Finner så tilført effekt:

$$S_s = P_s + jQ_s = V_s I_s^* = 2400 \cdot 2e^{j0} = 4800e^{j0} = 4800$$

$$S = 4800 \text{ VA}$$

$$P = 4800 \text{ W}$$

$$Q = 0 \text{ VAr}$$

Det er rimelig at reaktiv effekt er 0 siden lasten forbruker ren aktiv effekt, og det er ingen elementer i den ideelle transformatormodellen som forbruker eller produserer reaktiv effekt.

Realistisk modell

NB: I denne oppgaven anbefales det som første steg å referere totalimpedansen på sekundærsiden (vikling 2) til primærsiden (vikling 1). Se for øvrig øving 3 og Hambley kap 15.5 for hvordan dette gjøres.

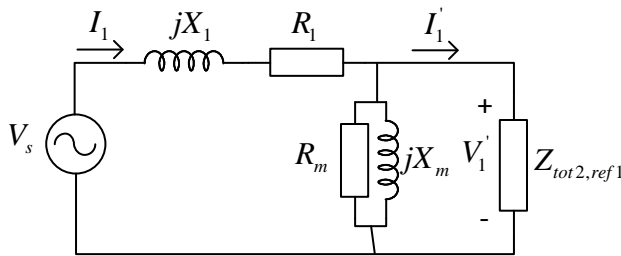
Total impedans på sekundærsiden er:

$$Z_{tot,2} = R_2 + jX_2 + R_o = 0.1 + j1.5 + 12 = 12.1 + j1.5 = 12.193e^{j7.067}$$

Referert til primærsiden blir denne lik:

$$Z_{tot,2,ref1} = Z_{tot,2} \cdot \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 = 100 \cdot 12.193e^{j7.067} = 1219.3e^{j7.067}$$

For å gjøre dette noe mer oversiktlig tegner vi en modifisert ekvivalent av systemet:



Vi ser at  $Z_{tot,2,ref1} \ll R_m \parallel jX_m$ , dermed kan vi se bort fra  $R_m$  og  $X_m$  uten at det påvirker svaret i stor grad.

Dette forenkler beregningene betraktelig siden kretsen da er en ren seriekobling så vi finner strømmen  $I_1$  direkte:

$$I_1 = \frac{V_s}{R_1 + jX_1 + Z_{tot2,ref1}} = \frac{2400}{15 + j120 + 1210 + j150} = \frac{2400}{1254e^{j12.43}} = 1.9139e^{-j12.43} \text{ A}$$

Hvis vi derimot inkluderer  $R_m$  og  $X_m$  må vi først finne totalimpedans i parallellkoblingen. Dette er gjort i følgende Matlab-script:

```
%% Impedanser
Vs=2400;
R1=15;
X1=120;
Rm=200e3;
Xm=30e3;
Ztot2_ref1=1219.3*exp(j*7.067*pi/180);
%% Utrekninger
Zm=Rm*j*Xm/(Rm+j*Xm);
Z_x = Ztot2_ref1*Zm/(Ztot2_ref1+Zm);
Ztot=R1+j*X1+Z_x;
I1=Vs/Ztot;
disp('Absoluttverdien til I1:');
disp(num2str(abs(I1)));
disp('Vinkelen til I1:');
disp(num2str(angle(I1)*180/pi))
```

Dette gir  $I_1 = 1.9282e^{-j14.66} \text{ A}$ . Dette er mindre enn 1 % avvik fra strømmen funnet ovenfor, med andre ord var det en brukbar antagelse å se bort fra  $R_m$  og  $X_m$ .

Vi finner så tilført effekt:



$$S_s = P_s + jQ_s = V_s I_s^* = 2400 \cdot 1.9139 e^{j12.43} = 4593 e^{j12.43} = 4486 + j988.7$$

$$S_s = 4593$$

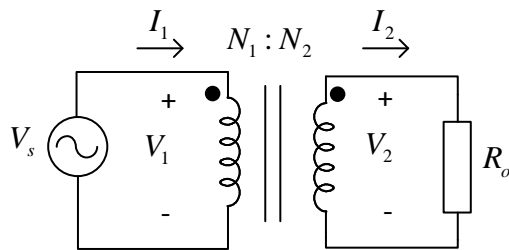
$$P_s = 4486 \text{ W}$$

$$Q_s = 988.7 \text{ VAr}$$

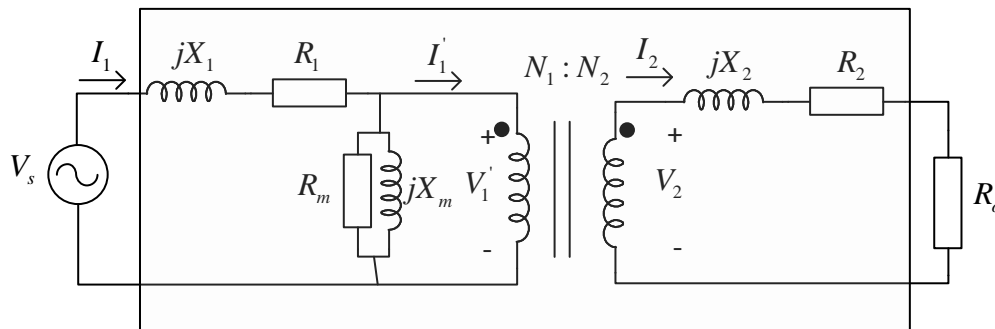
Vi ser at det er store avvik mellom ideell og realistisk transformatormodell i «merkedrift». Den tilførte aktive effekten blir lavere på grunn av spenningsfallet over transformatoren. Med andre ord blir

spenningen over lasten lavere, og dermed blir effekten forbrukt i lasten lavere ( $P = \frac{V^2}{R_o}$ ). I tillegg må

kilden tilføre en betraktelig mengde reaktiv effekt. Denne blir ikke brukt i lasten (lasten er rent resistiv), dermed blir den forbrukt i transformatoren. Denne blir forbrukt både i  $X_1$ ,  $X_2$  og  $X_m$ .



Figur 4: Forsyning av last via transformator - ideell transformatormodell



Figur 5: Forsyning av last via transformator - realistisk transformatormodell