# Løsningsforslag øving 2

## Oppgave 1

**a)**

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{1}{T}x + \frac{1}{T}u \\ x(0) &= 0 \\ u &= \begin{cases} \frac{1}{\Delta t}, & 0 \leq t \leq \Delta t \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}\end{aligned}$$

Av ligning (2.17) i læreboka får vi

$$x(t) = \underbrace{e^{-\frac{1}{T}t}x_0}_{=0} + \int_0^t e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)}\frac{1}{T}u(\tau)d\tau$$

Når $0 \leq t \leq \Delta t$, blir

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_0^t e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)}\frac{1}{T}\frac{1}{\Delta t}d\tau \\ &= \frac{1}{T\Delta t}\int_0^t e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)}d\tau \\ &= \frac{1}{T\Delta t}\left[Te^{-\frac{1}{T}(t-\tau)}\right]_0^t \\ &= \frac{1}{\Delta t}\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right), \quad 0 \leq t \leq \Delta t\end{aligned}$$

Når $t > \Delta t$, blir

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_0^{\Delta t} e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)}\frac{1}{T}\frac{1}{\Delta t}d\tau + \int_{\Delta t}^t e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)}\frac{1}{T}\cdot 0 d\tau \\ &= \frac{1}{T\Delta t}\left[Te^{-\frac{1}{T}(t-\tau)}\right]_0^{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta t}\left(e^{-\frac{1}{T}(t-\Delta t)} - e^{-\frac{1}{T}t}\right), \quad t > \Delta t\end{aligned}$$

**b)**

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \to 0} x(t) &= \lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(e^{-\frac{1}{T}(t-\Delta t)} - e^{-\frac{1}{T}t}\right) \\ &= \lim_{\Delta t \to 0}\frac{e^{-\frac{1}{T}t}\left(e^{\frac{1}{T}\Delta t} - 1\right)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0}\frac{e^{-\frac{1}{T}t}\left(\frac{1}{T}e^{\frac{1}{T}\Delta t} - 0\right)}{1} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} e^{-\frac{1}{T}t}\frac{1}{T}e^{\frac{1}{T}\Delta t} \\ &= \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}\end{aligned}$$

Impulsresponsen er

$$\begin{aligned}h(t) &= \int_0^t e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)}\frac{1}{T}\delta(\tau)d\tau \\ &= e^{-\frac{1}{T}t}\frac{1}{T} = \lim_{\Delta t \to 0} x(t)\end{aligned}$$

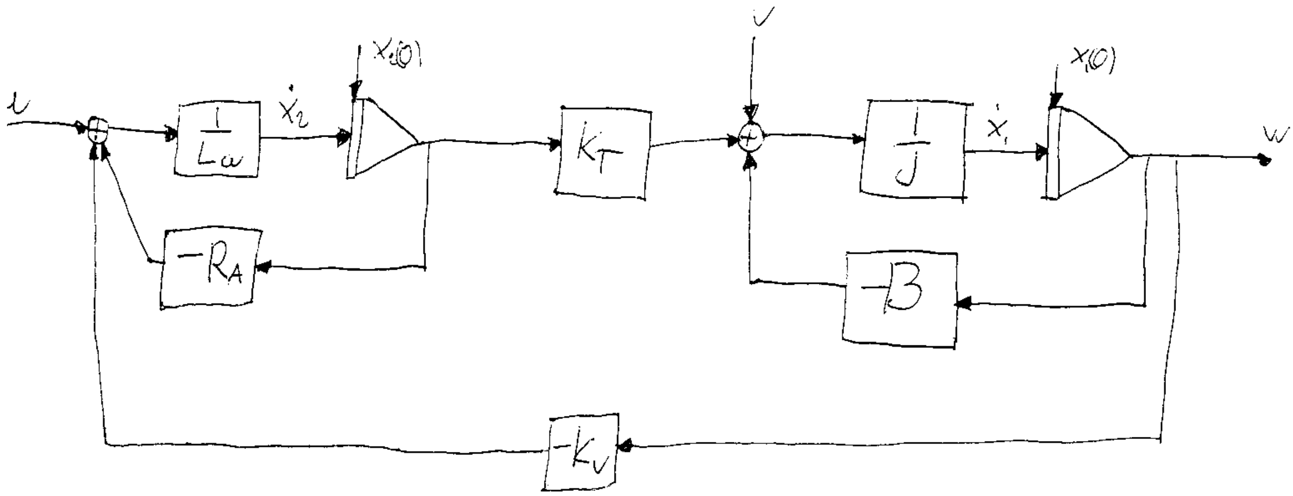
Dette er rimelig fordi $u(t)$ går mot en impuls $\delta(t)$ når $\Delta t$ går mot 0.

## Oppgave 2

**a)**

$$\dot{x}_1 = -\frac{B}{J}x_1 + \frac{K_T}{J}x_2 + \frac{1}{J}v$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{K_v}{L_a}x_1 - \frac{R_a}{L_a}x_2 + \frac{1}{L_a}u$$

Blokkdiagram for likestrømsmotoren er vist i Figur 1.




Figur 1: Blokkdiagram for likestrømsmotoren

## Oppgave 3

**a)** Matrisen **A** blir, ifølge modellen på side 36 i boka og våre antagelser:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{g_1}{m_1c_1} & \frac{g_1}{m_1c_1} \\ \frac{g_1}{m_2c_2} & \frac{1}{m_2c_2}(-g_1 - g_2) \end{bmatrix} \tag{1}$$

Innsatt tallverdiene får vi:

$$\underline{\underline{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.09 & -0.15 \end{bmatrix}}} \tag{2}$$

Egenverdimatrisen $\mathbf{\Lambda}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -0.600 & 0 \\ 0 & -0.050 \end{bmatrix}}} \tag{3}$$

En egenvektormatrise **M** er:

$$\underline{\underline{\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -0.981 & -0.743 \\ 0.196 & -0.669 \end{bmatrix}}} \tag{4}$$

(De to egenvektorene er normalisert til å ha norm = 1. Matlab gjør dette automatisk. Men dette er ikke noe krav: Normen på hver vektor kan velges fritt.)

**TIPS: Invertering av $2 \times 2$-matrise**

En enkel huskeregel for å invertere en $\underline{2 \times 2\text{-matrise}}$ er som følger:

Gitt

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right]$$

Da er

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \left[ \begin{array}{cc} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{array} \right]$$

Vi ser at diagonalelementene bytter plass, utenomdiagonalelementene bytter fortegn. I tillegg må vi dele med determinanten. Vi bruker regelen, og får

$$\underline{\underline{\mathbf{M}^{-1} = \left[ \begin{array}{cc} -0.834 & 0.927 \\ -0.245 & -1.223 \end{array} \right]}} \tag{5}$$

Dette kan lett gjøres i Matlab:

```
g1m1c1 = 0.5;
g2m2c2 = 0.06;
g1m2c2 = 0.09;

A = [-g1m1c1, g1m1c1;
     g1m2c2, -g1m2c2-g2m2c2];
[M, Alfa] = eig(A);
M_inv = eye(2)/M;
```

**b)** $\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{M}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{M}^{-1}$ :

$$\mathbf{\Phi}(t) = \left[ \begin{array}{cc} -0.981 & -0.743 \\ 0.196 & -0.669 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} e^{-0.600t} & 0 \\ 0 & e^{-0.050t} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} -0.834 & 0.927 \\ -0.245 & -1.223 \end{array} \right] \tag{6}$$

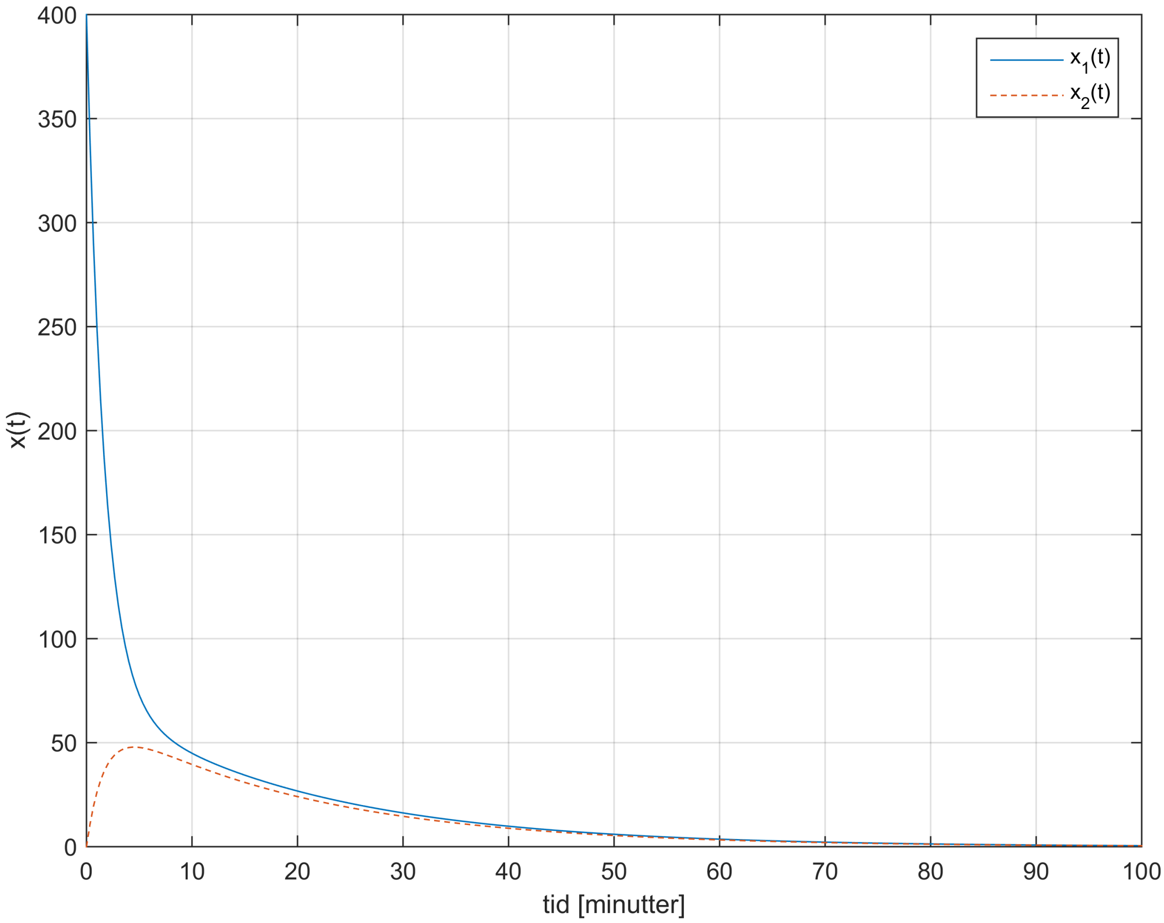
$$\mathbf{\Phi}(t) = \left[ \begin{array}{cc} 0.818e^{-0.6t} + 0.182e^{-0.05t} & -0.909e^{-0.6t} + 0.909e^{-0.05t} \\ -0.164^{-0.6t} + 0.164e^{-0.050t} & 0.182e^{-0.6t} + 0.818e^{-0.05t} \end{array} \right] \tag{7}$$

**c)** Siden systemet er autonomt, kan vi sette $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0$ :

$$\mathbf{x}(t) = \left[ \begin{array}{cc} 0.818e^{-0.6t} + 0.182e^{-0.05t} & -0.909e^{-0.6t} + 0.909e^{-0.05t} \\ -0.164^{-0.6t} + 0.164e^{-0.050t} & 0.182e^{-0.6t} + 0.818e^{-0.05t} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 400 \\ 0 \end{array} \right] \tag{8}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{x}(t) = \left[ \begin{array}{c} 327.3e^{-0.600t} + 72.7e^{-0.050t} \\ -65.5e^{-0.600t} + 65.5e^{-0.050t} \end{array} \right]}} \tag{9}$$

Tidsforløpene er vist i figur 2. Vi ser at varmeelementets temperatur synker fra $400°C$ til ca. $75°C$ på 5 minutter og at vannet likeledes stiger fra $0°C$ til $50°C$ i samme tidsrom. Etter det synker begge temperaturene ned til $0°C$ i løpet av ca. en time. Det er med andre ord ganske realistisk.




Figur 2: Temperaturforløpet. $x_1(t)$ (heltrukket) og $x_2(t)$ (stiplet).