

## Løsningsforslag Dataøving 3

**Oppgave 1 Forberedelse og implementering**

- a) Dobbelklikk eller skriv `mopar.m` i Matlab Command Window.
- b) Funksjonen `tf` tar inn teller og nevner som argumenter dvs.  $\mathbf{h} = \mathbf{tf}(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ , der  $\mathbf{t}$  og  $\mathbf{n}$  er definert som en vektor av koeffisienter der f.eks.  $\mathbf{t} = [T_1 \ 1]$  gir  $(T_1 s + 1)$ . Vi definerer derfor  $h_u(s)$  slik:

```
hu = tf([K_T], [J*L_a J*R_a+B*L_a R_a*B+K_T*K_v 0]);
```

**Oppgave 2 Proporsjonalregulator**

- a) Transferfunksjonen til  $h_r(s)$  implementeres slik:

```
K_p=1;
hr = K_p;
```

Vi finner  $h_0$  ved å benytte `series`,

```
h0 = series(hr, hu);
```

evt bare ved å multiplisere  $h_u(s)$  og  $h_r(s)$ :

```
h0 = hr*hu;
```

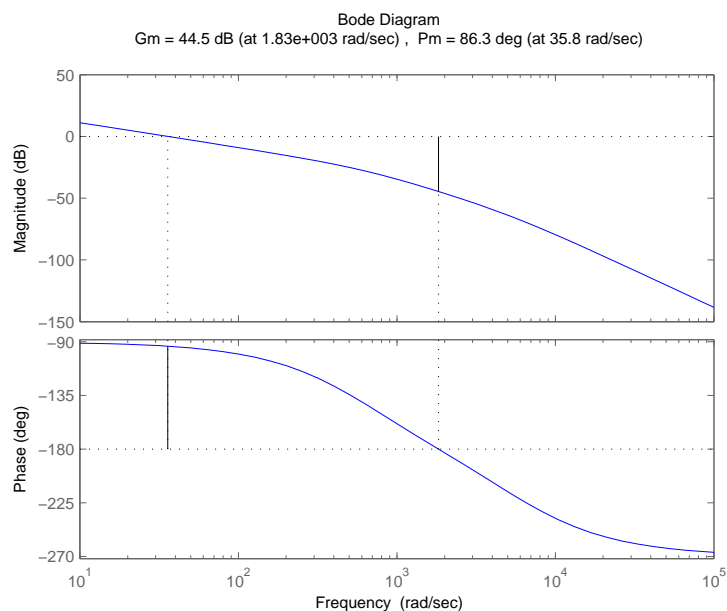


Figure 1: Resultat av margin med  $K_p = 1$

- b) Ved å bruke `margin` får vi bode plottet vist i figur 1 (forsterkningsmarginen er gitt av  $G_m$  og fasemarginen av  $P_m$ ): Forsterkningsmarginen er 44.5 dB, så vi øker  $K_p$  med 38.5 dB for å tilfredsstille kravet om høyest mulig båndbredde og samtidig tilfredsstille  $\Delta K \geq 6[\text{dB}]$ . For å øke forsterkningen med 38.5 kan vi multiplisere den gamle forsterkningen med  $10^{(\frac{38.5}{20})}$ , og tilsvarende, kan vi senke den ved å multiplisere med  $10^{(-\frac{38.5}{20})}$ .

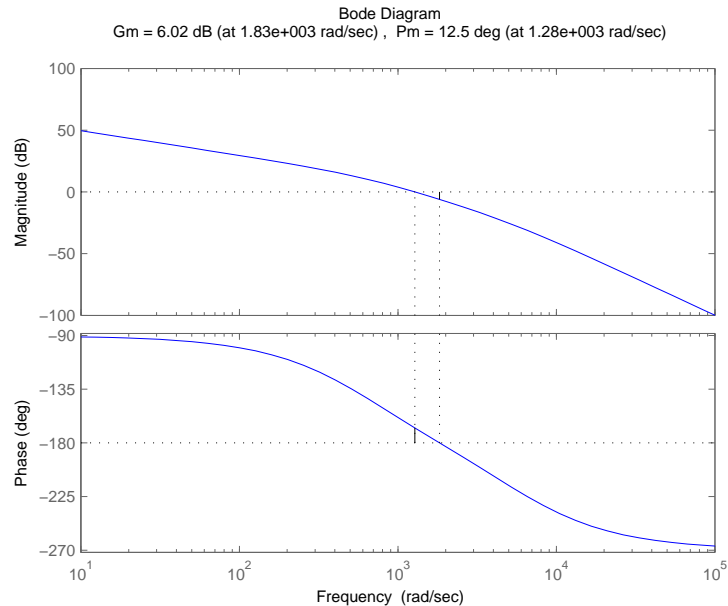


Figure 2: Resultat av margin med  $K_p = 84.1$

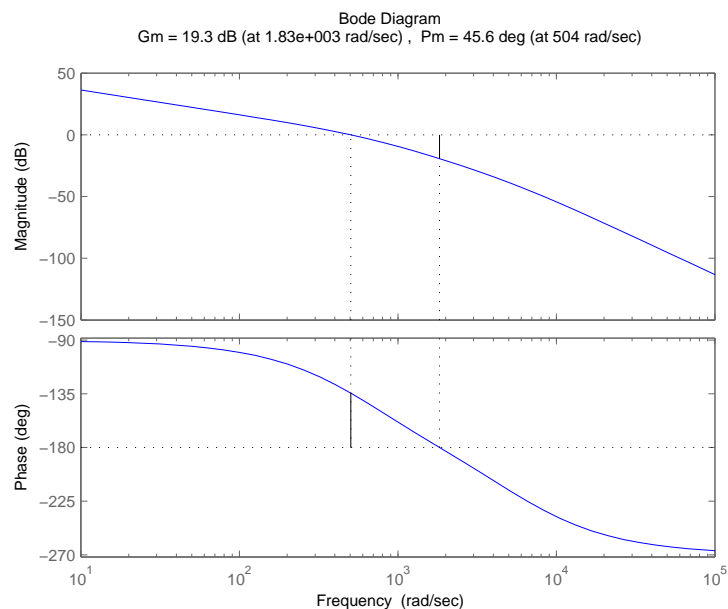


Figure 3: Resultatet med  $K_p = 18.2$

Vi har nå hevet forsterkningen så mye at vi er på grensen av kravet om  $\Delta K \geq 6$  [dB]. Men vi ser at kravet om  $\psi \geq 45^\circ$  ikke lenger er oppfylt, vi må altså senke forsterkningen noe. For å finne ut hvor mye leser vi av amplituden der fasen krysser  $135^\circ$ , og senker forsterkningen med den avleste verdien, ca. 13.3 dB. Resultatet av `margin` blir som i figur 3, med  $\Delta K = 19.3$  [dB] og  $\psi = 45.6^\circ$ .

c) Vi leser av kryssfrekvensen,  $\omega_c$ , fra figur 3 og finner at den er  $504 \text{ rad/s}$ .  $|N(j\omega)|$  er skissert i figur 4. Vi finner  $|N(j\omega)|_{\max}$  på følgende måte:

```
N = feedback(1,h0)
[aN,pN,w] = bode(N)
Nmax = 20*log10(max(aN))
```

som gir  $|N(j\omega)|_{\max} = 4.42$ .  $N(s)$  kalles avviksforholdet og forteller systemets evne til å undertrykke forstyrrelser ved forskjellige frekvenser.

d) Simulering med  $K_p = 18.2$  gir stepresponsen for vinkelen  $\theta(t)$  vist i figur 6

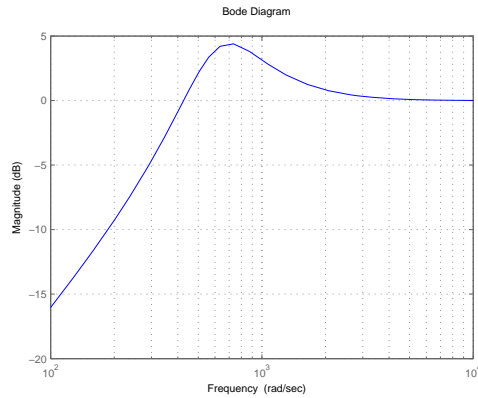


Figure 4: Amplituden  $|N(j\omega)|$  for avviksforholdet  $N(j\omega)$  for  $K_p = 18.2$

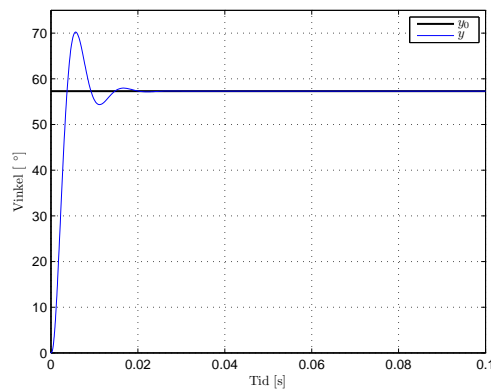


Figure 5: Respons med proporsjonalregulator og  $K_p = 18.2$

e) Resultaten er oppsummert i tabellen under, og simuleringsresultatene er vist i figur 5.

$K_p$	$\Delta K [dB]$	$\psi [^\circ]$	$ N(j\omega) _{\max} [dB]$	$\omega_c [dB]$
0.01	84.5	90	0.0054	0.359
0.1	64.5	89.6	0.0508	3.58
1	44.5	86.3	0.4247	35.8
10	24.5	59.5	2.8294	318
99	4.61	9.5	16.1883	1400

f) Vi ser at lavere  $K_p$  gir tregere respons men mindre oversving. Høy  $K_p$  gir kort stighetid men samtidig mer oversving og oscillasjoner. Se figur 6 for simuleringer.

g) Systemet klarer ikke å følge referansen når forstyrrelsen er et enhetssprang. Vi ser at ved å øke  $K_p$  forbedrer vi evnen til å motvirke forstyrrelsen, men responsen blir samtidig mer oscillatorisk. Uansett verdi av  $K_p$  er det et avvik mellom utgang og referanse i stasjonær tilstand (stasjonæravvik). Resultatet er vist i figur 7

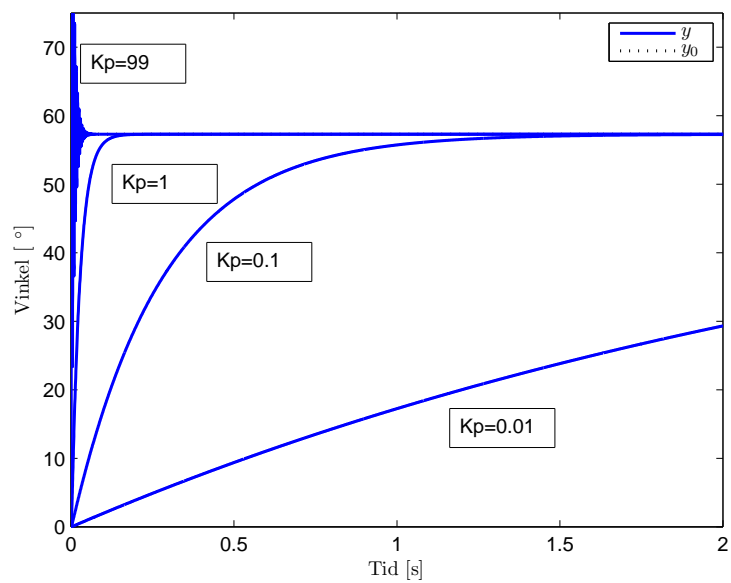


Figure 6: Responsen med forskjellige verdier for  $K_p$

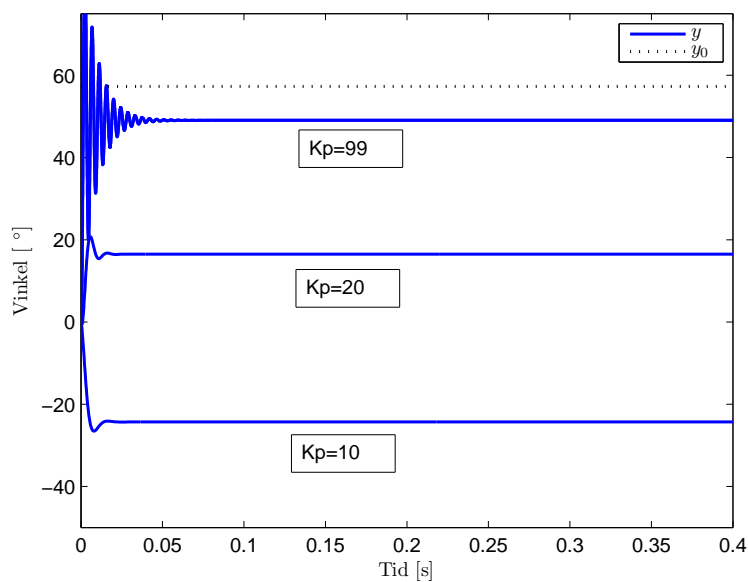


Figure 7: Respons med forstyrrelse og forskjellige verdier for  $K_p$

h) Ved å bruke sluttverditeoremet, finner vi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) \quad (1)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-(R_a + L_a s)}{s(R_a + L_a s)(B + Js) + K_v K_T s + K_p K_T} v(s) \quad (2)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-(R_a + L_a s)}{s(R_a + L_a s)(B + Js) + K_v K_T s + K_p K_T} \frac{1}{s} \quad (3)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-(R_a + L_a s)}{s(R_a + L_a s)(B + Js) + K_v K_T s + K_p K_T} \quad (4)$$

$$= \frac{-R_a}{K_p K_T} \quad (5)$$

Vi ser at større  $K_p$  gir mindre avvik, noe som stemmer med simuleringene. Likning (5) impliserer også at stasjonæravviket vil være forskjellig fra null for alle endelige verdier av forsterkningen  $K_p$ .

### Oppgave 3 Proporsjonal+begrenset derivat-regulator

a) PD-regulatoren implementeres slik

```
Kp = 100;
Td = 1;
hr = tf([Kp*Td Kp], [0.1*Td 1])
```

b) Med  $K_p = 100$  og  $T_d = 1$  er systemet ustabilt. Vi må derfor få hevet fasen når kryssfrekvensen. Fra formelen på side 328 ser vi at

$$T_d = \frac{1}{\sqrt{\omega_1 \omega_2} \sqrt{\alpha}} \quad (6)$$

og velger  $\omega_1 = 5000$  og  $\omega_2 = 1500$  for å få toppen i  $\sqrt{\omega_1 \omega_2}$ , som gir  $T_d = 0.0012$ . Vi får nå  $\Delta K = 13.6[dB]$  og  $\psi = 45.3^\circ$ .

c)  $\omega_c = 2400 \text{ rad/s}$  og  $|N(j\omega)|_{\max} = 4.66[dB]$ .

d) Vi ser at responsen, gjengitt i figur 8 har lik form som den i oppgave 2d), men at den er mye raskere.

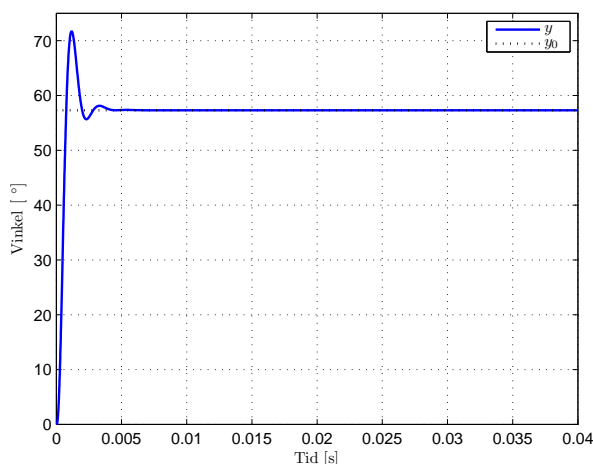


Figure 8: Responsen med PD regulator,  $T_d = 0.0012$  og  $K_p = 100$

e) Figur 9 viser responsen til vinkelen  $\theta(t)$ . Sammenliknet med responsen i figur 7 (ren proporsjonalregulator) ser vi at responsen har blitt raskere og vesentlig mindre oscillatorisk. Ved å legge til

begrenset derivatvirkning er fasen løftet ved høye frekvenser og forsterkningen i systemet kan økes. Båndbredden  $\omega_c$  har blitt større og systemet motvirker derfor forstyrrelser hurtigere.  $|N(j\omega)|_{\max}$  er tilnærmet det samme, med frekvensen der  $|N(j\omega)|_{\max}$  inntreffer har blitt høyere. Dette betyr at systemet motvirker forstyrrelser i et større frekvensområde, og dermed fungerer generelt som et reguleringssystem i et større frekvensområde.

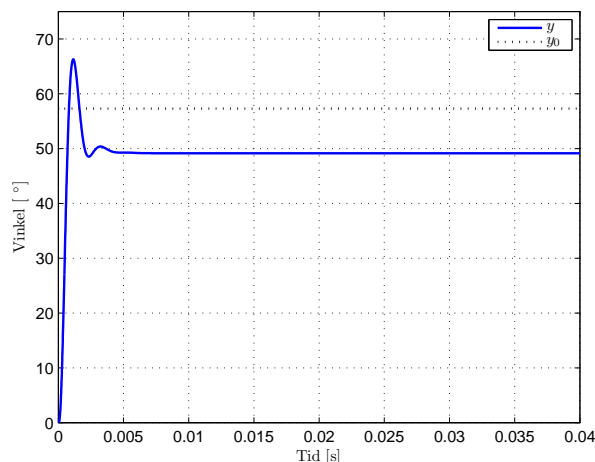


Figure 9: Respons med PD-regulator og enhetssprang i forstyrrelsen

f) En ideell derivatvirkning benyttet i en PD-regulator gir forsterkningsbidrag (amplitudeforsterkning) for frekvenser større enn knekkfreksen ved  $\omega = \frac{1}{T_d}$ . Dette gjør at høy frekvent målestøy forsterkes, noe som er ugunstig for reguleringen. For å begrense forsterkningen ved høye frekvenser med PD-regulering benyttes derfor vanligvis begrenset derivatvirkning. Se side 324 i læreboka. Et annet argument for begrenset derivatvirkning er å unngå å derivere referansen, siden denne typisk er et sprang (som gir uendelig derivert). Dette oppnås med leddet  $\frac{1}{1+\alpha T_d}$  i begrenset PD-regulator.

#### Oppgave 4 Proporsjonal+integral+begrenset derivat-regulator

a) PID regulatoren implenteres slik

```
Kp = 100;
Td = 0.0012;
Ti=100;
hrpd = tf([Kp*Td Kp],[0.1*Td 1])
hri = tf([Ti 1],[Ti 0])
hr = series(hri,hrpd)
```

b) Ved gjentatte simuleringer med forskjellige verdier av  $T_i$  kan vi finne en verdi for  $T_i$  som fjerner stasjonæravviket på mindre enn 0.1 sekunder. Ved å velge parameterverdiene  $T_i = 0.01$  og  $K_p = 10^{(39/20)}$  får vi stabilitetsmarginene  $\Delta K = 14.4[dB]$  og  $\psi = 45.4^\circ$ . Responsen fra et enhetssprang i referansen med denne regulatortuningen er vist i figur 11. Responsen er relativt lik responsen i figur 8 for PD-regulatoren, men responsen er såvidt litt tregere pga integralvirkningen som er lagt til.

c) Responsen for PID-regulatoren med sprang i forstyrrelsen er vist i figur 11. Vi ser at systemet nå klarer å motvirke forstyrrelsen, referansevinkelen  $\theta_0$  oppnås på utgangen og stasjonæravviket er dermed fjernet.

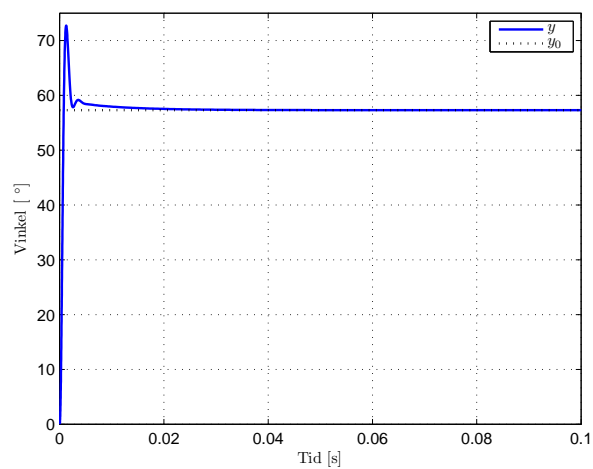


Figure 10: Respons fra enhetssprang i referansen med tunet PID-regulator

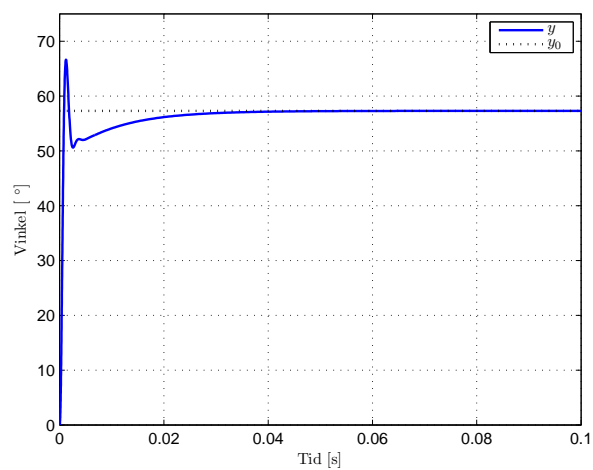


Figure 11: Responsen med PID-regulator og forstyrrelse

### Oppgave 5 Følgereregulering med foroverkopling fra referansen

- a) Utgangen blir liggende litt etter referansen.
- b)  $M = \text{feedback}(h0, 1)$ .  $M(s)$  kalles følgeforholdet og forteller om systemets evne til å følge en referanse.