Løsningsforslag øving 3

Oppgave 1

a) Starttidspunkt er $t_1 = 0$ og sluttidspunkt er $t_2 = t$. Vi har initialverdi $\mathbf{x}(0) = 0$. Ligning (3.22) gir da:

$$\boldsymbol{x}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

u =konstant=1 for $t \geq 0$. Dette gir:

$$\boldsymbol{x}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)Bd\tau$$

Likning (3.46) innsatt i (3.22) gir da:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= \int_0^t \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \cdots & -e^{-7(t-\tau)} + e^{-3(t-\tau)} \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0.25 \end{bmatrix} d\tau \\
\implies x_1(t) &= \int_0^t \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \cdots & -e^{-7(t-\tau)} + e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0.25 \end{bmatrix} d\tau \\
&= \frac{1}{16}\int_0^t -e^{-7(t-\tau)} + e^{-3(t-\tau)} d\tau \\
&= \frac{1}{16}\left\{-e^{-7t}\int_0^t e^{7\tau}d\tau + e^{-3t}\int_0^t e^{3\tau}d\tau\right\} \\
&= \frac{1}{16}\left\{-e^{-7t}\left[\frac{1}{7}e^{7\tau}\right]_0^t + e^{-3t}\left[\frac{1}{3}e^{3\tau}\right]_0^t\right\} \\
&= \frac{1}{16}\left\{\frac{1}{3}(1-e^{-3t}) - \frac{1}{7}(1-e^{-7t})\right\}
\end{aligned}$$

b) Siden pådraget er konstant for alle $t \geq 0$, kan vi sette $u(t)$ utenfor integralet for vilkårlig lengde av tidsintervallet, og beregne den eksakte løsning. Vanligvis, for tidsvarierende pådrag $u(t)$ er folding-integralet i responsen gitt av likning (3.22) i læreboka vanskelig å beregne eksakt.

c) Fra a) får vi at

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \frac{1}{16}(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}) = \frac{1}{84}$$

Når posisjonen er blitt konstant og pådraget er konstant, har vi en situasjon hvor fjærkrafta er lik pådraget, dvs $x_1(t \to \infty) = \frac{1}{k} = \frac{1}{84}$. Denne sammenhengen kan også sees fra likning 2.47 i læreboka ved å sette $\ddot{x} = \dot{x} = 0$ og $p = 1$.

Oppgave 2

a) Systemet er i likevekt når $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$. For $x_1^s \neq 0$ og $x_2^s \neq 0$, gir dette likevektspunkt:

$$\dot{x}_1 = 0 = a_1x_1^s - c_1x_1^sx_2^s \implies \underline{\underline{x_2^s = \frac{a_1}{c_1}}} \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = 0 = -a_2x_2^s + c_2x_1^sx_2^s \implies \underline{\underline{x_1^s = \frac{a_2}{c_2}}} \tag{2}$$

(Likevektspunktet $\mathbf{x}^s$ er et spesialtilfelle av arbeidspunktet $\mathbf{x}^p$ når $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$).

Linearisering av modellen:

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}^s} \Delta\boldsymbol{x} = \left.\begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{bmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}^s} \Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A} = \left.\begin{bmatrix} a_1 - c_1 x_2 & -c_1 x_1 \\ c_2 x_2 & -a_2 + c_2 x_1 \end{bmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}^s} = \begin{bmatrix} a_1 - c_1\frac{a_1}{c_1} & -c_1\frac{a_2}{c_2} \\ c_2\frac{a_1}{c_1} & -a_2 + c_2\frac{a_2}{c_2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{c_1 a_2}{c_2} \\ \frac{c_2 a_1}{c_1} & 0 \end{bmatrix}}} \tag{4}$$

b)

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{M}e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\beta & -i\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\sqrt{a_1a_2}t} & 0 \\ 0 & e^{i\sqrt{a_1a_2}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\beta} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2\beta} \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-i\sqrt{a_1a_2}t} + \frac{1}{2}e^{i\sqrt{a_1a_2}t} & -\frac{1}{2}i\frac{e^{-i\sqrt{a_1a_2}t}}{\beta} + \frac{1}{2}i\frac{e^{i\sqrt{a_1a_2}t}}{\beta} \\ \frac{1}{2}i\beta e^{-i\sqrt{a_1a_2}t} - \frac{1}{2}i\beta e^{i\sqrt{a_1a_2}t} & \frac{1}{2}e^{-i\sqrt{a_1a_2}t} + \frac{1}{2}e^{i\sqrt{a_1a_2}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{a_1a_2}t) & -\frac{1}{\beta}\sin(\sqrt{a_1a_2}t) \\ \beta\sin(\sqrt{a_1a_2}t) & \cos(\sqrt{a_1a_2}t) \end{bmatrix} \tag{6}$$

der $\beta = \frac{c_2}{c_1}\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}$ og vi har brukt at

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x) \tag{7}$$

$$\frac{i(e^{ix} - e^{-ix})}{2} = -\sin(x) \tag{8}$$

c) Vi finner tidsforløpet ved å benytte (3.24) i boka:

$$\Delta\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\Delta\boldsymbol{x}(t_0) \tag{9}$$

Initialbetingelsene må utrykkes i form av Δ-verdier for å benyttes i det lineariserte systemet $\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}$. Initialbetingelsene for starttid $t_0 = 0$ blir dermed

$$\Delta\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) - x_1^s \\ x_2(0) - x_2^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^s - x_1^s \\ x_2^s + \Delta x_{20} - x_2^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta x_{20} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Vi setter inn denne initialbetingelsen i likning (9) og får:

$$\Delta\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{a_1a_2}t) & -\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\frac{c_1}{c_2}\sin(\sqrt{a_1a_2}t) \\ \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\frac{c_2}{c_1}\sin(\sqrt{a_1a_2}t) & \cos(\sqrt{a_1a_2}t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta x_{20} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\underline{\underline{\Delta\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} -\Delta x_{20}\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\frac{c_1}{c_2}\sin(\sqrt{a_1a_2}t) \\ \Delta x_{20}\cos(\sqrt{a_1a_2}t) \end{bmatrix}}} \tag{12}$$

Dette er rimelig, fordi: Vi starter med revebestanden litt over likevektsverdien. Harebestanden vil da gradvis synke under likevekt, siden den startet i likevektspunktet. Dette vil igjen føre til at revebestanden avtar, passerer likevektsverdien og forsetter videre nedover fordi det er færre harer enn det som kan opprettholde en likevektsbestand av rever. Men når revene har blitt færre enn likevektsbestanden, vil harebestanden igjen øke, og passere likevektsverdien. Dette vil i neste omgang føre til at revebestanden øker til mer enn likevektsverdien, og syklusen kan starte på nytt. Forløpet i likning (12) er derfor rimelig. Merk at $\cos(\sqrt{a_1a_2}t + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\sqrt{a_1a_2}t)$, slik at forløpet for harene og revene i (12) er to tidsforskyvde cosinus-kurver med forskjellig amplitude.

d) Det er oppgitt at de ulineære ligningene skal endres til

$$\dot{x}_1 = a_1 x_1 - c_1 x_1 x_2 - d_1 x_1 u \tag{13}$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_2 + c_2 x_1 x_2 \tag{14}$$

Når man lineariserer modellen får man samme $\boldsymbol{A}$ som tidligere, siden arbeidspunktet til er $u^s = 0$. $\boldsymbol{b}$ blir

$$\boldsymbol{b} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u}|_{\boldsymbol{x}^s, u^s} = \begin{bmatrix} -d_1 x_1^s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d_1 a_2}{c_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

og $\mathbf{c}^T$ blir

$$\Delta y = \Delta x_2 \Rightarrow \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

e) Modellen er monovariabel, fordi både y og u er skalare. Hvis jegerne også skyter <u>rever</u>, blir den ulineære modellen

$$\dot{x}_1 = a_1 x_1 - c_1 x_1 x_2 - d_1 x_1 u \tag{16}$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_2 + c_2 x_1 x_2 - d_2 x_2 u \tag{17}$$

og den lineariserte modellen blir

$$\Delta \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A} \Delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \Delta u \tag{18}$$

der

$$\boldsymbol{b} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u}|_{\boldsymbol{x}^s, u^s} = \begin{bmatrix} -d_1 x_1^s \\ -d_2 x_2^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d_1 a_2}{c_2} \\ -\frac{d_2 a_1}{c_1} \end{bmatrix} \tag{19}$$

Modellen er fortsatt monovaribel siden pådraget u fremdeles er skalart.