Løsningsforslag øving 1

Oppgave 1

a) Energibalanse i et lite tidsintervall dt gir: akkumulert energi i plata = tilført energi + netto energistrøm ut/inn av plata, dvs:

$$Cdx = udt - g(x - v)dt \tag{1}$$

$$C\frac{dx}{dt} = C\dot{x} = u - g(x - v) \tag{2}$$

Det er forutsatt i oppgaven at temperaturen i kjøkkenet (v) er $0^\circ C$, slik at vi får følgende differensialligning: (Se i slutten av oppgaven for noen betraktninger angående denne forutsetningen.)

$$\underline{\underline{\dot{x} = -\frac{g}{C}x + \frac{1}{C}u}} \tag{3}$$

eller på standardform:

$$\underline{\underline{\dot{x} = ax + bu, \quad a = -\frac{g}{C} \quad b = \frac{1}{C}}} \tag{4}$$

b) Vi benytter (2.17) fra boka for å finne tidsforløpet $x(t)$:

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \tag{5}$$

Innsatt vår differensialligning, får vi:

$$x(t) = e^{-\frac{g}{C}(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{g}{C}(t-\tau)}\frac{1}{C}ud\tau \tag{6}$$

Det var også forutsatt i oppgaven at plata skulle være avslått, dvs. at $x_0 = v = 0$.

$$x(t) = \frac{u}{C}e^{-\frac{g}{C}t}\int_{t_0}^{t} e^{\frac{g}{C}\tau}d\tau \tag{7}$$

$$x(t) = \frac{u}{g}e^{-\frac{g}{C}t}(e^{\frac{g}{C}t} - e^{\frac{g}{C}t_0}) \tag{8}$$

$$x(t) = \frac{u}{g}(1 - e^{-\frac{g}{C}(t-t_0)}) \tag{9}$$

Innsatt tallverdiene, blir tidsforløpet $x(t)$:

$$\underline{\underline{x(t) = 250(1 - e^{-\frac{(t-t_0)}{200}})}} \tag{10}$$

Tidsforløpet er vist i figur 1. (t_0 er satt lik $0^\circ C$, for enkelhet skyld).

<u>Vi ser at temperaturen svinger seg inn mot $250^\circ C$.</u>

Når plata slås av igjen, kan vi på tilsvarende måte finne $x(t)$. Nå er $x(t_0) = 250^\circ C$ og $u = 0$. (6) gir da:

$$\underline{\underline{x(t) = 250e^{-\frac{t}{200}}}} \tag{11}$$

Denne funksjonen er vist i figur 2. Vi ser at temperaturen svinger seg inn mot kjøkkentemperaturen ($0^\circ C$) igjen, som forventet.

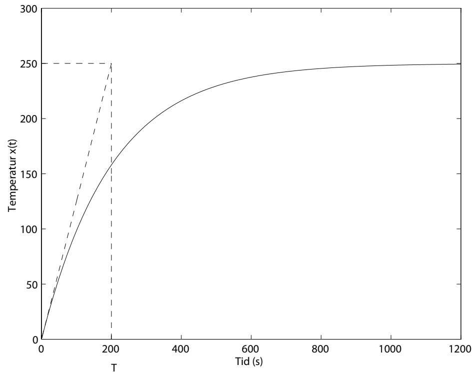

Figure 1: Tidsforløpet til $x(t)$ når plata skrus på.

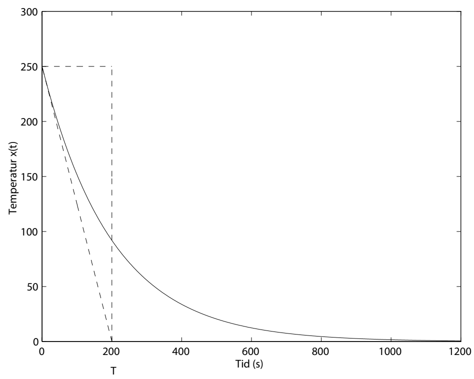

Figure 2: Tidsforløpet til $x(t)$ når plata skrus av.

c) Tidskonstanten er: $T = -\frac{1}{a} = \frac{C}{g} = 200$ s.

Tidskonstanten er merket av i figurene. Merk forholdet mellom tidskonstanten og asymptoten (de stiplet linje). Som det framgår, skjærer tangenten i kurvene ved $t = t_0$, asymptoten i $t = t_0 + T$. En annen sammenheng som ofte kan være nyttig, er at dersom man setter inn $t = T$ i en av løsningene $x(t)$ over, vil vi få faktoren $e^{-1} \approx 0.37$. Det betyr at ved dette tidspunktet så har $1 - 0.37 = 0.63$, dvs. 63 prosent av innsvingningen, forløpt. Disse sammenhengene er nyttige triks som brukes til å raskt skissere en tidsrespons på basis av kunnskap om asymptoten og tidskonstanten.

Det er i oppgaven satt at kjøkkentemperaturen $v = 0°$. Dersom vi går bort fra denne forenklingen, får vi følgende situasjon:

- Temperaturen i kjøkkenet kan betraktes som konstant; dvs. $v(t) = v_k$. Da kan vi definere en ny tilstand, $\tilde{x} = x - v_k$. Siden v_k er konstant, vil $\dot{\tilde{x}} = \dot{x}$, og vi får differensialligningen:

$$\dot{\tilde{x}} = -\frac{g}{C}\tilde{x} + \frac{1}{C}u \tag{12}$$

  som er identisk med (3). Vi finner da lett $x(t) = \tilde{x}(t) + v_k$.
- Dersom $v(t)$ ikke er konstant, blir det noe mer komplisert. Vi må da behandle $v(t)$ på samme måte som et pådrag. Vi får da løsningen:

$$x(t) = e^{-\frac{g}{C}(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{g}{C}(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{g}{C}(t-\tau)}\frac{g}{C}v(\tau)d\tau \tag{13}$$

  Dersom $v(t)$ er konstant, så vil det siste leddet for $t > 0$ gå mot $v_k(1 - e^{-\infty}) = v_k$, slik at vi får det samme som tilfellet i over.

Oppgave 2

a) Massebalanse for systemet gir: Masseendring i tanken = massestrøm inn - massestrøm ut.

$$\rho \dot{V} = \rho u - \rho q \tag{14}$$

$$A\dot{x} = u - q \tag{15}$$

$$A\dot{x} = u - K_v\sqrt{\Delta P} = u - K_v\sqrt{\rho g x} \tag{16}$$

$$\underline{\underline{\dot{x} = -\frac{K_v\sqrt{\rho g x}}{A} + \frac{u}{A} = f(x, u)}} \tag{17}$$

Dette er en *ulineær* modell, fordi den deriverte av tilstanden ikke er en lineær funksjon av tilstanden:

$$\dot{x} \neq ax + \ldots$$

Modellen er imidlertid lineær i pådraget u, men for at modellen skal kunne kalles lineær må den være lineær i *både* tilstander og pådrag.

b) Statisk (konstant) nivå oppnår vi når $\dot{x} = 0$. Vi får da følgende nivå x_s:

$$\dot{x} = 0 = -\frac{K_v\sqrt{\rho g x_s}}{A} + \frac{u_s}{A} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_s = \frac{u_s^2}{K_v^2 \rho g}}} \tag{18}$$

Når nivået er konstant, må det strømme like mye vann inn som det strømmer ut, dvs. $\underline{\underline{u = q}}$. Dette sees umiddelbart ut av (15) over.

Oppgave 3

a) Systemet er *ulineært* fordi ligningene inneholder de ulineære leddene $x_1 x_2$ og x_1^2.

Systemet er *autonomt* (selvdrevet), fordi det ikke finnes noe eksternt pådrag u, dvs. at $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})$.

Dersom det ikke finnes noen harer, vil $x_1 = 0$. Da vil også naturligvis $\dot{x}_1$ forbli lik 0. Vi sitter dermed igjen med bare en enkel differensialligning:

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_2(t) = x_{20} e^{-a_2 t}}} \tag{19}$$

Revene dør dermed som forventet ut.

b)

$$\dot{x}_1 = a_1 x_1 - d_1 x_1^2 - c_1 x_1 x_2 \tag{20}$$

Dersom vi antar at det ikke finnes noen rever, vil siste ledd i (20) falle bort. Første ledd gir eksponensiell vekst, og det *andre leddet* $-d_1 x_1^2$ vil begrense veksten når bestanden x_1 blir stor. Dette leddet beskriver altså en begrensning i beiteressurser for harepopulasjonen.

c) Dersom vi antar ingen rever og liten harepopulasjon slik at beiteressursene ikke er noen begrensning, får vi befolkningseksplosjon!

$$\underline{\underline{\dot{x}_1 = a_1 x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = x_{10} e^{a_1 t}}} \tag{21}$$

Det kvalitative utsagnet, *ingen begrensning i beiteressursene,* kvantiseres i modellen ved at vi sier at leddet $-d_1 x_1^2$ blir så lite at det kan neglisjeres. Å forenkle modeller med slike betraktninger, er svært vanlig når man lager matematiske modeller.

Den maksimale harepopulasjonen finnes når begrensningen i beiteressursene balanserer veksten, dvs:

$$\dot{x_1}(t) = 0 = a_1 x_{1,\max} - d_1 x_{1,\max}^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_{1,\max} = \frac{a_1}{d_1}}} \tag{22}$$

Stor a_1, dvs rask formering, gir stor $x_{1,\max}$. Tilsvarende gir stor d_1 (dvs. sterk begrensning i beiteressurser) som forventet liten $x_{1,\max}$.

d) Dersom beiteressursene er under en viss grense, vil <u>revene</u>, ikke harene, dø ut! Dette kan forklares med at dersom harepopulasjonen blir tilstrekkelig liten, så vil sjansene for at revene treffer harer bli så liten at revene dør ut. Dette kan vises ved hjelp av modellen på følgende måte:

Dersom det ikke finnes rever, har vi funnet maksimal harepopulasjon $x_{1,\max} = \frac{a_1}{d_1}$. En forutsetning for at revepopulasjonen ikke skal dø ut er:

$$\dot{x}_2 \geq 0 \Longrightarrow a_2 x_2 \leq c_2 x_1 x_2 \tag{23}$$

For en gitt beitesituasjon er den største mulige harepopulasjonen $x_{1,\max} = \frac{a_1}{d_1}$. Vi må da som et minimum kreve:

$$a_2 x_2 \leq c_2 x_{1,\max} x_2 \quad \Rightarrow \quad d_1 \leq \frac{a_1 c_2}{a_2} \tag{24}$$

Vi ser dermed at dersom d_1 kommer over en viss grense (beiteressursene under en viss grense) så vil betingelsen for $\dot{x}_2 \geq 0$ ikke oppfylles og revene vil dø ut.

Med dette eksemplet har vi demonstrert slagkraften til matematisk modellering, på den måten at vi har kommet fram til en innsikt som er av stor betydning i økologisk praksis:

Hvis beiteressursene til byttedyra synker under et gitt nivå, så er ikke dette nødvendigvis en trussel mot *byttedyra*, men kan bety utrydding av *rovdyra*!

Denne viktige innsikten hadde ikke vært umiddelbart innlysende uten en slik modell.