TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)
Løsningsforslag for øving 5

Oppgave 1.

a. Treghetsmomentet til felgen er:

$$I_{\rm f} = \int_0^M r^2\,{\rm d}m = \int_0^M R^2\,{\rm d}m = R^2\int_0^M {\rm d}m = MR^2\,.$$

For ei eike bruker vi ${\rm d}m = m\cdot\dfrac{{\rm d}x}{R}$. Eikene roterer om endepunktet, og éi eikes treghetsmoment om endepunktet er

$$I_{\rm e} = \int_0^M x^2\,{\rm d}m = \frac{m}{R}\int_0^R x^2\,{\rm d}x = \frac{m}{R}\frac{1}{3}R^3 = \frac{1}{3}mR^2\,.$$

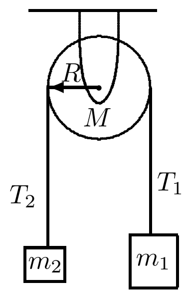
Det totale treghetsmomentet for felgen og de 8 eikene er

$$I = I_{\rm f} + 8I_{\rm e} = \left(M + \frac{8m}{3}\right)R^2 = \left(1,00\,{\rm kg} + \frac{8}{3}\cdot 0,30\,{\rm kg}\right)(0,30\,{\rm m})^2 = 0,1620\,{\rm kg\,m^2} = \underline{0,16\,{\rm kg\,m^2}}$$

b. Vinkelfrekvensen er $\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot 1,00\,{\rm Hz} = 6,283\,{\rm s^{-1}}$, slik at den kinetiske rotasjonsenergien blir

$$E_{\rm k} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot 0,1620\,{\rm kg\,m^2}\cdot(6,283\,{\rm s^{-1}})^2 = 3,198\ {\rm J} = \underline{3,2\ {\rm J}}\,.$$

Oppgave 2.



a. Den største massen må nødvendigvis vinne nappetaket her, og m_1 vil derfor akseleres nedover, m_2 oppover: Rotasjon med klokka. Snordraget T_1 må være større enn T_2 siden det er snorene som skal få sving på trinsa med treghetsmomentet $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$.

b. Velger positiv retning ned for m_1 og opp for m_2. Ved stram snor må de to massenes akselerasjon være den samme, a. Vi har tre ukjente, a, T_1, T_2. Newtons 2. lov for translasjon gir

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \qquad (1)$$

$$-m_2 g + T_2 = m_2 a \qquad (2)$$

Periferihastigheten til trinsa er lik snorhastigheten v og vinkelhastigheten er dermed $\omega = v/R$, og følgelig $\alpha = \dot\omega = a/R$. Med v pos. ned for m_1, blir ω og α positiv *med* klokka. Newton 2 for trinsas rotasjon

$$\tau = (T_1 - T_2)R = I_0\dot\omega \quad\Rightarrow\quad T_1 - T_2 = \frac{I_0\dot\omega}{R} = \frac{1}{2}MR^2\cdot\frac{a}{R^2}\,,$$

og dette gir den tredje likningen

$$T_1 - T_2 = \frac{M}{2}a. \qquad (3)$$

De tre ukjente løses f.eks. ved å sette inn uttrykk for T_1 fra (1) og uttrykk for T_2 fra (2) inn i (3):

$$m_1(g-a) - m_2(a+g) = \frac{M}{2}a \quad\Rightarrow\quad \underline{a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}}\,. \qquad (4)$$

Dette svaret kunne vi nesten ha gjettet, siden den drivende krafta her åpenbart er $m_1 g - m_2 g$ og Newtons 2. for rotasjon i (3) viser at trinsas effektive trege masse er $M/2$. Innsetting av a i likningene (1) og (2) gir

$$T_1 = m_1(g-a) \quad = \quad \underline{g\frac{2m_1m_2 + m_1M/2}{m_1 + m_2 + M/2}}\,, \qquad (5)$$

$$T_2 = m_2(a+g) \quad = \quad \underline{g\frac{2m_1m_2 + m_2M/2}{m_1 + m_2 + M/2}}\,. \qquad (6)$$

c. Når vi lar $M \to 0$ blir fra (4) $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ og fra de to siste likningene $T_1 = T_2$. Stemmer med enkle regninger!

Omvendt, når vi lar $M \to \infty$ blir $a = 0$ og $T_1 = m_1 g$ og $T_2 = m_2 g$. Naturligvis, for da er trinsa ikke til å rikke, akselerasjonen må være null og snordragene være gitt av de respektive masser.

Siden begge grensene stemmer med direkte resonnementer, er tilliten til det generelle resultatet betydelig styrket.

d. Idet $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$ og $\omega = v/R$ blir kinetisk energi

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 + \frac{1}{4}Mv^2.$$

Energibalanse før = etter:

$$E_\mathrm{p}(h) + E_\mathrm{k}(h) = E_\mathrm{p}(0) + E_\mathrm{k}(0) \tag{7}$$

$$E_\mathrm{p}(h) - E_\mathrm{p}(0) = E_\mathrm{k}(0) - E_\mathrm{k}(h) \tag{8}$$

Masse 1 faller høyde h og masse 2 stiger høyde h, slik at likn. (8) gir

$$m_1gh + m_2g(-h) = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 + \frac{1}{4}Mv^2 - 0$$

$$\underline{v = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+M/2}}},$$

hvor den første kvadratrota gir "fritt-fall-hastigheten".

Hvis vi griper fatt i akselerasjonen er den "tidløse" konstant-akselerasjonslikningen cluet: $v^2 - v_0^2 = 2ah$. Med $v_0 = 0$ og a fra (4) gir dette

$$v = \sqrt{2ah} = \underline{\sqrt{2gh}\sqrt{\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+M/2}}}.$$

Den "tidløse likningen" er i praksis identisk med energibevaringslikningen!

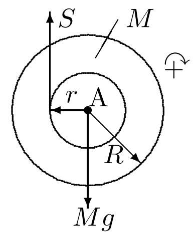
Oppgave 3.

a. Som den frie variable i modellen kan vi enten velge z-koordinaten til jojoen, eller vinkelen som jojoen har rullet av, θ. Sammenhengen mellom disse to variablene er $z = r\theta$ når vi lar $\theta = 0$ svare til $z = 0$ og vi velger z positiv nedover. Her velger vi z som koordinat. Da er akselerasjonen det spørres etter: $a = \dot{v} = \ddot{z}$. Sammenhengen $z = r\theta$ gir videre

$$v = \dot{z} = r\dot{\theta} = r\omega \quad \text{og} \quad a = \ddot{z} = r\ddot{\theta} = r\dot{\omega} = r\alpha\,.$$

Dette er rullebetingelsen om radien r.

Jojoen roterer om massesenteret A, derfor beregnes kraftmoment og Newtons 2. lov om A. Vi har én frihetsgrad (koordinaten z) og to ukjente: akselerasjonen a og strekket S i snora. Med positiv retning nedover er tilhørende positiv rotasjonsretning med klokka, og vi får



Newton 2 translasjon: $\Sigma F = Mg - S = Ma$

Newton 2 rotasjon: $\Sigma\tau = r\cdot S = I\,\alpha$,

altså

$$Mg - S = M\,a \tag{9}$$

$$rS = I\cdot\frac{a}{r}\,. \tag{10}$$

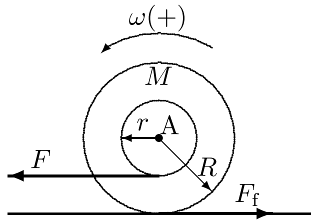
Uttrykk for S fra første likning innsatt i andre og løsning mhp. a gir

$$a = g\cdot\frac{1}{1+I/(Mr^2)} = g\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}MR^2/(Mr^2)} = \underline{g\cdot\frac{2}{2+R^2/r^2}}\,. \tag{11}$$

Akselerasjonen er altså uavhengig av jojoens masse (som for et legeme i fritt fall). Snordraget derimot er avhengig av massen, fra likn. (9) og (11) får vi

$$S = M(g-a) = Mg\left(1 - \frac{2}{2+R^2/r^2}\right) = \underline{Mg\frac{1}{1+2r^2/R^2}}\,.$$

FRIVILLIG: **b.** Rulling betyr rotasjon om massesenteret A, derfor beregnes kraftmoment om A. To krefter gir kraftmoment: Snordraget med moment rF og friksjonen med moment RF_f. Friksjonskrafta F_f kan umulig virke i samme retning vi drar og må altså virke mot *høyre*. Jojoen må rulle mot *venstre*. Hvis vi antar den beveger seg mot høyre måtte friksjonskrafta F_f være større enn snordraget F (Newton 2 horisontal translasjon). I så fall ville friksjonens kraftmomentet RF_f være større enn snoras kraftmoment rF, og Newton 2 rotasjon tilsier rotasjon mot venstre. Selvmotsigelse.



Vi velger derfor i alle algebraiske likninger positiv retning mot venstre og tilhørende positiv omdreiningsretning *mot* klokka. Snordraget gir, paradoksalt nok, et *negativt* kraftmoment $-Fr$, siden det forsøker å dreie jojen *med* klokka. Skal jojoen rulle mot venstre må da friksjonskrafta F_f ha kraftmoment RF_f *mot* klokka, og i verdi være større enn Fr. Men altså er $F > F_\mathrm{f}$.

Ut fra disse betraktningene gir Newtons 2. lov for rotasjon

$$F_\mathrm{f}R - Fr = I_0\dot{\omega} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\omega}. \tag{12}$$

og Newton 2 for tyngdepunktsbevegelsen gir (vi har antatt og tegnet F_f mot høyre, derfor $-F_\mathrm{f}$ i likningen):

$$F - F_\mathrm{f} = M\ddot{X} = M\dot{V} = MR\dot{\omega}, \tag{13}$$

der X er x-koordinaten til jojoens c.m. (positiv retning mot venstre). I siste overgang brukte vi rullebetingelsen $V = R\omega$. De to ukjente i likningene (12) og (13) er F_f og $\dot{\omega}$. Vi kan selvsagt eliminere F_f mellom disse to ligningene, for derved å finne akselerasjonen $a = R\dot{\omega}$:

$$a = \frac{F\,R(R-r)}{MR^2 + I_0}.$$

Men det vi er spesielt ute etter her, er kriteriet for at jojoen ikke sklir. Da trenger vi uttrykket for F_f som funksjon av F, og eliminerer derfor $\dot{\omega}$ i likningene (12) og (13):

$$\begin{aligned} F - F_\mathrm{f} &= MR\dot{\omega} = \frac{2}{R}\cdot(F_\mathrm{f}R - Fr) = 2F_\mathrm{f} - 2Fr/R \\ F_\mathrm{f} &= \frac{F}{3R}\cdot(R + 2r). \end{aligned}$$

Den maksimale verdi er $F_\mathrm{f} = \mu_\mathrm{s}Mg$, slik at den maksimale F før det begynner å skli er gitt ved

$$\begin{aligned} \frac{F_\mathrm{max}}{3R}\cdot(R+2r) &\leq \mu_\mathrm{s}Mg \\ F_\mathrm{max} &= \underline{\mu_\mathrm{s}Mg\frac{3R}{R+2r}}. \end{aligned}$$

Oppgave 4.

a. Med I_0 treghetsmomentet om tyngdpunktet og $d = L/2$ avstand fra tyngdpunktet til A blir stavens treghetsmoment om A:

$$I = I_0 + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M(\frac{L}{2})^2 = \frac{1}{3}ML^2\,.$$

b. Staven er i ro før støtet slik at bevegelsesmengde er null for denne. Total bevegelsesmengde er lik kulas bevegelsesmengde like før støtet:

$$p_\text{før} = p_\text{kule} = mv\,.$$

Bevaring av bevegelsesmengde krever at sum av alle ytre krefter er null eller neglisjerbar under støtet. Det vil under kollisjonen være en betydelig kraft fra akslingen på staven ved A, slik at bevegelsesmengden *ikke* er bevart under støtet.

c. Staven er i ro før støtet slik at spinn er null for denne. Totalt spinn om A er lik kulas spinn om A like før støtet:

$$L_\text{før} = L_\text{kule} = |\vec{r}_\text{kule} \times \vec{p}_\text{kule}| = p_\text{kule}\cdot\ell = mv\ell,$$

siden v er i retning normalt på armen ℓ. Du skal i denne oppgaven merke deg (lære) at et legeme i rettlinjet bevegelse også har spinn om en valgt akse.
For at vi skal ha bevart spinnet må sum av ytre kraftmoment være null eller neglisjerbar mens støtet pågår. Det er da essensielt at vi beregner spinnet om A, slik at kraft på staven fra akslingen i A ikke får kraftmoment. Så spinnet om aksen A er bevart. Spinnet om en annen akse enn A vil ikke nødvendigvis være bevart. Vi må også se bort fra luftmotstand og friksjon under støtet.

d. Staven har etter støtet vinkelhastighet ω_0 og spinn $L = I\omega_0$. Kula har etter støtet spinn om A: $mv/2 \cdot \ell$. Bevaring av spinn gir

$$\begin{aligned} L_{\rm etter} &= L_{\rm før} \\ I\omega_0 + mv/2\cdot\ell &= mv\ell \\ \omega_0 &= \frac{mv\ell/2}{I} = \frac{mv\ell/2}{\frac{1}{3}ML^2} = \underline{\frac{3}{2}\frac{m}{M}\frac{v\ell}{L^2}}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

e. Stavens bevegelse etter kollisjonen analyseres lettest ved å bruke at energien er konservert under bevegelsen. (Under kollisjonen var energien *ikke* konservert!) Den kinetiske energien er i dette tilfellet rein rotasjonsenergi. I tillegg kommer den potensielle energien i tyngdefeltet. Derved har vi:

$$E(\text{bunn}) = E(\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + Mg\cdot\frac{1}{2}L(1-\cos\theta),$$

der vi har brukt at stavens tyngdepunkt alltid har avstanden $\frac{1}{2}L$ fra omdreiningsaksen A. Herfra følger

$$\omega(\theta) = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{MgL}{I}(1-\cos\theta)} = \sqrt{\omega_0^2 - 3\frac{g}{L}(1-\cos\theta)}\,. \tag{15}$$

f. Ved maksimum utslag er $\omega(\theta) = 0$. Når dette skjer ved $\theta = 90°$, finner vi

$$\omega_0^2 \overset{(15)}{=} \frac{3g}{L} \qquad \overset{(14)}{\Longrightarrow} \quad \left(\frac{3mv\ell}{2ML^2}\right)^2 = \frac{3g}{L} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2M}{m}\frac{L}{\ell}\sqrt{\frac{gL}{3}}.$$

g. Når staven igjen passerer vertikal posisjon, etter å ha svingt ut 90°, er igjen $\omega^2 = \omega_0^2 = 3g/L$. Vertikale krefter på stanga i vertikal pososjon er Mg (nedover) og $F_{\rm A}$ (oppover) fra akslingen, som tilsammen gir sentripetalakselerasjonen for tyngdepunktet (med posisjon $L/2$ fra aksen) sin sirkelbevegelse:

$$\sum F = F_{\rm A} - Mg = Ma_{\rm c} = M\left(\omega_0^2\cdot\frac{L}{2}\right) = M\left(\frac{3g}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{F_{\rm A} = \frac{5}{2}Mg.}$$

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 8. sep. 14.