

# TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)

## Løsningsforslag for øving 10

### Oppgave 1. Varmekapasiteter.

Energienheten cal (kalori) er definert ved at  $C'_p = 1,00 \frac{\text{cal}}{\text{gK}}$  for vann ved  $15^\circ\text{C}$  ( $1 \text{ cal} = 4,19 \text{ J}$ ).

Luft består nesten utelukkende av toatomige molekyler med  $C_p = 7/2R$ , og gjennomsnittlig molar masse  $M_w \approx 29 \text{ g/mol}$ . Dermed er med  $R = 8,314 \text{ J/mol K} = 8,314/4,184 \text{ cal/(mol K)} = 1,987 \text{ cal/(mol K)}$ :

$$C'_p = \frac{7}{2} R \frac{1}{M_w} = \frac{7}{2} \cdot 1,987 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}} \cdot \frac{1}{29 \text{ g/mol}} = 0,24 \frac{\text{cal}}{\text{gK}} \text{ for luft.}$$

Metaller har  $C'_p \approx 3R$ , så med molvekt  $55,9 \text{ g/mol}$  er  $C'_p = 3R \frac{1}{M_w} = 3 \cdot 1,987 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}} \cdot \frac{1}{55,9 \text{ g/mol}} = 0,11 \frac{\text{cal}}{\text{gK}}$  for jern.

Konklusjon:  $C'_p(\text{vann}) \approx 4 C'_p(\text{luft}) \approx 9 C'_p(\text{jern})$ .

### Oppgave 2. Tevann.

a)  $2,5 \text{ l}$  vann ved  $12^\circ\text{C}$  er svært nær  $2,5 \text{ kg}$ . Total varmekapasitet for (kanne + vann) (i  $\text{J/K}$ ) er da

$$C = C'_{\text{Al}} m_{\text{Al}} + C'_{\text{vann}} m_{\text{vann}} = (0,91 \cdot 0,95 + 4,19 \cdot 2,5) \text{ kJ/K} = (0,865 + 10,475) \text{ kJ/K} = 11,34 \text{ kJ/K}.$$

Varmemengden som må tilføres er dermed

$$Q = C \cdot \Delta T = 11,34 \cdot (100 - 12) \text{ kJ} = 0,998 \cdot 10^6 \text{ J} \equiv 1,00 \text{ MJ}$$

eller omregna til kWh:

$$Q = 998 \text{ kJ} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 0,277 \frac{\text{kJ h}}{\text{s}} = 0,28 \text{ kWh}$$

b) 'Energi = effekt  $\times$  tid':  $Q = P \cdot t \Rightarrow$

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{998 \text{ kJ}}{1,5 \text{ kJ/s}} = 665,3 \text{ s} = 665,3 \text{ s} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 11,09 \text{ min} = 11 \text{ min } 5 \text{ s},$$

Siden oppgitte tall har to gjeldende siffer vil det rette svaret være: "Tevannet koker om 11 minutter".

(Tida det tar å varme opp sjølve tekanna er  $\frac{C_{\text{Al}}}{C} \cdot 11 \text{ min} = \frac{0,865}{11,34} \cdot 11 \text{ min} = 50 \text{ sek}$ , eller "1 minutt".)

### Oppgave 3. Smelting av is med varmt vann.

Varmebalanse-regnskap: "Det isen opptar = det vannet avgir":

$$m_{\text{is}} [C'_{\text{is}} \cdot (T_0 - T_{\text{is}}) + L'_{\text{is}} + C'_{\text{vann}} \cdot (T_2 - T_0)] = m_{\text{vann}} C'_{\text{vann}} \cdot (T_1 - T_2)$$

hvor  $T_0 = 0,0^\circ\text{C}$ . Massen til  $2,5 \text{ l}$  vann er ca.  $2,5 \text{ kg}$ , men en mer presis beregning fra oppgitte data  $\rho_{\text{vann}}(0^\circ\text{C})$  og  $\rho_{\text{vann}}(100^\circ\text{C})$  gir ved interpolering  $\rho_{\text{vann}}(75^\circ\text{C}) = 0,969 \text{ g/cm}^3 = 0,969 \text{ kg/l}$ . Da er  $m_{\text{vann}} = \rho_{\text{vann}} V = 0,969 \cdot 2,50 \text{ kg} = 2,42 \text{ kg}$ .

$$\begin{aligned} \underline{m_{\text{is}}} &= m_{\text{vann}} \cdot \frac{C'_{\text{vann}} (T_1 - T_2)}{C'_{\text{is}} (T_0 - T_{\text{is}}) + L'_{\text{is}} + C'_{\text{vann}} (T_2 - T_0)} \\ &= 2,42 \text{ kg} \cdot \frac{4,19 \cdot 35 \text{ kJ/kg}}{2,00 \cdot 20 \text{ kJ/kg} + 334 \text{ kJ/kg} + 4,19 \cdot 40 \text{ kJ/kg}} \\ &= 2,42 \text{ kg} \cdot \frac{146,48}{541,4} = 2,42 \text{ kg} \cdot 0,271 = 0,655 \text{ kg} = \underline{0,66 \text{ kg}} \end{aligned}$$

### Oppgave 4. Fordampningsarbeid.

Ett mol vann har masse  $m_{\text{vann}} = 18 \text{ g}$ , slik at fordamping av ett mol vann krever

$$Q_{\text{f}} = L'_{\text{f}} \cdot m_{\text{vann}} = 2257 \text{ kJ/kg} \cdot 0,018 \text{ kg} = 40,6 \text{ kJ}.$$

Arbeidet mot ytre trykk skjer ved *konstant* trykk, som er  $p = 1,00 \text{ atm} = 101 \text{ kN/m}^2$  når temperaturen er  $100^\circ\text{C}$  (kokepunkt). Arbeidet som må utføres ved at en vannmengde med volum  $V_{\text{v}}$  går over til damp med volum  $V_{\text{d}}$  er lik

$$W = \int_{V_{\text{v}}}^{V_{\text{d}}} p dV = p(V_{\text{d}} - V_{\text{v}}).$$

Dampvolumet  $V_{\text{d}}$  er mye større enn væskevolumet  $V_{\text{v}}$ , så vi sløyfer  $V_{\text{v}}$  (kontrollregning nedenfor). Videre antar vi

dampen følger tilstandslikningen for en ideell gass,  $V_d = nRT/p$ . Det gir

$$W = pV_d = nRT = 1,00 \text{ mol} \cdot 8,314 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1} \cdot 373 \text{ K} = 3,10 \text{ kJ}.$$

Dermed er andelen arbeid

$$\frac{W}{Q} = \frac{3,10}{40,6} = 0,0764 = \underline{7,6\%}.$$

Kontroll av  $V_v$  mot  $V_d$  (for  $n = 1,0$  mol vann og damp):

$$\begin{aligned} V_v &= \frac{m_{\text{vann}}}{\rho_{\text{vann}}} = \frac{18 \text{ g}}{0,959 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3} = 1,88 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = 0,0188 \text{ l}, \\ V_d &= \frac{nRT}{p} = \frac{1,00 \text{ mol} \cdot 8,314 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1} \cdot 373 \text{ K}}{101 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2} = 3,07 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 30,7 \text{ l}. \end{aligned}$$

Vanneddamp krever altså  $30,7/0,0188 = 1630$  ganger større plass enn vann. Likevel går altså bare 7,6% av fordampningsvarmen til å utføre arbeid mot det ytre trykk. Mesteparten av energien går med til å "slite vannmolekylene fra hverandre" (hydrogenbindinger mellom vannmolekylene).

### Oppgave 5. Adiabatlikninger.

Bruker ideell gasslov:  $pV = nRT \Rightarrow p = \frac{nRT}{V}$  og  $V = \frac{nRT}{p}$ . Første uttrykk innsatt i  $pV^\gamma = \text{konstant}$  gir

$$\frac{nRT}{V} \cdot V^\gamma = \text{konstant} \Rightarrow T \cdot V^{\gamma-1} = \text{konstant},$$

der  $nR$  inngår i (ny) konstant. Andre uttrykk innsatt i  $pV^\gamma = \text{konstant}$  gir

$$p \cdot \left(\frac{nRT}{p}\right)^\gamma = \text{konstant} \Rightarrow T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{konstant},$$

der  $nR$  inngår i (ny) konstant.

### Oppgave 6. Atmosfære.

Siden lufta antas å utvide seg adiabatisk og reversibelt, kan en eller flere av adiabatlikningene for ideell gass benyttes. Opplysningene er gitt for  $T$  og  $p$  slik at  $T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{konst}$  ligger nærmest (fra formelark eller forrige oppgave).

Skriver litt om:

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = T_0^\gamma p_0^{1-\gamma} \Rightarrow T = T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^\kappa,$$

der vi har definert  $\kappa = \frac{\gamma-1}{\gamma}$ . Luft med toatomige molekyler har  $\gamma = C_p/C_v = \frac{7/2}{5/2} = 7/5$  og  $\kappa = \frac{7/5-1}{7/5} = 2/7$ .

Innsatt verdier:

$$T = T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^\kappa = 293 \text{ K} \left(\frac{751,1}{760}\right)^{2/7} = 292,92 \text{ K}.$$

Temperaturen har altså falt  $0,980 \text{ K} \approx -1^\circ\text{C}$ .

En mer elegant måte er å uttrykke temperaturfallet  $\Delta T$  direkte ved temperaturfallet  $\Delta p$ :

$$\Delta T = T - T_0 = T_0 \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^\kappa - 1\right] = T_0 \left[\left(\frac{p_0 + \Delta p}{p_0}\right)^\kappa - 1\right] = T_0 \left[\left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)^\kappa - 1\right].$$

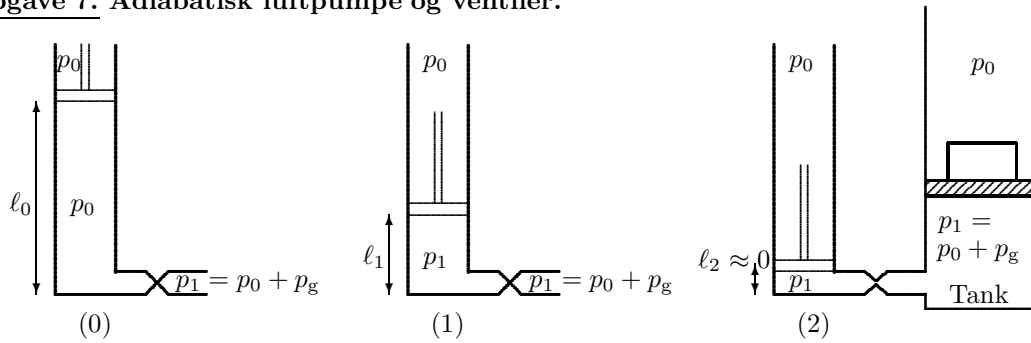
Fordi trykkfallet  $\Delta p \ll p_0$  kan vi rekkeutvikle ved bruk av uttrykket  $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$  for små  $x$ :

$$\left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)^\kappa \approx 1 + \kappa \frac{\Delta p}{p_0}$$

som gir

$$\Delta T \approx T_0 \cdot \kappa \cdot \frac{\Delta p}{p_0} = 293 \text{ K} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{-8,9}{760} = -0,980 \text{ K} = \underline{-1^\circ\text{C}}.$$

### Oppgave 7. Adiabatisk luftpumpe og ventiler.



Verdier for luft er oppgitt først i oppgaven:

$$C_V = 5/2 R = 20,8 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}; \quad C_p = C_V + R = 29,1 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}; \quad \gamma = C_p/C_V = 7/5.$$

a. Adiabatisk kompresjon innebærer at begynnelses- og slutttilstanden er forbundet ved  $p_0 V_0^\gamma = p_1 V_1^\gamma$ , slik at  $V_1 = V_0 (p_0/p_1)^{1/\gamma}$ . Med konstant tverrsnitt i pumpa betyr dette

$$\ell_1 = \ell_0 \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{1/\gamma} = \ell_0 \left( \frac{p_0}{p_0 + p_g} \right)^{1/\gamma} = \ell_0 \left( \frac{101}{101 + 510} \right)^{5/7} = \ell_0 \cdot 0,2765$$

Derved er

$$\Delta \ell = \ell_0 - \ell_1 = 0,7235 \ell_0 = \underline{18,1 \text{ cm}}.$$

b. For å bestemme slutttemperaturen kan vi bruke den tilsvarende adiabatforbindelsen mellom temperatur og volum i begynnelses- og slutttilstand,  $T_0 V_0^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$  som gir

$$T_1 = T_0 \left( \frac{V_0}{V_1} \right)^{\gamma-1} = T_0 \left( \frac{\ell_0}{\ell_1} \right)^{\gamma-1} = 300 \text{ K} \cdot \left( \frac{1}{0,2765} \right)^{2/5} = 501,7 \text{ K} = \underline{229^\circ \text{C}}.$$

Alternativt kan vi finne  $T_1$  fra ideell gasslov ved (0) og (1):  $p_1 V_1 = nRT_1$  dividert med  $p_0 V_0 = nRT_0$  gir

$$T_1 = T_0 \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0} = T_0 \frac{p_1 \ell_1}{p_0 \ell_0} = 300 \text{ K} \cdot \frac{101 + 510}{101} \cdot 0,2765 = 502 \text{ K}$$

c. Første hovedsetning på differensialform lyder  $dU = dQ - dW$ , der  $dW$  er et arbeid utført av systemet på omgivelsene. Ved en adiabatisk prosess er  $dQ = 0$ , og derved er  $dW = -dU$ . For en ideell gass er  $U(T) = nC_V T$ , slik at arbeidet som må gjøres på gassen for å komprimere den blir gitt ved temperaturøkningen:

$$W_k = \Delta U = nC_V \Delta T = n \cdot 5/2 R \Delta T = 20 \text{ mol} \cdot 20,8 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot (502 - 300) \text{ K} = \underline{84,0 \text{ kJ}}.$$

Vi har her antatt at pumpa skal komprimere til  $(p_1, T_1)$  for *hvert* slag, som er OK når det er oppgitt at tanken er *stor* og derved opprettholder trykket  $p_g$  selv om det pumpes mer luft inn.

d. Siden trykket  $p_1 = p_0 + p_g$  er konstant, blir kompresjonen isobar. Det er oppgitt at all luft presses inn, dvs. hele luftvolumet  $\Delta V = V_1$  presses inn med trykk  $p_1$ . Arbeidet må da bli som gitt, og vi utnytter gassloven  $pV = nRT$  for denne tilstanden og får:

$$W_t = p_1 V_1 = nRT_1 = 20 \cdot 8,31 \cdot 502 \text{ J} = \underline{83,4 \text{ kJ}}.$$

e. Totalarbeidet pumpa må utføre er  $W_k + W_t$ . Vi må ikke glemme arbeidet som omgivelsene gjør på pumpa. Omgivelsene har trykk  $p_0$  og gjør ved volumreduksjonen  $V_0$ , arbeidet  $W_{\text{omg}} = p_0 V_0$ . Det totale nødvendige arbeidet for pumpa når 20 mol luft er presset inn i tanken kan derfor beregnes, idet det også nå er svært nyttig å bruke gassens tilstandsligning  $pV = nRT$  ved  $T = T_0$  og  $T = T_1$ :

$$\begin{aligned} W_{\text{netto}} &= W_k + W_t - W_{\text{omg}} = nC_V \Delta T + p_1 V_1 - p_0 V_0 \\ &= nC_V \Delta T + nRT_1 - nRT_0 = nC_V \Delta T + nR \Delta T \\ &= nC_p \Delta T = n \cdot 7/2 R \Delta T = 20 \cdot 29,1 \cdot 202 \text{ J} = \underline{118 \text{ kJ}}. \end{aligned}$$

Eller med tallstørrelser for hvert enkelt arbeid, dersom det synes enklere:

$$\begin{aligned} \text{Arbeid for komprimering:} & \quad W_k = 84,0 \text{ kJ} \\ \text{Arbeid for innpressing i tank:} & \quad W_t = nRT_1 = 20 \cdot 8,31 \cdot 502 \text{ J} = 83,4 \text{ kJ} \\ \text{Arbeid av omgivelsene:} & \quad W_{\text{omg}} = p_0 V_0 = nRT_0 = 20 \cdot 8,31 \cdot 300 \text{ K} = 49,9 \text{ kJ} \\ \text{Netto arbeid av pumpe:} & \quad W_{\text{netto}} = W_k + W_t - W_{\text{omg}} = 117,5 \text{ kJ} = \underline{118 \text{ kJ}} \end{aligned}$$