

## Løsningsforslag øving 6

**Oppgave 1**

Vi setter inntil videre at  $\tau = 0 \Rightarrow e^{-\tau s} \equiv 1$ .

a) Finn først  $h_0(s)$  gitt ved

$$h_0(s) = \frac{K_p(1 - T_1 s)(1 + T_i s)}{T_i s \left( 1 + 2\zeta \left( \frac{s}{\omega_0} \right) + \left( \frac{s}{\omega_0} \right)^2 \right)} \quad (1)$$

Vi starter med amplitudeforløpet. Siden vi har  $q = 1$  rene integrasjoner kan vi beregne  $\omega_{c,as} = K^{1/q} = \frac{K_p}{T_i} = 0.2$ . Vi vet nå at det går en asymptote med helning  $(-q) = (-1)$ , som krysser 0-dB linjen i  $\omega_{c,as}$ . Generelt kan denne linje knekke opp eller ned før den når 0-dB, men i dette tilfellet sammenfaller  $\omega_{c,as}$  med første knekkpunkt som er  $\frac{1}{T_i} = 0.2$ .

Videre amplitudeforløp finnes ved å endre helningen til asymptoten i hvert knekkpunkt. Vi har i dette tilfellet 3 knekkpunkt gitt av ledd i transferfunksjonen. Knekkpunktene skisseres kronologisk etter knekkfrekvensene i tabellen under. Skissering av asymptotene for  $|h_0(j\omega)|$  er vist i figur 4.

Ledd	Type	Knekkfrekvens	Helning
$(1 - T_1 s)$	Nullpunkt	$\frac{1}{T_1} = 5$	p=1
$(1 + T_i s)$	Nullpunkt	$\frac{1}{T_i} = 0.2$	p=1
$\left( 1 + 2\zeta \left( \frac{s}{\omega_0} \right) + \left( \frac{s}{\omega_0} \right)^2 \right)$	Resonansledd	$\omega_0 = 2$	p=-2

Videre for faseforløpet, har vi at  $q = 1$  rene integrasjoner i transferfunksjonen gir en start-fase på  $(-q)90^\circ$ . Videre forløp kan bestemmes ut fra følgende tabell. Asymptotene for  $\angle h_0(j\omega)$  er vist i figur 5

Ledd	Type	Knekkfrekvens	Fasebidrag
$(1 - T_1 s)$	Nullpunkt i h.h.p.	$\frac{1}{T_1} = 5$	$-90^\circ$
$(1 + T_i s)$	Nullpunkt	$\frac{1}{T_i} = 0.2$	$90^\circ$
$\left( 1 + 2\zeta \left( \frac{s}{\omega_0} \right) + \left( \frac{s}{\omega_0} \right)^2 \right)$	Resonansledd	$\omega_0 = 2$	$-180^\circ$

b) Vi har følgende approksimasjoner:

$$\begin{aligned} |N(j\omega)| \text{ (dB)} &\approx -|h_0(j\omega)| \text{ (dB)} && \text{når } |h_0(j\omega)| \text{ (dB)} \gg 0 \\ |N(j\omega)| \text{ (dB)} &\approx 0 \text{ (dB)} && \text{når } |h_0(j\omega)| \text{ (dB)} \ll 0 \\ |M(j\omega)| \text{ (dB)} &\approx 0 \text{ (dB)} && \text{når } |h_0(j\omega)| \text{ (dB)} \gg 0 \\ |M(j\omega)| \text{ (dB)} &\approx |h_0(j\omega)| \text{ (dB)} && \text{når } |h_0(j\omega)| \text{ (dB)} \ll 0 \end{aligned}$$

Asymptotisk forløp for  $|N(j\omega)|$  og  $|M(j\omega)|$  er vist i figur 6.

c) Vi overfører  $h_0(j\omega)$  til Nichols-diagram og bruker denne kurva til tegning av  $N(j\omega)$ . Se boka side 237 og utover. Kurvene er vist i figur 7.

d) Vi tegner først tidsforsinkelsen. Vi har at  $\angle e^{-j\omega\tau} = -\omega\tau$  [rad]. Deretter legger vi denne til fasen til  $h_0(j\omega)$ . Merk at forløpet for amplituden blir uforandret, dvs.  $|h_0(s)e^{-\tau s}| = |h_0(s)|$ . Se figur 7.

Vi ser videre av figur 7 at

$$\tau = 0 : |N(j\omega)|_{\max} \approx 7,0 \text{ dB}$$

$$\tau = 0.1 : |N(j\omega)|_{\max} \approx 9.9 \text{ dB}$$

Resonnanstoppen betyr at systemets følsomhet for forstyrrelser i området rundt kryssfrekvensen øker. Ofte inngår  $|N(j\omega)|_{\max}$  i spesifikasjonene for et system, fordi resonnanstoppen er et uttrykk for systemets stabilitetsmargin.

Hvis  $\tau$  økes ytterligere, så mye at  $|N(j\omega)|_{\max} = \infty$ , blir systemet ustabilt. Tidsforsinkelsen vil da bidra med for mye negativ fasedreining.

## Oppgave 2

a) Av figur 2 i oppgaveteksten får vi følgende uttrykk:

$$\begin{aligned}y(s) &= \frac{h_r(s)h_u(s)}{1+h_r(s)h_u(s)}r(s) + \frac{h_v(s)}{1+h_r(s)h_u(s)}v(s) \\u(s) &= h_r(s)e(s) = \frac{h_r(s)}{1+h_r(s)h_u(s)}r(s) - \frac{h_r(s)h_v(s)}{1+h_r(s)h_u(s)}v(s)\end{aligned}$$

som videre gir oss transferfunksjonene (avhengigheten av  $s$  sløyfes for enkelhets skyld):

$$\begin{aligned}\text{i)} \quad \frac{u}{r} &= \frac{h_r}{1+h_r h_u} = h_r \frac{1}{1+h_0} = h_r N \\ \text{ii)} \quad \frac{u}{v} &= -\frac{h_r h_v}{1+h_r h_u} = -h_r h_v \frac{1}{1+h_0} = -h_r h_v N\end{aligned}$$

b) Denne oppgaven kan løses på (minst) to måter. Den mest iøynefallende er å flytte summasjonspunktet for  $v$  mot høyre og kompensere for transferfunksjoner vi ”hopper over” til vi ender opp med  $h_v$ . Men siden  $\frac{y}{u}(s)$  er gitt, så er det i dette tilfellet enklere å flytte  $v$  mot venstre inntil  $v$  sammenfaller med  $u$  slik at vi kan benytte  $\frac{y}{u}(s)$  i uttrykket. Vi viser begge metodene:

**Mot venstre:** Ved å flytte  $v$  til venstre for blokk  $K_T$ , må  $v$  multipliseres med  $\frac{1}{K_T}$ . Ved å flytte videre til venstre (forbi det første summasjonspunktet), må  $v$  i tillegg multipliseres med  $L_a s + R_a$  (som er det inverse av transferfunksjonen bestående av blokkene  $L_a s$  og  $R_a$ ). Summasjonspunktet for  $v$  er nå flyttet til samme punkt som for  $u$ . Vi kan derfor flytte summasjonspunktet for  $v$  helt ut til  $y$  ved å multiplisere med  $\frac{y}{u}(s)$ . Den totale operasjonen resulterer i:

$$\begin{aligned}h_v(s) &= \frac{1}{K_T} \cdot (L_a s + R_a) \cdot \frac{y}{u}(s) \\ &= \frac{\frac{L_a s + R_a}{K_v K_T}}{s \left(1 + \frac{J R_a}{K_v K_T} s + \frac{J L_a}{K_v K_T} s^2\right)}\end{aligned}$$

**Mot høyre:** Ved å flytte  $v$  til høyre for blokk  $\frac{1}{J_s}$ , må  $v$  multipliseres med  $\frac{1}{J_s}$ . Flytter vi  $v$  videre til høyre for tilbakekoblingen, så må vi også korrigere for dette. Korreksjonen består her av transferfunksjonen fra  $v$  til punktet like før integratoren for  $y$ . La oss kalle dette punktet for  $x (= s y(s))$ . Vi kan da skrive:

$$\begin{aligned}x &= \frac{v}{J_s} + \frac{1}{J_s} \cdot \frac{K_T}{L_a s + R_a} \cdot (-K_v) x \\ x \left(1 + \frac{K_T K_v}{J_s (L_a s + R_a)}\right) &= \frac{v}{J_s} \\ x = \frac{\frac{1}{J_s} J_s (R_a + L_a s)}{J_s (L_a s + R_a) + K_T K_v} &= \frac{R_a + L_a s}{J_s (L_a s + R_a) + K_T K_v} v\end{aligned}$$

Siden  $y = \frac{1}{s}x$ , før vi:

$$\begin{aligned}h_v(s) &= \frac{L_a s + R_a}{J_s^2 (L_a s + R_a) + K_T K_v s}, \text{ som kan omformes til:} \\ h_v(s) &= \frac{\frac{L_a s + R_a}{K_v K_T}}{s \left(1 + \frac{J R_a}{K_v K_T} s + \frac{J L_a}{K_v K_T} s^2\right)}\end{aligned}$$

Vi ser at vi som forventet får samme svar med de to metodene.

### Oppgave 3

Gitt karakteristisk polynom

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0, \quad (2)$$

Røttene til polynomet (2) er gitt av

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = a_2(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = a_2(s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1 \lambda_2) = 0 \quad (3)$$

Sammelikning av koeffisientene gir

$$-a_2(\lambda_1 + \lambda_2) = a_1 \quad (4)$$

$$a_2 \lambda_1 \lambda_2 = a_0 \quad (5)$$

#### Tilfelle 1: Reelle røtter

Dersom  $a_2, a_1$  og  $a_0$  har samme fortegn, så må  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  ha samme fortegn fra betingelsen (5). Dersom koeffisientene er positive, så må  $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$  og dermed begge negative pga kravet om samme fortegn. Dersom alle koeffisientene i (2) er negative så blir  $|a_2|(\lambda_1 + \lambda_2) = -|a_1|$ , og på tilsvarende måte må  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ .

#### Tilfelle 2: Komplekskonjugerte røtter

Benytter generelle egenverdier  $\lambda_{1,2} = c \pm jd$ . Produktet av egenverdiene blir da  $\lambda_1 \lambda_2 = c^2 + d^2$ . Likning (5) vil derfor være oppfylt uavhengig av fortegnet på  $c$ . Summen av egenverdiene blir  $\lambda_1 + \lambda_2 = 2c$ . Dermed blir likning (4)  $-a_2 2c = a_1$ , som gir at  $c$  må ha negativt fortegn. Dermed er  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ .

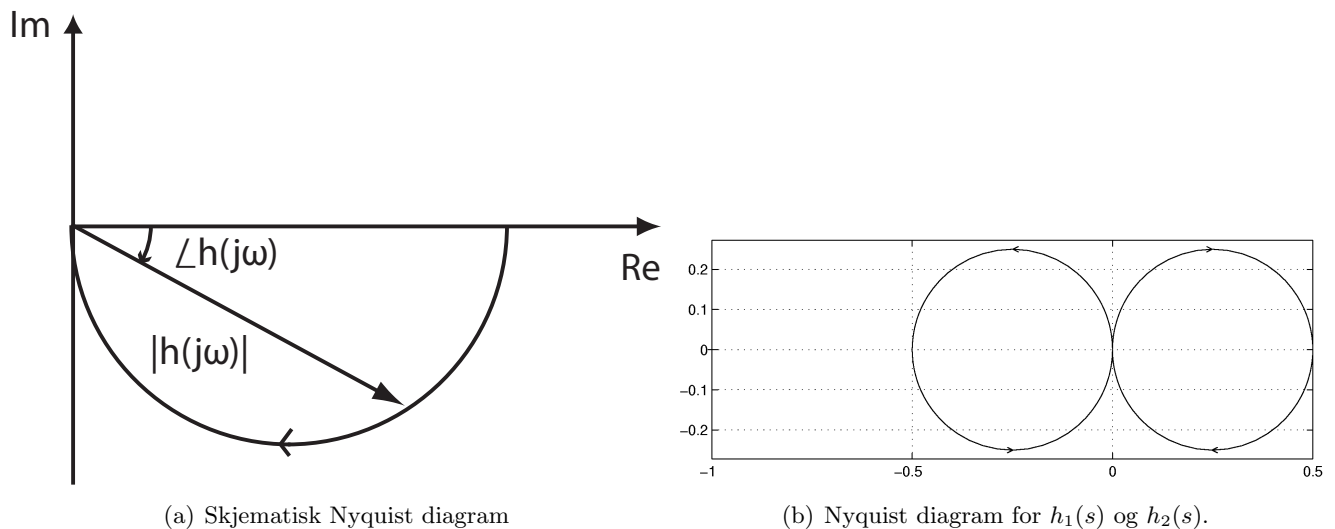
Det viser at systemet med karakteristisk polynom (2) vil være asymptotisk stabilt dersom koeffisientene  $a_2, a_1$  og  $a_0$  har samme fortegn.

### Oppgave 4

Denne oppgaven løses ved først å forstå hvordan kurvene endrer seg med forskjellige  $K_p$  og deretter benytte den grafiske tolkningen av Nyquists stabilitetskriterium. Figur 1(a) viser Nyquist kurven for  $h_{10}(j\omega) = \frac{K_p}{a+j\omega}$  for positive frekvenser. Husk at amplituden til denne transferfunksjonen (i lineær skala) kan skrives

$$|h_{10}(j\omega)| = 10^{(\log |K_p| - \log |a+j\omega|)} = \frac{10^{\log |K_p|}}{10^{\log |a+j\omega|}}. \quad (6)$$

Det er dermed enkelt å se at ved å øke  $|K_p|$  så øker vi lengden på vektoren  $|h_{10}(j\omega)|$ , og også radiusen på sirkelen i figur 3 i oppgaveteksten.



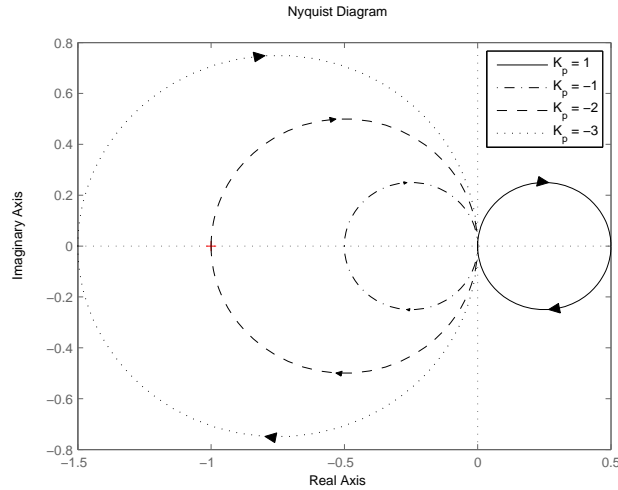
Figur 1: Nyquist diagrammer oppgave 4

i) Den høyre sirkelen i figur 1(b) er det åpent stabile systemet  $h_1(j\omega)$ . For at systemet skal forbli stabilt når det lukkes, må punktet  $(-1,0)$  ligge utenfor stedkurven til  $h_1(j\omega)$ . Uansett verdi av  $K_p$ , så vil

$$h_{10}(j\omega) = \frac{K_p}{j\omega + 2} \rightarrow 0 \quad \text{når} \quad \omega \rightarrow \infty \quad (7)$$

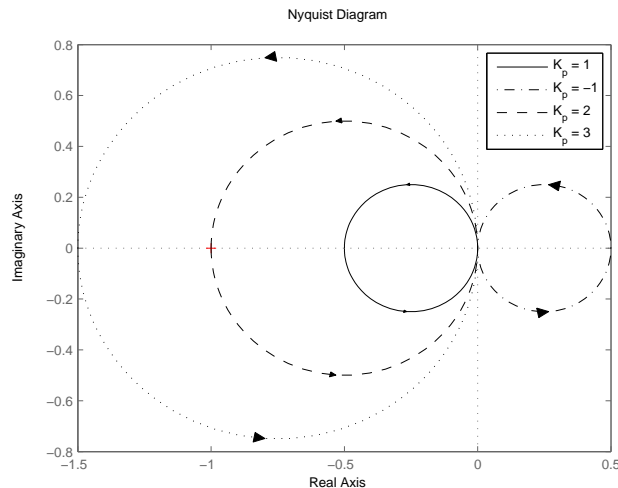
Figur 2 viser stedkurven for forskjellig verdier av  $K_p$ . Av figuren kan det sees at systemet med  $h_1(s)$  som transferfunksjon forblir stabilt når sløyfen lukkes og systemet reguleres med en proporsjonalregulator dersom  $K_p > -2$ . For verdier av  $K_p \leq -2$  vil stedkurven omslutte  $(-1,0)$  og det lukkede system blir ustabilt. Den kritiske verdien av  $K_p$  kan i dette tilfellet også finnes ved å løse for stasjonært tilfelle:

$$h_{10}(0) = \frac{K_p}{2} > -1 \quad \Rightarrow \quad K_p > -2. \quad (8)$$



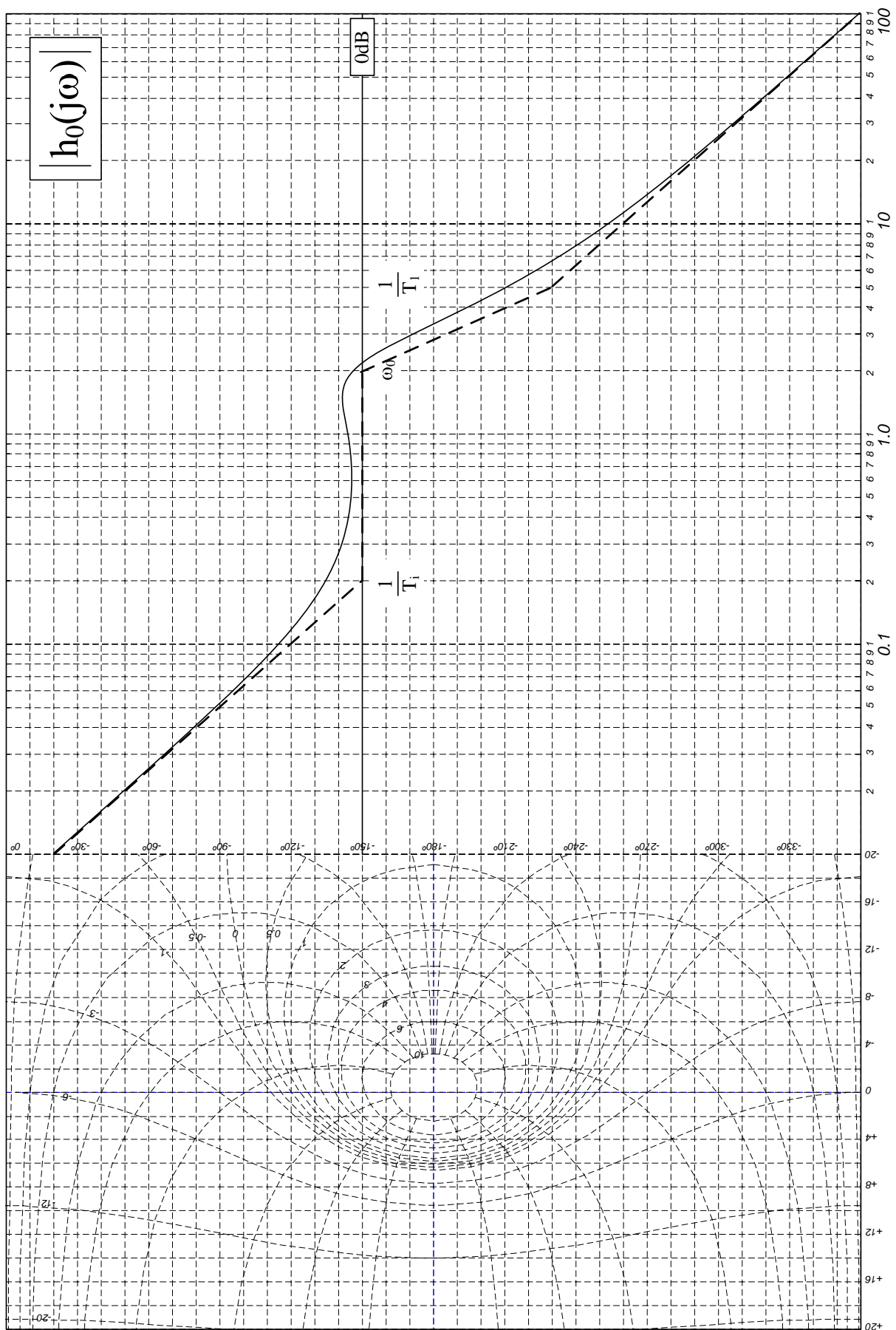
Figur 2: Nyquist diagram for  $\frac{K_p}{j\omega + 2}$  for forskjellige verdier av  $K_p$ .

ii) For  $h_{20}(j\omega) = \frac{K_p}{j\omega - 2}$  er situasjonen motsatt. Dette systemet er åpent ustabilt, med  $N_p = 1$  poler i høyre halvplan. Da må sirkelen for  $h_{20}(j\omega)$  omslutte punktet  $(-1,0)$  en gang når  $\omega$  går fra  $-\infty$  til  $+\infty$ . Dette tilsvarer at vinkelbidraget  $\Delta\angle(1 + h_{20}(s)) = 2\pi$  når  $\omega$  går fra  $-\infty$  til  $+\infty$ . Den polare stedkurvene for  $h_{20}(j\omega)$  for forskjellig verdier av  $K_p$  er vist i figur 3. Tilsvarende analyse som for  $h_1$  gir at  $K_p > 2$  for at det åpne ustabile systemet  $h_2(s)$  skal bli stabilt når sløyfen lukkes.

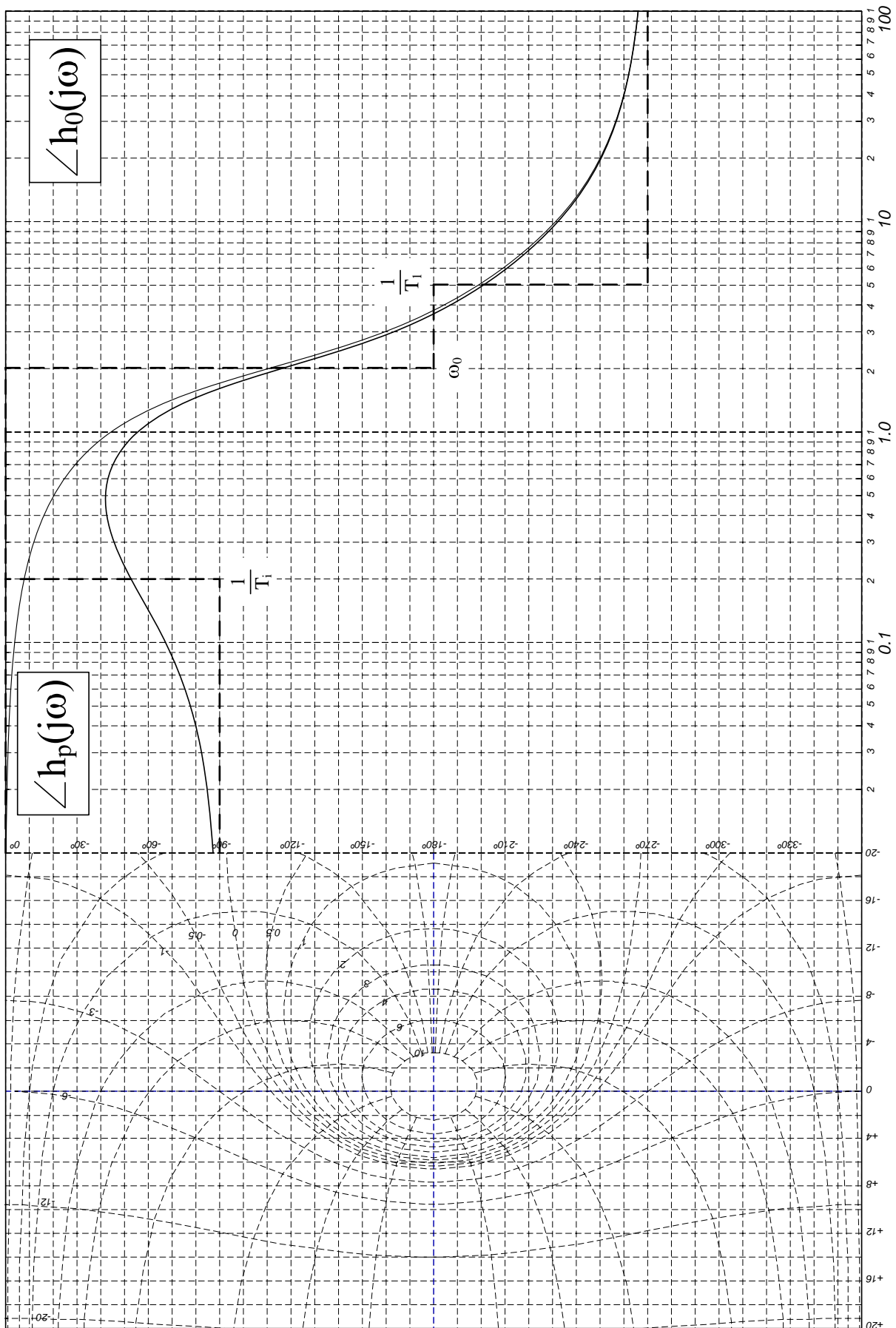


Figur 3: Nyquist diagram for  $\frac{K_p}{j\omega - 2}$  for forskjellige verdier av  $K_p$ .

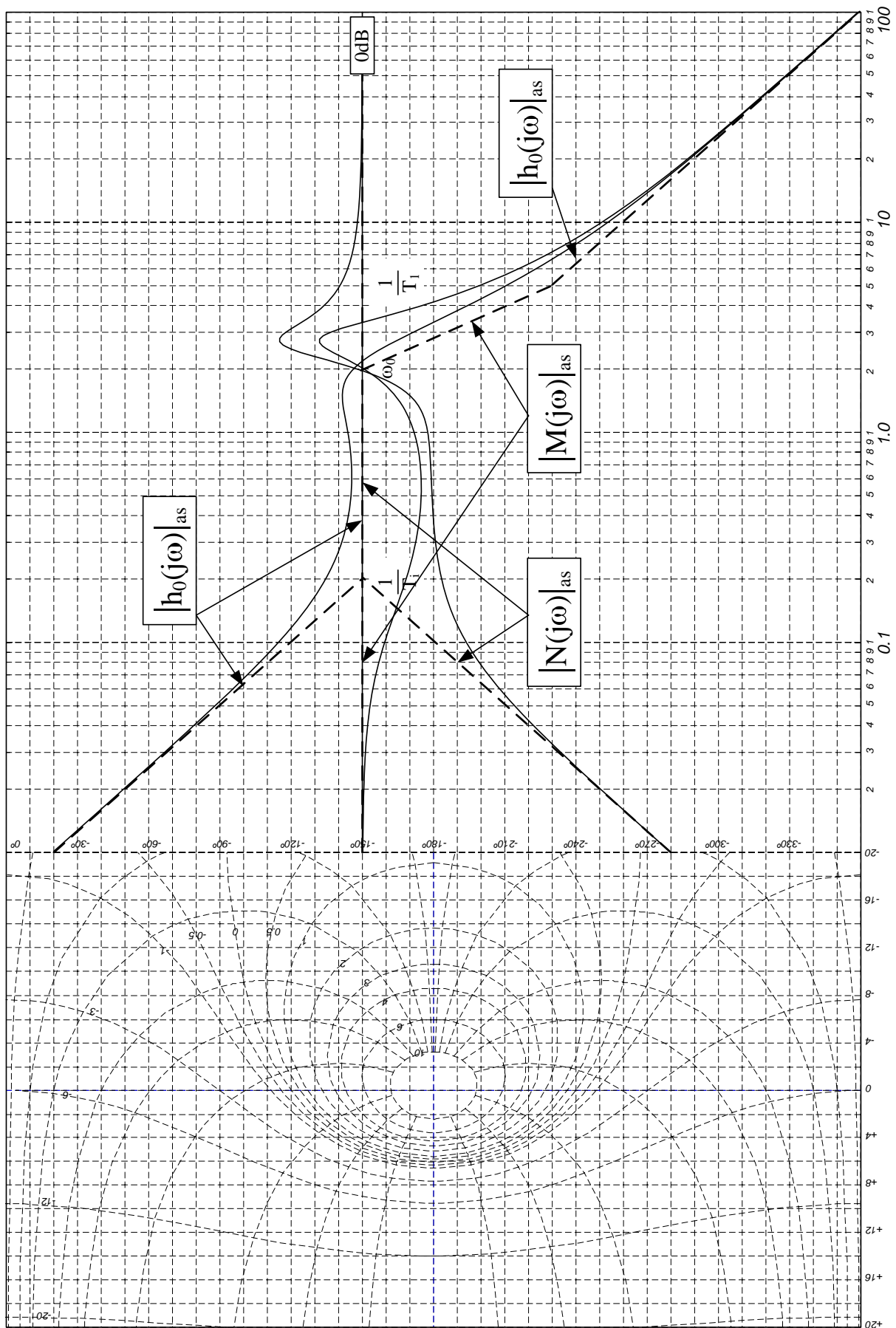
Nyquist diagramet i figur 2 og 3 for forskjellige verdier av forsterkningen  $K_p$  kan finnes i MATLAB med kommandoen `nyquist(tf([kp],[1 a]))` i kommandovinduet. Prøv med forskjellige verdier av `kp` og `a ± 2` og observer hva som skjer med den polare stedkurven.



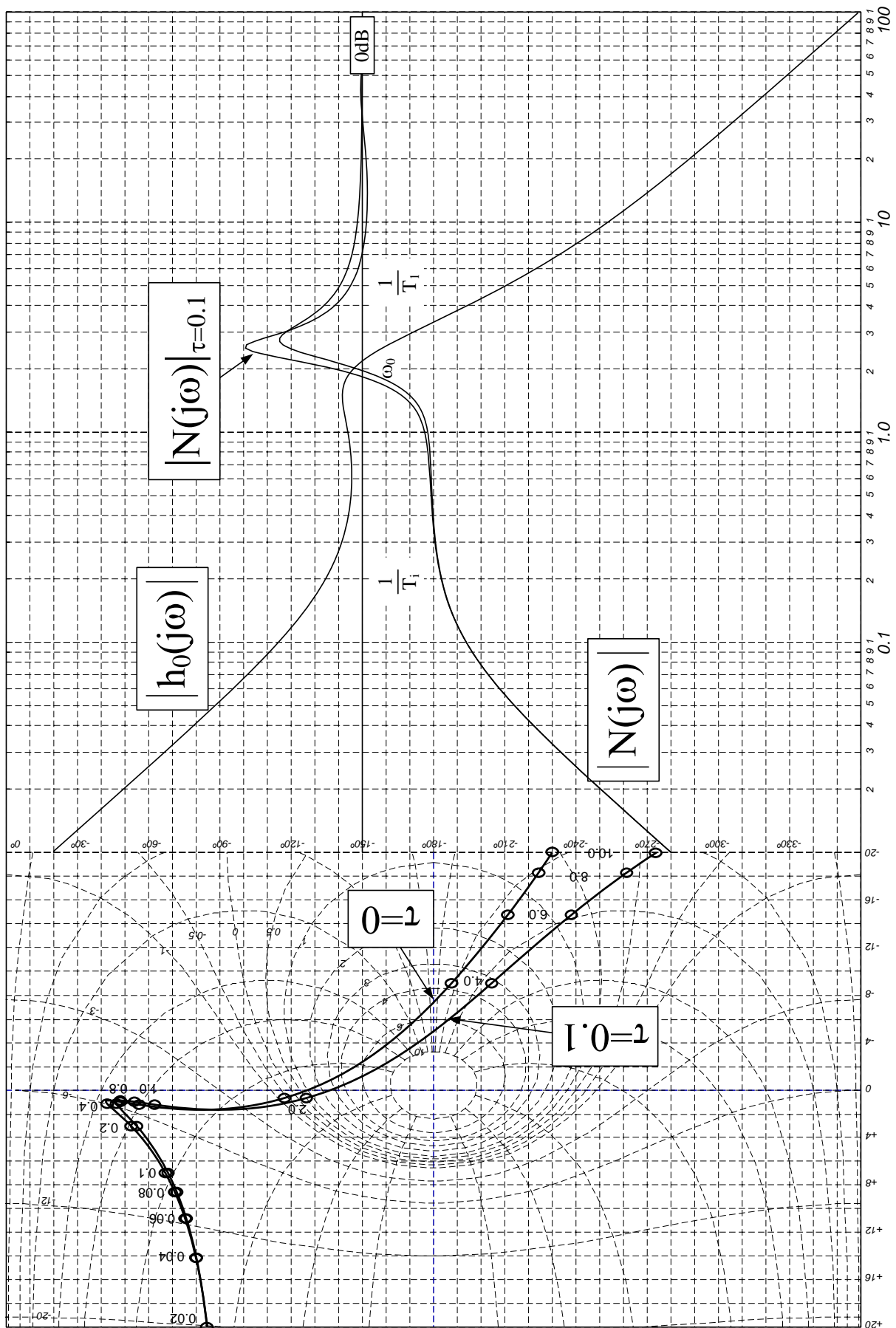
Figur 4: Asymptotisk og eksakt amplitudeforløp  $|h_0(j\omega)|$  for oppgave 1(a)



Figur 5: Asymptotisk og eksakt faseforløp for  $h_0(j\omega)$  i oppgave 1(a). Faseforløpet til  $h_p(j\omega)$  er også tegnet inn.



Figur 6: Asymptotisk og eksakt amplitudeforløp for  $|N(j\omega)|$  og  $|M(j\omega)|$  i oppgave 1(b). Asymptotisk og eksakt forløp for  $|h_0(j\omega)|$  er også tegnet inn for sammenlikning.



Figur 7: Asymptotisk og eksakt faseforløp for  $|N(j\omega)|$  og  $|M(j\omega)|$  i oppgave 1(c)-(d).