

TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)

Løsningsforslag for øving 12

Oppgave 1.

Volum før: $V_0 = 250 \text{ cm}^3 = 250 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$.

Volum etter: $V_1 = 1 \text{ cm} \cdot \pi \cdot (0,5 \text{ mm})^2 = 7,85 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3 = 7,85 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$.

a. Ideell gass, isoterm: $p_0 V_0 = p_1 V_1 \Rightarrow p_1 = p_0 \frac{V_0}{V_1} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mmHg} \cdot \frac{250}{7,85 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{32 \text{ mmHg}}}$.

b. Når trykket når $17,5 \text{ mmHg}$ vil vanndamp kondenseres og trykket holde seg konstant, dvs. $\underline{\underline{p_1 = 17,5 \text{ mmHg}}}$.

c. Vanndamp som kondenseres finnes enkletst ved å beregne vanndampmengde i starttilstanden og vanndampmengde i slutttilstanden:

Start: $n_0 = \frac{p_0 V_0}{RT} = 13,7 \text{ nmol}$ (med $p_0 = 10^{-3} \text{ mmHg} = 0,133 \text{ N/m}^2$ og $\text{nmol} = \text{nanomol}$).

Slutt: $n_1 = \frac{p_1 V_1}{RT} = 7,52 \text{ nmol}$.

Kondensert vann: $\Delta n = 6,2 \text{ nmol}$, dvs. $\Delta m = 6,2 \text{ nmol} \cdot 18 \text{ g/mol} = \underline{\underline{0,11 \mu\text{g}}}$.

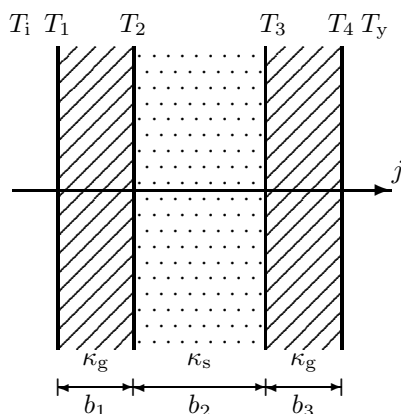
d. Forutsetninger gjort:

1) Sett bort fra volum i øvre kapillar ved beregning av V_0 ($V_1 = 78,5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3 \ll V_0$).

2) Regner vanndamp som ideell, selv i likevekt med væske. Dvs. dampen følger $pV = nRT$. Men merk at n ikke er konstant.

3) Vi har i b. sett bort fra volumet av kondensert vann som altså for $0,11 \mu\text{g}$ er $0,11 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^3 \ll V_1$.

Oppgave 2.



Varmetransport i materialer (gran og glassvatt) følger Fouriers varmeledningslikning:

$$j = -\kappa dT/dx.$$

For det tilfellet at en har stasjonær varmeledning gjennom en plate med tykkelse b gir dette (når varmestrømtettheten regnes positiv og ΔT er temperaturforskjellen mellom platens to sider)

$$j = \frac{\kappa}{b} \Delta T.$$

Varmetransport ved overgangen luft/panel følger

$$j = \alpha \Delta T.$$

Disse likninger er helt analoge Ohms lov for likestrøm, med ΔT i rollen som elektrisk spenning, j som elektrisk strøm, og henholdsvis b/κ og $1/\alpha$ i rollen som elektrisk motstand. En lagdelt vegg er helt analog en seriekopling av elektriske motstander.

a. Varmestrømtettheten må være den samme for alle lag (ellers ville interne temperaturer endres over tid). For å beskrive varmetransporten over alle lag trenger vi i tillegg til temperaturene T_i, T_2, T_3 og T_y , også temperaturen på overflate av innerpanel og ytterpanel, som vi naturlig kaller T_1 og T_4 (se figur).

b.

$$j = \alpha_{\text{inne}} \cdot (T_i - T_1) \quad (1)$$

$$j = \kappa_g/b_1 \cdot (T_1 - T_2) \quad (2)$$

$$j = \kappa_s/b_2 \cdot (T_2 - T_3) \quad (3)$$

$$j = \kappa_g/b_3 \cdot (T_3 - T_4) \quad (4)$$

$$j = \alpha_{\text{ute}} \cdot (T_4 - T_y) \quad (5)$$

Alle disse varmestrømmer j er like. Divisjon med koeffisienten foran ΔT på høyre side og sum av all likninger gir følgende uttrykk, og deretter innsetting av tallverdier:

$$j = \frac{T_i - T_y}{1/\alpha_{\text{inne}} + b_1/\kappa_g + b_2/\kappa_s + b_3/\kappa_g + 1/\alpha_{\text{ute}}} \quad (6)$$

$$= \frac{22 - 5}{1/7,5 + 0,02/0,14 + 0,10/0,047 + 0,025/0,14 + 1/25} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (7)$$

$$= \frac{17}{0,133 + 0,142 + 0,179 + 2,128 + 0,040} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = \frac{17}{2,622} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = \underline{\underline{6,48 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}}. \quad (8)$$

c. Temperaturen T_1 på innerside av innerpanelet finner vi fra (1) og $T_2 - T_1$ og dermed temp. T_2 på yttersiden av innerpanelet finner vi fra (2):

$$\begin{aligned} T_1 &= T_i - j/\alpha_{\text{inne}} = (22 - 6,48/7,5)^\circ\text{C} = (22 - 0,86)^\circ\text{C} = 21,136^\circ\text{C} \\ T_2 &= T_1 - j \cdot b_1/\kappa_g = (21,136 - 6,48 \cdot 0,142)^\circ\text{C} = (21,136 - 0,920)^\circ\text{C} = \underline{20,2^\circ\text{C}}. \end{aligned}$$

d. Med 10 cm steinull blir det årlige varmetapet ut gjennom 100 m^2 veggflate, under de gitte forutsetninger

$$\dot{E}(10\text{cm}) = 6,48 \cdot 10^{-3} \text{ kW/m}^2 \cdot 100 \text{ m}^2 \cdot 24(\text{h/døgn}) \cdot 200(\text{døgn/år}) = \underline{3110 \text{ kWh/år}}.$$

Økning av tykkelse for steinull gir nye tall for b_2 i likn. (7) med henholdsvis 0,15 og 0,20, og resultatet blir

$$\begin{aligned} j(15\text{ cm}) &= 4,61 \text{ W/m}^2 \Rightarrow \dot{E}(15\text{ cm}) = 2213 \text{ kWh/år, besparelse } 897 \text{ kWh,} \\ j(20\text{ cm}) &= 3,58 \text{ W/m}^2 \Rightarrow \dot{E}(20\text{ cm}) = 1717 \text{ kWh/år, besparelse ytterligere } 496 \text{ kWh.} \end{aligned}$$

Den gjennomsnittlige utetemperatur som er valgt i oppgaven er ikke urimelig i Stavanger, men i Kautokeino er den åpenbart for høy. Dersom en for eksempel velger -3° i stedet for $+5^\circ$, må energitallene ovenfor multipliseres med faktoren $25/17$.

Moral: Ved å gå opp fra 10 cm til 15 cm eller 20 cm isolasjon, kan en spare opp mot 1000 kWh per år. (Under de gitte forutsetninger!) Ved nybygg vil god veggisolasjon høyst sannsynlig være en fornuftig investering, mens det fra et reint økonomisk synspunkt er mer tvilsomt om etterisolering lønner seg. Det er i alle fall grunn til å sjekke om en ikke får mer kostnadseffektive energibesparelser ved å skifte ut vinduene!

Oppgave 3. Irreversible prosesser: Kan sløseriet unngås?

a. I den reversible isoterme ekspansjonen er arbeidet

$$W = W_{\text{max}} = \int_{V_0}^{2V_0} p dV = nRT \int_{V_0}^{2V_0} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{2V_0}{V_0} = \underline{nRT \ln 2}.$$

Dette kunne vi også beregnet fra 1. hovedsetning som gir $W = Q_{\text{inn}} = T\Delta S$, siden dette er en isotermisk, reversibel prosess.

b. Så var det de to like metallklossene med denne snedige Carnot-maskinen som avleverer arbeid (nyttig energi) til omgivelsene mens temperaturforskjellen mellom klossene gradvis går mot null. Den varme klossen med starttemperatur T_2 og sluttemperatur T_{rev} gir fra seg entropi $\Delta S_{\text{varm}} = C \int_{T_2}^{T_{\text{rev}}} \frac{dT}{T}$ mens den kalde klossen med starttemp

T_1 og sluttemp T_{rev} mottar entropi $\Delta S_{\text{kald}} = C \int_{T_1}^{T_{\text{rev}}} \frac{dT}{T}$. Sluttemperaturen finnes ved å sette $\Delta S = 0$, siden entropien er konstant for *reversible* prosesser i et termisk lukket system.

$$\Delta S = C \int_{T_1}^{T_{\text{rev}}} \frac{dT}{T} + C \int_{T_2}^{T_{\text{rev}}} \frac{dT}{T} = C \ln \frac{T_{\text{rev}}}{T_1} + C \ln \frac{T_{\text{rev}}}{T_2} = C \ln \frac{T_{\text{rev}}^2}{T_1 T_2} \equiv 0.$$

Av dette følger at sluttemperaturen er

$$\underline{T_{\text{rev}} = \sqrt{T_1 T_2}}.$$

Indre energi for klossene ved start er $U_0 = CT_2 + CT_1$, som også er lik sluttenergien ved irreversibel utjamning: $U_{\text{irr}} = 2CT_{\text{irr}} = C(T_2 + T_1) = U_0$. Ved den reversible temperaturutjamning er sluttenergien: $U_{\text{rev}} = 2CT_{\text{rev}} = C2\sqrt{T_1 T_2}$, og det er enkelt å vise at $T_{\text{rev}} < T_{\text{irr}}$ og dermed $U_{\text{rev}} < U_{\text{irr}}$.

Differansen i energi er nettopp (energibevaring, 1. hovedsetning) lik arbeidet Carnotmaskinen har gitt, som da blir lik det maksimale arbeid:

$$\underline{W_{\text{max}}} = U_{\text{irr}} - U_{\text{rev}} = C(T_2 + T_1) - 2C\sqrt{T_1 T_2} = C(T_1 - 2\sqrt{T_1 T_2} + T_2) = C(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2.$$

Vi ser at $W_{\text{max}} > 0$, som det burde være, som dermed også er bevis for at $T_{\text{rev}} < T_{\text{irr}}$.

Oppgave 4.

a. Adiabatisk ekspansjon betyr $Q = 0$. Fri ekspansjon betyr $W = 0$ (arbeid mot vakuum, $p = 0$). Dermed er fra 1.hovedsetning $\Delta U = 0$, altså prosess ved konstant U .

b. Altså er $\Delta U = 0$, og vi finner fra oppgitt uttrykk for U for vdW-gassen:

$$U_1 = U_2 \quad \Rightarrow \quad C_V T_1 - \frac{an^2}{V_1} = C_V T_2 - \frac{an^2}{V_2} \quad \Rightarrow \quad T_2 - T_1 = -\frac{an^2}{C_V} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

For å finne V_2 kunne vi bruke adiabatlikningen for vdW-gass for T og V , men vi approksimerer for ikke å regne for mye: Trykket før ekspansjonen anslås fra ideal-gasslov til $p_1 = nRT_1/V_1 = 20,3 \text{ MPa} = 201 \text{ atm} \gg 1 \text{ atm}$ og dermed $V_1 \ll V_2$ ($= V_1 \cdot \frac{p_1}{p_2} = 24 \text{ m}^3$ hvis ideell gass). Bruk av vdW-likningen ville gi litt høyere p_1 , men uansett $V_2 \gg V_1$. Approksimerer derfor i uttrykket for temp.fallet:

$$T_2 - T_1 \approx -\frac{an^2}{1,506 nR} \cdot \frac{1}{V_1} = -\frac{3,44 \cdot 10^{-3} \text{ J m}^3 \text{ mol}^{-2} \cdot 1000 \text{ mol}}{1,506 \cdot 8,31 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 0,12 \text{ m}^3} = \underline{\underline{-2,3 \text{ K}}}.$$

Selv for He-gass, som er den mest ideelle man kan finne, blir det altså et markant temp.fall.

c. For 1000 mol luft med $a = 137 \cdot 10^{-3} \text{ J m}^3 \text{ mol}^{-2}$ og $C_V = 2,5 nR$ ville vi finne $\Delta T = -55 \text{ K}$! Men så er også den angitte prosessen en ekstrem ekspansjon.