

## Løsningsforslag øving 7

Oppgave 1

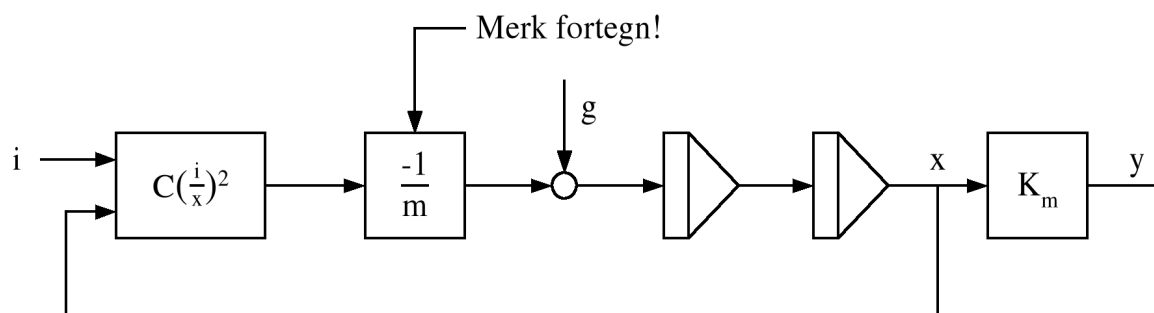
a) Fra Newton's 2. lov blir modellen for posisjonen til den svevende klossen

$$m\ddot{x} = G - f = mg - C \left( \frac{i}{x} \right)^2 \quad (1)$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{x} = g - \frac{C}{m} \left( \frac{i}{x} \right)^2 = f(x, i) \quad (2)$$

$$y = K_m x \quad (3)$$



Systemet er ulineært siden  $f$  er ulineær i  $i$  og  $x$ .

b) Ved likevekt har vi

$$f_0 = mg \implies C \left( \frac{i_0}{x_0} \right)^2 = mg$$

$$\Downarrow$$

$$C = \left( \frac{x_0}{i_0} \right)^2 mg$$

c) Vi har:

$$u = u_R + u_L \quad (4)$$

$$= Ri + L \frac{di}{dt} \quad (5)$$

$$\implies u(s) = Ri(s) + sLi(s) \quad (6)$$

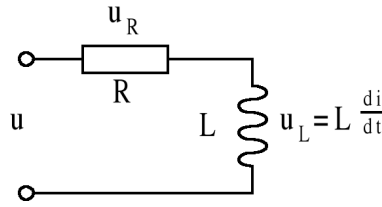
$$\implies h_{iu}(s) = \frac{i}{u}(s) = \frac{1}{R + Ls} \quad (7)$$

d) Definerer  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ ,  $x_3 = i$  og  $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ x_3]$ . Den ulineære modellen blir da

$$\dot{x}_1 = f_1(\mathbf{x}, u) = x_2 \quad (8)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(\mathbf{x}, u) = -\frac{C}{m} \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2 + g \quad (9)$$

$$\dot{x}_3 = f_3(\mathbf{x}, u) = -\frac{R}{L}x_3 + \frac{1}{L}u \quad (10)$$



Den ulineære tilstandsrommodellen (8)-(10) lineariseres rundt et arbeidspunkt  $\mathbf{x}_0^T = [x_{10} \ x_{20} \ x_{30}]$ ,  $u_0$  med notasjon  $\Delta \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  og  $\Delta u = \tilde{u} = u - u_0$ :

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{b}\tilde{u}$$

Vi har

$$\mathbf{A} = \left\{ \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, u)}{\partial x_j} \right\} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, u=u_0}, \quad \mathbf{b} = \left\{ \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right\} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, u=u_0}, \quad (11)$$

for  $j = 1, 2, 3$  og  $i = 1, 2, 3$  som gir

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, u=u_0} \quad (12)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{C}{m} \frac{2x_{30}^2}{x_{10}^3} & 0 & -\frac{C}{m} \frac{2x_{30}}{x_{10}^2} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad (13)$$

og

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Observer fra matrise  $\mathbf{A}$  at bidraget fra tyngdekraften i modellen elimineres i lineariseringen. Dette siden “likevektskraften”  $f_0$  er tyngden  $mg$ . Dermed er

$$m\ddot{x} = m\dot{\tilde{x}}_2 = f_0 - f = -\tilde{f}, \quad (15)$$

der  $\dot{\tilde{x}}_2$  er gitt av rad 2 i matrise  $\mathbf{A}$  over. Dermed kan  $\tilde{f}$  uttrykkes ved  $\tilde{f} = C_1 \tilde{x}_3 - C_2 \tilde{x}_1$ , hvor  $C_1$  og  $C_2$  fåes ved å multiplisere rad 2 i  $\mathbf{A}$  med  $-m$ :

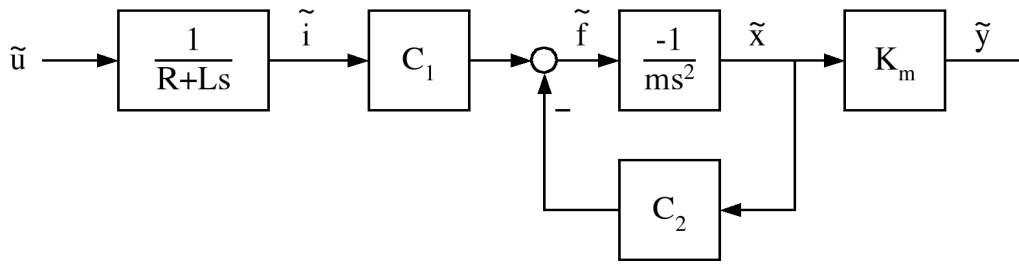
$$C_1 = 2C \frac{x_{30}}{x_{10}^2} \quad (16)$$

$$C_2 = 2C \frac{x_{30}^2}{x_{10}^3} \quad (17)$$

e) Blokkdiagram i  $s$ -planet for det linearisert systemet  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{b}\tilde{u}$  med åpen sløyfe og matrise  $\mathbf{A}$  gitt i (13) og  $\mathbf{b}$  gitt i (14) er gitt i figur 1. Merk at  $C_1$  og  $C_2$  er substituert i  $\mathbf{A}$ -matrisen.

Transferfunksjonen fra  $\tilde{u}$  til  $\tilde{y}$  leses direkte av blokkdiagrammet:

$$h_{\tilde{u}\tilde{y}} = \frac{-K_m C_1}{(R + Ls)(ms^2 - C_2)} = \frac{-K_m C_1}{mL} \frac{1}{\left(s + \frac{R}{L}\right) \left(s^2 - \frac{C_2}{m}\right)}$$



Figur 1: Blokkdiagram for oppgave 2 (e)

f) Systemets har tre poler gitt av

$$s_1 = -\frac{R}{L} \quad s_2 = -\sqrt{\frac{C_2}{m}} \quad s_3 = \sqrt{\frac{C_2}{m}} \quad (18)$$

Systemet har en reell pol i høyre halvplan ( $s_3$ ), og systemet er av den grunn ustabilt. Siden polen er reell, er ustabiliteten eksponensielt voksende og ikke-oscillatorisk. Dette passer med vår intuitive beskrivelse av en magnet: Når jernstykket er litt over eller litt under likevektspunktet, vil det hhv. bli dratt fortere og fortere inn mot magneten, eller falle raskere og raskere vekk fra den.

g) Det negative fortegnet er nødvendig for å gi positiv  $h_0$  siden  $h_{\tilde{u}\tilde{y}}$  har negativt fortegn. Når  $K_p$  økes, vokser kurven proporsjonalt med  $K_p$  slik at radiusvektor uansett hvor på kurven øker i takt med  $K_p$ . Kurven beholder sin form.

Fra Nyquists generelle stabilitetskriterium; når  $h_0$  har en pol i h.h.p., dvs systemet er åpent ustabilt, må kurven dreie én gang mot urviseren rundt punktet  $(-1, 0)$  i det komplekse plan (se s. 281 i læreboka). Men kurven i figur 2 i oppgaveteksten dreier seg med urviseren, uansett om  $K_p$  er stor nok til at kurven omslutter  $(-1, 0)$ . Dette betyr at systemet aldri kan bli stabilt med proporsjonalregulator.

h) Nyquistkurven omslutter  $(-1, 0)$  én gang mot urviseren. Dette betyr at systemet er stabilt når det reguleres med den gitte PD-regulatoren.

Når  $K_p$  økes vil radius i stedkurven øke. Dersom forsterkningen blir for stor, vil punktet der kurven krysser seg selv havne tilvenstre for punktet  $(-1, 0)$ . Dersom dette skjer vil den høyre sløyften omslutte  $(-1, 0)$ , men av pilene på stedkurven fremgår det at dreiningen rundt punktet nå vil være i med urvisern. Dersom forsterknigen blir for stor vil derfor det lukkede systemet på nytt bli ustabilt.

For å finne ca verdien av  $\Delta K_p$ , dvs hvor mye vi kan øke forsterkningen før systemet blir ustabilt, kan vi lese av kurven i figur 3. Avstanden fra origo til stedet der stedkurven  $h_0(j\omega)$  krysser seg selv på den negative reelle halvakse er ca 0.27. Dette betyr at kurven kan forstørres med omlag  $\frac{1}{0.27}$  får krysningen til høyre for  $(-1, 0)$  sammenfaller med punktet  $(-1, 0)$ . Vi får derfor forsterkningsmarginen  $\Delta K_p = \frac{1}{0.27} \approx 11\text{dB}$ .

## Oppgave 2

a) Bruk av Ziegler-Nichols beskrevet på side 335 i læreboka metode for å stille inn regulatorparametre i eksempel 8.19. Det er oppgitt i boka at  $K_{p,krit} = \frac{1}{T_r}$ .

- For P-regulator gir Ziegler-Nichols at  $K_p = 0.5K_{p,krit} \Rightarrow K_p = \frac{0.5}{T_r}$ . Ziegler-Nichols gir dermed litt kraftigere forsterkning og derfor litt lavere stabilitetsmarginer enn eksempelet i boka. ( $K_p = \frac{0.45}{T_r}$ )
- For PI-regulator gir Ziegler-Nichols metode følgende:

$$K_p = 0.45K_{p,krit} \quad T_i = \frac{5}{\omega_{180}}$$

$$\underline{\underline{K_p = \frac{0.45}{T_r} \quad T_i = \frac{5T_r}{\sqrt{2}} = 3.54T_r}}}$$

Ser at integraltiden  $T_i$  er mindre enn i eksemplet i boka ( $T_i = 10T_r$ ). Dette fører til at vi drar med oss negativ faseforskyving ved høyere frekvenser enn i eksempelet og dermed før dårligere stabilitetsmarginer. (Dette er typisk for Ziegler-Nichols metode, som vanligvis gir noe dårligere stabilitetsmarginer enn typiske spesifikasjoner som  $\Delta K > 2$  og  $\psi > 45^\circ$ .)

- Tilleg og ikke en del av øvingsoppgave; for PID-regulator gir Ziegler-Nichols metode følgedne regulatortuning for eksempel 8.19:

$$K_p = 0.6K_{p,krit} \quad T_i = \frac{3}{\omega_{180}} \quad T_d = \frac{0.75}{\omega_{180}} \quad (19)$$

$$\underline{\underline{K_p = \frac{0.6}{T_r}}} \quad \underline{\underline{T_i = \frac{3T_r}{\sqrt{2}}}} \quad \underline{\underline{T_d = \frac{0.75T_r}{\sqrt{2}}}} \quad (20)$$

b) Vi har at  $v(t) = 0$  og at referansen  $y_0(t)$  er et enhetssprang ( $\Rightarrow y_0(s) = \frac{1}{s}$ ). Avviket er gitt som:

$$\begin{aligned} e(s) &= y_0(s) - y(s) = y_0(s) - h_0(s)e(s) \\ e(s) &= \frac{1}{1 + h_0(s)} y_0(s) = N(s)y_0(s) \end{aligned} \quad (21)$$

Med  $h_r = K_p$  får vi:

$$h_0(s) = \frac{K_p K (1 - T_r s)}{I s (1 + 0.5 T_r s)} = \frac{t_0(s)}{n_0(s)} \quad (22)$$

$\Downarrow$

$$N(s) = \frac{n_0(s)}{t_0(s) + n_0(s)} = \frac{I s (1 + 0.5 T_r s)}{I s (1 + 0.5 T_r s) + K_p K (1 - T_r s)} \quad (23)$$

Sluttverditeoremet gir:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s N(s) \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} N(s) = \underline{\underline{0}} \end{aligned} \quad (24)$$

Siden  $|N(j\omega)|_{as} \text{ [dB]} = -|h_0(j\omega)|_{as} \text{ [dB]}$ , og  $h_0(j\omega)$  gitt i likning (22) har en ren integrator, så vil

$$\lim_{j\omega \rightarrow 0} N(j\omega) = -\infty \text{ [dB]} = 0 \quad (25)$$

I dette tilfellet er det derfor unødvendig med PI-regulator fordi turbinen ( $h_2(s) = \frac{1}{I s}$ ), gir den integralkvirkning vi trenger når referansen er et sprang.

c) Den totale feilen  $e(s) = y_0(s) - y(s)$  er generelt gitt ved

$$e(s) = N(s)y_0(s) - N(s)h_v(s)v(s) \quad (26)$$

Vi kan sette  $y_0(t) \equiv 0$  (superposisjon), og dermed kun studere virkningen av  $v(t)$ . Forstyrrelsen  $v(t)$  er nå et enhetssprang, dvs.  $v(s) = \frac{1}{s}$ . Avviket er da gitt ved

$$e(s) = -N(s)h_2(s)(-v(s)), \quad (27)$$

der  $N(s)$  er gitt i likning (23) og  $h_2(s) = \frac{1}{I s}$ . Sluttverditeoremet gir da

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s N(s) \frac{1}{I s} v(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s N(s) \frac{1}{I s} \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{K_p K} \end{aligned} \quad (28)$$

Kommentar: Her får vi statisk avvik fordi spranget i forstyrrelsen  $v(t)$  kommer inn før integratoren gitt av turbinen. Dermed er dette spranget ekvivalent med en rampe som kommer inn etter turbinen. Hvis vi hadde brukt en PI-regulator ( $h_r(s) = K_p \frac{1+T_i s}{T_i s}$ ) så hadde vi også her fått null statisk avvik. Da ville vi hatt to integratorer i serie i den lukkede sløyfen. Behov for integralkvirkning i en reguleringsløyfe er beskrevet i avsnitt 9.4 i læreboka.