TTK 4240 – Løsningsforslag 9

1 ENFASE DIODELIKERETTER

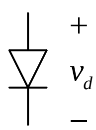
Figur 1 viser den enkleste måten å konstruere en enfase diodelikeretter på. Vi kaller dette for en halvbro. Vi skal i hele denne øvingen anta at diodene er idelle. Anta følgende verdier:

$v_s(t) = 100\sin(\omega t)$
$R = 2\ \Omega$
$\omega = 2\pi \cdot 50$ rad/s

a) Skriv opp antagelsene for en ideell diode.

Svar:

- En ideell diode er avslått (*i=0)* når spenningen over den er negativ. Spenningen over en diode er definert i henhold til retningen i figuren nedenfor. Dioden er altså avslått når v_d er negativ.
- Når spenningen over dioden går fra å være negativ til positiv skrur dioden seg på, og spenningsfallet over den blir lik 0, dvs. den oppfører seg som en kortslutning. Strømmen gjennom dioden blir alltid positiv.



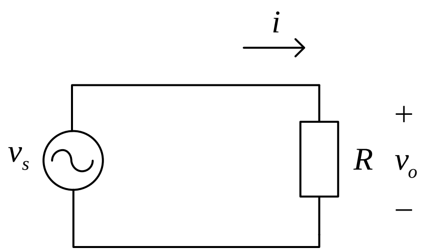
b) Beregn og skisser $i(t), v_o(t)$

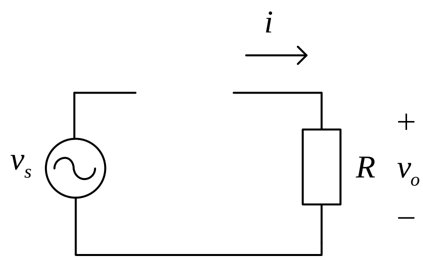
Svar:

I oppgaver som inneholder dioder er vi nødt til å prøve oss litt frem for å finne tidsforløpene. Vi gjør følgende observasjoner om kretsen:

1. Hvis dioden er avslått, så vil det ikke kunne gå noe strøm i kretsen, dvs. $i(t) = 0$. I dette tilfellet så blir spenningen over dioden lik kildespenningen: $v_d = v_s$. Spenningen over motstanden blir lik 0 siden det ikke går strøm i motstanden
2. Hvis dioden er påslått så vil spenningen over motstanden være lik kildespenningen, $v_o = v_s$. Strømmen blir da $i = \frac{v_o}{R} = \frac{v_s}{R}$
3. Så lenge kildespenningen er positiv så vil dioden være påslått. **Bevis:** Anta positiv kildespenning og avslått diode. Da blir diodespenningen positiv pga. punkt 1, som per definisjon fører til en påslått diode. Dette er en selvmotsigelse
4. Så lenge kildespenningen er negativ vil dioden være avslått. **Bevis**: Anta negativ kildespenning og påslått diode. Da blir strømmen gjennom dioden negativ pga. punkt 2, noe som ikke er mulig for en ideell diode. Dette er en selvmotsigelse.

For å bli enig med punktene over kan det være nyttig å tegne kretsen på nytt for henholdsvis påslått (venstre) og avslått (høyre) diode:



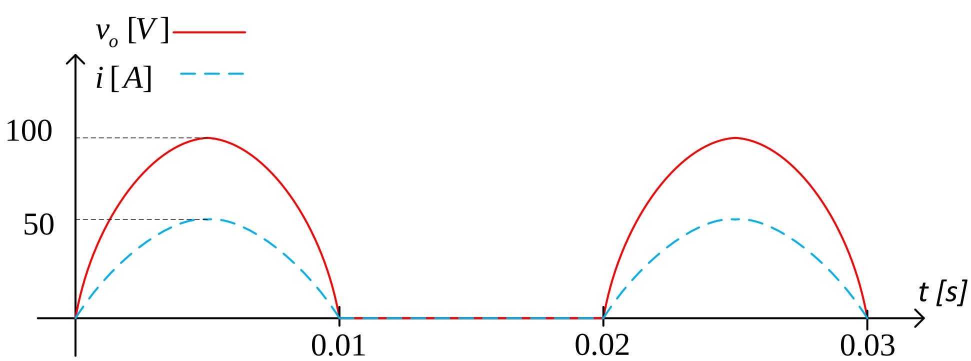


Vi kan nå skrive opp tidsfunksjonene basert på resonnementene ovenfor:

$$v_o(t) = \begin{cases} v_s(t) = 100\sin(\omega t) & , \quad v_s(t) > 0 \\ 0 & , \quad v_s(t) < 0 \end{cases}$$

$$i(t) = \begin{cases} \dfrac{v_s(t)}{R} = 50\sin\left(\omega t\right) & , \quad v_s(t) > 0 \\ 0 & , \quad v_s(t) < 0 \end{cases}$$

Dette gir følgende skisse av tidsforløpene



c) Hva blir gjennomsnittsverdien til utgangsspenningen, V_o ? Beregn deretter forholdet $\frac{V_o}{V_{s,rms}}$

Svar: For å finne gjennomsnittspenningen setter vi opp tids-integralet over en periode:

$$V_o = \frac{1}{T}\int_0^T v_o(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} v_s(t)dt + \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 0dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 100\sin\left(\omega t\right)dt = \frac{100}{\omega T}\left[-\cos\left(\omega t\right)\right]_0^{T/2}$$

$$= \frac{100}{\omega T}\left(1-\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)$$

Dette uttrykket blir betraktelig enklere når vi utnytter sammenhengen mellom periodetid T og frekvens

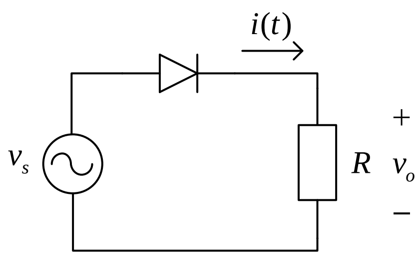
$\omega: \; \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega T = 2\pi$

Vi får da:

$$V_o = \frac{100}{2\pi}\left(1-\cos\left(\pi\right)\right) = \frac{100}{\pi}V \approx 31.83\,V$$

For å finne $\frac{V_o}{V_{s,rms}}$ bruker vi at $V_{s,rms} = \frac{100}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{V_o}{V_{s,rms}} = \frac{\frac{100}{\pi}}{\frac{100}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \approx 0.45$$



Figur 1: Halvbro enfase diodelikeretter

d) Beregn og skisser $i(t), v_o(t)$ til fullbrolikeretteren

Svar: Det er ikke så intuitivt å se hvilke dioder som vil være påslått ved ulike tidspunkt, men vi kan utarbeide resonnementene på tilsvarende måte som for halvbrolikeretteren:

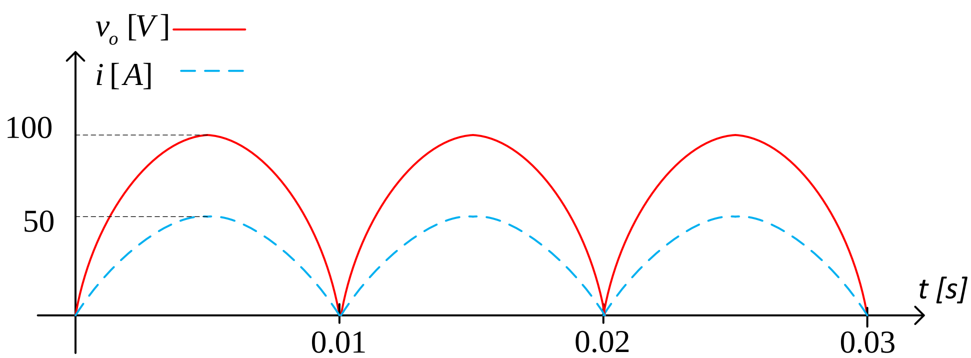
1. Hvis D_1 er påslått, så kan ikke D_2 være påslått (og omvendt), siden dette ville ført til en kortslutning av spenningskilden v_s, noe som er en selvmotsigelse.
2. Hvis D_3 er påslått, så kan ikke D_4 være påslått (og omvendt), siden dette ville ført til en kortslutning av spenningskilden v_s, noe som er en selvmotsigelse.
3. Strømmen *i* gjennom motstanden er nødt til å være positiv på grunn av retningen til diodene.
4. Hvis strømmen *i* er ulik fra null så er to dioder nødt til å lede. Basert på punkt 1 og 2 så finnes det bare fire mulige kombinasjoner: $D_1 + D_4 \quad \& \quad D_2 + D_4 \quad \& \quad D_1 + D_3 \quad \& \quad D_2 + D_3$
5. Vi kan forkaste kombinasjonene $D_2 + D_4 \quad \& \quad D_1 + D_3$ siden disse ville ført til en kortsluning av motstanden *R*, og dermed en strøm $i = 0$. Det er dermed bare to mulige kombinasjoner av påslåtte dioder som kan gi strøm i motstanden: $D_1 + D_4 \quad \& \quad D_2 + D_3$
6. Hvis spenningskilden er positiv, $v_s > 0$, så vil $D_1 + D_4$ være påslått. **Bevis**: Anta i stedet at det er $D_2 + D_3$ som er påslått. Da vil spenningen over diode D_1 bli lik v_s, som er positiv. På grunn av antagelsen om en ideell diode vil dermed D_1 slå seg på, noe som er en selvmotsigelse.
7. Med tilsvarende resonnement så vil $D_2 + D_3$ være påslått når spenningskilden $v_s < 0$

Basert på dette kan vi sette opp følgende tidsfunksjoner for strøm og spenning over *R:*

$$v_o(t) = \begin{cases} v_s(t) & , \quad v_s(t) > 0 \\ -v_s(t) & , \quad v_s(t) < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad v_o(t) = abs\left(v_s(t)\right)$$

$$i(t) = \begin{cases} \dfrac{v_s(t)}{R} & , \quad v_s(t) > 0 \\ -\dfrac{v_s(t)}{R} & , \quad v_s(t) < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad i(t) = \frac{abs\left(v_s(t)\right)}{R}$$

Dette er en genial krets! Den gir en utgangsspenning som er lik absoluttverdien til inngangsspenningen. Tidsforløpene ser slik ut:



e) Hva blir gjennomsnittsverdien til utgangsspenningen, V_o ? Beregn deretter forholdet $\frac{V_o}{V_{s,rms}}$, og sammenlign med oppgave c).

Svar: Setter opp integralet på tilsvarende måte som for halvbrolikeretteren:

$$V_o = \frac{1}{T}\int_0^T v_o(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} v_s(t)dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} -v_s(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 100\sin\left(\omega t\right)dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} -100\sin\left(\omega t\right)dt$$

$$= \frac{100}{\omega T}\left(\left[-\cos\left(\omega t\right)\right]_0^{T/2} - \left[-\cos\left(\omega t\right)\right]_{T/2}^{T}\right)$$

$$= \frac{100}{\omega T}\left(1 - \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) + \cos\left(\omega T\right) - \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)$$

Benytter igjen at $\omega T = 2\pi$:

$$V_o = \frac{100}{2\pi}\left(1 - \cos\left(\pi\right) + \cos\left(2\pi\right) - \cos\left(\pi\right)\right) = \frac{2}{\pi}\cdot 100\,V \approx 63.66\,V$$

Forholdet $\frac{V_o}{V_{s,rms}}$ blir nå

$$\frac{V_o}{V_{s,rms}} = \frac{\frac{2\cdot 100}{\pi}}{\frac{100}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \approx 0.90$$

For en gitt vekselspenning v_s blir gjennomsnittsspenningen V_o dobbelt så høy ved å bruke en fullbrolikeretter. Dette gir en dobbelt så god utnyttelse av tilgjengelig spenning, noe som er en stor fordel. Vi kunne også sett dette umiddelbart gjennom å betrakte skissen av tidsforløpet: Det er logisk at gjennomsnittsverdien blir dobbelt så stor når arealet under grafen dobler seg.

f) Hvilken type krets (brukt i tidligere øvinger) kunne bidratt til å gjøre v_o mer stabil/konstant, dvs. fjerne rippelen?

Svar: Et lavpassfilter kan brukes til å stabilisere utgangsspenningen. Vanligvis gjøres dette ved å sette en forholdsvis stor kondensator i parallell med motstanden R. Dette er en veldig mye brukt krets, men vi skal ikke regne på den i dette faget da matematikken blir forholdsvis grisete.

2 EFFEKTBEREGNINGER PÅ FULLBRO LIKERETTER

a) Finn effekten omsatt i motstanden *R* som funksjon av tid, dvs. $P_r(t)$. Hva blir gjennomsnittseffekten?

Svar:

Finner effekten som $P_r(t) = \frac{v_o^2(t)}{R} = \frac{abs\left(v_s(t)\right)^2}{R} = \frac{v_s^2(t)}{R} = \frac{100^2}{2}\sin^2\left(\omega t\right) = 5000\sin^2\left(\omega t\right)$.

Gjennomsnittseffekten finner vi ved å utnytte at $\sin^2\left(\omega t\right)$ har gjennomsnittsverdi lik $\frac{1}{2}$, eventuelt kan vi vise dette ved å ta integralet:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\left(\omega t\right)dt = \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{1-\cos\left(2\omega t\right)}{2}\right)dt = \frac{1}{T}\cdot\frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

Gjennomsnittseffekten blir derfor $\overline{P_r} = \frac{5000}{2} = 2500\,W$

b) Finn tidsuttrykket til strømmen $i_s(t)$, og deretter effekten tilført fra kildespenningen $P_s(t)$. Sammmenlign med $P_r(t)$

For å finne strømmen $i_s(t)$ er det enklest å observere at kildespenningen v_s alltid ser motstanden *R* uavhengig av hvilke dioder som er påslått. Vi kan dermed skrive opp uttrykket for strømmen direkte:

$$i_s(t) = \frac{v_s(t)}{R} = 50\sin\left(\omega t\right)$$

Effekten tilført fra kilden blir dermed $P_s(t) = v_s(t)i_s(t) = 100\sin\left(\omega t\right)\cdot 50\sin\left(\omega t\right) = 5000\sin^2\left(\omega t\right)$. Dette er det samme som $P_r(t)$, noe som ikke er spesielt overraskende siden diodene hverken produserer, forbruker, eller lagrer energi.

c) Finn kildespenning og kildestrøm på viserform, dvs. V_s og I_s.

Svar:

Vi kan definere at spenningen har vinkel 0 (kan i utgangspunktet velge denne fritt). Vi velger å regne med RMS-visere, da dette er mest hensiktsmessig for å finne effekt senere i oppgaven.

$$V_s = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{j0}$$

Siden strømmen har samme fasevinkel som spenningen så blir $I_s = \frac{50}{\sqrt{2}} e^{j0}$

(Det er ikke direkte feil å finne visere basert på amplitudeverdier, men da er det fort gjort å klusse til effektberegninger)

d) Finn den komplekse effekten tilført fra kilden, S_s, samt den aktive og reaktive effekt. Sammenlign med svarene fra a) og b)

Svar:

Finner tilsynelatende/kompleks effekt: $S_s = V_s I_s^* = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{j0} \cdot \left(\frac{50}{\sqrt{2}} e^{j0} \right)^* = 2500 e^{j0}$

Splitter opp i aktiv og reaktiv effekt:

$$P_s = 2500\, W$$
$$Q_s = 0\, VAr$$

Den aktive effekten er den samme effekten som gjennomsnittseffekten til både kilde og motstand. Dette er forventet siden viserberegninger gir oss gjennomsnittlig effekt. Vi observerer også at likeretteren har 0 reaktiv effekt, dvs. effektfaktoren $\cos\varphi = 1$. Dette er et viktig kjennetegn til en diodelikeretter.

e) Representer likeretter+mostand med en ekvivalent impedans Z_{eq} som vist i følgende figur. Finn verdien til motstanden som gir samme gjennomsnittlige effektforbruk sett fra kilden.

Svar:

Velger å benytte viserregning da dette gir enklest uttrykk. Kan sette opp uttrykket for effekt i R_{eq} :

$$S_{eq} = \frac{|V_s|^2}{Z_{eq}} = \frac{\left(\frac{100}{\sqrt{2}} \right)^2}{Z_{eq}} = 2500 e^{j0}$$
$$\Rightarrow Z_{eq} = \frac{10000}{2 \cdot 2500 e^{j0}} = 2 e^{j0} = 2\, \Omega$$

Dette er identisk lik R, med andre ord så tror kildespenningen at den er koblet direkte til motstanden R.

3 DESIGN AV TELEFONLADER

Vi antar i denne oppgaven at transformatoren er ideell, og at likeretteren er utstyrt med et filter på likespenningssiden slik at v_o blir konstant. Anta også at inngangsspenningen til likeretteren, v_i , er rent sinusformet. Samlet motstand i ledning og transformator er modellert ved hjelp av *R.*

Bruk følgende data:

$$V_s = 240\,V\ (rms)$$
$$R = 1000\,\Omega$$
$$\frac{V_o}{V_i} = 0.9$$
$$f = 50\,Hz$$

Relasjonen $\frac{V_o}{V_i} = 0.9$ er den samme som funnet i oppgave 1 for en fullbro diodelikeretter.

a) Når batteriet når 5 volt er det fulladet, og dermed skal $i_o = 0$. Finn verdien til transformatorens omsetningsforhold $N_1 : N_2$ som oppfyller dette kriteriet.

Svar: Siden det ikke går strøm i batteriet, vil det ikke gå strøm noe sted i kretsen ($i_s = 0$) Vi kan dermed sette opp relasjonen mellom V_s og V_o uten særlig regning:

$$V_i = V_s \cdot \frac{N_2}{N_1}$$
$$V_o = 0.9V_i = 0.9V_s \frac{N_2}{N_1}$$
$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{V_o}{0.9V_s} = \frac{5}{0.9 \cdot 240} = 0.0231$$

Dvs. spenningen må skaleres ned med en faktor lik 1/0.0231 = 43.2

b) Eieren av telefonen skrudde på både Bluetooth og GPS ved en feiltagelse, og batterinivået ble kritisk lavt i løpet av en halvtime. Batterispenningen har sunket til 4.5 volt i det laderen kobles til. Hvor stor blir ladestrømmen i_o ?

Svar: Ønsker å løse oppgaven gjennom først å finne i_s. Siden batterispenningen er 4.5 volt, blir inngangsspenningen til likeretteren lik $V_i = \frac{V_o}{0.9} = \frac{4.5}{0.9} = 5\,V$ Spenningen på primærsiden av transformatoren blir da: $V_1 = V_i \cdot \frac{N_1}{N_2} = \frac{5}{0.0231} = 216.45\,V$

Siden det bare er en motstand mellom v_s og v_1 så vet vi at de er i fase, og vi kan finne strømmen som

$$I_s = \frac{240 - 216.45}{1000} = 23.55\,mA$$

Siden vi ser bort fra tap i transformator og likeretter så blir effekten som går inn på transformatoren lik effekten inn på batteriet:

$$V_1 I_s = V_o I_o$$
$$216.45 \cdot 0.02355 = 4.5 I_o$$
$$I_o = 1.13\ A$$

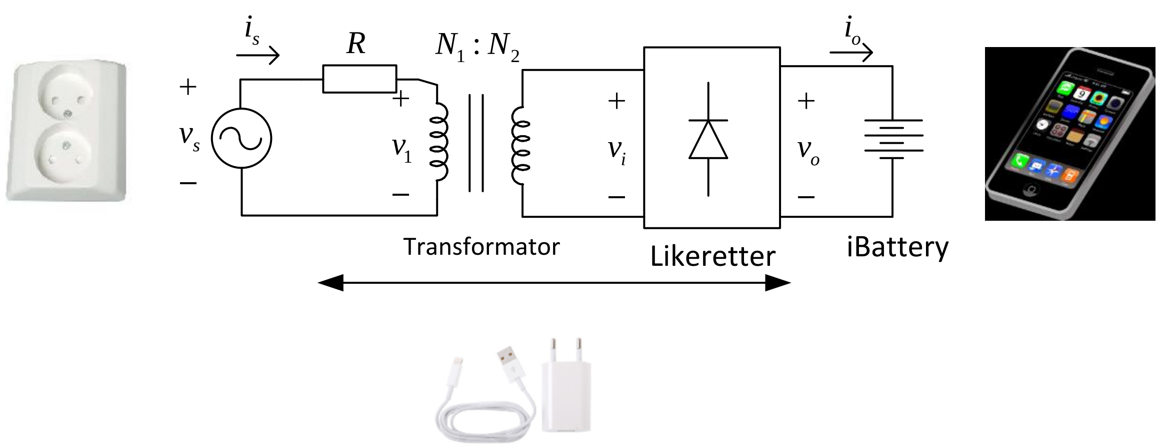
Dette er typisk strøm til et telefonbatteri under lading.

c) Hvor store blir tapene i motstanden *R*, og hvor store er disse i prosent av levert effekt til batteriet?

Svar:

Tapene blir: $P_{loss} = RI_s^2 = 1000 \cdot 0.02355^2 = 0.55\,W$, mens levert effekt til batteriet er $P_{batt} = 4.5 \cdot 1.13 = 5.09\,W$. Dermed blir tapene i prosent:

$$P_{loss,\%} = \frac{0.55}{5.09} \cdot 100\,\% = 10.8\,\%$$



Figur 2: Forenklet skisse av batteriladeren til en Iphone