TTK 4240 – Løsningsforslag 6

Utlervert dato: 23.09.2015
Veiledningstime: 02.10.2015
Innleveringsfrist: 06.10.2015
Ansvarlig: Atle Rygg (atle.rygg@itk.ntnu.no)

1 Oppgave 1 – Sprangrespons til RC-krets

Bruk følgende tallverdier:

$$R = 10\ \mathrm{k}\Omega$$
$$C = 100\ \mu F$$
$$v_s = 15\ V$$

Anta først at kondensatoren er energiløs før $t = 0$

a) Finn spenningen $v_c(t)$ ved hjelp av Laplacetransformasjon. Hva er tidskonstanten til kretsen?

Svar:

Vi kan enten sette opp kretsligningen direkte med laplaceoperatoren *s*, eller vi kan sette opp differensialligningen først, og deretter Laplacetransformere. Merk at vi påfører en sprangspenning, dermed blir den laplacetransformerte til kildespenningen lik:

$$V_s(s) = \mathcal{L}\{v_s(t)\} = \frac{v_s}{s}$$

Metode 1: Via diff.ligningen:

$$v_s = R \cdot i_s + v_c$$
$$i_s = C\frac{dv_c}{dt}$$
$$\Rightarrow v_s = R \cdot C\frac{dv_c}{dt} + v_c$$
$$V_s(s) = \frac{v_s}{s} = sRC \cdot V_c(s) + V_c(s)$$
$$V_c(s) = \frac{v_s}{s}\frac{1}{(sRC+1)}$$

Metode 2: Kretsregning med Laplace-operatoren (enkleste måte)

$$V_c(s) = \frac{v_s}{s} \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{v_s}{s}\frac{1}{sRC+1}$$

Her har vi brukt spenningsdeling.

Før vi kan ta invers Laplacetransformasjon må vi bruke delbrøksoppspaltning:

$$\frac{v_s}{s}\frac{1}{sRC+1} = \frac{A}{s} + \frac{B}{sRC+1}$$
$$\Rightarrow A \cdot RC + B = 0, A = v_s$$
$$B = -v_s \cdot RC$$

Kan dermed skrive opp tidsfunksjonen direkte:

$$v_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{v_s}{s} - \frac{v_s RC}{sRC+1}\right\} = v_s - v_s e^{-\frac{t}{RC}} = 15 - 15e^{-t}$$

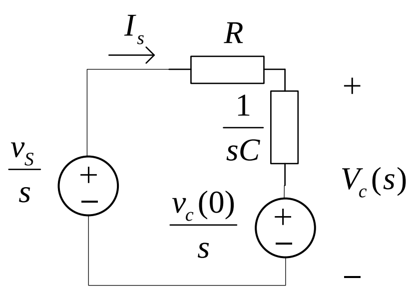
Tidskonstanten er lik $\tau = RC = 1\,s$

Anta nå at kondensatoren er ladet opp til $v_c(0) = 5\text{ V}$ i det bryteren lukkes.

b) Finn spenningen $v_c(t)$ nå ved hjelp av Laplacetransformasjon.

Svar: Vi må nå benytte oss av initialbetingelsen. Som forklart i Nilson&Riedel kap. 13.1 kan en kondensator modelleres i s-domenet på følgende måte:

$V_c(s) = \frac{I}{sC} + \frac{v_c(0)}{s}$, som gir oss følgende ekvivalente krets i s-domenet:



Kan dermed sette opp følgende ligning for strømmen:

$$I_s(s) = \frac{\frac{v_s}{s} - \frac{v_c(0)}{s}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s}\frac{sC\left(v_s - v_c(0)\right)}{sRC+1}$$

Dette kan så brukes til å finne et uttrykk for spenningen $V_c(s)$:

$$V_c(s) = \frac{I_s(s)}{sC} + \frac{v_c(0)}{s} = \frac{1}{s}\frac{\left(v_s - v_c(0)\right)}{sRC+1} + \frac{v_c(0)}{s}$$

Første ledd har identisk tidsfunksjon som i oppgave a) hvis vi bytter ut v_s med $v_s - v_c(0)$. Total løsning blir dermed:

$$v_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{\left(v_s - v_c(0)\right)}{sRC+1} + \frac{v_c(0)}{s}\right\} = \left(v_s - v_c(0)\right) - \left(v_s - v_c(0)\right)e^{-\frac{t}{RC}} + v_c(0)$$

$$= v_s - \left(v_s - v_c(0)\right)e^{-\frac{t}{RC}} = 15 - 10e^{-t}$$

Merk at vi også kunne kommet frem til svaret ved å først sette opp differensialligningen, og deretter transformere den til s-domenet inkludert initialbetingelsen.

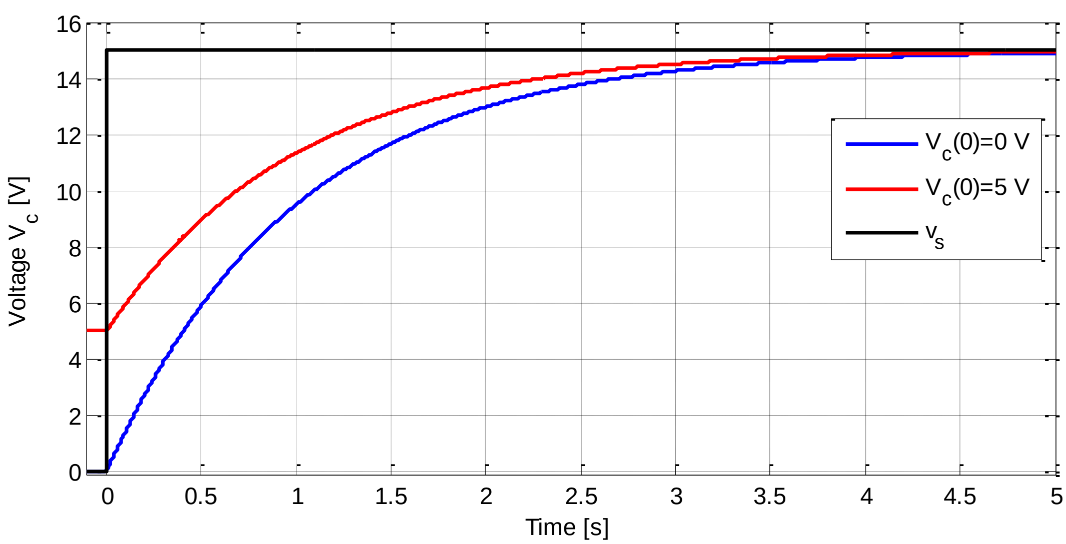
c) Skisser begge forløpene i samme graf.

Dette er gjort med følgende Matlab-script

```
clear all;

t=-1:0.001:5;
Vs=15*ones(1,length(t));
Vs(1)=0;
y1=15-15.*exp(-t);
y2=15-10.*exp(-t);
figure(1);
cla;
hold on;
plot(t,y1,'b','LineWidth',2);
plot(t,y2,'r','LineWidth',2);
plot(t,Vs,'k','LineWidth',2);
xlabel('Time [s]');
ylabel('Voltage V_c [V]');
legend('V_c(0)=0 V','V_c(0)=5 V','v_s');
xlim([-0.1 5])
ylim([-0.1 16]);
```

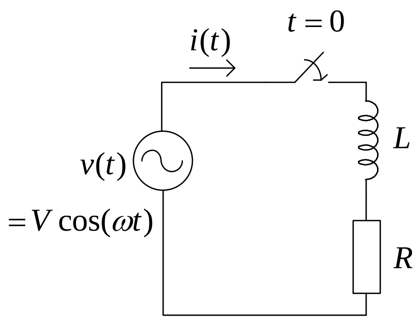
Resultatet ser fornuftig ut. I begge tilfeller går kondensatorspenningen mot kildespenningen med en tidskonstant lik 1 sekund. Eneste forskjellen er initialbetingelsen.



OPPGAVE 2 – EKVIVALENT MELLOM VISERREGNING, LAPLACETRANSFORMASJON OG TRANSFERFUNKSJON

For å understreke sammenhengen mellom de tre metodene i oppgavetittelen skal vi regne på en enkel krets og komme frem til samme svar.

Betrakt følgende krets og tallverdier:



$V = 10\,V$
$R = 1\,\Omega$
$L = 5\,mH$
$\omega = 2\pi \cdot 50\ rad/s$

a) **Viserberegning:** Vi er nå ute etter den stasjonære oppførselen til kretsen, dvs. strømmer og spenninger etter at transienten som følge av bryteren har dødd ut. Denne finner vi enklest ved viserregning. Hva blir $v_s(t)$ på viserform (dvs. finn V_s)? Finn deretter strømmen på viserform, dvs. finn I_s. Basert på denne, finn så $i(t)|_{stasjonær}$. Til slutt: finn den totale impedansen til lasten.

Svar:

Spenningen på viserform (antar at spenningen har vinkel 0) blir $V_s = 10e^{j0} = 10$

Finner først total impedans
$Z = R + j\omega L$

Finner så strømmen I på viserform:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{R + j\omega L}$$

Setter så inn tallsvar:

$$I = \frac{10}{1 + j2\pi \cdot 50 \cdot 5e^{-3}} = \frac{10}{1.8621e^{j57.51^o}} = 5.3703e^{-j57.51^o}$$

Tidsfunksjonen til $i(t)$ fåes direkte ved å benytte definisjonen på en viser:

$$I = Ae^{j\theta} \Rightarrow i(t) = A\cos\left(\omega t + \theta\right)$$

$$i(t) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L\right)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right) = 5.3703\cos\left(\omega t - 57.51^o\right)$$

b) **Differensialligning:** Sett opp differensialligningen for kretsen

Setter opp differensialligningen direkte ved hjelp av Kirchoffs spenningslov:

$$v(t) = R \cdot i(t) + L\frac{di}{dt}$$

c) **Laplacetransformasjon:** Vis at den Laplacetransformerte av strømmen $i(t)$ blir lik

$$I(s) = \frac{V \cdot s}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{R + sL}$$

Tar den Laplacetrasformerte, og benytter oss av initialbetingelsen $i(0^+) = 0$:

$$V(s) = R \cdot I(s) + L \cdot \left(sI(s) - i(0)\right) = R \cdot I(s) + sL \cdot I(s)$$

Benytter så den Laplacetransformerte av en cosinusfunksjon:

$$V(s) = \mathcal{L}\left\{V\cos\left(\omega t\right)\right\} = V\frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Setter inn i uttrykket ovenfor, og løser for strømmen:

$$V\frac{s}{s^2 + \omega^2} = R \cdot I(s) + sL \cdot I(s)$$

$$I(s) = \frac{V \cdot s}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{R + sL}$$

d) **Invers Laplacetransformasjon:** finn $i_s(t)$.

Oppgaveteksten oppgir delbrøksoppspaltningen, men vi viser nedenfor hvordan disse verdiene ble funnet:

Vi setter opp følgende likhet:

$$\frac{V \cdot s}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{R + sL} = \frac{As + B}{s^2 + \omega^2} + \frac{C}{R + sL}$$

Finner først C gjennom å multiplisere på begge sider med $R + sL$ og sette inn $s = -R/L$:

$$\frac{V \cdot s}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{R + sL} = \frac{As + B}{s^2 + \omega^2} + \frac{C}{R + sL}$$

$$C = \frac{V \cdot \left(-\frac{R}{L}\right)}{\left(-\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} = -\frac{V \cdot R \cdot L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

Setter så høyre side på fellesnevner:

$$\frac{V\cdot s}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{R+sL}=\frac{(As+B)(R+sL)+C\left(s^2+\omega^2\right)}{\left(s^2+\omega^2\right)(R+sL)}$$

Dette gir følgende tre ligninger:

$$\frac{V\cdot s}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{R+sL}=\frac{(As+B)(R+sL)+C\left(s^2+\omega^2\right)}{\left(s^2+\omega^2\right)(R+sL)}$$

$$ALs^2+Cs^2=0\Rightarrow A=-\frac{C}{L}$$

$$BR+C\omega^2=0\Rightarrow B=-\frac{C\omega^2}{R}$$

Setter så inn for C som allerede er funnet:

$$A=\frac{V\cdot R}{R^2+(\omega L)^2},B=\frac{V\cdot L\cdot\omega^2}{R^2+(\omega L)^2},C=-\frac{V\cdot R\cdot L}{R^2+(\omega L)^2}$$

Vi kan nå finne den invers Laplacetransformerte:

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As+B}{s^2+\omega^2}+\frac{C}{R+sL}\right\}=A\cos(\omega t)+\frac{B}{\omega}\sin(\omega t)+\frac{C}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$$

Innsatt uttrykkene for A, B, C:

$$i(t)=\frac{V\cdot R}{R^2+(\omega L)^2}\cos(\omega t)+\frac{V\cdot\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\sin(\omega t)-\frac{V\cdot R}{R^2+(\omega L)^2}e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i(t)=\frac{V}{R^2+(\omega L)^2}\left(R\cos(\omega t)+\omega L\sin(\omega t)-Re^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$i(t)=\frac{V}{R^2+(\omega L)^2}\left(\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\cos(\omega t+\phi)-Re^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$i(t)=\frac{V}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cos(\omega t+\phi)-\frac{VR}{R^2+(\omega L)^2}e^{-\frac{R}{L}t}$$

Hvor $\phi=\arctan\left(\frac{-\omega L}{R}\right)$

Innsatt tallverdier:

$$i(t)=5.3703\cos\left(\omega t-57.51^o\right)-2.884e^{-200t}$$

e) **Stasjonær del:** Fra løsningen til oppgave d), identifiser den stasjonære delen av uttrykket, og sammenlign dette med $i(t)$ fra oppgave a).

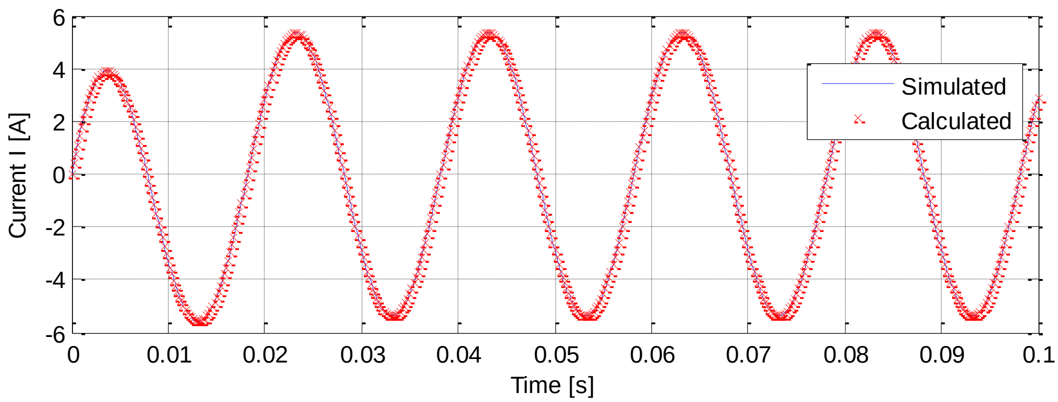
Svar:

Den stasjonære delen av uttrykket er det første leddet, dvs:

$$i(t)\,|_{stasjonær} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t + \phi) = 5.3703 \cos(\omega t - 57.51^o)$$

Dette er identisk med svaret fra a), og understreker et viktig poeng: Hvis vi er ute etter den stasjonære responsen til en vekselsstrømkrets er det overkill å benytte seg av Laplacetransformasjon eller andre differensialligningsteknikker siden det gir veldig mye regnearbeid. Viserregning finner det samme svaret på langt kortere tid. Hvis vi derimot er ute etter transiente forløp er derimot Laplacetransformasjon et veldig nyttig hjelpemiddel.

Tidsforløpene er vist i følgende figur, hvor de er beregnet både basert på formelen og på en SIMULINK-simulering. Vi ser at det transiente leddet dør ut etter ca. 0.01 sekund, som er ca. lik to ganger tidskonstanten $\tau = \frac{L}{R}$



f) **Transferfunksjon og impedans:** Finn transferfunksjonen mellom strøm og spenning i kretsen, dvs. $H(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$. Finn så $H(j\omega)$ (sett inn $s = j\omega$), og sammenlign med den totale impedansen til kretsen fra oppgave a).

Etter å ha Laplacetransformert differensialligningen har vi følgende uttrykk:

$$V(s) = R \cdot I(s) + sL \cdot I(s)$$

Dette gir transferfunksjonen direkte:

$$H(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = R + sL$$

$$H(j\omega) = R + j\omega L$$

Vi ser fra det siste uttrykket at $H(j\omega) = Z$, hvor Z er den totale impedansen til kretsen. Dette understreker også et viktig poeng: En transferfunksjon fra strøm til spenning er ekvivalent med en impedans.

OPPGAVE 3 – TRANSFERFUNKSJON TIL RLC-KRETS

Bruk følgende tallverdier:

$$R = \frac{1}{6}\,\Omega$$
$$L = \frac{1}{8}\,H$$
$$C = 1\,F$$

(**NB:** Verdiene for induktans og kapasitans er mye høyere enn hva som er vanlig, men brukes for at vi skal få enklere uttrykk å arbeide med)

a) Finn transferfunksjonen $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$. Finn eventuelle polenr og nullpunkt til $H(s)$

Svar:

Definerer først impedansen gitt av parallelkoblingen

$$Z_L = \frac{R_L \frac{1}{sC_L}}{R_L + \frac{1}{sC_L}} = \frac{R_L}{sR_L C_L + 1}$$

Bruker så spenningsdeling:

$$V_o = V_i \cdot \frac{Z_L}{sL_1 + Z_L} = V_i \cdot \frac{\frac{R_L}{sR_L C_L + 1}}{sL_1 + \frac{R_L}{sR_L C_L + 1}} = V_i \cdot \frac{R_L}{sL_1\left(sR_L C_L + 1\right) + R_L}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_L}{s^2 L_1 R_L C_L + sL_1 + R_L}$$

Setter inn tallverdier:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{6}}{s^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \cdot 1 + s \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{6}} = \frac{8}{s^2 + 6s + 8} = \frac{8}{(s+2)(s+4)}$$

Vi ser at transferfunksjonen har **to poler** (hvor nevner er lik null), og **ingen nullpunkt** (hvor teller er lik null).

Polene er gitt av $\begin{matrix} s = -2 \\ s = -4 \end{matrix}$,

Kretsen er stabil siden begge poler ligger i «venstre halvplan», dvs. har negativ realdel