TTK 4240 – Løsningsforslag 3

Ansvarlig: Atle Rygg (atle.rygg.ardal@itk.ntnu.no)

OPPGAVE 1 – GJENSIDIG INDUKTANS OG TRANSFORMATOR

Se kretsen i Figur 1. En DC-spenningskilde (likespenning) kobles ved *t=0* til en av de to magnetisk koblede spolene i kretsen. Hele kretsen er energiløs før t=0, dvs. $i_1 = i_2 = 0, t < 0$. Kretsen til høyre har åpne terminaler, dvs. $i_2 = 0$, gjennom hele forløpet.

Anta følgende verdier:

$$V_S = 12 \text{ V}$$
$$L_1 = 0.1 \text{ H}$$
$$L_2 = 10 \text{ H}$$
$$M = 1 \text{ H}$$

NB: I denne oppgaven regner vi ikke med visere siden vi påtrykker likespenning og ikke vekselspenning. I tillegg er det transiente forløp som vi er ute etter, og ikke stasjonære forløp med sinus påtrykk.

a) Sett opp differensialligningene som beskriver kretsen(e). Vær nøyaktig med fortegn!

Svar:

Setter opp Kirchoffs spenningslov for sløyfe 1:

$$V_s = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

Fortegnet til leddet med *M* blir positivt siden i_2 går «inn på prikk», og vi går KVL i sløyfe 1 i en retning som også er «inn på prikk» (positiv spenning «på prikken»).

Gjør det samme for sløyfe 2

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

Fortegnet til *M* blir positivt siden i_1 går «inn på prikk», og vi går KVL i sløyfe 2 i en retning som også er «inn på prikk» (positiv spenning «på prikken»).

Siden $i_2 = 0 \Rightarrow \frac{di_2}{dt} = 0$, og vi reduserer ligningene til:

$$V_s = L_1 \frac{di_1}{dt}$$
$$v_2 = M \frac{di_1}{dt}$$

b) Finn $i_1(t)$ *og* $v_2(t)$

Svar:

Integrerer første ligning ovenfor for å finne $i_1(t)$:

$$V_s = L_1 \frac{di_1}{dt} \Rightarrow i_1(t) = \frac{1}{L_1}\int_0^t V_s dt + i_1(0) = \frac{V_s}{L_1}\int_0^t dt + 0 = \frac{V_s t}{L_1} = 120t$$, dvs. en rampe som starter i origo

For å finne v_2 kan vi kombinere begge differensialligningene:

$$V_s = L_1 \frac{di_1}{dt}$$
$$v_2 = M \frac{di_1}{dt}$$
$$\Rightarrow \frac{V_s}{L_1} = \frac{v_2}{M} \Rightarrow v_2(t) = V_s \frac{M}{L_1} = \frac{12}{0.1} = 120 \text{ V}$$

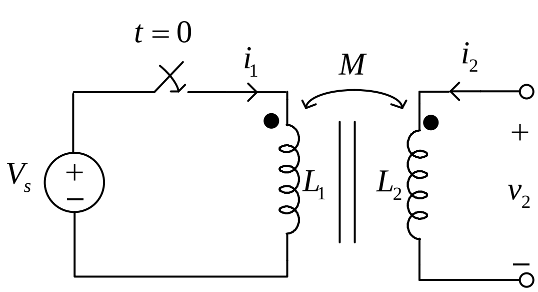
Med andre ord blir v_2 også konstant.

c) De to spolene kan også sees på som en transformator. Hva blir omsetningsforholdet N_1:N_2? Er dette en ideell eller en ikke-ideell transformator?

Svar:

Fra løsningen til b) ser vi at spenningen v_2 alltid er $\frac{M}{L_1} = 10$ ganger større enn v_1, dermed blir $\frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{10}$.

Hvis spenningskilden hadde vært koblet til spole 2 så ville vi fått en faktor $\frac{M}{L_2} = 10 = \frac{N_2}{N_1}$, som er konsistent. Merk at i vårt tilfelle så er $M = L_1 L_2$, dvs. koblingskoeffesienten *k=1*, og vi har en ideell magnetisk kobling. Hvis $k < 1$ har vi såkalt lekkinduktans mellom spolene (*leakage induktans)* i transformatoren, og den ville da ikke vært ideell.



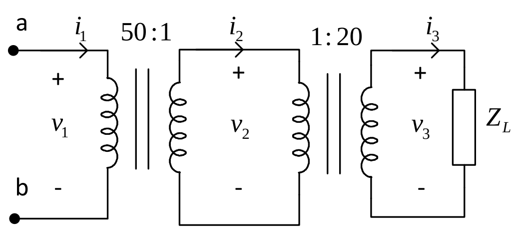
Figur 1: Krets for oppgave 1

OPPGAVE 2 – TILSYNELATENDE IMPEDANS GJENNOM TRANSFORMATOR

Ofte i kretsberegninger er det interessant å finne ekvivalent impedans sett fra et gitt punkt i kretsen. Dette minner om Thevenin- og Nortonekvivalenter, bortsett fra at vi antar det er ingen strøm-eller spenningskilder i ekvivalenten.

En last Z_L er koblet til en forsyning *(a-b)* gjennom to transformatorer som vist i Figur 2. Anta at $Z_L = 200\angle -45^o\ \Omega$

a) Finn ekvivalent impedans sett fra terminalene a-b. Dvs.: Finn den impedansen Z_{ab} som er slik at de to kretsene i Figur 2 alltid vil ha identisk respons.



Figur 2: Figur for oppgave 2

Svar: Impedansen kan vi finne ved å sette opp uttrykk for strøm og spenninger, se Figur 2:

Vi har at $Z_{ab} = \dfrac{v_1}{i_1}$

Starter med transformatoren til høyre:

$$Z_L = \frac{v_3}{i_3}, \frac{v_2}{v_3} = \frac{1}{20}, \frac{i_2}{i_3} = \frac{20}{1}$$

$$\Rightarrow Z_L = \frac{20v_2}{\frac{1}{20}i_2} = 20^2 \frac{v_2}{i_2}$$

Tar så transformatoren til venstre:

$$Z_L = 20^2 \frac{v_2}{i_2}, \frac{v_1}{v_2} = \frac{50}{1}, \frac{i_1}{i_2} = \frac{1}{50}$$

$$\Rightarrow Z_L = 20^2 \cdot \frac{\frac{v_1}{50}}{50 i_1} = 20^2 \frac{1}{50^2} \frac{v_1}{i_1} = 20^2 \frac{1}{50^2} Z_{ab}$$

$$Z_{ab} = \frac{50^2}{20^2} Z_L = 1250\angle -45^o\ \Omega$$

Alternativt: Det går an å benytte direkte at i en idell transformator vil tilsynelatende impedans være proporsjonal med omsetningsforholdet kvadrert: $Z_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \cdot Z_2$, hvor Z_1 er den tilsynelatende ekvivalenten til Z_2 sett fra terminalene på side 1.

Ved å benytte denne relasjonen to ganger siden vi har to transformatorer, får vi følgende uttrykk for Z_{ab}:

$$Z_{ab} = \left(\frac{50}{1}\right)^2 \left(\frac{1}{20}\right)^2 Z_L = \frac{25}{4} Z_L = 1250\angle -45^o\ \Omega$$

OPPGAVE 3: FORSYNING AV EFFEKT VIA TRANSFORMATOR

Oppgaven omhandler kretsen vist i **Error! Reference source not found.**. En last R_0 skal forsynes med effekt fra en kilde V_s via en ideell transformator. R_0 kan f.eks. representere en motor eller en husholdning. Det er ønskelig at effekten som blir omsatt i R_0 er lik P_0.

Oppgitte verdier:

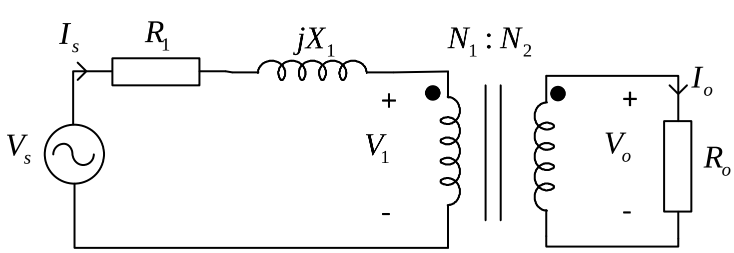
$$R_1 = 10\ \Omega$$
$$X_1 = 50\ \Omega$$
$$R_0 = 10\ \Omega$$
$$N_1 : N_2 = \frac{N_1}{N_2} = 10$$
$$P_0 = 10\ \text{W}$$

NB: Det er ikke gitt noen vinkler i denne oppgaven. Vi er nødt til å velge en vinkel (referansevinkel) for å få til å løse kretsligningene. Det er mest hensiktsmessig for oss å spesifisere at V_o har vinkel 0. Det går også an å anta at V_s har vinkel 0, men dette gjør regnearbeidet noe mer komplisert.

a) Finn verdien til Vs som gjør at omsatt effekt i R_0 er lik P_0.

Svar:

I denne oppgaven er det lurest å regne seg fra høyre mot venstre. Dvs. vi starter med å finne strøm og spenning gjennom R_0. Definer strømmer og spenninger som vist i Figur 3.



Figur 3: Krets for oppgave 3 (LF)

$$P_o = \frac{|V_o|^2}{R_o} \Rightarrow V_o = \sqrt{P_o R_o} = \sqrt{10 \cdot 10} = 10\angle 0 \text{ V}$$

$$I_o = \frac{V_o}{R_o} = \frac{10\angle 0}{10} = 1 \text{ A}$$

Kan nå finne I_s og V_1 siden de er på andre siden av en ideell transformator:

$$I_s N_1 = I_o N_2 \Rightarrow I_s = \frac{I_o N_2}{N_1} = \frac{1 \cdot 1\angle 0}{10} = 0.1\angle 0 \text{ A}$$

$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2} \Rightarrow V_1 = \frac{N_1}{N_2} V_2 = 10 \cdot 10\angle 0 = 100\angle 0 \text{ V}$$

Finner så V_s:

$$V_s = V_1 + I_s \left(R_1 + jX_1 \right) = 100 + 0.1e^{j0} \left(10 + j50 \right) = 100 + 1 + j5 = 101 + j5 = 101.1\angle 2.83 \text{ V}$$

b) *Hvor stor er tilsynelatende effekt forsynt fra kilden? Hvor store er de aktive tapene i kretsen?*

Svar:

Tilsynelatende effekt fra kilden blir:

$$S_s = P_s + jQ_s = V_s I_s^* = 101.1e^{j2.83} \cdot \left(0.1e^{j0} \right)^* = 10.11e^{j2.83} = 10.1 + j0.5 \text{ VA}$$

De aktive tapene i kretsen er effekten omsatt i R_1 («unyttig effekt»).

Disse blir:

$$P_{loss} = R_1 I_s^2 = 10 \cdot 0.1^2 = 0.1 \text{ W}$$

Alternativt kunne vi funnet disse som differansen mellom kilde – og lasteffekt:

$$P_{loss} = P_s - P_o = 10.1 - 10 = 0.1 \text{ W}$$

Merk at det samme gjelder for reaktiv effekt (dette ble ikke spurt om i oppgaven):

$$Q_s - Q_o = Q_s = X_1 I_s^2 = 50 \cdot 0.1^2 = 0.5 \text{ VAr}$$

OPPGAVE 4– KRAFTOVERFØRING OG REAKTIV KOMPENSERING

***NB:** Denne oppgaven inneholder en god del regning med komplekse tall. Det er tillatt å benytte MATLAB eller avanserte kalkulatorer til dette for å spare tid/frustrasjon. Ang. regning med komplekse tall på Citizen-kalkulatoren, se notat på It's Learning.*

Oppgaven omhandler kretsen i Figur 4. Dette er samme type krets som i øving 1, og den representerer en typisk ekvivalent for overføring av elektrisk energi fra kilde til last.

I kraftoverføring er det ønskelig med lavt spenningsfall mellom kilde og last, dvs. spenningsfallet over R_1 og L_1 i Figur 4. Dette er relatert med ønske om lave effekttap, samt krav til at spenningen i et kraftsystem må holdes innenfor gitte grenser.

I denne oppgaven skal vi holde lastspenningen V_L konstant, dvs. vi antar at «noen» regulerer kildespenningen (V_s) slik at dette blir oppnådd. (Ofte er situasjonen omvendt: kildespenningen er konstant, og lastspenningen vil variere avhengig av strømmen).

Anta $V_L = 240\angle 0^o \text{ V}$ gjennom hele oppgaven, og bruk følgende numeriske verdier for impedansene:

$$R_1 = 0.1\ \Omega$$
$$\omega L_1 = 0.8\ \Omega$$
$$R_L = 24\ \Omega$$
$$\omega L_L = 32\ \Omega$$

a) *Finn kildespenningen V_s (NB: amplitude og vinkel)*

Svar:

Starter ved å finne total lastimpedans:

$$Z_L = \frac{R_L \cdot j\omega L_L}{R_L + j\omega L_L} = \frac{j\cdot 24\cdot 32}{24 + j32} = \frac{j\cdot 24\cdot 32}{40e^{j53.13}} = 19.2e^{j36.87}\ \Omega$$

Vi kan så finne kildestrømmen:

$$I_s = \frac{V_L}{Z_L} = \frac{240e^{j0}}{19.2e^{j36.87}} = 12.5e^{-j36.87}\ \text{A}$$

Kan så finne kildespenningen:

$$V_s = V_L + \left(R_1 + j\omega L_1\right) I_s = 240e^{j0} + \left(0.1 + j0.8\right)\cdot 12.5e^{-j36.87} = 240 + 0.8062e^{j82.88}\cdot 12.5e^{-j36.87}$$
$$= 240 + 10.08e^{j46.01} = 240 + 7.0 + j7.25 = 247.0 + \text{j}7.25 = 247.1e^{j1.68}\ \text{V}$$

Alternativt kan Matlab spare oss for en del knoting:

```
%% Definerer variabler
VL=240*exp(0*j);
R1=0.1;
X1=0.8;
RL=24;
XL=32;
%% Utregninger
ZL=RL*j*XL/(RL+j*XL)
Is=VL/ZL
Vs=VL+Is*(R1+j*X1)
% Nb: For å finne amplitude og vinkel (rad) i Matlab,
% bruk funksjonene abs() og angle()
```

b) *Finn aktive tap i overføringen i Watt (dvs. effekten som går tapt i R_1)*

Svar:

$$P_{loss} = R_1 |I_s|^2 = 0.1 \cdot 12.5^2 = 15.63 \text{ W}$$

Denne formelen for tap kan utledes fra

$$V = RI, S = VI^*$$
$$P = S = (RI)I^* = R\left(II^*\right) = R|I|^2$$

I en motstand er alltid *S=P* siden omsatt effekt er kun aktiv *(Q=0)*

Anta nå at det kobles inn en kapasitans C_L i parallel med R_L og L_L. Lastspenningen er fortsatt $V_L = 240\angle 0^o$ V. Det er vanlig å plassere kondensatorer ulike steder i kraftnettet for å bidra til mindre spenningsfall, samt for å redusere tap. Kondensatorer blir typisk plassert i nærheten av større laster hvor det samtidig fins et behov for reaktiv effekt.

Anta også at frekvensen til systemet er 50 Hz, dvs. $\omega = 2\pi 50$ rad/s

c) *Finn verdien til C_L som minimerer kildestrømmen I_S. Tips: Denne kan finnes uten omfattende regning, se for øvrig «hint»-seksjonen. Hva blir aktive tap i overføringen nå?*

Svar:

Total impedans i lasten blir nå parallellkoblingen av R_L, L_L, C_L:

$$Z_L = \frac{1}{\frac{1}{R_L} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C}$$

For å minimere kildestrømmen må vi maksimere Z_L siden lastspenningen er konstant. Dette oppnår vi ved å la impedansen til C_L kansellere impedansen til L_L, slik at det tilsynelatende kun er R_L igjen i Z_L.

En annen måte å observere dette på er at med dette valget av C_L blir behovet for reaktiv effekt i lasten lik null (perfekt kompensering av L_L).

Fordelen med dette valget av C er at nå trenger kilden bare forsyne lasten med aktiv effekt, og trenger ikke bruke overføringskapasiteten til å transportere reaktiv effekt.

$$\frac{1}{j\omega L_L} + j\omega C_L = 0$$

$$C_L = -\frac{1}{j \cdot j \cdot \omega^2 L_L} = \frac{1}{\omega^2 L_L} = \frac{1}{\omega \cdot (\omega L_L)} = \frac{1}{(2\pi 50) \cdot 32} = 99.47\ \mu F \approx 100\ \mu F$$

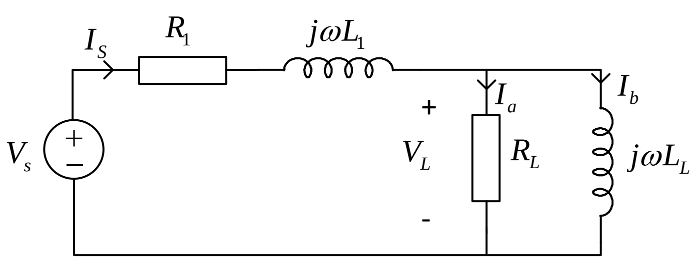
For å finne tapene må vi først finne kildestrømmen (NB: Med vårt valg av C_L blir $Z_L = R_L$):

$$I_S = \frac{V_L}{Z_L} = \frac{V_L}{R_L} = \frac{240}{24} = 10\ \text{A}$$

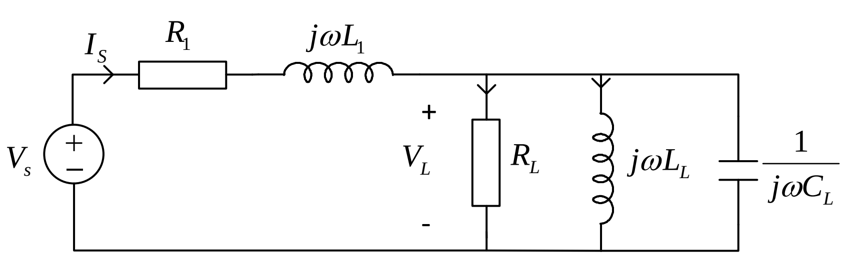
Tapene blir da $P_{loss} = R_1 |I_s|^2 = 0.1 \cdot 10^2 = 10\ \text{W}$

d) *Hvor stor prosentvis økning/reduksjon i aktive tap får vi ved å sette inn denne verdien av C_L? Kommenter.*

Svar: Tapene i overføringen blir redusert fra 15.6 W til 10 W, som gir en prosentvis <u>reduksjon</u> på 36 %. Dette kalles reaktiv kompensering, og underbygger et viktig prinsipp i kraftsystemet: Reaktiv effekt gir ikke aktive tap i seg selv, men fører indirekte til tap når den må overføres fra et punkt til et annet. Det er ofte gunstig med lav reaktiv effektflyt i kraftlinjer.



Figur 4: Krets for oppgave 4a og 4b



Figur 5: Krets for oppgave 4c