

# TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)

## Løsningsforslag for øving 8

### Oppgave 1. Dempet svingning.

**a.** Vi utleder fra Newtons 2. lov,  $\Sigma F = ma$ :

$$\begin{aligned} -b\dot{x} - kx &= m\ddot{x} \\ \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \\ \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \quad \text{altså med } \gamma = \frac{b}{2m} \text{ og } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{aligned}$$

**b.** Det kreves her bare en grov kvalitativ forklaring, uten likninger:

**Overkritisk:**  $\gamma > \omega_0$  Systemet søker likevekt uten svingninger (sum av to  $e^{-\alpha t}$ -funksjoner).

**Kritisk:**  $\gamma = \omega_0$  Systemet søker likevekt på raskest mulig måte (raskere enn overkritisk).

**Underkritisk:**  $\gamma < \omega_0$  Systemet svinger frem og tilbake med avtakende amplitude  $e^{-\gamma t}$ .

Kun underkritisk dempning gir et cos-ledd og dermed svingning, for overkritisk og kritisk dempning blir det ulike eksponentialfunksjoner. Ved kritisk dempning kan det oppstå én maksverdi (skjer når startfarten er positiv), eller én minverdi (skjer når startfarten er tilstrekkelig negativ).

**c.**

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi)$$

$$\dot{x}(t) = -\gamma A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi) - \omega_d A e^{-\gamma t} \sin(\omega_d t + \phi)$$

$$\ddot{x}(t) = \gamma^2 A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi) + \gamma \omega_d A e^{-\gamma t} \sin(\omega_d t + \phi) + \gamma \omega_d A e^{-\gamma t} \sin(\omega_d t + \phi) - \omega_d^2 A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi)$$

Innsatt i dempet svingelikning får vi:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = [\gamma^2 - \omega_d^2 + 2\gamma(-\gamma) + \omega_0^2] A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi) + [\gamma\omega_d + \gamma\omega_d + 2\gamma(-\omega_d)] A e^{-\gamma t} \sin(\omega_d t + \phi) = 0.$$

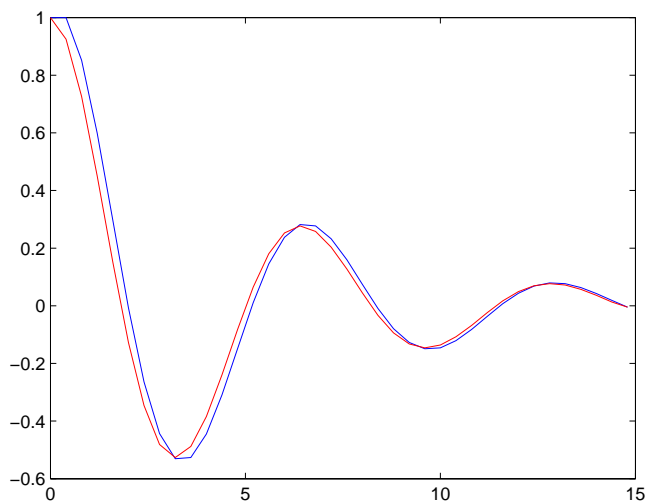
Siste hakeparantes er null. Første hakeparantes null når  $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ , som er mulig dersom  $\omega_0^2 > \gamma^2$ .

**d.** Den matematiske forklaringen på at det må oppgis to startverdier er at vi integrerer en andreordens differensiallikning, som gir to konstanter som må bestemmes/oppgis gjennom to startvilkår. Dette er som regel startamplituden  $x(0)$  og startfarten  $\dot{x}(0)$ .

Den numeriske forklaringen er at scriptet krever to verdier  $x(t_{n-1})$  og  $x(t_n)$  for å kunne kjøres, følgelig må to startverdier oppgis for å komme i gang. Den numeriske verdien  $x(1) = x(t_0)$  er startamplituden og  $x(2) = x(t_1)$  gir da implisitt starthastigheten ved  $\dot{x}(0) = (x(2) - x(1))/\Delta t$ . Det oppgitte Matlab-scriptet fungerer for  $x(2) \neq x(1)$ , men den analytiske løsningen har ikke tatt inn denne muligheten (en utfordring til spesielt interesserte).

Scriptet kjøres med ulike inputverdier  $\gamma$  og  $\omega_0$  slik alle typer dempning vises. Foreslått tidsintervall  $\Delta t = 0,1$  gir god tilpasning, som viser at Verlet-integrasjonen er veldig robust.

Til høyre resultatet for en underkritisk dempning med  $\gamma = 0,2, \omega_0 = 1,0$ . Det er brukt  $\Delta t = 0,4$ , som er svært grovt men likevel gir et fornuftig resultat (blå=numerisk, rød=analytisk):



EKSTRA: Dersom du undres på de analytiske løsninger gitt i Matlab, er disse:

$$\begin{aligned} \text{Underkritisk:} \quad x(t) &= A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi) \quad \text{med } \omega_d^2 = \omega_0^2 - \gamma^2, \quad \tan \phi = -\frac{\gamma}{\omega_d} - \frac{\dot{x}(0)}{x(0)} \cdot \frac{1}{\omega_d}, \quad A = \frac{x(0)}{\cos \phi} \\ \text{Overkritisk:} \quad x(t) &= A e^{-\gamma t} (A e^{\omega_d t} + B e^{-\omega_d t}) \quad \text{med } \omega_d^2 = \gamma^2 - \omega_0^2, \\ &A = \frac{\dot{x}(0)}{2\omega_d} + \frac{x(0)}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{\omega_d}\right), \quad B = -\frac{\dot{x}(0)}{2\omega_d} + \frac{x(0)}{2} \left(1 - \frac{\gamma}{\omega_d}\right), \\ \text{Kritisk:} \quad x(t) &= (A + tB) e^{-\gamma t} \quad \text{med } A = x(0), \quad B = \dot{x}(0) + \gamma x(0). \end{aligned}$$

I Matlabprogrammet er for enkelthets skyld antatt  $\dot{x}(0) = 0$ .

e.

i) Siden amplituden for en dempet svingning avtar eksponentielt (oppgitt løsning), kan vi uttrykke amplituden:

$$A'(t) = A e^{-\gamma t} \quad \Rightarrow \quad \ln A' = \ln A - \gamma \cdot t,$$

som med  $t = 4,0 \text{ min} = 240 \text{ s}$  gir

$$\gamma = \frac{1}{t} \ln \left( \frac{A}{A'} \right) = \frac{1}{240 \text{ s}} \ln \left( \frac{6,00^\circ}{5,40^\circ} \right) = \underline{4,4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}}.$$

ii)  $T_d = 2\pi/\omega_d$ , så vi må finne verdi for  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ . For en pendel med oppgitt  $l = 1,00 \text{ m}$  er

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} = \frac{9,81 \text{ m/s}^2}{1,0 \text{ m}} = 9,81 \text{ s}^{-2}.$$

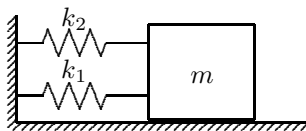
Fra i) er  $\gamma^2 = 1,9 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-2}$ , slik at  $\omega_0^2 \gg \gamma^2$ . Vi regner ikke på peanuts, så med meget god tilnærming (relativ feil under  $10^{-8}$ ) er  $\omega_d \approx \omega_0 = 3,13 \text{ s}^{-1}$ . Dette gir

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{3,13 \text{ s}^{-1}} = \underline{2,01 \text{ s}}.$$

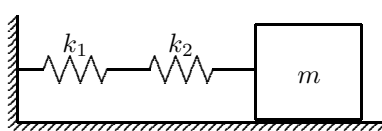
Det at  $\omega_0^2 \gg \gamma^2$  i uttrykket for  $\omega_d$  viser at dempningen i dette tilfellet er fullstendig neglisjerbar når det gjelder perioden for pendelen, den påvirker bare amplituden.

## Oppgave 2. Kopling av fjærer.

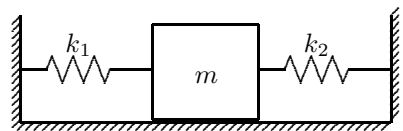
a.



b.



c.



a. Med utsving  $x$  fra likevektsstilling er krafta på massen  $m$  de to fjærkrefter  $-k_1 x$  og  $-k_2 x$ . Newton 2 gir svingelikningen:

$$-k_1 x - k_2 x = m \ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \left( \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} \right) x = 0.$$

Sammenlikning med standard SHM-likning  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  gir at svingefrekvensen  $\omega$  er gitt av

$$\omega^2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} = \omega_1^2 + \omega_2^2, \quad \text{altså} \quad \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Sammenlikning med  $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$  viser også at effektiv fjærstivhet for parallellkoplede fjærer er  $k = k_1 + k_2$ .

b. Når  $m$  forskyves  $x$  mot høyre strekkes fjærene  $x_1$  og  $x_2$ , og disse er ulike dersom  $k_1 \neq k_2$ . Krafta  $F$  på massen  $m$  forplanter seg gjennom begge fjærene med samme strekk (Newton 3 og masseløse fjærer). Dermed er  $F = -k_1 x_1 = -k_2 x_2$ , som gir  $x = x_1 + x_2 = -(1/k_1 + 1/k_2) F$ . Dermed er krafta som virker på klossen lik

$$F = -\frac{1}{1/k_1 + 1/k_2} x = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x$$

og Newton 2 gir

$$-\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x = m \ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m} x = 0.$$

Sammenlikning med  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  gir at svingefrekvensen  $\omega$  er gitt av

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{(k_1 + k_2)m}{k_1 k_2} = \frac{m}{k_2} + \frac{m}{k_1} = \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1^2 \omega_2^2}, \quad \text{altså} \quad \omega = \frac{\omega_1 \omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}.$$

Sammenlikning med  $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$  viser også at effektiv fjærstivhet for seriekoplede fjærer er  $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ .

**c.** Med utsving  $x$  fra likevektsstilling vil høyre fjær  $k_2$  presses sammen  $x$  og gi en kraft  $-k_2x$  mot venstre på massen. Venstre fjær vil strekkes  $x$  og gi en kraft  $-k_1x$  mot venstre. Kreftene er altså de samme som i **a.** og  $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ .

### **Oppgave 3. Vertikal svingning.**

**a.** Fjæra blir strekt inntil fjærkrafta  $F = k\Delta x$  oppover er lik tyngdekrafta  $mg$  nedover, som gir

$$\Delta x = \frac{mg}{k}. \quad (1)$$

**b.** Newton 2 for klossen omkring  $x = 0$  (ustrekt fjær):

$$m\ddot{x} = -kx + mg. \quad (2)$$

Her har vi valgt positiv  $x$ -retning nedover. Med ny posisjonsvariabel  $y = x - \Delta x$  får vi

$$m\ddot{y} = -k(y + \Delta x) + mg$$

som med  $k\Delta x = mg$  fra likn. (1) gir samme bevegelseslikning som for horisontal bevegelse:

$$m\ddot{y} + ky = 0.$$

Klossen vil altså svinge harmonisk med vinkelfrekvens  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  omkring likevektsposisjonen  $y = 0$  ( $x = \Delta x$ ).

**c.** I total energi må vi inkludere tyngdens potensielle energi  $E_p = -mgy$  (positiv  $y$  nedover og referanse i  $y = 0$ ). Med  $x = y + \Delta x$  lik utslaget fra fjæras nøytrale stilling, får vi

$$E = -mgy + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = -mgy + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}ky^2 + ky\Delta x + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2,$$

siden  $mg = k\Delta x$ . Siden vi ikke har noe damping i systemet, er den totale energien  $E$  bevart. (Dvs: Vi har et *konservativt* system.) Da kan vi beregne energien ved et hvilket som helst tidspunkt, for eksempel ved start  $t = 0$  der  $\dot{y} = v_0$  og  $y = y_0$

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ky_0^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2.$$

Dette er det samme som energi for en horisontal mk-pendel, med tilleggsenergien  $\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2$  pga. fjæren-  
ergien i vertikal likevektstilstand.

### **Oppgave 4. Flervalgsoppgaver**

**a.** B.  $L = I\omega$  og  $\tau = dL/dt$  gir  $\tau = F \cdot r = Id\omega/dt$  og dermed  $I = Fr/(\omega/t) = 20 \text{ N} \cdot 0,25 \text{ m}/(60 \text{ s}^{-1}/12 \text{ s}) = 1,00 \text{ kgm}^2$ .

**b.** E. De fire stavenes massesenter har lik akselerasjon når netto ytre kraft  $F$  er den samme. Kraftas angrepspunkt har ingen betydning for tyngdepunktbevegelsen:  $m\vec{a}_{\text{cm}} = \sum \vec{F} = \vec{F}$ .

**c.** B. De bryter mållinjen samtidig. Massesenter har lik akselerasjon når netto ytre kraft  $S$  er den samme. Kraftas angrepspunkt har ingen betydning for tyngdepunktbevegelsen:  $m\vec{a}_{\text{cm}} = \sum \vec{F} = \vec{S}$ . Snordraget har en arm (lik spolens radius) relativt spolens massesenter, så spolen utsettes for et ytre dreiemoment relativt massesenteret. Da gir N2 for rotasjon (spinnsatsen) at spolen får en vinkelakselerasjon, dvs. den roterer med økende vinkelhastighet. Spolen må trekkes med større snorhastighet for å kompensere for rotasjonen, men når  $S$  holdes konstant vil altså massesenteret få samme akselerasjon.

**d.** A. Langs skråplanet virker tyngdens komponent ( $mg \sin \theta$ , der  $\theta$  er helningen på skråplanet) nedover, like stor for alle tre, samt friksjonskrafta  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) fra underlaget, retta oppover. Nettokrafta  $mg \sin \theta - f_i$  bestemmer tyngdepunktets akselerasjon, som tydeligvis har vært størst for legeme 3, og like stor for 1 og 2. Ergo er  $f_3$  mindre enn  $f_1 = f_2$ .