

# TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)

## Løsningsforslag for øving 1

### Oppgave 1.

La oss betegne bevegelsesretningen som  $x$ -retningen, med  $x = 0$  som stedet der fallskjermhopperen treffer snøfonna. Med konstant akselerasjon  $a = -50g$  i  $x$ -retningen, har en for  $t > 0$  konstant-akselerasjonslikningene

$$v(t) = v_0 + at; \quad x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Eliminer  $t$  mellom disse to ligningene for å finne  $v(x)$  eller  $x(v)$ :

$$x = v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a \frac{(v - v_0)^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad 2ax = v^2 - v_0^2.$$

(Eller du kunne skrevet opp denne tidløse konst.-aksel.-likningen direkte.) Inntrengningsdybden  $x_i$  ved tida  $t_i$  er det punktet der  $v(t_i) = 0$ ,

$$x_i = \frac{v_0^2}{-2a} = \frac{40^2}{2 \cdot 50 \cdot 9,8} \text{ m} = \underline{1,6 \text{ m}}.$$

Fallet bremses ned til  $v = 0$  i løpet av tida

$$t_i = \frac{v_0 - 0}{-a} = \frac{40}{50 \cdot 9,8} \text{ s} = \underline{0,082 \text{ s}}.$$

### Oppgave 2.

a. Når akselerasjonen er en gitt funksjon av hastigheten, gir det en differensialligning for  $v(t)$ . I vårt tilfelle:

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv^2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{dv}{v^2} = k dt$$

Integrerer fra start  $(0, v_0)$  til vilkårlig tidspunkt  $(t, v)$ :

$$-\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = k \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = k(t - 0) \quad \Rightarrow \quad \underline{v(t) = \frac{v_0}{1 + kv_0 t}}.$$

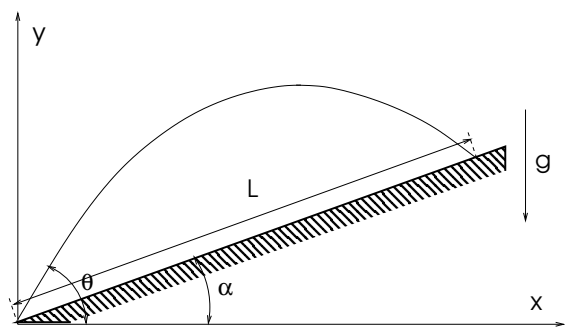
b. Hastighetens halveringstid  $T$  er derved gitt som

$$v(T) = \frac{v_0}{1 + kv_0 T} = \frac{1}{2}v_0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{kv_0} = \frac{1}{3,0 \cdot 1,50} \text{ s} = 0,22 \text{ s}.$$

Ved start er  $x = 0$  og i løpet av halveringstida har kula beveget seg strekningen  $x(T)$ . Denne bestemmes fra  $v = dx/dt$ , eller  $dx = v dt$ , som gir

$$x(T) = \int_0^T v(t) dt = \int_0^T \frac{v_0}{1 + kv_0 t'} dt' = \frac{1}{k} \ln(1 + kv_0 T) = \frac{1}{3,0 \text{ m}^{-1}} \cdot \ln 2 = \underline{0,23 \text{ m}}.$$

### Oppgave 3.



a. Situasjonen er skissert i figuren til venstre.

b. Vi velger utskytningsstedet som origo. Derved er begynnelsesbetingelsene

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 & y(0) &= 0, \\ v_x(0) &= v_0 \cos \theta & v_y(0) &= v_0 \sin \theta. \end{aligned}$$

I  $x$ -retningen er akselerasjonen lik null (når luftmotstanden neglisjeres), og derved er  $x(t) = v_0 \cos \theta \cdot t$ .

I  $y$ -retningen er akselerasjonen  $-g$ , slik at

$$y(t) = v_y(0)t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Når pila treffer bakken ved tida  $t_b$  har den beveget seg  $x(t_b)$  i  $x$ -retning og  $y(t_b)$  i  $y$ -retning. Da må ifølge figuren  $y(t_b)/x(t_b) = \tan \alpha$ . Derved kan  $t_b$  bestemmes:

$$\frac{v_0 \sin \theta \cdot t_b - \frac{1}{2}gt_b^2}{v_0 \cos \theta \cdot t_b} = \tan \alpha \quad \Rightarrow \quad \underline{t_b = \frac{2v_0}{g} \cdot (\sin \theta - \cos \theta \tan \alpha)}.$$

Rekkevidden blir da (se figuren)

$$L = \frac{x(t_b)}{\cos \alpha} = \frac{v_0 \cos \theta \cdot t_b}{\cos \alpha} = \frac{2v_0^2 \cdot (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta \tan \alpha)}{g \cos \alpha} = \frac{2v_0^2 \cdot \cos^2 \theta}{g \cdot \cos \alpha} \cdot (\tan \theta - \tan \alpha) \quad \text{Q.E.D.}$$

c. Vinkelen som gir størst rekkevidde  $L(\theta)$  finnes ved å derivere mhp.  $\theta$  og sette deriverte lik null.

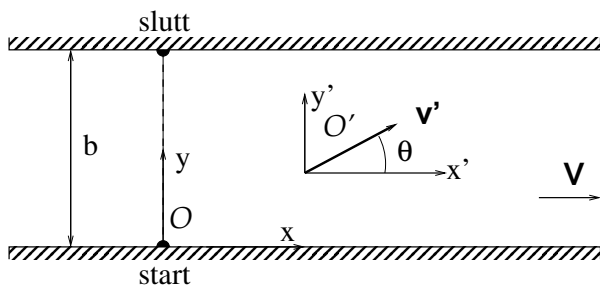
$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\theta} &= \frac{2v_0^2}{g \cos \alpha} \frac{d}{d\theta} (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta \tan \alpha) \\ &= \frac{2v_0^2}{g \cos \alpha} (-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta \tan \alpha) \\ &= \frac{2v_0^2}{g \cos \alpha} (\cos 2\theta + \sin 2\theta \tan \alpha). \end{aligned}$$

$\frac{dL}{d\theta} \equiv 0$  og løst mhp.  $\theta$  gir resultatet

$$\tan 2\theta_{\text{maks}} = -\cot \alpha = \tan(\alpha + \pi/2) \quad \Rightarrow \quad \theta_{\text{maks}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}.$$

Dette innebærer at på flat mark ( $\alpha = 0$ ), er  $\theta_{\text{maks}} = 45^\circ$ , i tråd med erfaringer.

#### Oppgave 4.



a. Legger inn et koordinatsystem med  $x$  langs elvebredden og  $y$  på tvers. I figuren til venstre er referansesystemet fast i elvebredden betegnet  $O$ , mens referansesystemet som følger elvestrømmen er betegnet  $O'$ .

Vannets hastighet  $\vec{V} = V \hat{x}$  er gitt i system  $O$ . Båtens hastighet i system  $O'$  er som oppgitt

$$\vec{v}' = v'_x \hat{x} + v'_y \hat{y} = v' \cos \theta \hat{x} + v' \sin \theta \hat{y},$$

og båtens hastighet i system  $O$  er

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} = (v'_x + V) \hat{x} + v'_y \hat{y} = (v' \cos \theta + V) \hat{x} + v' \sin \theta \hat{y},$$

Hastighetskomponentene er altså

$$\underline{v_x = v' \cos \theta + V}; \quad \underline{v_y = v' \sin \theta}.$$

b. Tida det tar å ro til den andre elvebredden er gitt av  $y$ -hastigheten:  $t_r = \frac{b}{v_y} = \frac{b}{v' \sin \theta}$ . I denne tida vil båtens forskyvning langs elvebredden være gitt av hastigheten  $v_x$ :

$$x_1 = v_x t_r = (v' \cos \theta + V) \frac{b}{v' \sin \theta}. \quad (1)$$

Tida det tar å gå tilbake til punktet rett overfor startpunktet er  $t_g = x_1/v_g$ , vi har da (fornuftig nok) antatt  $x_1 \geq 0$ , dvs. båten har drevet litt med elvestrømmen evt. treffer rett på. (Dersom  $x_1 < 0$  vil  $t_g = -x_1/v_g$ .) Til sammen blir dette

$$t(\theta) = t_r + t_g = \frac{b}{v' \sin \theta} \left[ 1 + \frac{v'}{v_g} \cos \theta + \frac{V}{v_g} \right]. \quad (2)$$

c. Vi minimerer totaltiden med hensyn på roretningen:

$$\begin{aligned} \frac{dt(\theta)}{d\theta} &= \frac{-b \cos \theta}{v' \sin^2 \theta} [\dots] + \frac{b}{v' \sin \theta} \cdot \frac{v'(-\sin \theta)}{v_g} \\ &= -\frac{b}{v' \sin^2 \theta} \cdot \left[ \left(1 + \frac{V}{v_g}\right) \cos \theta + \frac{v'}{v_g} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \right] = 0. \end{aligned}$$

Av dette følger at vinkelen som minimaliserer tida er gitt som

$$\cos \theta_{\min} = -\frac{v'/v_g}{1 + V/v_g} = -\frac{v'}{V + v_g}. \quad (3)$$

Med de oppgitte tallverdiene får en  $\cos \theta_{\min} = -3/(2+5)$  som gir  $\theta_{\min} = 115^\circ$ . Et ikke urimelig resultat!

d. Men dersom vi setter  $V = 0$ , gir uttrykket  $\cos \theta_{\min} = -v'/v_g$ . Dette kan umulig være riktig! Dersom elva stopper opp (dersom vi rett og slett skal krysse stillestående vann) må det raskeste være å ro rett over! Altså: I dette tilfellet burde  $\theta_{\min} = 90^\circ$  og  $\cos \theta_{\min} = 0$ . Men hvor resonnerte vi feil i pkt. b eller c?

Problemet ligger i forutsetningen  $x_1 > 0$ . Vi ser fra likn. (1) at dette gjelder bare dersom  $v' \cos \theta + V > 0$  (siden  $b$ ,  $v'$  og  $\sin \theta$  alle er positive). Vi forutsetter altså  $\cos \theta > -(V/v')$ . Minimumsverdien  $\cos \theta_{\min}$  i (3) er derfor bare gyldig dersom

$$-\frac{v'}{V + v_g} > -\frac{V}{v'} \quad \Rightarrow \quad v'^2 < V(V + v_g).$$

Hva skjer så dersom denne ulikheten for de oppgitte størrelsene ikke er oppfylt? For å forstå dette må vi gå tilbake til funksjonen  $t(\theta)$  og ta høyde for at dette faktisk er *to* funksjoner. Den vi allerede har funnet, (2), er korrekt dersom vi lander *nedenfor* målpunktet, slik at  $x_1 > 0$ . Denne funksjonen kaller vi heretter  $t^+(\theta)$ .

Men vi trenger også  $t^-(\theta)$ , som svarer til at båten lander *ovenfor* det endelige målet tvers over elva. Da er som nevnt ovenfor  $t_g = -x_1/v_g$  og  $t^+(\theta)$  i likn. (2) blir erstatta av

$$t^-(\theta) = t_r + t_g = \frac{b}{v' \sin \theta} - \frac{x_1}{v_g} = \frac{b}{v' \sin \theta} \left[ 1 - \frac{v'}{v_g} \cdot \cos \theta - \frac{V}{v_g} \right]. \quad (4)$$

De to funksjonene møtes der  $x_1 = 0$ , dvs. for vinkelen  $\theta_s$  gitt av  $v' \cos \theta_s + V = 0$ , altså for vinkelen

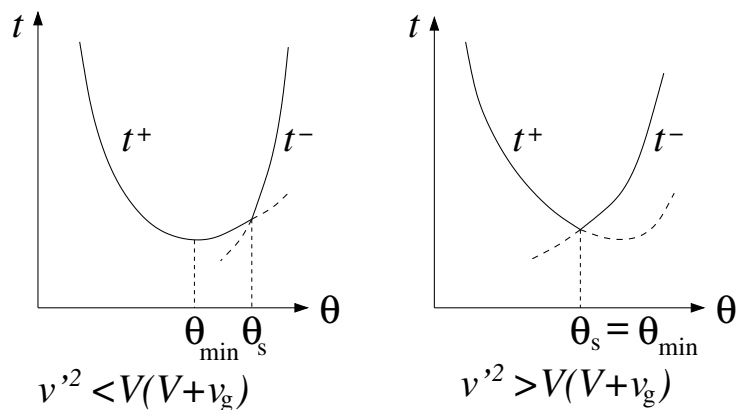
$$\cos \theta_s = -V/v'. \quad (5)$$

Skal dette ha mening, må  $V < v'$ . Dette har en åpenbar fysisk tolkning: Det er ikke mulig å havne rett over elva med en rofart som er mindre enn elvas strømningshastighet!

Figurene til høyre viser hva som skjer i de to parameterområdene.

Dersom  $x_1 > 0$  og  $v'^2 < V(V + v_g)$ , er minimumstida gitt av minimum i funksjonen  $t^+(\theta)$ , med resultatet  $\cos \theta_{\min} = -v'/(V + v_g)$  og  $\theta_{\min} < \theta_s$ . Minimum finnes på den konvensjonelle måten, ved å sette den deriverte lik null.

I parameterområdet der  $v'^2 > V(V + v_g)$  er situasjonen kvalitativt annerledes. Der gir minimering av  $t^+(\theta)$  et ufysisk resultat. Minimumtida er  $t(\theta_s)$  der  $t^+ = t^-$ . Ingen av de to funksjonene som møtes i minimumspunktet har dervivert lik null der.



Den fysiske tolkningen av dette er at i *hele* parameterområdet  $v'^2 > V(V + v_g)$  lønner det seg å ro rett over elva, direkte til målet, med vinkelen  $\theta_s$  gitt av (5) mellom roretning og elvas strømreretning.

Eksemplet viser at minimering kan være en mer sammensatt prosess enn den konvensjonelle. Det gjelder å bruke hodet, og sjekke resultatene mot sunn fornuft. Om det kan være til noen trøst: Flere årskull studenter og lærere overså fullstendig det vi her har diskutert, og tok for gitt at resultatet under pkt. c var *hele* svaret. Men den enkle sjekken vi foretok avløste umiddelbart at det ikke kunne være tilfelle.