TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)
Løsningsforslag for øving 2

Oppgave 1.

a. Vinkelhastigheten er definert som $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$. Når vinkelhastigheten innenfor en periode (i tilstrekkelig god tilnærmelse) kan regnes som konstant, er en periode gitt som en full omdreining:

$$2\pi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \int_0^T \omega \mathrm{d}t = \omega T.$$

Av dette følger relasjonen $\omega = 2\pi/T$, som skulle vises.

En alternativ smart utledning er med enheter. Idet $[\omega] = \mathrm{rad/s}$, kan vi sette opp:

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} &= \tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{omdr}} \cdot \tfrac{\mathrm{omdr}}{\mathrm{s}} &&= \tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{omdr}} \cdot \left(\tfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{omdr}}\right)^{-1} \\ \omega &= 2\pi \cdot f &&= 2\pi \cdot T^{-1} \end{aligned}$$

b. Vinkelakselerasjonen er gitt som

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega(T)}{\mathrm{d}T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\pi}{T^2} \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}. \tag{1}$$

Med de oppgitte tallene blir dette

$$\alpha = -\frac{2\pi}{(0,033)^2\,\mathrm{s}^2} \cdot \frac{1,26 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}}{365 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} = -2,305 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}^{-2} = \underline{-2,3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}^{-2}} \quad \left(= -0,0727\,\mathrm{s}^{-1}/\text{år}\right).$$

c. Med konstant (her: negativ) vinkelakselerasjon er $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$, der $\omega_0 = \omega(0) = 2\pi/T(0) = 190,4\,\mathrm{s}^{-1}$. Rotasjonen stopper (dersom α virkelig holder seg konstant!) ved tida τ:

$$\omega(\tau) = \omega_0 + \alpha\tau = 0 \tag{2}$$

som gir

$$\tau = \frac{\omega_0}{-\alpha} = \frac{190,4\,\mathrm{s}^{-1}}{2,305 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}^{-2}} = 8,26 \cdot 10^{10}\,\mathrm{s} = 2619\,\text{år}.$$

Rotasjonen vil altså opphøre i år 2012 + 2619 = 4631. Perioden T er oppgitt med kun 2 sifre, slik at vi bør oppgi svaret som <u>ca. år 4600</u>.

På den annen side: dersom det *ikke* er vinkelakselerasjonen som er konstant, men *økningen i perioden* (oppgitt som $1,26 \cdot 10^{-5}$ per år) som er konstant, vil rotasjonen *aldri* opphøre, fordi grensen $T \to \infty$ aldri nåes. Eller sett på annen måte: Likn. (1) viser at med konstant $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ vil α bli mindre og mindre når T øker, og vi vil aldri kunne få oppfylt likningen (2).

d. Vi antar som oppgitt i c at vinkelakselerasjonen er konstant, og finner (med $\Delta t = 1054 - 2012 = -958\,\text{år}$),

$$\omega(1054) = \omega_0 + \alpha\Delta t = 190,4\,\mathrm{s}^{-1} - 2,305 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}^{-2}(-958 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s}) = 260\,\mathrm{s}^{-1}$$

Derved er

$$T(1054) = \frac{2\pi}{\omega(1054)} = 0,0242\,\mathrm{s} = \underline{0,024\,\mathrm{s}}.$$

Hvis vi alternativt antar at den oppgitte økningen i perioden per år $1,26 \cdot 10^{-5}$ s per år er konstant, da blir regningen enklere:

$$T = T_0 + \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \cdot \Delta t = 0,033\,\mathrm{s} + 1,26 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{s}}{\text{år}} \cdot (-958\,\text{år}) = 0,0209\,\mathrm{s} = \underline{0,021\,\mathrm{s}}.$$

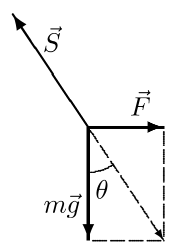
Oppgave 2.

<u>**a.**</u> Vi har statisk likevekt, og Newtons 2. lov gir at

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{S} = \vec{0}, \tag{3}$$

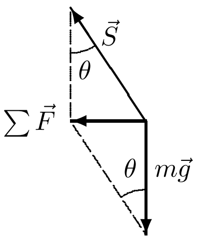
dvs. $\vec{F}$ og $m\vec{g}$ balanseres av strekket i stanga, $\vec{S}$, som peker *langs stanga*. Dermed må også resultanten av $\vec{F}$ og $m\vec{g}$ peke langs stanga, som vist på figuren. Komponentform av likn. (3):

$$S_y = S\cos\theta = mg \qquad S_x = S\sin\theta = F. \tag{4}$$



Dette gir

$$\tan\theta = \frac{F}{mg} \qquad \Rightarrow \quad \underline{F} = mg\tan\theta = 0,10 \cdot 9,8 \cdot (1/\sqrt{3})\,\mathrm{N} = \underline{0,57\,\mathrm{N}}. \tag{5}$$



b. Krafta F i figuren ovenfor skyldes nå "sentrifugalkrafta" $F_{\rm fug} = mv^2/r$, som kan settes inn for F. Men vi holder oss i et fast lab-koordinatsystem og summen av krefter er lik (sentripetal)akselererende kraft (Newtons 2. lov):

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{g} + \vec{S} \ = m\vec{a_{\rm c}}. \tag{6}$$

$\vec{a_{\rm c}}$ og $\vec{S} + m\vec{g}$ går i radiell retning som vist i figuren til venstre. Komponentform av likn(6):

$$\begin{aligned} S_x &= S\sin\theta = ma_{\rm c} && (7)\\ S_y &= S\cos\theta = mg. && (8)\end{aligned}$$

Rotasjonsradien er $r = L\sin\theta$ slik at sentripetalakselerasjonen er

$$a_{\rm c} = |\vec{a}_{\rm c}| = v^2/r = \omega^2\, r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot L\sin\theta. \tag{9}$$

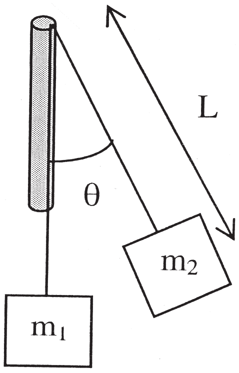
Likn. (7) dividert med likn. (8) og innsatt likn (9) gir

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a_{\rm c}}{g} = \frac{1}{g}\cdot\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot L\sin\theta. \tag{10}$$

$\sin\theta$ forkortes bort og vi får

$$\underline{T} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,50\,\mathrm{m}\cdot\cos 30^\circ}{9,81\,\mathrm{m/s^2}}} = \underline{1,32\,\mathrm{s}}. \tag{11}$$

Oppgave 3.



a. Forholdene for m_2 er som m i oppgaven ovenfor, og kunne henvist til likninger der. Men gjør her en uavhengig analyse:
Massen m_1 skal være i ro, og uten friksjon må da snordraget være $S = m_1 g$. På massen m_2 virker både vertikale og horisontale krefter. Vertikalt må snordraget utbalansere tyngden av m_2. Dette gir likningen $S\cos\theta = m_2 g$, og derved er θ gitt av

$$\underline{\cos\theta} = \frac{m_2 g}{S} = \frac{m_2 g}{m_1 g} = \underline{\frac{m_2}{m_1}}.$$

b. Horisontalt må snordraget sørge for den sentripetalkrafta som skal til for å holde m_2 i en sirkelbane med radius $r = L\sin\theta$. Dette gir

$$S\sin\theta = m_2\,\omega^2 L\sin\theta = m_2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 L\sin\theta. \tag{12}$$

Vi løser for L og setter inn $S = m_1 g$:

$$\underline{L = \frac{S}{m_2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{m_1}{m_2}\frac{gT^2}{4\pi^2}.}$$

c. Med de oppgitte tallene finner vi at

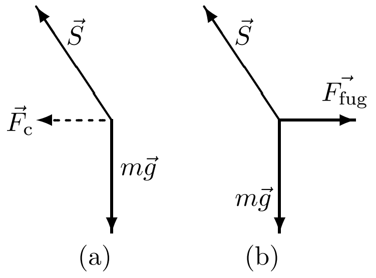
$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{m_2}{m_1} = \frac{2,0}{4,0} \quad\Rightarrow\quad \underline{\theta = 60^\circ}.\\ L &= \frac{4,0}{2,00}\cdot\frac{9,81\,\mathrm{m/s^2}\cdot(1,00\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2} = 0,497\,\mathrm{m} = \underline{0,50\,\mathrm{m}}.\end{aligned}$$

d. Hvis lengden er større enn den funne likevektslengden (med samme T og θ), skulle snordraget nødvendig for å holde m_2 i rotasjon være større ifølge (12). (Større nødvendig "sentrifugalkraft" om du vil). Men snordraget $S = m_1 g$ er uendra, og derfor ikke stort nok til å holde m_2 på plass, så m_2 trekkes nedover og L økes ytterligere. Hvis lengden er mindre enn likevektsverdien for L, blir snordraget for stort og m_2 dras nærmere toppen, L minker videre. Den dynamiske "likevekten" er altså ikke påfallende stabil. Tvertimot!

Friksjon mot øvre kant av røret[1] vil alltid virke mot bevegelsen og dermed gi ulike snordrag på hver side. I tilfellet dersom L øker vil snordraget på høyre side $S = m_1 g + F_{\rm f}$ øke og bidra til stabiliteten.

[1] Friksjon rundt en kant kalles "capstan friction" eller "belt friction" og blir fort stor. I dette tilfellet vil $F_{\rm f} \le m_1 g \cdot \exp\{\mu_{\rm s}(2\pi - \theta)\}$ der $2\pi - \theta$ er vinkelen tauet ligger an mot kanten. Se f.eks. Hauge & Støvneng, kap. 2.3.3. eller Wikipedia.

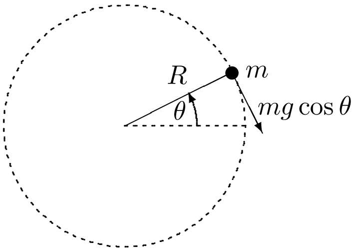
Noen tanker om sentrifugalkraft og sentripetalkraft i denne sammenhengen:



Det er nærliggende å la seg forvirre av sentripetal- kontra sentrifugalkrefter. Valget mellom de to er et valg av koordinatsystem, og vi kan bruke denne oppgaven til å illustrere dette. Vi henviste til sentripetalkrafta i resonnementet ovenfor. Det innebærer at vi resonnerte fra *det stasjonære (lab)koordinatsystem*, og illustrasjonen blir som (a) i figuren til venstre: Kreftene som virker er snordraget $\vec{S}$ og vekta $m\vec{g}$, og Newton 2 sier at summen av disse er akselererende kraft: $\vec{S} + m\vec{g} = m\vec{a}_c$, og vi kaller ofte $m\vec{a}_c = \vec{F}_{\rm c}$ = sentripetalkrafta.

Men vi kunne også valgt å legge oss i massens eget (roterende) koordinatsystem, som i (b) i figuren. Dette systemet er ikke et inertialsystem, og en ekstrakraft må innføres pga. systemets akselerasjon. Dette er sentrifugalkrafta $F_{\rm fug} = mv^2/r$ og peker radielt utover. I dette systemet er massen i ro, og vektorsummen av kreftene må være null: $\vec{S} + m\vec{g} + \vec{F}_{\rm fug} = 0$. Fysikken, og svarene, er uavhengig av hvilket koordinatasystem som velges! Valget er et spørsmål om hensiktsmessighet. Vi liker best å velge et inertialsystem der Newton 2 gjelder uten tilleggskrefter. Men i dette tilfellet ser du at det er hipp som happ hva som velges.

Oppgave 4.



a. Steinens vekt gir følgende kraftkomponent tangensielt til sirkelbuen, regnet positiv i positiv θ-retning: $-mg\cos\theta$. Akselerasjonen i tangensialretning er $a_{\rm t} = \frac{{\rm d}v}{{\rm d}t} = R\frac{{\rm d}\omega}{{\rm d}t}$. Derved får Newtons 2. lov formen

$$-mg\cos\theta = m\cdot R\frac{{\rm d}\omega}{{\rm d}t} \quad\Rightarrow\quad \underline{R\frac{{\rm d}\omega}{{\rm d}t} = -g\cos\theta},$$

som vi skulle vise.

Kjerneregelen for $\omega(\theta(t))$ gir $\qquad \dfrac{{\rm d}\omega}{{\rm d}t} = \dfrac{{\rm d}\omega}{{\rm d}\theta}\dfrac{{\rm d}\theta}{{\rm d}t} = \dfrac{{\rm d}\omega}{{\rm d}\theta}\cdot\omega.$

Derved har vi funnet følgende separable differensiallikning for $\omega(\theta)$:

$$\underline{R\,\omega\,{\rm d}\omega = -g\cos\theta\,{\rm d}\theta}.$$

b. Løsningen ved å integrere fra starttilstand $\theta = 0$; $\omega = \omega_0$ til vilkårlig tilstand θ; ω:

$$R\int_{\omega_0}^{\omega}\omega\,{\rm d}\omega = -g\int_0^{\theta}\cos\theta\,{\rm d}\theta \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}R(\omega^2-\omega_0^2) = -g\cdot\sin\theta \quad\Rightarrow\quad \underline{\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{2g}{R}\cdot\sin\theta}.$$

c. Snordraget S må, sammen med komponenten av steinens vekt radielt innover mot sirkelens sentrum, gi den sentripetalkrafta som holder steinen i sirkelbane:

$$S + mg\sin\theta = mR\omega^2 = mR\omega_0^2 - 2mg\sin\theta \quad\Rightarrow\quad \underline{S(\theta) = mR\omega_0^2 - 3mg\sin\theta}.$$

Med basal kjennskap til sinusfunksjonen kan vi slutte at $S = S_{\rm max}$ når $\sin\theta = -1$, det vil si når $\theta = \frac{3}{2}\pi \pm n\cdot 2\pi$, der n er et heltall. Dette er helt i tråd med vanlig sunn fornuft: Strekket i snora blir størst når massen er rett under sirkelens sentrum.

Sunn fornuft samt likningen for $S(\theta)$ tilsier at snordraget er minst på toppen, når $\sin\theta = 1$ og $\theta = \frac{1}{2}\pi \pm n\cdot 2\pi$. Da er $S_{\rm min} = mR\omega_0^2 - 3mg$. Kravet til strukket snor er $S_{\rm min} > 0$ som gir $\omega_0^2 > 3g/R$.

Oppgave 5.

a. Siden partikkelen følger en sirkulær bane, vil det alltid være en komponent av akselerasjonen rettet inn mot sirkelens sentrum (sentripetalakselerasjonen). Her øker dessuten hastigheten, så akselerasjonen må også ha en komponent tangentielt til sirkelbanen. Vektorsummen av normal- og tangentialkomponenten blir en total akselerasjon **a** med retning på skrå innover, som i B.

b. Legemet beveger seg med konstant positiv hastighet til å begynne med, deretter bremses det ned, før det snur og til slutt beveger seg med konstant negativ hastighet. Konstant fart betyr null akselerasjon, nedbremsing betyr negativ akselerasjon. Figur C passer bra med dette.

c. Prosjektil A er lengst tid i lufta. Vertikalbevegelsen, $z(t)$, beskrives ved $z(t) = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2$. Landingstidspunktet er gitt ved $z = 0$, dvs $t = 2v_{0z}/g$. Med andre ord, lengre tid i lufta jo større vertikalkomponent av starthastigheten v_0.

A.Mi. 8. sep. 14.