Løsningsforslag øving 4

Oppgave 1

Når $k = 50,\ m = 10,\ f = 20$, blir tilstandsromformen (fra innsetting i likning (3.8) i boka)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u$$

Og $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ blir:

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 5 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -5 & s \end{bmatrix}$$

Her vi brukt at den inverse av en 2×2 matrise

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

kan uttrykkes:

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{B})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{1}$$

der

$$\det(\boldsymbol{B}) = ad - bc \tag{2}$$

Videre har vi:

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \right\}$$

$$\phi_{12}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}_{12} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2 + 2^2} \right\}$$

Transformpar 10 i tabellen i bokens appendiks B (side 549) med $a = 1$ og $b = 2$ gir:

$$\phi_{12}(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t)$$

Oppgave 2

a) (4.78) og (1) gir følgende sett av ligninger:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= -\alpha_0 x_1 - \alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_3 + u \\
\\
y &= \rho_0 x_1 + \rho_1 x_2 + \rho_2 x_3
\end{aligned}$$

Dette gir blokkdiagrammet vist i figur 1.

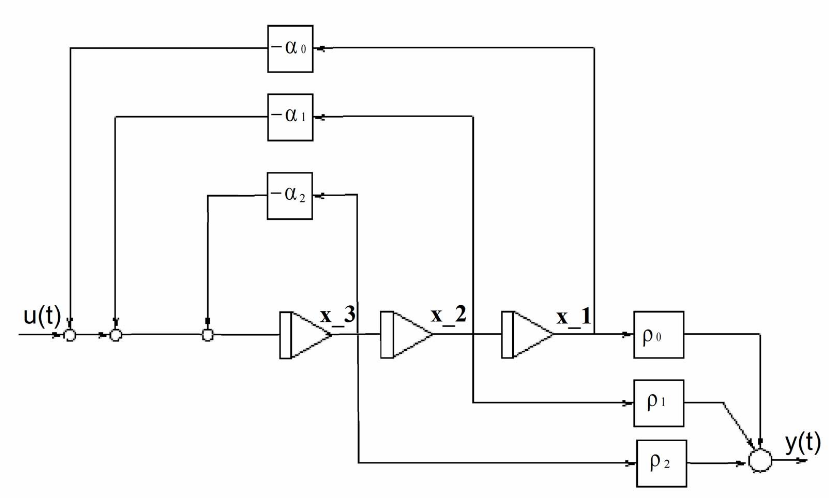

Figure 1: Elementært blokkdiagram i tidsplanet

b) Vi skal redusere blokkdigrammet i figur 1. For å komme over i s-planet bytter vi ut hver integrator med $\frac{1}{s}$. Metoden er vist i figurene 2, 3, 5 og 6.

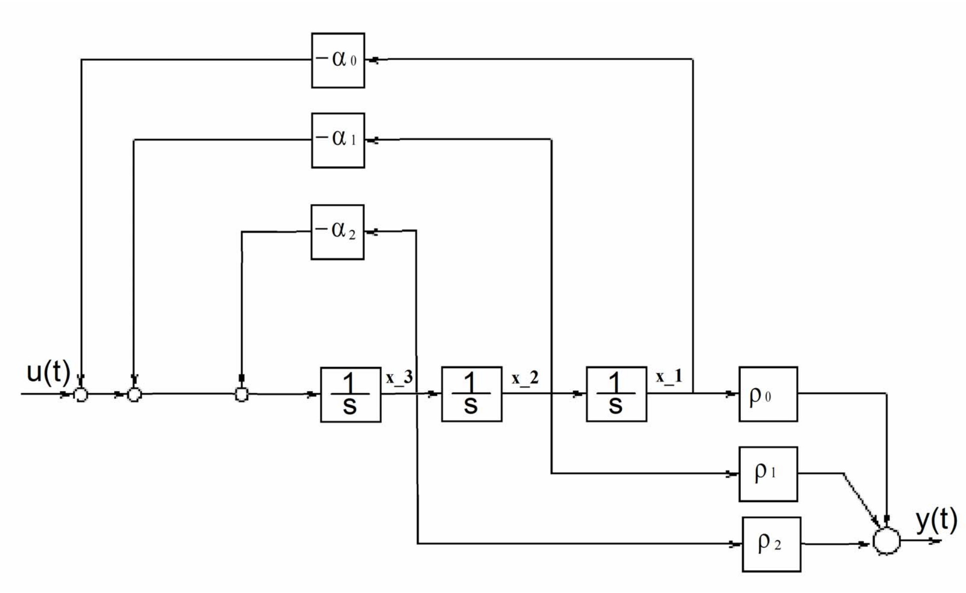

Figure 2: Overføring til Laplacetransformert elementært blokkdiagram

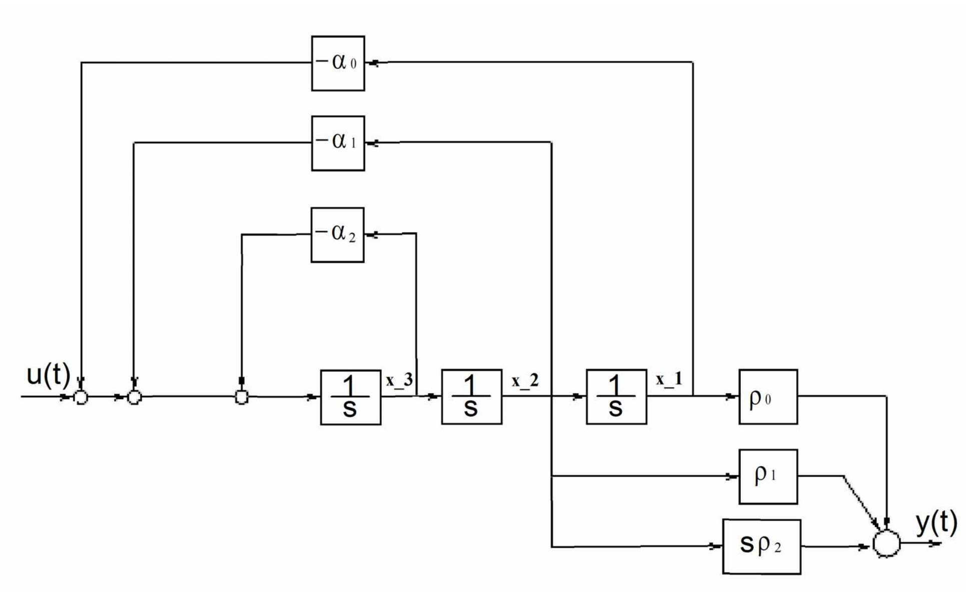

Figure 3: Bruk av reglene e) på side 121

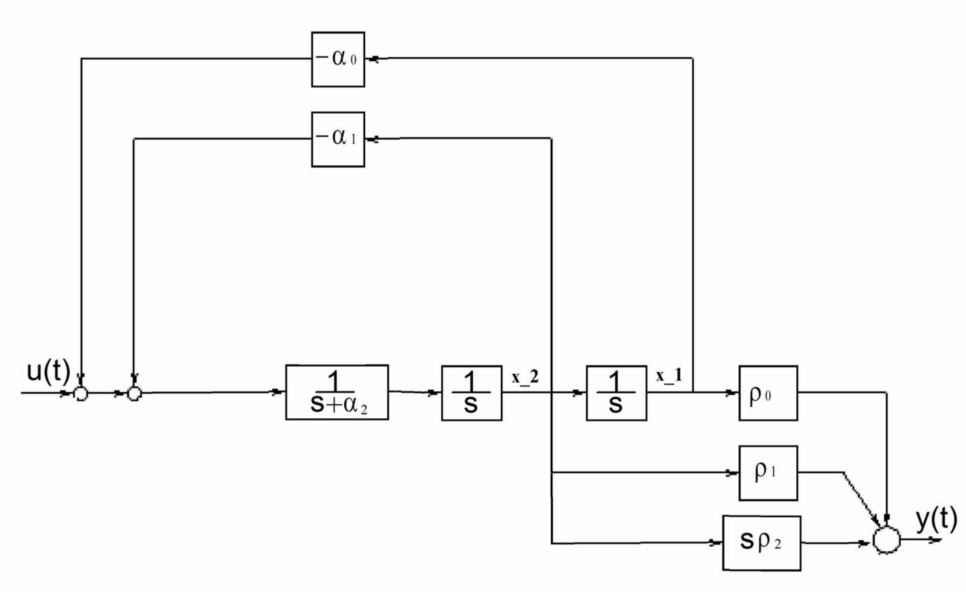

Figure 4: Bruk av reglene g) på side 122

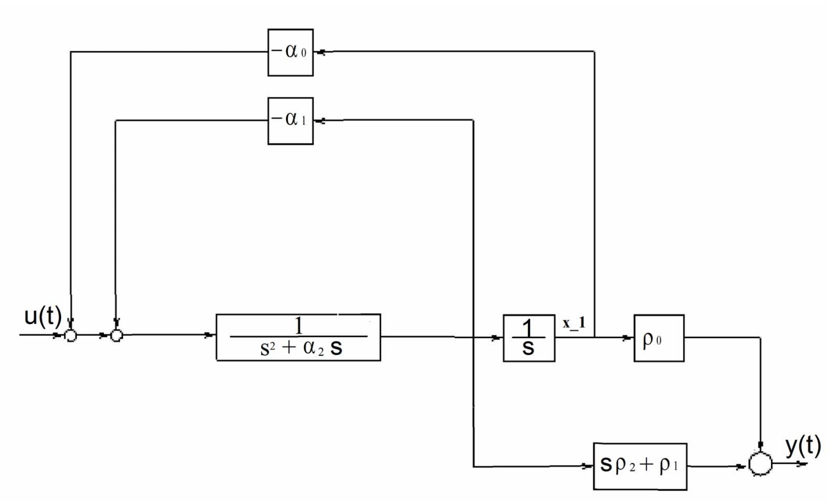

Figure 5: Bruk av regel a) og b) på side 121

Fra figur 6 får vi (4.81) med orden 3:

$$h(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\rho_2 s^2 + \rho_1 s + \rho_0}{s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Når vi har gitt fasevariabel form kan vi direkte sette modellen opp på tilstandsromform. Merk at det finnes uendelig mange tilstandsromrepresentasjoner for samme transferfunksjon. Transferfunksjonen er en entydig inn-ut representasjon for det aktuelle systemet.

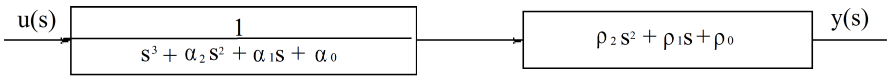

Figure 6: Ved å gjenta prosedyren fra figur 3-5 gir endelig blokkdiagram

Fordelen med fasevariabel form eller tilsvarende kanoniske former, er at koeffisientene i transferfunksjonen direkte inngår i matrisene for tilstandsromformen.

Når en i Matlab skal finne tidsresponsen til et system, f.eks. vha funksjonene `step` eller `lsim`, så gjør Matlab først systemet om til tilstandsromform, dersom det ikke er oppgitt på denne formen. Denne konverteringen resulterer i den så kalte *controllable canonical form* som er et annet navn på fasevariabel form.

Oppgave 3

Benytter residuregning for å finne tidsresponsene:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[h(s] = \sum_i \mathrm{Res}[h(s)e^{ts}]\right|_{s=a_i} \tag{3}$$

a) Fra tabellen er gitt et system med to distinkte poler:

$$h(s) = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} \tag{4}$$

Vi får:

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathrm{Res}[h(s)e^{ts}]\big|_{s=\lambda_1} + \mathrm{Res}[h(s)e^{ts}]\big|_{s=\lambda_2} && (5) \\ &= K\lambda_1\lambda_2\left(\frac{e^{ts}}{s-\lambda_2}\bigg|_{s=\lambda_1} + \frac{e^{ts}}{s-\lambda_1}\bigg|_{s=\lambda_2}\right) \\ &= \underline{\underline{\frac{K\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})}} && (6) \end{aligned}$$

Benytter likning (6) til å finne løsningen for komplekskonjugerte poler, dvs $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$.

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) && (7) \\ &= \frac{K(-\alpha+j\beta)(-\alpha-j\beta)}{-\alpha+j\beta+\alpha+j\beta}(e^{(-\alpha+j\beta)t} - e^{(-\alpha-j\beta)t} \\ &= \frac{K(\alpha^2+\beta^2)}{2j\beta}e^{-\alpha t}(e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}) \\ &= \frac{K\omega_0^2}{\beta}e^{-\alpha t}\frac{\cos(\beta t) + j\sin(\beta t) - \cos(\beta t) + j\sin(\beta t)}{2j} \\ &= \underline{\underline{\frac{K\omega_0^2}{\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t)}} && (8) \end{aligned}$$

Her benyttes Eulers formel og den udempede resonansfrekvensen $\omega_0^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

b) For sammenfallende poler lar vi den komplekse delen β i likning (8) gå mot null:

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\beta \to 0} \frac{K\omega_0^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \\ &= \lim_{\beta \to 0} K\omega_0^2 e^{-\alpha t} \frac{t\cos(\beta t)}{1} \\ &= \underline{\underline{\frac{Kte^{-\frac{t}{T}}}{T^2}}} \end{aligned} \tag{9}$$

Der vi benytter tidskonstanten fordi $\alpha = \omega_0 = \frac{1}{T}$. Grenseverdien finnes ved bruk av L'Hopitals regel.

c)

1. Vi har at sprangresponsen kan uttrykkes som følger:

$$k(s) = h(s)\frac{1}{s} = \frac{K\lambda^2}{(s-\lambda)^2 s} \tag{10}$$

Residuregning gir:

$$\begin{aligned} k(t) &= \left[\frac{d}{ds} K\lambda \frac{1}{s} e^{ts}\right]\bigg|_{s=\lambda} + \left[\frac{K\lambda^2}{(s-\lambda)^2} e^{ts}\right]\bigg|_{s=0} \\ &= K\lambda^2 \left[-\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2} + \frac{t}{\lambda} e^{\lambda t}\right] + K\lambda^2 \frac{1}{\lambda^2} \\ &= K(1 - e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}) \\ &= \underline{\underline{K(1 - [1 + \frac{t}{T}]e^{-\frac{t}{T}})}} \end{aligned} \tag{11}$$

2. Fra oppgave 1 vet vi at sprangresponsen er gitt som integralet av impulsresponsen. Dette kan vi også bruke for å sjekke svaret. Impulsresponsen for et 2. ordens system med to sammenfallende poler er:

$$h(t) = \frac{K}{T^2} t e^{-\frac{t}{T}} \tag{12}$$

Da er sprangresponsen:

$$k(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau \tag{13}$$

$$= \int_0^t \frac{K}{T^2} \tau e^{-\frac{\tau}{T}} d\tau \tag{14}$$

For å løse likning (13) må vi bruke delvis integrasjon: $\int u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$. Velger $dv = e^{-\frac{\tau}{T}} d\tau$ og $u = \tau$. Får da etterhvert:

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{K}{T^2}\left(-T(te^{-\frac{t}{T}} - 0) + T(T(1 - e^{-\frac{t}{T}}))\right) \\ &= -\frac{K}{T} t e^{-\frac{t}{T}} + K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \\ &= \underline{\underline{K(1 - [1 + \frac{t}{T}]e^{-\frac{t}{T}})}} \end{aligned} \tag{15}$$

d)

- Statisk forsterkning K finnes når $s \to 0$, dvs. $\underline{\underline{K = \frac{1}{k}}}$. Det betyr at jo stivere fjæra er (stor k) jo mindre statisk forsterkning får vi. Dette vet alle som har prøvd å trykke inn en stiv fjær.
- Udempet resonansfrekvens: ω_0 er gitt av $\underline{\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}}$. Det betyr at stor masse gir lav svingefrekvens og stiv fjær gir høy svingefrekvens. Dette er også rimelig å forvente.
- Relativ dempningsfaktor ζ er gitt av $\underline{\underline{\zeta = \frac{f}{2m\omega_0} = \frac{f}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}}}}$. Vi ser at den relative dempingsfaktoren avtar med massen m, øker med den viskøse dempingen f og avtar med stivere fjær (stor k).

Oppgave 4

a) Vi får her et negativt utslag ved start (ofte kalt inversrespons) pga. nullpunktet $\frac{1}{T_1}$ i høyre halvplan.

$$\begin{aligned} y(s) &= g_1(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{K(1 - T_1 s)}{s(1 + T_2 s)} \\ &= \frac{K}{s(1 + T_2 s)} - \frac{K T_1}{1 + T_2 s} \\ &= K\left(\frac{1}{s(1 + T_2 s)} - T_1 \frac{1}{1 + T_2 s}\right) = K(y_a(s) + y_b(s)) \end{aligned} \tag{16}$$

der:

$$\begin{aligned} y_a(s) &= \frac{1}{s(1 + T_2 s)} \\ y_b(s) &= -T_1 \frac{1}{1 + T_2 s} = -T_1 s y_a(s) \end{aligned}$$

Fra linje 8 i tabellen i Appendiks B i boka, finner vi:

$$\begin{aligned} y_a(t) &= (1 - e^{-\frac{t}{T_2}}) \\ y_b(t) &= -T_1 \frac{dy_a(t)}{dt} = -\frac{T_1}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \end{aligned}$$

det gir

$$\begin{aligned} y(t) &= K\left((1 - e^{-\frac{t}{T_2}}) - \frac{T_1}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right) \\ &= \underline{\underline{10\left(1 - \frac{7}{4} e^{-\frac{t}{4}}\right)}} \end{aligned}$$

b) For å finne tidsresponsen ved residuregning finner vi først polene i $y(s)$ og multiplisiteten. Vi ser raskt at vi her har to poler $s = -\frac{1}{T_2}$ og $s = 0$, begge med multiplisitet $m = 1$. Residuformelen ved $m = 1$ kan skrives

$$\sum_i \operatorname*{res*}_{s=a_i} \left[y(s)e^{ts}\right] = \sum_i \left[(s - a_i) y(s) e^{ts}\right]_{s=a_i}. \tag{17}$$

Vi får dermed

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[y(s)\right] = \sum_i \operatorname*{res*}_{s=a_i}\left[y(s)e^{ts}\right] \tag{18}$$

$$= (s + \tfrac{1}{T_2})\frac{K(1-T_1)}{s(1+T_2 s)}e^{ts}\Big|_{s=-\frac{1}{T_2}} + (s)\frac{K(1-T_1)}{s(1+T_2 s)}e^{ts}\Big|_{s=0} \tag{19}$$

$$= -K(1 + \tfrac{T_1}{T_2})e^{-\frac{t}{T_2}} + K \tag{20}$$

$$= \underline{\underline{10(1 - \tfrac{7}{4}e^{-\frac{t}{4}})}} \tag{21}$$

c) Se Figur 7 nedenfor.

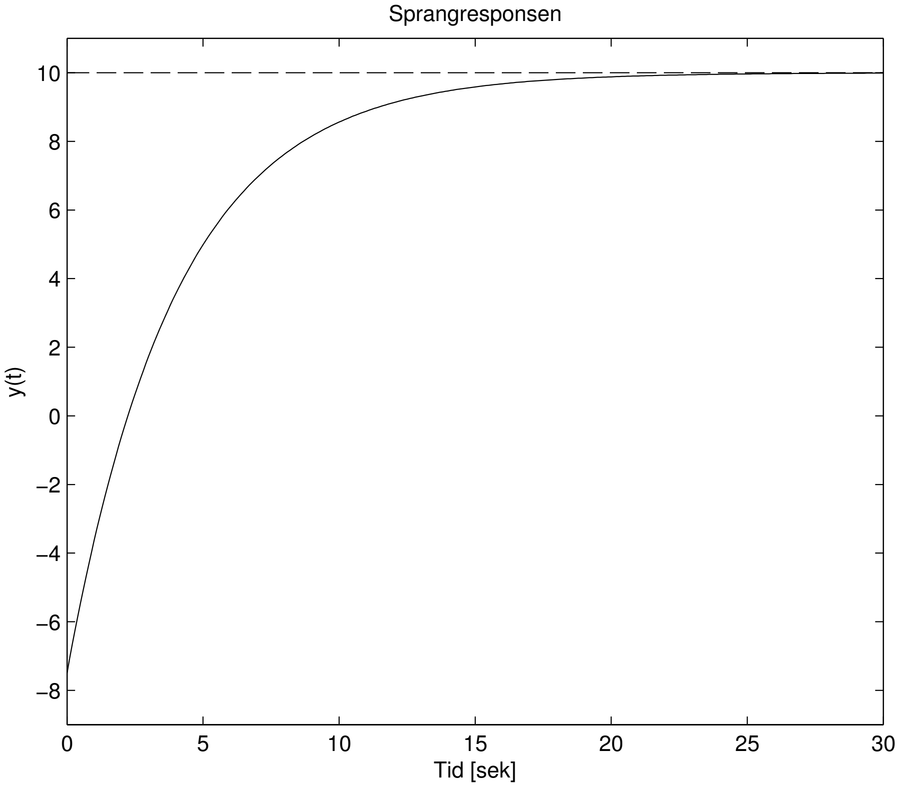

Figure 7: Sprangrespons for $g_1(s)$

d) Skissen blir som figur 6, men forskøvet $T_3 = 5$ sekunder mot høyre. Se 4.17 s. 109.