E. G. Kunze 16.11.2018

Transformationen mit Dualen Quaternionen

1 Duale Quaternionen **2**

1.1 DUALE ZAHLEN **2**

1.2 DUALE QUATERNIONEN **2**

Produkt Dualer Quaternionen 2

Produkte von Quaternionen 3

2 Ausdrücke mit Dualen Quaternionen **3**

2.1 QUATERNION-KONJUGATION **3**

2.2 PRODUKT EINER DUALEN QUATERNION MIT SEINER QUATERNION-KONJUGIERTEN: **4**

2.3 NORM DER DUALEN QUATERNION **5**

2.4 DUALE KONJUGIERTE **5**

2.5 VOLLSTÄNDIGE KONJUGATION **6**

2.6 PRODUKT EINER DUALEN QUATERNION MIT SEINER DUALEN-KONJUGIERTEN: **7**

3 Tabelle mit Quaternionoperationen **8**

4 Transformation von Vektoren **9**

4.1 DREHUNG VON VEKTOREN **9**

4.2 TRANSLATION VON VEKTOREN **10**

4.3 REIHENFOLGE DREHEN – VERSCHIEBEN **11**

4.4 REIHENFOLGE VERSCHIEBEN – DREHEN **12**

4.5 DREHUNG UND VERSCHIEBUNG AUF DERSELBEN ACHSE **12**

5 Kinematik von Roboterarmen **13**

5.1 TRANSFORMATION VON DENAVIT UND HARTENBERG (D+H) **13**

5.2 BESTIMMUNG VON POSITIONEN **16**

5.3 BESTIMMUNG DER ORIENTIERUNG **18**

5.4 ZUSAMMENFASSUNG **19**

6 Berechnungen zumBeispiel 5.2 mit Mathcad **20**

7 Literatur **24**

1 Duale Quaternionen

Duale Quaternionen sind eine Erweiterung der Quaternionen [1, 2], die es möglich macht, Drehung und Translation eines Vektors in einem Operator darzustellen wie bei einer homogenen Transformation. Man sagt „eine" Quaternion, weil sie aus vier Elemneten besteht und damit eine „Vierheit" darstellt.

1.1 Duale Zahlen

Duale Quaternionen beruhen auf dem Konzept der dualen Zahlen [3]. Diese werden aus den Basiselementen 1, der reellen Einheit, und ε, der dualen Einheit gebildet:

$$z = 1 \cdot a + \varepsilon \cdot b \tag{1.1}$$

mit $a, b \in R$. Dabei bezeichnet man gelegentlich *a* als den Realteil und *b* als Dualteil. Die duale Einheit ε hat die Eigenschaft

$$\varepsilon^n = 0,\ n > 1 \tag{1.2}$$

so daß die Multiplikation wie folgt definiert ist:

$$z_1 z_2 = (1 \cdot a_1 + \varepsilon \cdot b_1) \cdot (a_2 + \varepsilon \cdot b_2) = a_1 a_2 + \varepsilon \cdot (a_1 b_2 + a_2 b_1) \tag{1.3}$$

Die Konjugierte einer Dualen Zahl wird durch Vorzeichenumkehr des Dualteils gebildet:

$$\bar{z} = a - \varepsilon \cdot b \tag{1.4}$$

Das Produkt einer Dualen Zahl mit ihrer Konjugierten ergibt eine reelle Zahl:

$$z\bar{z} = (a + \varepsilon \cdot b)(a - \varepsilon \cdot b) = a^2 + \varepsilon \cdot (ab - ab) = a^2 \tag{1.5}$$

1.2 Duale Quaternionen

Duale Quaternionen bestehen aus zwei Quaternionen, die über die duale Einheit ε mit einander verbunden sind [4]. Diese duale Einheit ε kommutiert mit den Einheitsvektoren der Quaternionen i, j, k. Sind

$$p = (p_0 + \mathbf{p}) = (p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3) \text{ und } q = (q_0 + \mathbf{q}) = (q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3) \tag{1.6}$$

Quaternionen mit den „Realteilen" p_0 und q_0 sowie mit den „Vektorteilen" **p** und **q** , so läßt sich damit eine Duale Quaternion, hier gekennzeichnet durch einen Großbuchstaben, bilden:

$$Q = (p + \varepsilon \cdot q) = (p_0 + \mathbf{p}) + \varepsilon \cdot (q_0 + \mathbf{q}) \tag{1.7}$$

Gelegentlich wird in der Literatur der erste Term der Dualen Quaternion, wie bei den normalen Quaternionen auch, als „Realteil" bezeichnet, z. B. in [4], obwohl es sich um eine Quaternion mit einem Real- und Vektorteil handelt, während der zweite Term plausiblerweise „Dualteil" genannt wird. Um diese Verwechslungen zu vermeiden, soll hier der erste Term des Dualen Quaternions als „Primärteil" bezeichnet werden.

Produkt Dualer Quaternionen

Wegen $\varepsilon^2 = 0$ entfällt das Produkt der Dualteile. Das Produkt zweier Dualer Quaternionen lautet daher:

$$Q_a Q_b = (p_a + \varepsilon \cdot q_a)(p_b + \varepsilon \cdot q_b) = p_a p_b + \varepsilon \cdot (p_a q_b + q_a p_b) \tag{1.8}$$

Das Ergebnis zeigt drei gemischte Produkte von Quaternionen. Diese Produkte sind alle vom gleichen Typ und können weiter entwickelt werden, wie der folgende Abschnitt zeigt [1].

Produkte von Quaternionen

Als Produkt zweier Quaternionen erhält man

$$p_a p_b = (p_{a0} + \mathbf{p}_a)(p_{b0} + \mathbf{p}_b) = p_{a0} p_{b0} + \mathbf{p}_a p_{b0} + p_{a0}\mathbf{p}_b + \mathbf{p}_a \mathbf{p}_b \tag{1.9}$$

Das Ergebnis ist wieder eine Quaternion mit Real- und Vektorteil. Das Produkt $\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b$ der Vektorteile läßt sich wie folgt auswerten:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b &= (ip_{a1} + jp_{a2} + kp_{a3})(ip_{b1} + jp_{b2} + kp_{b3}) = \\
&- p_{a1} p_{b1} + kp_{a1} p_{b2} - jp_{a1} p_{b3} \\
&- kp_{a2} p_{b1} - p_{a2} p_{b2} - ip_{a2} p_{b3} \\
&+ jp_{a3} p_{b1} - ip_{a3} p_{b2} - p_{a3} p_{b3}
\end{aligned}$$

Die Zusammenfassung der Terme führt zu

$$\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b = -(p_{a1} p_{b1} + p_{a2} p_{b2} + p_{a3} p_{b3}) + i(p_{a2} p_{b3} - p_{a3} p_{b2}) - j(p_{a1} p_{b3} - p_{a3} p_{b1}) + k(p_{a1} p_{b2} - p_{a2} p_{b1}) \tag{1.10}$$

Dieses Produkt ist wieder ein Quaternion bestehend aus einem Skalarteil mit dem Skalarprodukt

$$< \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b > = < \mathbf{p}_b, \mathbf{p}_a > = p_{a1} q_{b1} + p_{a2} p_{b2} + p_{a3} p_{b3} \tag{1.11}$$

und einem Kreuzprodukt der Vektorteile

$$\mathbf{p}_a \times \mathbf{p}_b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_{a1} & p_{a2} & p_{a3} \\ p_{b1} & p_{b2} & p_{b3} \end{vmatrix} = i(p_{a2} p_{b3} - p_{b2} p_{a3}) - j(p_{a1} p_{b3} - p_{b1} p_{a3}) + k(p_{a1} p_{b2} - p_{b1} p_{a2}) \tag{1.12}$$

Das Produkt der Vektorteile $\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b$ kann daher wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b = - < \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b > + \mathbf{p}_a \times \mathbf{p}_b \tag{1.13}$$

Das Kreuzprodukt ist nicht kommutativ, und es gilt

$$\mathbf{p}_a \times \mathbf{p}_b = -\mathbf{p}_b \times \mathbf{p}_a \tag{1.14}$$

Das Ergebnis für das Produkt zweier Quaternionen von Gl. 1.9 lautet mit Gl. 1.13

$$p_a p_b = p_{a0} p_{b0} - \langle \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b \rangle + \mathbf{p}_a p_{b0} + p_{a0}\mathbf{p}_b + \mathbf{p}_a \times \mathbf{p}_b \tag{1.15}$$

2 Ausdrücke mit Dualen Quaternionen

2.1 Quaternion-Konjugation

Die Konjugierte einer Quaternion entsteht durch Negation des Vektorteils und wird hier durch einen Querstrich über der Variablen gekennzeichnet:

$$\overline{p} = (p_0 - \mathbf{p}) \tag{2.1}$$

Die Quaternion-Konjugierte wird zur Bestimmung der Norm der Quaternion benötigt. Sie wird gebildet, indem die primäre und die duale Quaternion konjugiert werden:

$$\overline{Q} = (\overline{p} + \varepsilon \cdot \overline{q}) = (p_0 - \mathbf{p}) + \varepsilon \cdot (q_0 - \mathbf{q}) \qquad (2.2)$$

Hier gilt die Vertauschung $\overline{Q_a Q_b} = \overline{Q}_b\,\overline{Q}_a$ (2.3)

Die Richtigkeit der Gl. 2.3 läßt sich schnell nachweisen. Man betrachte das Produkt der Gl. 1.8:

$$Q_a Q_b = p_a p_b + \varepsilon \cdot \left(p_a q_b + q_a p_b\right)$$

Die Quaternion-Konjugierte des Produktes lautet

$$\overline{Q_a Q_b} = \overline{p_a p_b} + \varepsilon \cdot \left(\overline{p_a q_b} + \overline{q_a p_b}\right)$$
$$\overline{Q_a Q_b} = \overline{p}_b \overline{p}_a + \varepsilon \cdot \left(\overline{q}_b \overline{p}_a + \overline{p}_b \overline{q}_a\right) \qquad (2.4)$$

Das Produkt der Konjugierten mit Vertauschung der Reihenfolge ist

$$\overline{Q}_b \overline{Q}_a = \overline{p}_b \overline{p}_a + \varepsilon \cdot \left(\overline{q}_b \overline{p}_a + \overline{p}_b \overline{q}_a\right) \qquad (2.5)$$

Die Gln. 2.4 und 2.5 sind gleich, was Gl. 2.3 bestätigt.

2.2 Produkt einer Dualen Quaternion mit seiner Quaternion-Konjugierten:

Von Bedeutung sind die Produkte

$$Q\overline{Q} = (p + \varepsilon \cdot q)(\overline{p} + \varepsilon \cdot \overline{q}) = p\overline{p} + \varepsilon \cdot \left(q\overline{p} + p\overline{q}\right) \qquad (2.6)$$

und

$$\overline{Q}Q = (\overline{p} + \varepsilon \cdot \overline{q})(p + \varepsilon \cdot q) = \overline{p}p + \varepsilon \cdot \left(\overline{q}p + \overline{p}q\right)$$

Wir betrachten den Dualteil $q\overline{p} + p\overline{q}$ der ersten Gleichung.

$$q\overline{p} = (q_0 + \mathbf{q})(p_0 - \mathbf{p}) = q_0 p_0 - q_0 \mathbf{p} + \mathbf{q} p_0 - \mathbf{qp} \qquad (2.7)$$
$$p\overline{q} = (p_0 + \mathbf{p})(q_0 - \mathbf{q}) = p_0 q_0 - p_0 \mathbf{q} + \mathbf{p} q_0 - \mathbf{pq} \qquad (2.8)$$

Die Summen ist

$$q\overline{p} + p\overline{q} = 2 p_0 q_0 - \mathbf{qp} - \mathbf{pq} \qquad (2.9)$$

Unter Verwendung von Gl. 1.13 ergibt sich

$$q\overline{p} + p\overline{q} = 2 p_0 q_0 + < \mathbf{q}, \mathbf{p} > - \mathbf{q} \times \mathbf{p} + < \mathbf{p}, \mathbf{q} > - \mathbf{p} \times \mathbf{q} \qquad (2.10)$$

Da bei der Vertauschung der Argumente das Kreuzprodukt das Vorzeichen ändert, heben sich die Kreuzprodukte auf. Die Skalarprodukte sind dagegen von der Reihenfolge der Argumente unabhängig. Daher ergibt sich schließlich

$$q\overline{p} + p\overline{q} = 2 p_0 q_0 + 2 < \mathbf{p}, \mathbf{q} > = 2 < p, q > \qquad (2.11)$$

Der Ausdruck $q\overline{p} + p\overline{q}$ liefert also das Skalarprodukt der Quaternionen p und q:

$$< p, q > = \frac{1}{2}\left(q\overline{p} + p\overline{q}\right) \qquad (2.12)$$

Da nur eine skalare Größe übrig bleibt, spielt die Reihenfolge der Konjugierten keine Rolle und es gilt:

$$Q\overline{Q} = \overline{Q}Q = \overline{p}p + 2\varepsilon < p,q > \qquad (2.13)$$

Im Ergebnis sind der Primärteil und der Dualteil des Produktes beide Skalare.

Die Frage ist, ob die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Konjugation in Gl. 2.6 auch gilt, wenn sich die Dualen Quaternionen unterscheiden. Dies wird nachfolgend betrachtet.

$$Q_a{}'\overline{Q}_b = (p_a + \varepsilon q_a)(\overline{p}_b + \varepsilon \overline{q}_b) = p_a\overline{p}_b + \varepsilon(q_a\overline{p}_b + p_a\overline{q}_b)$$

$$\overline{Q}_a Q_b{}' = (\overline{p}_a + \varepsilon \overline{q}_a)(p_b + \varepsilon q_b) = \overline{p}_a p_b + \varepsilon(\overline{q}_a p_b + \overline{p}_a q_b)$$

Wir überprüfen den ersten Term der beiden Ausdrücke:

$$p_a\overline{p}_b = (p_{a0} + \mathbf{p}_a)(p_{b0} - \mathbf{p}_b) = p_{a0}p_{b0} + \mathbf{p}_a p_{b0} - p_{a0}\mathbf{p}_b - \mathbf{p}_a\mathbf{p}_b$$

$$\overline{p}_a p_b = (p_{a0} - \mathbf{p}_a)(p_{b0} + \mathbf{p}_b) = p_{a0}p_{b0} - \mathbf{p}_a p_{b0} + p_{a0}\mathbf{p}_b - \mathbf{p}_a\mathbf{p}_b$$

Die Ergebnisse sind unterschiedlich. Daher gilt allgemein: $\overline{Q}_a Q_b \neq Q_a\overline{Q}_b$ (2.14)

2.3 Norm der Dualen Quaternion

Das Produkt von Gl. 2.6 hat mit Gl. 2.13 ein Duales Quaternion geliefert, das nur aus Skalaren Größen besteht. Insbesondere ist der Primärteil positiv definit, d. h. $\overline{p}p \geq 0$ für $p \neq 0$. Damit wird die Norm von Q gebildet:

$$N(Q) = \sqrt{\overline{Q}Q} = \sqrt{\overline{p}p + 2\varepsilon < p,q >} \qquad (2.15)$$

Wie man sich durch Quadratur überzeugen kann, ist die Wurzel auch wie folgt darstellbar:

$$N(Q) = \sqrt{\overline{p}p} + \varepsilon \frac{< p,q >}{\sqrt{\overline{p}p}}$$

Bei einer dualen Einheitsquaternion gilt

$$N(Q) = 1 \qquad (2.16)$$

und $< p,q > = 0$. Der Dualteil muß verschwinden, was der Fall ist, wenn p und q orthogonal sind. In diesem Fall ergibt sich:

$$N(Q)^2 = p\overline{p} = 1 \text{ und somit } p^{-1} = \overline{p} \qquad (2.17)$$

Der Kehrwert von p ist bei einer Einheitsquaternion durch die Konjugierte gegeben.

2.4 Duale Konjugierte

Für Duale Quaternionen ist eine zweite Konjugationen möglich: die Duale Konjugation. Diese wird durch Negation des Dualteils gebildet:

Die Duale Quaternion $Q = (p + \varepsilon \cdot q)$ mit p und q als Quaternionen hat also die Duale Konjugierte

$$\widetilde{Q} = (p - \varepsilon \cdot q) \qquad (2.18)$$

Bei der Dualen Konjugation eines Produkts spielt die Reihenfolge eine Rolle, weil die Komponenten Quaternionen sind. Andererseits erhält man das folgende Ergebnis:

$Q_{ab} = Q_a Q_b$ dual konjugiert ergibt

$\tilde{Q}_{ab} = \tilde{Q}_a \tilde{Q}_b$, also ohne Vertauschung. (2.19)

Beweis:

$$\tilde{Q}_a \tilde{Q}_b = (p_a - \varepsilon q_a)(p_b - \varepsilon q_b) = p_a p_b - \varepsilon (q_a p_b + p_a q_b)$$

Erst Multiplizieren und dann konjugieren liefert das gleiche Ergebnis. Nach Gl. 1.8 ist

$Q_a Q_b = p_a p_b + \varepsilon (q_a p_b + p_a q_b)$ und damit

$\tilde{Q}_{ab} = p_a p_b - \varepsilon (q_a p_b + p_a q_b)$

Die Beziehung 2.19 ist damit bestätigt.

2.5 Vollständige Konjugation

Bei Transformationen mit Dualen Quaternionen werden beide Konjugationen gleichzeitig benötigt, die hier als *vollständige Konjugation* bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= (\overline{p} - \varepsilon \cdot \overline{q}) \\ &= (p_0 - \mathbf{p}) - \varepsilon \cdot (q_0 - \mathbf{q}) \\ &= (p_0 - \mathbf{p}) + \varepsilon \cdot (-q_0 + \mathbf{q}) \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Neben den Vektorteilen der Quaternionen wird also auch der Dualteil negiert. Für diese Art der Konjugation wird ein neues Zeichen eingeführt. Weiter unten wird der Fall auftreten, daß $q_0 = 0$ ist, und dann hat man

$$\hat{Q} = (p_0 - \mathbf{p}) + \varepsilon \cdot \mathbf{q} \qquad (2.21)$$

Die Vorzeichenumkehr des Dualteils und des Vektorteils von q kompensieren sich. Im Folgenden wird das Produkt $Q\hat{Q}$ untersucht.

$$Q\hat{Q} = (p + \varepsilon \cdot q)(\overline{p} - \varepsilon \cdot \overline{q}) = p\overline{p} + \varepsilon \cdot (q\overline{p} - p\overline{q}) \qquad (2.22)$$

Die zwei Produkte der Quaternionen in der Klammer haben die Entwicklung

$$p\overline{q} = (p_0 + \mathbf{p})(q_0 - \mathbf{q}) = p_0 q_0 + \mathbf{p} q_0 - p_0 \mathbf{q} - \mathbf{pq}$$

$$q\overline{p} = p_0 q_0 + \mathbf{q} p_0 - q_0 \mathbf{p} - \mathbf{qp} \qquad (2.23)$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} Q\hat{Q} &= p\overline{p} + \varepsilon (p_0 q_0 + \mathbf{q} p_0 - q_0 \mathbf{p} - \mathbf{qp} - p_0 q_0 - \mathbf{p} q_0 + p_0 \mathbf{q} + \mathbf{pq}) \\ &= p\overline{p} + \varepsilon [2(p_0 \mathbf{q} - q_0 \mathbf{p}) - \mathbf{qp} + \mathbf{pq}] \end{aligned} \qquad (2.24)$$

Der Term $p\overline{p}$ ist das Skalarprodukt

$$p\overline{p} = p_0^{\,2} + \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = p_0^{\,2} + p_1^{\,2} + p_2^{\,2} + p_3^{\,2} = \langle p, p \rangle \qquad (2.25)$$

Der Dualteil von Gl. 2.23 läßt sich weiter umformen. Mit Gl. 1.13 findet man

$$\mathbf{pq}-\mathbf{qp}=-<\mathbf{p},\mathbf{q}>+\mathbf{p}\times\mathbf{q}+<\mathbf{q},\mathbf{p}>-\mathbf{q}\times\mathbf{p}=2\mathbf{p}\times\mathbf{q} \qquad (2.26)$$

Gl. 2.23 nimmt damit die folgende Form an:

$$Q\hat{Q}=p\bar{p}+2\varepsilon\left[(p_0\mathbf{q}-q_0\mathbf{p})+\mathbf{p}\times\mathbf{q}\right] \qquad (2.27)$$

Der linke Teil diese Produktes ist ein Skalar, während der Dualteil sich als Vektor ergibt.

2.6 Produkt einer Dualen Quaternion mit seiner Dualen-Konjugierten:

Hier gilt $Q\tilde{Q}\neq\tilde{Q}Q$ (2.28)

$$Q\tilde{Q}=(p+\varepsilon\cdot q)(p-\varepsilon\cdot q)=pp+\varepsilon\cdot(qp-pq) \qquad (2.29)$$

$$\tilde{Q}Q=(p-\varepsilon\cdot q)(p+\varepsilon\cdot q)=pp-\varepsilon\cdot(qp-pq)$$

Die dualen Terme können mit Gl. 1.9 und Gl. 1.13 umgeformt werden:

$$\begin{aligned}qp-pq&=q_0p_0-<\mathbf{q},\mathbf{p}>+\mathbf{q}p_0+\mathbf{p}q_0+\mathbf{q}\times\mathbf{p}-p_0q_0+<\mathbf{p},\mathbf{q}>-\mathbf{p}q_0-\mathbf{q}p_0-\mathbf{p}\times\mathbf{q}\\&=+\mathbf{q}\times\mathbf{p}-\mathbf{p}\times\mathbf{q}=2\,\mathbf{q}\times\mathbf{p}\end{aligned} \qquad (2.30)$$

Daraus folgt

$$\mathbf{q}\times\mathbf{p}=\frac{1}{2}(qp-pq) \qquad (2.31)$$

Man vergleiche auch Gl. 2.32 mit Gl. 2.12. Das Produkt der Dualen Quaternionen lautet nun

$$Q\tilde{Q}=pp+2\varepsilon\cdot\mathbf{q}\times\mathbf{p} \qquad (2.32)$$

Mit Hilfe von Gl. 1.15 kann der primäre Term umgeformt werden, indem man in Gl. 1.15 p_a und p_b gleich p setzt. Das ergibt

$$pp=p_0^{\;2}-\langle\mathbf{p},\mathbf{p}\rangle+\mathbf{p}p_0+p_0\mathbf{p}+\mathbf{p}\times\mathbf{p}=p_0^{\;2}-\langle\mathbf{p},\mathbf{p}\rangle+2p_0\mathbf{p} \qquad (2.33)$$

Damit erhält man für Gl. 2.33

$$Q\tilde{Q}=p_0^{\;2}-\langle\mathbf{p},\mathbf{p}\rangle+2p_0\mathbf{p}+2\varepsilon\cdot\mathbf{q}\times\mathbf{p} \qquad (2.34)$$

3 Tabelle mit Quaternionoperationen

Duale Zahl	$z = 1 \cdot a + \varepsilon \cdot b$	Gl. 1.1
Duale Einheit	ε, $\varepsilon^n = 0$, $n > 1$	Gl. 1.2
Konjugierte Duale Zahl	$\bar{z} = a - \varepsilon \cdot b$	Gl. 1.4
Quaternion	$q = (q_0 + \mathbf{q})$	Gl. 1.6
Duale Quaternion	$Q = (p + \varepsilon \cdot q) = (p_0 + \mathbf{p}) + \varepsilon \cdot (q_0 + \mathbf{q})$	Gl. 1.7
Produkt einer Dualen Quaternion	$Q_{ab} = Q_a Q_b = [q_a q_b + \varepsilon (p_a q_b + q_a p_b)]$	Gl. 1.8
Produkt von Quaternionen	$p_a p_b = p_{a0} p_{b0} - < \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b > + \mathbf{p}_a p_{b0} + \mathbf{p}_b p_{a0} + \mathbf{p}_a \times \mathbf{p}_b$	Gl. 1.15
Skalarprodukt der Vektorteile	$< \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b > = < \mathbf{p}_b, \mathbf{p}_a > = p_{a1} p_{b1} + p_{a2} p_{b2} + p_{a3} p_{b3}$	Gl. 1.11
Produkt von Vektorteilenen	$\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b = - < \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b > + \mathbf{p}_a \times \mathbf{p}_b$	Gl. 1.13
Kreuzprodukt	$\mathbf{p}_a \times \mathbf{p}_b = -\mathbf{p}_b \times \mathbf{p}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b - \mathbf{p}_b \mathbf{p}_a)$ $= \frac{1}{2}(p_a p_b - p_b p_a)$ $= i(p_{a2} p_{b3} - p_{b2} p_{a3}) - j(p_{a1} p_{b3} - p_{b1} p_{a3}) +$ $k(p_{a1} p_{b2} - p_{b1} p_{a2})$	Gl. 2.26 Gl. 2.31 Gl. 1.12
Skalarprodukt von Quaternionen	$< p, q > = \frac{1}{2}(q\bar{p} + p\bar{q})$ $= p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$	Gl. 2.12
Konjugierte Quaternion	$\bar{p} = (p_0 - \mathbf{p})$	Gl. 2.1
Quaternion Konjugation	$\overline{Q} = (\bar{p} + \varepsilon \cdot \bar{q}) = (p_0 - \mathbf{p}) + \varepsilon \cdot (q_0 - \mathbf{q})$	Gl. 2.2
Duale Konjugation	$\tilde{Q} = (p - \varepsilon \cdot q)$	Gl. 2.18
vollständige Konjugation	$\hat{Q} = (\bar{p} - \varepsilon \cdot \bar{q}) = (p_0 - \mathbf{p}) - \varepsilon \cdot (q_0 - \mathbf{q})$	Gl. 2.20
Norm eines Quaternions	$Norm = \sqrt{\bar{q} q} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$	Gl. 2.15
Kehrwert einer Eiheitsquaternion	$p^{-1} = \bar{p}$	Gl. 2.17
Produkte mit Konjugierten:	$\overline{pq} = \bar{q}\ \bar{p}$	
- Quaternion-Konjugation	$\overline{Q}_{ab} = \overline{Q_a Q_b} = \overline{Q}_b\ \overline{Q}_a$	Gl. 2.3
- Quaternion-Konjugation	$Q\overline{Q} = \overline{Q} Q = \bar{p} p + 2\varepsilon < p, q >$	Gl. 2.13
-Norm einer Dualen Quaternion	$N(Q) = \sqrt{\overline{Q} Q} = \sqrt{\bar{p} p + 2\varepsilon < p, q >}$	Gl. 2.15
- Duale Konjugation	$\tilde{Q}_{ab} = \tilde{Q}_a \tilde{Q}_b$	Gl.2.19
- Duale Konjugation	$Q\tilde{Q} \neq \tilde{Q} Q$ $Q\tilde{Q} = p_0^2 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + 2 p_0 \mathbf{p} + 2\varepsilon \cdot \mathbf{q} \times \mathbf{p}$	Gl. 2.28 Gl. 2.34
- vollständige Konjugation	$Q\hat{Q} = p\bar{p} + 2\varepsilon[(p_0 \mathbf{q} - q_0 \mathbf{p}) + \mathbf{p} \times \mathbf{q}]$	Gl. 2.27

4 Transformation von Vektoren

Die Dualen Quaternionen sind geeignet, Vektoren in einem Schritt zu drehen und zu verschieben, wie das bei homogenen Transformations-Matrizen der Fall ist. Die Fälle Translation und Rotation sowie ihre Kombination werden nachfolgend betrachtet.

4.1 Drehung von Vektoren

Die Drehung von Vektoren mit Hilfe von Quaternionen ist bekannt [1]. Der Operator

$$\mathbf{v}^* = L(\mathbf{v}) = (q\mathbf{v}\overline{q}) \tag{4.1}$$

dreht einen Vektor $\mathbf{v} = iv_1 + jv_2 + kv_3$ um eine Achse, die durch die Koordinaten q_1, q_2, q_3 der Quaternion q im gemeinsamen Bezugssystem festgelegt ist. Bei $\mathbf{v}$ handelt es sich nicht um einen freien Vektor, sondern um einen Ortsvektor. Die Quaternion q hat die spezielle Form

$$q = \cos\frac{\phi}{2} + \mathbf{u}\cdot\sin\frac{\phi}{2} \tag{4.2}$$

mit dem Einheitsvektor $\mathbf{u}$ als Drehachse:

$$\mathbf{u} = iu_1 + ju_2 + ku_3 \tag{4.3}$$

und $u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2} + u_3^{\ 2} = 1$ (4.4)

Damit hat Gl. 4.2 die Eigenschaft

$$q\overline{q} = 1 \tag{4.5}$$

Der Operator von Gl. 4.1 bewirkt mit dieser Quaternion q eine Drehung des Vektors um die Achse $\mathbf{u}$ mit dem Winkel ϕ. Diese Quaternion wird zum Primärteil einer Dualen Quaternion gemacht, und der Dualteil wird Null gesetzt:

$$Q_R = (q + \varepsilon \cdot 0) = q \tag{4.6}$$

Der Index R steht für Rotation. Die vollständige Konjugation ergibt

$$\hat{Q}_R = (\overline{q} - \varepsilon \cdot 0) = \overline{q} \tag{4.7}$$

Der Ausdruck $\varepsilon\cdot 0$ kann natürlich entfallen. Er wurde nur mitgeführt, um den dualen Zusammenhang deutlich werden zu lassen.

Der zu drehende Vektor $\mathbf{v}$ wird in den Dualteil einer Dualen Quaternion eingebettet. In vollständiger Form lautet diese:

$$V = [(1 + \mathbf{0}) + \varepsilon \cdot (0 + \mathbf{v})] \tag{4.8}$$

Selbstverständlich können der Vektorteil $\mathbf{0}$ im Primärteil und der Realteil 0 im Dualteil weggelassen werden. Diese sind nur der Anschaulichkeit halber geschrieben worden. Die Duale Quaternion mit dem eingebetteten Vektor $\mathbf{v}$ lautet dann:

$$V = (1 + \varepsilon \cdot \mathbf{v}) \tag{4.9}$$

In Anlehnung an Gl.4.1 wird die Drehoperation nun mit Hilfe der Dualen Quaternion formuliert :

$$V^* = Q_R V \hat{Q}_R = Q_R [1 + \varepsilon \cdot \mathbf{v}] \hat{Q}_R = q\overline{q} + \varepsilon \cdot q\mathbf{v}\overline{q} \tag{4.10}$$

Da q eine Einheitsquaternion ist, gilt $q\overline{q} = 1$, und die Duale Quaternion V^* mit dem verdrehten Vektor $\mathbf{v}^*$ erhält die Form

$$V^* = 1 + \varepsilon \cdot q\mathbf{v}\overline{q} = 1 + \varepsilon \cdot \mathbf{v}^* \qquad (4.11)$$

Der verdrehte Ortsvektor liegt also im Dualteil vor und ist gegeben durch:

$$\mathbf{v}^* = q\mathbf{v}\overline{q} \qquad (4.12)$$

4.2 Translation von Vektoren

Die Translation eines Vektors $\mathbf{v} = iv_1 + jv_2 + kv_3$ verläuft nach dem gleichen Schema wie die Drehung. Der Vektor wird wieder in eine Duale Quaternion nach Gl. 4.9 eingebettet:

$$V = (1 + \varepsilon \cdot \mathbf{v}) \qquad (4.9)$$

Eine Transformation dieses Vektors analog zu Gl. 4.1 erfolgt mit einem für eine Translation geeigneten Dualen Quaternionen Q_T (T steht für Translation):

$$V^* = Q_T(1 + \varepsilon \cdot \mathbf{v})\hat{Q}_T \qquad (4.13)$$

Die Duale Quaternion Q_T enthält den Verschiebevektor

$$\mathbf{b} = ib_x + jb_y + kb_z \qquad (4.14)$$

der im Bezugssystem definiert ist. Der Vektor **b** wird in den Dualteil der Quaternion eingefügt, während das primäre Quaternion den Wert 1 erhält:

$$Q_T = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \mathbf{b}\right) \qquad (4.15)$$

Für eine Einheitsquaternion muß gelten

$$Q_T\overline{Q}_T = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \mathbf{b}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \cdot \mathbf{b}\right) = 1 \qquad (4.16$$

Die Ausmultiplikation zeigt, daß dies tatsächlich der Fall ist. Mit $\varepsilon^2 = 0$ findet man:

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \mathbf{b}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \cdot \mathbf{b}\right) = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \mathbf{b} - \frac{\varepsilon}{2} \cdot \mathbf{b} = 1$$

Der Faktor ½ in Gl. 4.15 ist erforderlich, weil Q_T von links und von rechts heranmultipliziert wird. Die vollständige Konjugation lautet nach Gl. 2.20:

$$\hat{Q}_T = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \mathbf{b}\right) = Q_T \qquad (4.17)$$

Die vollständige Konjugation bewirkt also hier keine Veränderung. Damit kann nun die Transformation wie folgt geschrieben werden:

$$V^* = Q_T[1 + \varepsilon \cdot \mathbf{v}]\hat{Q}_T = \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \mathbf{b}\right][1 + \varepsilon \cdot \mathbf{v}]\left[1 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \mathbf{b}\right] \qquad (4.18)$$

Die Ausmultiplikation ergibt:

$$V^* = \left[1 + \varepsilon \cdot \mathbf{v} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \mathbf{b}\right]\left[1 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \mathbf{b}\right] = \left[1 + \varepsilon \cdot \mathbf{v} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \mathbf{b} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \mathbf{b}\right] \qquad (4.19)$$

$$V^* = [1 + \varepsilon \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{v})] = [1 + \varepsilon \cdot \mathbf{v}^*] \tag{4.20}$$

Der verschobene Vektor $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} + \mathbf{b}$ ist nun im Dualteil von V^* vorhanden, d. h.

$$\mathbf{v}^* = i\{v_1 + b_1\} + j\{v_2 + b_2\} + k\{v_3 + b_3\} \tag{4.21}$$

Die Operation liefert einen Ortsvektor, der aus der Vektorsumme besteht. Anders betrachte kann man die Operation auch als eine Verschiebung eines Punktes im Raum ansehen.

4.3 Reihenfolge drehen – verschieben

Die Operation erst drehen und dann verschieben hat folgende Darstellung:

$$V^* = Q_T Q_R (1 + \varepsilon \cdot \mathbf{v}) \hat{Q}_R \hat{Q}_T \tag{4.22}$$

Q_R, Q_T und $\mathbf{v}$ gehören einem gemeinsamen Kordinatensystem an, damit die Operation zu einem sinnvollen Ergebnis führt. Die innenstehende Operation wird zuerst ausgeführt. Für das Produkt der Dualen Quaternionen findet man:

$$Q_{RT} = Q_T Q_R = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{b}\right) q = q + \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{b}q \tag{4.23}$$

Die duale Quaternion Q_{RT} (Index für 1. drehen, 2. verschieben) enthält im Primärteil die für die Drehung zuständige Quaternion und im Dualteil das Produkt von Verschiebevektor und dieser Quaternion. Aufgrund dieser klaren Trennung ist es möglich, die Dreh- und Verschiebeparamter aus der Quaternion zurückzugewinnen. Die vollständige Konjugation steht mit Gln. 4.7 und 4.17 zur Verfügung. Sie lautet

$$\hat{Q}_R \hat{Q}_T = \bar{q}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{b}\right) \tag{4.24}$$

Damit ergibt sich die Transformation :

$$V^* = Q_T Q_R (1 + \varepsilon \cdot \mathbf{v}) \hat{Q}_R \hat{Q}_T = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{b}\right) q (1 + \varepsilon \cdot \mathbf{v}) \bar{q} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{b}\right) \tag{4.25}$$

Ausmultiplizieren liefert:

$$V^* = \left(q + \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{b}q + \varepsilon \cdot q\mathbf{v}\right)\left(\bar{q} + \frac{\varepsilon}{2}\bar{q}\mathbf{b}\right) = q\bar{q} + \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbf{b}q\bar{q} + \frac{1}{2}q\bar{q}\mathbf{b} + q\mathbf{v}\bar{q}\right) \tag{4.26}$$

Mit $q\bar{q} = 1$ erhält man

$$V^* = 1 + \varepsilon \cdot (q\mathbf{v}\bar{q} + \mathbf{b}) \tag{4.27}$$

Das Ergebnis liegt wieder im Dualteil vor. Man findet einen gedrehten Vektor $\mathbf{v}$, zu dem der Verschiebevektor $\mathbf{b}$ hinzuaddiert wurde. Der neue Ortsvektor hat daher die Form

$$\mathbf{v}^* = q\mathbf{v}\bar{q} + \mathbf{b} \tag{4.28}$$

und liegt im Bezugssystem vor. Ein interessanter Zusammenhang sei noch erwähnt. Wenn eine Einheitsquaternion gegeben ist, läßt sich der Verschiebevektor $\mathbf{b}$ einfach durch Nachmultiplikation mit der Konjugierten ermitteln. Nimmt man Gl. 4.23 und multipliziert mit Gl. 4.24 so erhält man

$$Q_T Q_R \hat{Q}_R \hat{Q}_T = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{b}\right) q\bar{q} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{b}\right) \tag{4.29}$$

$$Q_T Q_R \hat{Q}_R \hat{Q}_T = 1 + \varepsilon \cdot \mathbf{b} \tag{4.30}$$

Diese Operation liefert also den in Einheitsquaternionen enthaltenen Verschiebevektor.

4.4 Reihenfolge verschieben – drehen

Die Operation erst verschieben und dann drehen wird durch Tauschen von Q_R und Q_T umgesetzt:

$$V^* = Q_R Q_T (1+\varepsilon \cdot \mathbf{v}) \hat{Q}_T \hat{Q}_R \tag{4.31}$$

Mit den Gln. 4.6 und 4.15 ergibt das

$$V^* = q\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{b}\right)(1+\varepsilon\cdot\mathbf{v})\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{b}\right)\overline{q} \tag{4.32}$$

$$V^* = \left(q+\varepsilon\cdot q\mathbf{v}+\frac{\varepsilon}{2}q\mathbf{b}\right)\left(\overline{q}+\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{b}\overline{q}\right) = q\overline{q}+\varepsilon\cdot q\mathbf{v}\overline{q}+\frac{\varepsilon}{2}q\mathbf{b}\overline{q}+\frac{\varepsilon}{2}q\mathbf{b}\overline{q} \tag{4.33}$$

$$V^* = 1+\varepsilon\cdot\left(q\mathbf{v}\overline{q}+q\mathbf{b}\overline{q}\right) \tag{4.34}$$

Der verdrehte und verschobene Vektor liegt wieder im Dualteil vor:

$$\mathbf{v}^* = q\mathbf{v}\overline{q}+q\mathbf{b}\overline{q} = q(\mathbf{v}+\mathbf{b})\overline{q} \tag{4.35}$$

Im Ergebnis wurde also die Summe der Vektoren **v**+**b** gedreht.

Der Vergleich der Reihenfolgen zeigt, daß die Ergebnisse von der Reihenfolge von Rotation und Verschiebung abhängen. Wenn man möchte, daß Drehung und Verschiebung unabhängig von einander sind, muß die Reihenfolge erst drehen und dann verschieben nach Abschnitt 4.3 gewählt werden.

4.5 Drehung und Verschiebung auf derselben Achse

Drehung und Verschiebung auf gemeinsamer Achse stellt eine Besonderheit dar. Die Achse sei durch den Einheitsvektor **n** gegeben. Der zweite Summand in Gl. 4.35 läßt sich dann mit den Größen

$$p = \mathbf{cos}\frac{\varphi}{2}+\mathbf{n}\cdot\mathbf{sin}\frac{\varphi}{2} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}=\mathbf{n}\cdot b \quad \text{und } \mathbf{nn} = \text{-}1 \tag{4.36}$$

wie fogt schreiben:

$$p\mathbf{b}\overline{p} = \left(\mathbf{cos}\frac{\varphi}{2}+\mathbf{n}\cdot\mathbf{sin}\frac{\varphi}{2}\right)(\mathbf{n}\cdot b)\left(\mathbf{cos}\frac{\varphi}{2}-\mathbf{n}\cdot\mathbf{sin}\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$p\mathbf{b}\overline{p} = \left(\mathbf{n}\cdot b\,\mathbf{cos}\frac{\varphi}{2}+\mathbf{nn}\cdot b\cdot\mathbf{sin}\frac{\varphi}{2}\right)\left(\mathbf{cos}\frac{\varphi}{2}-\mathbf{n}\cdot\mathbf{sin}\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$p\mathbf{b}\overline{p} = \mathbf{n}\cdot b\,\mathbf{cos}^2\frac{\varphi}{2}-b\cdot\mathbf{sin}\frac{\varphi}{2}\mathbf{cos}\frac{\varphi}{2}+b\,\mathbf{cos}\frac{\varphi}{2}\mathbf{sin}\frac{\varphi}{2}+\mathbf{n}\cdot b\cdot\mathbf{sin}^2\frac{\varphi}{2}$$

$$p\mathbf{b}\overline{p} = \mathbf{n}\cdot b \tag{4.37}$$

Damit nimmt die Gleichung 4.35 die Form von Gl. 4.28 an. Auf gemeinsamen Achsen ist daher die Reihenfolge von Drehung und Verschiebung vertauschbar.

5 Kinematik von Roboterarmen

Duale Quaternionen können die Kinematik von Roboterarmen beschreiben, so wie dies mit homogenen Matrizen möglich ist. So kann für die Transformation von Denavit und Hartenberg ein Duales Quaternion hergeleitet werden, mit dem kinematische Ketten abgebildet werden können.

5.1 Transformation von Denavit und Hartenberg (D+H)

Für die Transformation von einem Gelenkkoordinatensystem zum nächsten wurde von Denavit und Hartenberg eine allgemeingültige Transformation angegeben [5, 6]. Jedem Gelenk i der kinemati-

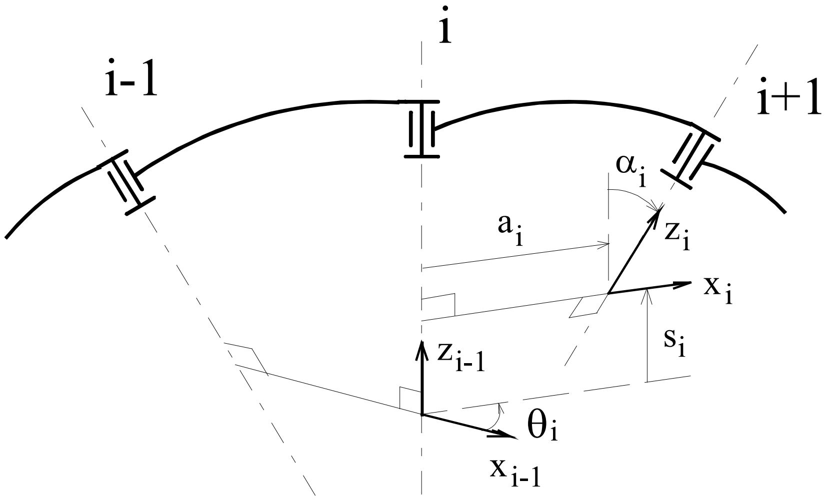

Bild 5.1: Gelenkparameter bei Denavit und Hartenberg

schen Kette wird dabei ein Koordinatensystem $S_i = (x_i, y_i, z_i)$ in der Weise zugeordnet, daß dessen z-Achse auf der Gelenkachse i+1 liegt und sich die x-Achse auf der gemeinsamen Normalen zwischen der i- und i+1-Achse befindet, und zwar in Richtung von i nach i+1. Diese Anordnung der Koordinatensysteme verdeutlicht Bild 5.1.

Die Stellung des i-ten Koordinatensystems wird bezüglich des i-1-ten durch 4 Parameter beschrieben:

1. θ_i ist der Winkel zwischen der x_{i-1}-Achse und der x_i-Achse. Er ist positiv zu nehmen, wenn er rechts um die positive z_{i-1}-Achse dreht.
2. $\mathbf{s}_i$ ist der Abstand zwischen den zwei Normalen auf der z_{i-1}-Achse . Er ist positv in Richtung der z_{i-1}-Achse.
3. $\mathbf{a}_i$ ist der Abstand von der z_{i-1}-Achse zur z_i-Achse entlang der gemeinsamen Normalen in Richtung der positiven x_i-Achse.
4. α_i ist der Winkel, um den die z_i-Achse gegen die z_{i-1}-Achse verdreht ist. Er ist positiv, wenn er rechts um die positive x_i-Achse dreht.

Die Transformation von D+H wird durch folgende vier Transformationsmatrizen beschrieben, die der Reihe nach folgende Wirkung haben: Drehung um die z_{i-1}-Achse ($\mathbf{T}_{i-1,1}$), Verschiebung entlang der z_{i-1}-Achse ($\mathbf{T}_{1,2}$), Verschiebung entlang der x_i-Achse ($\mathbf{T}_{2,3}$), Drehung um die x_i-Achse ($\mathbf{T}_{3,i}$)

$$\mathbf{T}_{i-1,1} = \begin{Bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{T}_{1,2} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{T}_{2,3} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \qquad (5.1)$$

$$\mathbf{T}_{3,i} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \qquad (5.2)$$

Zusammengefaßt lautet die Transformation vom i-1-ten in das i-te Koordinatensystem damit

$$\mathbf{T}_{i-1,\,i} = \mathbf{T}_{i-1,\,1}\,\mathbf{T}_{1,\,2}\,\mathbf{T}_{2,\,3}\,\mathbf{T}_{3,\,i} \qquad (5.3)$$

oder als Ergebnis:

$$\mathbf{T}_{i-1,\,i} = \begin{Bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \qquad (5.4)$$

Die ersten drei Spalten dieser Matrix bedeuten die Koordinaten der Einheitsvektoren des i-ten Koordinatensystems angegeben im i-1-System. Die vierte Spalte enthält die Koordinaten des Verschiebevektors vom Urprungs des i-1-ten zum Urprungs des i-ten Koordinatensystems. Dabei zählen jeweils nur die oberen drei Elemente der Matrix. Die Matrix bildet daher die Position und die Orientierung des i-ten Koordinatensystems im i-1-ten ab. Eine ähnliche Abbildung soll nun auch mit Dualen Quaternionen hergestellt werden.

Quaternionen wirken nicht auf Koordinatensysteme, sondern lediglich auf Vektoren, genauer gesagt, auf Ortsvektoren oder Punkte im Vektorraum. Die Aufgabe muß daher umformuliert werden. Ziel ist es, einen Ortsvektor vom Koordinatensystem i-1, z. B. den Einheitsvektor $\mathbf{e}_{xi-1}$, in das System i zu transformieren in den Ortsvektor $\mathbf{e}_{xi}$. Mit anderen Worten soll der Punkt, auf den $\mathbf{e}_{xi-1}$ im System i-1 zeigt, an die Stelle transformiert werden, auf die der Einheitsvektor $\mathbf{e}_{xi}$ im Sytem i zeigt. Diese Transformation transformiert natürlich auch die Einheitsvektoren der y- und z-Achse.

Bei der Herleitung der Quaternion muß die Reihenfolge der Einzeloperationen muß die Reihenfolge der Operationen so gewählt werden, daß sie alle im Bezugssystem ausgeführt werden, hier also im System i-1.

Ein Blick auf Bild 5.1 zeigt, daß es bei der letzen Operation von D+H Schwierigkeiten gibt, da die Drehung um x_i nicht im Bezugssystem erfolgt. Das Problem läßst sich nur lösen, wenn die Drehoperation als erste ausgeführt wird, während der Eiheitsvektor $\mathbf{e}_{xi-1}$ noch auf der x_{i-1}-Achse liegt. Der erste Schritt lautet also (die 1 als zweiter Index gibt den 1. Zwischenschritt an)

$$Q\mathbf{e}_{xi-1,1}(\alpha_i) = Q_\alpha(\alpha_i)\left(1 + \varepsilon \cdot i \cdot e_{xi-1}\right)\hat{Q}_\alpha(\alpha_i) \qquad (5.5)$$

Als zweiter Schritt wird $\mathbf{e}_{xi-1,1}$ entlang der x_{i-1}-Achse um den Weg a_i (Verschiebvektor) verschoben und dann entlang der z_{i-1}-Achse um den Weg s_i. Die Verschiebereihenfolge spielt keine Rolle. Danach kann die Drehung um die z_{i-1}-Achse erfolgen. Dadurch, daß erst verschoben und dann gedreht wird, werden $\mathbf{e}_{xi-1}$ und der Verschiebvektor gemeinsam gedreht, siehe Abschnitt 4.4 Gl. 4.35. Die Gesamttransformation hat nun die Form

$$Qe_{xi-1,i}(\theta_i,s_i,a_i,\alpha_i) = Q_\theta(\theta_i)Q_s(s_i)Q_a(a_i)Q_\alpha(\alpha_i)(1+\varepsilon\cdot i\cdot e_{xi-1})\hat{Q}_\alpha(\alpha_i)\hat{Q}_a(a_i)\hat{Q}_s(s_i)\hat{Q}_\theta(\theta_i) \tag{5.6}$$

Sie transformiert mit Gl. 5.7 den Einheitsvektor $\mathbf{e}_{xi-1}$ aus dem Bezugssystem in das System i, aber auch jeden anderen Ortsvektor. Das Produkt der vier Dualen Quaternionen ist die Transformation von D+H in Quaternionenform und entspricht Transformationsmatrix von Gl. 5.4.

$$Q_{i-1,i}(\theta_i,s_i,a_i,\alpha_i) = Q_\theta(\theta_i)Q_s(s_i)Q_a(a_i)Q_\alpha(\alpha_i) \tag{5.7}$$

Die vier Dualen Quaternionen haben die Form:

$$Q_\alpha(\alpha_i) = \mathbf{cos}\frac{\alpha_i}{2} + i\,\mathbf{sin}\frac{\alpha_i}{2} \tag{5.8}$$

$$Q_a(a_i) = 1+\varepsilon\cdot i\cdot\frac{a_1}{2} \tag{5.9}$$

$$Q_s(s_i) = 1+\varepsilon\cdot k\cdot\frac{s_i}{2} \tag{5.10}$$

$$Q_\theta(\theta_i) = \mathbf{cos}\frac{\theta_i}{2} + k\,\mathbf{sin}\frac{\theta_i}{2} \tag{5.11}$$

Das Produkt der Quaternionen von Gl. 5.7 wird nun ausmultipliziert. Zunächst werden die beiden Verschiebungen s_i und a_i behandelt. Das Produkt von $Q_a(a_i)$ und $Q_s(s_i)$ ergibt:

$$Q_{sa}(s_i,a_i) = Q_s(s_i)Q_a(a_i) = \left[1+\frac{\varepsilon}{2}\cdot(i0+j0+ks_i)\right]\left[1+\frac{\varepsilon}{2}\cdot(ia_i+j0+k0)\right] = 1+\frac{\varepsilon}{2}\cdot(ia_i+j0+ks_i)$$

Die Vormultiplikation mit $Q_{\theta i}$ führt zu $Q_{\theta sa}$

$$Q_{\theta sa}(\theta_i,s_i,a_i) = Q_\theta(\theta_i)Q_{sa}(s_i,a_i) = \left[\mathbf{cos}\frac{\theta_i}{2}+k\,\mathbf{sin}\frac{\theta_i}{2}\right]\left[1+\frac{\varepsilon}{2}\cdot(ia_i+j0+ks_i)\right]$$

$$Q_{\theta sa}(\theta_i,s_i,a_i) = \left[\cos\frac{\theta_i}{2}+k\sin\frac{\theta_i}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\left(-s_i\sin\frac{\theta_i}{2}+ia_i\cos\frac{\theta_i}{2}+ja_i\sin\frac{\theta_i}{2}+ks_i\cos\frac{\theta_i}{2}\right)\right]$$

Die Nachmultiplikation mit $Q_\alpha(\alpha_i)$ vervollständigt die Transformation:

$$Q_{i-1,i}(\theta_i,s_i,a_i,\alpha_i) = Q_{\theta sa}(\theta_i,s_i,a_i)Q_\alpha(\alpha_i)$$
$$= \left[\left(\cos\frac{\theta_i}{2}+k\sin\frac{\theta_i}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\left(-s_i\sin\frac{\theta_i}{2}+ia_i\cos\frac{\theta_i}{2}+ja_i\sin\frac{\theta_i}{2}+ks_i\cos\frac{\theta_i}{2}\right)\right]\left(\cos\frac{\alpha_i}{2}+i\sin\frac{\alpha_i}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} Q_{i-1,i}(\theta_i,s_i,a_i,\alpha_i) &= \left(\cos\frac{\alpha_i}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}+i\sin\frac{\alpha_i}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}+j\sin\frac{\alpha_i}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}+k\cos\frac{\alpha_i}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}\right) \\ &+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\left(\begin{aligned}&-a_i\sin\frac{\alpha_i}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}-s_i\cos\frac{\alpha_i}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}+ia_i\cos\frac{\alpha_i}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}-i\cdot s_i\sin\frac{\alpha_i}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}\\ &+ja_i\cos\frac{\alpha_i}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}+js_i\sin\frac{\alpha_i}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}-ka_i\sin\frac{\alpha_i}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}+ks_i\cos\frac{\alpha_i}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}\end{aligned}\right) \end{aligned} \tag{5.12}$$

Für die weitere Betrachtung ist es hilfreich, Gl. 5.12 in Spaltenmatrixform zu schreiben. In dieser Darstellung sieht die Lösung wie folgt aus, siehe auch [5]:

$$Q_{i-1,i}(\theta_i,s_i,a_i,\alpha_i)=\left\{\begin{matrix}\cos\frac{\alpha_i}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}\\+i\sin\frac{\alpha_i}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}\\+j\sin\frac{\alpha_i}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}\\+k\cos\frac{\alpha_i}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}\end{matrix}\right\}+\varepsilon\left[\begin{matrix}-\frac{1}{2}a_i\sin\frac{\alpha_i}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}-\frac{1}{2}s_i\cos\frac{\alpha_i}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}\\+i\frac{1}{2}a_i\cos\frac{\alpha_i}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}-i\frac{1}{2}s_i\sin\frac{\alpha_i}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}\\+j\frac{1}{2}a_i\cos\frac{\alpha_i}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}+j\frac{1}{2}s_i\sin\frac{\alpha_i}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}\\-k\frac{1}{2}a_i\sin\frac{\alpha_i}{2}\sin\frac{\theta_i}{2}+k\frac{1}{2}s_i\cos\frac{\alpha_i}{2}\cos\frac{\theta_i}{2}\end{matrix}\right] \quad (5.13)$$

Die Duale Quaternion von Gl. 5.13 enthält alle vier Parameter von D+H und beschreibt einen Gelenkabschnit einer kinematischen Kette. Mit Blick auf Gl. 4.23 enthält der Primärteil die Quaternion für die Rotation, währen der Dualteil das Produkt von Verschiebevektor und Rotationsquaternion enthält. Was das genau bedeutet, soll an einem Beispiel erörtert werden.

5.2 Bestimmung von Positionen

Betrachtet wird Bild 5.2, das man sich als abstrakten Roboterarm vorstellen kann mit je einem Gelenk in den Punkten 1 und 2. Dieses einfache Schema ist geeignet, die Wirkungsweise von Gl. 5.7 als Transformation von Denavit und Hartenberg (D+H) anschaulich darzustellen. Für das Schema von Bild 5.2 lauten die Parameter von D+H zunächst wie folgt:

Gelenk	θ	s	a	α
1	$\theta_1 = 0°$	$s_1 = 3$	$a_1 = 1$	$\alpha_1 = 0°$
2	$\theta_2 = 0°$	$s_2 = 0$	$a_1 = 3$	$\alpha_2 = 0°$

Tabelle 5.1

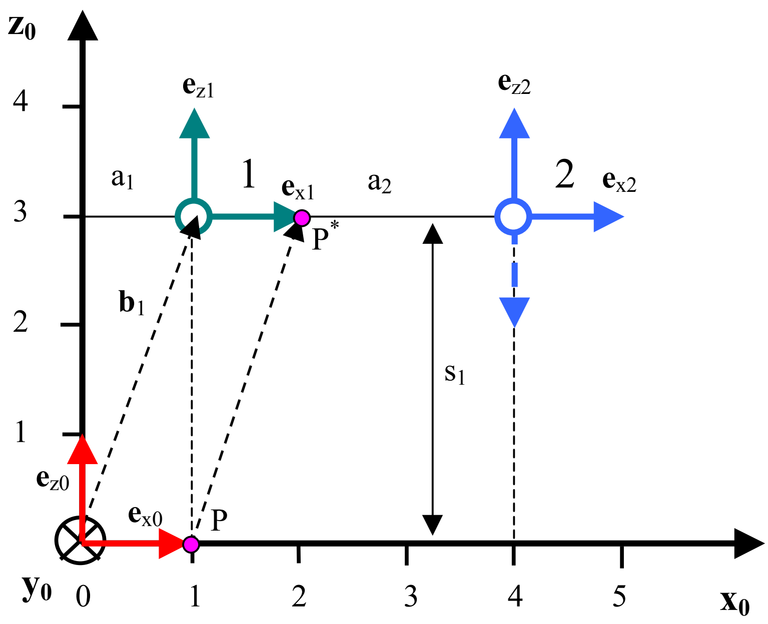

Bild 5.2: Gelenkarmschema

Die Aufgabe der Transformation von D+H ist es, die Koordinatensysteme 1 und 2 im Bezugssystem 0 zu beschreiben. Wir beginnen mit Koordinatensystem 1. Die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_{x0}$, $\mathbf{e}_{y0}$ und $\mathbf{e}_{z0}$ im System 1 haben als Duale Quaternionen die Darstellung

$$Q\mathbf{e}_{x0} = [1 + \varepsilon \cdot i] \qquad (5.14a)$$
$$Q\mathbf{e}_{y0} = [1 + \varepsilon \cdot j] \qquad (5.14b)$$
$$Q\mathbf{e}_{z0} = [1 + \varepsilon \cdot k] \qquad (5.14c)$$

Exemplarisch wird das D+H-Quaternion der Gl. 5.13 im Sinne von Gl. 4.1 auf den Vektor $Q\mathbf{e}_{x0}$ angewandt und überprüft, welches Ergebnis sich einstellt.

$$Q\mathbf{e}_{x0}{}^{*} = Q_{01}(\theta_i, s_i, a_i, \alpha_i)\, Q\mathbf{e}_{x0}\, \hat{Q}_{01}(\theta_i, s_i, a_i, \alpha_i) \qquad (5.15)$$

Da die Lösung der Gl. 5.13 sehr langwierig ist, wird sie numerisch mit Mathcad ausgeführt. Dafür werden die Duale Quaternionen als Spaltenvektoren mit 8 Zeilen dargestellt. Die Duale Quaternion

$$Q = p_0 + i \cdot p_1 + j \cdot p_2 + k \cdot p_3 + \varepsilon \cdot (q_0 + i \cdot q_1 + j \cdot q_2 + k \cdot q_3) \qquad (5.16)$$

wird abgebildet durch den Spaltenvektor

$$Q = [p_0\ p_1\ p_2\ p_3\ q_0\ q_1\ q_2\ q_3]^T \qquad (5.17)$$

Die ersten vier Parameter stellen dann den Primärteil dar und die hinteren 4 den Dualteil. Der Vorteil dieser Darstellung besteht darin, daß für die Verarbeitung nun Matrizenoperationen eingesetzt werden können. Der $\mathbf{e}_{x0}$-Vektor des Koordinatensystems 1 entspricht beispielsweise der Darstellung:

$$Q\mathbf{e}_{x0} = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0]^T \qquad (5.18)$$

Mit Rücksicht auf die Berechnungen mit Mathcad im Kapitel 6 wird die Transformation von D+H von Gl. 5.13 mit QDH(θ, s, a, α) bezeichnet, also

$$QDH(\theta, s, a, \alpha) = Q_{i-1,i}(\theta, s, a, \alpha) \qquad (5.19)$$

Die Mathcad-Formulierung der Quaternion für die Transformation vom Koordinatensystem 0 zum System 1 lautet

$$QDH01 = QDH(\theta_1, s_1, a_1, \alpha_1) \qquad (5.20)$$

Die Tranformation selbst hat die Darstellung

Qex1= Q2M(Q2M(QDH01) Q**e**x0)*MKONJ* QDH01 (5.21)

Q2M ist eine Funktion, die die Quaternion QDH in eine Matrix umwandelt, mit der die Quaternion Qex0 multipliziert werden kann. Die Matrix MKONJ liefert die Konjugierte der nachmultiplizierten Quaternion. Das Ergebnis ist

$$Qex1 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 3]^T \qquad (5.22)$$

Dieses besagt, daß die Vektorspitze von $\mathbf{e}_{x1}$ im Koordinatensystem 0 die Position (2, 0, 3) hat. Die Operation hat also den Endpunkt des Ortsvektors $\mathbf{e}_{x0}$, den Punkt P in den Punkt P^* umgerechnet. Auf diesen Punkt zeigt die Vektorspitze von $\mathbf{e}_{x1}$.

Auf die gleiche Weise kann auch die Position der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_{y1}$ und $\mathbf{e}_{z2}$ ermittelt werden. Statt einen der Einheitsvektoren vorzugeben, kann man aber auch den Ursprung $\mathbf{o}_1 = (0,0,0)$ des Koordinatensystems 0 ins System 1 transformieren und erhält die Koordinaten $\mathbf{o}_1 = (1, 0, 3)$ des Ursprungs von System 1 geliefert. Der Ursprung entspricht im System 1 dem Dualen Einheitsquaternium

$$\mathbf{o}_1 = (1 + \varepsilon\, 0) \qquad (5.23)$$

Wenn dieses in Gl. 5.15 eingesetzt wird, entspricht das der Gl. 4.28, die gerade den Veschiebevektor **b** liefert, d. h. die Position von $\mathbf{o}_1 = \mathbf{b}_1$. Auf die beschriebene Weise läßt sich daher recht einfach die Position eines verschobenen Koordinatensystems bestimmen.

Um das Gelenkschema von Bild 5.2 vollständig zu beschreiben, wird noch die D+H-Quaternion von Koordinatensystem 2 benötigt. Diese beschreibt die Stellung des Systems 2 im Koordinatensystem 1. Die Parameter des Gelenk 2 werden neu gewählt und entsprechen nun nicht mehr denen von Bild 5.2:

Gelenk	θ	s	a	α
2	$\theta_2 = 90°$	$s_2 = 0$	$a_1 = 3$	$\alpha_2 = 180°$

Die D+H-Quaternion mit diesen Parametern ist

$$QDH12 = QDH(\theta_2, s_2, a_2, \alpha_2) \tag{5.24}$$

Die Gesamttransformation sollte dann mit dem Produkt der beiden D+H-Quaternionen gegeben sein, was hier nicht mathematisch begründet wird, sondern nur numerischen Beispiel. Betrachtet wird also die Duale Quaternion

$$Q_{0,2} = Q_{0,1}(\theta_1, s_1, a_1, \alpha_1)\, Q_{1,2}(\theta_2, s_2, a_2, \alpha_2) \tag{5.25}$$

Wir bestimmen zunächst den Ursprung von System 2 im System 0 mit Hilfe der Operation

$$Qo2 = Q2M(QDH02)\ MKONJ\ QDH02 \tag{5.26}$$

Die Rechnung liefert für den Ursprung des Systems 2 die Koordinaten $\mathbf{o}_2 = (1, 3, 3)$. Diesmal tritt eine y-Komponente auf, weil der 2. Armteil mit dem Winkel $\theta_2 = 90°$ um die z_1-Achse in die Bildebene hinein geklappt wurde. Das letzte Koordinatensystem beschreibt bei Robotern den Arbeitspunkt des Werkzeuges, den sogenannten Tool Centre Point (TCP). Bei Greifern ist dies der Greifpunkt. Auf diesen Punkt zeigt die z-Achse des letzten Koordinatensystems. Diese Position kann man nach der Methode von Gl. 5.16 berechnen, hier als Beispiel für $\mathbf{e}_{z2}$:

$$Qez2 = Q2M(Q2M(QDH02)\ Qez0))\ MKONJ\ QDH02 \tag{5.27}$$

In der Simulation ergibt sich die Position $\mathbf{e}_{z2} = (1, 3, 2)$. Die Position liegt um die Länge von $\mathbf{e}_{z2}$ unterhalb des Ursprungs, weil die z_2-Achse um α_2=180° um die x_2-Achse nach unten gedreht worden ist. Man kann also festhalten, daß die D+H-Quaternionen die Koordinatenpositionen den Gelenke richtig abbilden, und daß man eine Serienanordnung von Gelenkarmen durch eine Multiplikation dieser Dualen Quaternionen modellieren kann. Man spricht dann von einem *Kinematischen Vorwärts-Modell*, das in der angelsächsischen Literatur als *Forward Kinematik Model* (FKM) bezeichnet wird. Ein 6-achsiger Roboter hat somit das Model

$$Q_{0,6} = Q_{0,1}Q_{1,2}\ Q_{2,3}Q_{3,4}\ Q_{4,5}Q_{5,6} \tag{5.28}$$

5.3 Bestimmung der Orientierung

Für Bearbeitungsaufgaben ist sowohl die Position des TCP von Bedeutung als auch die Orientierung z. B. des Greifers, dessen Backen sich entlang der x-Achse des Greiferkoordinatensystems bewegen. Deshalb ist es wichtig auch die Orientierung diese Koordinatensystems ermitteln zu können. Die Orientierung läßt sich z. B. mit den Winkeln *α, β, γ* beschreiben, deren Drehungen um die Achse *x, y, z* des Systems nach einander in die bestehende Orientierung geführt haben. Zu solchen Drehungen gehören die Transformationsmatrizen von Gl. 5.29:

$$Rx(\alpha) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad Ry(\beta) := \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad Rz(\gamma) := \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

Diese lassen sich zu einer Drehmatrix zusammenfassen, die einen Vektor gleichzeitig um drei Achsen dreht:

$$Rxyz(\alpha, \beta, \gamma) = Rx(\alpha)\, Ry(\beta)\, Rz(\gamma) \qquad (5.30)$$

Die Matrix $Rxyz(\alpha, \beta, \gamma)$ hat die Form

$$Rxyz(\alpha,\beta,\gamma) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(\beta)\cdot\cos(\gamma) & -\cos(\beta)\cdot\sin(\gamma) & \sin(\beta) \\ \cos(\alpha)\cdot\sin(\gamma)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cdot\cos(\gamma) & \cos(\alpha)\cdot\cos(\gamma)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\gamma) & -\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cdot\sin(\gamma)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cdot\cos(\gamma) & \sin(\alpha)\cdot\cos(\gamma)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\gamma) & \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) \end{bmatrix} \qquad (5.31)$$

Der Operators von Gl. 4.1 zur Drehung eines Vektors läßt sich auch in eine Matrix umwandeln, die die gleiche Transformation bewirkt wie die Matrix von Gl. 5.31 [1]:

$$\mathbf{R}(p) = \begin{bmatrix} 1-2(p_2^2+p_3^2) & 2(p_1p_2-p_0p_3) & 2(p_1p_3+p_0p_2) \\ 2(p_1p_2+p_0p_3) & 1-2(p_1^2+p_3^2) & 2(p_2p_3-p_0p_1) \\ 2(p_1p_3-p_0p_2) & 2(p_2p_3+p_0p_1) & 1-2(p_1^2+p_2^2) \end{bmatrix} \qquad (5.32)$$

Aus dem Vergleich der beiden Matrizen können die Drewinkel ermittelt werden:

$$\alpha = \mathbf{arctan}\,2\frac{\mathbf{R}(p)_{23}}{\mathbf{R}(p)_{33}} = \mathbf{arctan}\,2\left(1-2(p_1^2+p_2^2),-2(p_2p_3-p_0p_1)\right) \qquad (5.33)$$

$$\beta = \mathbf{arcsin}\left(2(p_1p_3+p_0p_2)\right) \qquad (5.34)$$

$$\gamma = \mathbf{arctan}\,2\frac{\mathbf{R}(p)_{12}}{\mathbf{R}(p)_{11}} = \mathbf{arctan}\,2\left(1-2(p_2^2+p_3^2),2(p_1p_2-p_0p_3)\right) \qquad (5.35)$$

In der Formulierung von Mathcad lautet Gl. 5.25

$$QDH02 = Q2M(DH01)\; QDH12 \qquad (5.36)$$

Aus dieser Quaternion wird der Primärteil p extrahiert. Es ergibt sich

$$p = Q2p(QDH02) = [0 \;\; 0{,}707 \;\; 0{,}707 \;\; 0]^T \qquad (5.37)$$

Damit liefern die Gl. 5.33 bis 5.33 die Winkel

$$\begin{aligned} \alpha &= 180\,° \\ \beta &= -4{,}387\; 10^{-14}\,° \approx 0\,° \\ \gamma &= -90\,° \end{aligned} \qquad (5.38)$$

Der Winkel α = 180 ° besagt, daß z_2 um die x_2-Achse gedreht wurde und nach unten zeigt. Um die y_2 wurde nicht gedreht. Danach fand noch eine Drehung um die verdrehte z_2-Achse statt mit γ = -90 °, so daß die x_2-Achse in Richtung der y_0-Achse zeigt.

5.4 Zusammenfassung

Die Betrachtung zeigt, daß man mit Dualen Quaternionen die Kinematik von Gelenkarmen nach der Methode von Denavit und Hartenberg beschreiben kann. Die Reihenschaltung von Gelenkarmen wird durch das Produkt solcher Dualen Quaternionen abgebildet. Das Produkt stellt ein Kinematisches Vorwärts-Model eines Gelenkarms dar. Aus diesem Model sind Position und Orientierung des TCP leicht zu ermitteln

6 Berechnungen zumBeispiel 5.2 mit Mathcad

Duale Quaternionen und die Transformation von D+H

Programm für Mathcad 8 Professional

Achtung! Variablen werden nicht definiert. Die Rechnung erfolgt allgemein

Umrechnungen:

Quaternionen | **Konjugierte** | **Realteil von q** | **Vektor von q** | **q aus Vektor**

$$p := \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad q := \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad \mathrm{qconj}(q) := \begin{bmatrix} q_0 \\ -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{bmatrix} \quad \mathrm{r2q}(r) := \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{q2v}(q) := \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad \mathrm{v2q}(v) := \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Matrizen zur Multiplikation von Quaternionen | **Matrix zur Bildung der Konjugierten**

qp = q2M(q) p | **qp = p2M(p) q**

$$\mathrm{q2M}(q) := \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{p2M}(p) := \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{MKONJ} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplikation von Dualen Quaternionen mit einer Matrix

Schema:

Q1 Q2 = (p1, q1) (p2, q2) = (p1 p2, p1 q2 + q1 p2)

$$\mathrm{Q1\ Q2} = \begin{vmatrix} p1 & 0 \\ q1 & p1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p2 \\ q2 \end{vmatrix}$$

$$Q := \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{bmatrix} \quad \mathrm{Q2M}(Q) := \begin{bmatrix} Q_0 & -Q_1 & -Q_2 & -Q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_1 & Q_0 & -Q_3 & Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_2 & Q_3 & Q_0 & -Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_3 & -Q_2 & Q_1 & Q_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_4 & -Q_5 & -Q_6 & -Q_7 & Q_0 & -Q_1 & -Q_2 & -Q_3 \\ Q_5 & Q_4 & -Q_7 & Q_6 & Q_1 & Q_0 & -Q_3 & Q_2 \\ Q_6 & Q_7 & Q_4 & -Q_5 & Q_2 & Q_3 & Q_0 & -Q_1 \\ Q_7 & -Q_6 & Q_5 & Q_4 & Q_3 & -Q_2 & Q_1 & Q_0 \end{bmatrix}$$

Primärteil

$\mathrm{Q2p}(Q) := \mathrm{submatrix}(Q, 0, 3, 0, 0)$

Dualteil

$\mathrm{Q2q}(Q) := \mathrm{submatrix}(Q, 4, 7, 0, 0)$

Transformation von D+H QDH(θ, s, a, α) = Qθ(θ) Qs(s) Qa(a) Qα(α)

$$Q\theta(\theta) := \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Qs(s) := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{s}{2} \end{bmatrix} \qquad Qa(a) := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Q\alpha(\alpha) := \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Qsa(s,a) := Q2M(Qs(s))\cdot Qa(a) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\cdot a \\ 0 \\ \frac{1}{2}\cdot s \end{bmatrix} \qquad Q\theta sa(\theta,s,a) := Q2M(Q\theta(\theta))\cdot Qsa(s,a) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\cdot\theta\right) \\ 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{1}{2}\cdot\theta\right) \\ \frac{-1}{2}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\theta\right)\cdot s \\ \frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\theta\right)\cdot a \\ \frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\theta\right)\cdot a \\ \frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\theta\right)\cdot s \end{bmatrix}$$

$$QDH(\theta,s,a,\alpha) := Q2M(Q\theta sa(\theta,s,a))\cdot Q\alpha(\alpha) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\cdot\theta\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha\right) \\ \cos\left(\frac{1}{2}\cdot\theta\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}\cdot\theta\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}\cdot\theta\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha\right) \\ \frac{-1}{2}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\theta\right)\cdot s\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha\right) - \frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\theta\right)\cdot a\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha\right) \\ \frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\theta\right)\cdot a\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha\right) - \frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\theta\right)\cdot s\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha\right) \\ \frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\theta\right)\cdot a\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha\right) + \frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\theta\right)\cdot s\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha\right) \\ \frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\theta\right)\cdot s\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha\right) - \frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\theta\right)\cdot a\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha\right) \end{bmatrix}$$

BEISPIEL von Bild 5.2

$\theta 1 := 0$ $s1 := 3$ $a1 := 1$ $\alpha 1 := 0\ \mathrm{Grad}$

$\theta 2 := 90\ \mathrm{Grad}$ $s2 := 0$ $a2 := 3$ $\alpha 2 := 180\ \mathrm{Grad}$

$QDH01 := QDH(\theta 1, s1, a1, \alpha 1)$

$QDH12 := QDH(\theta 2, s2, a2, \alpha 2)$

$$QDH01 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 1.5 \end{bmatrix} \qquad QDH12 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.707 \\ 0.707 \\ 0 \\ -1.061 \\ 0 \\ 0 \\ -1.061 \end{bmatrix}$$

Produkt der D+H-Quaternionen

$QDH02 := Q2M(QDH01) \cdot QDH12$

$QDH02\_ := MKONJ \cdot QDH02$

$$Qex0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Qey0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Qez0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Qo0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad QDH02 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.707 \\ 0.707 \\ 0 \\ -1.414 \\ -1.061 \\ 1.061 \\ -0.707 \end{bmatrix}$$

$Qex1 := Q2M(Q2M(QDH01) \cdot Qex0) \cdot MKONJ \cdot QDH01$

$Qey1 := Q2M(Q2M(QDH01) \cdot Qey0) \cdot MKONJ \cdot QDH01$

$Qez1 := Q2M(Q2M(QDH01) \cdot Qez0) \cdot MKONJ \cdot QDH01$

$Qo1 := Q2M(Q2M(QDH01) \cdot Qo0) \cdot MKONJ \cdot QDH01$

$$Qex1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad Qey1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad Qez1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad Qo1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Positionen des Gelenks 1

Position des Gelenks 2

Qo2 := Q2M(QDH02)·QDH02_

$$Qo2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ursprung 2

Qez2 := Q2M(Q2M(QDH02)·Qez0)·QDH02_

$$Qez2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ez2 in System 0

Rotationsmatrix mit Quaternionen zum Vergleich mit Rxyz

$$R(p) := \begin{bmatrix} 1-2\cdot\left[(p_2)^2+(p_3)^2\right] & 2\cdot(p_1\cdot p_2 - p_3\cdot p_0) & 2\cdot(p_1\cdot p_3 + p_2\cdot p_0) \\ 2\cdot(p_1\cdot p_2 + p_3\cdot p_0) & 1-2\cdot\left[(p_1)^2+(p_3)^2\right] & 2\cdot(p_2\cdot p_3 - p_1\cdot p_0) \\ 2\cdot(p_1\cdot p_3 - p_2\cdot p_0) & 2\cdot(p_2\cdot p_3 + p_1\cdot p_0) & 1-2\cdot\left[(p_1)^2+(p_2)^2\right] \end{bmatrix}$$

$$Rx(\alpha) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad Ry(\beta) := \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad Rz(\gamma) := \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Rxyz(\alpha,\beta,\gamma) := Rx(\alpha)\cdot(Ry(\beta)\cdot Rz(\gamma))$ **Rotationsmatrix**

$$Rxyz(\alpha,\beta,\gamma) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(\beta)\cdot\cos(\gamma) & -\cos(\beta)\cdot\sin(\gamma) & \sin(\beta) \\ \cos(\alpha)\cdot\sin(\gamma)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cdot\cos(\gamma) & \cos(\alpha)\cdot\cos(\gamma)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\gamma) & -\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cdot\sin(\gamma)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cdot\cos(\gamma) & \sin(\alpha)\cdot\cos(\gamma)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\gamma) & \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

Primärteil extrahieren p := Q2p(QDH02)

Orientierung von System 2 im System 0

$$\alpha := \operatorname{atan2}\left[1-2\cdot\left[(p_1)^2+(p_2)^2\right], -2\cdot(p_2\cdot p_3 - p_1\cdot p_0)\right]$$

$$\beta := \operatorname{asin}\left[2\cdot(p_1\cdot p_3 + p_2\cdot p_0)\right]$$

$$\gamma := \operatorname{atan2}\left[1-2\cdot\left[(p_2)^2+(p_3)^2\right], -2\cdot(p_1\cdot p_2 - p_3\cdot p_0)\right]$$

$\alpha = 180\cdot\text{Grad}$

$\beta = -4.387\cdot10^{-14}\cdot\text{Grad}$

$\gamma = -90\cdot\text{Grad}$

Das MathCAD-Programm steht zur Verfügung unter
http://www.ekunzeweb.de/PAPERS/Beispiel_D+H_mit_Quaternionen.mcd

7 Literatur

1 Kunze, E. G.:
http://www.ekunzeweb.de/PAPERS/Mathematische_Grundlagen_der_Quaternionen.pdf

2 Quaternion: https://de.wikipedia.org/wiki/Quaternion

3 Duale Zahlen: https://de.wikipedia.org/wiki/Duale_Zahl

4 Kenwright, Ben: A Beginners Guide to Dual-Quaternions. School of Computing Science, Newcastle University, United Kingdom

5 Luiz Radavelli, Roberto Simoni, Edson Roberto De Pieri and Daniel Martin: A Comparative Study of the Kinematics of Robots Manipulators by Denavit-Hartenberg and Dual Quaternion. Mecánica Computacional Vol XXXI, págs. 2833-2848, Salta, Argentina, 13-16 Noviembre 2012

6 Kunze, E. G.: Industrieroboter – Kinematik und Programmierung. Vorlesungsskript FH-Hannover, 2011.
http://www.ekunzeweb.de/PAPERS/Kinematik_und_Programmierung_von_Industrierobotern.pdf