第二节 单正态总体参数的假设检验

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为来自总体 X 的样本，显著性水平为 α． 此时分

1. 在 σ^2 已知情形下，μ 的假设检验；

2. 在 σ^2 未知情形下，μ 的假设检验；

3. 在 μ 已知情形下，σ^2 的假设检验；

4. 在 μ 未知情形下，σ^2 的假设检验

四种情况讨论，每种情况又有一个双侧检验和两个单侧检验.

其统计量和 H_0 的拒绝域参见表 2. 1 和表 2．2．

表 2. 1 单正态总体中均值的假设检验

编号	H_0	H_0 为真时，检验统计量及其分布	H_1	H_0 的拒绝域 W
1	$\mu=\mu_0$ (σ^2已知)	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\mu>\mu_0$	$U\ge U_\alpha$
			$\mu<\mu_0$	$U\le -U_\alpha$
			$\mu\ne\mu_0$	$\lvert U\rvert\ge U_{\frac{\alpha}{2}}$
2	$\mu=\mu_0$ (σ^2未知)	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\mu>\mu_0$	$T\ge t_\alpha(n-1)$
			$\mu<\mu_0$	$T\le -t_\alpha(n-1)$
			$\mu\ne\mu_0$	$\lvert T\rvert\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

表 2.2 单正态总体中方差的假设检验

编号	H_0	H_0 为真时，检验统计量及其分布	H_1	H_0 拒绝域 W
3	$\sigma^2=\sigma_0^2$ (μ已知)	$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n)$	$\sigma^2>\sigma_0^2$	$\chi^2\ge\chi_\alpha^2(n)$
			$\sigma^2<\sigma_0^2$	$\chi^2\le\chi_{1-\alpha}^2(n)$
			$\sigma^2\ne\sigma_0^2$	$\chi^2\ge\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$或 $\chi^2\le\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$
4	$\sigma^2=\sigma_0^2$ (μ未知)	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\sigma^2>\sigma_0^2$	$\chi^2\ge\chi_\alpha^2(n-1)$
			$\sigma^2<\sigma_0^2$	$\chi^2\le\chi_{1-\alpha}^2(n-1)$
			$\sigma^2\ne\sigma_0^2$	$\chi^2\ge\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$或 $\chi^2\le\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$

例 1 某洗衣粉厂用自动包装机进行包装，正常情况下包装量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$（单位：克），现随机抽取 25 袋洗衣粉，测得平均重量 $\bar{x}=501.5$ 克，样本标准差 $s=2.5$ 克，问

（1）可否认为 $\mu=500\ (\alpha=0.05)$?

（2）可否认为 $\sigma^2>6\ \ (\alpha=0.1)$?

解（1）$H_0:\mu=500;\quad H_1:\mu\neq 500$；

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\overset{\text{在}H_0\text{成立下}}{=}\frac{\overline{X}-500}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)\text{；}$$

由 $\alpha=0.05, n=25$ 得拒绝域为

$$W:\ |T|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(24)=2.0639\,.$$

（续解） 又$\bar{x}=501.5, s=2.5$，得$T_0=\dfrac{501.5-500}{2.5/\sqrt{25}}=3\in W$，

故拒绝H_0，即不可认为$\mu=500$.

（2）$H_0':\sigma^2\le 6;\quad H_1':\sigma^2>6$，转化为

$$H_0':\sigma^2=6;\quad H_1':\sigma^2>6;$$

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\overset{\text{在}H_0'\text{成立下}}{=}\frac{(n-1)S^2}{6}\sim\chi^2(n-1);$$

由$\alpha=0.1,\ n=25$得拒绝域为

$$W':\ \chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n-1)=\chi^2_{0.1}(24)=33.019.$$

又$s=2.5$，得$\chi_0^2=\dfrac{(25-1)\times 2.5^2}{6}=25\notin W'$，所以接受$H_0'$，

即不可认为$\sigma^2>6$.