考试科目：<u>概率论与数理统计</u>考试时间：**120** 分钟 试卷总分 100 分

<table>
<tr><td rowspan="2">题号</td><td rowspan="2">一</td><td rowspan="2">二</td><td colspan="6">三</td><td rowspan="2">四</td><td rowspan="2">总分</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td rowspan="2">得分</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

一、选择题（在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，本大题共 **5** 小题，每小题 **3** 分，总计 **15** 分）

1．掷一枚质地均匀的骰子，则在出现奇数点的条件下出现 1 点的概率为（ A ）。

(A)1/3　　(B)2/3　　(C)1/6　　(D)3/6

2．设随机变量的概率密度 $f(x)=\begin{cases} Kx^{-2} & x>1 \\ 0 & x\le 1 \end{cases}$，则 K=（ B ）。

(A)1/2　　(B)1　　(C)-1　　(D)3/2

3．对于任意随机变量 ξ,η，若 $E(\xi\eta)=E(\xi)E(\eta)$，则（ B ）。

(A) $D(\xi\eta)=D(\xi)D(\eta)$　　(B) $D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)$

(C) ξ,η 一定独立　　(D) ξ,η 不独立

5．设 $\xi\sim N(1.5,4)$，且 $\Phi(1.25)=0.8944$，$\Phi(1.75)=0.9599$，则 $P\{-2<\xi<4\}$=（ A ）。

(A)0.8543　　(B)0.1457　　(C)0.3541　　(D)0.2543

二、填空题（在每个小题填入一个正确答案，填在题末的括号中，本大题共 **5** 小题，每小题 **3** 分，总计 **15** 分）

1．设 A、B 为互不相容的随机事件 $P(A)=0.3, P(B)=0.6$，则 $P(A\cup B)=$（ 0.9 ）。

2．设有 10 件产品，其中有 1 件次品，今从中任取出 1 件为次品的概率为（ 1/10 ）。

3．设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 则 $P\{X>0.2\}=$（ 8/10 ）。

4．设 $D(\xi)=9$，$D(\eta)=16$，$\rho_{\xi\eta}=0.5$，则 $D(\xi+\eta)$=（ 13 ）。

*5．设 $y\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\dfrac{\bar{y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim$（ N(0,1) ）。

三、计算题（本大题共 **6** 小题，每小题 **10** 分，总计 **60** 分）

1．某厂有三条流水线生产同一产品，每条流水线的产品分别占总量的 25%，35%，40%，又这三条流水线的次品率分别为 0.05，0.04，0.02。现从出厂的产品中任取

一件，问恰好取到次品的概率是多少？

（1）全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{25}{100}\times\frac{5}{100}+\frac{35}{100}\times\frac{4}{100}+\frac{40}{100}\times\frac{2}{100} \qquad (6分)$$

$$=0.0345 \qquad (4分)$$

2．设连续型随机变量 X 的密度为 $f(x)=\begin{cases}Ae^{-5x}, & x>0\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

(1)确定常数 A (2)求 $P\{X>0.2\}$ (3)求分布函数 F(x).

（2）① $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{+\infty}Ae^{-5x}dx=\frac{1}{5}A=1$ (3分)

故 A=5 。

② $P(\xi>0.2)=\int_{0.2}^{+\infty}5e^{-5x}dx=e^{-1}\approx 0.3679.$ （3 分）

③当 x<0 时，F(x)=0; （1 分）

当 $x\ge 0$ 时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}dx+\int_{0}^{x}5e^{-5x}dx$ （2 分）

$=1-e^{-5x}$

故 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-5x} & ,x\ge 0\\ 0 & ,x<0\end{cases}$. （1 分）

3．设二维随机变量（ ξ,η ）的分布密度 $f(\xi,\eta)=\begin{cases}6, & \xi^2<\eta<\xi,\ 0<\xi<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

求关于 ξ 和关于 η 的边缘密度函数。

（3）

$$f_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy \qquad (2分)$$

$$=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}6dy=6(x-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases} \qquad (3分)$$

$$f_y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \qquad (2分)$$

$$=\begin{cases}\int_y^{\sqrt{y}} 6dx = 6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1 \\ 0 & 其它\end{cases} \qquad (3分)$$

4．设连续型随即变量ξ的概率密度$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \\ 0, & 其它\end{cases}$，

求 E(x),D(x)

（4） $EX=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x(2-x)dx=\frac{1}{3}+(4-1)-\frac{1}{3}(8-1)=1$ （4 分）

$EX^2=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2 x^2(2-x)dx=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}(8-1)-\frac{1}{4}(16-1)=\frac{7}{6}$ （3 分）

$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{7}{6}-1=\frac{1}{6}$ （3 分）

四．证明题（本大题共 **2** 小题，总计 **10** 分）

2．设$\{X_k\}(k=1,2,\cdots)$ 是独立随机变量序列，且$X_k\sim\begin{pmatrix} -2^k & 0 & 2^k \\ \frac{1}{2^{2k+1}} & 1-\frac{1}{2^{2k}} & \frac{1}{2^{2k+1}}\end{pmatrix}$，

试证$\{X_k\}$服从大数定理。

(2) $E(X_k)=(-2^k)\times\frac{1}{2^{2k+1}}+0\times(1-\frac{1}{2^{2k}})+2^k\frac{1}{2^{2k+1}}=0,$ (2分)

$D(X_k)=E(X_k^2)=(-2^k)^2\times\frac{1}{2^{2k+1}}+(2^k)^2\frac{1}{2^{2k+1}}=1, \qquad (k=1,2,\cdots).$ (2分)

由切比雪夫大数定理可知$\{X_k\}$服从大数定理。 （1 分）

考试科目：<u>概率论与数理统计</u> 考试时间：<u>120</u> 分钟 试卷总分 <u>100</u> 分

一、选择题（在各小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，本大题共 **5** 个小题，每小题 3 分，总计 15 分）

1．设 A,B 为两随机事件，且 $B\subset A$，则下列式子正确的是____A____

A． $P(A+B)=P(A)$　　　B． $P\left(AB\right)=P\left(A\right)$

C． $P\left(B\mid A\right)=P\left(B\right)$　　　D． $P\left(B-A\right)=P\left(B\right)-P\left(A\right)$

2. 设 $X\quad N\left(\mu,\sigma^2\right)$, 那么当 σ 增大时，$P\left\{\left|X\text{-}\mu\right|<\sigma\right\}=$ C

A．增大　　B．减少　　C．不变　　D．增减不定

3． 设 $X\sim P\left(\lambda\right)\left(poission\text{分布}\right)$, 且 $\mathrm{E}\left[\left(\mathrm{X}\text{-}1\right)\left(\mathrm{X}-2\right)\right]=1$, 则 $\lambda=$__A__

A．1　　B. 2　　C. 3　　D. 0

二、填空题（本大题共 **5** 小题，每小题 **3** 分，总计 **15** 分

1 .设 A、B、C、是三个随机事件。用 A、B、C 表示事件“A、B、C 至少有一个发生”

________ $A\cup B\cup C$;__________

2．设有 10 件产品，其中有 1 件次品，今从中任取出 1 件为次品的概率是____0.1________

3．设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X\sim N\left(1,2\right),Y\sim N\left(0,1\right)$, 则随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率

密度函数_______ $f\left(z\right)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-5}{3}\right)^2}$;_________

4．已知 $X\sim N\left(-2,0.4^2\right)$, 则 $E\left(X+3\right)^2=$ ______1.16_______

三、计算题（本大题共 **6** 小题，每小题 **10** 分，共计 **60** 分）

1．设考生的报名表来自三个地区，各有 10 份，15 份，25 份，其中女生的分别为 3 份，7 份，5 份。随机的从一地区先后任取两份报名表。求先取到一份报名表是女生的概率。

解.设 B 为“取得的报名表为女生的”, A_i 为“考生的报名表是第 i 个地区的”,i=1,2,3

由全概率公式　　2 分

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)$$　　3 分

$$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}$$ 3 分

$$=\frac{29}{90}$$ 1 分

即先取到一份报名表为女生的概率为 $=\frac{29}{90}$. 1 分

2．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}Ax+1, 0\le x<2\\ 0, \quad 其他\end{cases}$ ，求① A 值； ②X 的分布函数 $F(x)$；

③ $P\{1.5<X<2.5\}$

(1) $\because \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^2 (Ax+1)dx=2A+2=1$， $\therefore A=-\frac{1}{2}$ 2 分

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ 1 分

$$=\begin{cases}0, & x<0\\ \int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_0^x\left(-\frac{1}{2}t+1\right)dt, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$ 3 分

$$=\begin{cases}0, & x<0\\ -\frac{1}{4}x^2+x, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$ 1 分

(3) $P\{1.5<X<2.5\}=F(2.5)-F(1.5)=0.0625$ 3 分

3．设二维随机变量 (X,Y) 有密度函数： $f(x,y)=\begin{cases}ke^{-(3x+4y)}, x>0, y>0;\\ 0, \quad 其它\end{cases}$

求：（1）常数 A；

（2）(x,y) 落在区域 D 的概率，其中 $D=\{(x,y); 0<x\le 1, 0<y\le 2\}$.

3. $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} ke^{-(3x+4y)}dxdy=k\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx\int_0^{+\infty} e^{-4y}dy=\frac{k}{12}=1$， $\therefore k=12$ 5 分

$$P\left\{(x,y)\in D\right\}=P\left\{0<X\le 1,0<Y\le 2\right\}$$

$$=12\int_0^1 e^{-3x}dx\int_0^2 e^{-4y}dy=\left(1-e^{-3}\right)\left(1-e^{-8}\right)\approx 0.9502$$ 5 分

4．设足球队 A 与 B 比赛，若有一队胜 4 场，则比赛结束，假设 A，B 在每场比赛中获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$，试求平均需比赛几场才能分出胜负？

4. 设 X 为需要比赛的场数， 1 分

则 $P\{X=4\}=\frac{1}{8}$， $P\{X=5\}=\frac{1}{4}$， $P\{X=6\}=\frac{5}{16}$， $P\{X=7\}=\frac{5}{16}$， 4 分

所以 $E(X)=4\times\frac{1}{8}+5\times\frac{1}{4}+6\times\frac{5}{16}+7\times\frac{5}{16}\approx 5.8$ 4 分

答：平均需比赛 6 场才能分出胜负 1 分

2．设 $\{X_n\}$ 为相互独立的随机变量序列,

$$\mathrm{P}\left\{\mathrm{X_n}=\pm\sqrt{\mathrm{n}}\right\}=\frac{1}{\mathrm{n}},\ \mathrm{P}\left\{\mathrm{X_n}=0\right\}=1-\frac{2}{\mathrm{n}},\ \mathrm{n}=2,3,\cdots$$

证明 $\{X_n\}$ 服从大数定律。

2. $E(X_n)=\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}+\left(-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{1}{n}+0\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)=0$ 1 分

$$D(X_n)=E\left(X_n^2\right)+\left[E(X_n)\right]^2$$

$$=\left(\sqrt{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(-\sqrt{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+0^2\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\qquad i=2,3,\cdots$$ 1 分

$$=2$$

令 $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n+1}X_i, n=2,3,\cdots$，则 $E(Y_n)=0, D(Y_n)=\frac{2}{n}$, 2 分

$\forall\varepsilon>0$，由切比雪夫不等式知

$P\left\{\left|Y_n-E(Y_n)\right|<\varepsilon\right\}\ge 1-\frac{2}{n\varepsilon^2}$ 1 分

故有 $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}P\left\{\left|Y_n-E(Y_n)\right|<\varepsilon\right\}\to 1$,

即 $\{X_n\}$ 服从大数定律。 1 分

1．对于事件 A,B，下列命题正确的是____D____

A．若 A,B 互不相容，则 $\overline{A}$与$\overline{B}$也互不相容.

B．若 A,B 相容，则 $\overline{A}$与$\overline{B}$也相容.

C．若 A,B 互不相容，则 A与B也相互独立.

D．若 A与B相互独立，那么 $\overline{A}$与$\overline{B}$相互独立.

2. 假设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，密度函数为 $f(x)$．若 X 与－X 有相同的分布函数，则下列各式中正确的是____C____

A． $F(x)=F(-x)$；　　B． $F(x)=-F(-x)$；

C． $f(x)=f(-x)$；　　D． $f(x)=-f(-x)$；

3．若 $X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$，$Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$，那么 (X,Y) 的联合分布为____C____

A.二维正态，且 $\rho=0$；　　B．二维正态，且 ρ 不定；

C．未必是二维正态；　　D．以上都不对 .

4．设随机变量 X 和 Y 的方差存在且不等于 0，则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ 是 X 和 Y 的____C____

A．不相关的充分条件，但不是必要条件；B .独立的必要条件，但不是充分条件；

C．不相关的充分必要条件；　　D．独立充分必要条件.

二、填空题（本大题共 **5** 小题，每小题 **3** 分，总计 **15** 分

1. 设 A、B、C、是三个随机事件。用 A、B、C 表示事件“A、B、C 恰有一个发生”

_________ $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$;_________

2. 设离散型随机变量 X 分布律为 $p\{X=k\}=5A(1/2)^k \quad (k=1,2,\cdots)$ 则 A=____1/5______

3. 用 (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$ 表示 $p\{a<X\le b,Y\le c\}$ =_____ $F(b,c)-F(a,c)$;_____

4. 已知 $X\sim N\left(10,0.6\right)$, $Y\sim N\left(1,2\right)$, 且X与Y相互独立, 则 $D\left(3X-Y\right)=$ ____7.4__________

三、计算题（本大题共 **6** 小题，每小题 **10** 分，共计 **60** 分）

1．轰炸机轰炸目标，它能飞到距离目标 400，200，100（米）的概率分别为 0.5，0.3，0.2，又设他在距离目标 400，200，100（米）的命中率分别为 0.01，0.02，0.1。求目标被命中的概率。

1.由全概率公式 2分

$0.5*0.01+0.3*0.02+0.2*0.1=0.031$ 7分

目标被命中的概率为0.031. 1分

2．设随机变量 X 的概率密度为 $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{C}{\sqrt{1-x^2}}, |x|<1\\ 0, \text{其他}\end{cases}$ ，求① C 值； ② X 的分布函数 $F(x)$；

③求 X 落在区间 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 内的概率。

2.(1) $\because \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx = C\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=1$， $\therefore C=\frac{1}{\pi}$ 2分

(2) $F\left(x\right)=\int_{-\infty}^{x} f\left(t\right)dt$ 1分

$$=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \int_{-1}^{x}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dt=\frac{1}{\pi}\arcsin x+\frac{1}{2}, & -1<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$ 4分

(3) $P\left\{-0.5<X<0.5\right\}=F\left(0.5\right)-F\left(-0.5\right)=1/3$ 3分

3．设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数： $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi R^2}, x^2+y^2\le R^2\\ 0, \quad \text{其它}\end{cases}$

求：求关于 X 与关于 Y 的边缘分布密度；

3. 当 $-R\le x\le R$ 时 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{\pi R^2}dy=\frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}$， 3分

于是 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, -R\le x\le R\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$ 2分

同理 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, -R\le x\le R\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$ 5分

4.设随机变量 X 具有密度函数 $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1<x\le 2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，求 $E(X)$ 及 $D(X)$。

4. $E(X)=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x(2-x)dx=1$ 5 分

$D(X)=EX^2-(EX)^2=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2 x^2(2-x)dx-1=1/6$ 5 分

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

2．设 $\{X_k\}$，$(k=1,2\cdots)$ 是独立随机变量序列，$X_k=\begin{pmatrix} -2^k & 0 & 2^k \\ \frac{1}{2^{2k+1}} & 1-\frac{1}{2^{2k}} & \frac{1}{2^{2k+1}} \end{pmatrix}$

证明 $\{X_k\}$ 服从大数定律。

2. $E(X_k)=(-2^k)\times\frac{1}{2^{2k+1}}+0\times(1-\frac{1}{2^{2k}})+2^k\frac{1}{2^{2k+1}}=0,$ (2分)

$D(X_k)=E(X_k^2)=(-2^k)^2\times\frac{1}{2^{2k+1}}+(2^k)^2\frac{1}{2^{2k+1}}=1,\quad (k=1,2,\cdots).$ (2分)

由切比雪夫大数定理可知 $\{X_k\}$ 服从大数定理。 （1 分）

一、填空题（本大题共 **5** 小题，每小题 **4** 分，总计 **20** 分）

1. 设 A,B 为随机事件, $P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(A\cup B)=0.7$,则 $P(A|B)=$ __2/3__

2．设 10 把钥匙中有 2 把能打开门，现任意取两把，能打开门的概率是____17/45____

3．设 $X\sim N(10,3), Y\sim N(1,2)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $D(3X-2Y)=$____35____

4．设随机变量 X 在区间[0,6]上服从均匀分布,则关于未知量 x 的方程 $x^2+2Xx+1=0$ 有实根的概率为____5/6____

5. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=7$，方差 $D(X)=5$，用切比雪夫不等式估计得 $P\{2<X<12\}\ge$____4/5____.

二、选择题（在各小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，本大题共 **5** 个小题，每小题 4 分，总计 20 分）

1．设事件 A,B 相互独立,且 $P(A)>0, P(B)>0$,，则有____B____

(A) $P(B|A)=0$; (B) $P(A|B)=P(A)$;

(C) $P(A|B)=0$; (D) $P(AB)=P(A)$

2. 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,那么概率 $P\{X < \mu+2\}$ ___D___

(A) 随 μ 增加而变大; (B) 随 μ 增加而减小;

(C) 随 σ 增加而不变; (D) 随 σ 增加而减小

3. 设 $P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = \frac{1}{5}, P\{X \geq 0\} = P\{Y \geq 0\} = \frac{2}{5}$,则 $P\{\max\{X,Y\} \geq 0\} =$ ___C___

(A) $\frac{1}{5}$; (B) $\frac{2}{5}$; (C) $\frac{3}{5}$; (D) $\frac{4}{5}$

4. 设 X,Y 相互独立, X 服从 $(0,2)$ 上的均匀分布, Y 的概率密度函数为 $f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, y \geq 0 \\ 0, \quad y < 0 \end{cases}$,

则 $P\{X+Y \geq 1\} =$ ___D___

(A) $1-e^{-1}$; (B) $1-e^{-2}$; (C) $1-2e^{-2}$; (D) $1-0.5e^{-1}$

三、计算题（本大题共 **5** 小题，每小题 **10** 分，共计 **50** 分）

1. 某产品整箱出售，每一箱中 20 件产品，若各箱中次品数为 0 件，1 件，2 件的概率分别为 80%，10%，10%，现在从中任取一箱，顾客随意抽查 4 件，如果无次品，则买下该箱产品，如果有次品，则退货，求: (1) 顾客买下该箱产品的概率；(2) 在顾客买下的一箱产品中，确实无次品的概率.

解:设 A 表示“顾客买下该箱产品” ， B_i 分别表示“箱中次品数为 0 件，1 件，2 件” $i=0,1,2$

则 $P(B_0) = 80\%$， $P(B_1) = 10\%$ $P(B_2) = 10\%$，， $P(A|B_0) = 1$， $P(A|B_1) = \frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}$，

$P(A|B_2) = \frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}$，(3 分)

由全概率公式得： $P(A) = \sum_{i=0}^{2} P(A|B_i)P(B_i) = 448/475$，(7 分)

由贝叶斯公式得： $P(B_0|A) = \frac{P(A|B_0)P(B_0)}{P(A)} = 95/112$ (10 分)

2. 已知随机变量 X 的密度为 $f(x) = \begin{cases} ax+b, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$,且 $P\{x > 1/2\} = 5/8$,

求: (1) 常数 a,b 的值; (2) 随机变量 X 的分布函数 $F(x)$

解: (1) 由 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a/2+b$ ， $5/8 = P\{X > 1/2\} = \int_{1/2}^{+\infty} f(x)dx = 3a/8+b/2$ 解得 $a=1, b=1/2$ (4 分)

(2) $f(x)=\begin{cases} x+0.5, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，当 $x<0$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=0$，当 $0\le x<1$ 时，

$F(x)=P\{X\le x\}=\int_0^x (x+0.5)dx=(x^2+x)/2$，当 $x\ge 1$ 时，$F(x)=1$，

所以

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ (x^2+x)/2, & 0\le x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases} \quad (10\text{ 分})$$

3．设二维随机变量 (X,Y) 有密度函数：$f(x,y)=\begin{cases} x^2+\frac{1}{3}xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

（1）求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；（2）求条件密度 $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$；

（3）求概率 $P\{X>Y\}$.

解：（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} 2x^2+2x/3, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} 1/3+y/6, & 0\le y\le 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ (4 分)

(2) 当 $0\le y\le 2$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}==\begin{cases} \dfrac{6x^2+2xy}{2+y}, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

当 $0<x\le 1$ 时，$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases} \dfrac{3x^2+xy}{6x^2+2x}, & 0\le y\le 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ (8 分)

(3) $P\{X>Y\}=\int\limits_{x>y} f(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_0^x \left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)dy=7/24$ (10 分)

4．设随机变量 X,Y 独立同分布，都服从参数为 λ 的泊松分布，设 $U=2X+Y, V=2X-Y$，求随机变量 U 与 V 的相关系数 ρ_{UV}

4 .解：$E(X)=E(Y)=\lambda, D(X)=D(Y)=\lambda, E(U)=3\lambda, E(V)=3\lambda$

$D(U)=D(V)=5\lambda, Cov(U,V)=4D(X)-D(Y)=3\lambda$， (8 分)

$\rho_{UV}=\dfrac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}$=3/5 (10 分)

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

1. 设事件 A,B,C 相互独立,证明事件 $A-B$ 与事件 C 也相互独立

1. 证明：由于事件 A,B,C 相互独立，所以 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，$P(AB)=P(A)P(B)$，$P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)=P(B)P(C)$，(2 分)所以

$$P((A-B)C)=P(AC-BC)=P(AC)-P(ABC)$$

$$=P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C)=P(A-B)P(C)$$

即 $P((A-B)C)=P(A-B)P(C)$,所以事件 $A-B$ 与 C 也相互独立 (5 分)

一、填空题（本大题共 **5** 小题，每小题 **4** 分，总计 **20** 分）

1 .设 A,B 是两个随机事件, $P(A)=0.7$, $P(A-B)=0.3$,则事件“A,B 同时发生”________的对立事件的概率为 ___0.6___

2．设有 40 件产品，其中有 4 件次品，从中不放回的任取 10 次，每次取一件，则最后一件取的为次品的概率是___0.1___

3．设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X\sim N(1,2)$, $Y\sim N(0,1)$,则随机变量 $Z=2X-4Y+3$ 的方差为___24___

4．设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=75$,方差 $D(X)=5$,用切比雪夫不等式估计得 $P\{|X-75|\ge\varepsilon\}\le 0.05$,则 $\varepsilon=$___10___

二、选择题（在各小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，本大题共 **5** 个小题，每小题 4 分，总计 20 分）

1．设总体 $X\sim N(1,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本, 则为参数 σ^2 的无偏估计量的是(A)

(A) $\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$; (B) $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$; (C) $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$; (D) $\overline{X}^2$

2. 设 $X\sim N(\mu,1)$,则满足 $P\{X>2\}=P\{X\le 2\}$ 的参数 $\mu=$(C)

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3

3．设 $P\{X\ge 0,Y\ge 0\}=\dfrac{3}{7}$，$P\{X\ge 0\}=P\{Y\ge 0\}=\dfrac{4}{7}$，则 $P\{\max\{X,Y\}\ge 0\}=$(C)

(A) $\frac{3}{7}$;　　(B) $\frac{4}{7}$;　　(C) $\frac{5}{7}$;　　(D) $\frac{6}{7}$

三、计算题（本大题共 **5** 小题，每小题 **10** 分，共计 **50** 分）

1．两个箱子中都有 10 个球，其中第一箱中 4 个白球，6 个红球，第二箱中 6 个白球，4 个红球，现从第一箱中任取 2 个球放入第二箱中，再从第二箱中任取 1 个球，(1) 求 从第二箱中取的球为白球的概率；(2) 若从第二箱中取的球为白球，求从第一箱中取的 2 个球都为白球的概率

1．解: 设 A 表示“从第二箱中取的球为白球”，B_i 分别表示“从第一箱中取的 2 个球都为白球, 1 白 1 红，2 个球都为红球” $i=1,2,3$，则 $P(B_1)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}$=2/15，$P(B_2)=\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}$=8/15，$P(B_3)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}$=1/3，$P(A|B_1)=2/3$，$P(A|B_2)=7/12$，$P(A|B_3)=1/2$，(4 分)　由全概率公式得：$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A|B_i)P(B_i)=$ 17/30，　由贝叶斯公式得：

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=8/51$$ (10 分)

2．设随机变量 X 与 Y 同分布，X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，事件 $A=\{X>a\}$ 与事件 $B=\{Y>a\}$ 相互独立，且 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$，求常数 a 的值。

2．解: 由于事件 A,B 相互独立，所以 $P(AB)=P(A)P(B)=\left[P(A)\right]^2$，所以

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2P(A)-\left[P(A)\right]^2=3/4$，解得

$P(A)=1/2$ 或 $P(A)=3/2$（舍去），(5 分)

所以 $1/2=P(A)=P\{X>a\}=\int_a^{+\infty}f(x)dx=1-a^3/8$，得 $a=\sqrt[3]{4}$　(10 分)

3．设二维随机变量 (X,Y) 有密度函数：$f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(4x+3y)}, x>0, y>0;\\ 0, \text{其他}\end{cases}$

（1）求常数 A；

（2）求边缘概率密度 $f_X\left(x\right), f_Y\left(y\right)$；

（3）X, Y 是否相互独立。

3．解：（1）$1=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} A\mathrm{e}^{-(4x+3y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{A}{12}$，$\therefore A=12$ (4 分)

（2）$f_X\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}4e^{-4x}, x>0\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$

$f_Y\left(y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}3e^{-3x}, y>0\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$ (8 分)

（3）$f(x,y)=f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)$，所以 X, Y 相互独立。(10 分)

4．设随机变量 $X\sim N\left(1,9\right)$，$Y\sim N\left(0,16\right)$，相关系数 $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$，设 $Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$

求：(1) 随机变量 Z 的期望 $E\left(Z\right)$ 与方差 $D\left(Z\right)$；

(2) 随机变量 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ}

4．解：(1) $X\sim N\left(1,9\right)$，$Y\sim N\left(0,16\right)$，所以 $E\left(X\right)=1$，$E\left(Y\right)=0$，$D\left(X\right)=9$，$D\left(Y\right)=16$，$Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D\left(X\right)}\sqrt{D\left(Y\right)}=-6$，所以

$E\left(Z\right)=\dfrac{1}{3}E\left(X\right)+\dfrac{1}{2}E\left(Y\right)=3$，$D\left(Z\right)=\dfrac{1}{9}D\left(X\right)+\dfrac{1}{4}D\left(Y\right)+\dfrac{2}{6}Cov(X,Y)=3$ (5 分)

(2) 由于 $Cov(X,Z)=\dfrac{1}{3}D\left(X\right)+\dfrac{1}{2}Cov(X,Y)=0$，所以 $\rho_{XZ}=\dfrac{Cov(X,Z)}{\sqrt{D\left(X\right)}\sqrt{D\left(Z\right)}}=0$ (10 分)

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

1．设事件 A,B,C 相互独立,证明事件 $A\cup B$ 与事件 C 也相互独立.

1．证明：由于事件 A,B,C 相互独立，所以 $P\left(ABC\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)P\left(C\right)$，$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$，$P\left(AC\right)=P\left(A\right)P\left(C\right)$，$P\left(BC\right)=P\left(B\right)P\left(C\right)$，所以

$$P\left(\left(A\cup B\right)C\right)=P\left(AC\cup BC\right)=P\left(AC\right)+P\left(BC\right)-P\left(ABC\right)$$

$$=P\left(A\right)P\left(C\right)+P\left(B\right)P\left(C\right)-P\left(A\right)P\left(B\right)P\left(C\right)$$

$$=P(A)P(B)+P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C)$$

$$=P(A\cup B)P(C)$$

即 $P((A\cup B)C)=P(A\cup B)P(C)$,所以事件 $A\cup B$ 与 C 也相互独立。(5 分)

一、填空题（本大题共 **6** 小题，每小题 **3** 分，总计 **18** 分）

1. 设 A,B 为随机事件,$P(A\cup B)=0.8$,$P(B)=0.4$,则 $P(A\mid\overline{B})=$ ____2/3____

2．10 个球队平均分成两组进行比赛,则最强的两个队分到同一组的概率为____2/9____

3．设随机变量 X 在区间 $[0,1]$ 上服从均匀分布,则 $Y=e^X$ 的数学期望为____ $e-1$ ____

4．设 $X\sim b(n,p)$ 为二项分布,且 $E(X)=1.6$,$D(X)=1.28$,则 $n=$ __8__ $p=$ __0.2____

5. 设随机变量 X 在区间 $[0,2]$ 上服从均匀分布,用切比雪夫不等式估计得 $P\{|X-1|\geq 2\}\leq$ 1/12________.

二、选择题（在各小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，本大题共 **6** 个小题，每小题 3 分，总计 18 分）

1．设 A,B 为事件,且 $A\subset B$,则下列式子一定正确的是(　B　)

(A) $P(A\cup B)=P(A)$;　　(B) $P(BA)=P(A)$;

(C) $P(AB)=P(B)$;　　(D) $P(A-B)=P(A)-P(B)$

2. 设随机变量 X 的分布率为 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{\lambda^k}{k!}$, $(k=1,2,\cdots)$,则 $a=$ (　D　)

(A) $e^{-\lambda}$;　　(B) e^{λ};　　(C) $e^{-\lambda}-1$;　　(D) $e^{\lambda}-1$

3. 设 X　$N(1,1)$,概率密度为 $f(x)$,分布函数为 $F(x)$,则有(　A　)

(A) $P\{X\leq 1\}=P\{X\geq 1\}$;　　(B) $P\{X\leq 0\}=P\{X\geq 0\}$;

(C) $f(x)=f(-x)$, $x\in R$;　　(D) $F(x)=1-F(-x)$, $x\in R$

4. 设 $P\{X\leq 1,Y\leq 1\}=\dfrac{2}{5}$,$P\{X\leq 1\}=P\{Y\leq 1\}=\dfrac{3}{5}$,则 $P\{\min\{X,Y\}\leq 1\}=$(　A　)

(A) $\dfrac{4}{5}$;　　(B) $\dfrac{9}{25}$;　　(C) $\dfrac{3}{5}$;　　(D) $\dfrac{2}{5}$

5. 设随机变量 (X,Y) 满足方差 $D(X+Y)=D(X-Y)$,则必有(　B　)

(A) X 与 Y 独立;　(B) X 与 Y 不相关;

(C) X 与 Y 不独立;　(D) $D(X)=0$ 或 $D(Y)=0$

三、计算题（本大题共 **6** 小题，每小题 **10** 分，共计 **60** 分）

1．有三个盒子,第一个盒子中有 2 个黑球,4 个白球,第二个盒子中有 4 个黑球,2 个白球,第三个盒子中有 3 个黑球,3 个白球,今从 3 个盒子中任取一个盒子,再从中任取 1 球.

(1) 求此球是白球的概率;

(2) 若已知取得的为白球,求此球是从第一个盒子中取出的概率.

解:设 A 表示“取得的为白球”，B_i 分别表示“取得的为第一，二，三盒的球” $i=1,2,3$ 则

$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=1/3$，$P(A|B_1)=2/3$，$P(A|B_2)=1/3$，$P(A|B_3)=1/2$，(2 分)

由全概率公式得：$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A|B_i)P(B_i)=1/2$，(6 分)

由贝叶斯公式得：$P(B_1|A)=\dfrac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=4/9$ (10 分)

2．已知连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -a\\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a<x\le a\\ 1, & x>a\end{cases}$,其中 $a>0$ 为常数。

求: (1) 常数 A,B 的值; (2) 随机变量 X 的密度函数 $f(x)$;(3) $P\left(\dfrac{a}{2}<X<a\right)$

解: (1) 由 $F(x)$ 右连续性, $F(-a^+)=F(-a)$，$F(a^+)=F(a)$ 得 $A-\dfrac{\pi}{2}B=0$，$A+\dfrac{\pi}{2}B=1$，

解得 $A=1/2, B=1/\pi$ (6 分)

(2) $f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & -a<x<a\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$， (8 分)

(3) $P\left(\dfrac{a}{2}<X<a\right)=F(a)-F(a/2)=1/3$ (10 分)

3．设随机变量 X 在区间 $[1,2]$ 上服从均匀分布, 求 $Y=e^{2X}$ 概率密度。

3．解: X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 1\le x\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$y=e^{2x}$，$y'=2e^{2x}>0$，反函数导数

$h'(y)=\dfrac{1}{2y}$，$\alpha=\min\left\{e^2,e^4\right\}=e^2$，$\beta=\max\left\{e^2,e^4\right\}=e^4$，所以$Y=e^{2X}$的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left(h(y)\right)\left|h'(y)\right|, & \alpha\le y\le\beta \\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}1/(2y), & e^2\le y\le e^4 \\ 0, & 其他\end{cases}\ (10 分)$$

4．设二维随机变量(X,Y)的密度函数：$f(x,y)=\begin{cases}Ay, & 0<x<y^2,0<y<1 \\ 0, & 其他\end{cases}$

（1）求常数A的值；（2）求边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$；

（3）X和Y是否独立?

4．解:（1）由$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=1$，得$A=4$ (3 分)

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}2(1-x), & 0\le x\le 1 \\ 0, & 其他\end{cases}$ (6 分)

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}4y^3, & 0\le y\le 1 \\ 0, & 其他\end{cases}$ (9 分)

(3) $f_X(x)f_Y(y)\ne f(x,y)$，不独立(10 分)

5．设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数：$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0<x<y<1 \\ 0, & 其他\end{cases}$

求（1）数学期望$E(X)$与$E(Y)$；（2）X与Y的协方差$Cov(X,Y)$

5．解: $E(X)=1/2$,(2 分) $E(Y)=3/4$,(4 分) $E(XY)=3/5$ (6 分)，所以
$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(X)$=9/40 (10 分)

四、证明题（本大题共 1 小题，每小题 4 分，共 4 分）

1． 设三个事件A,B,C满足$AB\subset C$,试证明: $P(A)+P(B)\le 1+P(C)$

1．证明：由于$AB\subset C$，所以$P(AB)\le P(C)$，所以

$$P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(AB)\le P(A\cup B)+P(C)\le 1+P(C)\ (4 分)$$

一、填空题（本大题共 **6** 小题，每小题 **3** 分，总计 **18** 分）

1. 设 A,B 为随机事件, $P(A)+P(B)=0.7$, $P(AB)=0.3$,则 $P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=$ 0.1

2．10 件产品中有 4 件次品,从中任意取 2 件,则第 2 件为次品的概率为 0.4

3． 设随机变量 X 在区间 $[0,2]$ 上服从均匀分布,则 $Y=X^2$ 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1/(4\sqrt{y}), & 0< y < \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

4．设随机变量 X 的期望 $E(X)=3$,方差 $D(X)=5$,则期望 $E\left[(X+4)^2\right]=$ 54

5. 设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布,则应用切比雪夫不等式估计得 $P\{|X-2|\ge 2\}\le$ 1/2 .

二、选择题（在各小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在题末的括号中，本大题共 **6** 个小题，每小题 3 分，总计 18 分）

1．设 A,B 为对立事件, $0<P(B)<1$, 则下列概率值为 1 的是(C)

(A) $P(\overline{A}\mid\overline{B})$; (B) $P(B\mid A)$; (C) $P(\overline{A}\mid B)$; (D) $P(AB)$

2. 设随机变量 $X\sim N(1,1)$,概率密度为 $f(x)$,分布函数 $F(x)$,则下列正确的是(B)

(A) $P\{X\le 0\}=P\{X\ge 0\}$; (B) $P\{X\le 1\}=P\{X\ge 1\}$;

(C) $f(x)=f(-x)$, $x\in R$; (D) $F(x)=1-F(-x)$, $x\in R$

3. 设 $f(x)$ 是随机变量 X 的概率密度,则一定成立的是(B)

(A) $f(x)$ 定义域为 $[0,1]$; (B) $f(x)$ 非负;

(C) $f(x)$ 的值域为 $[0,1]$; (D) $f(x)$ 连续

4. 设 $P\{X\le 1,Y\le 1\}=\dfrac{4}{9}$, $P\{X\le 1\}=P\{Y\le 1\}=\dfrac{5}{9}$,则 $P\{\min\{X,Y\}\le 1\}=$(A)

(A) $\dfrac{2}{3}$; (B) $\dfrac{20}{81}$; (C) $\dfrac{4}{9}$; (D) $\dfrac{1}{3}$

5. 设随机变量 (X,Y) 的方差 $D(X)=4$, $D(Y)=1$,相关系数 $\rho_{XY}=0.6$,则方差 $D(3X-2Y)=$ (D)

(A) 40; (B) 34; (C) 17.6; (D) 25.6

三、计算题（本大题共 **6** 小题，每小题 **10** 分，共计 **60** 分）

1．甲乙丙三个同学同时独立参加考试,不及格的概率分别为: 0.2 ,0.3,0.4,

(1) 求恰有 2 位同学不及格的概率；

(2) 若已知 3 位同学中有 2 位不及格,求其中 1 位是同学乙的概率.

1．解:设 A,B,C 分别表示 “甲,乙,丙同学不及格” ，则 $P(A)=0.2$， $P(B)=0.3$， $P(C)=0.4$，

由题意 A,B,C 相互独立 (2 分)

(1) 事件“恰有 2 位同学不及格” 为: $D=\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$ ，所以

$P(D)=P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)P(AB\bar{C})$

$=P(\bar{A})P(B)P(C)+P(A)P(\bar{B})P(C)+P(A)P(B)P(\bar{C})$=0.188 (6 分)

(2) $P(B\mid D)=\dfrac{P(BD)}{P(D)}=\dfrac{P(\bar{A}BC)+P(AB\bar{C})}{P(D)}$=33/47 (10 分)

2．已知连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ A+Be^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0\end{cases}$，

求: (1) 常数 A,B 的值; (2) 随机变量 X 的密度函数 $f(x)$;(3) $P(\sqrt{2}<X<2)$

解: (1) 由 $F(x)$ 右连续性得 $F(0^+)=F(0)$，即 $A+B=0$，又由 $F(+\infty)=1$ 得，$A=1$， 解得

$A=1,B=-1$ (5 分)

(2) $f(x)=F'(x)=\begin{cases}xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0,\\ 0, & 其它\end{cases}$ (8 分)

(3) $P(\sqrt{2}<X<2)=F(2)-F(\sqrt{2})=e^{-1}-e^{-2}$ (10 分)

3．设随机变量 X 与 Y 相互独立,概率密度分别为:

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\ f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases},$$

求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度

3．解: 由于随机变量 X 与 Y 相互独立,所以 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$ (2 分)

$$=\begin{cases}\int_0^z e^{-x}dy, & 0<z<1\\ \int_z^{z-1}e^{-x}dy, & z\ge 1\\ 0, & z\le 0\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-z}, & 0<z<1\\ e^{1-z}-e^{-z}, & z\ge 1\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$ (10 分)

4．设二维随机变量(X,Y)的密度函数：$f(x,y)=\begin{cases} A, & 0<x<2,|y|<x \\ 0, & 其他 \end{cases}$

（1）求常数A的值；（2）求边缘概率密度$f_X\left(x\right),f_Y\left(y\right)$；

（3）X和Y是否独立?

4．解:（1）由$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=1$，得$A=1/4$ (2 分)

$$(2)\ f_X\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_{-x}^{x} 1/4dy, & 0\le x\le 2 \\ 0, & 其他 \end{cases}=\begin{cases} x/2, & 0\le x\le 2 \\ 0, & 其他 \end{cases} \quad (5\text{ 分})$$

$$f_Y\left(y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_{-y}^{2} 1/4dx, & -2\le y<0 \\ \int_{y}^{2} 1/4dx, & 0\le y<2 \\ 0, & 其他 \end{cases}=\begin{cases} \left(2+y\right)/4, & -2\le y<0 \\ \left(2-y\right)/4, & 0\le y<2 \\ 0, & 其他 \end{cases} \quad (9\text{ 分})$$

(3) $f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)\ne f(x,y)$，不独立(10 分)

5．设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数：$f(x,y)=\begin{cases} 3y, & 0<x<y,0<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

求（1）数学期望$E\left(X\right)$与$E\left(Y\right)$；（2）X与Y的协方差$Cov\left(X,Y\right)$

5.解: $E\left(X\right)=3/8$,(2 分) $E\left(Y\right)=3/4$,(4 分) $E\left(XY\right)=3/10$ (6 分)，所以
$Cov\left(X,Y\right)=E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(X\right)$=3/160, (10 分)

四、证明题（本大题共 1 小题，每小题 4 分，共 4 分）

1. 设A,B,C任意三个事件,试证明:$P\left(AB\right)+P\left(BC\right)-P\left(B\right)\le P\left(AC\right)$

1. 证明： 因为$P\left(AB\right)+P\left(BC\right)=P\left(AB\cup BC\right)+P\left(ABC\right)$,又由于$AB\cup BC\subset B$
,$ABC\subset AC$，所以$P\left(AB\cup BC\right)\le P\left(B\right)$，$P\left(ABC\right)\le P\left(B\right)$,所以

$P\left(AB\right)+P\left(BC\right)\le P\left(B\right)+P\left(AC\right)$,即$P\left(AB\right)+P\left(BC\right)-P\left(B\right)\le P\left(AC\right)$ (4 分)