第四章　数字特征

随机变量的分布全面地描述了随机变量取值的统计规律性，由分布可以计算事件的概率．除此以外，由分布还可以算得相应随机变量的数学期望、方差、协方差和相关系数，这些重要数值从一个侧面描述了分布的特征．

譬如，某顾客有意向购买某品牌的电视机，其实他并不知道该品牌电视机寿命 X 的概率分布，但如果他了解了该品牌电视机的平均使用寿命，以及使用寿命的稳定性情况，就能够对是否购买该品牌电视机作出决定．

第一节 数学期望

一、数学期望的概念

随机变量的数学期望也称为随机变量的均值，**它体现的是随机变量的一种平均取值.**

例 1 为衡量甲、乙两位射击选手的射击水平，设 X,Y 分别表示甲，乙选手每次射击时命中的环数，将他们在近期的训练和比赛成绩进行统计和整理，分别得 X 和 Y 的分布律如下.

$$X \sim \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix},$$

问甲、乙两位射击选手每次射击时的平均环数各是多少？

解 为计算方便，分别让两位选手各射击10次，则按照上列分布律，分别得出甲、乙两位选手的理论总环数为

甲选手：$10\times3+9\times5+8\times2=91$（环），

乙选手：$10\times6+9\times1+8\times3=93$（环），

因此，甲、乙两位选手每次射击时的平均环数分别为

甲选手：$\dfrac{10\times3+9\times5+8\times2}{10}=10\times0.3+9\times0.5+8\times0.2=9.1$（环），

乙选手：$\dfrac{10\times6+9\times1+8\times3}{10}=10\times0.6+9\times0.1+8\times0.3=9.3$（环），

由此可见，乙选手每次射击时的平均环数高于甲选手每次射击时的平均环数.

1. 离散型随机变量的数学期望

定义 1 设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_i, \quad i=1,2,\cdots, \quad \text{或 } X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots \end{pmatrix},$$

如果无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ **绝对收敛**，就称之为 X 的**数学期望或均值**，记为 EX 或 $E(X)$，即

$$EX=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i .$$

由定义 1 知，在例 1 中，$EX=9.1, EY=9.3$.

注 1 如果无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 不绝对收敛（发散，或条件收敛），就称 X 的数学期望不存在.

例 2 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=(-1)^i \frac{2^i}{i}\}=\frac{1}{2^i}$，$i=1,2,\cdots$，讨论 X 的数学期望存在情况.

解 由于无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \frac{2^i}{i}\times\frac{1}{2^i}=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \frac{1}{i}$ 条件收敛，故 X 的数学期望不存在.

例 3 设盒子有两个红球和一个白球，现分别采用（1）不放回；（2）有放回的方式从中取球．记 X 为首次取得红球时的取球次数，试分别计算 EX ．

解 (1) 不放回方式下

由于 X 的取值为1和2，且其分布律为

$$P\{X=1\}=\frac{2}{3},\quad P\{X=2\}=\frac{1}{3}，\text{即}\quad X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

所以 $EX=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}.$

(2) 有放回方式下

$$P\{X=k\}=\frac{2}{3}\times(\frac{1}{3})^{k-1}, \quad k=1,2,\cdots,$$

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}k\times\frac{2}{3}\times(\frac{1}{3})^{k-1}=\frac{2}{3}[1+2\times\frac{1}{3}+3\times(\frac{1}{3})^{2}+\cdots+k\times(\frac{1}{3})^{k-1}+\cdots],$$

由于 $\frac{1}{3}EX=\frac{2}{3}[\frac{1}{3}+2\times(\frac{1}{3})^{2}+3\times(\frac{1}{3})^{3}+\cdots+k\times(\frac{1}{3})^{k}+\cdots]$,

将上面两式相减，得

$$\frac{2}{3}EX=\frac{2}{3}[1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^{2}+(\frac{1}{3})^{3}+\cdots+(\frac{1}{3})^{k}+\cdots]=\frac{2}{3}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=1,$$

所以 $EX=\frac{3}{2}$.

2. 连续型随机变量的数学期望

定义 2 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，如果广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ 绝对收敛，就称之为 X 的数学期望或均值，记为 EX 或 $E(X)$，即

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx .$$

同理，如果广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ 不绝对收敛（发散，或条件收敛），就称 X 的数学期望不存在.

例 4 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},-\infty<x<+\infty,$$ （柯西分布）

讨论 X 的数学期望存在情况.

解 由于广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx\right],$$

且 $\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}dx$ 和 $\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$ 均发散，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ 发散，故 X 的数学期望不存在.

例 5 设 X 密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1,\\ 0,\quad 其它,\end{cases}$$

求 $EX, P\{X<EX\}$.

解 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=\int_0^1 x\cdot 2x\,dx=2\int_0^1 x^2\,dx=\dfrac{2}{3}$;

$$P\{X<EX\}=P\{X<\frac{2}{3}\}=\int_0^{\frac{2}{3}} 2x\,dx=x^2\Big|_0^{\frac{2}{3}}=\frac{4}{9}.$$

例 6 随机变量 X 的密度函数 $f(x)$ 满足

$$f(c+x)=f(c-x),\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

其中 c 为常数，且 EX 存在，证明 $EX=c$.

证 由条件知， $f(x)=f(2c-x),-\infty<x<+\infty$，则

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(2c-x)dx$$

$$\overset{t=2c-x}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}(2c-t)f(t)dt=2c\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt-\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)dt$$

$$=2c\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx-\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=2c-EX,$$

所以 $EX=c$.

二、随机变量函数的数学期望

1. 一维随机变量函数 $Y=g(X)$ 的数学期望

定理 1 (1) 设随机变量 $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots \end{pmatrix}$，

$Y=g(X)$，且无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$ 绝对收敛，则

$$EY=E(g(X))=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i \, .$$

(2) 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，$Y=g(X)$，且广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛，则

$$EY=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \, .$$

例 7 设随机变量 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$，试分别计算 $E(X^2)$ 和 $E(\min\{X,1\})$.

解法 1 经计算有

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}，\quad \min\{X,1\} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}，$$

由定义 1 得：$E(X^2) = 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{7}{12} + 4\times\frac{1}{6} = \frac{5}{4}$；

$$E(\min\{X,1\}) = -1\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

解法 2 由于 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$，由定理 1 可得

$$E(X^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{4} + 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{4};$$

$$\begin{aligned} E(\min\{X,1\}) &= \min\{-1,1\} \times \frac{1}{4} + \min\{0,1\} \times \frac{1}{4} \\ &\quad + \min\{1,1\} \times \frac{1}{3} + \min\{2,1\} \times \frac{1}{6} \\ &= -1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

例 8 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

试分别计算 $E(X^2)$ 和 $E\left(\left|X-\frac{1}{2}\right|\right)$.

解 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx=\frac{1}{2}$;

$$E\left(\left|X-\frac{1}{2}\right|\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x-\frac{1}{2}\right| f(x)dx=\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot 2xdx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\left(\frac{1}{2}-x\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 2x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{24}+\frac{5}{24}=\frac{1}{4}.$$

2. 二维随机变量函数 $Z = g(X,Y)$ 的数学期望

定理 2 (1)设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$，$i = 1,2,\cdots$， $j = 1,2,\cdots$， $Z = g(X,Y)$，且 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则

$$EZ = E(g(X,Y)) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j)p_{ij} .$$

(2) 设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)$，$Z = g(X,Y)$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)dxdy$ 绝对收敛，则

$$EZ = E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)dxdy .$$

例 9 设二维随机变量(X,Y)的分布律为

(X,Y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
P	0.2	0.1	0.4	0.3

试分别计算EX， $E(XY)$和$E(\max\{X,Y\})$.

解 $EX=0\times0.2+0\times0.1+1\times0.4+1\times0.3=0.7$；

$$E(XY)=0\times0\times0.2+0\times1\times0.1+1\times0\times0.4+1\times1\times0.3$$

$$=0.3;$$

$$E(\max\{X,Y\})=\max\{0,0\}\times0.2+\max\{0,1\}\times0.1$$

$$+\max\{1,0\}\times0.4+\max\{1,1\}\times0.3$$

$$=0.8.$$

例 10 设二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

试分别计算$E(Y^2)$，$E(XY)$．

解 $E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2<1}y^2\cdot\frac{1}{\pi}dxdy$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^1 r^2\cdot rdr=\frac{1}{4};$$

由二重积分的对称性知，$E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2<1}xy\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=0$．

三、数学期望的性质

性质 1 $Ec = c$.

性质 2 $E(kX) = kEX$.

性质 3 $E(X \pm Y) = EX \pm EY$.

性质 4 若随机变量 X 和 Y 相互独立，则 $E(XY) = EXEY$.

性质 5 如果随机变量 $X \geq a$（或 $X \leq a$），则 $EX \geq a$ (或 $EX \leq a$).

例 11 设随机变量 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$，$Y$ 的密度函数 $f(y)=\frac{1}{2}e^{-|y|}$，$-\infty<y<+\infty$，且 X 和 Y 相互独立，求 $E(XY^2-2X^2Y+1)$.

解 由于 X 和 Y 相互独立，故 X 和 Y^2 相互独立，X^2 和 Y 也相互独立，于是

$$E(XY^2)=EXE(Y^2)，\quad E(X^2Y)=E(X^2)EY.$$

又 $EX=0\times0.6+10\times0.4=4$，$E(X^2)=0^2\times0.6+10^2\times0.4=40$；

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot\frac{1}{2}e^{-|y|}dy=0，\qquad E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\cdot\frac{1}{2}e^{-|y|}dy=2，$$

所以 $E(XY^2-2X^2Y+1)=EXE(Y^2)-2E(X^2)EY+1$

$$=4\times2-2\times40\times0+1=9.$$

例 12 将编号为$1\sim n$的n只球随机地放入编号为$1\sim n$的n只盒子中（$n>1$），一只盒子放一只球．如果一只球放入与其同号的盒子，就称为一个配对．求平均总配对数．

解 记X为总配对数，X_i为第i只盒子的配对数，即

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{只球放入第}i\text{只盒子,}\\ 0, & \text{第}i\text{只球没有放入第}i\text{只盒子,}\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$．

由于$P\{X_i=1\}=\dfrac{(n-1)!}{n!}=\dfrac{1}{n},P\{X_i=0\}=1-\dfrac{1}{n}$，故

$$EX_i=1\times\frac{1}{n}+0\times(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

所以平均总配对数为$EX=EX_1+EX_2+\cdots+EX_n=\dfrac{1}{n}\times n=1$．