第二章 随机变量及其分布

第一节 随机变量及其分布函数

一、随机变量的概念

定义 1 设随机试验 E 的样本空间为 Ω，对每一个样本点 $\omega \in \Omega$，均有一个惟一确定的实数 X 与之对应，就称 X 为一个定义在 Ω 上的**随机变量**，也记为 $X = X(\omega)$．通常随机变量用 X, Y, ξ, η 等符号表示.

例 1 掷一颗骰子出现的点数 X；

一批产品中的次品个数 Y；

等车所需的时间 T，

等都是随机变量.

注 1 随机变量的引入使得样本点数字化.

注 2 设 X 为一随机变量， L 为某实数集，则 $\{X \in L\}$ 表示一个随机事件.

例 2 在抛一枚硬币的随机试验中，令

$$X=\begin{cases}0, & \omega=\text{“出现反面”},\\ 1, & \omega=\text{“出现正面”},\end{cases}$$

则 X 为随机变量. 例如

$$\{\text{正面}\}=\{X=1\}=\{X\geq\frac{1}{2}\}，\ \{\text{反面}\}=\{X=0\}=\{-0.3\leq X<1\}$$

$$\{0\leq X\leq 1\}=\{X\leq 2\}=\{X\neq\frac{1}{2}\}=\Omega，\ \{X=\frac{1}{2}\}=\{X<0\}=\varnothing.$$

进而有 $P\{X=1\}=\frac{1}{2},\ P\{X<2\}=1,\ P\{X=\frac{1}{2}\}=0$ 等等.

二、分布函数

1. 分布函数的定义

定义 2 设 X 为一随机变量，对于任意实数 x，称函数

$$F(x)=P\{X\le x\},-\infty<x<+\infty$$

为 X 的分布函数.

注 3 不论随机变量 X 如何取值，其分布函数 $F(x)$ 的定义域总是 $(-\infty,+\infty)$；

$F(x)$ 的直观意义为随机变量 X 落在区间 $(-\infty,x]$ 上的概率.

例 3 向半径为 r 的圆内随机抛一点，求此点到圆心之距离 X 的分布函数 $F(x)$，并求 $P\left\{X>\frac{2r}{3}\right\}$.

解 $\{X\le x\}$ 表示所抛之点落在半径为 $x(0\le x\le r)$ 的圆内，由几何概型知

$$F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{\pi x^2}{\pi r^2}, & 0\le x\le r\\ 1, & x>r\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^2}{r^2}, & 0\le x\le r\\ 1, & x>r\end{cases};$$

$$P\left\{X>\frac{2r}{3}\right\}=1-P\left\{X\le\frac{2r}{3}\right\}=1-F\left(\frac{2r}{3}\right)=\frac{5}{9}$$

2. 分布函数的性质

性质 1 设 $F(x)$ 为任一分布函数，总有 $0 \le F(x) \le 1$.

设 $F(x)$ 为任一分布函数，则有

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1,$$

简记为 $F(-\infty) = 0$， $F(+\infty) = 1$.

性质 2 设 $F(x)$ 为任一分布函数，则 $F(x)$ 单调不减，

即对于任意实数 x_1, x_2，当 $x_1 < x_2$ 时， $F(x_1) \le F(x_2)$.

性质 3 设 $F(x)$ 为任一分布函数，则 $F(x)$ 处处右连续，

即对于任意给定的一点 x_0， $F(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_o^+} F(x) = F(x_0)$.

3. 分布函数与事件的概率

定理 1 对于任意实数 $a,b\ (a<b)$，则有

$$P\{a<X\leq b\}=F(b)-F(a).$$

证明 事实上，由

$$P\{a<X\leq b\}=P\{X\leq b\}-P\{X\leq a\}=F(b)-F(a).$$

定理 2 设 x_0 为任一给定实数，则有

$$P\{X=x_0\}=F(x_0)-F(x_0-0).$$

注 4： $P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a)$；

$$P\{X = x_0\} = F(x_0) - F(x_0 - 0);$$

$$P\{a < X\} = 1 - F(a); \quad P\{a \le X\} = 1 - F(a - 0);$$

$$P\{X < b\} = F(b - 0); \quad P\{X \le b\} = F(b);$$

$$P\{a < X < b\} = F(b - 0) - F(a);$$

$$P\{a \le X < b\} = F(b - 0) - F(a - 0);$$

$$P\{a \le X \le b\} = F(b) - F(a - 0).$$

例 4 已知随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=a+b\arctan x$，$-\infty<x<+\infty$．(1)求常数 a,b；(2)计算概率 $P\{-1<X\leq 0\}$ 和 $P\{X\geq\sqrt{3}\}$．

解 (1) 由分布函数的性质知 $F(-\infty)=a-\dfrac{\pi}{2}b=0$，

$F(+\infty)=a+\dfrac{\pi}{2}b=1$，解得 $a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{\pi}$．

(2) 由(1)知，$F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arctan x$，$-\infty<x<+\infty$，故

$$P\{-1<X\leq 0\}=F(0)-F(-1)=\frac{1}{2}-[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\times(-\frac{\pi}{4})]=\frac{1}{4},$$

$$P\{X\geq\sqrt{3}\}=1-F(\sqrt{3}-0)=1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{3})=\frac{1}{6}.$$

例 5. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，则下列函数中仍为分布函数的是（ ）.

(A) $2F(x)$; (B) $F(2x)$;

(C) $1-F(x)$; (D) $1-F(-x)$.

答案：(B) .