第四节　独立性

一、两个事件的独立性

两个事件之间的独立性是指：一个事件的发生不影响另一个事件的发生．譬如在掷两颗骰子得到试验中，记事件 A 为“第一颗骰子的点数为1”，记事件 B 为“第二颗骰子的点数为4”，则显然 A 与 B 的发生是相互不影响的．

另外，从概率的角度看，事件 A 的条件概率 $P\left(A|B\right)$ 与无条件概率 $P(A)$ 的差别在于：事件 B 的发生改变了事件 A 发生的概率. 如果事件 A 与 B 的发生是相互不影响的，则有 $P(A|B)=P(A)$ 和 $P(B|A)=P(B)$，它们都等价于 $P(AB)=P(A)P(B)$.

定义 1 如果随机事件 A, B 满足 $P(AB) = P(A)P(B)$，称事件 A 和 B **相互独立**.

事件 A 和 B 相互独立的直观理解为事件 A 和 B 各自发生与否没有任何关系.

注 1: 必然事件 Ω、不可能事件 $\varnothing$ 分别和任意事件 A 相互独立.

注 2: 事件相互独立和事件互不相容是两个不同的概念.

如果事件 A 和 B 相互独立，且 $P(A) > 0, P(B) > 0$，则 A 和 B 不可能互不相容.

定理 1 设 $P(B)>0$，则事件 A 和 B 相互独立的充要条件为 $P(A|B)=P(A)$.

定理 2 设 A, B 为两个随机事件，则下列四对事件

A 和 B； A 和 $\overline{B}$； $\overline{A}$ 和 B； $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$

相互独立是等价的.

例 1 设 A, B 为两个随机事件，且 $0 < P(B) < 1$，则 A 和 B 相互独立的充要条件为 $P(A|B) = P(A|\overline{B})$.

证 $$P(A|B) = P(A|\overline{B}) \Leftrightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)}$$

$$\Leftrightarrow P(AB)[1 - P(B)] = [P(A) - P(AB)]P(B)$$

$\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$，即 A 和 B 相互独立.

例 2 设随机事件 A 与 B 相互独立，已知 A 发生 B 不发生的概率和 B 发生 A 不发生的概率相等，且 A,B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，求 $P(A)$.

解 由题意知 $\begin{cases} P(A\overline{B}) = P(\overline{A}B) \\ P(\overline{A}\,\overline{B}) = \frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A) = P(B) \\ P(\overline{A})P(\overline{B}) = \frac{1}{9} \end{cases}$

故解得 $P(A) = \frac{2}{3}$.

例 3 甲、乙两人独立地向同一目标各射击一次，他们的命中率分别为0.6和0.5，现已知目标被命中，求目标被甲射中的概率.

解 设A表示“甲射中目标”，B表示“乙射中目标”，C表示“目标被射中”， 则

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.8,$$

$$P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)}{P(C)}=0.75.$$

二、三个事件的独立性

定义 2 设 A, B, C 为三个随机事件，如果有

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(BC) = P(B)P(C). \end{cases}$$

就称随机事件 A, B, C 两两独立.

定义 3 如果随机事件 A, B, C 两两独立，且

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

就称随机事件 A, B, C 相互独立.

例 4 盒子中有编号为$1,2,3,4$的4张卡片，现从中任取一张，设事件A表示取到1号卡片或2号卡片，B表示取到1号卡片或3号卡片，C表示取到1号卡片或4号卡片，试分别讨论事件A,B,C的两两独立性和相互独立性.

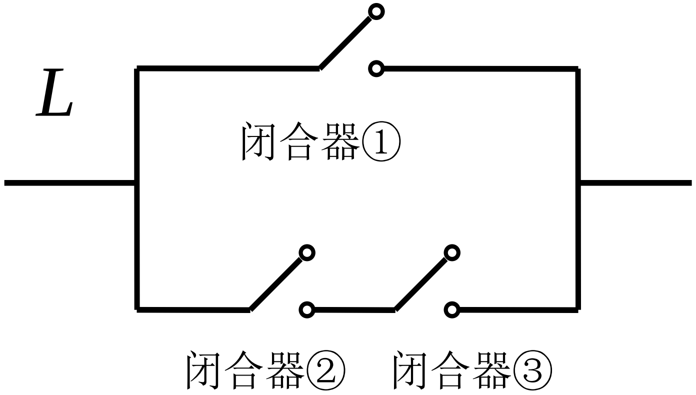
解 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，且$AB=AC=BC=ABC=$“取得$1$号卡片”，故$P(AB)=P(AC)=P(BC)=P(ABC)=\frac{1}{4}$，

因此，$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{4}$，$P(AC)=P(A)P(C)=\frac{1}{4}$，

$P(BC)=P(B)P(C)=\frac{1}{4}$，$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}$.

上面计算结果表明事件A,B,C两两独立，但不相互独立.

例 5 设某系统 L 由三个独立工作的闭合器组成（如右图），每个闭合器闭合的概率均为 p，其中 $0<p<1$．求系统 L 为通路的概率.



解 设 A_i 为第 i 个闭合器闭合，$i=1,2,3$．由题意知，A_1, A_2, A_3 相互独立，且 $P(A_i)=p$，$i=1,2,3$．故系统 L 为通路的概率为

$$P(A_1 \cup A_2A_3) = P(A_1)+P(A_2A_3)-P(A_1A_2A_3)$$

$$=P(A_1)+P(A_2)P(A_3)-P(A_1)P(A_2)P(A_3) = p+p^2-p^3 .$$