第三节　随机变量的相互独立性

一、随机变量相互独立的概念

随机事件 A 和 B 相互独立是指 A 和 B 各自发生与否没有任何关系. 如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，就称 A 和 B 相互独立.

通俗地讲，随机变量 X 和 Y 相互独立是指 X 和 Y 的各自取值情况没有任何关系.

因此，X 和 Y 的各自取值情况没有任何关系表现为

随机事件 $\{X \le x\}$ 和 $\{Y \le y\}$ 相互独立，从而有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},$$

即
$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

定义 1 设 (X, Y) 为二维随机变量，其分布函数为 $F(x, y)$，(X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$．如果对于任意的实数 x, y，均有

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y),$$

就称**随机变量 X 与 Y 相互独立**.

例 1 设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan y\right),\ -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

问 X 与 Y 是否相互独立？

解 在前面的例子中已求得

$$F_X(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right),\qquad -\infty<x<+\infty;$$

$$F_Y(y)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan y\right),\qquad -\infty<y<+\infty.$$

且对于任意的实数 x, y，满足 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，所以 X 与 Y 相互独立.

二、离散型随机变量的独立性

定理 1 设(X,Y)为二维离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i=1,2,\cdots, j=1,2,\cdots.$$

则 X 和 Y 相互独立的充要条件为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$$

$$\Leftrightarrow p_{ij}p_{ij}=p_{i\bullet}p_{\bullet j}, \quad i=1,2,\cdots, j=1,2,\cdots$$

例 2 在前面例子中，分别就(1)不放回；(2)有放回两种情况，讨论随机变量 X 和 Y 的独立性.

解 (1) 不放回时的分布律为：

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\bullet j}$
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

(2) 有放回时的分布律为：

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\bullet j}$
0	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{5}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

不放回：$p_{11} = \frac{3}{10} \neq p_{1\bullet} p_{\bullet 1} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$，故 X 和 Y 不独立.

有放回：对所有 $i, j = 1, 2$，有 $p_{ij} = p_{i\bullet} p_{\bullet j}$，故 X 和 Y 独立.

例 3 设随机变量 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$，$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$，且 X 和 Y 相互独立.（1）求 X 和 Y 的联合分布律；（2）计算 $P\{X=Y\}$

解（1）由于 X 和 Y 独立，所以 $p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}$，从而得 X 和 Y 的联合分布律为

$Y \backslash X$	-1	0	1	
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

（2）$P\{X=Y\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=1, Y=1\}$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{5}{16}.$$

例 4 设随机变量 X 和 Y 相互独立，其概率分布为

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

则下列结论正确的是（　　）.

（A）$X = Y$；　　（B）$P\{X = Y\} = 0$；

（C）$P\{X = Y\} = \frac{1}{2}$；　　（D）$P\{X = Y\} = 1$.

答案： (C).

三、连续型随机变量的独立性

定理 2 设(X,Y)为二维连续型随机变量，其密度函数为$f(x,y)$，则X和Y相互独立的充要条件为对平面上几乎所有的点(x,y)，有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

注 1： 设$f(x,y)=\begin{cases} g(x,y),(x,y)\in D \\ 0,其它 \end{cases}$，则$X$与$Y$相互独立的充要条件是$g(x,y)=h_1(x)h_2(y)$，且$D$是正矩形.

例 5 设二维随机变量(X,Y)的密度函数 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, 0<y<x, \\ 0 \quad 其它. \end{cases}$

问 X 和 Y 是否相互独立?

解 在前面例子中，已得 $f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, x>0, \\ 0, \quad x\le 0, \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, y>0, \\ 0, \quad y\le 0. \end{cases}$

可见

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x, \\ 0 & 其它. \end{cases} \neq f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} xe^{-x-y}, & x>0, y>0, \\ 0, & 其它, \end{cases}$$

所以 X 和 Y 不相互独立.

例 6 设随机变量 $X \sim U[0,1], Y \sim E(1)$，且 X 和 Y 相互独立，求 $P\{X+Y \le 1\}$.

解 由题意知， X 和 Y 的密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其它},\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y \ge 0, \\ 0, & y<0.\end{cases}$$

由于 X 和 Y 相互独立，所以

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0 \le x \le 1, y \ge 0, \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

故 $P\{X+Y \le 1\}=\displaystyle\iint_{x+y<1} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} e^{-y}dy$

$$=\int_0^1 (1-e^{x-1})dx=e^{-1}.$$

四、随机变量独立性的有关结论

定理 3 设随机变量 X 与 Y 相互独立，则对任意实数集合 L_1, L_2，有 $P\{X \in L_1, Y \in L_2\} = P\{X \in L_1\}P\{Y \in L_2\}$.

例 7 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim B(1, \frac{1}{2})$，$Y \sim E(1)$，求 $P\{Y - X > 1\}$.

解 $P\{Y - X > 1\} = P\{X = 0, Y - X > 1\} + P\{X = 1, Y - X > 1\}$

$$= P\{X = 0, Y > 1\} + P\{X = 1, Y > 2\}$$

$$= P\{X = 0\}P\{Y > 1\} + P\{X = 1\}P\{Y > 2\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} e^{-x}dx + \frac{1}{2}\int_2^{+\infty} e^{-x}dx = \frac{1}{2}(e^{-1} + e^{-2}).$$

定理 4 设随机变量 X 与 Y 相互独立，$g(x),h(y)$ 是连续函数，则随机变量 $g(X)$ 与 $h(Y)$ 也相互独立.

例如，如果随机变量 X 与 Y 相互独立，则

X^2 与 Y^2 相互独立；

$|X|$ 与 Y 相互独立；

e^X 与 $\sin Y$ 相互独立

等等.

定理 5 设二维随机变量

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho),$$

则 X 和 Y 相互独立的充要条件为 $\rho = 0$.

定理 6 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且

$$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), \quad Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2),$$

则 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,0)$.

例 8 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且均服从 $N(0,1)$，求 $P\{X^2+Y^2\le 1\}$.

解 由于 X 和 Y 相互独立，由定理 6，(X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}，\quad -\infty<x,y<+\infty，$$

所以 $P\{X^2+Y^2\le 1\}=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}r^2}\cdot rdr=1-e^{-\frac{1}{2}}.$$