第二节 概率

概率简单而直观的说法就是描述随机事件发生的可能性的大小.

1. 随机事件的发生是带有偶然性的，但事件发生的可能性是有大小之分的. 如袋中有 9 个黑球，1 个红球，从口袋中任取1球，人们的共识是：取出黑球比取出红球的可能性大.

2. 足球裁判用抛硬币的方法让双方队长选择场地，以示机会均等.

一、频率与概率的统计定义

定义 1 设在 n 次重复试验中，事件 A 发生了 n_A 次，称

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

为事件 A 出现的频率.

例如，抛硬币试验

试验者	抛硬币次数 n	出现正面次数 n_A	出现正面频率 $f_n(A)$
德·摩根	**2048**	**1061**	**0.5181**
蒲　丰	**4040**	**2048**	**0.5069**
$K\cdot$皮尔逊	**12000**	**6019**	**0.5016**
$K\cdot$皮尔逊	**24000**	**12012**	**0.5005**

定义 2（概率的统计定义）设在 n 次重复试验中，事件 A 发生了 n_A 次，当 $n\to\infty$ 时，$f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 无限趋于 p，称 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)$.

频率的性质

1. 对任何事件 A，$f_n(A)\geq 0$；

2. $f_n(\Omega)=1$；

3. 若 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互不相容，则

$$f_n(A_1\cup\cdots\cup A_m)=f_n(A_1)+\cdots+f_n(A_m).$$

1900 年，数学家希尔伯特（1862－1943）提出要建立概率的公理化定义以解决这个问题，即以最少的几条本质特性出发去刻画概率，这几条本质特性源于频率的性质．1933 年，前苏联数学家柯尔莫哥洛夫（1903－1987）以频率的性质为基础，首次提出了概率的公理化定义．这一公理体系迅速获得举世公认，是概率论发展史上的一个里程碑，由此定义后，概率论得到迅速发展．

二、概率的公理化定义

1. 概率的公理化定义

定义 3（概率的公理化定义）设随机试验 E 的样本空间为 Ω，对于每个事件 $A \subset \Omega$，赋予事件 A 一个实数 $P(A)$，满足

(1)非负性：$P(A) \geq 0$；

(2)规范性：$P(\Omega) = 1$；

(3)可列可加性：设事件 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互不相容，有

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1) + \cdots + P(A_n) + \cdots,$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

2. 概率的性质

性质 1（非负性） 设 A 为任一随机事件，则

$$0 \le P(A) \le 1.$$

性质 2（规范性） $P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1$.

性质 3（有限可加性） 如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$.

性质 4 设 A 为任一随机事件，则 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

性质 5 （减法公式）设 A, B 为任意两个随机事件，则

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A\overline{B}).$$

特别： 当 $B\subset A$ 时，有

$$P(A-B)=P(A)-P(B);\quad P(B)\le P(A).$$

性质 6 （加法公式）设 A, B 为任意两个随机事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

推广：设 A, B, C 为任意三个随机事件，则

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)$$
$$-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

例 1 设 A,B 为两个随机事件，已知

$$P(A)=0.5,\ P(B)=0.4,\ P(A\cup B)=0.6\ ,$$

试分别计算 $P(AB), P(A\overline{B}), P(\overline{A}\cup\overline{B}), P(A\cup\overline{B})$.

解 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.3$.

$$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.2\ .$$

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.7\ .$$

$$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})$$

$$=P(A)+[1-P(B)]-P(A\overline{B})=0.9\ .$$

例 2 设 A, B, C 为三个随机事件，已知

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, \quad P(AB)=0, \quad P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16},$$

求事件 A, B, C 都不发生的概率.

解 由于 $ABC \subset AB$ 知，$P(ABC) \le P(AB)$. 又因为 $P(AB)=0$，

且 $P(ABC) \ge 0$，所以有 $P(ABC)=0$.

事件 A, B, C 都不发生的概率为

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A \cup B \cup C})=1-P(A \cup B \cup C)$$

$$=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)]$$

$$=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+0\right)=\frac{3}{8}.$$

三、古典概型

1. 基本的组合分析公式

(1)排列定义： 从 n 个不同的元素中，任取 k 个的元素按次序排列，称为从 n 个元素中任取 k 个元素的排列.

可重复的排列是指所取的 k 个的元素可以重复出现，也称为从 n 个元素中有放回地取 k 个元素的排列. 共有 $\underbrace{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}_{k\text{个}}=n^k$ 种方案.

不可重复的排列是指所取k个的元素不会重复出现，也称为从n个元素中不放回地取k个元素的排列，其中$0 \le k \le n$．共有$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$种方案.

(2) 组合定义：从n个不同元素中任取k $(0 \le k \le n)$个不重复的元素组成一个子集，不考虑其元素的次序，称为从n个元素中任取k个元素的组合，有 $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$种方案.

特别地，$C_n^k = C_n^{n-k}$，约定$0!=1$，有$C_n^0 = C_n^n = 1$.

（3）乘法原理：

若进行 A_1 过程有 n_1 种方法，进行 A_2 过程有 n_2 种方法，则进行 A_1 过程后再接着进行 A_2 过程共有 $n_1 \times n_2$ 种方法.

（4）加法原理：

若进行 A_1 过程有 n_1 种方法，进行 A_2 过程有 n_2 种方法，假定 A_1 过程与 A_2 过程是并行的，则进行 A_1 过程或 A_2 过程的方法共有 $n_1 + n_2$ 种.

2. 模型与公式

如果随机试验 E 满足

（1） E 的样本空间 Ω 中只有有限个样本点；

（2）每次试验中各基本事件出现的概率相等，

称随机试验 E 为古典概型试验（或等可能概型试验）.

设随机试验 E 为古典概型试验， $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，

$A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}\,(m\le n)$，则

$$P(A)=\frac{m}{n}，\text{即 } P(A)=\frac{\text{事件}A\text{所含样本点的个数}}{\text{所有样本点的个数}}.$$

例 3（抽签模型）若口袋中有 a 只黑球，b 只白球，它们除颜色不同外，其它方面没有差别，现在把球随机地一只只摸出来，求第 k 次摸出一只黑球的概率 $p(1 \le k \le a+b)$.

解法 1（球不同） $p=\dfrac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\dfrac{a}{a+b}$.

解法 2（颜色相同的球无区别）

$$p=C_{a+b-1}^{a-1}\Big/C_{a+b}^{a}=\frac{a}{a+b}.$$

例 4 设一批产品共 100 件，其中 98 件正品，2 件次品．就下列三种情况：

(1) 从中一次性地任取 3 件；

(2) 从中有放回地任取 3 件；

(3) 从中不放回地任取 3 件．

分别计算取出的 3 件产品中恰好有 1 件是次品的概率 p．

解 (1) $$p=\frac{C_{98}^{2}C_{2}^{1}}{C_{100}^{3}}=0.0588.$$

(2) $$p=\frac{2\times 98^{2}}{100^{3}}\times 3=0.0576.$$

(3) $$p=\frac{2\times 98\times 97}{100\times 99\times 98}\times 3=0.0588.$$

有放回：每次取一个，观察后放回．

属可重复的排列．

不放回：每次取一个，观察后不回．

属不重复的排列．

例 5　10 个产品中有 4 个次品，从中任取 3 个，求至少有一个次品的概率 p .

解　$p=\dfrac{C_4^1C_9^2}{C_{10}^3}=\dfrac{6}{5}$. × 这是错误的解法!

正确解法 1　$p=\dfrac{C_4^1\cdot C_6^2+C_4^2\cdot C_6^1+C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{5}{6}$.

正确解法 2　$p=1-\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{5}{6}$.

四、几何概型

概型与公式

如果随机试验 E 满足

（1）E 的样本空间 Ω 为某几何区域（可以是一维、二维或三维区域）；（2）每次试验中各基本事件出现的机会相等，

称随机试验 E 为几何概型试验.

设随机试验 E 为几何概型试验，Ω 为一个区域，$A \subset \Omega$，则

$$P(A) = \frac{A\text{的几何测度}}{\Omega\text{的几何测度}},$$

其中几何测度根据 Ω 是一维，二维或三维区域分别为长度、面积或体积.

例 6 在$(0,1)$区间随机取两个数，求两数之和小于$\dfrac{1}{2}$的概率.

解 设事件A表示两数之和小于$\dfrac{1}{2}$，又设所取的两数分别为x, y，则

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\},$$

$$A = \left\{(x, y) \,\middle|\, x + y < \frac{1}{2}, (x, y) \in \Omega\right\}$$

由几何概型知

$$P(A) = \frac{A\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}} = \frac{1}{8}.$$

例 7 将一根长度为 $a\ (a>0)$ 的细棒分为三段，求此三段能够组成一个三角形的概率.

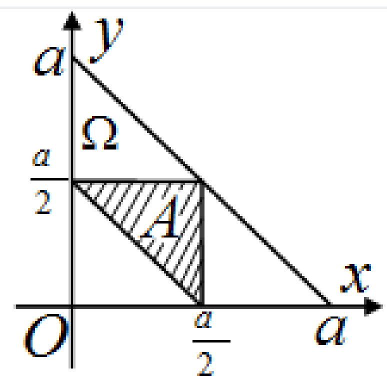
解 设细棒的三段长度分别为 $x, y, a-x-y$，则由

$$0<x<a, 0<y<a, 0<a-x-y<a,$$

得三角形区域 $\{(x,y)\mid 0<x<a, 0<y<a, 0<x+y<a\}$. 当 (x,y) 在该区域内等可能任意取一个点时，就确定了对细棒的任意一个分段，且每种分段的机会相等，反之亦然. 因此样本空间

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<a, 0<y<a, 0<x+y<a\}.$$

并符合几何概型的两个特征.



设事件 A 表示此三段能够组成一个三角形，则

$$A=\{(x,y)\mid x+y>a-x-y, x+(a-x-y)>y, y+(a-x-y)>x, (x,y)\in\Omega\}$$

$$=\{(x,y)\mid x+y>\frac{a}{2}, x<\frac{a}{2}, y<\frac{a}{2}\},$$ 所以 $P(A)=\dfrac{A\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}}=\dfrac{1}{4}$.