第三节 常见分布的期望和方差

（结论证明部分主要自学）

计算工具：高等数学中的积分计算和幂级数求和

要求：熟记其结论

分　布	分布律或概率密度	EX	DX
0-1分布 $X\sim B(1,p)$	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	p	$p(1-p)$
二项分布 $X\sim B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\cdots,n$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $X\sim P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1,2,\cdots$	λ	λ
几何分布 $X\sim G(p)$	$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\cdots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
均匀分布 $X\sim U[a,b]$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $X\sim E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

例 1 设随机变量 $X \sim U[0,6]$, $Y \sim E(0.5)$，计算 $\begin{vmatrix} EX & DX \\ EY & DY \end{vmatrix}$.

解 $EX = \dfrac{0+6}{2} = 3$, $DX = \dfrac{(6-0)^2}{12} = 3$，$EY = \dfrac{1}{0.5} = 2$, $DY = \dfrac{1}{0.5^2} = 4$,

所以
$$\begin{vmatrix} EX & DX \\ EY & DY \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6.$$

例 2 设随机变量 $X \sim P(1)$，求 $P\{X = E(X^2)\}$.

解 因为 $X \sim P(1)$，所以 $EX = 1$, $DX = 1$，因此

$$E(X^2) = DX + (EX)^2 = 2,$$

故
$$P\{X = E(X^2)\} = P\{X = 2\} = \frac{1^2}{2!}e^{-1} = \frac{1}{2e}.$$

例 3 设甲袋中有70只黄色乒乓球和30只白色乒乓球，乙袋中有45只黄色乒乓球和5只白色乒乓球，现从两袋中各取一只乒乓球，记 X 为两只乒乓球中白球的个数，求 EX， DX.

解 设 X_1 表示从甲袋中所取一个乒乓球中白球的个数， X_2 表示从乙袋中所取一个乒乓球中白球的个数，则 $X = X_1 + X_2$，又由题意知 X_1 与 X_2 相互独立，且 $X_1 \sim B(1, 0.3)$，$X_2 \sim B(1, 0.1)$，则有

$$EX = EX_1 + EX_2 = 0.3 + 0.1 = 0.4,$$

$$DX = DX_1 + DX_2 = 0.3 \times 0.7 + 0.1 \times 0.9 = 0.3.$$

例 4 设随机变量 X 与 Y 独立，且 $X \sim N(1,2)$，$Y \sim N(0,1)$. 试求 $Z = 2X - Y + 3$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

解 由正态分布的性质知，Z 服从正态分布. 又因为

$EX = 1, EY = 0, DX = 2, DY = 1$,

所以
$$EZ = 2EX - EY + 3 = 2\times1 - 0 + 3 = 5,$$

$$DZ = 2^2 DX + DY = 4\times2 + 1 = 9,$$

故 $Z \sim N(5,9)$，因此 Z 的密度函数为

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\times3} e^{-\frac{(z-5)^2}{2\times9}} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}, \quad -\infty < z < +\infty.$$

练习：

1. 设二维随机变量$(X,Y)\sim N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，

则$E(XY^2)=$_____.

答案： $\mu(\mu^2+\sigma^2)$.

2. 设随机变量$X\sim U[-1,2]$，$Y=\begin{cases}1, & X>0,\\ 0, & X=0,\\ -1, & X<0,\end{cases}$

则$DY=$_____.

答案： $\frac{8}{9}$.

3. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi(\frac{x-1}{2}),$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，求 EX .

答案： 0.7 .