第四节 随机变量函数的分布

在现实生活中，存在着许多随机变量的函数，而研究随机变量函数的分布有着非常重要的实际意义.

例如，已知某圆形机械零件的半径 $X \sim U[2,3]$，求该圆形机械零件的面积 $S = \pi X^2$ 所服从的概率分布.

设 $X = X(\omega)$ 为在点集 D 上取值的随机变量， $g(x)$ 为在 D 上有定义的函数，因此， $Y = g(X(\omega))$ 仍为随机变量，称为随机变量 X 的函数，简记为 $Y = g(X)$.

本节将介绍当随机变量 X 的概率分布，以及函数 $g(x)$ 均已知时，如何求出 $Y=g(X)$ 的概率分布.

求 $Y=g(X)$ 的概率分布是指:

若 Y 是离散型, 则求 Y 的分布律;

若 Y 是连续型, 则求 Y 的概率密度;

若 Y 既不是连续型也不是离散型, 则求 Y 的分布函数.

一、离散型随机变量函数的分布

设 X 为离散型随机变量，且其分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

则 Y 为离散型随机变量，**求 Y 的分布律的步骤为**：

第一步：在 X 的分布律中添加一行 $Y=g(X)$，并将计算 $y_i=g(x_i)$ $(i=1,2,\cdots)$ 的值对于填入该行中；

第二步：对其中 Y 取值相同的项适当进行概率合并，即得 Y 的分布律.

例 1 设随机变量 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$， 分别求出

$Y = X^2$ 和 $Z = \max\{X, 1\}$ 的概率分布.

解 ①作下列列表计算

X	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
Y	1	0	1	4
Z	1	1	1	2

②适当合并，得

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$Z \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

例 2 随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^k}$, $k=1,2,3,\cdots$.

求 $Y=\sin(\dfrac{\pi}{2}X)$ 的分布律.

解 由题意知 Y 的取值为 $-1,0$ 和 1，并且

$$P\{Y=-1\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=4i-1\}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4i-1}}=\frac{2}{15};$$

$$P\{Y=0\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=2i\}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2i}}=\frac{1}{3};$$

$$P\{Y=1\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=4i-3\}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4i-3}}=\frac{8}{15};$$

即 $$Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \dfrac{2}{15} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{8}{15}\end{pmatrix}.$$

二、连续型随机变量函数的分布

当 X 为连续型随机变量时，$Y=g(X)$ 可能为离散型随机变量，也可能为连续型随机变量，甚至为非离散型、也非连续型随机变量.

例 3 设随机变量 $X \sim U[-1,2]$，求 $Y = \mathrm{sgn}(X)$ 的分布律.

解 由于 Y 的取值为 $-1, 0$ 和 1，所以 Y 为离散型随机变量，且 $P\{Y=-1\} = P\{X<0\} = \frac{1}{3}$，

$$P\{Y=0\} = P\{X=0\} = 0,$$

$$P\{Y=1\} = P\{X>0\} = \frac{2}{3},$$

故 Y 的分布律为 $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

如果 X 为连续型随机变量，而 $Y=g(X)$ 为非离散型随机变量，此时可用下列**分布函数法**，求得 $Y=g(X)$ 的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}=\int_{g(x)\le y} f(x)dx\text{，}\quad -\infty<y<+\infty\text{.}$$

如果根据 $F_Y(y)$ 的结果分析出 Y 为连续型随机变量，则进一步可求得 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)\text{，}\quad -\infty<y<+\infty\text{.}$$

注 1 分布函数法要重点掌握.

注 2 分布函数法的难点在于：在计算

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}=\int_{g(x)\le y} f(x)dx\text{，}\quad -\infty<y<+\infty$$

的过程中，经常需要对变量 y 进行分段讨论.

例 4 已知随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，则

$Y=3X-1$ 的密度函数 $f_Y(y)=$（　　）.

（A）$\dfrac{f(y)+1}{3}$；　　（B）$\dfrac{f(y+1)}{3}$；

（C）$f(\dfrac{y+1}{3})$；　　（D）$\dfrac{1}{3}f(\dfrac{y+1}{3})$.

答案： (D) .

例 5 设某圆形机械零件的半径 $X\sim U[2,3]$，求该圆形机械零件的面积 $S=\pi X^2$ 的密度函数 $f_S(s)$.

解 S 的分布函数为 $F_S(s)=P\{S\le s\}=P\{\pi X^2\le s\}$.

当 $s<4\pi$ 时，$F_S(s)=0$；当 $s>9\pi$ 时，$F_S(s)=1$；

当 $4\pi\le s\le 9\pi$ 时，

$$F_S(s)=P\{-\sqrt{\frac{s}{\pi}}\le X\le\sqrt{\frac{s}{\pi}}\}=P\{2\le X\le\sqrt{\frac{s}{\pi}}\}=\sqrt{\frac{s}{\pi}}-2;$$

所以 S 的密度函数为

$$f_S(s)=F_S'(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{s\pi}}, & 4\pi\le s\le 9\pi,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

例 6 设随机变量 $X \sim E(\lambda)$，求 $Y=\min\{X,2\}$ 的分布函数 $F_Y(y)$.

解 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\min\{X,2\}\le y\}$.

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P(\varnothing)=0$；

当 $y\ge 2$ 时，$F_Y(y)=P(\Omega)=1$；

当 $0\le y<2$ 时，

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=1-P\{\min\{X,2\}>y\}\\&=1-P\{X>y,2>y\}=1-P\{X>y\}\\&=P\{X\le y\}=\int_0^y \lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda y},\end{aligned}$$

所以所求 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 1-e^{-\lambda y}, & 0\le y<2,\\ 1, & y\ge 2.\end{cases}$$

上例中的随机变量 Y 为非离散型，也非连续型随机变量.

公式法

定理 1 设 X 为一连续型随机变量，其概率密度为 $f_X(x)$. 若 $y=g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 为**严格单调**，其反函数 $x=h(y)$ 具有一阶连续导数，则 $Y=g(X)$ 也为连续型随机变量，且其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))\left|h'(y)\right|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中 $\alpha=\min\{g(-\infty),g(+\infty)\}$， $\beta=\max\{g(-\infty),g(+\infty)\}$.

例 7 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $Y = aX + b$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$，其中 a, b 为常数，且 $a \neq 0$.

解 $y = g(x) = ax + b$，其反函数 $x = h(y) = \dfrac{y-b}{a}$，

$|h'(y)| = \dfrac{1}{|a|}$，$\alpha = -\infty$，$\beta = +\infty$，由公式法，得

$$f_Y(y) = f_X[h(y)]|h'(y)| = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(|a|\sigma)} e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}}$$

其中 $-\infty < y < +\infty$.

注 3 若 $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, \left(a\sigma\right)^2)$，$a,b$ 为常数，且 $a \neq 0$.

如果令 $a = \dfrac{1}{\sigma}, b = -\dfrac{\mu}{\sigma}$，则得 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

注 4 公式法要求函数 $y = g\left(x\right)$ 严格单调，可了解.