第四节 条件概率分布

一、条件分布函数

定义 1 设(X,Y)为二维随机变量，已知随机变量Y的取值为$Y=y$，且对于任意给定的正数ε，$P\{y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}>0$．如果对于任意给定的$x\in(-\infty,+\infty)$，极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} P\{X\le x \mid y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\{X\le x, y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}}$$

均存在，就称此极限所得函数为在条件$Y=y$下，X的**条件分布函数**，记为$F_{X|Y}(x|y)$或$P\{X\le x|Y=y\}$．

同理可定义在条件 $X=x$ 下，Y 的**条件分布函数**

$$F_{Y|X}(y|x) \text{ 或 } P\{Y \le y | X = x\}.$$

因此

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \le x | Y = y\} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{P\{X \le x, y-\varepsilon \le Y < y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\}},$$

$$-\infty < x < +\infty;$$

$$F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \le y | X = x\} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{P\{Y \le y, x-\varepsilon < X \le x+\varepsilon\}}{P\{x-\varepsilon < X \le x+\varepsilon\}},$$

$$-\infty < y < +\infty.$$

二、离散型随机变量的条件概率分布律

定义 2 设(X,Y)为二维离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}，\quad i=1,2,\cdots,\ j=1,2,\cdots,$$

如果已知Y的取值为$Y=y_j$，且$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}>0$，就称

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}，\quad i=1,2,\cdots$$

为在条件$Y=y_j$下，X **的条件分布律**.

如果已知X的取值为$X=x_i$，且$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}>0$，就称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}，\quad j=1,2,\cdots$$

为在条件$X=x_i$下，Y **的条件分布律**.

条件分布律均满足分布律的性质

$$P\left\{X=x_i \middle| Y=y_j\right\}\geq 0, P\left\{Y=y_j \middle| X=x_i\right\}\geq 0;$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\left\{X=x_i \middle| Y=y_j\right\}=1, \sum_{j=1}^{\infty} P\left\{Y=y_j \middle| X=x_i\right\}=1.$$

例 1 在前面例子中，分别就（1）不放回；(2) 有放回两种情况，求出在条件 $Y=1$ 下，X 的条件分布律.

解（1）不放回；(2)有放回时的联合分布律和边缘分布律为

不放回

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\bullet j}$
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

有放回

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\bullet j}$
0	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{5}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

解 (1) 不放回

$$P\{X=0|Y=1\}=\frac{P\{X=0,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{3/10}{2/5}=\frac{3}{4}$$

$$P\{X=1|Y=1\}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{1/10}{2/5}=\frac{1}{4}.$$

（2）有放回

$$P\{X=0|Y=1\}=\frac{P\{X=0,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{6/25}{2/5}=\frac{3}{5}$$

$$P\{X=1|Y=1\}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{4/25}{2/5}=\frac{2}{5}.$$

三、连续型随机变量的条件密度函数

定义 3 设(X,Y)为二维连续型随机变量，其密度函数为 $f(x,y)$，如果已知Y 的取值为$Y=y$，且 $f_Y(y)>0$，就称

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \quad -\infty<x<+\infty$$

为在条件$Y=y$下，X 的条件密度函数.

如果已知 X 的取值为 $X=x$，且 $f_X(x)>0$，就称

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \quad -\infty<y<+\infty$$

为在条件 $X=x$下，Y 的条件密度函数.

对于二维连续型随机变量(X,Y)，由于

$$P\{Y=y_0\}=0,\ P\{a\le X\le b, Y=y_0\}=0,$$

所以条件概率 $P\{a\le X\le b \mid Y=y_0\}$ 不能用第一章的条件概率计算公式计算，即 $P\{a\le X\le b \mid Y=y_0\} \not= \dfrac{P\{a\le X\le b, Y=y_0\}}{P\{Y=y_0\}}$。

同理，$P\{c\le Y\le d \mid X=x_0\}$ 也不能用第一章的条件概率计算公式计算，因此介绍下列定理.

定理 1 设二维随机变量(X,Y)的密度函数为 $f(x,y)$，

如果 $f_Y(y_0)>0$，则 $P\{a\le X\le b \mid Y=y_0\}=\int_a^b f_{X|Y}(x \mid y_0)dx$.

如果 $f_X(x_0)>0$，则 $P\{c\le Y\le d \mid X=x_0\}=\int_c^d f_{Y|X}(y \mid x_0)dy$.

例 2 设二维随机变量(X,Y)的密度函数为$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, 0<y<x, \\ 0 \quad 其它. \end{cases}$

(1) 试分别求 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$；(2) 计算$P\{Y>1|X=2\}$.

解 (1) 在本章第二节例 4 中，已经求得(X,Y)关于 X 和关于Y 的边缘密度分别为 $f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0, \end{cases}$， $f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0, \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$

所以当$y>0$时，
$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases} e^{y-x}, & x>y>0, \\ 0, & x\le y. \end{cases}$$

当$x>0$时，
$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0<y<x, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

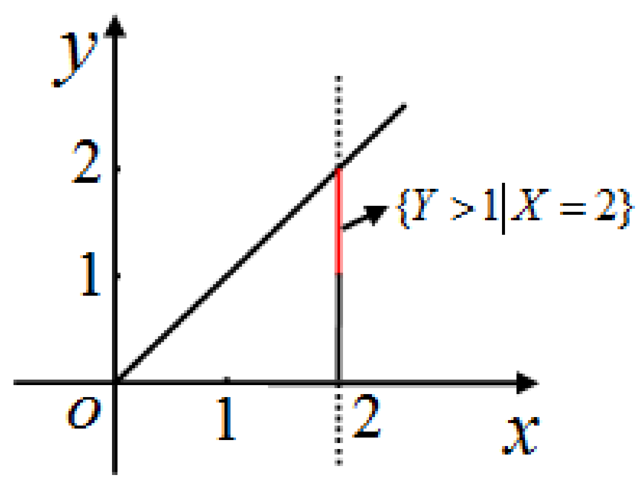
（续解） (2) 由(1)知，在条件 $X=2$ 下，

$$f_{Y|X}(y|2)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

利用定理 1 得 $P\{Y>1|X=2\}=\int_{1}^{+\infty}f_{Y|X}(y|2)\,dy=\int_{1}^{2}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}$.

直观意义： 当 $X=2$ 时，Y 在$(0,2)$内服从均匀分布，因此

$$P\{Y>1|X=2\}=\frac{1}{2}.$$（如图）



例 3 设随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$

当 $0<x<1$ 时，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x(1-x)}, & x^2<y<x,\\ 0, & 其它.\end{cases}$（1）求 X 和 Y 的联合密度函数 $f(x,y)$；（2）求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解（1）由题意知，当 $0<x<1,\ x<y<x^2$ 时，X 和 Y 的联合密度函数为：$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=6x(1-x)\times\dfrac{1}{x(1-x)}=6$；

且除此以外，二维随机变量 (X,Y) 不取其它任何点，故在其它点 (x,y) 处，均有 $f(x,y)=0$.

（续解）　综上得，

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & 0<x<1, x^2<y<x\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(2) 当 $0<y<1$ 时，有

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx=6(\sqrt{y}-y);$$

当 $y\le 0$ 或 $y\ge 1$ 时， $f(x,y)=0$，故

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=0,$$

所以 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$