第三章　多维随机变量及其分布

在有些随机现象中，对每个样本点 ω 只用一个随机变量去描述是不够的．譬如要研究儿童的生长发育情况，仅研究儿童的身高 $X(\omega)$ 或仅研究其体重 $Y(\omega)$ 都是局部的，有必要把 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 作为一个整体来考虑，讨论它们总体变化的统计规律性，进一步可以讨论 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 之间的关系．在有些随机现象中，甚至要同时研究两个以上的随机变量．本章主要研究二维随机变量及其分布，其结果不难推广到多维随机变量上去．

第一节 二维随机变量及其分布

一、二维随机变量及其分布函数

1. 二维随机变量的概念

定义 1 设随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{\omega\}$， $X=X(\omega)$，$Y=Y(\omega)$ 分别为定义在 Ω 上的随机变量，就称 (X,Y) 为**二维随机变量**.

例如，着弹点 (X,Y) 为二维随机变量.

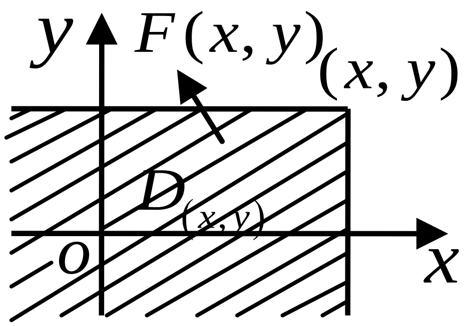
2. 二维随机变量的联合分布函数

定义 2 设(X,Y)为二维随机变量，称

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}，\quad -\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty$$

为(X,Y)的**分布函数**或称为X和Y的**联合分布函数**.

$F(x,y)$在点(x,y)处的取值为二维随机变量(X,Y)落入平面区域$D_{(x,y)}=(-\infty,x]\times(-\infty,y]$上的概率（见右图）.



3. 联合分布函数的性质

设 $F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数，则

性质 1 $0 \le F(x,y) \le 1$，其中 $-\infty < x < +\infty$，

$-\infty < y < +\infty$.

性质 2 $F(x,-\infty) = F(-\infty,y) = F(-\infty,-\infty) = 0$，

$F(+\infty,+\infty) = 1$，其中 $-\infty < x < +\infty$，$-\infty < y < +\infty$.

性质 3 $F(x,y)$ 分别为关于变量 x 和 y 单调不减的函数.

性质 4 $F(x,y)$ 分别关于变量 x 和 y 处处右连续.

性质 5 $P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$

$$= F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1),$$

其中 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$.

例 1 设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y) = a(b + \arctan x)(c + \arctan y), \quad (x,y) \in R^2,$$

(1)求常数 a,b,c;

(2)分别计算概率 $P\{X \le 1, Y \le 1\}$ 和 $P\{X > 1, Y > 1\}$.

解 (1)由 $F(+\infty,+\infty)=1$ 知 $a(b+\frac{\pi}{2})(c+\frac{\pi}{2})=1$， （1. 1）

由 $F(x,-\infty)=0$ 知，对任意的 $x\in R$，有

$$a(b+\arctan x)(c-\frac{\pi}{2})=0, \qquad (1.2)$$

同理，对任意的 $y\in R$，有 $a(b-\frac{\pi}{2})(c+\arctan y)=0$，（1. 3）

联立（1. 1），（1. 2）和（1. 3），解得 $a=\frac{1}{\pi^2}, b=\frac{\pi}{2}, c=\frac{\pi}{2}$.

（续解） (2) 由(1)知

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan x)(\frac{\pi}{2}+\arctan y)\ ,$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\ ,$$

所以 $P\{X\le 1,Y\le 1\}=F(1,1)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})=\frac{9}{16}$,

$$P\{X>1,Y>1\}=P\{1<X<+\infty,1<Y<+\infty\}$$

$$=F(+\infty,+\infty)-F(+\infty,1)-F(1,+\infty)+F(1,1)$$

$$=1-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}=\frac{1}{16}\ .$$

二、二维离散型随机变量

1. 二维离散型随机变量的概念

定义 3 如果二维随机变量 (X,Y) 的所有可能取值为有限对或可列对，就称 (X,Y) 为二维离散型随机变量.

2. 二维离散型随机变量的分布律

定义 4 设 (X,Y) 为二维离散型随机变量，其所有可能的取值为 (x_i, y_j)，其中 $i=1,2,\cdots,\ j=1,2,\cdots$，且

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},\quad i=1,2,\cdots,\ j=1,2,\cdots,$$

就称上式为二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律或 X 和 Y 的联合分布律.

二维离散型随机变量的分布律也可列表为

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

例 2 设同一品种的五个产品中，有二个次品，每次从中取一个检验，连续二次．设 X 表示第一次取到的次品个数；Y 表示第二次取到的次品个数．试分别就(1)不放回；(2)有放回两种情况，求出 (X,Y) 的概率分布．

解 (1) 不放回的情况：利用乘法公式可计算得

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\mid X=0\}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10};$$

同理可求得 $P\{X=0,Y=1\}=\dfrac{3}{10}$，$P\{X=1,Y=0\}=\dfrac{3}{10}$，

$P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{1}{10}$，

所以 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

(2) 有放回的情况：与(1)相仿，利用乘法公式可计算得

$$P\{X=0, Y=0\} = P\{X=0\}P\{Y=0 \mid X=0\} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25};$$

同理可得：$P\{X=0, Y=1\} = \dfrac{6}{25}$, $P\{X=1, Y=0\} = \dfrac{6}{25}$,

$P\{X=1, Y=1\} = \dfrac{4}{25}$，故有放回的情况下，$(X, Y)$ 的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$

3. 分布律的性质

性质 6 设二维离散型随机变量(X,Y)的分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots,$$

则有

(1) $p_{ij} \geq 0$， $i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots$； (2) $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

4. 概率的计算

设二维离散型随机变量(X,Y)的分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i=1,2,\cdots, j=1,2,\cdots,$$

则(X,Y)具有下列结论.

结论 1 $P\{(X,Y)\in D\}=\sum\limits_{(x_i,y_j)\in D} p_{ij}$，其中$D$为任一平面区域.

结论 2 (X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y} p_{ij},$$

$$-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty.$$

例 3 已知二维随机变量 (X,Y) 的分布律为

Y \ X	-1	0	1
0	0.2	a	0.3
1	0.1	0.1	b

且 $F(0,1.5)=0.5$.

(1) 求常数 a,b 的值;

(2) 计算 $P\{X=Y\}$.

解(1) 由 $F(0,1.5)=P\{X\le 0, Y\le 1.5\}=0.5$，得 $0.4+a=0.5$，故 $a=0.1$. 又由 $\sum_i\sum_j p_{ij}=1$ 知，$0.7+a+b=1$，所以 $b=0.2$.

(2) 由(1)得 (X,Y) 的分布律为

Y \ X	-1	0	1
0	0.2	0.1	0.3
1	0.1	0.1	0.2

故 $P\{X=Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=0.1+0.2=0.3$.

三、二维连续型随机变量

1. 二维连续型随机变量的概念

定义 5 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$，如果存在二元非负可积函数 $f(x,y)$，使得对任意实数 x,y，均有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv,$$

就称(X,Y)为二维连续型随机变量，$f(x,y)$为(X,Y)的联合概率密度函数或概率密度函数.

2. 概率密度函数的性质与概率的计算

性质 7 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)$，则

(1) $f(x,y)\geq 0$， $-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$.

结论 3 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)$，则

(1) 在 $f(x,y)$ 的连续点 (x,y) 处，$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$；

(2) 对平面上任一区域 D，有 $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

结论 4 如果 L 为平面上任一曲线，则 $P\{(X,Y)\in L\}=0$.

例 4 设(X,Y)的密度函数为$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-x}, & 0<y<x, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$ (1) 求常数k．(2) 计算概率$P\{X+Y<2\}$；(3) 求(X,Y)的分布函数$F(x,y)$．

解 (1) 由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$知，$\int_0^{+\infty}dx\int_0^x ke^{-x}dy=1$，

经计算得$k=1$．从而$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

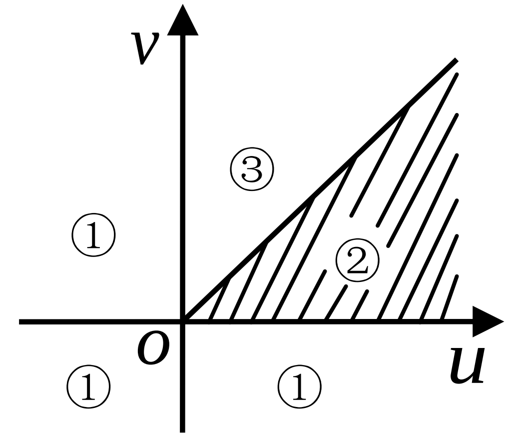
(2) $$P\{X+Y<2\}=\iint\limits_{x+y<2} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_y^{2-y} e^{-x}dx$$

$$=\int_0^1 (e^{-y}-e^{y-2})dy=(1-\frac{1}{e})^2.$$

（了解） (3)分布函数 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$，$(x,y)\in R^2$，且

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x, \\ 0 & \text{其它}, \end{cases}$$

（$\boldsymbol{a}$）

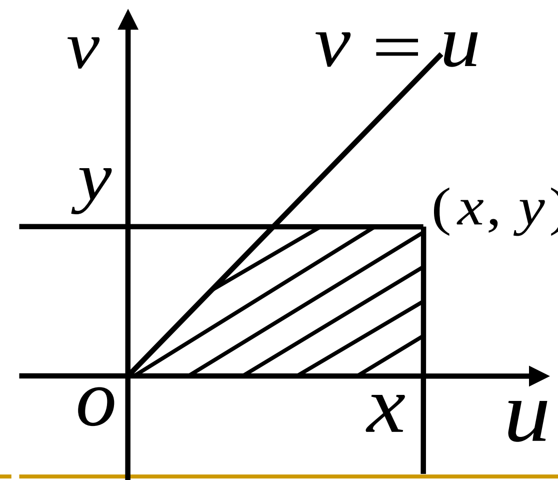


所以将整个平面划分为三块分别计算（图 $\boldsymbol{a}$）.

①当 $x\le 0$ 或 $y\le 0$ 时（图 a）；由于 $f(x,y)=0$，所以 $F(x,y)=0$.

②当 $0<y<x$ 时，（图（b））

（b）



$$F(x,y)=\int_0^y dv\int_v^x e^{-u}du$$

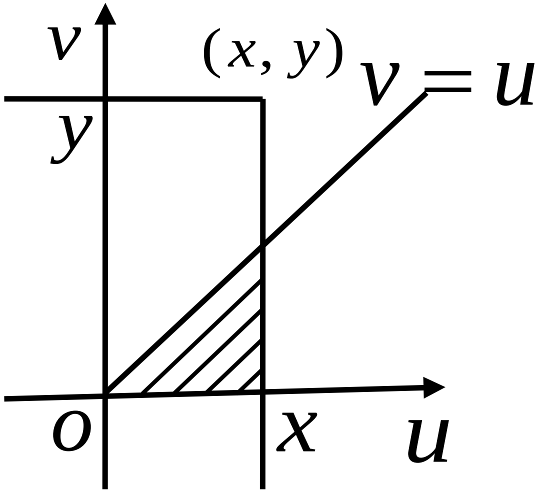
$$=\int_0^y (e^{-v}-e^{-x})dv=1-e^{-y}-ye^{-x}.$$

（续解）③当 $0 < x \le y$ 时,（图 3.2（c））

$$F(x,y) = \int_0^x dv \int_v^x e^{-u} du$$

（c）

$$= \int_0^x (e^{-v} - e^{-x}) dv = 1 - (1+x)e^{-x}.$$



故 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{或} y \le 0, \\ 1 - e^{-y} - ye^{-x}, & 0 < y < x, \\ 1 - (1+x)e^{-x}, & 0 < x \le y. \end{cases}$$

3. 几种常见的二维连续型随机变量的概率分布

(1) 二维均匀分布

定义 6 设平面有界区域 D 的面积为 A，如果二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$
就称 (X,Y) 服从区域 D 上（内）的**均匀分布**，记为 $(X,Y)\sim U(D)$.

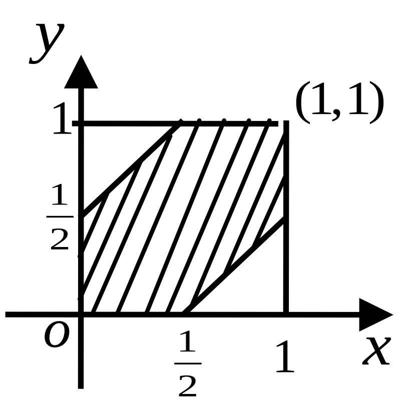
(X,Y) 落入某平面区域 G 内（上）的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=P\{(X,Y)\in G\cap D\}=\frac{G\cap D\text{的面积}}{A}.$$

例 5 设(X,Y)服从区域$D: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$上的均匀分布，求$P\{|X-Y|\le \frac{1}{2}\}$.

解 由题意知，区域D的面积$A=1$. 由不等式$|x-y|\le \frac{1}{2}$确定的平面区域G如下图中的阴影部分，G的面积为

$1-(\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$，所以所求概率为



$$P\{|X-Y|\le \frac{1}{2}\}=\frac{G\text{的面积}}{A}=\frac{\frac{3}{4}}{1}=\frac{3}{4}.$$

(2) 二维正态分布

定义 7 如果二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty, \tag{1.4}$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 均为常数，且满足:

$$-\infty<\mu_1<+\infty,-\infty<\mu_2<+\infty,\sigma_1>0,\sigma_2>0,\quad -1<\rho<1,$$

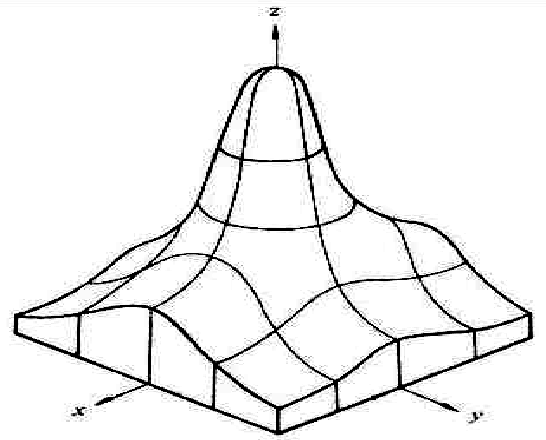
就称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的**二维正态分布**，记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho).$$

例 6 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=ke^{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}y^2}$，

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty.$$

指出 (X,Y) 所服从的分布，求常数 k.



二维正态分布的密度函数

解 对比（1.4）式，不难发现，$\mu_1=0,\mu_2=0,\rho=0$，且

$$f(x,y)=ke^{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}y^2}=k\times4\pi\times\frac{1}{2\pi\times1\times2}e^{-\frac{1}{2}[x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2]},$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

故进而 $\sigma_1=1,\sigma_2=2$，所以 $(X,Y)\sim N(0,0,1,4,0)$，且 $k=\dfrac{1}{4\pi}$.

练习：

1. 设二维随机变量

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ \frac{1}{4} & a & b & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

且 $F(0,1)=\frac{1}{2}$, 求 a,b .

答案： $a=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{3}$.

2. 设随机变量$U \sim U[-2,2]$， $X=\begin{cases}-1, & U \le -1,\\ 1, & U > -1,\end{cases}$

$Y=\begin{cases}-1, & U \le 1,\\ 1, & U > 1.\end{cases}$求 X 和 Y 的联合分布律为_____.

答案： $(X,Y) \sim \begin{pmatrix} (-1,-1) & (-1,1) & (1,-1) & (1,1) \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

3. 设平面区域$D: 0 \leq x \leq y \leq 1$, 二维随机变量

$(X,Y) \sim U(D)$，则$P\{Y > \frac{1}{2} \Big| X < \frac{1}{2}\} =$ ______.

答案：$\frac{2}{3}$.