第五节 二维随机变量函数的分布

一、二维离散型随机变量的函数 $Z = g(X,Y)$ 的概率分布

设 (X,Y) 为二维离散型随机变量，且其分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij},\quad i = 1,2,\cdots,\ j = 1,2,\cdots.$$ 或

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\cdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

将 (X,Y) 的分布律写为

(X,Y)	(x_1,y_1)	(x_1,y_2)	$\cdots$	(x_i,y_j)	$\cdots$
P	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$

则求 $Z=g(X,Y)$ 的分布律的步骤为:

第一步: 在 (X,Y) 的分布律中添加一行 $Z=g(X,Y)$，并将计算 $z_i=g(x_i,y_j)$ $(i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots)$ 的值对于填入该行中;

第二步: 对其中 Z 取值相同的项适当进行概率合并，即得 Z 的分布律.

例 1 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	0	1
0	0.2	0.4
1	0.1	0.3

试分别求 $Z_1 = X+Y$，$Z_2 = XY$，$Z_3 = \max\{X,Y\}$ 的分布律.

解 列表计算如下

(X,Y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
P	0.2	0.1	0.4	0.3
Z_1	0	1	1	2
Z_2	0	0	0	1
Z_3	0	1	1	1

经过合并整理，可得

$$Z_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}，\quad Z_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}，\quad Z_3 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

二、二维连续型随机变量的函数 $Z=g(X,Y)$ 的概率分布

如果 (X,Y) 为二维连续型随机变量，且 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)$，则二维随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 出现的情况比较复杂，

(1) $Z=g(X,Y)$ 可能为离散型随机变量，此时求 Z 的分布律.

(2) $Z=g(X,Y)$ 也可能为连续型随机变量，此时求 Z 的密度函数 $f_Z(z)$.

(3) $Z=g(X,Y)$ 还可能为非离散型，非连续型随机变量此时求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$.

例 2 设平面区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$，二维随机变量 $(X,Y)\sim U(D)$，令 $Z=\begin{cases}0, & XY>0,\\ 1, & XY\le 0,\end{cases}$ 求 Z 的概率分布.

解 由于 Z 的取值仅为0和1，所以 Z 为离散型随机变量，并且

$$P\{Z=0\}=P\{XY>0\}=P\{X>0,Y>0\}+P\{X<0,Y<0\},$$

利用几何概型知，$P\{X>0,Y>0\}=P\{X<0,Y<0\}=\dfrac{1}{4}$，所以

$P\{Z=0\}=\dfrac{1}{2}$，$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=\dfrac{1}{2}$，故 $Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$.

当 $Z=g(X,Y)$ 为连续型随机变量，或为既非离散型，也非连续型随机变量时，通常用下列**分布函数法**，求出 Z 的分布函数

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{g(X,Y)\le z\right\},$$

$$=\iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)\,dxdy\,,\quad -\infty<z<+\infty\,.$$

如果 Z 为连续型随机变量，则其**密度函数**为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)\,,\quad -\infty<z<+\infty\,.$$

注 1:分布函数法的难点在于：在计算 $F_Z(z)$ 的过程中，经常需要对变量 z 进行分段讨论.

定理 1 设二维随机变量(X,Y)的密度函数为$f(x,y)$，

则$Z=X+Y$的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx \text{ 或 } f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,dy .$$

如果X 和 Y 相互独立，则$Z=X+Y$的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx \text{ 或 } f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,dy ,$$

其中$f_X(x)$，$f_Y(y)$分别为X和Y的密度函数．此公式称为卷积公式.

【只证$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$，另一种形式同理可证】

证 $Z=X+Y$ 的分布函数为 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$

$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)dy\ ,$$

令 $y=t-x$，并交换积分次序，得

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z}f(x,t-x)dt\right]dx=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t-x)dx\right]dt\ ,$$

由此可知，$Z=X+Y$ 为连续型随机变量，且其密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,dx\ .$$

如果 X 和 Y 相互独立，则有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,dx\ .$$

例 3 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim N(0,1)$，且 X 和 Y 相互独立，求 $Z = X + Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

解 X 和 Y 的密度函数分别为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty, \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, -\infty < y < +\infty,$$

由定理 1，$Z = X + Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \times \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{z^2}{2\times 2}}, \quad -\infty < z < +\infty.$$

由上式可知：$Z = X + Y \sim N(0,2)$.

结论 3 (1) 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，则 $Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$；

(2) 设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，则 $Z = X + Y$ 服从正态分布.

注 2 如果随机变量 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，则

(1) 未必有 $Z = X + Y$ 服从正态分布；

(2) 也未必有 (X, Y) 服从二维正态分布.

结论 2 设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，

$$\begin{cases} U = aX + bY, \\ V = cX + dY, \end{cases} \text{且} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0,$$

则 (U,V) 也服从二维正态分布.

例 4 随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 和 Y 均服从正态分布，$U = X + Y, V = X - Y$，证明 (U,V) 服从二维正态分布.

证 由题设条件知 (X,Y) 服从二维正态分布. 又

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

再由上述结论 2 知 (U,V) 服从二维正态分布.

例 5. 设随机变量 X,Y 相互独立，其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, 0\le x\le 1\\ 0, \quad 其他\end{cases}, \quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, y>0\\ 0, \quad y\le 0\end{cases},$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 概率密度函数 $f_Z(z)$.

答案:

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \frac{1}{2}\left(1-e^{-z}\right), & 0<z\le 2\\ \frac{1}{2}\left(e^2-1\right)e^{-z}, & z>2\end{cases}.$$

定理 3 设随机变量 X 和 Y **相互独立**，X 的密度函数为 $f_X(x)$，分布函数为 $F_X(x)$，Y 的密度函数为 $f_Y(y)$，分布函数为 $F_Y(y)$． $M=\max\{X,Y\}$， $N=\min\{X,Y\}$，则 M 和 N 的分布函数 $F_M(x), F_N(x)$ 和密度函数 $f_M(x), f_N(x)$ 分别为

重要！
记住结论

$$F_M(x)=F_X(x)F_Y(x),$$

$$f_M(x)=F_M'(x)=f_X(x)F_Y(x)+f_Y(x)F_X(x);$$

$$F_N(x)=1-[1-F_X(x)][1-F_Y(x)],$$

$$f_N(x)=F_N'(x)=f_X(x)[1-F_Y(x)]+f_Y(x)[1-F_X(x)].$$

关键在于证明 $F_M(x)=F_X(x)F_Y(x)$ 和 $F_N(x)=1-[1-F_X(x)][1-F_Y(x)]$

证明：

$$F_M(x)=P\{M\le x\}=P\{\max\{X,Y\}\le x\}=P\{X\le x,Y\le x\}$$

$$=P\{X\le x\}P\{Y\le x\}=F_X(x)F_Y(x)\text{；}$$

$$F_N(x)=P\{N\le x\}=P\{\min\{X,Y\}\le x\}=1-P\{\min\{X,Y\}>x\}$$

$$=1-P\{X>x,Y>x\}=1-P\{X>x\}P\{Y>x\}$$

$$=1-[1-P\{X\le x\}][1-P\{Y\le x\}]=1-[1-F_X(x)][1-F_Y(x)].$$

其它证明从略.

注 3: 如果 X 和 Y **独立同分布**，且 $f_X(x) = f_Y(x) = f(x)$，$F_X(x) = F_Y(x) = F(x)$，则

$$F_M(x) = F^2(x),$$

$$f_M(x) = 2F(x)f(x);$$

$$F_N(x) = 1 - [1 - F(x)]^2,$$

$$f_N(x) = 2[1 - F(x)]f(x).$$

例 6 $F_1(x), F_2(x)$ 是两个分布函数，其相应的密度函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 连续，则必为密度函数的是（　　）.

(A) $f_1(x) f_2(x)$　　(B) $2 f_1(x)F_2(x)$

(C) $F_1(x) f_2(x)$　　(D) $f_1(x)F_2(x)+F_1(x) f_2(x)$

例 7 设随机变量 X,Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为（　　）.

（A）$F^2(x)$　　（B）$F(x)F(y)$

（C）$1-[1-F(x)]^2$　　（D）$[1-F(x)][1-F(y)]$

例 8 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X \sim E(1), Y \sim E(2)$，求 $Z=\min\{X,Y\}$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

解 由于 X 和 Y 的分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases} \quad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-2y}, & y\geq 0,\\ 0, & y<0,\end{cases}$$

所以由定理 3，$Z=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]=\begin{cases}1-e^{-3z}, & z\geq 0,\\ 0, & z<0,\end{cases}$$

进而得 $Z=\min\{X,Y\}$ 的密度函数为 $f_Z(z)=\begin{cases}3e^{-3z}, & z\geq 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$

由上式可知，$Z=\min\{X,Y\}\sim E(3)$.

例 9 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的密度函数为 $f(x)$，

$Y \sim \begin{pmatrix} a & b \\ p & 1-p \end{pmatrix}$，证明 $Z = X + Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = p\,f(z-a) + (1-p)\,f(z-b).$$

证 $F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{X + Y \le z\}$

$$= P\{Y = a, X \le z-a\} + P\{Y = b, X \le z-b\}$$

$$= P\{Y = a\}P\{X \le z-a\} + P\{Y = b\}P\{X \le z-b\}$$

$$= p\int_{-\infty}^{z-a} f(t)dt + (1-p)\int_{-\infty}^{z-b} f(t)dt,$$

求导可得 Z 的密度函数为：

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = p\,f(z-a) + (1-p)\,f(z-b).$$

定理 4 设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，则$Z=\dfrac{X}{Y}$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(yz,y)|y|dy.$$

如果X和Y相互独立，则$Z=\dfrac{X}{Y}$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(yz)f_Y(y)|y|dy$$

其中$f_X(x)$, $f_Y(y)$分别为X和Y的概率密度.

练习:

1. 设二维随机变量(X,Y)的分布律为

(X,Y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
P	0.2	0.1	0.4	0.3

令$U=X+Y, V=XY$，求(U,V)的分布律.

答案:

(U,V)	$(0,0)$	$(1,0)$	$(2,1)$
P	0.2	0.5	0.3

2．设连续型随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求：(1)$U=\max(X,Y)$的分布函数和概率密度；

(2)$V=\min(X,Y)$的分布函数和概率密度.

解(1) $F_U(u)=P\{\max(X,Y)\le u\}=P\{X\le u,Y\le u\}$

$$=\begin{cases} 0, & u<0, \\ \int_0^u dx\int_0^u (x+y)dy = u^3, & 0\le u<1, \\ 1, & u\ge 1, \end{cases}$$

故

$$f_U(u)=F_U'(u)=\begin{cases} 3u^2, & 0\le u<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2) $F_V(v)=P\{\min(X,Y)\le v\}=1-P\{\min(X,Y)>v\}$

$$=1-P\{X>V,Y>V\}$$

$$=\begin{cases}1-1=0, & v<0,\\ 1-\int_v^1 dx\int_v^1 (x+y)\,dy=v+v^2-v^3, & 0\le v<1,\\ 1-0=1, & v\ge 1\end{cases}$$

故

$$f_V(v)=F_V'(v)=\begin{cases}1+2v-3v^2, & 0\le v<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$