概率论与数理统计

是研究随机现象统计规律性的一门数学学科

概率论： 研究随机现象的概率分布

数理统计： 研究随机现象的数据收集与处理

自然界与社会生活中的两类现象：

确定性现象，随机现象

一、确定性现象

在一定条件下必然会出现的现象

例如：

向上抛出的物体会掉落到地上

同性电荷相斥，异性电荷相吸

特点：结果确定

二、随机现象

在一定条件下，此类现象具有多种可能结果，且事先不能预知哪个结果出现.

例如：

抛一枚硬币可能出现正面，可能出现反面

一天内进入某超市的顾客数

某种型号电视机的寿命

特点： 在个别试验中结果呈现出不确定性，

在大量重复试验中结果又具有某种规律性.

概率论部分

第一章　随机事件及其概率

第二章　随机变量及其分布

第三章　多维随机变量及其分布

第四章　数字特征

第五章　大数定律与中心极限定理

数理统计部分

第六章 数理统计的基本概念

第七章 参数估计

第八章 假设检验

第一章　随机事件及其概率

第一节 随机事件

一、随机试验

对在相同的条件下可以重复的随机现象的观察、记录、实验，称为随机试验,记为 E .

特点:

重复性: 试验可以在相同的条件下重复进行;

明确性: 试验的所有可能结果事先均已知;

随机性: 每次试验的具体结果，在试验前无法预知.

例如，下列试验均为随机试验

E_1：抛一枚硬币，观察其出现正面和反面的情况；

E_2：同时掷两枚骰子，观察其出现的点数；

E_3：考查在一定时间段内某电话的呼唤次数；

E_4：观察某种型号电视机的寿命.

二、样本空间与随机事件

1. 样本空间

定义 1 随机试验 E 的每一个可能出现的结果称为随机试验 E 的样本点，记为 ω． E 的所有样本点的全体称为随机试验 E 的样本空间，记为 Ω．

注 1： 随机试验 E 的样本空间 Ω 即为 E 的所有可能出现的结果组成的集合．

E_1：抛一枚硬币，观察其出现正面和反面的情况；

$\Omega_1 = \{$正面，反面$\}$

E_2：同时掷两枚骰子，观察其出现的点数；

$$\Omega_2 = \{(i, j) \mid i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

E_3：考查在一定时间段内某电话的呼唤次数；

$$\Omega_3 = \{0, 1, 2, \cdots\cdots\}$$

E_4：观察某种型号电视机的寿命.

$$\Omega_4 = \{t \mid t \geq 0\}$$

2. 随机事件

定义 2 样本空间的子集称为**随机事件**，简称为事件，记为 A, B, C 等.

例如：投一枚骰子观察其出现的点数 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，

$$A=\{2\}，\ B=\{1,3,5\}，\ C=\{2,6\}$$

等均为随机事件.

注 2： 当随机试验 E 中所出现的样本点属于集合 A 时，就称随机事件 A 发生.

基本事件： 由一个样本点组成的单点集.

必然事件Ω： 每次试验中必然发生的事件. 从集合角度看，必然事件为全集，即样本空间.

不可能事件∅ : 每次试验中不可能发生的事件. 从集合角度看，不可能事件为空集.

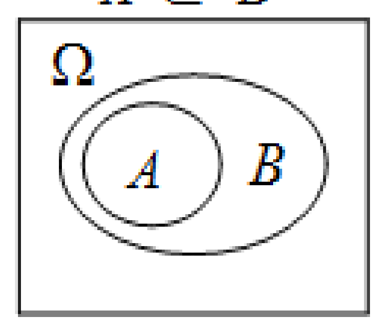
三、事件间的关系与运算

1. 事件间的关系

（1）事件的包含（子事件）

如果事件 A 发生，则事件 B 一定发生，就称事件 A 包含于事件 B，或称事件 B 包含了事件 A，记为 $A \subset B$.

$A \subset B$



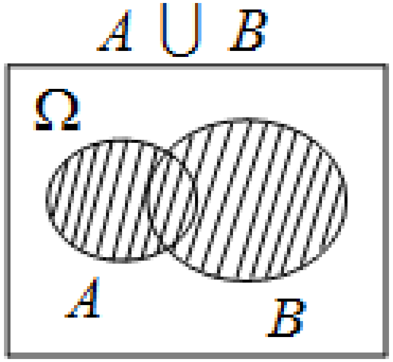
从集合角度来讲，A 为 B 的子集，故也称事件 A 为事件 B 的子事件.

（2）事件的相等

如果事件 A 和事件 B 相互包含，即 $A \subset B$，且 $B \subset A$，就称事件 A, B 为相等事件，记为 $A = B$.

从集合角度来讲，两个集合完全相等.

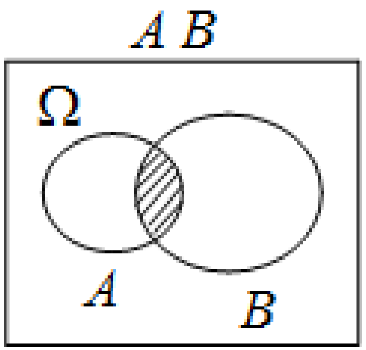
（3）事件的和（并事件）



事件“A, B 中至少发生一个”称为事件 A 和事件 B 的和事件，记为 $A \cup B$

从集合角度来讲，$A \cup B$ 为 A 和 B 的并集.

（4）事件的积（交事件）

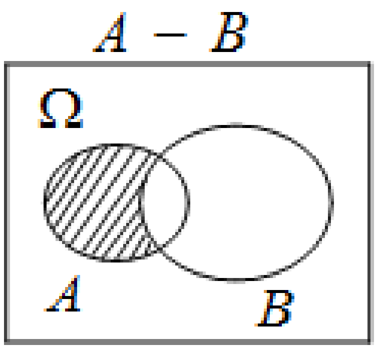


事件“A, B都发生”称为事件A和事件B的积事件，记为AB.

从集合角度来讲，AB为A和B的交集．显然有

$$AB \subset A \subset A \cup B,\ AB \subset B \subset A \cup B.$$

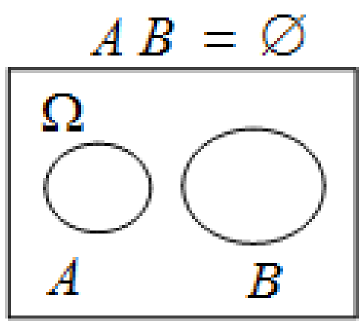
（5）事件的差（差事件）



事件“A发生，且B不发生”称为事件A与事件B的差事件，记为$A-B$.

从集合角度来讲，$A-B=\{\omega \mid \omega \in A, \omega \notin B\}$.

（6）互不相容事件（互斥事件）

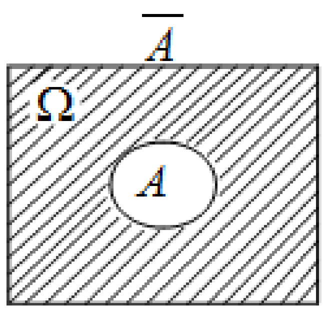


如果事件 A 与 B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，就称事件 A 和事件 B 互不相容或互斥.

从集合角度来讲，A 和 B 互不相容指 A 与 B 没有共同的样本点.

（7）对立事件（互逆事件）

如果事件 A 与 B 满足 $A\cup B=\Omega$，且 $AB=\varnothing$，就称事件 A 和事件 B 互为对立事件，或称事件 B 为事件 A 的对立事件，记为 $B=\overline{A}$.



从集合角度来讲，$\overline{A}$ 为 A 的余集.

例 1 掷一枚骰子，设事件 $A=\{1,3,5\}$, $B=\{1,2\}$，求 $A\cup B$，$AB,\ A-B,\ B-A,\ \overline{A}$.

解 $A\cup B=\{1,2,3,5\}$， $AB=\{1\}$， $A-B=\{3,5\}$，

$B-A=\{2\}$， $\overline{A}=\{2,4,6\}$.

例 2 设有随机事件 A 和 B，试用 A, B 表示事件“A 和 B 中恰好发生一个”.

解 事件 “A 和 B 中恰好发生一个” 有下列多种表示形式

$$(A-B)\cup(B-A)\text{；}\quad A\overline{B}\cup B\overline{A}\text{；}\quad A\cup B-AB.$$

2. 事件的运算

交换律： $A \cup B = B \cup A$， $AB = BA$.

结合律： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，

$$(AB)C = A(BC).$$

分配律 ： $(A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$，

$$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C).$$

对偶律（德摩根公式）：

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}，\quad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

注3：

(1) 可以证明，对任意的事件 A 和 B，恒有

$$A-B=A\overline{B}=A-AB;$$

(2) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$ 表示事件 A 和 B 都不发生；

(3) $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$ 表示事件 A 和 B 中至少有一个不发生.

例 3 试用随机事件 A, B, C 表示下列事件

（1） A, B, C 中至少发生一个； $= A \cup B \cup C$；

（2） A, B, C 都发生； $= ABC$

（3） A, B, C 中恰好发生一个；$= A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$

（4） A, B, C 中至少发生两个；

$$= ABC \cup AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$$

（5） A 发生，且 B, C 至少有一个不发生.

$$= A(\bar{B} \cup \bar{C}) = A\overline{BC} = A - BC$$