2017-2018 第一学期概率论与数理统计期中试卷答案

一、填空题（每小题 4 分，共 28 分）

1. $\underline{0.4}$； 2. $\underline{0.8}$； 3. $\underline{1-2e^{-1}}$； 4. $\dfrac{4}{15}$； 5. $\underline{0.5}$，$\underline{0.4}$； 6. $\underline{0.5}$；

7. $\underline{0}$，$\underline{1}$.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1.C 2.A 3.D 4.B 5.C

三、(**本题满分 12 分**)

两台机床加工同样的零件，第一台出现不合格品的概率是 0.03，第二台出现不合格品的概率是 0.06，加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件数比第二台加工的零件数多一倍. 求（1）从加工出来的零件中任取一件，其为不合格品的概率是多少？

（2）若从加工出来的零件中任取一件，发现其为不合格品，问该零件为第 2 台机床加工的概率是多少？

解：设事件 A_i 表示任取一件零件来自第 i 台机床加工，i=1, 2 .

事件 B 表示任取一件零件为不合格品。则

（1）$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{2}{3}\cdot 0.03+\frac{1}{3}\cdot 0.06=0.04,$$

（2）$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0.06}{0.04}=0.5.$$

四、(**本题满分 15 分**) 设连续型随机变量 X 分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} A+Be^{-\lambda x}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0. \end{cases} \quad (\lambda>0),$$

（1） 求常数 A，B；（2） 求 $P\{X\leqslant 2\}$，$P\{X>3\}$；（3） 求 X 的概率密度 $f(x)$.

解：（1）由 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0+} F(x)=\lim\limits_{x\to 0-} F(x) \end{cases}$，得 $\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$

（2） $P(X\le 2)=F(2)=1-e^{-2\lambda}$，

$$P(X>3)=1-F(3)=1-(1-e^{-3\lambda})=e^{-3\lambda}$$

(3) $$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

五、(**本题满分 10 分**) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，试求 $Y=X^2$ 的概率密度.

解：由于 $y=x^2\ge 0$，

当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=P(X^2\le y)=0$

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$

$$=\Phi(\sqrt{y})-\Phi(-\sqrt{y})$$

故，当 $y\le 0$ 时，$f_Y(y)=F_Y'(y)=0$

当 $y>0$ 时，$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\varphi(\sqrt{y})+\frac{1}{2\sqrt{y}}\varphi(-\sqrt{y})=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}$

故 Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0\quad, & y\le 0.\end{cases}$

六、（**本题满分 15 分**）设二维随机变数 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x-y}, & x>0,y>0,\\ 0\quad, & \text{其它}\end{cases},$$

（1）求分布函数 $F(x,y)$；（2）求 $P(0<X<1,0<Y<2)$；

（3）求边缘概率密度 $f_X(x)$.

解：（1）$x>0,y>0$ 时，

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y e^{-t-s}dtds=(\int_0^x e^{-t}dt)(\int_0^y e^{-s}ds)$$

$$=(1-e^{-x})(1-e^{-y}),$$

所以 $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0,\\ 0\quad, & \text{其它}.\end{cases}$

（2）$P(0<X<1,0<Y<2)$

$=F(1,2)-F(0,2)-F(1,0)+F(0,0)$

$=1-e^{-1}-e^{-2}+e^{-3}$.

（3）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\mathrm{x},\mathrm{y})dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}e^{-x-y}dy, & x>0,\\ 0\quad, & x\le 0.\end{cases}=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0\quad, & x\le 0.\end{cases}$