第五章 大数定律与中心极限定理

第一节 大数定律

一、依概率收敛

定义 1 设有随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$，如果存在常数 a，使得对任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - a| < \varepsilon\} = 1,$$

就称序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n \overset{P}{=} a$.

二、切比雪夫大数定律

定理 1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是相互独立的随机变量序列，且 $EX_i = \mu$，$DX_i = \sigma^2$，$i = 1, 2, \cdots$，则对任意的 $\varepsilon > 0$，

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \overset{P}{=} \mu$.

三、辛钦大数定律

定理 2 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立同分布，如果 $EX_i = \mu$， $i = 1, 2, \cdots$， 则对任意的 $\varepsilon > 0$， 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1，\text{即}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{P}{=} \mu\ .$$

推论 1 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立同分布，如果 $E(X_i^k) = \mu_k$， $i = 1, 2, \cdots$， 则 $\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\}$ 依概率收敛于 μ_k， 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \overset{P}{=} \mu_k，$$

其中 k 为任意正整数. 【记住结论】

例 1 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立，且均服从参数为1的泊松分布，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \overset{P}{=} 1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \overset{P}{=} 2.$$

证 由于 $EX_i = DX_i = 1$，故 $E(X_i^2) = 2$， $i = 1, 2, \cdots$， 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \overset{P}{=} \mu_1 = 1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \overset{P}{=} \mu_2 = 2.$$

四、贝努里大数定律

定理 3 设n_A是n重独立重复试验中事件A发生的次数，p是事件A在每次试验中发生的概率，则对任意的$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1,\quad 即\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}\overset{P}{=}p.$$

定理 3 表明在独立重复试验中，当$n\to\infty$时，事件A发生的频率依概率收敛于事件A发生的概率$p=P(A)$，从而为第一章中概率的统计定义提供了理论保障.

练习：

1. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立，且均服从参数为 2 的指数分布，则当 $n \to \infty$ 时，$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于______.

答案： $\frac{1}{2}$.