第三节 区间估计

区间估计的概念与基本思想

点估计的特点是简单，直观明了．但点估计不能反映估计量的可信度和精度．因此现在介绍区间估计，即就是用一个区间去估计未知参数θ的取值范围.

原籍波兰的美国统计学家$J\cdot$奈曼$(J\cdot Neyman)$于上世纪三十年代创立了区间估计的一种理论．他要求构造两个统计量

$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$和$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ $(-\infty<\hat{\theta}_1<\hat{\theta}_2<+\infty)$，

用区间$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)=(\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n),\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n))$估计$\theta$的取值.

概率 $P\{\theta \in (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)\} = P\{\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\}$

反映了可信度（也称置信度），

区间长度 $\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n) - \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 反映了精度.

不难发现，如果 $\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n) - \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 越小，则精度越高，但可信度可能越低；

反之，如果 $\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n) - \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 越大，则精度越低，而可信度可能越高.

可见可信度和精度之间，往往产生此消彼长的现象.

在统计中，优先考虑可信度，然后在确保可信度的前提下，通过构造“好的”统计量 $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，以提高精度.

定义 1 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为来自总体 X 的一个样本，θ 为总体 X 中的未知参数，记 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为两个统计量，对于给定的 α $(0 < \alpha < 1)$，如果

$$P\{\theta \in (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)\} = P\{\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} = 1 - \alpha,$$

就称区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = (\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n), \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n))$ 为 θ 的**置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间**，并称 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为**置信下限**，$\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为**置信上限**，$1-\alpha$ 也称为**置信水平**.

注 1: 在实际应用中，α 通常取 0.05，此时的置信系数为 0.95，α 有时也取 0.01, 0.10 等等.

注 2: 在定义 1 中，满足

$$P\{\theta \in (\theta_1, \theta_2)\} = P\{\theta_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \theta_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} = 1 - \alpha$$

的统计量 $\theta_1 = \theta_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\theta_2 = \theta_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 并不惟一.

根据 $J\cdot$奈曼的原则，在确保置信度为$1-\alpha$ 的前提下，根据精度“优良”的某种准则，希望构造统计量 $\theta_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\theta_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，使得 $E[\theta_2(X_1, X_2, \cdots, X_n) - \theta_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)]$ 尽可能地小，甚至最小.

设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自总体X的一个样本，θ为总体X中的未知参数.

下面给出进行区间估计（置信度为$1-\alpha$）的一般步骤.
（共四个步骤）

第一步：构造包含未知参数θ的函数$G(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)$，其中$G(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)$的分布已知，且与$\theta$无关；

第二步：对给定的置信度$1-\alpha$，由

$$P\{c<G(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)<d\}=1-\alpha,$$

适当地确定实数c,d，其中c,d的取值不惟一；

第三步：从不等式$c<G(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)<d$中，等价地解得

$$\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n),$$

从而有

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha;$$

其中$\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n),\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$与$c,d$有关;

第四步：进一步确定常数c,d，使得

$$E[\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)-\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)]$$

最小.

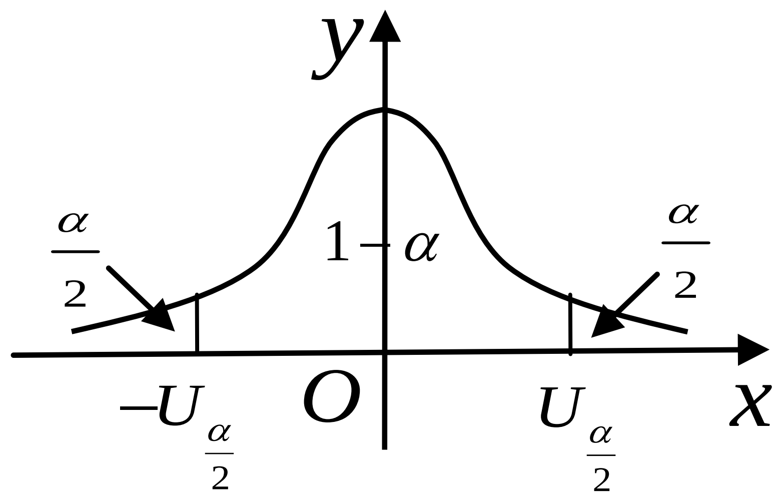
一、单正态总体的均值与方差的区间估计

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的样本.

1. μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

(1) σ^2 已知的情形

$G(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)$ 取为 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，



故对给定的 α，取 $c=-U_{\frac{\alpha}{2}}, d=U_{\frac{\alpha}{2}}$ 使得此置信区间的长度为最短.

$$P\{-U_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < U_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha,$$

故从不等式 $-U_{\frac{\alpha}{2}} < \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < U_{\frac{\alpha}{2}}$ 中，等价地解得

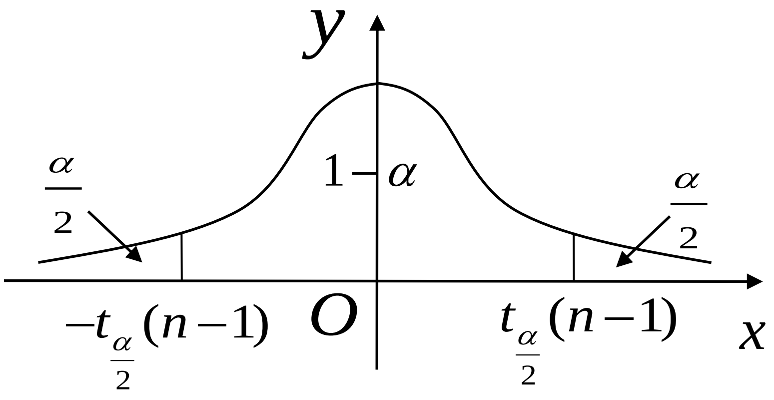
$$\overline{X} - U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\text{ 即}$$

$$P\{\overline{X} - U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\} = 1-\alpha,$$

因此，μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$(\overline{X} - U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}),\quad \text{也简记为} (\overline{X} \pm U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}).$$

(2) σ^2 未知的情形



$G(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$ 取为

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

$$P\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = 1-\alpha.$$

从不等式 $-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 中等价解得 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$(\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}),$$ 也简记为 $$(\overline{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}).$$

例 1 在某种清漆中随机抽取九个样品，其干燥时间（以小时计）分别为

$$6.0 \quad 5.7 \quad 5.8 \quad 6.5 \quad 7.0 \quad 6.3 \quad 5.6 \quad 6.1 \quad 5.0,$$

设干燥时间总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，试在(1) $\sigma = 0.6$（小时）；(2) σ 未知的两种情况下，分别求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间.

解 (1) $n = 9$，计算得 $\bar{x} = 6$，又 $\sigma = 0.6$，$1 - \alpha = 0.95$，得，由查表知 $u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0.025} = 1.96$，$\mu$ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$(\bar{x} - U_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + U_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (6 - 1.96 \times \frac{0.6}{\sqrt{9}}, 6 + 1.96 \times \frac{0.6}{\sqrt{9}})$$

$$= (5.608, 6.392).$$

(续解)(2) $n=9$，计算得 $\overline{x}=6, s=0.5744$，又 $1-\alpha=0.95$，由查表知 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.306$，所以 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

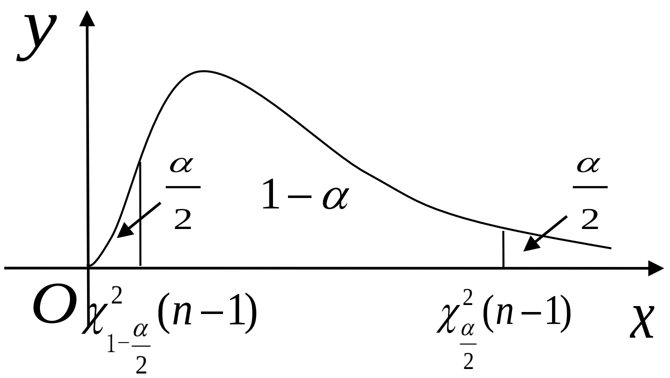
$$(\overline{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$

$$=(6-2.306\times\frac{0.5744}{\sqrt{9}},6+2.306\times\frac{0.5744}{\sqrt{9}})$$

$$=(5.558,6.442).$$

2. σ^2 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间

(1) μ 未知的情形



$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$$

$$P\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=1-\alpha,$$

解得σ^2 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间为$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$.

σ 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间为$\left(\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}S,\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}S\right)$.

例 2 使用铂球测定引力常数（单位：$10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$），测定五次，并计算得样本方差的观察值为 $s^2=9\times10^{-6}$，设测定值总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 σ^2 的置信度为0.9的置信区间.

解 $n=5$，$1-\alpha=0.9$, $\dfrac{\alpha}{2}=0.05$，$\chi^2_{0.05}(4)=9.488$，$\chi^2_{0.95}(4)=0.711$，

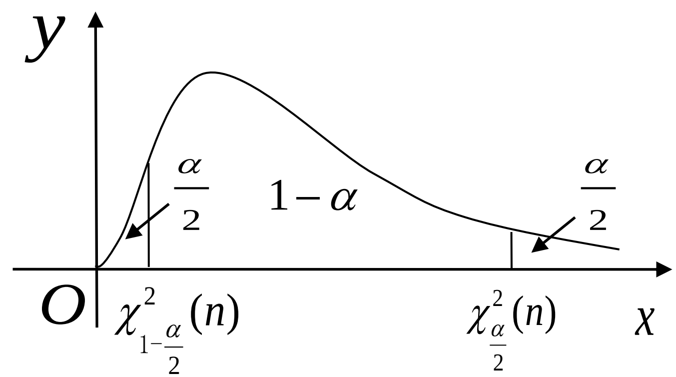
所以 σ^2 的置信度为0.9的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)=\left(\frac{4\times9\times10^{-6}}{9.488},\frac{4\times9\times10^{-6}}{0.711}\right)$$

$$=(3.794\times10^{-6},5.063\times10^{-5}).$$

（2） μ 已知的情形

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n),$$



$$P\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)<\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\}=1-\alpha$$

从不等式 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)<\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ 中解得 σ^2 的置信度为

$1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right).$$

单正态总体$N(\mu,\sigma^2)$中μ与σ^2的置信区间

参数	前提条件	置信区间
μ	σ^2 已知	$(\overline{X}-U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
	σ^2 未知	$(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$
σ^2	μ 已知	$(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)})$
	μ 未知	$(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)})$

二、两正态总体的区间估计

1. $\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间

(1) σ_1^2，σ_2^2均已知的情形

$\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left((\overline{X}-\overline{Y})-U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},(\overline{X}-\overline{Y})+U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right),$$

或

$$\left((\overline{X}-\overline{Y})\pm U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

(2) σ_1^2， σ_2^2 均未知，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 的情形

$\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left((\overline{X}-\overline{Y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

其中 $S_\omega=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$.

2. $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

在 μ_1 和 μ_2 未知的情形下， $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right).$$

双正态总体中$\mu_1-\mu_2$与$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间

参数	前提条件	置信区间
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$\left((\overline{X}-\overline{Y})\pm U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$
	σ_1^2,σ_2^2 未知 但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\left((\overline{X}-\overline{Y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$
$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 未知	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\ \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$