第二节 方差

一、方差的概念

定义 1 设 X 为随机变量，如果 $E[(X-EX)^2]$ 存在，称之为 X 的方差，记为 DX 或 $D(X)$，即

$$DX=E[(X-EX)^2].$$

并称 $\sqrt{DX}$ 为 X 的标准差.

利用数学期望的性质，还可以得到方差的简化计算公式.

$$DX=E(X^2)-(EX)^2.$$

不难得到

$$E(X^2)=DX+(EX)^2.$$

例 1 已知甲、乙两位射击选手每次射击时

命中环数 X 和 Y 的分布律分别为

$$X \sim \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix},$$

分别计算 DX 和 DY .

解 由于已经计算出 $EX = 9.1$，$EY = 9.3$，且

$$E(X^2) = 10^2 \times 0.3 + 9^2 \times 0.5 + 8^2 \times 0.2 = 83.3;$$

$$E(Y^2) = 10^2 \times 0.6 + 9^2 \times 0.1 + 8^2 \times 0.3 = 87.3,$$

所以 $DX = 83.3 - 9.1^2 = 0.49$， $DY = 87.3 - 9.3^2 = 0.81$.

由此可见，虽然乙选手的平均环数高于甲选手的平均环数，但甲选手的稳定性好于乙选手的稳定性，由此两位选手各有所长.

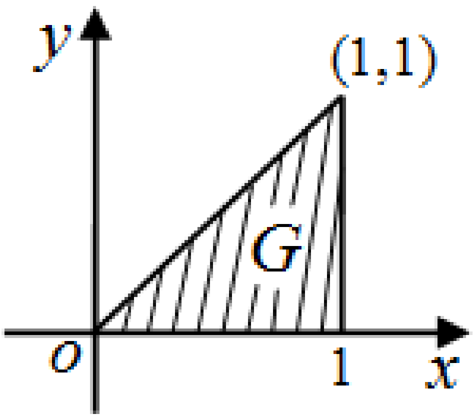
例 2 设随机变量 X 密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$ 求 DX .

解 在上节例 4 中，已计算得 $EX=\dfrac{2}{3}$，又

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\cdot 2x\,dx=2\int_0^1 x^3\,dx=\frac{1}{2},$$

所以 $DX=\dfrac{1}{2}-(\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{1}{18}$.

例 3 设二维随机变量(X,Y)在三角形区域$G: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x$上服从均匀分布．求$D(XY)$．



解 由题意知，(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in G,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

故

$$E(XY)=\iint_G xy\cdot 2dxdy = 2\int_0^1 dx\int_0^x xydy=\frac{1}{4};$$

$$E[(XY)^2]=\iint_G (xy)^2\cdot 2dxdy = 2\int_0^1 dx\int_0^x x^2y^2dy=\frac{1}{9},$$

所以$D(XY)=\frac{1}{9}-(\frac{1}{4})^2=\frac{7}{144}$.

二、方差的性质

性质 1　$Dc = 0$.

性质 2　$DX \geq 0$．且 $DX = 0$ 的充要条件为 $P\{X = c\} = 1$.

性质 3　$D(kX) = k^2 DX$.

性质 4　$D(kX + c) = k^2 DX$.

性质 5　当 X 和 Y 相互独立时，则 $D(X \pm Y) = DX + DY$.

推广： 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则

$$D(a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) = a_1^2 DX_1 + \cdots + a_n^2 DX_n .$$

例 4 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $EX=0, EY=1$，$DX=2, DY=4$，求 $E(X-Y)^2$.

解 由于 X 和 Y 相互独立，故 $D(X-Y)=DX+DY$，所以

$$E(X-Y)^2=D(X-Y)+[E(X-Y)]^2$$

$$=DX+DY+(EX-EY)^2=(2+4)+(0-1)^2=7.$$

例 5 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且

$$EX_i = \mu，\quad DX_i = \sigma^2，\quad i = 1, 2, \cdots, n，$$

记 $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，求 $E\overline{X}$ 和 $D\overline{X}$.

解 $E\overline{X} = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \mu$，

$$D\overline{X} = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

三、切比雪夫不等式

定理 1 设随机变量 X 的数学期望 $EX=\mu$，方差 $DX=\sigma^2$，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad \text{或} \quad P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

此不等式称为切比雪夫不等式.

证(了解) 现仅证明 X 为连续型随机变量时的情形.

设 X 的概率密度为 $f(x)$，则对任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$P\{|X-\mu| \geq \varepsilon\} = \int_{|x-\mu| \geq \varepsilon} f(x)\,dx \leq \int_{|x-\mu| \geq \varepsilon} \left(\frac{|x-\mu|}{\varepsilon}\right)^2 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x-\mu| \geq \varepsilon} (x-\mu)^2 f(x)\,dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} E[(X-\mu)^2] = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

例 6 设 $X \sim P(2)$，则根据切比雪夫不等式有（　）.

（A）$P\{|X-2|<2\} \le \frac{1}{2}$，$P\{|X-2| \ge 2\} \le \frac{1}{2}$

（B）$P\{|X-2|<2\} \ge \frac{1}{2}$，$P\{|X-2| \ge 2\} \ge \frac{1}{2}$

（C）$P\{|X-2|<2\} \le \frac{1}{2}$，$P\{|X-2| \ge 2\} \ge \frac{1}{2}$

（D）$P\{|X-2|<2\} \ge \frac{1}{2}$，$P\{|X-2| \ge 2\} \le \frac{1}{2}$.

解 $EX = DX = 2$. 进而根据切比雪夫不等式有

$$P\{|X-2|<2\} = P\{|X-EX|<2\} \ge 1-\frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P\{|X-2| \ge 2\} = P\{|X-EX| \ge 2\} \le \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

练习：

1. 每名学生的数学考试成绩 X 是随机变量，已知 $EX = 80$， $DX = 25$，则用切比雪夫不等式估计某学生成绩在 70 分到 90 分之间的概率范围为（　　）.

（A）≤ 0.25　（B）≤ 0.75　（C）≥ 0.25　（D）≥ 0.75.

答案： (D).