第三节 连续型随机变量及其概率密度

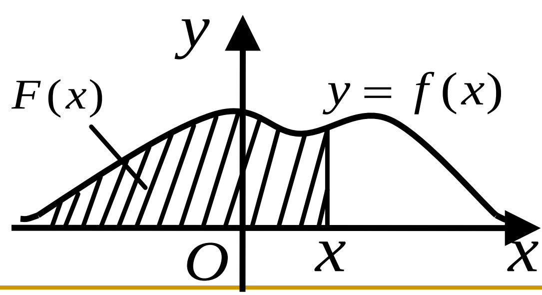
一、连续型随机变量的概念

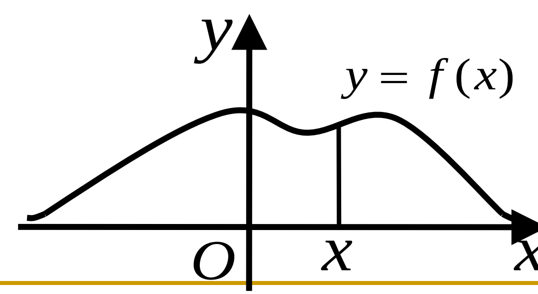
1. 概念

定义 1 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，若存在非负可积函数 $f(x)$，使对任意实数 x，均有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\,.$$

就称 X 为**连续型随机变量**，其中 $f(x)$ 称为 X 的**密度函数**或**概率密度**.





2. 连续型随机变量的性质

设连续性型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，则

性质 1 $F(x)$ 是连续函数.

如， X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}(1+x), & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1,\end{cases}$ 由于

$F(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续，故 X 不是连续型随机变量，X 是非离散非连续型随机变量.

性质 2 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$

性质 3 在 $F(x)$ 的可导点 x 处， $f(x) = F'(x)$.

性质 4 $F(x) = P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

性质 5 $P\{X = a\} = 0.$

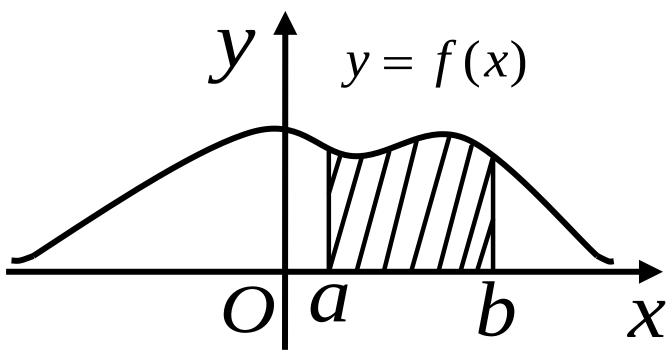
故一般地，对于事件 A，即使 $P(A) = 0$，但事件 A 有可能发生，即未必有 $A = \varnothing$.

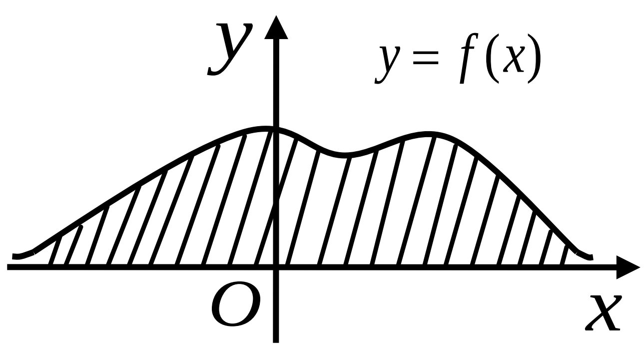
性质 6 $P\{a < X \le b\} = P\{a \le X \le b\}$

$$= \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

从几何直观上看，概率 $P\{a < X \le b\}$ 均表示曲边梯形 $0 \le y \le f(x),\ a < x \le b$ 的面积.

因此 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ 也表明以曲线 $y = f(x)$ 为上沿， x 轴为下沿所围成的无穷区域的面积等于1.





基本题型

（一定要掌握）

例 1 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} k\cos x, & |x|<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & |x|\geq\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

(1) 求常数 k；(2) 求 X 的分布函数 $F(x)$；(3) 计算 $P\{-\dfrac{\pi}{4}<X<\pi\}$.

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} k\cos x\,dx=1$，计算得 $k=\dfrac{1}{2}$. 进而

得 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\cos x, & |x|<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & |x|\geq\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

(2) $F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$=\begin{cases}0, & x<-\dfrac{\pi}{2},\\ \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1}{2}\cos t\,dt, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos t\,dt, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}=\begin{cases}0, & x<-\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\sin x+1}{2}, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

(3) $P\{-\dfrac{\pi}{4}<X<\pi\}=F(\pi)-F(-\dfrac{\pi}{4})=1-\dfrac{\sin(-\frac{\pi}{4})+1}{2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$,

或 $P\{-\dfrac{\pi}{4}<X<\pi\}=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos x\,dx=\frac{1}{2}\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

例 2 设随机变量 X 的密度函数 $f(x)$ 为偶函数， $F(x)$ 为 X 的分布函数，证明：(1) $F(x)+F(-x)=1$；

(2) $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$；(3) $P\{|X| \le x\} = 2F(x)-1$.

证 (1) $F(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t)dt \overset{t=-u}{=} -\int_{+\infty}^{x} f(-u)du = \int_{x}^{+\infty} f(u)du$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du - \int_{-\infty}^{x} f(u)du = 1 - F(x)$，故 $F(x)+F(-x)=1$.

(2) 令(1)中 $x=0$，得 $F(0) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \frac{1}{2}$，且 $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$.

(3) $P\{|X| \le x\} = P\{-x \le X \le x\} = F(x) - F(-x)$

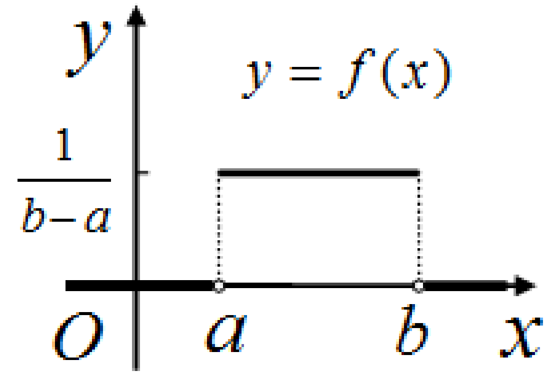
$$= F(x) - [1 - F(x)] = 2F(x) - 1.$$

二、几种常见的连续型随机变量

1. 均匀分布

定义 2 如果随机变量 X 的密度函数为

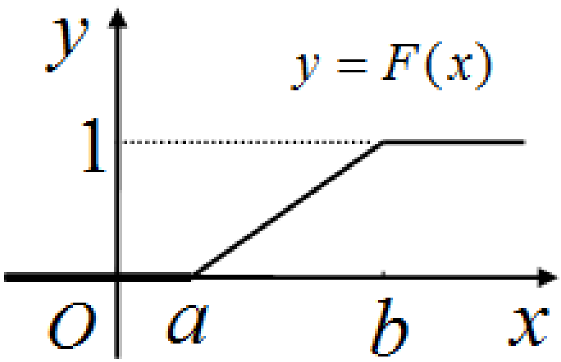
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$



就称 X 服从 $[a,b]$ 上的均匀分布，记为 $X\sim U[a,b]$.

X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b,\\ 1, & b\le x.\end{cases}$$



注 1 X 落入某区间 I 内（上）的概率为

$$P\{X \in I\} = P\{X \in I \cap [a,b]\} = \frac{I \cap [a,b]\text{的长度}}{b-a}.$$

例 3 如果随机变量 $X \sim U[1,6]$，求方程 $x^2 + Xx + 1 = 0$ 有实根的概率.

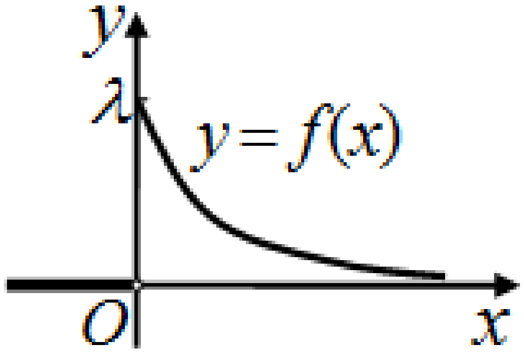
解 $P\{x^2 + Xx + 1 = 0\text{有实根}\} = P\{X^2 - 4 \geq 0\}$

$$= P\{|X| \geq 2\} = P\{2 \leq X \leq 6\} = \frac{6-2}{6-1} = \frac{4}{5}.$$

2. 指数分布

定义 3 如果随机变量 X 的密度函数为

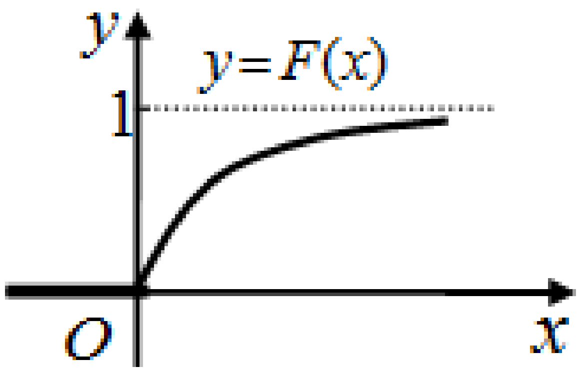
$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$



其中 $\lambda>0$，就称 X 服从参数为 λ 的

指数分布，记为 $X\sim E(\lambda)$.

X **的分布函数为**



$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

性质 7 设随机变量 $X \sim E(\lambda)$，则当 $s>0, t>0$ 时，

$$P\{X>s+t \mid X>s\}=P\{X>t\}.$$

证 当 $a>0$ 时，有 $P\left\{X>a\right\}=\int_a^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda a}$，所以

$$P\left\{X>s+t \mid X>s\right\}=\frac{P\left\{X>s+t, X>s\right\}}{p\left\{X>s\right\}}$$

$$=\frac{P\left\{X>s+t\right\}}{P\left\{X>s\right\}}=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=P\left\{X>t\right\}.$$

性质 7 称为指数分布的无记忆性. 因此, 在实际问题中, 许多“寿命”的分布可用指数分布描述.

例 4 某仪器装有三只独立工作的同型号电子元件，其寿命（单位：小时）都服从参数为$\dfrac{1}{600}$的指数分布．试求在仪器使用的最初200小时内，至少有一只电子元件损坏的概率α．

解 设X_i表示第i只元件的寿命，A_i表示在仪器使用的最初200小时内，第i只元件损坏，$i=1,2,3$．由题意知，A_1,A_2,A_3相互独立，且$X_i \sim E(\frac{1}{600}), i=1,2,3$，故

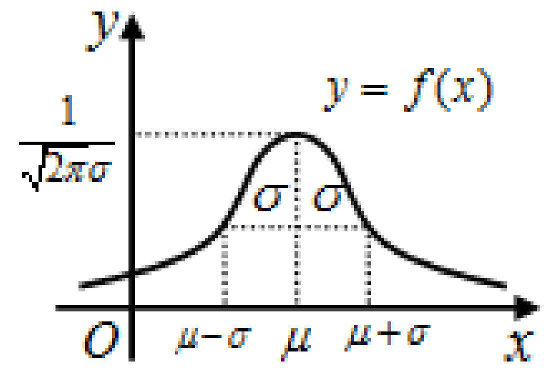
$$P(\overline{A_i}) = P\{X_i \geq 200\} = \int_{200}^{+\infty} \frac{1}{600} e^{-\frac{x}{600}} dx = e^{-\frac{1}{3}}, \quad i=1,2,3.$$

故所求概率为：$\alpha = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - e^{-1}.$$

3. 正态分布

定义 4 如果随机变量 X 的概率密度为

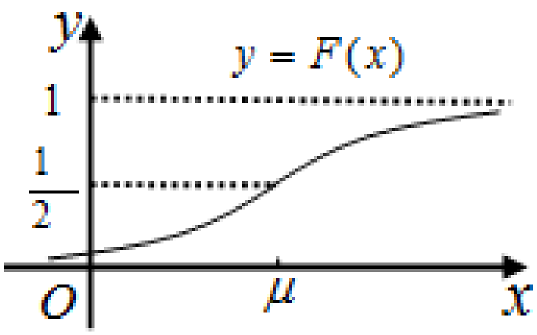


$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

就称 X 服从参数为 μ,σ 的**正态分布**，记

为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 $-\infty<\mu<+\infty$, $\sigma>0$.

其分布函数为



$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt,$$

$$-\infty<x<+\infty .$$

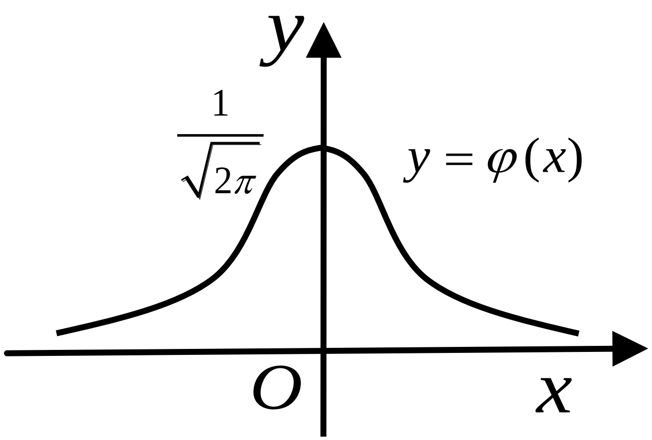
注 2　$f(x)$ 的图形关于直线 $x=\mu$ 对称.

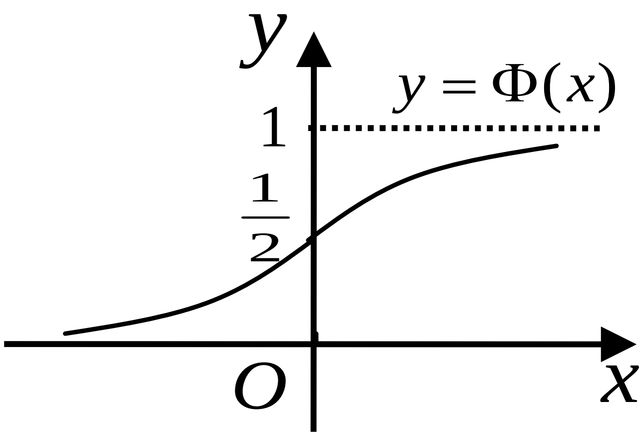
注 3　$f(x)$ 的图形是中间大，两头小，呈对称的“钟形”曲线. 另外，σ 越大，$f(x)$ 的图形越平坦，σ 越小，$f(x)$ 的图形越陡峭. 并且 $f(x)$ 在点 $x=\mu\pm\sigma$ 处有拐点.

在实际问题中，有许多随机变量都服从正态分布. 如某地区的水稻亩产量，某人群中人的身高、体重，某课程的考试成绩等数量指标通常都服从正态分布.

当 $\mu=0,\sigma=1$，即 $X\sim N(0,1)$ 时，称随机变量 X 服从**标准正态分布**. 其密度函数记为 $\varphi(x)$，分布函数记为 $\Phi(x)$，即

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\qquad -\infty<x<+\infty .$$





注 4 $\Phi(0)=0.5$，$\Phi(x)=1-\Phi(-x)$.

注 5 如果 $X\sim N(0,1)$，则对于任意的实数 $a,b\ (a<b)$，

$$P\{a<X\le b\}=\Phi(b)-\Phi(a),$$

其中 $\Phi(a)$, $\Phi(b)$ 可查标准正态分布表计算.

注 6 如果 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则得 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，从而

$$P\{a<X\le b\}=\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}),$$ 查表可得.

进而 $P\{X\le b\}=\Phi(\dfrac{b-\mu}{\sigma})$, $P\{X>a\}=1-\Phi(\dfrac{a-\mu}{\sigma})$.

例 5 设随机变量 $X \sim N(1,4)$，分别计算

$$P\{X \le 3\}，\quad P\{-1 < X < 5\}.$$

解 由题意知， $\mu = 1, \sigma = 2$.

$$P\{X \le 3\} = \Phi(\frac{3-1}{2}) = \Phi(1) = 0.8413，$$

$$P\{-1 < X < 5\} = \Phi(\frac{5-1}{2}) - \Phi(\frac{-1-1}{2})$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - [1 - \Phi(1)]$$

$$= \Phi(1) + \Phi(2) - 1 = 0.8413 + 0.9772 - 1$$

$$= 0.8185.$$

例 6 设电源电压 $X \sim N(220, 25^2)$，在电源电压不超过 200 伏，在 $200-240$ 伏之间和超过 240 伏三种情况下，某种电子元件损坏的概率分别为 $0.1;\ 0.001;\ 0.2$．(1)求该电子元件损坏的概率 α；(2)该电子元件损坏时，求电源电压在 $200-240$ 伏的概率 β．

解 设 $A_1=\{X\le 200\}, A_2=\{200<X\le 240\}, A_3=\{X>240\}$，$B$ 表示该电子元件损坏．由于 $X \sim N(220, 25^2)$，因此，

$$P(A_1)=P\{X\le 200\}=P\{\frac{X-220}{25}\le -0.8\}$$

$$=\Phi(-0.8)=1-\Phi(0.8)=1-0.788=0.212,$$

$$P(A_2)=P\{200<X\le 240\}=P\{-0.8<\frac{X-220}{25}\le 0.8\}$$

$$=2\Phi(0.8)-1=0.576,$$

$$P(A_3)=P\{X>240\}=P\{\frac{X-220}{25}>0.8\}$$

$$=1-P\{\frac{X-220}{25}\le 0.8\}=1-\Phi(0.8)=0.212,$$

或 $P(A_3)=1-P(A_1)-P(A_2)=0.212$.

(1)由全概率公式知 $\alpha=P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.0642$;

(2)由贝叶斯公式知 $\beta=P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=0.009$.