

第三章 机器人运动学分析

- 机器人运动学主要是把机器人相对于固定参考系的运动作为时间的函数进行分析研究，而不考虑引起这些运动的力和力矩
- 将机器人的空间位移解析地表示为时间的函数，特别是研究机器人关节变量空间和机器人末端执行器位置和姿态之间的关系
- 本章将讨论机器人运动学几个具有实际意义的基本问题。

本章主要内容

3.1 机器人运动学所讨论的问题及数学基础

3.2 机器人杆件、关节及参数

3.3 机器人关节坐标系的建立

3.4 相邻关节坐标系间的齐次变换过程
——机器人运动学正解

3.5 机器人末端操作器位姿的其它描述方法

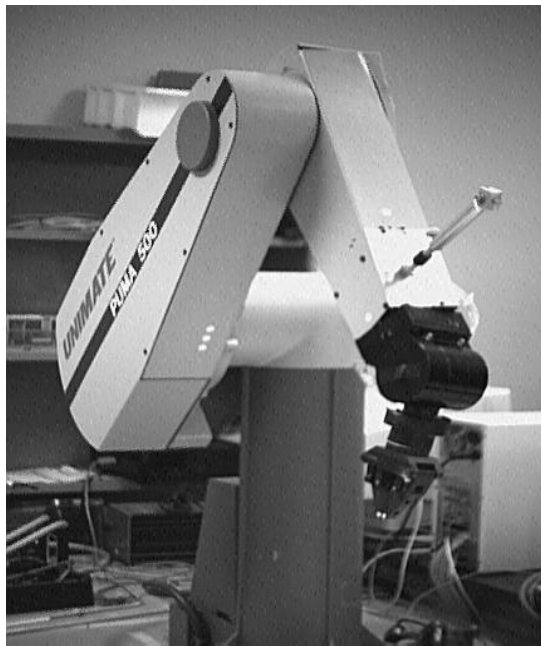
3.6 运动学逆问题

3.7 运动学方程的其它描述

3.1 机器人运动学所讨论的问题及数学基础

3.1.1 研究的对象

- 机器人从机构形式上分为两种，一种是关节式串联机器人，另外一种为并联机器人。



PUMA560



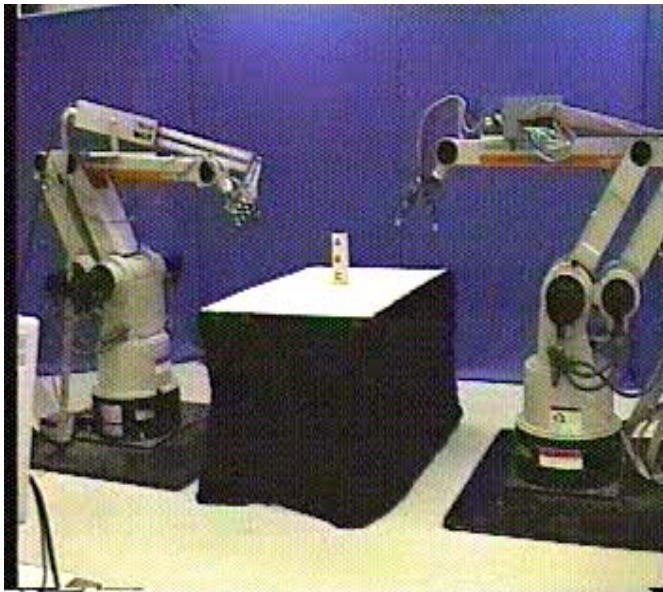
Fanuc manipulator



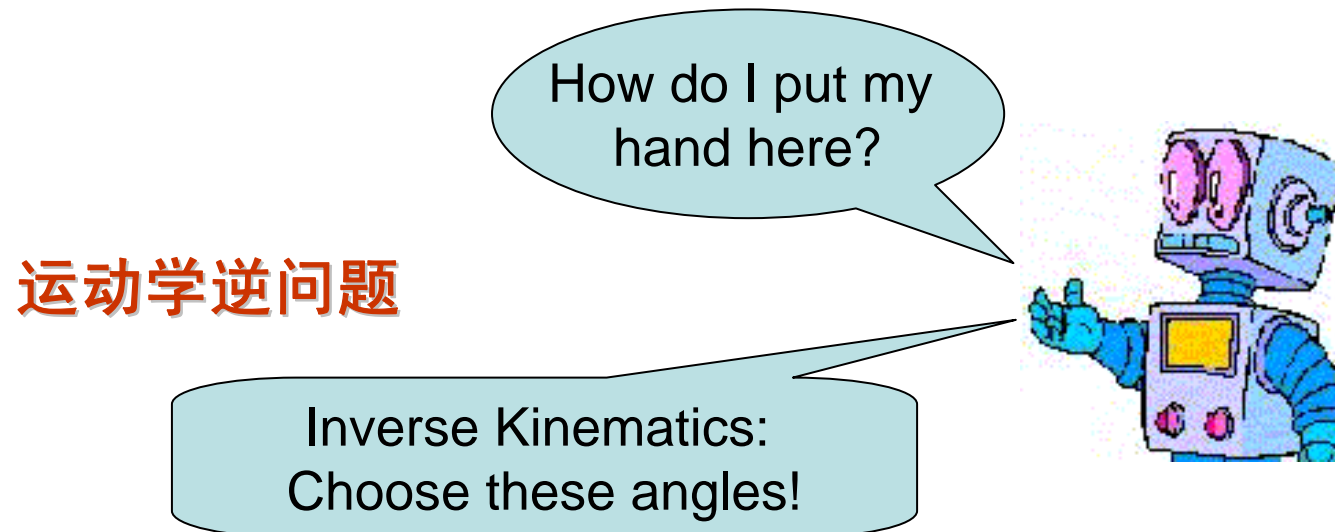
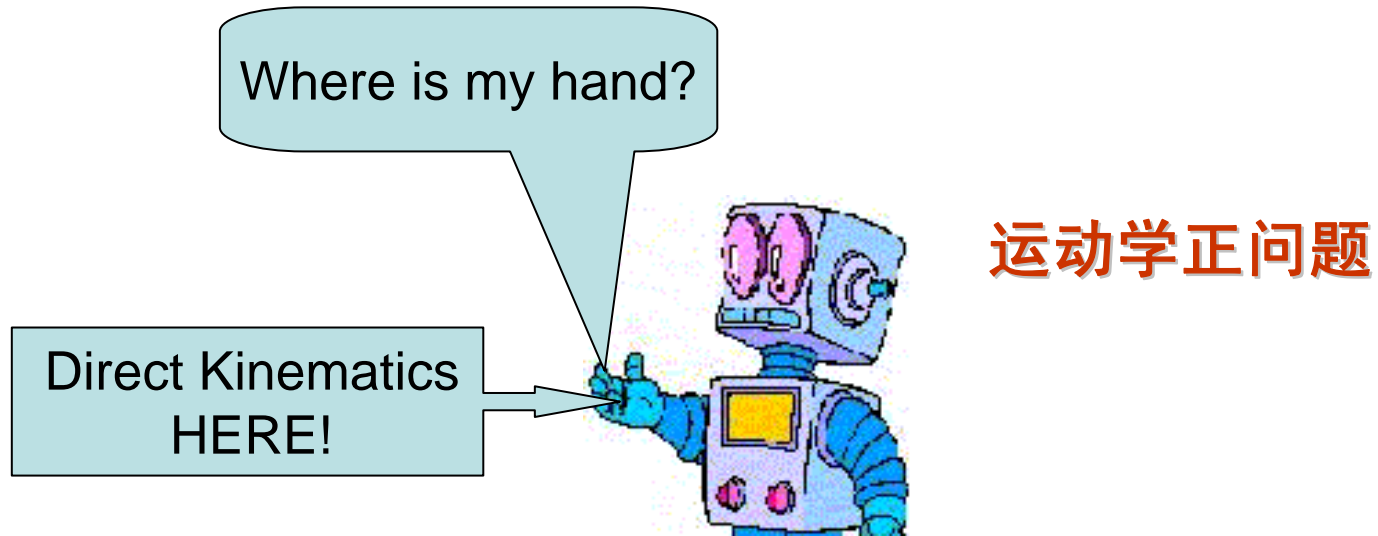
Hexapod

■ 这两种机器人有所不同：

- **串联机器人**：工作空间大，灵活，刚度差，负载小，误差累积并放大。
- **并联机器人**：刚性好，负载大，误差不积累，工作空间小，姿态范围不大。
- 本章讲解以**串联机器人**为主。

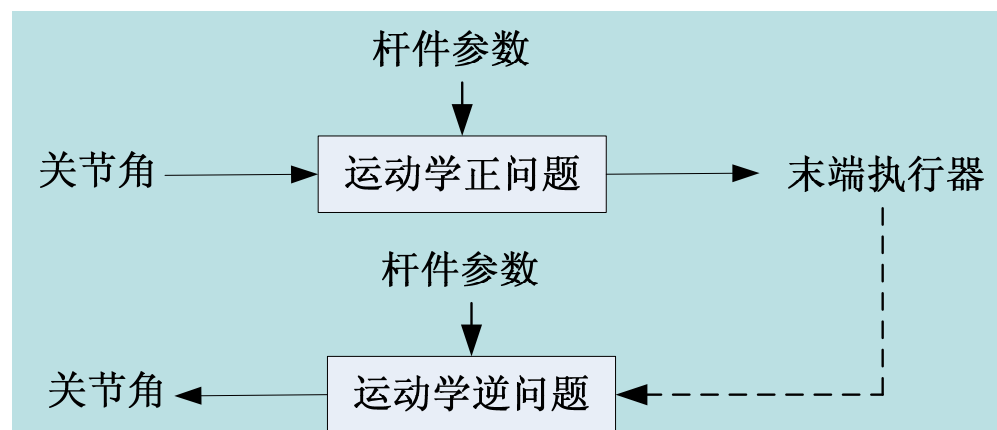


3.1.2 运动学研究的问题



研究的两类问题:

- **运动学正问题**---已知杆件几何参数和关节角矢量，求操作机末端执行器相对于固定参考坐标的位置和姿态（**齐次变换问题**）。
- **运动学逆问题**---已知操作机杆件的几何参数，给定操作机末端执行器相对于参考坐标系的期望位置和姿态（位姿），操作机能否使其末端执行器达到这个预期的位姿？如能达到，那么操作机有几种不同形态可以满足同样的条件？



3.1.3 数学基础：齐次坐标与机器人的位姿描述

主要内容:

1. 位置和姿态的表达
2. 坐标变换
3. 齐次坐标变换
4. 物体的变换和逆变换
5. 通用旋转变换

1. 位置和姿态的表达

(1) 点的位置表示

在直角坐标系{A}中，空间任意点P的位置可以用一个 3×1 的位置矢量来描述，其左上标代表选定的参考坐标系：

$${}^A P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

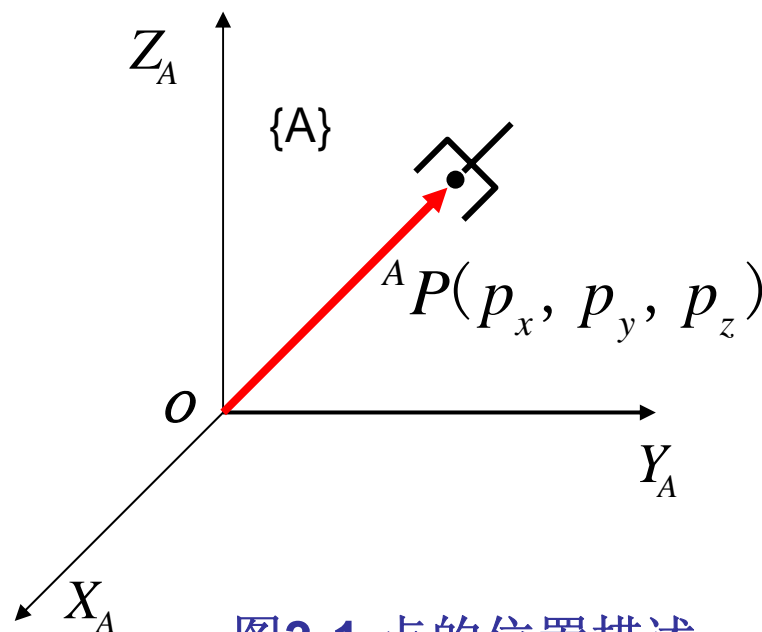


图3-1 点的位置描述

1. 位置和姿态的表达

(2) 姿态（或称方向）的表示

刚体的姿态（Orientation）可以用附着于刚体上的坐标系（用 $\{B\}$ 表示）来表示；因此，刚体相对于坐标系 $\{A\}$ 的姿态等价于 $\{B\}$ 相对于 $\{A\}$ 的姿态。

坐标系 $\{B\}$ 相对于 $\{A\}$ 的姿态表示可以用坐标系 $\{B\}$ 的三个基矢量 x_B, y_B, z_B 在 $\{A\}$ 中的表示给出，即 $\begin{bmatrix} {}^A x_B & {}^A y_B & {}^A z_B \end{bmatrix}$ ，它是一个 3×3 矩阵，它的每一列为 $\{B\}$ 的基矢量在 $\{A\}$ 中的分量表示。

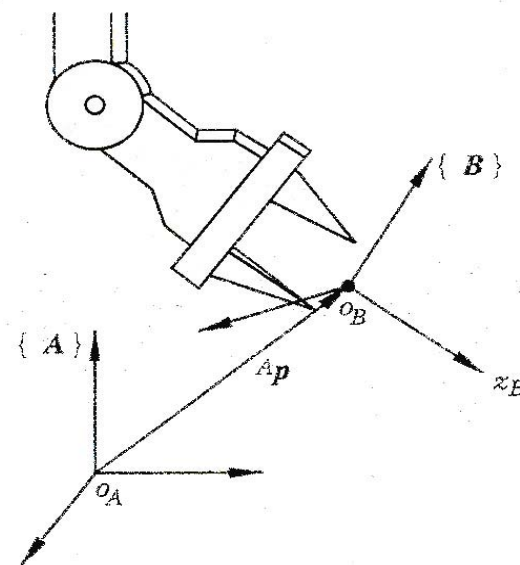


图3-2 刚体的位置和姿态

1. 位置和姿态的表达

(3) 姿态（或称方向）的表示

即：

$${}^A_B R = [{}^A x_B \quad {}^A y_B \quad {}^A z_B] = \begin{bmatrix} x_B \cdot x_A & y_B \cdot x_A & z_B \cdot x_A \\ x_B \cdot y_A & y_B \cdot y_A & z_B \cdot y_A \\ x_B \cdot z_A & y_B \cdot z_A & z_B \cdot z_A \end{bmatrix}$$

基矢量都是单位矢量，两个单位矢量的点积即两者之间夹角的余弦，因此上式又可以写成：

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} \cos(x_A, x_B) & \cos(x_A, y_B) & \cos(x_A, z_B) \\ \cos(y_A, x_B) & \cos(y_A, y_B) & \cos(y_A, z_B) \\ \cos(z_A, x_B) & \cos(z_A, y_B) & \cos(z_A, z_B) \end{bmatrix}$$

${}^A_B R$ 称为坐标系{B}相对于{A}的**旋转矩阵**；旋转矩阵的各分量亦被称为**方向余弦**。

1.位置和姿态的表达

旋转矩阵 ${}^A_B R$ 的性质:

- ✓ 三个列向量两两正交。
- ✓ 每一行是{A}的基矢量在{B}中的分量表示。
- ✓ 旋转矩阵是正交矩阵，其行列式等于1，即 $\left| {}^A_B R \right| = 1$
- ✓ 它的逆矩阵等于它的转置矩阵，即：

$${}^A_B R^{-1} = {}^A_B R^T = {}^B_A R$$

1.位置和姿态的表达

图示坐标系{B}可由坐标系{A} 通过绕A的z坐标轴旋转 θ 角获得, 则{B}坐标系中矢量 ${}^B P$ 在坐标系{A}中的分量为

$$\begin{cases} {}^A P_x = {}^B P_x \cos \theta - {}^B P_y \sin \theta \\ {}^A P_y = {}^B P_x \sin \theta + {}^B P_y \cos \theta \\ {}^A P_z = {}^B P_z \end{cases}$$

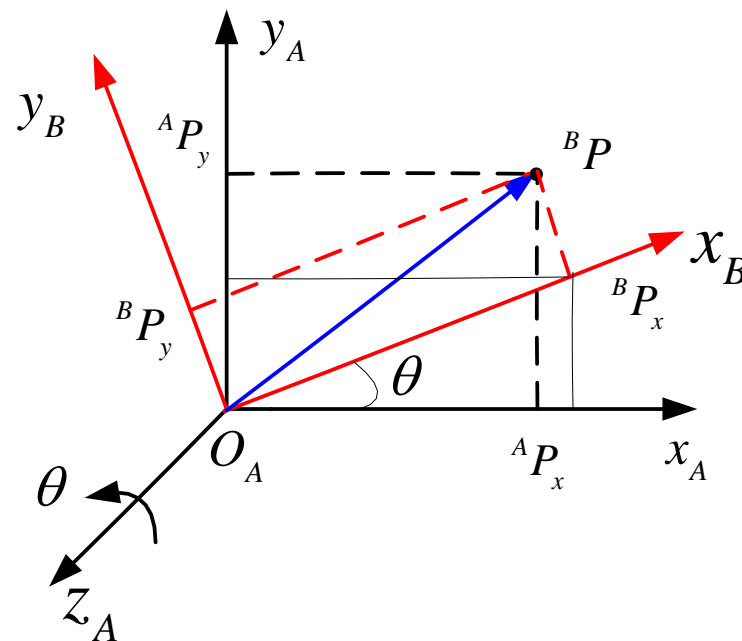
写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} {}^A P_x \\ {}^A P_y \\ {}^A P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B P_x \\ {}^B P_y \\ {}^B P_z \end{bmatrix}$$

其中

$$Rot(z, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

即旋转矩阵



1.位置和姿态的表达

- ✓ 若坐标系{B}可由坐标系{A} 通过绕A的某一坐标轴获得，则绕x,y,z三轴的旋转矩阵分别为

$$Rot(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix}$$

绕x轴的旋转矩阵

$$Rot(y, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}$$

绕y轴的旋转矩阵

$$Rot(z, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

绕z轴的旋转矩阵

1.位置和姿态的表达

旋转矩阵的几何意义:

- ${}^A_B\mathbf{R}$ 可以表示固定于刚体上的坐标系 {B} 对参考坐标系的姿态矩阵。
- ${}^A_B\mathbf{R}$ 可作为坐标变换矩阵, 它使得坐标系 {B} 中的点的坐标 ${}^B P$ 变换成 {A} 中点的坐标 ${}^A P$ 。
- ${}^A_B\mathbf{R}$ 可作为算子, 将 {B} 中的矢量或物体变换到 {A} 中。

1.位置和姿态的表达

(3) 位姿的统一表示

坐标系{B}相对于{A}的位置和姿态（简称位姿）可以用一组四向量矩阵 $[R \ P]$ 表示，如图示。其中， R 表示{B}相对于{A}的姿态， P 表示{B}的原点相对于{A}的位置。

因此，我们可以将{B}坐标系相对于{A}坐标系描述为：

$$\{B\} = \left\{ {}^A_B R \quad {}^A P_{BORG} \right\}$$

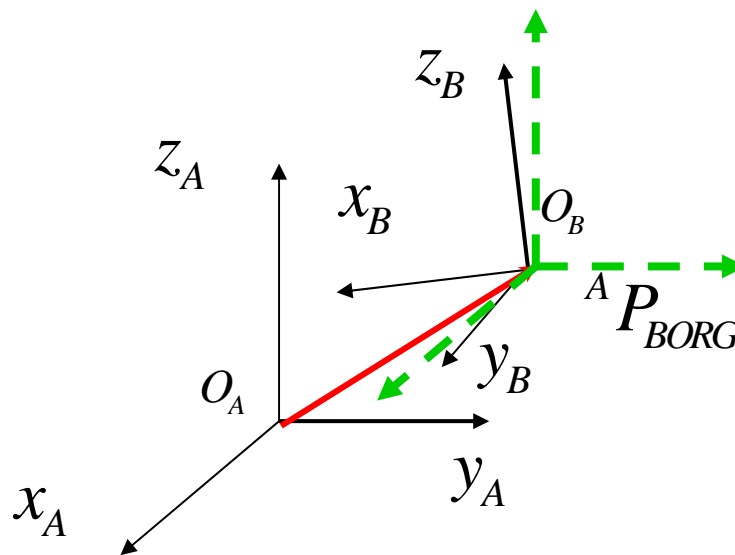


图3-3 坐标系的旋转和平移

2. 坐标变换

(1)坐标系的平移变换

设坐标系{A}和坐标系{B}具有相同的姿态，但它俩的坐标原点不重合。位置矢量 ${}^A P_{BORG}$ 是坐标系{B}相对于{A}的平移矢量。

点P在两个坐标系中的位置矢量满足下式：

$${}^A P = {}^B P + {}^A P_{BORG} \text{ —— 坐标平移变换方程}$$

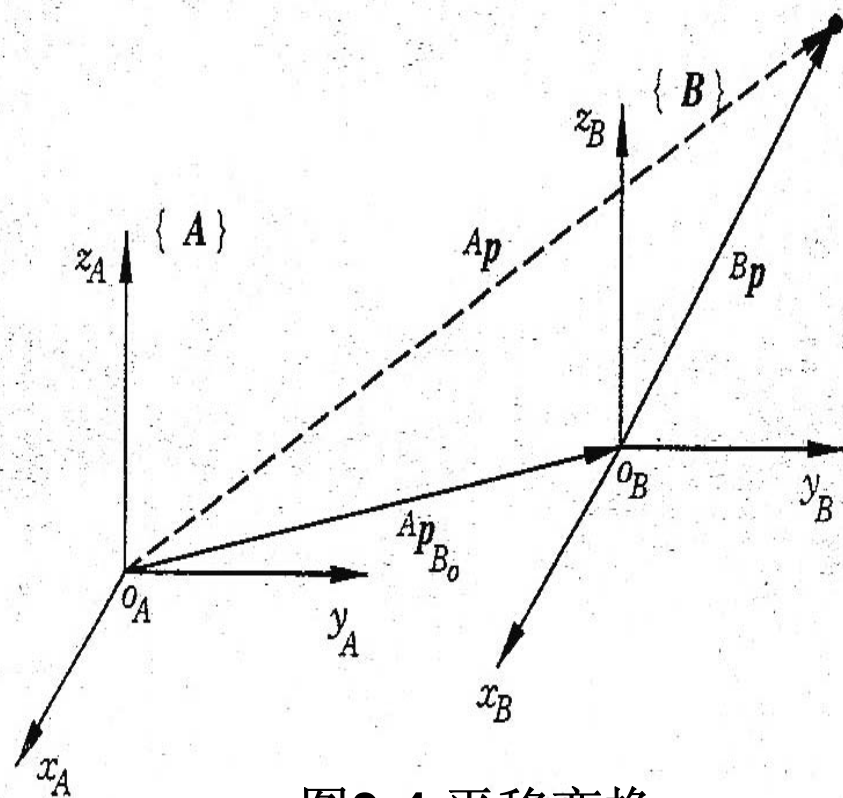


图3-4 平移变换

2. 坐标变换

(2)坐标系的旋转变换

若坐标系{A}和{B}有相同
的原点但姿态不同,则点P
在两个坐标系中的位置矢
量有如下关系:

$${}^A P = {}^A R \cdot {}^B P \text{ ——坐标旋转变换方程}$$

$${}^B R = {}^A R^{-1} = {}^A R^T \text{ ——旋转矩阵}$$

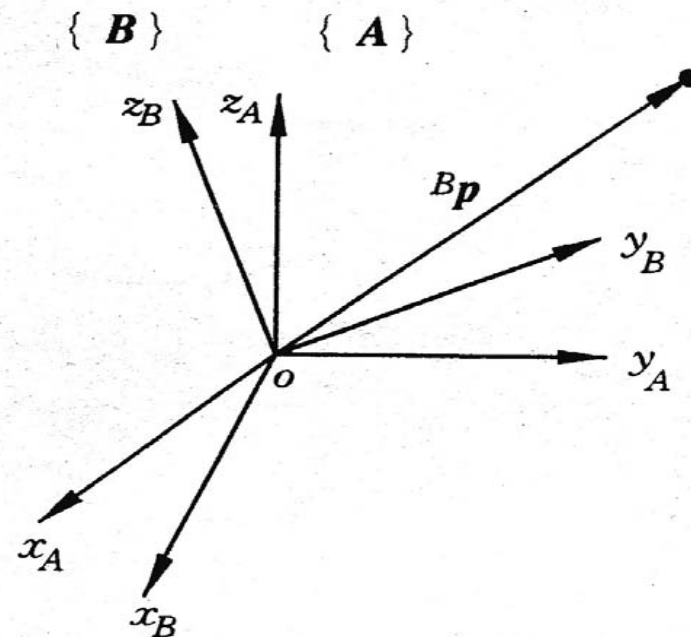


图3-5 旋转变换

2. 坐标变换

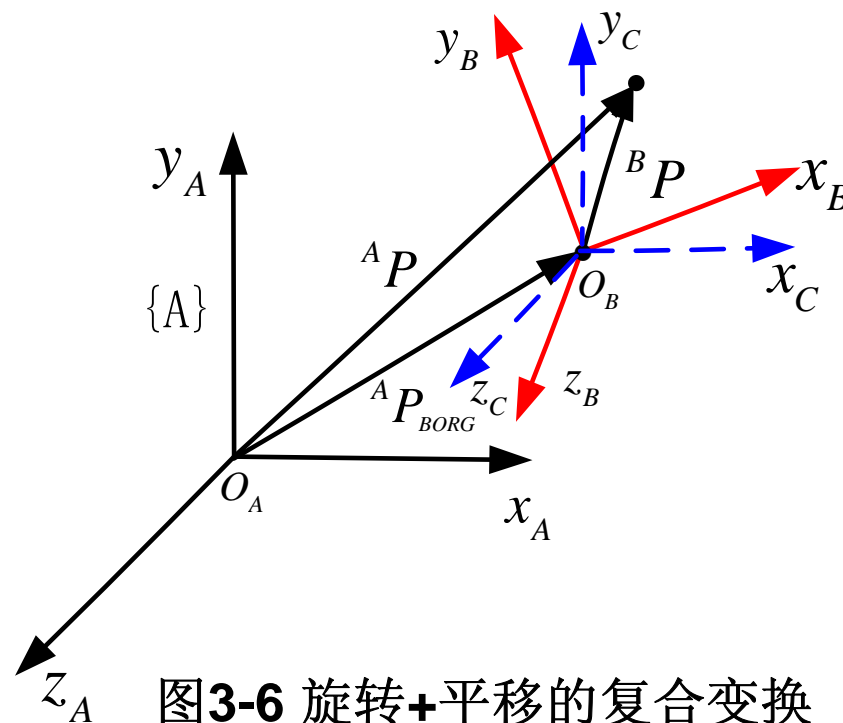
(3) 旋转+平移的复合变换

一般情况下，两坐标系{A}和{B}的**原点既不重合,姿态也不同**。这时对于任一点P在两坐标系中的矢量有以下表达:

$${}^A P = {}^A_B R \cdot {}^B P + {}^A P_{BORG}$$

$${}^C P = {}^C_B R \cdot {}^B P = {}^A_B R \cdot {}^B P$$

$${}^A P = {}^C P + {}^A P_{CORG} = {}^A_B R \cdot {}^B P + {}^A P_{BORG}$$



2. 坐标变换

例3-1：已知坐标系{B}的初始位姿与{A}重合,首先{B}相对于{A}的 Z_A 轴转 30° ，再沿{A}的 X_A 轴移动12单位,并沿{A}的 Y_A 轴移动6单位。求位置矢量 ${}^A P_{BORG}$ 和旋转矩阵 ${}^A_B R$ 。设点P在{B}坐标系中的位置为 ${}^B P = [3, 7, 0]$,求它在坐标系{A}中的位置。

$${}^A_B R = Rot(z, 30^\circ) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^A P_{BORG} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^A P = {}^A_B R {}^B P + {}^A P_{BORG} = \begin{bmatrix} -0.902 \\ 7.562 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.098 \\ 13.562 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. 齐次坐标变换

对于前述平移+旋转的复合变换式：

$${}^A P = {}^A_B R \cdot {}^B P + {}^A P_{BORG}$$

可以表示成以下齐次形式：

$$\begin{bmatrix} {}^A P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A_B R & {}^A P_{BORG} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B P \\ 1 \end{bmatrix}$$

写成矩阵形式：

$${}^A P = {}^A_B T \cdot {}^B P$$

其中： ${}^A_B T = \begin{bmatrix} {}^A_B R & {}^A P_{BORG} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， ${}^A P, {}^B P$ 为空间点的齐次坐标

3. 齐次坐标变换

前述的**平移齐次坐标变换**为：

$$P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

这就是三维空间中点P的**齐次坐标**，是一个 4×1 的位置矢量。

注意齐次坐标的表示**不是唯一的**：

其中 $x = wp_x, y = wp_y, z = wp_z$

$$P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

3. 齐次坐标变换

对于前述的旋转坐标变换，坐标系{A} 绕其 x, y, z 三轴的旋转矩阵分别为

$$\text{Rot}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \quad \text{Rot}(y, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \quad \text{Rot}(z, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将上式表达为齐次式，得齐次旋转坐标变换矩阵为：

$$\text{Rot}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Rot}(y, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Rot}(z, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 齐次坐标变换

齐次坐标变换可以统一表示为

$$T = [n \quad o \quad a \quad p] = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

当坐标系{A}原点分别沿其坐标轴 x_A, y_A, z_A 平移a,b,c 距离时所得点可用平移齐次变换矩阵写为：

$$Trans(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

用非零常数乘以变换矩阵的每个元素，不改变矩阵特性。

3. 齐次坐标变换

例3-2：将例3-1用齐次变换的方法求解。

例3-1：已知坐标系{B}的初始位姿与{A}重合,首先{B}相对于{A}的 Z_A 轴转 30° ，再沿{A}的 X_A 轴移动12单位,并沿{A}的 Y_A 轴移动6单位。求位置矢量 ${}^A P_{BORG}$ 和旋转矩阵 ${}^A_B R$ 。设点P在{B}坐标系中的位置为 ${}^B P=[3,7,0]$ ，求它在坐标系{A}中的位置。

在例3-1已求得：

$${}^A_B R = Rot(z, 30^\circ) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^A P_{BORG} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. 齐次坐标变换

对于例3-2

解：若用齐次变换公式，变换矩阵为

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} {}^A_B R & {}^A P_{BORG} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 12 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以，点P在{A}坐标系中位置的齐次表达为

$${}^A P = {}^A_B T {}^B P = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 12 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.098 \\ 13.562 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. 齐次坐标变换

例3-3：坐标系 {B} 的原点相对于固定坐标系 {A} 的位置为 (10, 5, 0)，令 {B} 绕 {A} 的Z轴旋转30度角，试写出坐标系 {B} 的4*4矩阵表达式

$$\{B\} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 10 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ?$$

$$\{B\} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = ?$$

$$\{B\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = ?$$



例3-4：求矢量 $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 被矢量 $4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ 平移得到的新矢量。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. 齐次坐标变换

引入齐次变换后，连续的变换可以变成矩阵的连乘形式，使得计算简化。

例3-5：已知坐标系中 $u=7i+3j+2k$ ，绕 z 轴转90度后，再绕 y 轴转90度，在上述基础上再平移（4，-3，7），求变换后的向量 v 。

解：变换后的向量 v 为

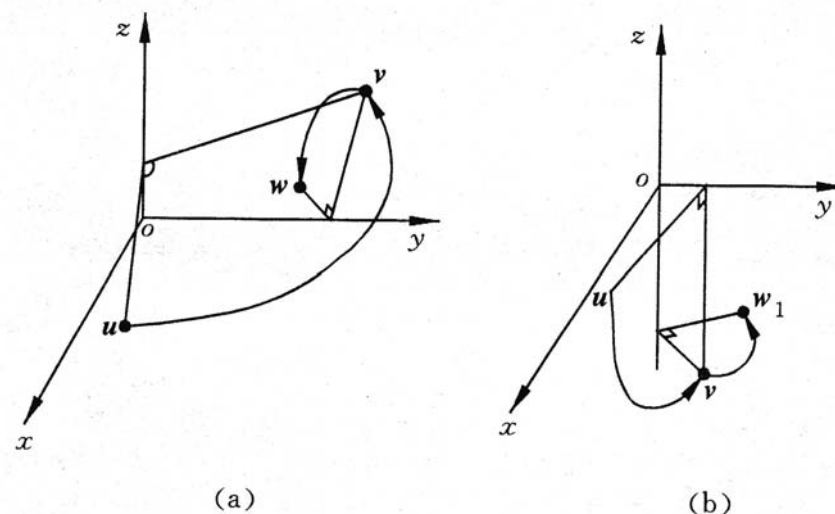
$$\begin{aligned} v &= Trans(4, -3, 7)Rot(y, 90^\circ)Rot(z, 90^\circ)u \\ &\quad \xleftarrow{\begin{matrix} (3) & (2) & (1) \end{matrix}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 4 & 10 & 1 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

由于矩阵乘法没有交换性，因此变换次序对结果影响很大。

上例中

$$Trans(4, -3, 7)Rot(y, 90^\circ)Rot(z, 90^\circ)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



上例中若改变次序，令点u先绕y轴转90度，再绕z轴转90度，最后平移（4，-3，7），则有

图3-7 变换次序对变换结果的影响

$$Trans(4, -3, 7)Rot(z, 90^\circ)Rot(y, 90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 物体的变换及逆变换

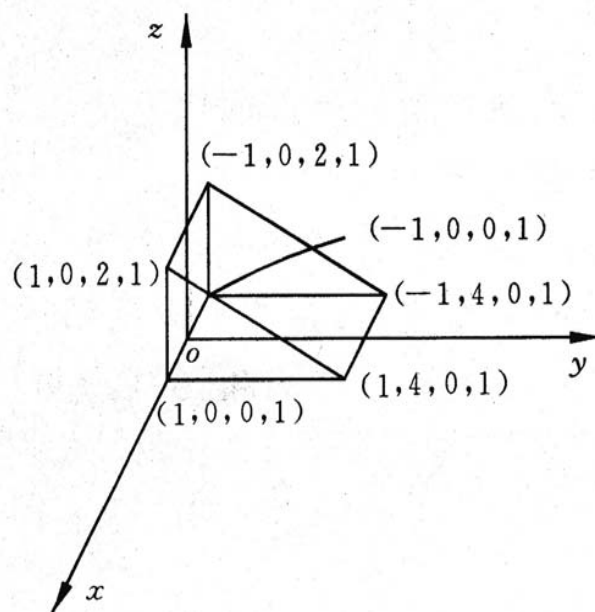
(1) 物体的位置和变换

物体可以由固定于其自身坐标系上的若干特征点描述。

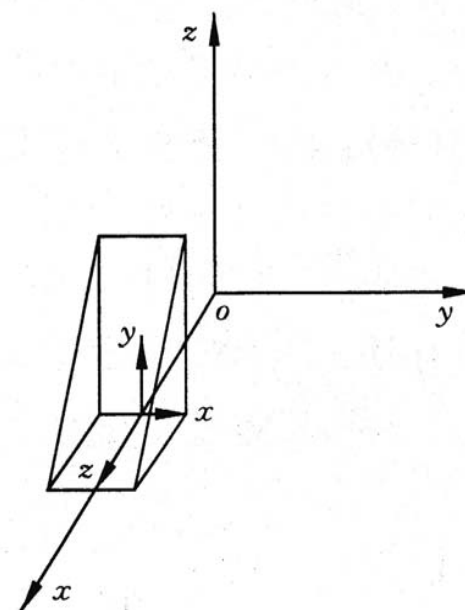
物体的变换也可通过这些特征点的变换获得。

图中楔形物体可以用
其6个特征点描述为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



(a)



(b)

图3-8 对楔形物体的变换

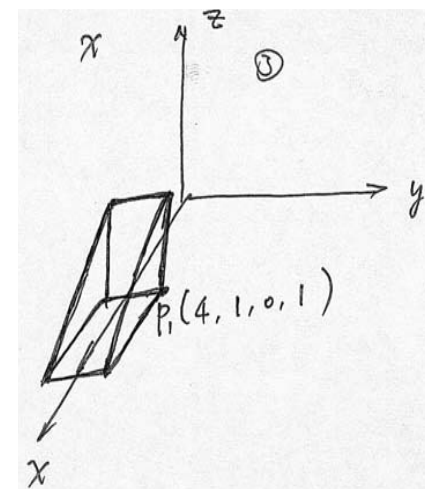
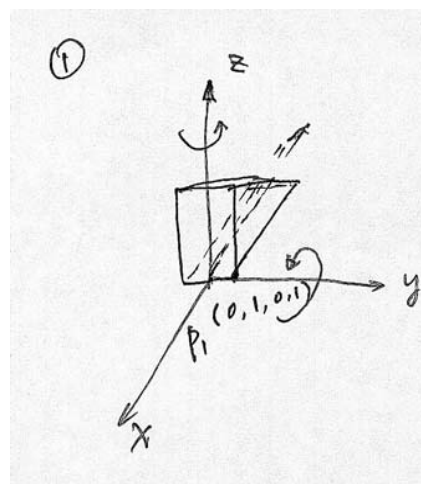
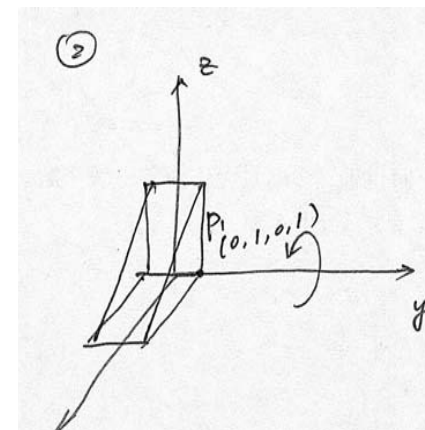
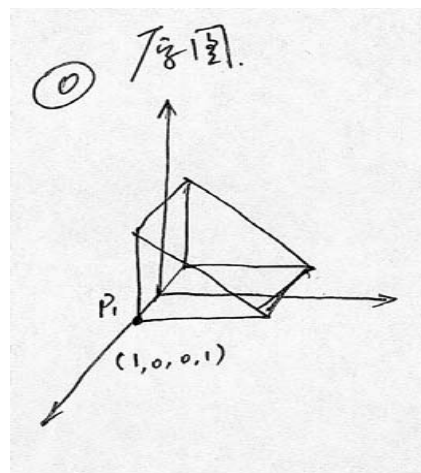
若要楔形物体变换为图b)位置，其齐次变换矩阵为

$$\mathbf{T} = \text{Trans}(4,0,0) \text{Rot}(y,90^\circ) \text{Rot}(z,90^\circ)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此图中楔形物体的位置为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



4. 物体的变换及逆变换

(2) 齐次坐标的复合变换

{B}相对于{A}: ${}^A_B T$;

{C}相对于{B}: ${}^B_C T$;

则 {C} 相对于 {A} :

$$\begin{aligned} {}^A_C T &= {}^A_B T {}^B_C T \\ &= \begin{bmatrix} {}^A_B R & {}^A P_{BORG} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B_C R & {}^B P_{CORG} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^A_B R {}^B_C R & {}^A_B R {}^B P_{CORG} + {}^A P_{BORG} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. 物体的变换及逆变换

(3) 齐次坐标的逆变换

{B} 相对于 {A} : ${}^A_B T$;

{A} 相对于 {B} : ${}^B_A T$;

两者互为逆矩阵. 求逆的办法:

(1) 直接求 ${}^A_B T^{-1}$

(2) 简化方法

$${}^B({}^A P_{BORG}) = {}^B_A R {}^A P_{BORG} + {}^B P_{AORG} = 0$$

$${}^B_A R = {}^A_B R^{-1} = {}^A_B R^T$$

$${}^B_A T = \begin{bmatrix} {}^B_A R & {}^B P_{AORG} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A_B R^T & -{}^A_B R^T {}^A P_{BORG} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^A_B T^{-1}$$

4. 物体的变换及逆变换

(3) 齐次坐标的逆变换

一般地, 若

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \\ o_x & o_y & o_z & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{o} \\ a_x & a_y & a_z & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T, \mathbf{n} = [n_x \ n_y \ n_z]^T, \mathbf{o} = [o_x \ o_y \ o_z]^T, \mathbf{a} = [a_x \ a_y \ a_z]^T$$

4. 物体的变换及逆变换

(4) 机器人坐标变换

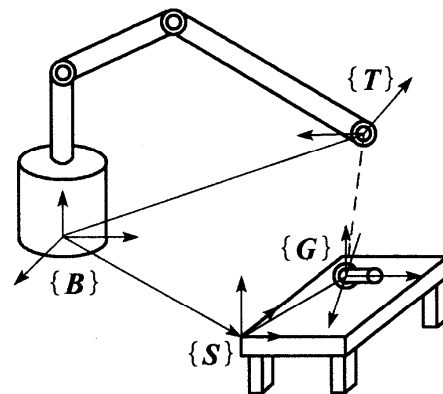
机器人坐标系的命名：

{B}: 基坐标系

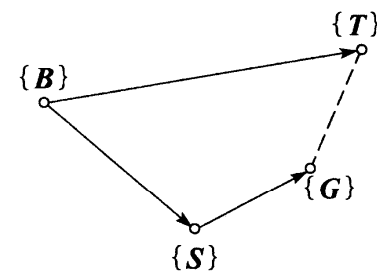
{T}: 工具坐标系

{S}: 工作站坐标系

{G}: 目标坐标系或
工件坐标系



a) 机械手与环境间的运动关系



b) 对应的有向变换图

图3-9 机器人坐标系及其变换关系

从{T}到{B}的坐标变换矩阵可表示为：

$${}^B_T T = {}^B_S T \cdot {}^S_G T \cdot {}^G_T T$$

5. 通用旋转坐标变换

(1) 通用旋转坐标变换

如图所示 f 为坐标系 {A} 中任意过原点的单位矢量, f_x, f_y, f_z 为 f 矢量在参考坐标系坐标轴 x_A, y_A, z_A 的三个分量, 且满足

$$f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 = 1$$

求: 点P绕矢量 f 旋转 θ 角时的旋转矩阵

$$Rot(f, \theta)$$

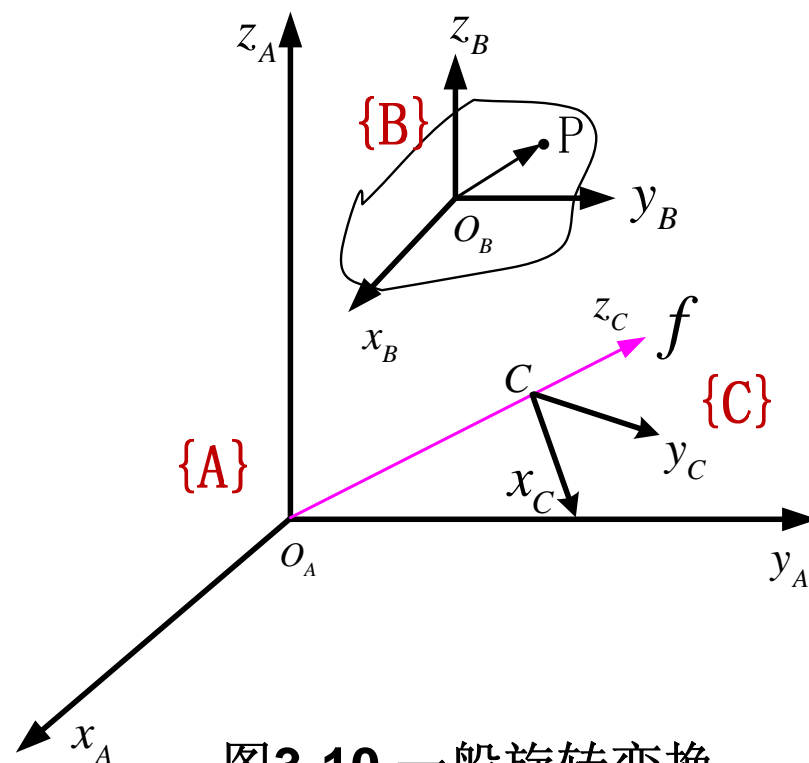


图3-10 一般旋转变换

{A}: 参考坐标系; {B}: 物体上固接的坐标系

{C}: Z轴与 f 重合的辅助坐标系

5. 通用旋转坐标变换

假设点P在{B}坐标系中以向量 ${}^B P$ 表示,它绕{A}中直线f旋转 θ 角。

- 1) 将 {B} 上P点坐标变换到 {A} 中, 其坐标为 ${}^A T^B P$
- 2) 直接计算绕f旋转的坐标为, $Rot(f, \theta) {}^A T^B P$

目前上式在 {A} 中
无法直接求。
采取如下步骤:

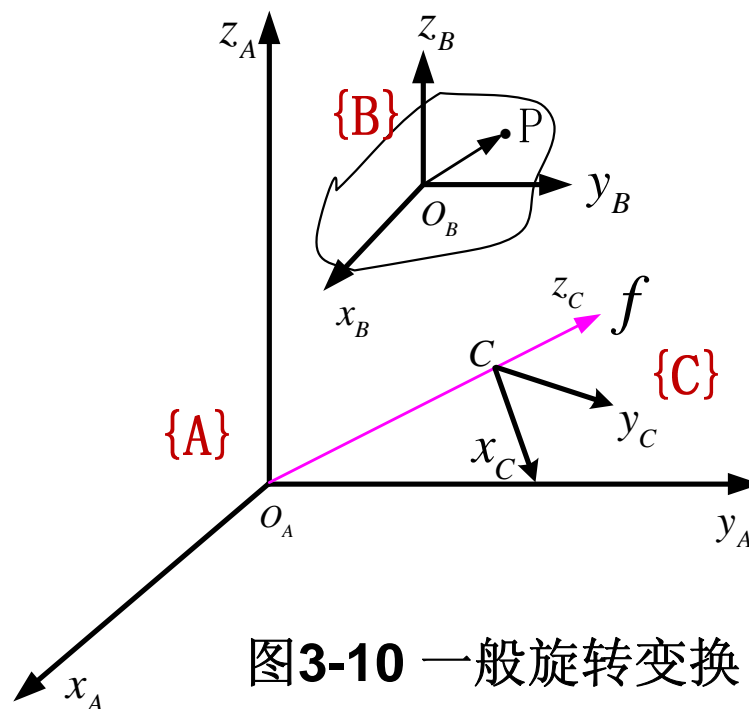


图3-10 一般旋转变换

3) 建立辅助坐标系 {C}，使其Z轴与f重合。这样问题变为绕Z_C旋转。将 {B} 中的点P变换到 {C} 中，变换

为： ${}^C_A T {}^A_B T {}^B P$

4) 在 {C} 中绕Z轴旋转有： $Rot(z, \theta) {}^C_A T {}^A_B T {}^B P$

5) 将 {C} 中坐标变换回 {A} 中有， ${}^A_C T Rot(z, \theta) {}^C_A T {}^A_B T {}^B P$

步骤2) 和5) 中的结果应该相同，即：

$${}^A_C T Rot(z, \theta) {}^C_A T {}^A_B T {}^B P = Rot(f, \theta) {}^A_B T {}^B P$$

$${}^A_C T Rot(z, \theta) {}^C_A T {}^A_B T {}^B P = Rot(f, \theta) {}^A_B T {}^B P$$

$$Rot(f, \theta) = {}^A_C T Rot(z, \theta) {}^C_A T = {}^A_C T Rot(z, \theta) {}^A_C T^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & 0 \\ o_x & o_y & o_z & 0 \\ a_x & a_y & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由于{C}的Z轴与f重合，所以

$$a_x = f_x \quad a_y = f_y \quad a_z = f_z$$

根据坐标轴的正交性, $\mathbf{a} = \mathbf{n} \times \mathbf{o}$, 有

$$a_x = n_y o_z - o_y n_z = f_x$$

$$a_y = n_z o_x - o_z n_x = f_y$$

$$a_z = n_x o_y - o_x n_y = f_z$$

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$$

令 $\text{vers}\theta = 1 - \cos\theta$, 则

$$\text{Rot}(f, \theta) = \begin{bmatrix} f_x f_x \text{vers}\theta + c\theta & f_y f_x \text{vers}\theta - f_z s\theta & f_z f_x \text{vers}\theta + f_y s\theta & 0 \\ f_x f_y \text{vers}\theta + f_z s\theta & f_y f_y \text{vers}\theta + c\theta & f_z f_y \text{vers}\theta - f_x s\theta & 0 \\ f_x f_z \text{vers}\theta - f_y s\theta & f_y f_z \text{vers}\theta + f_x s\theta & f_z f_z \text{vers}\theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

此即通用旋转齐次变换公式。

5. 通用旋转坐标变换

(1) 通用旋转坐标变换

前述绕坐标系{A}的坐标轴x、y、z的旋转矩阵分别为通用旋转变换的特殊形式

当 $f_x = 1, f_y = f_z = 0$ 时，即为绕x轴的旋转变换 $Rot(x, \theta)$

当 $f_y = 1, f_x = f_z = 0$ 时，即为绕y轴的旋转变换 $Rot(y, \theta)$

当 $f_z = 1, f_y = f_x = 0$ 时，即为绕z轴的旋转变换 $Rot(z, \theta)$

5. 通用旋转坐标变换

(2) 等效转角与转轴

给出任一旋转变换, 能够由上式求得进行等效旋转 θ 角的转轴.
已知齐次旋转变换矩阵 R , 令 $R = \text{Rot}(f, \theta)$, 即有

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x f_x \text{vers}\theta + c\theta & f_y f_x \text{vers}\theta - f_z s\theta & f_z f_x \text{vers}\theta + f_y s\theta & 0 \\ f_x f_y \text{vers}\theta + f_z s\theta & f_y f_y \text{vers}\theta + c\theta & f_z f_y \text{vers}\theta - f_x s\theta & 0 \\ f_x f_z \text{vers}\theta - f_y s\theta & f_y f_z \text{vers}\theta + f_x s\theta & f_z f_z \text{vers}\theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将上式对角线元素相加, 并简化得

$$n_x + o_y + a_z = (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2) \text{vers}\theta + 3c\theta = 1 + 2c\theta$$

$$c\theta = \frac{1}{2} (n_x + o_y + a_z - 1)$$

5. 通用旋转坐标变换

(2) 等效转角与转轴

非对角元素成对相减, 有

$$o_z - a_y = 2f_x s\theta$$

$$a_x - n_z = 2f_y s\theta$$

$$n_y - o_x = 2f_z s\theta$$

平方后有

$$s\theta = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(o_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - o_x)^2}$$

设

$$0 \leq \theta \leq 180^\circ$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{(o_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - o_x)^2}}{n_x + o_y + a_z - 1}$$

$$f_x = (o_z - a_y) / 2s\theta$$

$$f_y = (a_x - n_z) / 2s\theta$$

$$f_z = (n_y - o_x) / 2s\theta$$

5. 通用旋转坐标变换

(2) 等效转角与转轴

例3-6 一坐标系 {B} 与参考系重合, 现将其绕通过原点的轴 $f = [0.707 \quad 0.707 \quad 0]^T$ 转 30° , 求转动后的 {B}.

$$f_x = f_y = 0.707 \quad f_z = 0.0 \quad \theta = 30.0^\circ$$

$$Rot(f, 30^\circ) = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & 0 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 0 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. 通用旋转坐标变换

一般情况, 若f不通过原点, 而过Q点(q_x, q_y, q_z), 则齐次变换矩阵为:

$$Rot(f, \theta) = \begin{bmatrix} f_x f_x vers\theta + c\theta & f_y f_x vers\theta - f_z s\theta & f_z f_x vers\theta + f_y s\theta & A \\ f_x f_y vers\theta + f_z s\theta & f_y f_y vers\theta + c\theta & f_z f_y vers\theta - f_x s\theta & B \\ f_x f_z vers\theta - f_y s\theta & f_y f_z vers\theta + f_x s\theta & f_z f_z vers\theta + c\theta & C \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_x f_x vers\theta + c\theta & f_y f_x vers\theta - f_z s\theta & f_z f_x vers\theta + f_y s\theta \\ f_x f_y vers\theta + f_z s\theta & f_y f_y vers\theta + c\theta & f_z f_y vers\theta - f_x s\theta \\ f_x f_z vers\theta - f_y s\theta & f_y f_z vers\theta + f_x s\theta & f_z f_z vers\theta + c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}$$

5. 通用旋转坐标变换

例3-7 一坐标系{B}与参考系重合,现将其绕通过 $q=[1,2,3]^T$ 的轴 $f = [0.707 \quad 0.707 \quad 0]^T$ 转 30° , 求转动后的{B}.

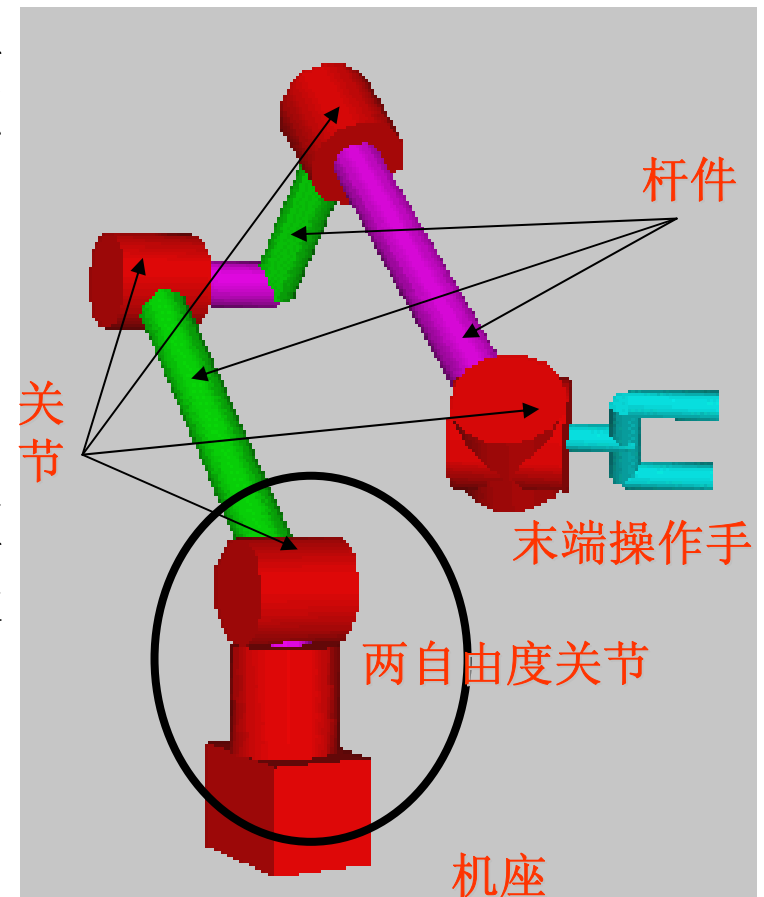
以 $f_x = f_y = 0.707 \quad f_z = 0.0 \quad \theta = 30.0^\circ$
 $q_x = 1 \quad q_y = 2 \quad q_z = 3$,代入算式,有

$$Rot(f, 30^\circ) = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & -1.13 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 1.13 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.04 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 机器人杆件，关节和它们的参数

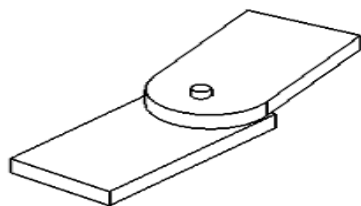
3.2.1 杆件与关节

- 操作机由一串用转动或平移（棱柱形）关节连接的刚体（杆件）组成
- 每一对关节杆件构成一个自由度，因此 N 个自由度的操作机就有 N 对关节—杆件。
- 0号杆件（一般不把它当作机器人的一部分）固联在机座上，通常在这里建立一个固定参考坐标系。最后一个杆件与工具相连
- 关节和杆件均由底座向外顺序排列，每个杆件最多和另外两个杆件相联，不构成闭环。

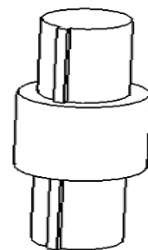


关节：

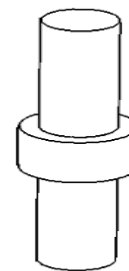
- 一般说来，两个杆件间是用**低副**相联的
- 只可能有6种低副关节：**旋转**（转动）、**棱柱**（移动）、**圆柱形**、**球形**、**螺旋**和**平面**，其中只有**旋转**和**棱柱形**关节是串联机器人操作机常见的，各种低副形状如下图所示：



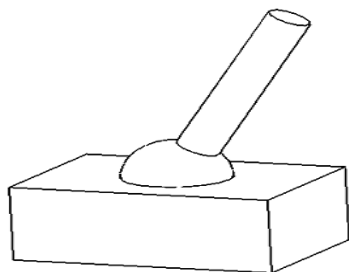
旋转



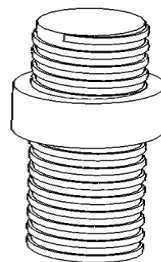
棱柱形



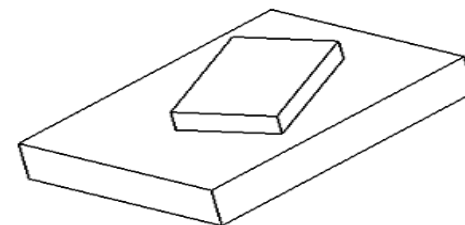
柱形



球形



螺旋形

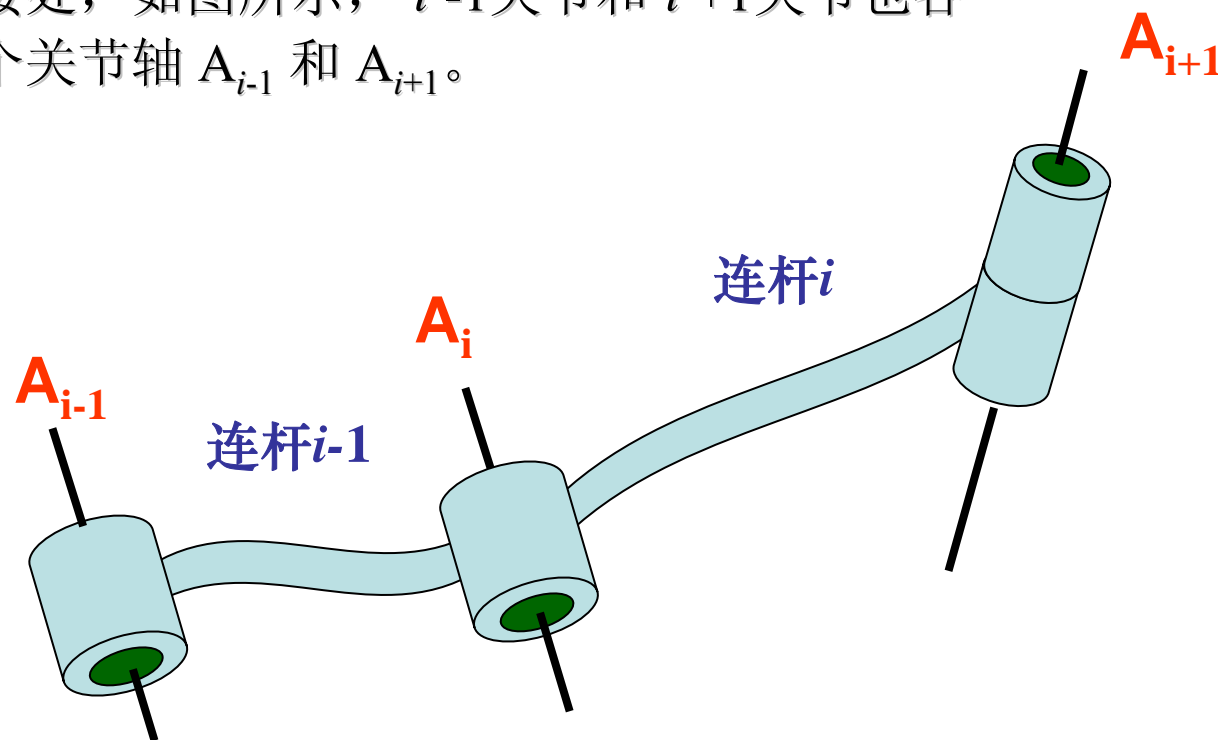


平面

3.2.2 杆件参数的设定

➤ 条件

- 关节串联
- 每个杆件最多与2个杆件相连，如 A_i 与 A_{i-1} 和 A_{i+1} 相连。第 i 关节的关节轴 A_i 位于2个杆件相连接处，如图所示， $i-1$ 关节和 $i+1$ 关节也各有一个关节轴 A_{i-1} 和 A_{i+1} 。

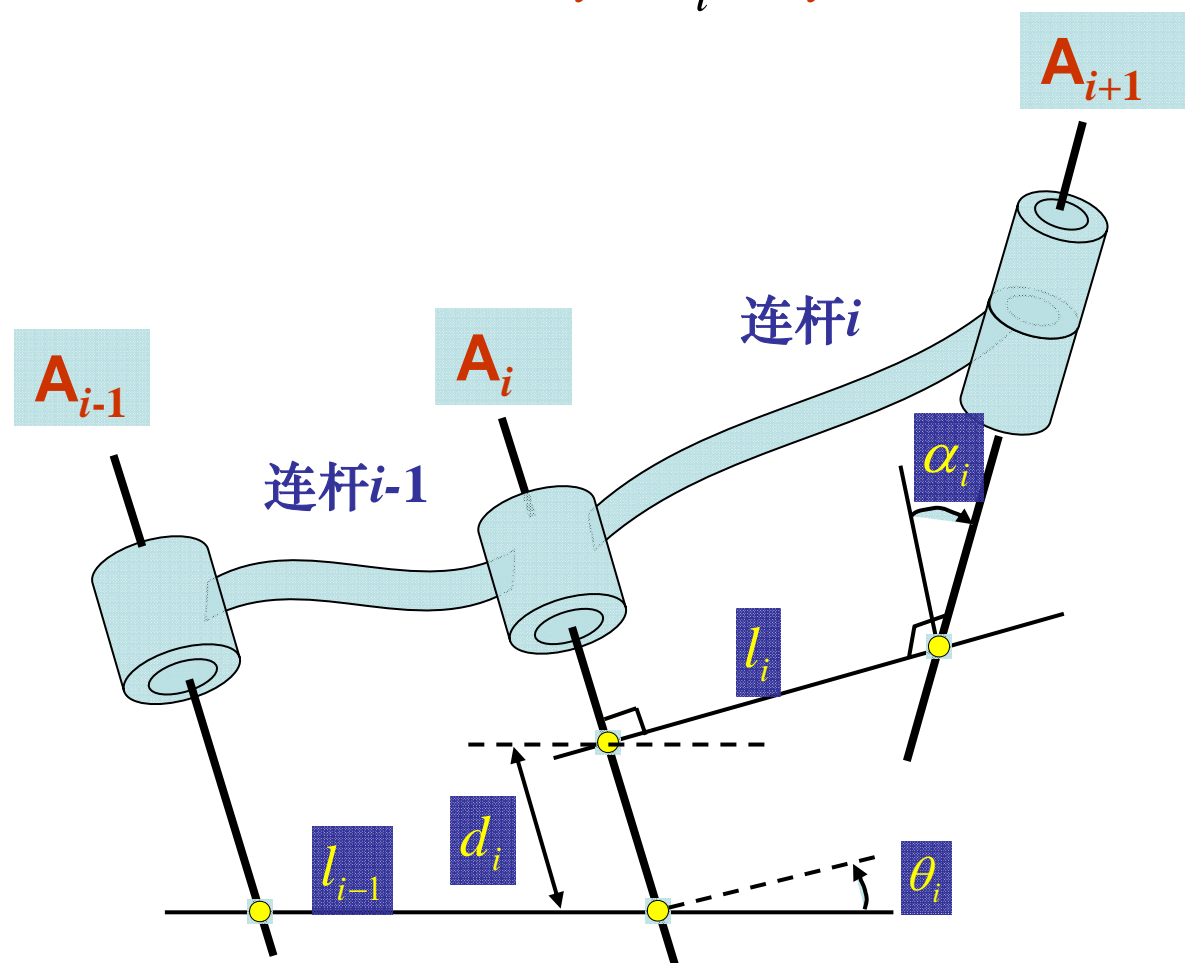


➤ 杆件参数的定义—— l_i 、 α_i 、 d_i 和 θ_i

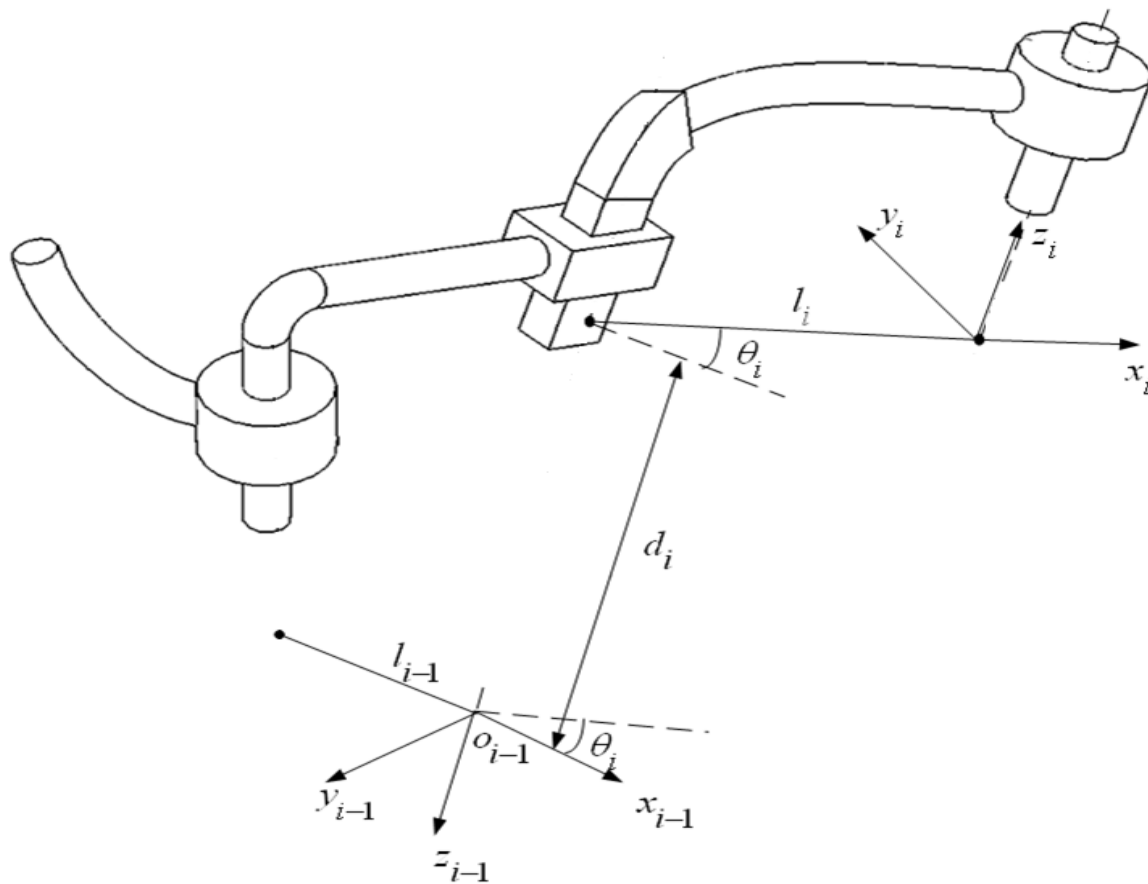
由运动学的观点来看，杆件保持其两端关节间的形态不变，这种形态由两个参数决定：杆件长度 l_i 和杆件扭转角 α_i 。杆件的相对位置关系，由另外两个参数决定：杆件的偏距 d_i 和关节的回转角 θ_i 。

- l_i — 关节 A_i 轴和 A_{i+1} 轴线公法线的长度。
- α_i — 关节 i 轴线与 $i+1$ 轴线在垂直于 l_i 平面内的夹角。
- d_i — l_i 和 l_{i-1} 在 A_i 轴线上的交点之间的距离。
- θ_i — l_i 和 l_{i-1} 之间的夹角，按右手定则由 l_{i-1} 转向 l_i 。

❖ 上述4个参数，就确定了杆件的结构形态和相邻杆件相对位置关系。在转动关节中， l_i ， α_i ， d_i 是固定值， θ_i 是变量。



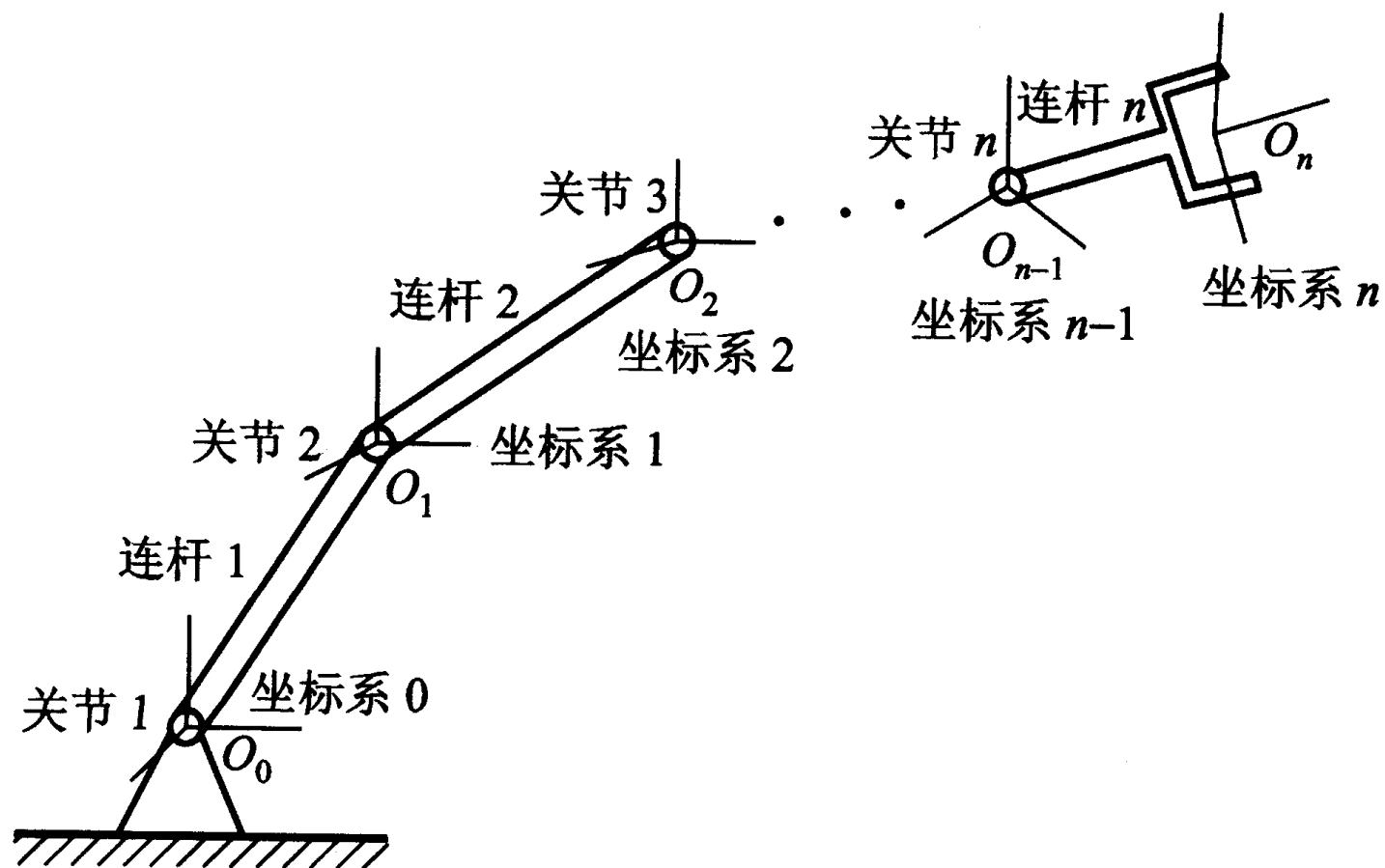
❖ 在移动关节中, l_i, α_i, θ_i 是固定值, d_i 是变量。



3.3 机器人关节坐标系的建立

- 对于每个杆件都可以在关节轴处建立一个正规的笛卡尔坐标系 (x_i, y_i, z_i) , $(i=1, 2, \dots, n)$, n 是自由度, 再加上基座坐标系, 一共有 $(n+1)$ 个坐标系。
- 基座坐标系 ΣO_0 定义为0号坐标系 (x_0, y_0, z_0) , 它也是机器人的惯性坐标系, 0号坐标系在基座上的位置和方向可任选, 但 z_0 轴线必须与关节1的轴线重合, 位置和方向可任选;
- 最后一个坐标系 (n 关节), 可以设在手的任意部位, 但必须保证 z_n 与 z_{n-1} 垂直。

机器人关节坐标系标号的分配



3.3.1 D-H关节坐标系建立原则

- 机器人关节坐标系的建立主要是为了描述机器人各杆件和终端之间的相对运动，对建立运动方程和动力学研究是基础性的工作。
- 为了描述机器人各杆件和终端之间转动或移动关系，Denavit和Hartenberg于1955年提出了一种为运动链中每个杆件建立附体坐标系的矩阵方法（D-H方法），建立原则如下：

- ◆ 右手坐标系

- ◆ 原点 O_i ：设在 L_i 与 A_{i+1} 轴线的交点上

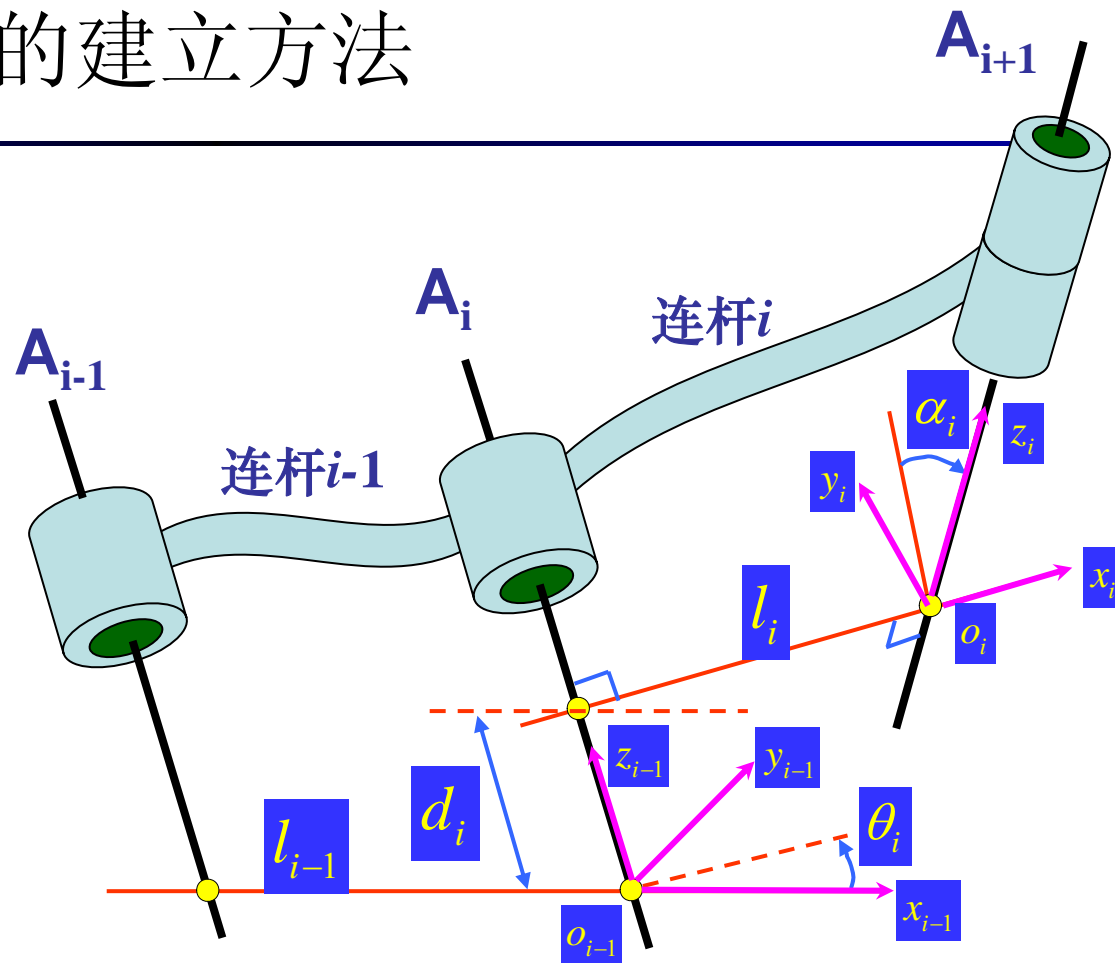
- ◆ Z_i 轴：与 A_{i+1} 关节轴重合，指向任意

- ◆ X_i 轴：与公法线 L_i 重合，指向沿 L_i 由 A_i 轴线指向 A_{i+1} 轴线

- ◆ Y_i 轴：按右手定则

3.3.2 关节坐标系的建立方法

- **原点 O_i** : 设在 l_i 与 A_{i+1} 轴线的交点上
- **z_i 轴**: 与 A_{i+1} 关节轴重合, 指向任意
- **x_i 轴**: 与公法线 l_i 重合, 指向沿 l_i 由 A_i 轴线指向 A_{i+1} 轴线
- **y_i 轴**: 按右手定则

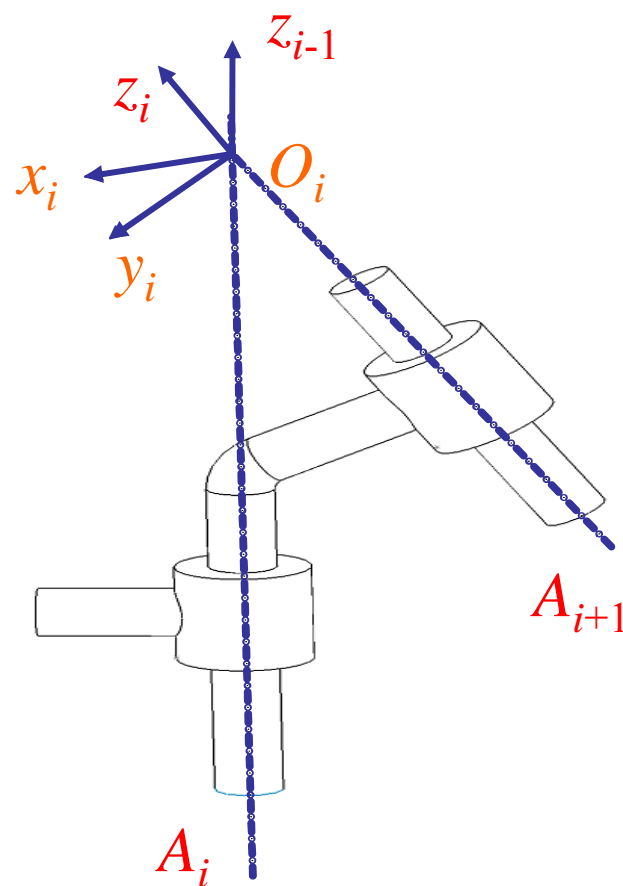


- **杆件长度 l_i** —沿 x_i 轴, z_{i-1} 轴与 x_i 轴交点到 O_i 的距离
- **杆件扭转角 α_i** —绕 x_i 轴, 由 z_{i-1} 转向 z_i
- **杆件偏移量 d_i** —沿 z_{i-1} 轴, z_{i-1} 轴和 x_i 交点至 ΣO_{i-1} 坐标系原点的距离
- **杆件回转角 θ_i** —绕 z_{i-1} 轴, 由 x_{i-1} 转向 x_i

➤ 两种特殊情况

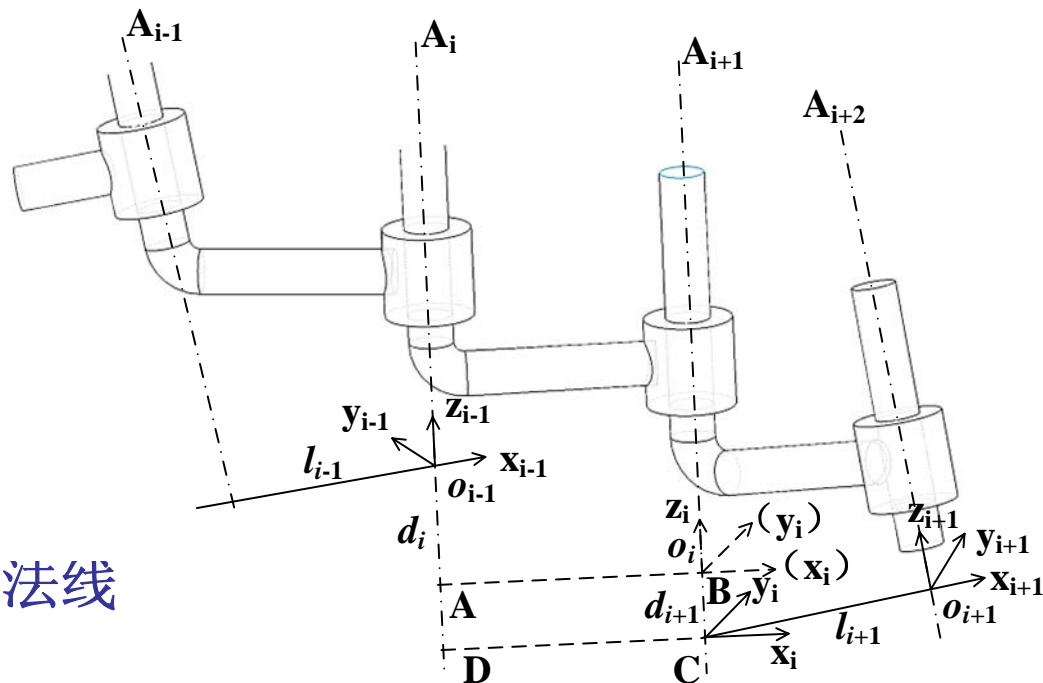
■ 两轴相交，怎么建立坐标系？

- O_i — A_i 与 A_{i+1} 关节轴线的交点；
- z_i — A_{i+1} 轴线；
- x_i — z_i 和 z_{i-1} 构成的平面的法线 $\overline{z_{i-1} \times z_i}$ ；
- y_i — 右手定则；



■ 两轴平行，怎么建立坐标系(A_i 与 A_{i+1} 平行)?

- 先建立 ΣO_{i-1}
- 然后建立 ΣO_{i+1}
- 最后建立 ΣO_i



注意:

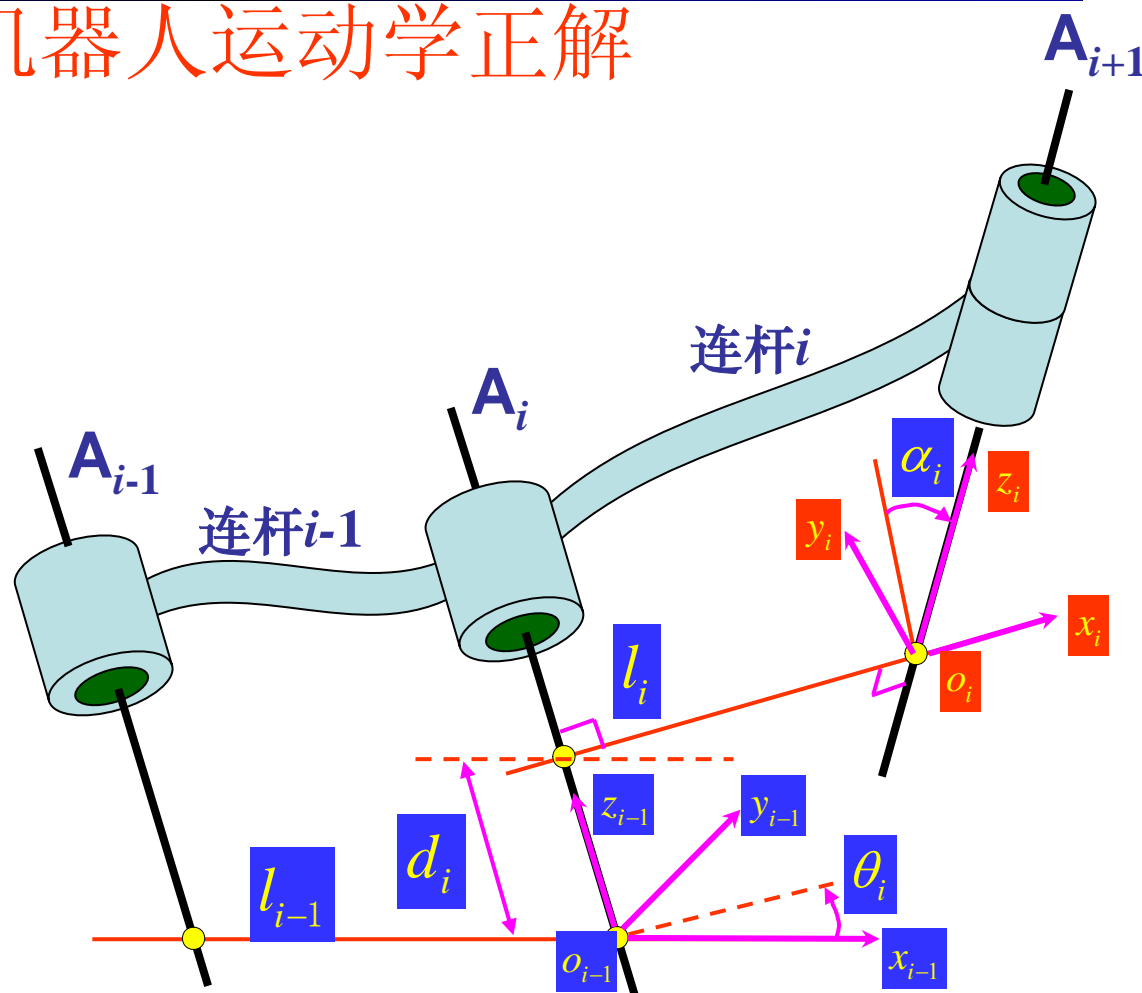
- 由于 A_i 和 A_{i+1} 平行，所以公法线任意点在A点位置;
- 按照先前的定义， d_i 为 O_{i-1} 点和A点之间的距离， d_{i+1} 为B点和C点间的距离，这样设定可以的，但我们可以变更一下，将 O_i 点放在C点，定义 O_i 在 l_{i+1} 和 A_{i+1} 轴的交点上，这样使 $d_{i+1}=0$ 使计算简便，此时 $d_i = \overline{O_{i-1}D}$



3.4 相邻关节坐标系间的齐次变换过程

——机器人运动学正解

- 将 x_{i-1} 轴绕 z_{i-1} 轴转 θ_i 角度，将其与 x_i 轴平行；
- 沿 z_{i-1} 轴平移距离 d_i ，使 x_{i-1} 轴与 x_i 轴重合；
- 沿 x_i 轴平移距离 l_i ，使两坐标系原点及 x 轴重合；
- 将 z_{i-1} 轴绕 x_i 轴转 α_i 角度，两坐标系完全重合。



$${}^{i-1}A_i = Rot(z_{i-1}, \theta_i) Trans(z_{i-1}, d_i) Trans(x_i, l_i) Rot(x_i, \alpha_i)$$

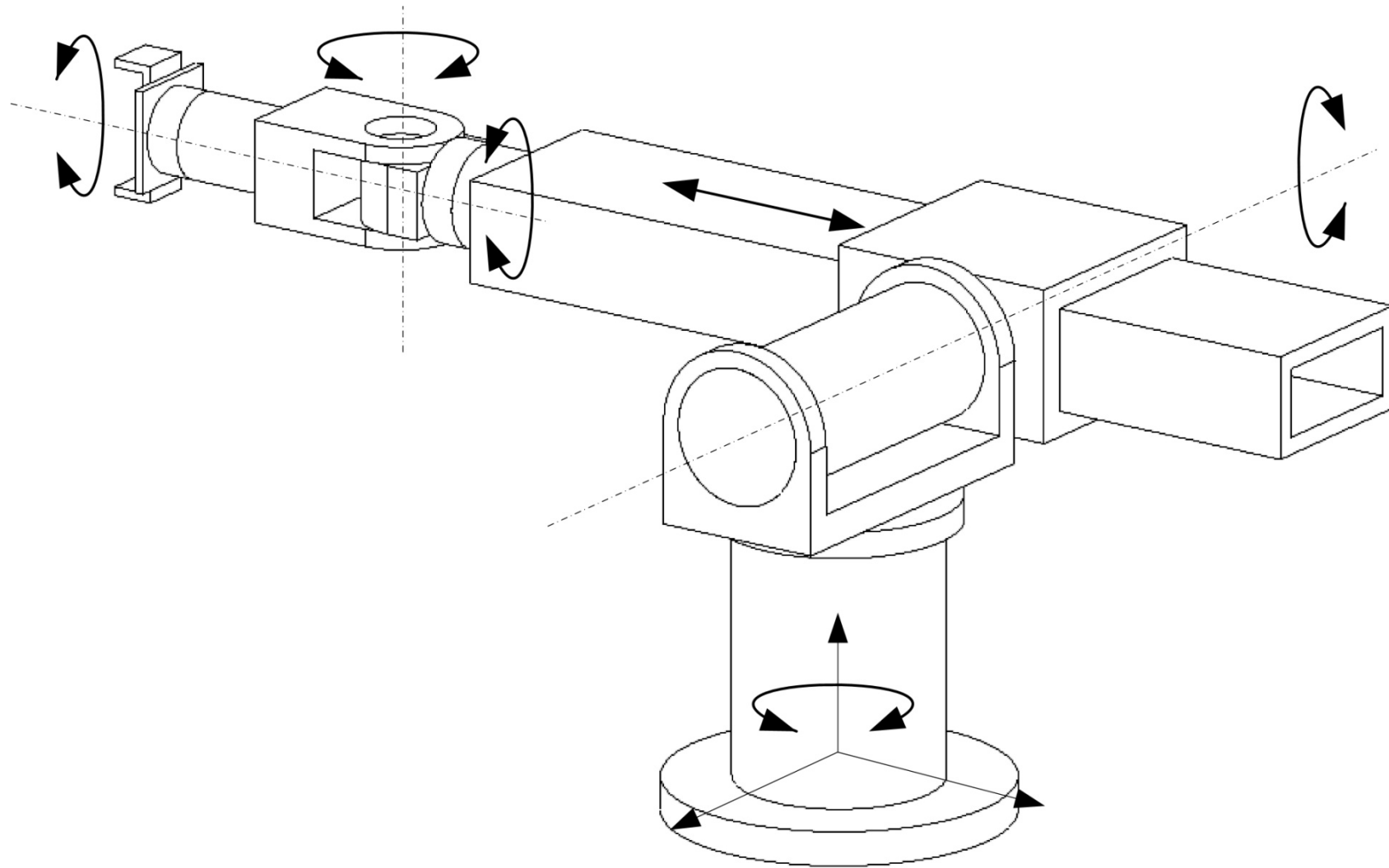
➤ D-H变换矩阵

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & l_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & l_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➤ 机器人的运动学正解方程

$${}^0T_i = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdots {}^{i-1}A_i$$

例：Stanford机器人运动学方程



➤ 为右手坐标系

➤ 原点 O_i : A_i 与 A_{i+1} 关节轴线的交点

➤ z_i 轴: 与 A_{i+1} 关节轴重合, 指向任意

➤ x_i 轴: z_i 和 z_{i-1} 构成的面的法线

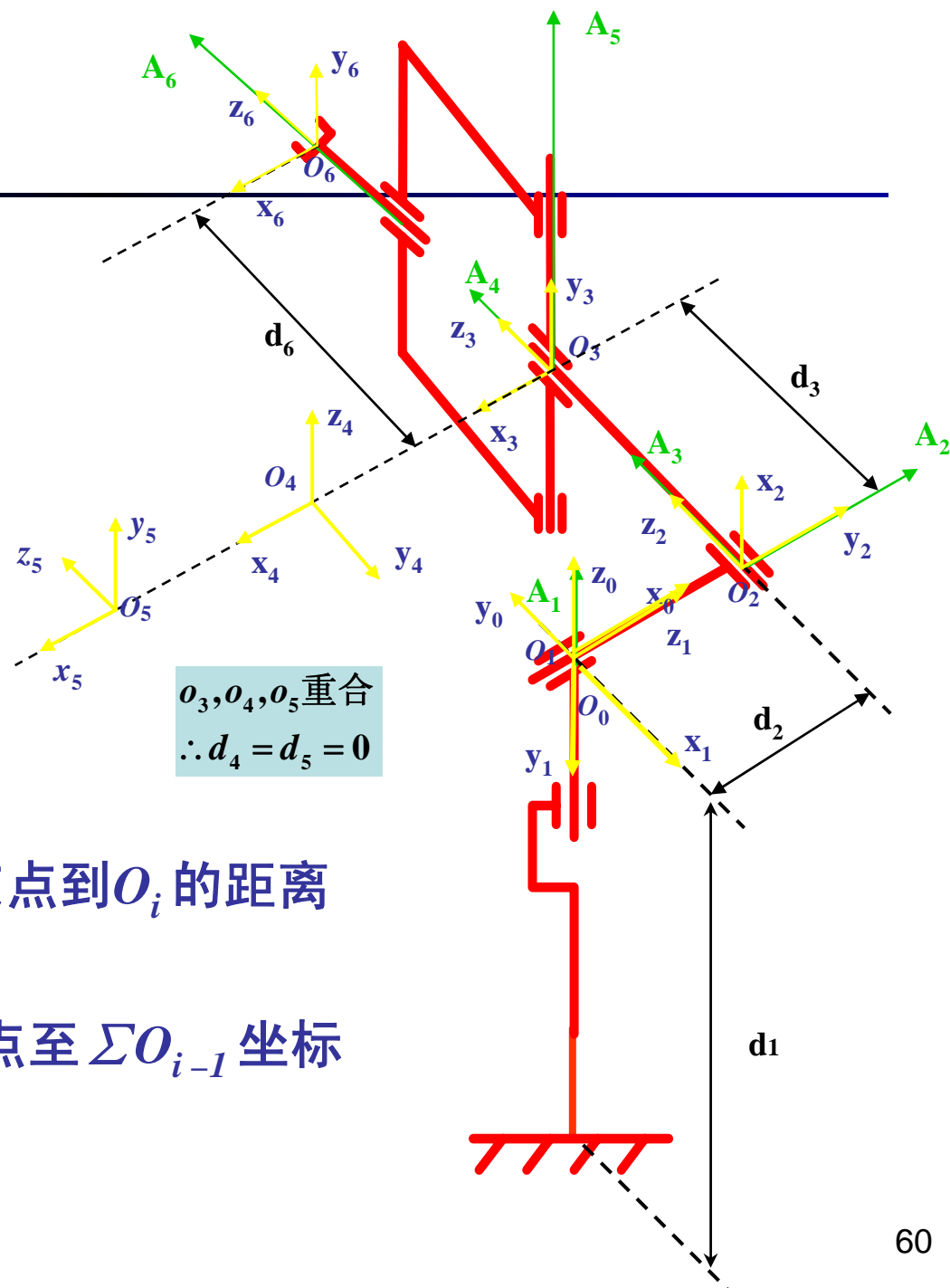
➤ y_i 轴: 按右手定则

l_i — 沿 x_i 轴, z_{i-1} 轴与 x_i 轴交点到 O_i 的距离

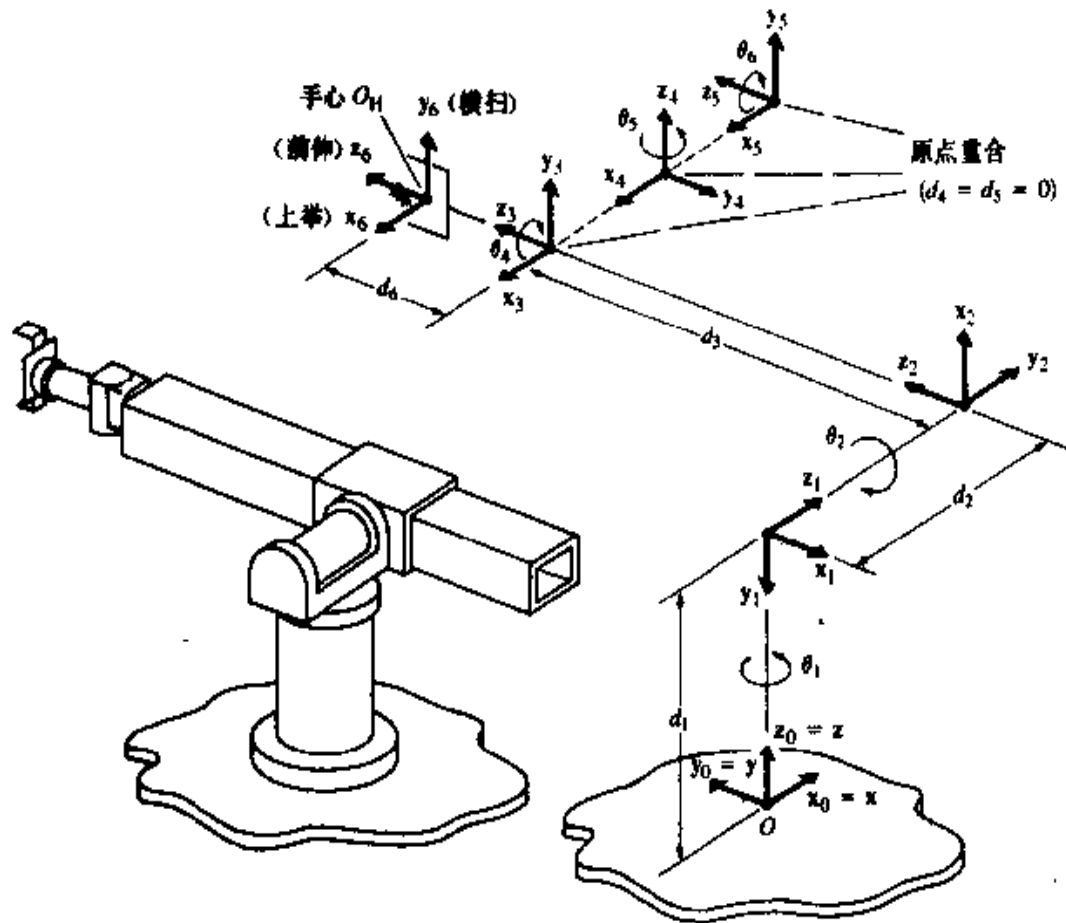
α_i — 绕 x_i 轴, 由 z_{i-1} 转向 z_i

d_i — 沿 z_{i-1} 轴, z_{i-1} 轴和 x_i 交点至 ΣO_{i-1} 坐标系原点的距离

θ_i — 绕 z_{i-1} 轴, 由 x_{i-1} 转向 x_i



解:



Standford 机器人杆件参数

关节 i	转角 θ_i	扭角 α_i	杆长 l_i	距离 d_i
1	θ_1	-90°	0	0
2	θ_2	90°	0	d_2
3	0	0°	0	d_3
4	θ_4	-90°	0	0
5	θ_5	90°	0	0
6	θ_6	0°	0	d_6

$${}^0A_1 = Rot(z_0, \theta_1)Rot(x_1, \alpha_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = Rot(z_1, \theta_2)Trans(0, 0, d_2)Rot(x_2, \alpha_2) = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = Trans(0, 0, d_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中 : $c_1 = \cos \theta_1, s_1 = \sin \theta_1$

$c_2 = \cos \theta_2, s_2 = \sin \theta_2$

$${}^3A_4 = Rot(z_3, \theta_4) Rot(x_4, \alpha_4) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & \mathbf{c}_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4A_5 = Rot(z_4, \theta_5) Rot(x_5, \alpha_5) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -\mathbf{c}_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5A_6 = Rot(z_5, \theta_6) Trans(0, 0, d_6) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & \mathbf{c}_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以standford机器人运动学方程为

$${}^0T_6 = T_6 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6$$

若令 $T_6 = [n \quad o \quad a \quad p] =$

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将前面求得的A
矩阵代入方程右
边，可得

$${}^0T_6 = T_6 = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} n_x = c_1 [c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] - s_1(s_4c_5c_6 + c_4c_6) \\ n_y = s_1 [c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] + c_1(s_4c_5c_6 + c_4c_6) \\ n_z = -s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_2s_5c_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} o_x = c_1 [-c_2(c_4c_5s_6 + s_4s_6) + s_2s_5s_6] - s_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) \\ o_y = s_1 [-c_2(c_4c_5s_6 + s_4s_6) + s_2s_5s_6] + c_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) \\ o_z = s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) - s_1s_4s_5 \\ a_y = s_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + c_1s_4s_5 \\ a_z = -s_2c_4s_5 + c_2c_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_x = c_1 [c_2c_4s_5d_6 - s_2(c_5d_6 - d_3)] - s_1(s_4s_5d_6 + d_2) \\ p_y = s_1 [c_2c_4s_5d_6 - s_2(c_5d_6 - d_3)] + c_1(s_4s_5d_6 + d_2) \\ p_z = -[s_2c_4s_5d_6 + c_2(c_5d_6 - d_3)] \end{cases}$$

特别地，当 $d_6 = 0$ 时，其方向矢量不变，位置矢量变为

$$p_x = c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2$$

$$p_y = s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2$$

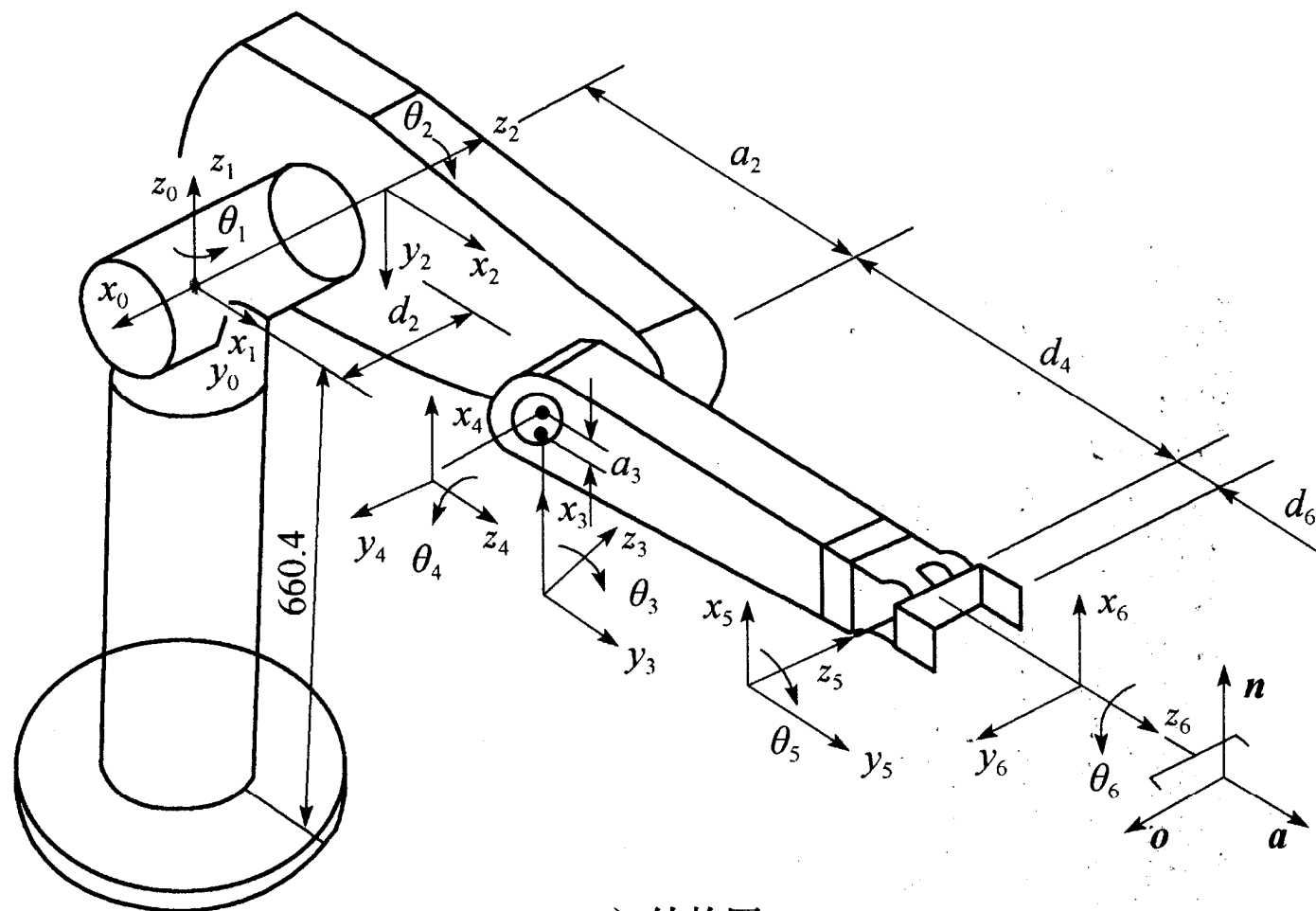
$$p_z = c_2 d_3$$

例如当 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 90^\circ$

$$d_2 = 100mm, d_3 = 300mm, d_6 = 50mm$$

求该机器人手部位姿？

PUMA560机器人正向运动学分析



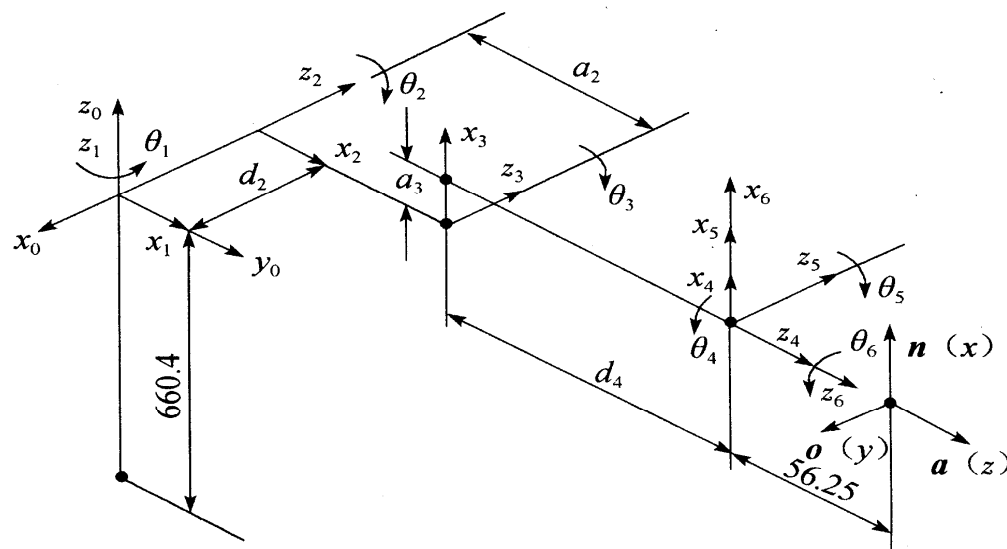
a) 结构图

PUMA560机器人正向运动学分析

解：PUMA560为6R型机器人。建立起D-H坐标系如图a)所示，并确定其杆件参数如下表所示。

PUMA560 机器人杆件参数

关节 i	转角 θ_i	扭角 α_i	杆长 a_i	距离 d_i	转角范围
1	θ_1	0°	0	0	$-160^\circ \sim 160^\circ$
2	θ_2	-90°	0	d_2	$-225^\circ \sim 45^\circ$
3	θ_3	0°	a_2	0	$-45^\circ \sim 225^\circ$
4	θ_4	-90°	a_3	d_4	$-110^\circ \sim 170^\circ$
5	θ_5	90°	0	0	$-100^\circ \sim 100^\circ$
6	θ_6	-90°	0	0	$-266^\circ \sim 266^\circ$



b) 坐标图

式中： $c_1 = \cos \theta_1, s_1 = \sin \theta_1$

$c_2 = \cos \theta_2, s_2 = \sin \theta_2$

求得各连杆的A矩阵为：

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\alpha_5 = 90^\circ)$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s_4 & -c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\alpha_4 = -90^\circ)$

所以PUMA560机器人运动学方程为

将前面求得的A
矩阵代入方程右
边，可得：

$$\begin{cases} n_x = c_1 [c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\ n_y = s_1 [c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\ n_z = -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} o_x = c_1 [-c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] + s_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6) \\ o_y = s_1 [-c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4s_6) + s_{23}s_5s_6] - c_1(-s_4c_5c_6 + c_4c_6) \\ o_z = s_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_{23}s_5s_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = -c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - s_1s_4s_5 \\ a_y = -s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + c_1s_4s_5 \\ a_z = s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \end{cases}$$

式中： $c_{23} = \cos(\theta_2 + \theta_3)$
 $= c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_2 s\theta_3$
 $s_{23} = \sin(\theta_2 + \theta_3)$
 $= c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_2 c\theta_3$

$$\begin{cases} p_x = c_1 [a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] - d_2s_1 \\ p_y = s_1 [a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] + d_2c_1 \\ p_z = -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23} \end{cases}$$

PUMA560机器人正向运动学分析

为了验证所求T6的正确性，可以计算当

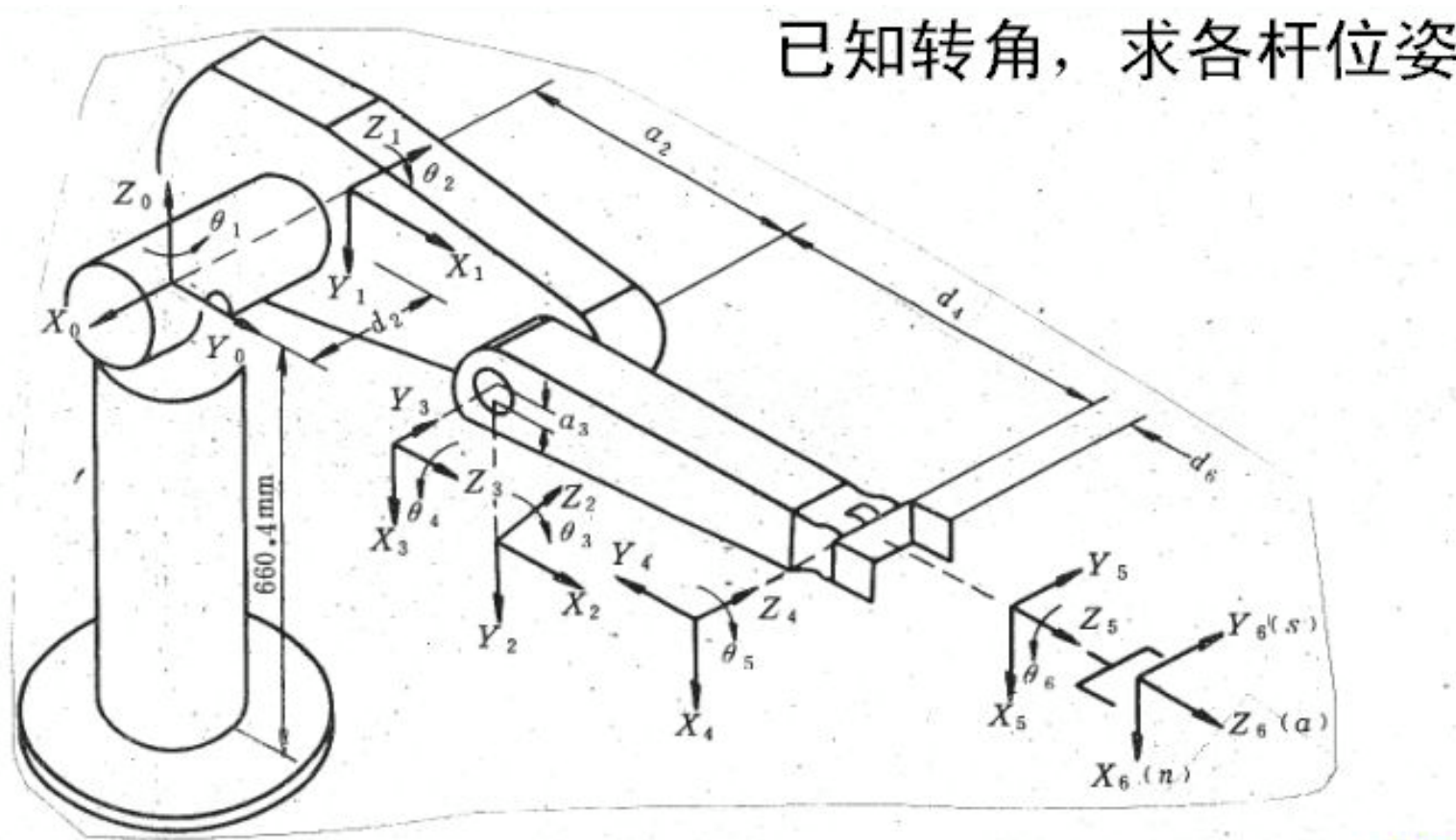
$$\theta_1 = 90^\circ, \theta_2 = 0^\circ, \theta_3 = -90^\circ, \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0^\circ$$

时（图示情况），机器人手部位姿变换矩阵为

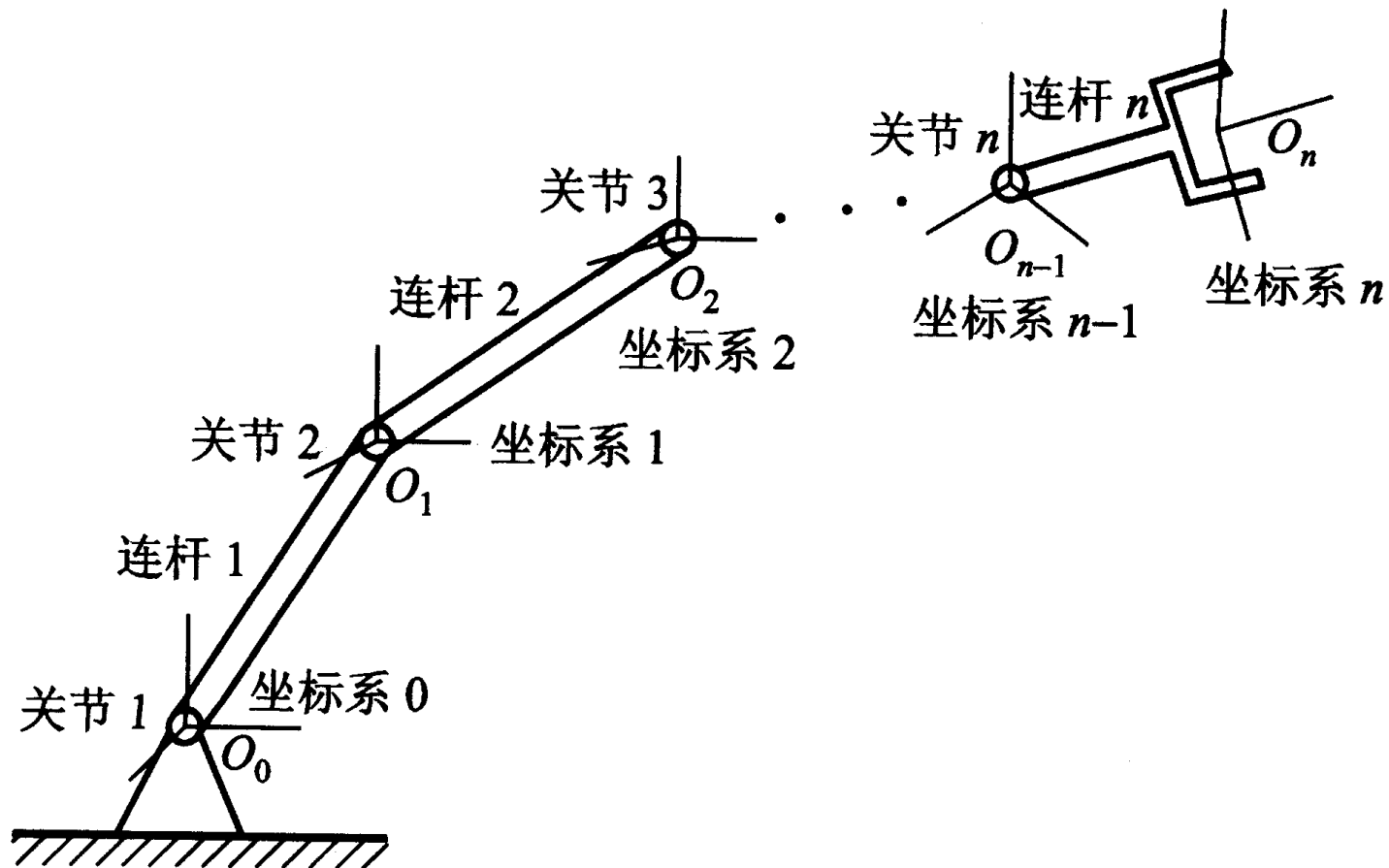
$$T_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -d_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 + d_4 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

与图示情况一致。

此例坐标系的建立不太符合前述串联机器人坐标形式，也可以按照一般情况建立其**D-H**坐标系如下图。请大家自行分析和求解其运动学方程。



机器人关节坐标系标号的分配



3.5 机器人末端操作器位姿的其它描述方法

- 用矩阵表示刚体的转动简化了许多运算，但它需要**9个元素**来完全描述旋转刚体的姿态，因此矩阵并不直接得出一组完备的广义坐标。
- 一组广义坐标应能描述转动刚体相对于参考坐标系的方向，被称为**欧拉角**的三个角度， ϕ 、 θ 、 ψ 就是这种广义坐标。
- 有几种不同的欧拉角表示方法，它们均可描述刚体相对于固定参考系的姿态。三种最常见的欧拉角类型列在表中

3种最常见的欧拉角类型

	第1步	第2步	第3步
类型1	绕z轴转 ϕ 角	绕新的x轴 (x' , 即 ou' 轴) 转 θ 角	再绕新的z轴 (z'' , 即 ow'' 轴) 转 ψ 角
类型2	绕z轴转 ϕ 角	绕新的y轴 (y' , 即 ov' 轴) 转 θ 角	再绕新的z轴 (z'' , 即 ow'' 轴) 转 ψ 角
类型3	绕x轴转 ψ 角	绕y轴转 θ 角	绕z轴转 ϕ 角

注意：

前两者的后两次转动都是绕**动坐标系**的运动，类型3的转动都是绕**原坐标系**的运动。

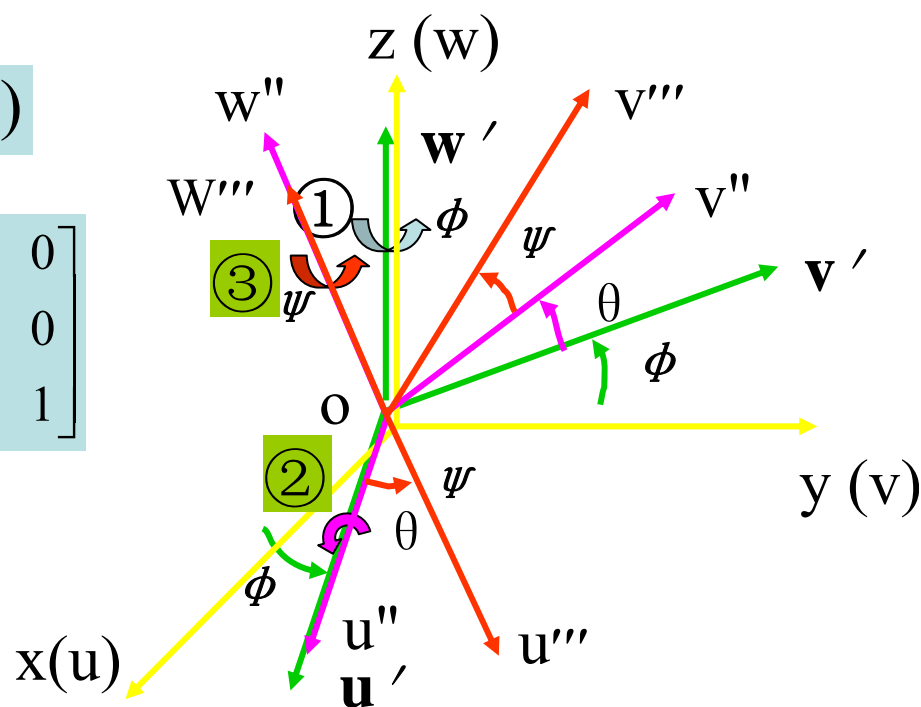
类型1 () : 表示法通常用于陀螺运动

变换矩阵为右乘形式:

$$R = Rot(z, \phi) Rot(u', \theta) Rot(w'', \psi)$$

$$= \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi & -c\phi s\psi - s\phi c\theta c\psi & s\phi s\theta \\ s\phi c\psi + c\phi c\theta s\psi & -s\phi s\psi + c\phi c\theta c\psi & -c\phi s\theta \\ s\theta s\psi & s\theta c\psi & c\theta \end{bmatrix}$$



类型2 () : 所得的转动矩阵也是右乘

$$R = Rot(z, \phi) Rot(v', \theta) Rot(w'', \psi)$$

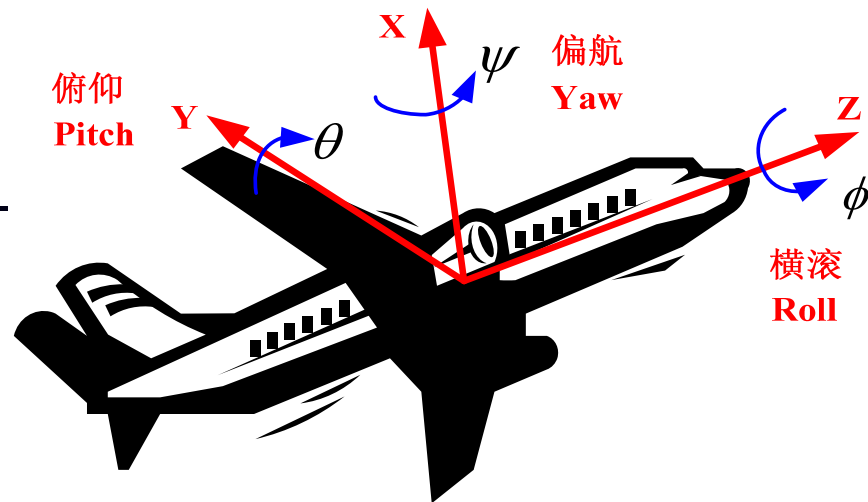
$$= \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta \\ s\phi c\theta c\psi + c\phi s\psi & -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} & & & p_x \\ & R & & p_y \\ & & & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

类型3 () : RPY角

一般称此转动的欧拉角为横滚、俯仰和偏航角（RPY角），这种形式主要用于航空和航海工程中分析飞行器和船只的运动，其旋转矩阵为：



$$\begin{aligned} R &= Rot(z, \phi) \quad Rot(y, \theta) \quad Rot(x, \psi) \\ &= \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi \\ 0 & s\psi & c\psi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\phi c\theta & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ s\phi c\theta & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

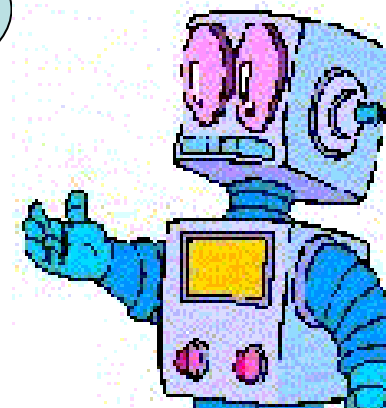
3.6 运动学逆问题

- 逆运动学的定义
- 逆运动学解的存在性
- 逆运动学的可解性
- 逆运动学的多解性（剔除办法）
- 逆运动学解法（数值解、解析解）

运动学逆问题

How do I put my hand here?

Inverse Kinematics:
Choose these angles!



3.6 运动学逆问题

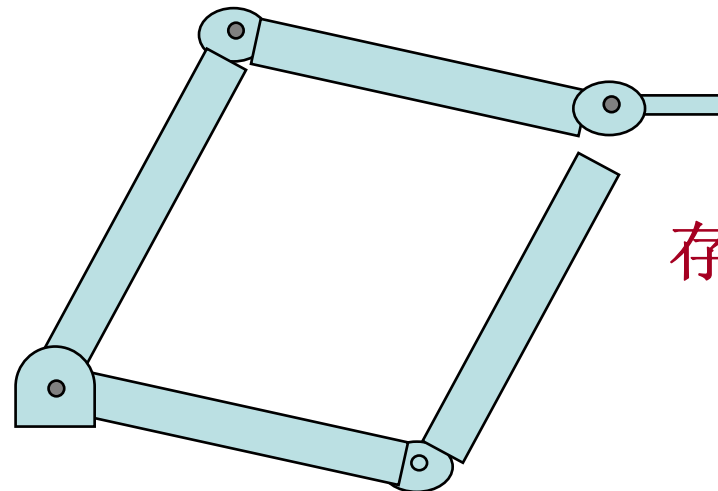
- **正运动学问题:** 已知关节角度或位移, 计算末端操作手的对应位姿.
- **逆运动学问题:** 已知末端操作手的位姿, 求解对应的关节变量.
- **为什么逆运动学问题更困难?**
 - 可能存在多解或无解
 - 通常需多次求解非线性超越方程

$$T_6 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6$$

3.6 运动学逆问题

1. 解的存在性

- 目标点应位于工作空间内
- 工作空间的计算通常较困难，通过机器人结构设计时的考虑可以简化
- 可能存在多解，如何选择最合适的解？

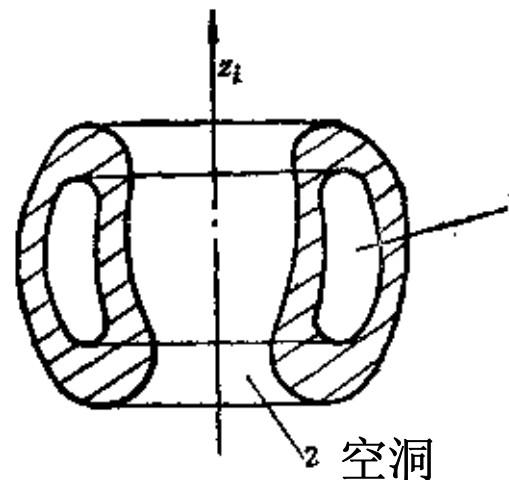


存在双解!

3.6 运动学逆问题

2. 工作空间

- **工作空间**: 末端操作手可以到达的空间位置集合。
- **如何获得工作空间**: 利用正运动学模型, 改变关节变量值。
- **灵活空间**: 末端操作手可以以任何姿态到达的空间位置集合。
- **可达空间**: 末端操作手可以至少以一个姿态到达的空间位置集合。



- **空洞**: 在 z_i 轴周围, 参考点 P_n 沿 z 的全长均不能达到的空间。
- **空腔**: 参考点不能达到的被完全封闭在工作空间之内的空间。

3.6 运动学逆问题

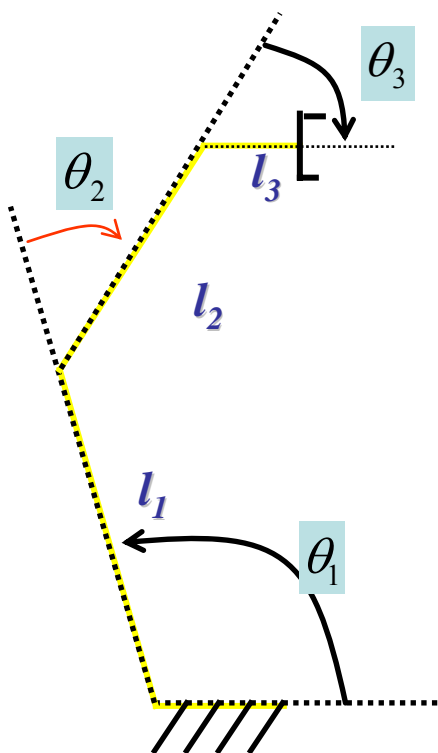
示例：平面 3 连杆
机器人

$$x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

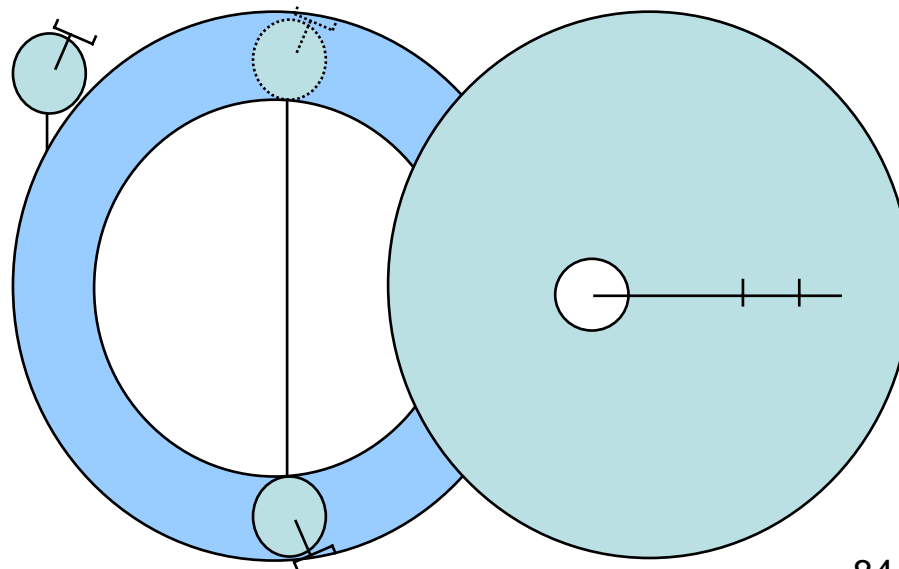
$$l_1 > l_2 > l_3, \quad l_1 > l_2 + l_3$$



如何确定可达空间? 首先, 令 θ_3 变化

然后 θ_2 变化

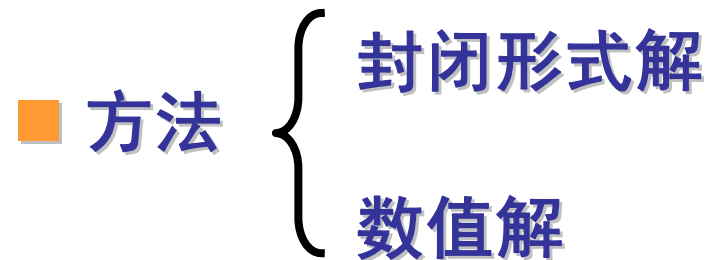
最终, 变化 θ_1



3.6 运动学逆问题

3.求解方法

- 如果各关节可用某算法获得，一个机械手是有解的. 算法应包含所有可能解.



- 我们对封闭形式的解法更感兴趣

- 代数方法
- 几何方法

3.6 运动学逆问题

4. 运动学逆问题的可解性条件

■ 对于给定的机器人，能否求得它的运动学逆解的解析式（也叫封闭解），是机器人的可解性问题。

■ 可解性的重要结论是：

- 所有具有转动和移动关节的系统，在一个单一串联链中总共有6个（或小于6个）自由度时，是可解的，其通解一般是数值解，它不是解析表达式，而是利用数值迭代原理求解，它的计算量要比解析解大。
- 但在某些特殊情况下，如若干个关节轴线相交或多个关节轴线的扭角等于 0° 或 90° 的情况下，具有6个自由度的机器人可得到解析解。
- 为使机器人有解析解，一般设计时，使工业机器人足够简单，尽量满足这些特殊条件。

3.6 运动学逆问题

5. 运动学逆问题的多解性

■ 机器人运动学问题为解三角方程，解反三角函数方程时会产生多解。显然对于真实的机器人，只有一组解与实际情况相对应，因此必须作出判断，以选择合适的解。

➤ 通常采用如下方法剔除多余解：

(1) 根据关节运动空间确定合适的解。例如求得机器人某关节角的两个解为

$$\theta_{i1} = 40^{\circ} \quad \theta_{i2} = 40^{\circ} + 180^{\circ} = 220^{\circ}$$

若该关节运动空间为 $\pm 100^{\circ}$ ，则应选 $\theta_i = 40^{\circ}$ 。

3.6 运动学逆问题

5. 运动学逆问题的多解性

(2) 选择一个与前一采样时间最接近的解，例如：

$$\theta_{i1} = 40^{\circ} \quad \theta_{i2} = 40^{\circ} + 180^{\circ} = 220^{\circ}$$

若该关节运动空间为 $\pm 250^{\circ}$ ，且 $\theta_{i-1} = 160^{\circ}$ ，则应选

$$\theta_i = 220^{\circ}$$

(3) 根据避障要求选择合适的解

(4) 逐级剔除多余解

对于具有 n 个关节的机器人，其全部解将构成树形结构。为简化起见，应逐级剔除多余解。这样可以避免在树形解中选择合适的解。

运动学逆问题解法

$$T_6 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6$$

Paul 等人提出的方法(1981年, 解析解):

- 用未知的逆变换逐次左乘, 由乘得的矩阵方程的元素决定未知数, 即用逆变换把一个未知数由矩阵方程的右边移到左边
- 考察方程式左、右端 (为常数) 两端对应元素相等, 以产生一个有效方程式。
- 然后求这个三角函数方程式, 以求解未知数
- 把下一个未知数移到左边
- 重复上述过程, 直到解出所有解
- 无法由数种可能解中直接得出合适的解, 需要通过人为的选择

Paul 等人提出的方法

$$T_6 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6$$

$$T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$({}^0A_1)^{-1} T_6 = {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 \rightarrow q_1$$

$$({}^1A_2)^{-1} ({}^0A_1)^{-1} T_6 = {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 \rightarrow q_2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

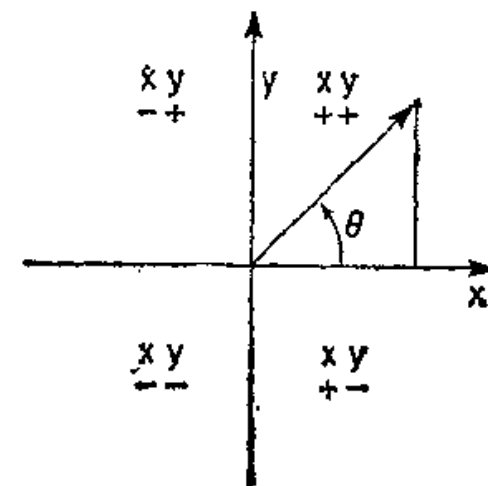
$$({}^4A_5)^{-1} ({}^3A_4)^{-1} ({}^2A_3)^{-1} ({}^1A_2)^{-1} ({}^0A_1)^{-1} T_6 = {}^5A_6 \rightarrow q_5$$

$$({}^5A_6)^{-1} \dots ({}^0A_1)^{-1} T_6 = E \rightarrow q_6$$

不能用反余弦 (arccos) 来求解关节角，因为这样求解不仅关节角的符号不确定 ($\cos \theta = \cos(-\theta)$)，而且角的精度也难以保证 ($d(\cos \theta) / d\theta|_{\theta=0, \pm 180^\circ} = 0$)。

因此，通常用反正切函数 $\arctan(y, x)$ 来确定 θ 值，它可把 $\arctan(y / x)$ 校正到适当的象限，其定义为：

$$\theta = \arctan(y, x) = \begin{cases} 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ & \text{x, y均正} \\ 90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ & \text{x负, y正} \\ -180^\circ \leq \theta \leq -90^\circ & \text{x, y均负} \\ -90^\circ \leq \theta \leq 0^\circ & \text{x正, y负} \end{cases}$$



例：欧拉角第一种类型，求逆

	步1	步2	步3
类型1	绕OZ轴转 ϕ 角	绕当前OU' 轴转 θ 角	绕当前OW'' 轴转 ψ 角

类型1 ()：表示法通常用于陀螺运动

$$R = Rot(z, \phi) Rot(u', \theta) Rot(w'', \psi)$$

$$= \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi & -c\phi s\psi - s\phi c\theta c\psi & s\phi s\theta \\ s\phi c\psi + c\phi c\theta s\psi & -s\phi s\psi + c\phi c\theta c\psi & -c\phi s\theta \\ s\theta s\psi & s\theta c\psi & c\theta \end{bmatrix}$$

解：

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

用 $Rot^{-1}(z, \phi)$ 左乘式 (1) 的两边，可使一个未知数 ϕ 在方程的左边，而另两个未知数在右边，即得：

$$\begin{bmatrix} c\phi & s\phi & 0 \\ -s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{或} \begin{bmatrix} c\phi n_x + s\phi n_y & c\phi o_x + s\phi o_y & c\phi a_x + s\phi a_y \\ -s\phi n_x + c\phi n_y & -s\phi o_x + c\phi o_y & -s\phi a_x + c\phi a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ c\theta s\psi & c\theta c\psi & -s\theta \\ s\theta s\psi & s\theta c\psi & c\theta \end{bmatrix}$$

由式中矩阵（1，3）元素相等，有

$$c\phi a_x + s\phi a_y = 0$$

$$\therefore \phi = \arctan \left[\frac{a_x}{-a_y} \right] = \arctan(a_x, -a_y)$$

按照前面的定义，确定 ϕ 所在象限。

由式中矩阵（1，1）元素和（1，2）元素分别相等，有

$$\begin{cases} c\psi = c\phi n_x + s\phi n_y \\ -s\psi = c\phi o_x + s\phi o_y \end{cases}$$

$$\therefore \psi = \arctan \left[\frac{-c\phi o_x - s\phi o_y}{c\phi n_x + s\phi n_y} \right] = \arctan(-c\phi o_x - s\phi o_y, c\phi n_x + s\phi n_y)$$

由矩阵中（2，3）和（3，3）元素分别相等，有

$$\begin{cases} -s\theta = -s\phi a_x + c\phi a_y \\ c\theta = a_z \end{cases}$$
$$\therefore \theta = \arctan\left(\frac{s\phi a_x - c\phi a_y}{a_z}\right) = \arctan(s\phi a_x - c\phi a_y, a_z)$$

也可以用右乘的方法求解。用左乘还是右乘，取决于使用者的直觉。

总体来讲，正运动学求解可得唯一解；逆运动学求解可能有多值解，可以靠分子、分母的符号来决定象限，也可以根据结构的约束条件剔除不合要求的解，需要具体分析。

Stanford机器人运动学逆问题求解

已知斯坦福机器人运动学方程为

$$T_6 = {}^0T_6 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdots {}^5A_6$$

(1) 求 θ_1

用 ${}^0A_1^{-1}$ 左乘上式，得

$${}^0A_1^{-1}T_6 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1A_2 \cdot {}^3A_3 \cdots {}^5A_6$$

即

$$\begin{bmatrix} n_x c_1 + n_y s_1 & o_x c_1 + o_y s_1 & a_x c_1 + a_y s_1 & p_x c_1 + p_y s_1 \\ -n_z & -o_z & -a_z & -p_z \\ -n_x s_1 + n_y c_1 & -o_x s_1 + o_y c_1 & -a_x s_1 + a_y c_1 & -p_x s_1 + p_y c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1T_6$$

而

$${}^1T_6 = \begin{bmatrix} c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6 & & & & & \\ s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) + c_2s_5c_6 & & & & & \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ -c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6 & c_2c_4s_5 + s_2c_5 & s_2d_3 & & & \\ -s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) - c_2s_5s_6 & s_2c_4s_5 - c_2c_5 & -c_2d_3 & & & \\ -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & d_2 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{bmatrix}$$

由两端矩阵对应元素相等可得：

$$-p_x s_1 + p_y c_1 = d_2$$

作三角变换:

$$p_x = r \cos \phi$$

$$p_y = r \sin \phi$$

式中:

$$r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

$$\phi = \arctan \left(\frac{p_y}{p_x} \right)$$

得到:

$$\sin \phi \cos \theta_1 - \cos \phi \sin \theta_1 = d_2 / r$$

即有:

$$\sin(\phi - \theta_1) = d_2 / r \quad (0 < \phi - \theta_1 < \pi)$$

$$\cos(\phi - \theta_1) = \pm \sqrt{1 - (d_2 / r)^2}$$

$$\theta_1 = \arctan \frac{p_y}{p_x} - \arctan \frac{d_2 / r}{\pm \sqrt{1 - (d_2 / r)^2}}$$

(2) 求 θ_2

由矩阵中(1, 4)和 (2, 4) 元素对应相等, 得:

$$\begin{aligned} p_x c_1 + p_y s_1 &= s_2 d_3 \\ -p_z &= -c_2 d_3 \end{aligned}$$

$$\theta_2 = \arctan \frac{p_x c_1 + p_y s_1}{p_z}$$

(3) 求 θ_3

在standford机器人中, $\theta_3 = d_3$

所以根据以上式子, 可得

$$\theta_3 = d_3 = s_2(p_x c_1 + p_y s_1) + c_2 p_z$$

(4) 求 θ_4

由于 ${}^3T_6 = {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6$ ，所以 ${}^3A_4^{-1} {}^3T_6 = {}^4A_5 \cdot {}^5A_6$

两边分别展开，得

$$\begin{bmatrix} f_{41}(n) & f_{41}(o) & f_{41}(a) & 0 \\ f_{42}(n) & f_{42}(o) & f_{42}(a) & 0 \\ f_{43}(n) & f_{43}(o) & f_{43}(a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & s_5 & 0 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & -c_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中第三列为：

$$f_{41}(a) = c_4 [c_2(c_1 a_x + s_1 a_y) - s_2 a_z] + s_4(-s_1 a_x + c_1 a_y)$$

$$f_{42}(a) = -s_2(c_1 a_x + s_1 a_y) - c_2 a_z$$

$$f_{43}(a) = -s_4 [c_2(c_1 a_x + s_1 a_y) - s_2 a_z] + c_4(-s_1 a_x + c_1 a_y)$$

其中令矩阵中 (3,3) 元素分别相等, 可得对于 θ_4 的方程

$$-s_4 \left[c_2(c_1 a_x + s_1 a_y) - s_2 a_z \right] + c_4(-s_1 a_x + c_1 a_y) = 0$$

可得两个解

$$\theta_4 = \arctan \frac{-s_1 a_x + c_1 a_y}{c_2(c_1 a_x + s_1 a_y) - s_2 a_z}$$

及

$$\theta_4 = \arctan \frac{-s_1 a_x + c_1 a_y}{c_2(c_1 a_x + s_1 a_y) - s_2 a_z} + 180^\circ$$

这相应于操作手的两个位形。当 $S_6=0$, $\theta_6=0$ 时, 由于关节 4 和关节 6 的轴线共线, 操作手出现退化。在这种状态中, 仅 θ_4 和 θ_6 之和有意义。如果 θ_6 为零, θ_4 值可以任意选择, 其当前值常加指定。

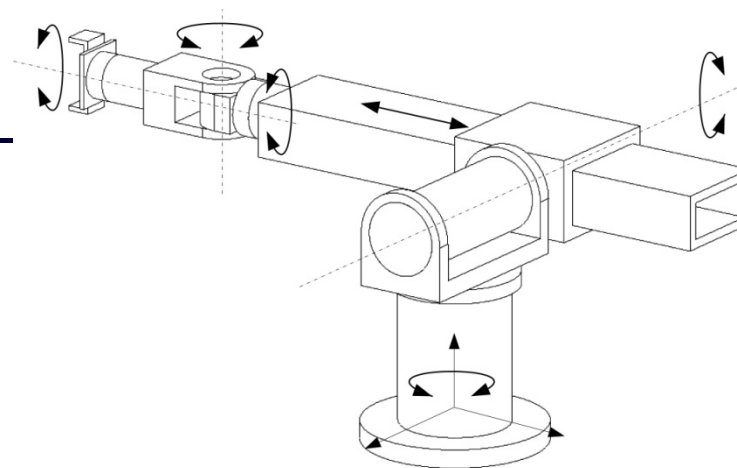
(5) 求 θ_5

令矩阵中 (1,3) 元素和 (2,3) 元素分别相等, 可得

$$\begin{aligned} c_4 [c_2(c_1 a_x + s_1 a_y) - s_2 a_z] + s_4 (-s_1 a_x + c_1 a_y) &= s_5 \\ s_2(c_1 a_x + s_1 a_y) + c_2 a_z &= c_5 \end{aligned}$$

所以

$$\theta_5 = \arctan \frac{c_4 [c_2(c_1 a_x + s_1 a_y) - s_2 a_z] + s_4 (-s_1 a_x + c_1 a_y)}{s_2(c_1 a_x + s_1 a_y) + c_2 a_z}$$



(6) 求 θ_6

采用方程 ${}^4A_5^{-1} {}^4T_6 = {}^5A_6$

将等式两边分别展开，并取其 (1,2) 元素和 (2, 2) 元素分别相等，有

$$\begin{aligned} -c_5 \left\{ c_4 \left[c_2(c_1o_x + s_1o_y) - s_2o_z \right] + s_4(-s_1o_x + c_1o_y) \right\} &= s_6 \\ -s_4 \left[c_2(c_1o_x + s_1o_y) - s_2o_z \right] + c_4(-s_1o_x + c_1o_y) &= c_6 \end{aligned}$$

所以

$$\theta_6 = \arctan \frac{-c_5 \left\{ c_4 \left[c_2(c_1o_x + s_1o_y) - s_2o_z \right] + s_4(-s_1o_x + c_1o_y) \right\}}{-s_4 \left[c_2(c_1o_x + s_1o_y) - s_2o_z \right] + c_4(-s_1o_x + c_1o_y)}$$

至此， $\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ 全部求出。分离变量法



3.7 运动学方程的其它描述

如果用广义关节矢量 $q = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]^T$ 构成一个n自由度机器人的**关节空间**，其手部的位姿用一个6维列矢量表示：

$$X = [x \quad y \quad z \quad \phi_x \quad \phi_y \quad \phi_z]^T$$

其中前三个元素表示位置，后三个元素表示姿态，它们都是n个关节变量的函数，可写为

$$X = X(q)$$

这就是用角度设定法表示机器人手部位姿的机器人运动学方程。它与 $T = [n \quad o \quad a \quad p]$ 所描述的手部姿态，仅仅描述方法不同而已。



主要参考文献:

- (1) 柳洪义, 宋伟刚 编著, 《机器人技术基础》, 冶金工业出版社, 2002
- (2) [美] John J. Craig 著, 贲远超译, 机器人学导论, 机械工业出版社, 2006.6
- (3) [美] 付京逊 等著, 机器人学, 中国科学技术出版社, 1989
- (4) 蔡自兴著, 机器人学, 清华大学出版社, 2000
- (5) 刘极峰, 易际明主编, 机器人技术基础, 高等教育出版社, 2006

思考题:

- 1、D-H变换的过程?
- 2、机器人坐标系D-H法的建立方法?
- 3、机器人正运动学方程建立步骤和方法?
- 4、机器人逆运动学方程求解方法?
- 5、机器人逆运动学求解什么时候无解, 什么时候多解?

本章习题

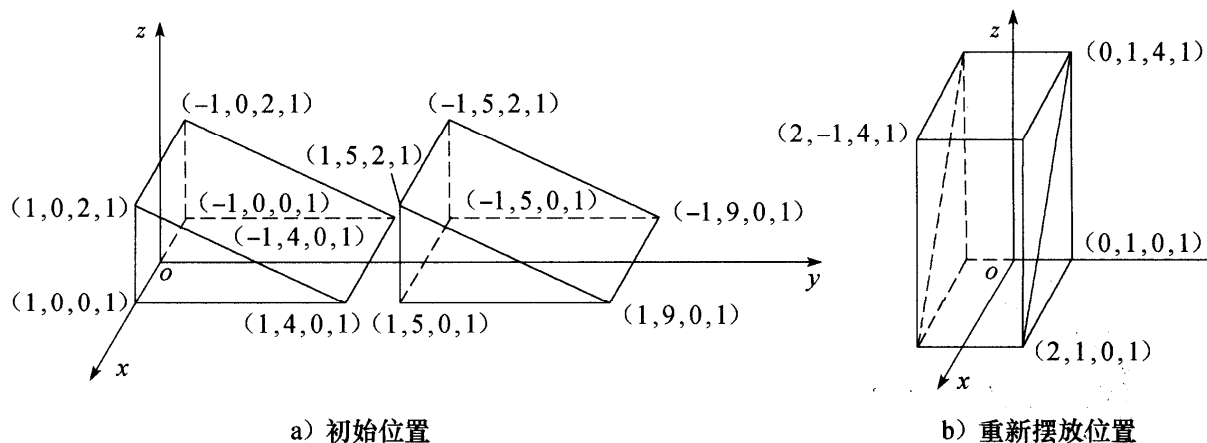
1. 初始时坐标系{B}与参考系{A}重合，现将{B}先绕 z_B 轴旋转 θ 角，然后再绕 x_B 轴旋转 φ 角，求转动后的{B}对于{A}的旋转矩阵。

2. 下图a给出了摆放在坐标系中的两个相同的楔形物体。要求把它们重新摆放在图b所示位置。

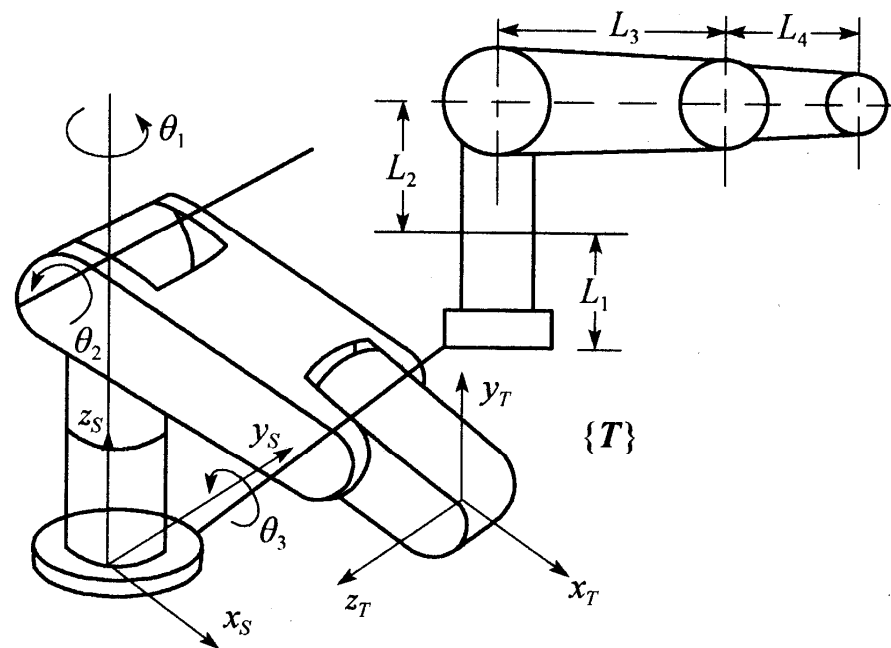
(1) 用数字值给出两个描述重新摆置的变换序列，每个变换表示沿某个轴平移或绕该轴旋转。在重置过程中，必须避免两楔形物体的碰撞。

(2) 作图说明每个从右至左的变换序列。

(3) 作图说明每个从左至右的变换序列。



3. 求出类型2和类型3欧拉角表达的正逆运动学方程的解。
4. 求PUMA560机器人的逆运动学方程的解。
5. 对于下图所示三自由度机械手，其关节1与关节2轴线相交，关节2与关节3轴线平行，各关节的正向转动角度如图标示，请建立该机械手的D-H坐标系，并求其变换矩阵 0A_1 ， 1A_2 ， 2A_3 。



本章结束！

