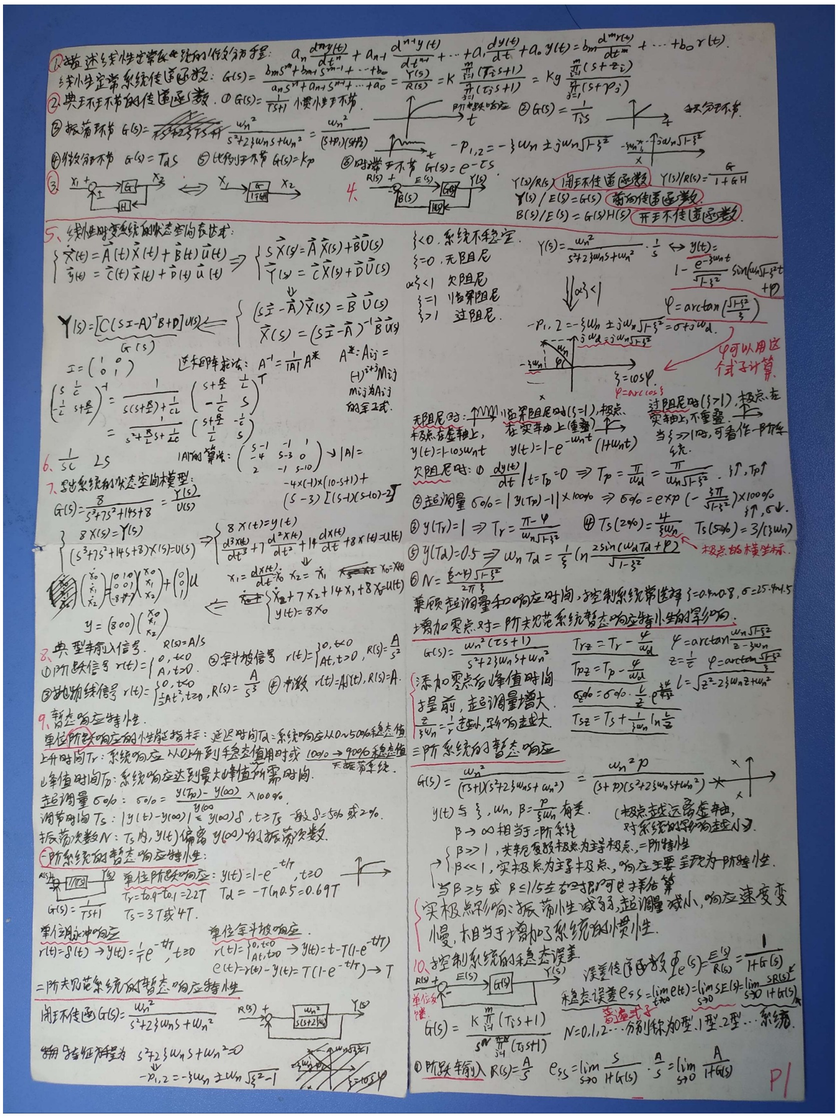
经典控制理论



①描述线性定常系统的微分方程：$a_n\frac{d^ny(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_m\frac{d^mr(t)}{dt^m}+\cdots+b_0r(t)$.

线性定常系统传递函数：$G(s)=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}=\frac{Y(s)}{R(s)}=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(T_is+1)}{\prod_{j=1}^{n}(\tau_js+1)}=K_g\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$

②典型环节的传递函数. ① $G(s)=\frac{1}{Ts+1}$ 惯性环节. 阶跃响应 ② $G(s)=\frac{1}{T_is}$ 积分环节.

③振荡环节 $G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2}{(s+p_1)(s+p_2)}$　$-p_{1,2}=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

④微分环节 $G(s)=T_ds$　⑤比例环节 $G(s)=K_p$　⑥时滞环节 $G(s)=e^{-\tau s}$

3. $x_1 \to G,\ H \to x_2 \iff x_1 \to \frac{G}{1\mp GH} \to x_2$

4. $Y(s)/R(s)$ 闭环传递函数 $Y(s)/R(s)=\frac{G}{1+GH}$

$Y(s)/E(s)=G(s)$ 前向传递函数.

$B(s)/E(s)=G(s)H(s)$ 开环传递函数.

5、线性时变系统的状态空间表达式：

$\begin{cases}\dot{\vec{x}}(t)=\vec{A}(t)\vec{x}(t)+\vec{B}(t)\vec{u}(t)\\ \vec{y}(t)=\vec{C}(t)\vec{x}(t)+\vec{D}(t)\vec{u}(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}s\vec{X}(s)=\vec{A}\vec{X}(s)+\vec{B}\vec{U}(s)\\ \vec{Y}(s)=\vec{C}\vec{X}(s)+\vec{D}\vec{U}(s)\end{cases}$

$\begin{cases}(sI-\vec{A})\vec{X}(s)=\vec{B}\vec{U}(s)\\ \vec{X}(s)=(sI-\vec{A})^{-1}\vec{B}\vec{U}(s)\end{cases}$

$Y(s)=[\underbrace{C(sI-A)^{-1}B+D}_{G(s)}]U(s)$

$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$　逆矩阵求法：$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$　$A^*:A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，$M_{ij}$为$A_{ij}$的余子式.

$\begin{pmatrix}s&\frac{1}{C}\\-\frac{1}{L}&s+\frac{R}{L}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{s(s+\frac{R}{L})+\frac{1}{CL}}\begin{pmatrix}s+\frac{R}{L}&\frac{1}{L}\\-\frac{1}{C}&s\end{pmatrix}^T=\frac{1}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}\begin{pmatrix}s+\frac{R}{L}&-\frac{1}{C}\\\frac{1}{L}&s\end{pmatrix}$

6. $\frac{1}{sC}$　Ls　|A|的算法：$\begin{pmatrix}s-1&-1&1\\-4&s-3&0\\2&-1&s-10\end{pmatrix}\to|A|=-4\times(-1)\times(10-s+1)+(s-3)[(s-1)(s-10)-2]$

7、写出系统的状态空间模型：$G(s)=\frac{8}{s^3+7s^2+14s+8}=\frac{Y(s)}{U(s)}$

$\begin{cases}8X(s)=Y(s)\\(s^3+7s^2+14s+8)X(s)=U(s)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8x(t)=y(t)\\\frac{d^3x(t)}{dt^3}+7\frac{d^2x(t)}{dt^2}+14\frac{dx(t)}{dt}+8x(t)=u(t)\end{cases}$

$x_1=\frac{dx(t)}{dt}=\dot{x}_0$　$x_2=\dot{x}_1$　$x_0=x(t)$

$\begin{cases}\dot{x}_2+7x_2+14x_1+8x_0=u(t)\\y(t)=8x_0\end{cases}$

$\begin{pmatrix}\dot{x}_0\\\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-8&-14&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u$

$y=(8\ 0\ 0)\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}$

8、典型输入信号. ①阶跃信号 $r(t)=\begin{cases}0,t<0\\A,t\geq0\end{cases}$ $R(s)=A/s$　②斜坡信号 $r(t)=\begin{cases}0,t<0\\At,t\geq0\end{cases}$，$R(s)=\frac{A}{s^2}$

③抛物线信号 $r(t)=\begin{cases}0,t<0\\\frac{1}{2}At^2,t\geq0\end{cases}$，$R(s)=\frac{A}{s^3}$　④冲激 $r(t)=A\delta(t)$，$R(s)=A$.

9、暂态响应特性.

单位阶跃响应的性能指标：延迟时间T_d=系统响应从0~50%稳态值

上升时间T_r：系统响应从0上升到稳态值用时或 10%→90%稳态值 无振荡系统.

峰值时间T_p：系统响应达到最大峰值所需时间.

超调量$\sigma\%$：$\sigma\%=\frac{y(T_p)-y(\infty)}{y(\infty)}\times100\%$.

调节时间T_s：$|y(t)-y(\infty)|\leq y(\infty)\delta$，$t\geq T_s$ 一般δ=5%或2%.

振荡次数N：T_s内，$y(t)$偏离$y(\infty)$的振荡次数.

一阶系统的暂态响应特性：

$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$　单位阶跃响应：$y(t)=1-e^{-t/T}$，$t\geq0$

$T_r=t_{0.9}-t_{0.1}=2.2T$　$T_d=-T\ln0.5=0.69T$

$T_s=3T$或$4T$.

单位脉冲响应 $r(t)=\delta(t)\to y(t)=\frac{1}{T}e^{-t/T}$，$t\geq0$

单位斜坡响应 $r(t)=\begin{cases}0,t<0\\At,t\geq0\end{cases}\to y(t)=t-T(1-e^{-t/T})$

$e(t)=r(t)-y(t)=T(1-e^{-t/T})\to T$

二阶典型系统的暂态响应特性

闭环传函 $G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2}$　$\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$

特征方程为 $s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2=0$

$-p_{1,2}=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$

$\xi<0$. 系统不稳定.

$\xi=0$. 无阻尼

$0<\xi<1$ 欠阻尼

$\xi=1$ 临界阻尼

$\xi>1$ 过阻尼.

$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}\leftrightarrow y(t)=1-\frac{e^{-\xi\omega_nt}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\varphi)$

$0<\xi<1$　$\varphi=\arctan(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi})$

$-p_{1,2}=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=\sigma\pm j\omega_d$.

$j\omega_d=j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$　$\xi=\cos\varphi$.　$\varphi=\arccos\xi$

φ可以用这个式子计算.

无阻尼时：极点在虚轴上，$y(t)=1-\cos\omega_nt$

临界阻尼时($\xi=1$)，极点在实轴上(重叠) $y(t)=1-e^{-\omega_nt}(1+\omega_nt)$

过阻尼时($\xi>1$)，极点在实轴上，不重叠. 当$\xi\gg1$时，可看作一阶系统.

欠阻尼时：① $\frac{dy(t)}{dt}|_{t=T_p}=0\Rightarrow T_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$. $\xi\uparrow$, $T_p\uparrow$

②超调量 $\sigma\%=|y(T_p)-1|\times100\%\Rightarrow\sigma\%=\exp(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}})\times100\%$　$\xi\uparrow$, $\sigma\downarrow$.

③ $y(T_r)=1\Rightarrow T_r=\frac{\pi-\varphi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$　④ $T_s(2\%)=\frac{4}{\xi\omega_n}$　$T_s(5\%)=3/(\xi\omega_n)$

极点的横坐标.

⑤ $y(T_d)=0.5\Rightarrow\omega_nT_d=\frac{1}{\xi}\ln\frac{2\sin(\omega_dT_d+\varphi)}{\sqrt{1-\xi^2}}$

⑥ $N=\frac{(2\sim4)\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi\xi}$

兼顾超调量和响应时间，控制系统常选择ξ=0.4~0.8，σ=25.4~1.5

增加零点对二阶典型系统暂态响应特性的影响.

$G(s)=\frac{\omega_n^2(\tau s+1)}{s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2}$　$T_{rz}=T_r-\frac{\psi}{\omega_d}$　$\psi=\arctan\frac{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{z-\xi\omega_n}$

$z=\frac{1}{\tau}$　$\varphi=\arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$

$T_{pz}=T_p-\frac{\psi}{\omega_d}$　$l=\sqrt{z^2-2\xi\omega_nz+\omega_n^2}$

$\sigma_z\%=\sigma\%\cdot\frac{l}{z}e^{\frac{\xi\psi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

$T_{sz}=T_s+\frac{1}{\xi\omega_n}\ln\frac{l}{z}$

添加零点后峰值时间提前，超调量增大. $\frac{z}{\xi\omega_n}=\frac{1}{r}$越小，影响越大.

三阶系统的暂态响应

$G(s)=\frac{\omega_n^2}{(\tau s+1)(s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2)}=\frac{\omega_n^2p}{(s+p)(s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2)}$

$y(t)$与ξ, ω_n, $\beta=\frac{p}{\xi\omega_n}$有关.　(极点越远离虚轴，对系统的影响越小)

$\beta\to\infty$相当于二阶系统

$\beta\gg1$，共轭复数极点为主导极点，二阶特性

$\beta\ll1$，实极点为主导极点，响应主要呈现为一阶特性.

当$\beta\geq5$或$\beta\leq1/5$左右时即可使用估算

实极点影响：振荡性减弱，超调量减小，响应速度变慢，相当于增加了系统的惯性.

10、控制系统的稳态误差

误差传递函数 $\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G(s)}$

单位负反馈.

稳态误差 $e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to0}sE(s)=\lim_{s\to0}\frac{sR(s)}{1+G(s)}$

普遍式子

$G(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(T_is+1)}{s^N\prod_{j=1}^{n-N}(T_js+1)}$　N=0,1,2…分别称为0型、1型、2型…系统.

①阶跃输入 $R(s)=\frac{A}{s}$　$e_{ss}=\lim_{s\to0}\frac{s}{1+G(s)}\cdot\frac{A}{s}=\lim_{s\to0}\frac{A}{1+G(s)}$

P1

静态位置系数 $K_p=\lim_{s\to0}G(s)=\lim_{s\to0}\frac{K}{s^N}$

稳态误差 $e_{ss}=A/(1+K_p)$

0型系统 $e_{ss}=\frac{A}{1+K}$ 1,2型系统 $e_{ss}=0$.

② 斜坡输入 $R(s)=A/s^2$

$e_{ss}=\lim_{s\to0}sE(s)=\lim_{s\to0}\frac{A}{sG(s)}$

$\lim_{s\to0}sG(s)=K_v=\lim_{s\to0}\frac{K}{s^{N-1}}\Rightarrow e_{ss}=\frac{A}{K_v}$

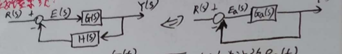
0型系统：$e_{ss}=\infty$ 1型 $e_{ss}=A/K$ 2型 $e_{ss}=0$.

③ 抛物线输入：$R(s)=A/s^3$.

$e_{ss}=A/K_a$ $K_a=\lim_{s\to0}\frac{K}{s^{N-2}}=\lim_{s\to0}s^2G(s)$ $\lim_{s\to0}\frac{A}{s^2G(s)}=e_{ss}$

0型，1型系统，$e_{ss}=\infty$ 2型 $e_{ss}=A/K$.

非单位反馈系统：



$G_a(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)-G(s)}$ 转化为讨论 $e_a(t)$.

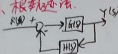
$E(s)=\cancel{Y(s)-R(s)}\ R(s)-Y(s)$

注：在求各种响应的稳态误差时，可能存在闭环系统极点在右半平面，至系统不稳定的情况。

相角条件：$\sum_{i=1}^{m}\angle(s+z_{0i})-\sum_{j=1}^{n}\angle(s+p_{0j})=\pm180^\circ(2k+1)$

幅值条件：$\prod_{i=1}^{m}|s+z_{0i}|/\prod_{j=1}^{n}|s+p_{0j}|=1/K_g$

11、根轨迹法.



$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$

开环增益.

特征方程为 $1+G(s)H(s)=0$. 开环传递函数 $G(s)H(s)=K_g\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_{0i})}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_{0j})}$

$1+K_g\frac{P(s)}{Q(s)}\Rightarrow 1+K_g\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_{0i})}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_{0j})}=0$

根轨迹法：根据开环传递函数，找出 K_g 由 $0\sim\infty$ 变化时，闭环系统特征根的轨迹，即上式 s 解。

$G(s)H(s)=-1\Rightarrow|G(s)H(s)|=1,\ \angle G(s)H(s)=\pm(2k+1)\pi,\ k=0,1,2\cdots$ 此时

$n>m$ 时，$n-m$ 个闭环极点趋于无穷远(终止)

$n<m$ 时，$m-n$ 个根轨迹起始于 $m-n$ 个开环无穷远极点.

绘制根轨迹基本规则：

1、根轨迹连续，对称于实轴 2、根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点； 3、实轴上根轨迹段右侧的开环零极点之和为奇数. ④ 根轨迹有 $|n-m|$ 条分支沿渐近线趋于(或始于)无穷远，这些渐近线的倾角 ϕ_A 及与实轴的交点 σ_A 分别为

$\phi_A=\frac{2k+1}{n-m}\pi,\ k=0,1,\cdots,|n-m|-1,$

$\sigma_A=\frac{\sum_{j=1}^{n}(-p_{0j})-\sum_{i=1}^{m}(-z_{0i})}{n-m}=-\frac{\sum_{j=1}^{n}p_{0j}-\sum_{i=1}^{m}z_{0i}}{n-m}$

⑤、根轨迹的分离点：$\begin{cases}P'(s)Q(s)-Q'(s)P(s)=0 \leftarrow 1+K_g\frac{P(s)}{Q(s)}=0\\K_g\geq0\text{（这个条件必须满足!!!）}\end{cases}$

6、根轨迹与虚轴交点为闭环系统的临界稳定点.

确定虚轴交点和临界增益值的方法：利用Routh判据，确定临界稳定点. 具体见题目.

~~出射角：~~ $\cancel{\theta_{p0l}=\sum_{i=1}^{m}\angle(-p_{0l}+z_{0i})-\sum_{j=1,j\neq l}^{n}\angle(\cdots)\pm180^\circ(2k+1)}$

7、出射角 $\theta_{p0l}=(2k+1)\pi-\sum_{j=1}^{n}\beta_j+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i$

β_j 为其余开环极点到被测极点的矢量幅角.

α_i 为开环有限零点到被测极点的矢量幅角.

入射角 $\theta_{z0l}=(2k+1)\pi-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i+\sum_{j=1}^{n}\beta_j$

α_i 为其余开环有限零点→被测零点的矢量幅角.

β_j 为 开环极点→被测零点的矢量幅角.

8、$n-m\geq2$ 时，一些根轨迹左行，必有根轨迹右行.

9、实轴上，相邻开环极点之间，相邻开环零点之间必存在分离点，或存在成对的分离点.

绘制根轨迹步骤：

① 写特征方程，相角条件，幅值条件. 相角 $-(\angle s+\angle s+1+\angle s+2)=(2k+1)\pi$.

幅值条件：$|s(s+1)(s+2)|=K$ ② 求渐近线 ③ 求分离点，注意根据 $K\geq0$ 取舍 ④ 用Routh判据求与虚轴交点 ⑤ 在根轨迹附近试点 ⑥ ~~绘制根轨迹~~ 求出射入射角 ⑦ 根据8个规则绘制根轨迹. ⑧ 或直接将 $s=j\omega$ 代入特征方程来求与虚轴交点. 这样比用Routh判据求简单点，但有时更复杂.

画根轨迹草图时，需判断出射角和渐近线.

特征方程 $q(s)=0$ 的正实部根的个数，等于劳斯判定表第1列元素的正负符号的变化次数.

要稳定需要无变号.

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}
s^{n-2}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}
s^{n-3}	c_{n-1}	c_{n-3}	n_{n-5}
$\vdots$			
s^0	l_{n-1}		

$b_{n-1}=-\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix}a_n&a_{n-2}\\a_{n-1}&a_{n-3}\end{vmatrix}$

$b_{n-3}=-\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix}a_n&a_{n-4}\\a_{n-1}&a_{n-5}\end{vmatrix}$

$c_{n-1}=-\frac{1}{b_{n-1}}\begin{vmatrix}a_{n-1}&a_{n-3}\\b_{n-1}&b_{n-3}\end{vmatrix}$

注意!!

$G(s)=K/(s(s+2)(s+5))$

特征方程：$s^3+7s^2+10s+K$

s^3	1	10
s^2	7	K
s^1	$\frac{1}{7}(K-70)$	0
s^0		

$K=70$ 时为临界稳定

$7s^2+70=0$，

$s=\pm j\sqrt{10}$，与虚轴交点，

由 s^2 行的系数构成辅助方程，

并可得到 K 的取值.

12、频率响应法.

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lg\omega$	0	0.301	0.477	0.602	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954
ω	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\lg\omega$	1	1.301	1.477	1.602	1.699	1.778	1.845	1.903	1.954

典型环节的频率特性及其图.

① 比例环节 $G(j\omega)=K$ $\begin{cases}20\lg|G(j\omega)|=20\lg K\\\varphi(\omega)=0.\end{cases}$

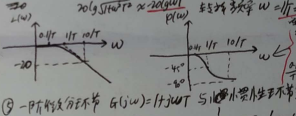
② 积分环节 $G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}$ $\begin{cases}20\lg|G(j\omega)|=-20\lg\omega\ (-20dB/dec)\\\varphi(m)=0-\angle j\omega=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$

③ 微分环节 $G(j\omega)=j\omega$ 与积分环节的Bode图关于横轴对称

④ 惯性环节 $G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}$ ① $20\lg|G(j\omega)|=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$

当 $\omega\ll1/T$ 时 $20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}\approx-20\lg1=0dB$

当 $\omega\gg1/T$ $20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}\approx-20\lg\omega T$ 转折频率 $\omega=1/T=\omega_n$



渐近线：在 $\omega<\frac{0.1}{T}$，$\varphi(\omega)=0^\circ$

$\omega>10/T$，$\varphi(\omega)=-90^\circ$

$\frac{0.1}{T}<\omega<\frac{10}{T}$，斜率为 $-45^\circ/dec$

⑤ 一阶微分环节 $G(j\omega)=1+j\omega T$ 与惯性环节呈上下对称.

⑥ 二阶振荡环节 $G(j\omega)=\frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2+j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$ $(0\leq\zeta<1)$

$\begin{cases}\text{当 }\omega\ll\omega_n\text{ 时，}20\lg|G(j\omega)|\approx0dB.\\\text{当 }\omega\gg\omega_n\text{ 时，}20\lg|G(j\omega)|\approx-40\lg\frac{\omega}{\omega_n}dB\ (-40dB/dec)\\\text{转折频率 }\omega=\omega_n=1/T.\end{cases}$

$\zeta=0.5\sim0.7$ 时，渐近线(折线)近似效果最好.

考虑精确值时，在 ω_n 附近幅频特性出现谐振峰值 M_r.

谐振频率 $\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$，$0<\zeta\leq0.707$.

谐振峰值 $M_r=|G(j\omega_r)|=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$

⑦ 二阶微分环节 $G(j\omega)=1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2+j2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})$

画Bode图时，在转折频率处要有误差修正.

奈奎斯特稳定性判据.

映射定理：设 $F(s)=\frac{b_m\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{a_n\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$，s 平面上闭曲线 Γ_s 内部有 P 个极点 Z 个零点，Γ_s 唯一的映射到 $F(s)$ 平面上的闭曲线 Γ_F. 当 s 沿 Γ_s 顺时针方向变化一周时，在 $F(s)$ 平面上 $F(s)$ 包围原点的周数 $N=Z-P$. N 顺时针方向为正，逆时针方向为负. ← 普遍意义下的.

在 s 右半平面画 Nyquist 曲线，将该曲线映射到 $F(s)=1+G(s)H(s)$，当 Γ_s 顺时针转一圈，Γ_F 也包围原点转 $N=Z-P$ 圈. Z 为 $F(s)$ 在右半平面被 Γ_s 包围的零点，P 为被包围的极点. 若闭环系统稳定，则 $Z=0$，$N=-P$. P 可等效为 $G(s)H(s)$ 在 s 右半平面的极点数.

闭环稳定系统的充要条件：s顺时针沿D形围线Γ_s变化一周时，在$1+G(s)H(s)$平面上，轨迹Γ_F须沿逆时针包围原点P周。P为F(s)在右半平面的极点数，可等效为开环传函G(s)H(s)的极点数。

⇓

1+G(s)H(s)绕原点N圈 ⟺ G(s)H(s)绕(-1,0)绕N圈。

~~据~~据此可将上述充要条件改变。

注：当n>m时，s在无穷大半径圆上运动，G(s)H(s)映射为原点

⇓

开环不稳定，P≠0，要使闭环稳定，须z=0→N=-P，即G(s)H(s)轨迹须逆时针包围(-1,0)点P周。

开环稳定，P=0，要使闭环稳定，须z=0→N=0，即G(s)H(s)轨迹不包围(-1,0)点。

对于闭环不稳定系统，s右半平面上特征根数z=N+P

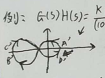
判断系统是否稳定，重点在判断1+G(s)H(s)在s右半平面是否有零点（整个闭环系统是否在s右半平面有极点）。而我们知道：Nyquist围线内包围z个1+G(s)H(s)的零点、P个1+G(s)H(s)的极点（也可认为是P个G(s)H(s)的极点），则1+G(s)H(s)绕原点转N=z-P圈（也认为是$\underset{G(s)H(s)}{\text{绕}}$(-1,0)转N圈）按照图的思路正推逆推。

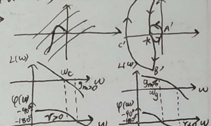
当判断得到的G(s)H(s)与~~横~~横轴有交点时，可用$Im[G(s)H(s)]=0$来求得与横轴的交点。

进一步地可转化为G(s)H(s)的分母的虚部为0，解得ω后，~~代入G(jω)H(jω)求得最终~~即解得G(s)H(s)与横轴交点时s平面的值。代入后求解G(s)H(s)，即为G(s)H(s)与横轴交点。

例：$G(s)H(s)=\frac{K(s+3)}{s(s-1)}$ →

例：$G(s)H(s)=\frac{K(0.5s+1)(s+1)}{(10s+1)(s-1)}$





控制系统的稳定裕量

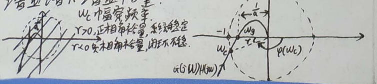
稳定裕量：系统相对稳定性的一种度量，反映系统离临界稳定点的"距离"。

在s右半平面没有极点和零点，且不含延滞环节的传递函数称为最小相位传递函数。具有最小相位传递函数的系统称为最小相位系统。最小相位系统中，在ω由0→∞过程中，最小相位系统相角变化最小。

可这样判断最小相位系统：在ω→∞时，最小相位系统相角为$(n-m)\times(-90°)$，非最小相位系统相角滞后大于$(n-m)\times 90°$。

相角裕量：给出了保证系统稳定的最大冗余相角。当开环频率特性的幅值等于$|G(j\omega)H(j\omega)|=1$时，其相角与-180°之差称为系统的相角裕量。或理解为在系统失稳之前，还可以引入的附加相角为相角裕度。

增益裕量：定义为当$L(j\omega)$的相角为-180°时，$L(j\omega)$幅值的倒数。可理解为在系统达到临界稳定之前，还可将系统增益增大增益裕量。



相角裕量γ　增益裕量$g_m=20\lg a=-20\lg|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|$

ω_g为相穿频率。

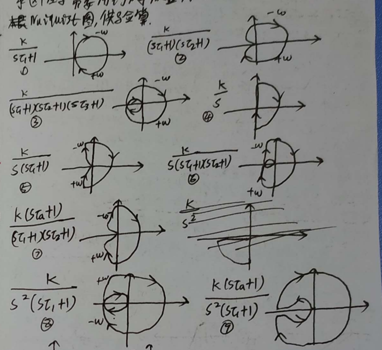
$g_m>0$，正增益裕量，闭环系统稳定。

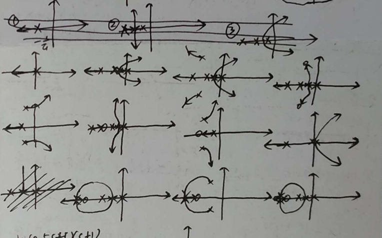
$g_m<0$，负增益裕量，闭环系统不稳定。

$\gamma>0$，$g_m>0$时，闭环系统稳定。

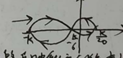
求这个时需要用到分母的虚部为0。

~~根~~ Nyquist图，供参考。





$\frac{K(0.5s+1)(s+1)}{(10s+1)(s-1)}$ →



频率法校正，低频段反映系统的稳态特性，希望高且陡。

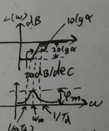
中频段（幅穿频率ω_c附近），反映系统的相对稳定性，动态指标（要求的稳定裕量）。高频段：反映系统的滤波特性。

工程上希望-2/-1/-3特性。

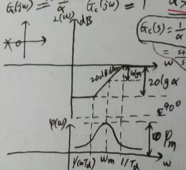
常用校正环节：

超前校正网络：$G_c(j\omega)=\frac{1}{\alpha}\frac{1+j\alpha T_d\omega}{1+jT_d\omega}$　$\alpha>1$

$G_c(j\omega)\overset{\omega\to 0}{=}\frac{1}{\alpha}$　$G_c(j\omega)\overset{\omega\to\infty}{=}1$



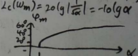
$G_c(s)=\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha T_d s+1}{T_d s+1}=\frac{s+z_d}{s+p_d}$　$z_d=\frac{1}{\alpha T_d}$　$p_d=\frac{1}{T_d}$



$\omega_m=\frac{1}{\sqrt{\alpha}T_d}$ 或 $\lg\omega_m=\frac{1}{2}(\lg\frac{1}{\alpha T_d}+\lg\frac{1}{T_d})$

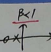
$\varphi_m=\arcsin\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ 或 $\alpha=\frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$

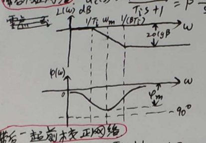
$L_c(\omega_m)=20\lg|\frac{1}{\sqrt{\alpha}}|=-10\lg\alpha$



主要利用超前相角。

滞后校正网络 $G_c(s)=\frac{\beta T_i s+1}{T_i s+1}=\beta\frac{s+z_i}{s+p_i}$ $z_i=\frac{1}{\beta T_i}$ $p_i=\frac{1}{T_i}$ $\beta<1$





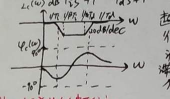
$\omega_m=\frac{1}{\sqrt{\beta}T_i}$

$\varphi_m=\arcsin\frac{\beta-1}{\beta+1}$ (φ_m为负角)

利用其高频幅值衰减特性,而避开其滞后相角.

滞后-超前校正网络

$G_c(s)=\frac{\beta T_i s+1}{T_i s+1}\frac{\alpha T_d s+1}{T_d s+1}=\frac{s+z_i}{s+p_i}\frac{s+z_d}{s+p_d}$

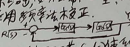


超前校正环节相当于PD控制器中的微分环节采用 $G_d(s)=\frac{k_D s}{\tau_D s+1}$,为带有滤波环节的PD控制器.

滞后校正环节~~相当于零点~~近似为PI控制器.

基于频率法的串联校正.

性能指标以频域指标给出,如相角裕量、增益裕量、幅穿频率、相穿频率等,宜采用频率法校正.



串联超前校正 例:

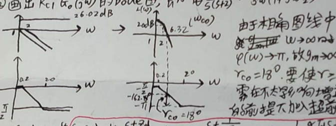
被控对象 $G_0(s)=\frac{4}{s(s+2)}$,设计校正环节 $G_c(s)$ 使系统满足:

$K_v\ge 20s^{-1}$,相角裕量 $\gamma\ge 50^\circ$,增益裕量 $g_m\ge 10dB$.

① 考虑稳态误差,加入 K_{c1}

$k_v=\lim_{s\to 0}[K_{c1}G_0(s)]=\lim_{s\to 0}\frac{4K_{c1}}{(s+2)}=2K_{c1}\ge 20$,取 $K_{c1}=10$.

② 画出 $K_{c1}G_0(j\omega)$ 的Bode图,即 $\frac{40}{s(s+2)}=\frac{20}{j\omega(1+j\omega\frac{1}{2})}$



由于相角图线中 $\omega\to\infty$ 时, $\varphi(\omega)\to\pi$,故 $g_m\to\infty$.

$\gamma_{c0}=18^\circ$.要使 $\gamma\ge 50^\circ$,需在不太影响增益的前提下加入超前环节.

超前校正环节 $\boxed{G_c(s)=K_c\frac{s+z_d}{s+p_d}=K_{c1}K_{c2}\frac{s+\frac{1}{\alpha T_d}}{s+\frac{1}{T_d}}=K_{c1}K_{c2}\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha T_d s+1}{T_d s+1}}$

所缺相角 $\gamma-\gamma_0=50^\circ-18^\circ=32^\circ$

③ 确定校正环节的参数:考虑到加校正环节会使 ω_c 右移,$\gamma\downarrow$,因此,计算 φ_m 时应预留一个相角 ε(它的取值可视 ω_c 附近相频特性下降的快慢而定,可参考幅频特性在 ω_c 附近的斜率;

$-40dB/dec$ 时可取 $\varepsilon=5^\circ\sim10^\circ$. $-60dB/dec$ 时可取 $\varepsilon=15^\circ\sim20^\circ$.

取 $\varphi_m=50^\circ-18^\circ+\varepsilon=37^\circ$. ①

$\alpha=\frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}=4.023$ ① $\frac{1}{\alpha}=0.249$. 真正加在系统上的环节 成30开始3.

为使 K_v 不下降,已知 $G_c(s)=K_{c1}K_{c2}\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha T_d s+1}{T_d s+1}$ ← 乘加入这个后, K_v 仍然 $\ge 20s^{-1}$

则 $K_{c2}/\alpha=1$, $K_{c2}=4.023=\alpha$ ← 这是相对于 $K_{c1}G_0(s)$ 而言的.

选择 ω_m,使 $\omega_m=\omega_c$(校正后)——以充分利用超前相角.

当 $\omega_c=\omega_m=\frac{1}{\sqrt{\alpha}T_d}$ ⑤ 时, $K_{c2}\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha T_d s+1}{T_d s+1}$ 增益上升 $10\lg\alpha=6dB$ ②,因此,将 ω_m 选在原 $K_{c1}G_0(j\omega)$ 的幅频特性 $-6dB$ 处,即可使 $\omega_c=\omega_m$ ④

从Bode图上读出 $\omega_c=$ ~~9d~~ $9rad/s$.(或算出)

④ 由上述分析,确定超前校正环节:

⑤ $T_d=\frac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{9\times\sqrt{4.023}}=0.0554$ ~~$\frac{1}{T_d}=18.05$~~

~~$\alpha T_d=0.223$~~ $K_c=K_{c1}K_{c2}=40.2$

⑥ $z_d=\frac{1}{\alpha T_d}=4.487$ ⑦ $p_d=\frac{1}{T_d}=18.05$

⑧ 则 $G_c(s)=K_c\frac{s+z_d}{s+p_d}=40.2\frac{s+4.487}{s+18.05}=10\frac{1+0.223s}{1+0.0554s}$

结果是频带加宽,响应速度变快.

串联超前校正步骤:

(1) 根据静态误差系数,确定附加增益 K_{c1}

(2) 画出 $K_{c1}G_0(j\omega)$ Bode图,得到 γ_0 和 g_{m0};并根据 ω_c 附近频率特性下降的情况取相角预留量 ε. φ_m 取为 $\gamma-\gamma_0+\varepsilon$.

(3) 由 $\alpha=\frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$ 计算系数 α.

(4) 选取 ω_m 位于校正后的 ω_c 处, $\omega_m=\omega_c$ ($20\lg\sqrt{\alpha}$处)

(5) 由 $\omega_m=\frac{1}{\sqrt{\alpha}T_d}$,计算 T_d.

(6) 确定补偿超前环节增益衰减应附加的增益,即 $\frac{K_{c2}}{\alpha}=1$

总增益 $K_c=K_{c1}K_{c2}$

(7) 作出校正后系统的Bode图,检查各项性能指标.

频率法串联超前校正注:①若需 $\varphi_m>60^\circ$,串联一个超前环节难以满足要求. ②若原系统 $G_0(j\omega)$ 的相频特性 $\varphi_0(\omega)$ 在 ω_c 附近下降太快时,超前校正往往无效.

$\varphi_0(\omega)$ 在 ω_c 附近下降太快 → 预留量 $\varepsilon\uparrow$ → $\varphi_m\uparrow$ → $\alpha\uparrow$ →

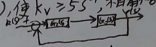
原 ω_{c0} 距 ω_m 越远 → 所需预留量 ε 越大

以60°作为判断边界.

串联滞后校正 例:

校正前系统在 ω_c 附近相频特性下降很快,超前校正往往无效. 要点:利用滞后环节中、高频段的幅值衰减特性,使校正后的幅穿频率 ω_c 下降(左移),以获得要求的相角余量. 同时要避免滞后相角,使最大滞后相移角处的频率 ω_m 远离幅穿频率 ω_c,即 $\omega_m<<\omega_c$.

例: $G_0(s)=\frac{1.05}{s(s+1)(s+2)}$,设计 $G_c(s)$,使 $K_v\ge 5s^{-1}$,相角裕量 $\gamma\ge 40^\circ$,幅值裕量 $g_m\ge 10dB$.



(1) ~~$K_{v0}=\lim_{s\to 0}s[G_0(s)]$~~ $K_v=\lim_{s\to 0}s[K_cG_0(s)]=\lim_{s\to 0}\frac{1.05K_c}{2}\ge 5$

$\Rightarrow K_c\ge 9.52$ ①

(2) 画出 $K_cG_0(j\omega)$ 的Bode图 ② $K_cG_0(j\omega)=\frac{10}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}=\frac{5}{j\omega(j\omega+1)(1+\frac{j\omega}{2})}$

由 $K_cG_0(j\omega)$ 的Bode图读出 $\omega_{c0}=2.1rad/s$, $\gamma_0=-22^\circ$, $\omega_{g0}=1.4rad/s$

$g_{\omega_0}=-8dB$. $K_cG_0(j\omega)$ 的相频在 ω_{c0} 附近(略大于 ω_{c0} 处)下降太快,用超前校正无效.或 $\varphi_m>60^\circ$.故采用滞后校正.

将幅值特性的中频段衰减,使 ω_c 左移

⑦ $G_c(s)=K_c\frac{\beta T_i s+1}{T_i s+1}=K_c\beta\frac{s+\frac{1}{\beta T_i}}{s+\frac{1}{T_i}}$ 把这个加进来不像超前那样会对 $K_cG_0(j\omega)$ 产生影响.

(4) 选择幅穿频率 ω_c:根据相角裕量 $\gamma\ge 40^\circ$,由 $K_cG_0(j\omega)$ 的Bode图, $\omega=0.6$ 时, $\varphi_0(\omega)+180^\circ>40^\circ$.

同时,考虑到加入 $G_c(s)$ 后,会使 ω_c 处的相角下降 $\varphi_i(\omega_c)$,

($\varphi_i(\omega_c)$ 为滞后校正环节 $G_c(s)$ 在 ω_c 处的滞后相角量),

因此选择 ω_c 应保证:

③ $\gamma_0(\omega_c)=\gamma+|\varphi_i(\omega_c)|$

一般取 $|\varphi_i(\omega_c)|$ 为 $5^\circ\sim12^\circ$,视校正装置转折频率距 ω_c 远近而定.

取 $\gamma_0(\omega_c)=50^\circ$,由 $K_cG_0(j\omega)$ 的相频特性 $\varphi_0(\omega)$ 读出

④ $\omega_c=0.5rad/s$. 确定要在 $\omega_c=0.5rad/s$ 处.

(5) 确定 β: $\omega_c=0.5$ 时, $20\lg|K_cG_0(j\omega_c)|\approx 20dB$.

⑤ $20\lg|K_cG_0(j\omega_c)|+20\lg\beta=0$ ($\beta<1$) (加起来使幅图为0)

$\Downarrow$

$\beta=0.1$

(6) 确定 $G_c(s)$ 的转折频率

确定 $\frac{1}{\beta T_i}$ 的原则:要离开 ω_c 一定距离,以保证 $\gamma_0(\omega_c)=\gamma+|\varphi_i(\omega_c)|$

⑥ 一般取 $\frac{1}{\beta T_i}=\frac{\omega_c}{5\sim10}=z_i$

取 $\frac{1}{\beta T_i}=\frac{0.5}{5}=0.1$ $T_i=100$

校正后的开环传递函数: $\frac{1+\frac{s}{0.1}}{1+\frac{s}{0.01}}\cdot\frac{5}{s(1+s)(1+\frac{s}{2})}=\frac{s+0.1}{s(s+1)(s+2)(s+0.01)}$

(7) 检验性能指标:

$\omega_c=0.5rad/sec$ $\gamma\approx 40^\circ$ $\omega_g=1.3rad/s$ $g_m=10.5dB$

$K_v=5sec^{-1}$

带宽减小,会使调整时间有所增大.

参考步骤:

(1) 根据稳态指标(静态误差系数),确定附加增益 K_c

(2) 绘制 $K_cG_0(j\omega)$ 的Bode图,确定 γ_0 和 g_{m0}

(3) 选取新的幅穿频率 ω_c,该点的相位应满足

$\gamma_0(\omega_c)=\gamma+|\varphi_i(\omega_c)|$

(4) 确定未校正系统的幅频特性在新的幅穿频率处降到0dB

所需衰减量，使 $20\lg|K_cG_0(j\omega_c)|+20\lg\beta=0$，从此确定β.
(5) 选择转折频率 $\frac{1}{\beta T_i}$，使 $|\varphi_i(\omega_c)|$ 不大于预留的滞后相角. 一般取 $\frac{1}{\beta T_i}=\frac{\omega_c}{5\sim10}$.
(6) 根据 $G_c(j\omega)G_0(j\omega)$ 的Bode图，检验系统的性能指标是否满足要求.

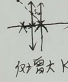
串联滞后-超前校正

超前部分，增加稳定裕量，改善动态特性.
滞后部分，提高开环增益，改善稳定精度.
频率法步骤:
(1) 根据稳态指标，确定附加增益 K_c.
(2) 绘制 $K_{c1}G_0(j\omega)$ 的Bode图，得 γ_0 和 g_{m0}
(3) 由该Bode图和指标要求，确定系统的幅穿频率 ω_c；并参考超前校正环节的设计，确定超前部分的α和 T_d.
(4) 根据幅频特性，加 K_{c2}，使校正后系统的幅穿频率为 ω_c，即 $20\lg|G_c(j\omega_c)G_0(j\omega_c)|=0dB$.
(5) 确定滞后部分的参数 T_i 和 $\beta=1/\alpha$，使得在 ω_c 处的滞后相角不大于超前部分在 ω_c 处预留的相角滞后量 (6) 绘制校正后系统Bode图，检验性能指标是否满足要求.

基于根轨迹法的串联校正

性能指标 以时域指标给出，如超调量、调整时间、上升时间，以及希望的闭环主导极点的阻尼比、无阻尼自然振荡频率等. 通过在s平面上恰当安置校正环节的零极点位置，使系统根轨迹朝着要求的性能指标的方向变化.

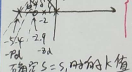
例. ~~控~~ $G_0(s)=\frac{4}{s(s+2)}$，设计 $G_c(s)$ 使系统满足:
$\sigma\%\le17\%$，$T_s\le2S$，静态速度误差系数 $K_v>5S^{-1}$.



$K=4$ 时，原系统特征方程
$s(s+2)+4=0\Rightarrow S_0=-1\pm j\sqrt3$
$\sigma\%=16.3\%$　$T_{s0}=4>2$　$K_{v0}=\lim_{s\to0}sG(s)=2<5$.
$=4/3\omega_n$

仅增大K，① $K\uparrow\Rightarrow\begin{cases}K_v\uparrow\\T_s-\\\omega_n\uparrow,\xi\downarrow,\sigma\%\uparrow\end{cases}$

② σ%已满足指标，保持 $\xi=0.5$ 不变，由 $\xi=0.5$，$T_s\approx\frac{4}{\xi\omega_n}\le2$，考虑 $\omega_n\ge4$.
将闭环极点 S_0 沿射线 $\xi=0.5$ 移动到 S_1，ξ不变，ω_n 增大为4.
$s_1=-\omega_n\cos\varphi+j\omega_n\sin\varphi=-2+j2\sqrt3=-2+j3.46$.
串联校正环节在 s_1 点应有的相角，由: $\angle G_0(s_1)+\angle G_c(s_1)=-180°(2K+1)$
③ $\phi_c=\angle G_c(s_1)=-180°-\angle G_0(s_1)$
$\angle G_0(s_1)=[-\angle s-\angle s+2]_{s=s_1}=-\angle(-2+j2\sqrt3)-\angle j2\sqrt3=-210°$.
$\phi_c=-180°-\angle G_0(s_1)=-180°+210°=30°$ (超前相角) ④
串联-超前校正环节: $G_c(s)=K_c\frac{s+z_d}{s+p_d}=\frac{K_c}{\alpha}\frac{\alpha T_as+1}{T_as+1}$　$\phi_c=\angle G_c(s_1)=30°$
作图法确定零极点



$\begin{cases}\delta=\frac12(180°-\varphi-\varphi_c)\\z_d=\frac{\sin\delta}{\sin(\phi_c+\delta)}\omega_n\\p_d=\frac{\sin(\phi_c+\delta)}{\sin\delta}\omega_n\end{cases}$

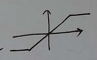
本例中，ω_n 取4
计算得 $\delta=45°$
$z_d=2.928$
$p_d=5.464$

确定 $s=s_1$ 时的K值(即 K_c)　幅值条件 $|G_c(s_1)G_0(s_1)|=1$
$G_c(s)G_0(s)=K_c\frac{s+2.9}{s+5.4}\frac{4}{s(s+2)}$　$K_c=\frac{18.79}{4}=4.698$.
⑤ 检验性能指标:
检查 s_1 是否为主导极点. $\frac{T(s)}{R(s)}$(闭环传递) $=\frac{18.79(s+2.9)}{s(s+2)(s+5.4)+18.79(s+2.9)}$
$d(s)=s^3+7.4s^2+29.59s+54.49=(s+2+j2\sqrt3)(s+2-j2\sqrt3)(s+3.4)$
第三个闭环极点 $-p_3=-3.4$，与闭环零点 $-z=-2.9$ 很靠近，作用相消，对瞬态响应影响很小，可将 $-p_{1,2}=-2\pm j2\sqrt3$ 作主导极点. 据此计算性能指标知符合要求.

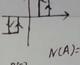
根轨迹法串联超前校正步骤:
(1) 根据动态性能指标，确定希望的闭环主导极点的其位置
(2) 绘制原系统的根轨迹图，验证未校正系统能否具有预期主导极点. 如有，则只需调整增益值；若无，则计算要通过预期闭环极点未校正系统所需的相角缺额，即为超前校正环节应提供的超前相角 ϕ_c.
(3) 根据 ϕ_c，确定超前校正环节零极点
(4) 根据幅值条件，确定校正环节附加增益 K_c.
(5) 检验校正后系统的性能指标: 检查预期的闭环极点是否为主导极点，如是，按无零点二阶系统估算性能指标. 如不满足性能指标，则修正参数，直到满足要求.

非线性控制系统的分析

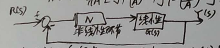
非线性系统的稳定性，不仅取决于系统的结构和参数，而且与输入信号的幅值和初始条件有关.
常产生自振荡，即使没有外加的输入信号，系统自身产生一个有一定频率和幅值的稳定振荡，称为自振荡(自持振荡)
饱和非线性描述函数:



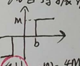
$y(t)=\begin{cases}KA\sin\omega t & 0\le\omega t\le\psi\\kb & \psi\le\omega t\le\pi/2\end{cases}$
$b=A\sin\psi$，$\psi=\sin^{-1}\frac{b}{A}$.
$N(A)=\frac{B_1}{A}=\frac{2k}{\pi}[\sin^{-1}\frac{b}{A}+\frac{b}{A}\sqrt{1-(\frac{b}{A})^2}$ $(A\ge b)$



$y(t)=\begin{cases}0, & 0\le\omega t\le\psi_1\\m, & \psi_1\le\omega t\le\psi_2\\0 & \psi_2\le\omega t\le\pi\end{cases}$
$b=A\sin\psi_1$　$\psi_1=\sin^{-1}\frac{b}{A}$　$mb=A\sin(\pi-\psi_2)$，$\psi_2=\pi-\sin^{-1}\frac{mb}{A}$
$N(A)=\frac{2M}{\pi A}[\sqrt{1-(\frac{b}{A})^2}+\sqrt{1-(\frac{mb}{A})^2}]+j\frac{2mb}{\pi A^2}(m-1)$ $(A\ge b)$

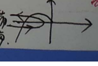


非线性系统特征方程为 $N(A)G(s)+1=0$
频域形式为 $G(j\omega)=-N^{-1}(A)=-\frac{1}{N(A)}$　A为输入正弦信号的幅值.
$Z=N+P\longleftarrow$ G(s)在s右半平面的极点数.
线性化闭环系统在s右半平面的极点数
G(jω)的Nyquist轨迹顺时针包围 $-N^{-1}(A)$ 曲线的圈数.
若G(s)为非最小相位系统，则闭环稳定条件为 $N=-P$.
当G(s)为最小相位系统，则闭环稳定条件为 $N=0$.
若 $G(j\omega)$ 曲线与 $-N^{-1}(A)$ 曲线相交，则非线性系统可能出现自持振荡.

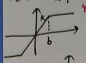


$N(A)=\frac{4M}{\pi A}\sqrt{1-(\frac{b}{A})^2}$，$(A\ge b)$

例. $N(A)=\frac{4M}{\pi A}\sqrt{1-(\frac{b}{A})^2}$　$M=1.7, b=0.7$　~~G(jω)~~ $G(s)=\frac{460}{s(0.01s+1)(0.0025s+1)}$
$G(j\omega)=\frac{460}{\omega\sqrt{1+(0.01\omega)^2}\sqrt{1+(0.0025\omega)^2}}\cdot(-90°-\arctan0.01\omega-\arctan0.0025\omega)$
$-\frac{1}{N(A)}=-\frac{\pi A}{6.8}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{b}{A})^2}}$ $(A\ge b)$　$A\to b: -N^{-1}(b)=-\infty$
$A\to\infty: -N^{-1}(\infty)=-\infty$
令 $\frac{d(-\frac{1}{N(A)})}{dA}=0\Rightarrow A=\sqrt2b\ (A\ge b)$
A: $b\to\sqrt2b\to\infty$
$-N^{-1}(A)$: $-\infty\to$ 极大值 $\to-\infty$
$-N^{-1}(\sqrt2b)=-0.647$
计算 $G(j\omega)$ 与 $-N^{-1}(A)$ 的交点:
由 $\varphi(\omega)$ 计算 $\varphi(\omega)=-180°$ 时，
$\omega=200rad/s$，$|G(j\omega)|_{\omega=200}=0.92$
计算 $-\frac{1}{N(A)}=-0.92$ 时A的值.
试凑出.
有两交点，$A_1=0.757$　$A_2=1.842$
$1.842\sin200t$ 为稳定的自持振荡.
$0.757\sin200t$ 为不稳定的振荡.



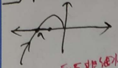
饱和非线性特性



$$-\frac{1}{N(A)}=\frac{-\pi}{2k\left[\sin^{-1}\frac{b}{A}+\frac{b}{A}\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2}\right]}$$

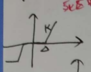
$A=b$ 时，$-N^{-1}(A)=-1/k$　　当 $A<b$ 时该函数不存在.

$A=\infty$ 时，$-N^{-1}(A)\to\infty$.



A 为稳定振荡.

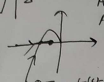
死区非线性.



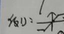
$$-\frac{1}{N(A)}=\frac{-\pi}{2k\left[\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{\Delta}{A}+\frac{\Delta}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{A}\right)^2}\right]}$$

$A=\Delta$ 时，$-N^{-1}(A)\to\infty$.

$A\to\infty$ 时，$-N^{-1}(A)=-1/k$



不稳定振荡.



例1: + $G(s)=\frac{k}{s(s+1)(s+2)}$

当 K 的变化使 Nyquist 曲线正好与 0.5 相交，则系统处于稳定边界状态.

$M=3\quad b=1\quad k=20$

$$\frac{k}{s(s+2)(s+3)}$$

$$-\frac{1}{N(A)}=\frac{-\pi A}{4M\sqrt{1-\left(\frac{b}{A}\right)^2}}=\frac{-\pi A}{12\sqrt{1-\left(\frac{1}{A}\right)^2}}$$

$A=b=1\qquad \frac{-1}{N(A)}\to-\infty$

$A\to\infty\qquad \frac{-1}{N(A)}\to-\infty$

$A=\sqrt{2}b=\sqrt{2}\qquad \frac{-1}{N(A)}=-\frac{\pi b}{2m}=-\frac{\pi}{6}=-0.524$

$$G(j\omega)=\frac{k}{j\omega(j\omega+2)(j\omega+3)}=\frac{k[-5\omega-j(6-\omega^2)]}{\omega(\omega^4+13\omega^2+36)}$$

$Im\,G(j\omega)=0\to\omega=\sqrt{6}$

$Re\,G(j\omega)\big|_{\omega=\sqrt{6}}=-0.667<-0.524$

2个交点、　$-\frac{1}{N(A)}=-\frac{2}{3}$

$A_1=1.11\qquad \omega=\sqrt{6}$

$A_2=2.3$

$$\underbrace{\left(\frac{-1}{N(A)}\right)\Big|_{max}=-\frac{\pi b}{2M}}$$

$$\frac{5s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

分母

```
den = conv(conv([1 1],[1,2]),[1 3])
```

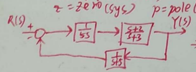
$$G(s)=\frac{5s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{5(s+3/5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

```
z=[-3/5]
p=[-1 -2 -3]
k=5
sys= zpk[z,p,k]
```

$$G(s)=\frac{s^2+5s+1}{s(s^2+34.5s+1000)}\xrightarrow[\text{点.}]{\text{求零极}}$$

~~den= conv([1 0],[1~~

```
den = conv([1 0],[1 34.5 1000])
num = [1 5 1]
sys=tf(num,den)
z=zero(sys)   p=pole(sys)
```



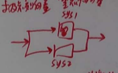
→

```
com1= tf([1],[5 0])
com2 =tf([1 2],[1 3])
com3 = tf([1],[1 5])
G=series(com1,com2)
sys= feedback(G,com3,-1)
```

绘制零极点图:

```
①pzmap(sys)
②[p,z]=pzmap(sys)
```

极点列向量　零点列向量



```
sys=paraller(sys1,sys2)
```

`p=roots(q)` q为特征多项式 p为特征方程的根.

`p=pole(sys)` 确定闭环极点、

`step(sys,t)` 阶跃　　`impulse(sys,t)` 冲击脉.

`(sim(sys,u,t)` u为输入信号、

`y=polyval(p,x)` 求多项式 p 在 x 的值.

`rlocus(sys)` ← 根轨迹

`[r,k] = rlocus(sys,k)` 指定的增益向量.

```
bode(sys) ← 绘制bode图.
grid
w = [5 10];
[mag,phase,w] =bode(sys,w) ← 求某点.
```

`[re,im,w] = nyquist(sys,w)` 实 虚

`[Gm,Pm,Wg,Wc]=margin(sys)`

增益为0dB对应频率

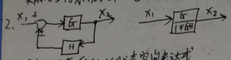
增益裕度　相角裕度　相位为 -180° 对应频率

1、小惯性环节 $G(s)=\frac{1}{Ts+1}$ 积分环节：$G(s)=\frac{1}{T_i s}$

振荡环节 $T^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+T\xi\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=r(t) \Rightarrow G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2}{(s+p_1)(s+p_2)}$，$\omega_n=\frac{1}{T}$

微分环节 $G(s)=T_d s$ 比例环节：$G(s)=K_p$ 时滞环节 $y(t)=r(t-\tau)(t-\tau) \Rightarrow G(s)=e^{-\tau s}$

实际控制系统的传递函数可视为上述典型环节的某种组合.

2. 

3、线性定常系统的状态空间表达式

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)+Du(t)\end{cases}$$

$x\in R^n$ 状态向量 $A\in R^{n\times n}$ 系统状态矩阵

$u\in R^m$ 输入向量. $B\in R^{n\times m}$ 系统控制矩阵(输入矩阵)

$y=R^q$ 输出向量. $C\in R^{q\times n}$ 系统输出矩阵

$D\in R^{q\times m}$ 系统的前馈矩阵

$\Downarrow$

零初始条件

$x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$，定义 $\Phi(t)=e^{At}=I_n+At+\frac{A^2}{2}t^2+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}t^k=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$

$$\begin{cases}sX(s)=AX(s)+BU(s)\\ Y(s)=CX(s)+DU(s)\end{cases} \Rightarrow (sI-A)X(s)=BU(s)$$

$\Downarrow$

$X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)$；$Y(s)=\underbrace{[C(sI-A)^{-1}B+D]}_{G(s)}U(s)$

会涉及到逆矩阵计算：行列式计算：

4. $\frac{1}{sC}$ Ls

5、典型输入信号：① $r(t)=\begin{cases}0,\\ A.\end{cases}$ $R(s)=\frac{A}{s}$ 阶跃 ② 斜坡：$r(t)=\begin{cases}0, t<0\\ At, t\geq 0\end{cases}$，$R(s)=\frac{A}{s^2}$ ③ 抛物线信号 $r(t)=\frac{1}{2}At^2, t\geq 0$，$R(s)=\frac{A}{s^3}$

④ 脉冲信号：$r(t)=\begin{cases}\lim_{t_0\to 0}\frac{A}{t_0}, & 0<t<t_0\\ 0, & 其它\end{cases}$，$R(s)=A$. ⑤ 单位脉冲函数 $\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, t=t_0\\ 0. t\neq t_0\end{cases}$. $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$，$R(s)=1$

⑥ 正弦信号 $r(t)=A\sin(\omega t+\varphi)\rightarrow R(s)=Ae^{\frac{\varphi}{\omega}s}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

6、系统对输入信号导数的响应，等于系统对该输入信号响应的导数.

7、暂态性能指标：延迟时间 T_d：系统响应从0上升到稳态值的50%所需时间；

上升时间 T_r：系统从0上升到稳态(有振荡) 系统从稳态值10% → 90% 用时；峰值时间 T_p：达到最大峰值所需时间.；

调节时间 T_s：$|y(t)-y(\infty)|\leq y(\infty)\delta$，$t\geq T_s$(一般 δ=5%或2%) 达到±δ误差所用t；

超调量 $\sigma\%=\frac{y(T_p)-y(\infty)}{y(\infty)}\times 100\%$

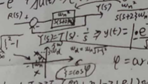
振荡次数N：T_s内，$y(t)$偏离$y(\infty)$的振荡次数.

8、一阶系统的暂态响应特性：$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$ ① 单位阶跃响应：$R(s)=\frac{1}{s}$，则 $Y(s)=\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\Rightarrow y(t)=1-e^{-\frac{t}{T}}, t\geq 0$

$T_d=-T\ln 0.5=0.69T$ $T_r=t_{0.9}-t_{0.1}=2.20T$ $T_s=3T$或$4T$ ② 单位脉冲响应：$R(s)=1$，$Y(s)=\frac{1}{Ts+1}=\frac{1/T}{s+1/T}\Rightarrow y(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}, t\geq 0$

③ 单位斜坡响应：$R(s)=\frac{1}{s^2}$，$Y(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}+\frac{T^2}{Ts+1}\Rightarrow y(t)=[t-T(1-e^{-\frac{t}{T}})]u(t)\Rightarrow e(t)=r(t)-y(t)=T(1-e^{-\frac{t}{T}})\Rightarrow e(\infty)=T$.

9、二阶规范系统的暂态响应特性：闭环传递函数 $T(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$



$\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$ 单位阶跃响应.

特征方程：$s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=0 \Rightarrow$ 特征根为 $-p_{1,2}=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$

$Y(s)=T(s)\cdot\frac{1}{s}\Rightarrow y(t)=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\varphi), t\geq 0$

单位阶跃响应：① $0<\xi<1$ 欠阻尼 $\cancel{Y(s)=T(s)\frac{1}{s}}$ 振幅指数衰减. $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ $\xi=\cos\varphi$ $\varphi=\arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$

② $\xi=0$ 无阻尼 等幅振荡

③ $\xi=1$，临界阻尼，无振荡的上升曲线. ④ $\xi>1$，过阻尼 ⟶ 当 $\xi>>1$，$T_1>>T_2$(即$|-p_2|>>|-p_1|$)，则系统暂态响应近似于一阶系统.

10、二阶规范系统的暂态响应特性(欠阻尼)

$T_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$ $\sigma\%=\exp(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}})\times 100\%$ $T_r=\frac{\pi-\varphi}{\omega_d}=\frac{\pi-\varphi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$，$\varphi=\arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$

$T_s=\frac{1}{\xi\omega_n}[-\ln\delta-\frac{1}{2}\ln(1-\xi^2)]\Rightarrow T_s(2\%)=\frac{1}{\xi\omega_n}[4-\frac{1}{2}\ln(1-\xi^2)]$；$T_s(5\%)=\frac{1}{\xi\omega_n}[3-\frac{1}{2}\ln(1-\xi^2)]\xrightarrow{\alpha\xi<0.9} T_s(2\%)=\frac{4}{\xi\omega_n}$，$T_s(5\%)=\frac{3}{\xi\omega_n}$

$\omega_n T_d=\frac{1}{\xi}\ln\frac{2\sin(\omega_d T_d+\varphi)}{\sqrt{1-\xi^2}}$ 阻尼振荡周期 $T_d=\frac{2\pi}{\omega_d}=\frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\Rightarrow N=\frac{T_s}{T_d}=\frac{(3\sim 4)\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi\xi}$

兼顾 $\sigma\%$ 和响应时间，$\xi=0.4\sim 0.8$，$\sigma\%=25.4\%\sim 1.5\%$.

11、增加零点对二阶规范系统暂态响应特性的影响：

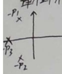
$T(s)=\frac{\omega_n^2(\tau s+1)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2(s+z)}{z(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$，$z=\frac{1}{\tau}$；对于单位阶跃响应，$y(t)=1-\frac{\sqrt{\xi^2-2r\xi^2+r^2}}{\xi\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t+\varphi+\psi)$

$r=\frac{\xi\omega_n}{z}$，$\varphi=tg^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$，$\psi=tg^{-1}\frac{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{z-\xi\omega_n}$

$T_{rz}=T_r-\frac{\psi}{\omega_d}$ $T_{pz}=T_p-\frac{\psi}{\omega_d}$ $\sigma_z\%=\sigma\%\cdot\frac{l}{z}e^{\frac{\xi\psi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$，$l=\sqrt{(z-\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}=\sqrt{z^2-2\xi\omega_n z+\omega_n^2}$ $T_{sz}=T_s+\frac{1}{\xi\omega_n}\ln\frac{l}{z}$

12、三阶系统的暂态响应特性：$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{(Ts+1)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}=\frac{\omega_n^2 p}{(s+p)[(s+\xi\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\xi^2)]}$，$p=1/T$

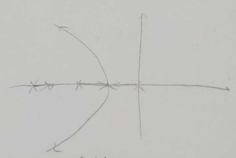
单位阶跃响应：$y(t)=1-\frac{e^{-\beta\xi\omega_n t}}{\xi^2\beta(\beta-2)+1}-\frac{\beta\xi e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{\xi^2\beta(\beta-2)+1}}\sin(\omega_d t+\gamma)$，$t\geq 0$. 其中，$\beta=\frac{p}{\xi\omega_n}$.



$\beta\to\infty$，相当于二阶系统.

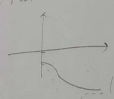
$\beta>>1$，共轭复数极点为主导极点，响应呈现为二阶特性.

$\beta<<1$，实极点为主导极点，响应主要呈现为一阶特性.



三种方法判断稳定性.

$\frac{s+10}{s^2+6s+10}$ 的相频曲线的绘制



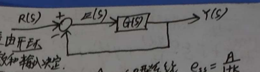
(由这种曲线，什么时候出现?)

若遇到非最小相位系统?

$\frac{10}{s-4}$

13、控制系统的稳态误差 $e(t)=r(t)-y(t)$

这里是有s式子，对于单位反馈结构均成立。→ $\lim\limits_{s\to0} sE(s)$!!!!! $= e_{ss}=\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=\boxed{\lim\limits_{s\to0}\frac{sR(s)}{1+G(s)}}$

对于  稳态误差由开环传递函数和输入决定。

$G(s)=\frac{K\prod\limits_{i=1}^{m}(T_is+1)}{s^N\prod\limits_{j=1}^{n-N}(T_js+1)}$

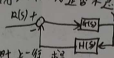
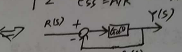
$N=0,1,2$ 分别称作 0型,1型,2型 系统

① 阶跃输入：$R(s)=\frac{A}{s}$, $e_{ss}=\lim\limits_{s\to0}\frac{A}{1+G(s)}$ $\begin{cases}0\text{型系统} & e_{ss}=\frac{A}{1+K}\\ 1,2\text{型系统} & e_{ss}=0.\end{cases}$

② 斜坡输入：$R(s)=\frac{A}{s^2}$, $e_{ss}=\lim\limits_{s\to0}\frac{A}{sG(s)}$ $\begin{cases}0 & e_{ss}=\infty\\ 1 & e_{ss}=A/K\\ 2 & e_{ss}=0.\end{cases}$

③ 抛物线输入：$R(s)=\frac{A}{s^3}$, ~~e_{ss}~~ $\begin{cases}0,1 & e_{ss}=\infty\\ 2 & e_{ss}=A/K\end{cases}$ $e_{ss}=\lim\limits_{s\to0}\frac{A}{s^2G(s)}$

14、在求稳态误差时，应首先判断闭环系统是否稳定。

15、非单位反馈系统的稳态误差： ⟺ 

$G_d(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)-G(s)}$

16、ROUTH 判据 见信号与系统 全为0时，上一行 求导…

17、根轨迹~~连续~~绘制规则：① 根轨迹连续对称于实轴；② 根轨迹始于开环极点，终止于开环零点；③ 实轴上根轨迹段存在区间的右侧，开环零点和开环极点之和为奇数；④ 根轨迹的渐近线，倾角 $\varphi_A=\frac{2k+1}{n-m}\pi$, $k=0,1,\cdots,|n-m|-1$，n为极，m零，与实轴的交点 $\sigma_A=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}p_{0j}-\sum\limits_{i=1}^{m}z_{0i}}{n-m}$，根轨迹有$|n-m|$条分支沿渐近线趋于($n>m$)(或始于($n<m$))无穷远 ⑤ 根轨迹的分离点，可由 $\begin{cases}P'(s)Q(s)-Q'(s)P(s)=0\\ K_g>0\end{cases}$ 注：$1+K\frac{P(s)}{Q(s)}=0$ 给出，实轴上的根轨迹，相邻开环极点之间、相邻开环零点之间必存在分离点。相邻开环零点和极点之间，或不存在分离点，或存在成对的分离点。⑥ 出射角：$\theta_{p0l}=(2K+1)\pi-\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j+\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i$

β_j：其余开环极点到被测极点的矢量幅角，α_i：开环有限零点到被测极点的矢量幅角。

入射角 $\theta_{z0l}=(2K+1)\pi-\sum\limits_{i=1}^{m-1}\alpha_i+\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j$，$\alpha_i$：其余开环有限零点→被测零点，$\beta_j$：开环极点→被测零点。

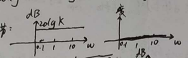
要计算的有：分离点、渐近线、出射角、临界稳定点。 $\sigma_A=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}(-p_{0j})-\sum\limits_{i=1}^{m}(-z_{0i})}{n-m}$

Routh判据，列辅助方程

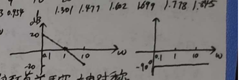
18、Bode图，$20\lg A(\omega)\sim\lg\omega$ $\varphi(\omega)\sim\lg\omega$.

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70
$\lg\omega$	0	0.301	0.477	0.602	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954		1.301	1.477	1.602	1.699	1.778	1.845

① 比例环节：$G(j\omega)=K$



② 积分环节 $G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}$ $20\lg\left|\frac{1}{j\omega}\right|=-20\lg\omega$ 当$\omega=1$时，0；$\omega=10$，-20



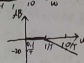
③ 微分环节 $G(j\omega)=j\omega$ 与积分环节关于实轴对称。

④ 惯性环节：$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}$ $20\lg A(\omega)=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}$

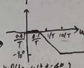
当 $\omega\ll 1/T$ $20\lg A(\omega)=0\,dB$

$\omega\gg 1/T$ $20\lg A(\omega)=-20\lg\omega T$

$\omega_n=\omega=1/T$ 为转折频率



$\omega<\frac{0.1}{T}$, $\varphi(\omega)=0^\circ$ →



$\omega>10/T$, $\varphi(\omega)=-90^\circ$

$\frac{0.1}{T}<\omega<10/T$, $\varphi(\omega)$斜率为$-45^\circ/dec$(近似折线)

⑤ 一阶微分环节 $1+j\omega T$ 与惯性环节关于实轴对称。

⑥ 二阶振荡环节 $G(j\omega)=\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}$

幅频 $20\lg A(\omega)=-20\lg\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}$

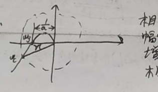
当 $\omega\ll\omega_n$时，0

$\omega\gg\omega_n$时，$-40\lg\frac{\omega}{\omega_n}$

转折频率 $\omega=\omega_n=1/T$

相频 $\varphi(\omega)=-\arctan\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$

⑦ 二阶微分环节是与⑥的对称

19. 

相角裕量 γ

幅穿频率 ω_c

增益裕量 $g_m=20\lg a$ $a=\frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|}$

相穿频率 ω_g

现代控制理论

现代控制 2 Note 1

哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
地址：中国 · 哈尔滨西大直街 92 号　邮编 P.C：150001　电话 Tel：0451-86412114
Addr: 92West Da Zhi St.Harbin China　传真 Fax：0451-86221048　电传 Telex：87217 HITCN

第2章 状态空间描述

1、除微分方程中的最高阶之外，其余各个项都用状态变量 x 代替.

第3章 ~~线性定常系统~~控制系统状态方程的解.

1、线性定常系统状态方程的解

(1) 齐次状态方程的解　$\dot{x}=AX$

当且仅当 ~~e^{At}~~ $\lim_{t\to\infty} e^{At}=0$ 时自由轨迹最终趋向于系统平衡状态.

① 矩阵指数法：$X(t)=e^{At}X(0)$，$A\in R^{n\times n}$，$X(0)\in R^{n\times 1}$.

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\cdots=e^{At}.$$

② 拉普拉斯变换法　(适合人工计算)

$$X(t)=L^{-1}[(SI-A)^{-1}]X(0)$$

$$e^{At}=L^{-1}[(SI-A)^{-1}].$$

(2) 矩阵指数与状态转移矩阵.

$$\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}$$

$$e^{A(t+\tau)}=e^{At}e^{A\tau}$$

若矩阵 A,B 可交换，即 $AB=BA$，则 $e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}$.

否则 $e^{(A+B)t}\neq e^{At}e^{Bt}$.

$$e^{P^{-1}APt}=P^{-1}e^{At}P$$

$\Phi(t)=L^{-1}[(SI-A)^{-1}]$ (状态转移矩阵)

若 A 为对角矩阵 $\begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & s_n \end{pmatrix}$，则 $\Phi(t)=\begin{pmatrix} e^{s_1t} & & 0 \\ & e^{s_2t} & \\ 0 & & \ddots & e^{s_nt} \end{pmatrix}$

$\Phi(t)|_{t=0}=\Phi(0)=I.$

$\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t)$，$\Phi^{-1}(-t)=\Phi(t)$

$\Phi(t_1+t_2)=\Phi(t_1)\Phi(t_2)=\Phi(t_2)\Phi(t_1)$

$[\Phi(t)]^n=\Phi(nt).$

哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
地址：中国 · 哈尔滨西大直街 92 号　邮编 P.C：150001　电话 Tel：0451-86412114
Addr: 92West Da Zhi St.Harbin China　传真 Fax：0451-86221048　电传 Telex：87217 HITCN

(3) 非齐次状态方程的解.

$\boxed{\dot{x} = Ax + Bu}$　　$\dot{x}, x, u$ 都是关于t的变量.

① 一每交法

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \Leftrightarrow \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

② 拉普拉斯变换法

初始时刻为0 → $x(t) = L^{-1}[(sI-A)^{-1}]x(0) + L^{-1}[(sI-A)^{-1}Bu(s)]$.

~~2、离散~~ 初始时刻不为0，为 t_0 时：$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$. $t \geq t_0$

(4) 常见的拉普拉斯变换表

$1 \leftrightarrow \delta(t)$

$\frac{1}{s} \leftrightarrow$ 单位阶跃 $1(t)$

$\frac{1}{s+a} \leftrightarrow e^{-at}$

$\frac{1}{(s+a)(s+b)} \leftrightarrow \frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$

$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)} \leftrightarrow be^{-bt} - ae^{-at}$

$\frac{1}{s(s+a)(s+b)} \leftrightarrow \frac{1}{ab}(1+\frac{b}{a-b}e^{-at} - \frac{a}{a-b}e^{-bt})$

几个重要的性质

$L[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)] = a_1F_1(s) + a_2F_2(s)$.

$L[f(t-a)] = e^{-as}F(s)$.

$L[e^{at}f(t)] = F(s-a)$.

2、离散系统状态方程的解.

$\dot{x} = Ax + Bu$　T_0 为

$$A^*(T_0) = e^{AT_0} = e^{At}\Big|_{t=T_0} \qquad B^*(T_0) = \int_0^{T_0} e^{At}B\,dt$$

则 $x[(k+1)T_0] = A^*(T_0)x(kT_0) + B^*(T_0)u(kT_0)$.

逆矩阵的求解：

二阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \longleftrightarrow \left(\cancel{A} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \,\middle|\, A^{-1}\right)$$

$A^* = adj(A)$；$A_1'(i,j) = (-1)^{i+j} \cdot$ (去掉i行,j列剩余项的det)　$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.

↑ 伴随矩阵　$A^* = A_1'^T$

行列式的求解

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
地址：中国·哈尔滨西大直街 92 号 Addr: 92West Da Zhi St.Harbin China
邮编 P.C：150001 传真 Fax：0451-86221048
电话 Tel：0451-86412114 电传 Telex：87217 HITCN

第4章 李雅普诺夫稳定性分析

1、一个自动控制系统能否在实际中得到应用，首要是稳定性问题，其次才是快速性和精确性问题。

经典控制理论可用劳斯判据、奈氏判据判断稳定。

李雅普诺夫稳定理论是判断控制系统包括非线性系统、时变系统等稳定性更为一般的方法。

李雅普诺夫第二法需要构成李雅普诺夫函数，而构成李雅普诺夫函数需要有一定的~~技~~经验和技巧，对于复杂的系统，构成李雅普诺夫函数相当困难。

2、状态方程解的轨迹：$\dot{x}=f(x,t)$ 的解为 $\Phi(t,x_0,t_0)$，则它随时间的推移所构成的轨迹称为解的轨迹

3、概念不少了，还是见~~课本~~PPT或6吧。 ← 李雅普诺夫稳定性定义。

4、系统稳定性的李雅普诺夫判别法。

(1) 李雅普诺夫第一法。

基于一阶近似式系数矩阵 A 的特征值判别系统稳定性。

(2) 李雅普诺夫第二法。

引出一个虚构的能量函数，这个虚构的能量函数称为李雅普诺夫函数。

① $\dot{x}=f(x,t)$ $f(0,t)=0$ $(t\geq t_0)$

$\exists V(x,t)$ 使得 $V(x,t)$ 正定，$\dot{V}(x,t)$ 负定，则系统原点处的平衡状态为一致渐近稳定。如 $\|x\|\to\infty$ 时 $V(x,t)\to\infty$ 则原点处大范围一致渐近稳定。

② $\dot{x}=f(x,t)$ $f(0,t)=0$ $(t\geq t_0)$

$\exists V(x,t)$ 使得 $V(x,t)$ 正定，$\dot{V}(x,t)$ 负半定，$\dot{V}(\Phi(t,x_0,t_0),t)$ 对于 $\forall t_0$ 和 $\forall x_0\neq 0$ 在 $t\geq t_0$ 时不恒等于 $\neq 0$。

则系统原点处的平衡状态为~~大范围~~一致渐近稳定。

大范围的话还得判断 $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} V(x,t)\overset{?}{=}\infty$

③ $\dot{x}=f(x,t)$ $f(0,t)=0$ $(t\geq t_0)$

$\exists V(x,t)$，使得 $V(x,t)$ 正定，$\dot{V}(x,t)$ 负半定，$\dot{V}(x,t)$ 某点起~~在某一X值~~恒等于0

则系统原点处的平衡状态为李雅普诺夫意义下稳定。但不是渐近稳定

是等幅振荡

④ $\dot{x}=f(x,t)$ $f(0,t)=0$，$(t\geq t_0)$

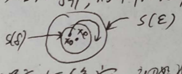
$\exists V(x,t)$，使得 $V(x,t)$ 在原点的某一邻域内正定，$\dot{V}(x,t)$ 在同一邻域内也正定

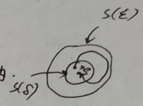
系统原点处的平衡状态不稳定

哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
地址：中国·哈尔滨西大直街92号 邮编 P.C：150001 电话 Tel：0451-86412114
Addr：92West Da Zhi St.Harbin China 传真 Fax：0451-86221048 电传 Telex：87217 HITCN

5、对于 $\dot{x}=AX$，若A非奇异，则解唯一；若A奇异，则解为无穷多个.

6、李雅普诺夫稳定性概念.





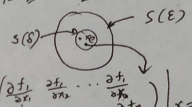
(1) 稳定：有界，但不具有渐近性

(2) 渐近稳定：收敛于平衡点，工程意义下稳定. 初始状态需要在 $S(\delta)$ 内.

(3) 一致：与初始时刻无关.

(4) 大范围：对于任意初始状态 x_0

(5) 不稳定：自治系统平衡状态 x_e 既不是渐近稳定，也不是李雅普诺夫稳定，则 x_e 不稳定



大范围渐近稳定 ⇒ 有唯一平衡点.

7、李雅普诺夫第一法：

$f(x_e,t)=0 \Leftrightarrow \dot{x}=0$

对 ~~$\dot{x}=AX$~~ $\dot{x}=f(x,t)$ 线性化得 $\dot{x}=AX+B(X)\approx AX$ $A=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\Bigg|_{x=x_e}$

(1) 若A所有特征值都具有负实部，则原非线性系统为渐近稳定的且稳定性与高阶导数项无关.

(2) 若A的特征值中，至少有一个实部为正的特征值，则原非线性系统不稳定.

(3) A的特征值中虽没有实部为正的，但有0，此时非线性系统的稳定性由高阶导数决定.

8、李雅普诺夫第二法.

(1) $V(\vec{x})$ 是 $\vec{x}$ 的标量函数，若 $V(x)$ 满足：① $V(x)$ 有连续的偏导数 ② $V(x)=0, x=0$ ③ $V(x)>0, x\neq 0$ $(V(x)\geq 0, x\neq 0)$

则是正定的（正半定）

(2) 没有一个通用的构造方法，通常可选二次型.

$V(x)=X^TPX$ P正定的判定方法：① 顺序主子式均大于0.

正定对称、 或② 全部特征值 >0.

(3) 对于某特定系统，如果未找到一个合适的李氏函数证明系统稳定、渐近稳定或不稳定，就不能给出任何稳定性信息.

(4) 总结：① $V>0$，$\dot{V}<0$ 渐近稳定

② $V>0$，$\dot{V}\leq 0$，$\dot{V}$ 不恒等于0，渐近稳定

③ $V>0$，$\dot{V}\leq 0$，$\dot{V}$ 恒等于0，稳定

④ $V>0$，$\dot{V}>0$，不稳定.

2 Note 5

哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
地址：中国 · 哈尔滨西大直街 92 号　邮编 P.C：150001　电话 Tel：0451-86412114
Addr: 92West Da Zhi St.Harbin China　传真 Fax：0451-86221048　电传 Telex：87217 HITCN

9、线性系统的李雅普诺夫分析.

线性连续系统 $\dot{x}=Ax$ 稳定 $\Leftrightarrow$ 对给定正定实对称阵Q，∃正定实对称阵P，满足 $A^TP+PA=-Q$.

（Tip：常取 $Q=I$（单位矩阵））

（Tip：当Q取正半定时，相当于第二法中的情况②）

第5章　线性系统的能控性与能观测性.

1、求矩阵的秩可能用到的结论：若A中有非零的r阶子式，则 $r(A)\geq r$；若A的所有r+1阶子式（若存在）都是0，则 $r(A)\leq r$.

2、线性定常连续系统的能控性

(1) $\dot{x}=Ax+Bu$. 存在一分段连续控制向量 $u(t)$，能在有限时间区间 $[t_0, t_1]$ 内将系统从初始状态 $x(t_0)\to x(t_1)$，则此状态能控。若系统所有状态都是能控的，则称此系统状态完全能控，简称能控.

(2) 状态完全能控 $\Leftrightarrow$ 能控性矩阵 $U_c=[B\ AB\ \cdots\ A^{n-1}B]$ 的秩为n.

特殊形式：$\dot{x}=Ax+Bu$，A具有互不相同的特征值，系统能控 $\Leftrightarrow$ 系统经线性非奇异变换后A成为对角标准形

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}u$$

x_3 不受控制.

$$\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}\hat{x}+\hat{B}u,$$

其中 $\hat{B}$ 不包含元素全为0的行.

(3) 线性定常连续系统的输出能控性.

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$$

如果在一有限区间 $[t_0, t_1]$ 内，存在适当的控制向量 $u(t)$，使系统能从任意初始输出 $y(t_0)\to y(t_1)$，则称系统是输出完全能控.

输出完全能控 $\Leftrightarrow$ 输出能控性矩阵 $[CB\ CAB\ \cdots\ CA^{n-1}B\ \ D]$ 的秩为系统输出维数.

3、定常连续系统的能观测性

(1) $$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}$$

根据 $\forall u(t)$，输出量 $y(t)$ 在有限时间区间 $[t_0, t_1]$ 的测量值，唯一确定系统在 t_0 时刻的初始状态 $x(t_0)$，则称 t_0 时刻能观测. 若初始时刻都能观测，则称完全能观测，简称能观测

哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
地址：中国·哈尔滨西大直街 92 号　邮编 P.C：150001　电话 Tel：0451-86412114
Addr: 92West Da Zhi St.Harbin China　传真 Fax: 0451-86221048　电传 Telex: 87217 HITCN

完全能观测 ⟺ 能观性矩阵 $U_o = [C \quad CA \quad \cdots \quad CA^{n-1}]^T$ 的秩为 n.

特殊形式：线性定常系统的状态矩阵有互不相同的特征值，

系统状态能观测 ⟺ 经线性等价变换把矩阵化为对角标准形后，系统的状态空间表达式

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} x \qquad y = \hat{C}\hat{x}.$$ $\hat{C}$不包含元素全0的列.

(2) 能控性与能观性的对偶关系

$$\Sigma_1: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad \Sigma_2: \begin{cases} \dot{z} = A^T z + C^T v \\ w = B^T z \end{cases}$$

对偶系统

Σ_1能控 ⟺ Σ_2能观　　Σ_1能观 ⟺ Σ_2能控.

4. 不能控不能观的原因与分解

系统能控能观 ⟺ 传递函数 $\frac{Y(s)}{U(s)} = g(s)$ 中没有零极点对消现象.(分子分母相约)

一个系统的传递函数所表示的是该系统既能控又能观的那一部分子系统.

一个系统的传递函数若有零、极点对消现象，则视状态变量的选择不同，系统是不能控或不能观的.

5. 系统的能控标准形和能观标准形 ~~(应该不考)~~.

(1) 完全能控标准型

$$\begin{cases} \dot{x} = A_c x + B_c u \\ y = Cx \end{cases} \qquad A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \qquad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

如果系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ 是能控的，那么必存在一非奇异变换 $\hat{x} = Px$ 使其变换成能控标准形

A_c B_c 为标准型.

$$\dot{\hat{x}} = A_c\hat{x} + B_c u \qquad A_c = PAP^{-1} \qquad B_c = PB$$

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_1 A \\ \vdots \\ P_1 A^{n-1} \end{pmatrix}, \quad P_1 = (0 \ 0 \cdots 0 \ 1)(B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B)^{-1}$$

2 Note 7

哈爾濱工業大學

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

地址：中国·哈尔滨西大直街 92 号　邮编 P.C：150001　电话 Tel：0451-86412114

Addr: 92West Da Zhi St.Harbin China　传真 Fax：0451-86221048　电传 Telex：87217 HITCN

第6章 状态反馈与状态观测器

1、由状态空间表达式求传递函数.

单输入单输出系统 $\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases}$　零初始条件下取拉氏变换 $\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) \end{cases}$ $\Rightarrow$ $(sI-A)X(s) = BU(s) \Rightarrow X(s) = (sI-A)^{-1}BU(s)$

$Y(s) = C(sI-A)^{-1}BU(s)$

$\Downarrow$

$G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B$

$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$　$(sI-A)X(s) = BU(s)$

$X(s) = (sI-A)^{-1}BU(s)$

$Y(s) = C(sI-A)^{-1}BU(s) + DU(s)$

2、若系统具有状态完全能控，则总可以通过变换矩阵，变成能控标准形.

$\dot{X} = AX + BU$　　$C = (c_0\ c_1\ c_2 \cdots c_{n-1})$

$Y = CX$

则能控性标准形系统的开环传递函数为：

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_1 s + c_0}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

具有能控系统，才能通过状态反馈实现极点的任意配置

若状态反馈矩阵 $F = (f_1\ f_2 \cdots f_n)$

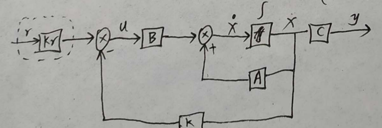
则系数矩阵为

$$A - BF = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n - f_1 & -a_{n-1} - f_2 & -a_{n-2} - f_3 & \cdots & -a_1 - f_n \end{pmatrix}$$

则状态反馈系统的闭环传递函数为：

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_1 s + c_0}{s^n + (a_1 + f_n)s^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + f_2)s + (a_n + f_1)}$$

3.



$\dot{X} = B(rK_r - KX) + AX$

$= \cancel{AX}\ (A - BK)X + B\,rK_r$　看作一个整体

$Y = CX$ （一直保持不变）

4、状态观测器实现状态反馈的状态从测量和观测而来.

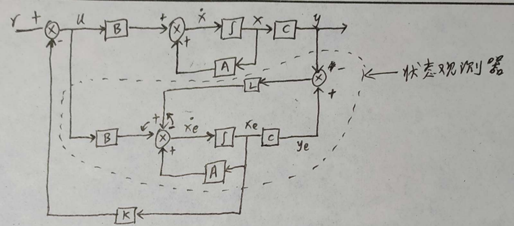
测量 ← 传感器

观测 ← 根据输入和输出来构造状态观测器.

观测器极点可任意配置的充要条件是原系统的状态必须是完全能观测的.

$$\dot{x} - \dot{x}_e = (A - LC)(x - x_e)$$

哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
地址：中国·哈尔滨西大直街 92 号 Addr: 92West Da Zhi St.Harbin China
邮编 P.C：150001 传真 Fax：0451-86221048
电话 Tel：0451-86412114 电传 Telex：87217 HITCN



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = r - Kx_e \\ y = Cx \\ \dot{x}_e = Ax_e + Bu - L(y_e - y) \end{cases}$$

随着时间推移，该项自行消失.

$$\dot{x} = Ax + B(r - Kx_e)$$
$$= (A - BK)x + Br + BK(x - x_e)$$
$$\dot{x}_e = (A - BK)x_e + Br + LC(x - x_e)$$
$$\Downarrow$$
$$\dot{x} - \dot{x}_e = (A - BK)(x - x_e) + (BK - LC)(x - x_e)$$
$$= (A - LC)(x - x_e)$$

当系统可观，观测状态能否趋近真实状态，趋近的有多快，可通过改变L来配置

分离定理：状态控制器和状态观测器可以独立设计，互相不影响。
一般来讲，状态观测器应比控制器都快一些，状态反馈控制器K和状态观测器L统称控制器.

哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

地址：中国·哈尔滨西大直街 92 号 邮编 P.C：150001 电话 Tel：0451-86412114
Addr: 92West Da Zhi St.Harbin China 传真 Fax: 0451-86221048 电传 Telex: 87217 HITCN

P173. 例10.18.

$$\begin{cases} 0.6\dot{T}_m + 2T_m = 4.5\varepsilon_i = 4.5(E_i - 6\dot{\Theta}_0) \Rightarrow \dot{T}_m + \frac{2}{0.6}T_m = \frac{4.5}{0.6}(E_i - 6\dot{\Theta}_0) \\ \varepsilon_N = 0.7\ddot{\Theta}_0 + 3\dot{\Theta}_0 = T_m - T_N \Rightarrow \ddot{\Theta}_0 + \frac{3}{0.7}\dot{\Theta}_0 = \frac{T_m - T_N}{0.7} \end{cases}$$

状态变量：$x_1 = T_m$, $x_2 = \dot{\Theta}_0$ $x_3 = \Theta_0$

控制变量：E_i，T_N

$\varepsilon_n = T_m - T_N$ $\cancel{= \frac{4.5}{0.6s+2}(E_i - E_0) - T_N}$

至此已经用状态变量和输入变量表示了.

$\cancel{0.6\dot{\varepsilon}_n + 2\varepsilon_n = 4.5(E_i - \Theta_0) - 0.6\dot{T}_N - 2T_N}$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{0.6} & -\frac{27}{0.6} & 0 \\ \frac{1}{0.7} & -\frac{3}{0.7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4.5}{0.6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{0.7} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_i\\ T_N\end{pmatrix}$$

$$\Theta_0 = x_3 = (0 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

P174. 例10.17

$$\frac{F(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} \qquad \frac{Y(s)}{E_f(s)} = \frac{1}{s(s+3)} \qquad \frac{Y_1(s)}{E_u(s)} = \frac{3}{s+5}$$

$$\dot{f} = u \qquad \ddot{y} + 3\dot{y} = e_f \qquad \dot{y}_1 + 5y_1 = 3e_u = 3(u - y)$$

状态变量 f $\dot{y}$ y y_1 — x_1 x_2 x_3 x_4

$$\ddot{y} + 3\dot{y} = e_f = y_1 - f$$
$$e_u = u - y$$

输入为 u，输出为 Y

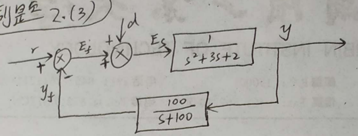
$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 3\end{pmatrix}u$$

$$y = x_3 = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$$

P714 例10.20

状态变量 y, $\dot{y}_p$ y_p $\dot{y}_m$ y_m y_f

19年控制题 2.(3)



$$\frac{Y_f(s)}{Y(s)} = \frac{100}{s+100} \Rightarrow \dot{y}_f + 100 y_f = 100 y$$

$$\frac{Y(s)}{E_s(s)} = \frac{1}{s^2+3s+2} \Rightarrow \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = e_s = r - y_f + d$$

状态变量 $\underset{x_1}{y_f}$ $\underset{x_2}{\dot{y}}$ $\underset{x_3}{y}$

输入 r d

输出 y

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 & 0 & 100 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix}$$

$$y = x_3 = (0 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

PPT上例题

$$\dddot{y} + 4\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \ddot{u} + \dot{u} + 3u$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{s^3 y + 4s^2 y} \quad (s^3+4s^2+2s+1) y = (s^2+s+3) u$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y}{u} = \frac{s^2+s+3}{s^3+4s^2+2s+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{Y}{Z} \cdot \frac{Z}{U} = (s^2+s+3) \cdot \frac{1}{s^3+4s^2+2s+1}$$

$$\begin{cases} \dddot{z} + 4\ddot{z} + 2\dot{z} + z = u \\ \ddot{z} + \dot{z} + 3z = y \end{cases}$$

状态变量 $\underset{x_1}{\ddot{z}}$ $\underset{x_2}{\dot{z}}$ $\underset{x_3}{z}$

输入 u

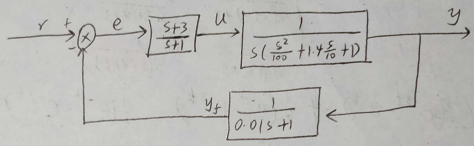
输出 y

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \quad 1 \quad 3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
地址：中国·哈尔滨西大直街 92 号 邮编 P.C：150001 电话 Tel：0451-86412114
Addr：92West Da Zhi St.Harbin China 传真 Fax：0451-86221048 电传 Telex：87217 HITCN

PPT. 传递函数块图转化为状态空间描述.



$\frac{U}{E}=\frac{s+3}{s+1}$ $\quad \frac{Y}{U}=\frac{1}{s(\frac{s^2}{100}+1.4\frac{s}{10}+1)}$ $\quad \frac{Y_f}{Y}=\frac{1}{0.01s+1}$

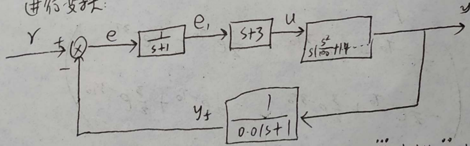
$\dot{e}+3e=\dot{u}+u$ $\quad \frac{1}{100}\dddot{y}+\frac{1.4}{10}\ddot{y}+\dot{y}=u$ $\quad 0.01\dot{y}_f+y_f=y$

状态变量 e (x_1) u (x_2) $\ddot{y}$ (x_3) $\dot{y}$ (x_4) y (x_5) y_f (x_6)

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\\ \dot{x}_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{pmatrix}$$

此时发现没法表示 $\dot{x}_1$.

进行变换



$\dddot{y}+14\ddot{y}+100\dot{y}=100u=100(r-y_f-e_1+3e_1)$

$\dot{y}_f+100y_f=100y$

$\frac{E_1}{E}=\frac{1}{s+1} \Rightarrow \dot{e}_1+e_1=e=r-y_f$

$\frac{U}{E_1}=s+3 \Rightarrow \dot{e}_1+3e_1=u$

其余都一样

状态变量 e_1 (x_1) $\ddot{y}$ (x_2) $\dot{y}$ (x_3) y (x_4) y_f (x_5)

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 200 & -14 & -100 & 0 & -100\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 100 & -100\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 100\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}r$$

输入 r

输出 y

$y=x_4=(0\ 0\ 0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$

19期末题3

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$s^2+4s+3 = (s+1)(s+3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $$sI-A = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{pmatrix} \quad (sI-A)^{-1} = \frac{1}{s(s+4)+3} \begin{pmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s+4}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{-3}{(s+1)(s+3)} & \frac{s}{(s+1)(s+3)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{s+4}{s(s+4)+3} & \frac{1}{s(s+4)+3} \\ \frac{-3}{s(s+4)+3} & \frac{s}{s(s+4)+3} \end{pmatrix}$$

$$L^{-1}[(sI-A)^{-1}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3e^{-3t}-e^{-t}) + 4\cdot\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t}) & \frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t}) \\ -\frac{3}{2}(e^{-t}-e^{-3t}) & \frac{1}{2}(3e^{-3t}-e^{-t}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t} \\ -\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-3t} & \cancel{\frac{3}{2}e}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} \frac{s+4}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{-3}{(s+1)(s+3)} & \frac{s}{(s+1)(s+3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+3)s} \\ \frac{1}{(s+1)(s+3)} \end{pmatrix}$$

$$L^{-1}(E) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}e^{-3t}-\frac{3}{2}e^{-t}) \\ \frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t}) \end{pmatrix}$$

(2) $$A^*(T_0) = L^{-1}(sI-A)^{-1}\Big|_{t=T_0} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{-T_0}-\frac{1}{2}e^{-3T_0} & \frac{1}{2}e^{-T_0}-\frac{1}{2}e^{-3T_0} \\ -\frac{3}{2}e^{-T_0}+\frac{3}{2}e^{-3T_0} & -\frac{1}{2}e^{-T_0}+\frac{3}{2}e^{-3T_0} \end{pmatrix}$$

$$B^*(T_0) = \int_0^{T_0} e^{At}B\,dt = \int_0^{T_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t} \\ -\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-3t} \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-3t}\Big|_0^{T_0} \\ \frac{1}{2}e^{-t}-\frac{3}{6}e^{-3t}\Big|_0^{T_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-T_0}+\frac{1}{6}e^{-3T_0}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2}e^{-T_0}-\frac{1}{2}e^{-3T_0} \end{pmatrix}$$

$$X[(k+1)T_0] = A^*(T_0)X(kT_0) + B^*(T_0)U(kT_0).$$

哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
地址：中国 · 哈尔滨西大直街 92 号 邮编 P.C：150001 电话 Tel：0451-86412114
Addr: 92West Da Zhi St.Harbin China 传真 Fax: 0451-86221048 电传 Telex: 87217 HITCN

P252 例12.1

$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2+x_2^2)$

$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2+x_2^2)$

$f(0,t)=0$

$V(x,t) = x_1^2+x_2^2$ 正定

$\dot{V}(x,t) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\cdot\dot{x}_2$

$= 2x_1(x_2 - x_1(x_1^2+x_2^2)) + 2x_2(-x_1 - x_2(x_1^2+x_2^2))$

$= 2x_1x_2 - 2x_1^2(x_1^2+x_2^2) + (-2x_1x_2 - 2x_2^2(x_1^2+x_2^2))$

$= -2x_1^2(x_1^2+x_2^2) - 2x_2^2(x_1^2+x_2^2)$ 负定

$\lim\limits_{\|x\|\to\infty} V(x,t) = \infty$，则大范围一致渐近稳定.

P252 例12.2

$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{f}{m}x_1 - \frac{f}{m}x_2 \end{cases}$

$f(0,t)=0$

$V(x,t) = \frac{1}{2}mx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2$ 正定

$\dot{V}(x,t) = mx_1\dot{x}_1 + mx_2\dot{x}_2 = mx_1x_2 + mx_2(-\frac{f}{m}x_1 - \frac{f}{m}x_2)$

$= mx_1x_2 - fx_1x_2 - fx_2^2$

当 $m=f$ 时，$\dot{V}(x,t) = -fx_2^2$ 负半定

$\dot{V}(\Phi(t,x_0,t_0),t)$ 对 $\forall t_0$，$x_0 \neq 0$，假设恒等于 0 $(t \geq t_0)$

则 $x_2 \equiv 0$，$\dot{x}_1 \equiv 0$，

当 $x_1 \equiv c \neq 0$ 时，$\dot{x}_2 = -\frac{f}{m}x_1 \neq 0$，即 $x_2 \neq 0$，矛盾

因此 $\dot{V}(\Phi(t,x_0,t_0),t) \neq 0$.

∴大范围渐近稳定

P253. 例12.3

$\begin{cases} \dot{x}_1 = kx_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$

$f(0,t)=0$

$V(x,t) = x_1^2 + kx_2^2$ 正定

$\dot{V}(x,t) = 2x_1\dot{x} + 2kx_2\dot{x}_2$

$= 2x_1kx_2 + (-2kx_1x_2) = 0$

$V(x,t) = kx_1^2 + x_2^2$ 正定

$\dot{V}(x,t) = 2kx_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$

$= 2k^2x_1x_2 + (-2x_1x_2)$

$= 2x_1x_2(k^2-1)$ 当 $k^2<1$ 时

不能判断是负半定

19期末4

$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 可见是线性定常系统.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$，取正定对称矩阵 $Q=I$，设正定对称矩阵 $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$

通过 $A^TP + PA = -Q$，有：

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6p_{12} & -6p_{22} \\ p_{11}-5p_{12} & p_{12}-5p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6p_{12} & p_{11}-5p_{12} \\ -6p_{22} & p_{12}-5p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$-12p_{12} = -1 \Rightarrow p_{12} = \frac{1}{12}$

$-6p_{22} + p_{11} - 5p_{12} = 0 \Rightarrow -6p_{22} + p_{11} = \frac{5}{12}$

$p_{11} - 5p_{12} - 6p_{22} = 0 \Rightarrow -6p_{22} + p_{11} = \frac{5}{12} \Rightarrow p_{11} = \frac{5}{12} + \frac{7}{10} = \frac{25+42}{60} = \frac{67}{60}$

$2p_{12} - 10p_{22} = -1 \Rightarrow -10p_{22} = -1 - \frac{1}{6} \Rightarrow p_{22} = +\frac{7}{6\times10} = \frac{7}{60}$

$\therefore P = \begin{pmatrix} \frac{67}{60} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{7}{60} \end{pmatrix}$ $|P_1| = \frac{67}{60} > 0$ $|P_2| = \frac{67}{60}\times\frac{7}{60} - \frac{1}{12}\times\frac{1}{12} > 0$

$\because$ P为正定实对称矩阵, $\therefore$ 系统在平衡点处大范围渐近稳定.

李雅普诺夫函数 $V(x,t) = x^T P x = \left(\frac{67}{60}x_1 + \frac{1}{12}x_2 \quad \frac{1}{12}x_1 + \frac{7}{60}x_2\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$= \frac{67}{60}x_1^2 + \frac{1}{12}x_1x_2 + \frac{1}{12}x_1x_2 + \frac{7}{60}x_2^2$

$= \frac{67}{60}x_1^2 + \frac{1}{6}x_1x_2 + \frac{7}{60}x_2^2.$

$\dot V(x,t) = \left(\frac{67}{30}x_1 + \frac{1}{6}x_2\right)\dot x_1 + \left(\frac{7}{30}x_2 + \frac{1}{6}x_1\right)\dot x_2$

$= \left(\frac{67}{30}x_1 + \frac{1}{6}x_2\right)x_2 + \left(\frac{7}{30}x_2 + \frac{1}{6}x_1\right)(-6x_1 - 5x_2)$

$= \underline{\frac{67}{30}x_1x_2} + \frac{1}{6}x_2^2 \underline{- \frac{7}{5}x_1x_2} - \frac{7}{6}x_2^2 - x_1^2 \underline{- \frac{5}{6}x_1x_2}$

$= \frac{67-42-25}{30}x_1x_2 - x_2^2 - x_1^2 = -x_2^2 - x_1^2$

方法二: $\begin{cases} \dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = -6x_1 - 5x_2 \end{cases}$ $f(0,t) = 0.$

令 $V(x,t) = k_1x_1^2 + k_2x_2^2$

$\dot V(x,t) = 2k_1x_1\dot x_1 + 2k_2x_2\dot x_2$

$= 2k_1x_1x_2 + 2k_2x_2(-6x_1 - 5x_2)$

$= 2k_1x_1x_2 - 12k_2x_1x_2 - 10k_2x_2^2$

$= (2k_1 - 12k_2)x_1x_2 - 10k_2x_2^2$

令 $2k_1 = 12k_2$

取 $k_1 = 6$ $k_2 = 1$

则取 $V(x,t) = 6x_1^2 + x_2^2$ ← 正定

则 $\dot V(x,t) = -60x_2^2$ ← ~~负半定~~. $\dot V(x,t) \le 0$ 且 $\dot V(x,t)$ 不恒为0

$\therefore$ 又 $\because$ $\lim_{\|x\|\to\infty} V(x,t) = \infty$

$\therefore$ 在平衡点处大范围渐近稳定.

2 ex 4

哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY
1920 HIT
地址：中国 · 哈尔滨西大直街 92 号 邮编 P.C：150001 电话 Tel：0451-86412114
Addr: 92West Da Zhi St.Harbin China 传真 Fax: 0451-86221048 电传 Telex: 87217 HITCN

P266 例13.7

$A=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $AB=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$

$(B\ \ AB)=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ 秩为2 能控

例13.8 $A=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $AB=\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$

$(B\ \ AB)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$ 秩为$1\neq 2$ 不具有状态能控性

$C=(1\ \ 0)$ $CB=1$ $CAB=(-4\ \ 1)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=-2$ D不存在

则输出能控性矩阵为 ~~$(1\ \ -2\ \ 0)$~~ $(1\ \ -2)$ 秩为1. 具有输出能控性.

PPT6.1

$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u$ $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 求其传递函数.

$y=(3\ \ 1)x$ $C=(3\ \ 1)$

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=(3\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=(3\ \ 1)\cdot\frac{1}{s(s+3)+2}\begin{pmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$=(3\ \ 1)\begin{pmatrix}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{3+s}{(s+1)(s+2)}$$

19期末题5 $\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u$ $y=(1\ \ 0)x$

$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 令$K=(k_1\ \ k_2)$

~~A=~~ 判别能控性

$AB=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ $(B\ \ AB)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -5\end{pmatrix}$ 秩为2，∴能控.

$$A-BK=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -6-k_1 & -5-k_2\end{pmatrix}$$

$$|\lambda I-(A-BK)|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 6+k_1 & \lambda+5+k_2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+5+k_2)+(6+k_1)=\lambda^2+(5+k_2)\lambda+(6+k_1)$$

由闭环极点为 -5 -20，有 $(\lambda+5)(\lambda+20)=\lambda^2+25\lambda+100=\lambda^2+(5+k_2)\lambda+(6+k_1)$

$k_2=20$

$k_1=94$

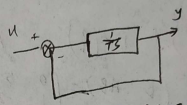
$\therefore k=(94\ \ 20)$

闭环传递函数为 $\frac{Y}{r}=\frac{1}{s^2+\cancel{5+2}\,25s+100}k_r$

要令 $\frac{Y}{r}=1$，则 $k_r=100$.

17期末题 5

$\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-3\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u.$



配置极点，令其为一阶惯性系统

$e^{-t/T}=e^{-0.3/T}=0.05$

$\Downarrow$

$-0.3/T=\ln 0.05$

$T=0.100$

则 $-\frac{1}{T}=-10=\lambda_1$ 为主导极点.

另两极点配置为 $\lambda_2=\lambda_3=-50$.

$(u-y)G(s)=y$

$uG(s)=(1+G(s))y$

$\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{y}{u}$.

$1+G(s)=1+\frac{1}{Ts}=\frac{Ts+1}{Ts}$

~~求闭环传函~~

$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-3\end{pmatrix}$ $\quad K=(k_1\ \ k_2\ \ k_3)$

$A-BK=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}(k_1\ k_2\ k_3)$

$=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-k_1&-2-k_2&-3-k_3\end{pmatrix}$

经过反馈后其特征方程为

$s^3+(3+k_3)s^2+(2+k_2)s+k_1=(s+10)(s+50)^2$

$=(s+10)(s^2+100s+2500)$

$=s^3+110s^2+3500s+25000$

则 $k_3=107$

$k_2=3498$

$k_1=25000$

$K_r=25000$

2 ex 5

哈爾濱工業大學

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

地址：中国·哈尔滨西大直街 92 号 邮编 P.C：150001 电话 Tel：0451-86412114

Addr: 92West Da Zhi St.Harbin China 传真 Fax: 0451-86221048 电传 Telex: 87217 HITCN

19 ~~提~~ 期末

1.(1) 在零极点不相消的前提下，特征值与传递函数的极点相等.

(2) $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$.

(3) 原系统的状态完全能观测. $(C \quad CA \quad CA^2 \cdots CA^{n-1})^T$.

(4) 李雅普诺夫 一致性、渐近性、大范围.

表述？

2、(1) ~~输出 p~~ 输入 u

状态变量 $x \quad \dot{x} \quad p$

$\qquad\quad x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cancel{\ }\\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cancel{\ }\\ \\ \end{pmatrix}u$$

$$y=(0 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$\cancel{\dot{x}=\frac{Q-\frac{V}{\beta_e}\dot{p}}{A}=\frac{K_q u-K_p p-\frac{V}{\beta_e}\dot{p}}{A}}$$

(2) $\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{u}=(3s+6)\cdot\frac{1}{s^3+3s^2+2s}=\frac{3s+6}{\frac{1}{3}s(3s+6)(s+1)}$

$$\begin{cases}3\dot{z}+6z=y\\ u=\dddot{z}+3\ddot{z}+2\dot{z}\end{cases}$$

状态变量取 $z \ \dot{z} \ \ddot{z}$（$x_1 \ x_2 \ x_3$），输入 u

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}u$$

$$y=(6 \quad 3 \quad 0)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$B=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -3\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -3\end{pmatrix}$ $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -3\\ 0 & 6 & 7\end{pmatrix}$ $A^2B=\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 7\end{pmatrix}$

能控矩阵 $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 1 & -3 & 7\end{pmatrix}$ $r=3$ ∴能控

$C=(6 \quad 3 \quad 0)$ $CA=(0 \quad 6 \quad 3)$ $CA^2=(0 \quad -6 \quad -3)$

能观矩阵 $\begin{pmatrix}6 & 3 & 0\\ 0 & 6 & 3\\ 0 & -6 & -3\end{pmatrix}$ $r=2$ ∴不能观.

∴不能保证能控又能观.

18期末.

1.(1) ?

(2) $A^TP+PA=-Q$ P正定对称 Q正定对称

$V(x,t)=x^TPx$

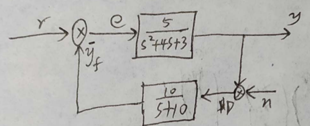
(3) 可控.

(4) 独立设计,互不影响.

2.(1) 大同小异

(2) 大同小异

(3)



$\frac{Y}{E}=\frac{5}{s^2+4s+3}$ $\frac{Y_f}{D}=\frac{10}{s+10}$

$\begin{cases} 5e=\ddot{y}+4\dot{y}+3y \\ \dot{y}_f+10y_f=10d \\ d=y+n \end{cases}$

状态变量 $\underset{x_1}{y}\ \underset{x_2}{\dot{y}}\ \underset{x_3}{y_f}$

$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-3&-4&-5\\10&0&-10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\5&0\\0&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\\n\end{pmatrix}$

$y=(1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

3.(1) $L^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)]$ $U(s)=\frac{1}{s}$ $\begin{pmatrix}s&-1\\4&s+5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\frac{1}{s}=\frac{1}{s(s+5)+4}\begin{pmatrix}s+5&1\\-4&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\frac{1}{s}$

$=\frac{1}{s(s+5)+4}\begin{pmatrix}\frac{1}{s}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{s(s+1)(s+4)}\\ \frac{1}{(s+1)(s+4)}\end{pmatrix}$

则状态响应为 $\begin{pmatrix}\frac{1}{4}(1+\frac{1}{3}e^{-4t}-\frac{4}{3}e^{-t})\\ \frac{1}{3}(e^{-t}-e^{-4t})\end{pmatrix}$

(2) $\frac{de^{At}}{dt}=\begin{pmatrix}-2\cdot3e^{-2t}-(-3)\cdot2e^{-3t} & -2\cdot e^{-2t}-(-3)e^{-3t}\\ -2\cdot(-6e^{-2t})+(-3)6e^{-3t} & -2\cdot(-2e^{-2t})+(-3)3e^{-3t}\end{pmatrix}=Ae^{At}$

$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & e^{-2t}-e^{-3t}\\ -6e^{-2t}+6e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{pmatrix}$

$a_{11}=0$ $a_{12}=1$

~~$a_{21}=2$ $a_{22}=0$~~

$\underbrace{(3a_{21}-6a_{22})}_{=12}e^{-2t}+\underbrace{(6a_{22}-2a_{21})}_{=-18}e^{-3t}$

$\begin{cases}3a_{21}-6a_{22}=12\\ -2a_{21}+6a_{22}=-18\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}a_{21}=-6\\a_{22}=-5\end{matrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix}0&1\\-6&-5\end{pmatrix}$

$\Phi^{-1}=\Phi(-t)=\begin{pmatrix}3e^{2t}-2e^{3t} & e^{2t}-e^{3t}\\ -6e^{2t}+6e^{3t} & -2e^{2t}+3e^{3t}\end{pmatrix}$