Chpter6 上机报告

一、题目

13.(上机题 2) 已知积分

$$I=\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$$

(1) 用 Romberg 公式计算改积分,使误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-7}$.

(2) 用复化 3 点 Gauss-Legendre 公式计算它,使误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-7}$.

二、分析及解法

（1）Romberg 公式取其 Richardson 外推公式进行计算。

（2）对于区间[a,b]上的复化三点 Gauss-Legendre 公式如下所示：

则在$[a,b]$上的复化三点 Gauss-Legendre 求积公式[2]为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x\approx$$

$$\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{5}{9}f\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}-\frac{\sqrt{15}}{10}h\right)+\frac{8}{9}f\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{5}{9}f\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}+\frac{\sqrt{15}}{10}h\right)\right] \qquad (11)$$

三、程序以及运行结果 （matlab）

Romberg 公式：

```
function Romberg
% 龙贝格(Romberg 数值求解公式)
% inputs:
%    -fun：积分函数句柄
%    -a/b：积分上下限
%    -tol：积分误差
% Outputs:
%    -R：Romberg 积分值
%    -k：迭代次数
%    -T：整个迭代过程

a = 1e-6;%分母不能为 0，用比较小的数代替
b = 1;
epsilon = 5e-8;
tol = epsilon;
```

```
fun = @(x) atan(x)*(x)^(-1.5);
k=0; % 迭代次数
n=1; % 区间划分个数
h=b-a;
T=h/2*(fun(a)+fun(b));%计算 T(0,0)
err=1;%积分误差初始化
while err>=tol
    k=k+1;
    h=h/2;
    tmp=0;
    for i=1:n
        tmp=tmp+fun(a+(2*i-1)*h);%此时直接用 0 代替 a
    end
    T(k+1,1)=T(k)/2+h*tmp;%外推算法
    for j=1:k
        T(k+1,j+1)=T(k+1,j)+(T(k+1,j)-T(k,j))/(4^j-1);%外推算法
    end
    n=n*2;
    err=abs(T(k+1,k+1)-T(k,k));%更新积分误差
end
R=T(k+1,k+1)
end
```

Gauss 公式：

```
function Gauss
% 复化三点高斯求积公式

a = 0;%分母不能为 0，用比较小的数代替
b = 1;
epsilon = 5e-8;
tol = epsilon;
fun = @(x) atan(x)*(x)^(-1.5);
k=0; % 迭代次数
n=2; % 区间划分个数
h=b-a;
 G(1)=(h/2)*((5/9)*fun(0.5*(a+b)-0.1*h*sqrt(15))+(8/9)*fun(0.5*(a+b))+(5/9)*fun(
 0.5*(a+b)+0.1*h*sqrt(15)));%计算未复合的 Gauss
err=1;%积分误差初始化
while err>=tol
    k=k+1;
    h=1/n;
    tmp=0;
    for i=0:n-1

        tmp=tmp+(h/2)*((5/9)*fun(0.5*(a+i*h+a+(i+1)*h)-0.1*h*sqrt(15))+(8/9)
```

```
            *fun(0.5*(a+i*h+a+(i+1)*h))+(5/9)*fun(0.5*(a+i*h+a+(i+1)*h)+0.1*h*s
            qrt(15)));
        end

        G(k+1)=tmp;%新的值放入数组
        n=n+1;
        err=abs(G(k+1)-G(k));%更新积分误差
    end
    G = G(k+1)
    end
```

运行结果：

命令行窗口

```
>> Romberg

R =

    1.8951

>> Gauss

G =

    1.8953
```