

## Chpter5\_3 上机报告

### 一、题目

19.(上机题 2) 设平面上曲线  $C$  的方程为  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . 将区间  $[a, b]$  离散得到函数  $x(t)$ ,  $y(t)$  的插值数据, 然后分别用三次样条函数

$$S(t), S'(t)$$

将其近似表示, 利用它们就可以近似的绘制曲线.

设  $C$  分别为心脏线, 摆线以及星形线, 给出程序并完成曲线的近似绘制.

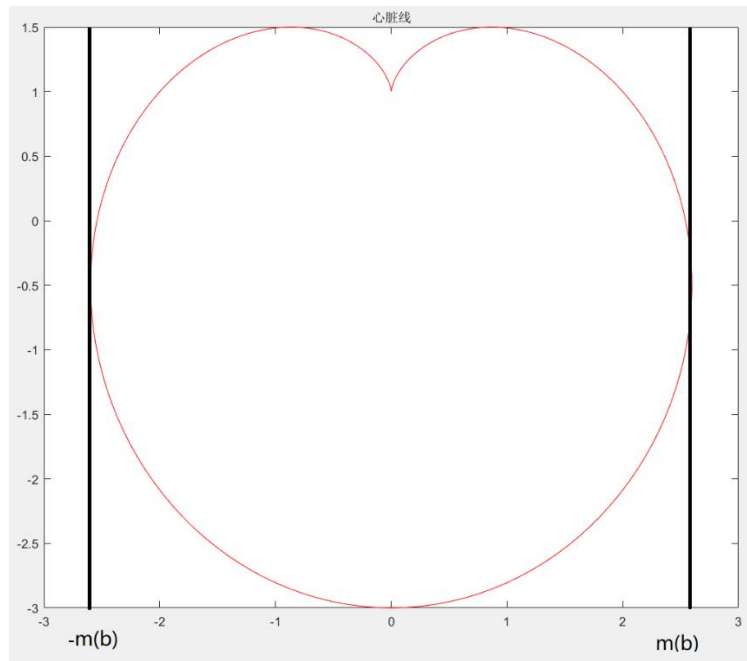
### 二、分析及解法

通过 matlab 画出三种曲线, 然后通过三次样条插值函数画出近似的曲线, 并将近似曲线和原来的曲线放在同一张图中进行比较。

由于所编写的三次样条插值函数画出的是  $x$  和  $y$  一一对应关系的映射, 因此心脏线只选取了上半部分进行近似。对心脏线左右端点的计算程序如下:

```
m=0.5*pi:0.001*pi:pi;  
y=abs(cos(m)-cos(2*m));  
[a,b]=min(y);  
m(b);
```

其中  $m(b)$  对应的值如下图所示, 黑线是心脏线的两条切线。



对两个端点处的斜率进行了计算, 这样就得到了左右端点的导数值来作为边界条件对函数进行计算。

### 三、程序以及运行结果（采用 matlab）

(a)主函数：Chapter5\_3m

```
clear;clc;
%% (1)心脏线
figure(1);
t=0:pi/100:2*pi;
r=1;%放大因子
x=r*(2*sin(t)-sin(2*t));
y=r*(2*cos(t)-cos(2*t));
subplot(3,1,1);% x 表示共有几行，y 表示有几列，n 第几幅图片
plot(x,y,'r');%用红色曲线画图
title('心脏线');
grid;%画网格
```

```
%求心脏线最左边的 t 值，即 x 的最小值
m=0.5*pi:0.001*pi:pi;
y=abs(cos(m)-cos(2*m));
[a,b]=min(y);
m(b);
hold on
%心脏线的三次样条插值
t=-m(b):pi/10:m(b);%取点画插值点
r=1;
x=r*(2*sin(t)-sin(2*t));
y=r*(2*cos(t)-cos(2*t));
y0=+inf;          % S'(x0)=f'(x0)=y0
yn=-inf;          % S'(xn)=f'(xn)=yn
x0=r*(2*sin(t)-sin(2*t));
s=threesimple(x,y,x0,y0,yn);
plot(x0,s,'b');    %绘制第一边界条件插值函数图像
grid on
hold on
plot(x,y,'o')%插值点
xlabel('自变量 X'), ylabel('因变量 Y')
```

```
%% (2)摆线
figure(1);
r = 1;
t = -2*r*pi:0.001:2*r*pi;
x = r*(t-sin(t));
y = r*(1-cos(t));
subplot(3,1,2);
plot(x,y,'r');
title('摆线');
```

```

grid;

hold on
%摆线的三次样条插值
t=0:pi/10:2*r*pi;%取点画插值点
r=1;
x = r*(t-sin(t));
y = r*(1-cos(t));
y0=+inf;          % S'(x0)=f'(x0)=y0
yn=-inf;          % S'(xn)=f'(xn)=yn
x0=0:pi/10:2*r*pi;%取点插值
s=threesimple(x,y,x0,y0,yn);
plot(x0,s,'b');    %绘制第一边界条件插值函数图像
grid on
hold on
plot(x,y,'o')%插值点
xlabel('自变量 X'), ylabel('因变量 Y')

```

```

%% (3)星形线
figure(1);
r = 1;
t = -2*r*pi:0.001:2*r*pi;%规定 t 的取值,间隔去 0.001
x=r*cos(t).^3;
y=r*sin(t).^3;
subplot(3,1,3);
plot(x,y,'r')
title('星形线');
grid;

```

```

hold on
%摆线的三次样条插值
t=1.5*r*pi:pi/20:2*r*pi;%取点画插值点
r=1;
x=r*cos(t).^3;
y=r*sin(t).^3;
y0=+inf;          % S'(x0)=f'(x0)=y0
yn=0;             % S'(xn)=f'(xn)=yn
x0=r*cos(t).^3;%取点插值
s=threesimple(x,y,x0,y0,yn);
plot(x0,s,'b');    %绘制第一边界条件插值函数图像
grid on
hold on
plot(x,y,'o')%插值点
xlabel('自变量 X'), ylabel('因变量 Y')

```

(b)三次样条插值的参数计算函数: Cubic\_Spline.m

```
function [ D,h,A,g,M ] = Cubic_Spline( X,Y,y0,yn )
%      自然边界条件的三次样条函数(第二种边界条件)
%      此函数为M值求值函数
%      D,h,A,g,M输出量分别为系数矩阵D, 插值宽度h, 差商表A, g值,M值
n=length(X);
A=zeros(n,n);A(:,1)=Y';D=zeros(n-2,n-2);g=zeros(n-2,1);
for j=2:n
    for i=j:n
        A(i,j)=(A(i,j-1)- A(i-1,j-1))/(X(i)-X(i-j+1));
    end
end

for i=1:n-1
    h(i)=X(i+1)-X(i);
end
for i=1:n-2
    D(i,i)=2;
    g(i,1)=(6/(h(i+1)+h(i)))*(A(i+2,2)-A(i+1,2));
end
for i=2:n-2
    u(i)=h(i)/(h(i)+h(i+1));
    n(i-1)=h(i)/(h(i-1)+h(i));
    D(i-1,i)=n(i-1);
    D(i,i-1)=u(i);
end
M=D\g;
M=[0;M;0];
end
```

(c)三次样条插值函数计算: threesimple.m

```
function s=threesimple(X,Y,x,y0,yn)
%      第二边界条件函数
%      s函数表示三次样条插值函数插值点对应的函数值
%      根据三次样条参数函数求出的D,h,A,g,M
%      x表示求解插值点函数点, X为已知插值点
[D,h,A,g,M]=Cubic_Spline(X,Y,y0,yn);
n=length(X); m=length(x);
for t=1:m
    for i=1:n-1
        if (x(t)<=X(i+1))&&(x(t)>=X(i))
            p1=M(i,1)*(X(i+1)-x(t))^3/(6*h(i));
            p2=M(i+1,1)*(x(t)-X(i))^3/(6*h(i));
```

```

        p3=(A(i,1)-M(i,1)/6*(h(i))^2)*(X(i+1)-x(t))/h(i);
        p4=(A(i+1,1)-M(i+1,1)/6*(h(i))^2)*(x(t)-X(i))/h(i);
        s(t)=p1+p2+p3+p4;
        break;
    else
        s(t)=0;
    end
end
end
end
end

```

运行结果如下：红色为标准曲线，蓝色是三次样品插值函数，圆点是选取的插值点

