

Chapter5-4 上机报告

一、题目

20.(上机题 3) 一种商品的需求量和其价格有一定关系.先对一定时期内的商品价格 x 与需求量 y 进行观察,取得如下的样本数据:

价格	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
需求量	58	50	44	38	34	30	29	26	25	24

(1) 对上述数据,分别求出其 2, 3, 4 次最佳平方逼近多项式.画出图形,并比较拟合误差:

$$Q = \sum_{k=1}^n (q(x_k) - y_k)^2.$$

(2) 假设拟合函数分别为:

$$a + \frac{b}{x}, a + b \ln x, ae^{bx}, \frac{1}{a + bx},$$

分别求出 a, b 的值.绘图,计算误差,并比较优劣.

二、分析及解法

- (1) 离散情形的最佳平方逼近, 首先根据次数, 写出拟合函数的形式. 然后根据基函数以及其正规方程组, 解出基底所对应的系数, 得到最佳平方逼近多项式。
- (2) 先将拟合函数改写成具有线性关系的式子, 然后再求其最小二乘解。

$a+b/x$ 将 $1/x$ 作为 t

$a+b \ln x$ 将 $\ln x$ 作为 t

$a \cdot e^{(bx)}$ 改写成 $\ln y = \ln a + bx$ 然后将 $\ln y$ 作为 z

$1/(a+bx)$ 改写成 $1/y = a+bx$ 然后将 $1/y$ 改写成 z

三、程序以及运行结果 (matlab)

- (1) 总程序计算拟合误差 (总程序代码较长且和子程序代码基本相同, 见.m 文件):

总程序的运行结果:

2 次最佳平方逼近: $Q_2 = 3.2167$

3 次最佳平方逼近: $Q_3 = 1.5103$

4 次最佳平方逼近: $Q_4 = 1.4679$

$y = a + b/x$: $T_1 = 57.3023$

$y = a + b \ln x$: $T_2 = 8.7789$

$y = ae^{(bx)}$: $T_3 = 41.8446$

$y = 1/(a+bx)$: $T_4 = 7.7324$

```
命令行窗口
Q2 =
    3.2167

Q3 =
    1.5103

Q4 =
    1.4679

T1 =
    57.3023

T2 =
    8.7789

T3 =
    41.8446

T4 =
    7.7324
```

(2) 子程序画图，计算拟合误差，每个子程序的代码如下：

2 次和 3 次最佳平方逼近 (twothree.m)：

```
clear;clc;
%%运行的主函数
%样本数据
X = [2;3;4;5;6;7;8;9;10;11];
Y = [58;50;44;38;34;30;29;26;25;24];
syms x;
%% (1) 2 次最佳平方逼近
m0 = [1;1;1;1;1;1;1;1;1;1];%定义基底
m1 = X;
m2 = m1.*m1;
m = [m0'*m0 m0'*m1 m0'*m2; m1'*m0 m1'*m1 m1'*m2; m2'*m0 m2'*m1 m2'*m2];
c = m\[Y'*m0; Y'*m1; Y'*m2];
c0 = c(1,1);
c1 = c(2,1);
c2 = c(3,1);
y(x) = c0+c1*x+c2*x.^2;
%拟合误差 Q2
Q2 = 0;
for i=1:1:10
    Q2 = Q2+double((y(X(i,1))-Y(i,1))^2);
end
```

Q2

```
subplot(2,1,1);% x 表示共有几行, y 表示有几列, n 第几幅图片
x=2:0.1:11;
plot(x,y(x),'r');%用红色曲线画图
title(['2 次最佳平方逼近 拟合误差: ',num2str(Q2)]);
grid;%画网格
%% (1)3 次最佳平方逼近
syms x;
m0 = [1;1;1;1;1;1;1;1;1];%定义基底
m1 = X;
m2 = m1.*m1;
m3 = m2.*m1;
m = [m0'*m0 m0'*m1 m0'*m2 m0'*m3; m1'*m0 m1'*m1 m1'*m2 m1'*m3; m2'*m0
m2'*m1 m2'*m2 m2'*m3; m3'*m0 m3'*m1 m3'*m2 m3'*m3];
c = m\[Y'*m0; Y'*m1; Y'*m2; Y'*m3];
c0 = c(1,1);
c1 = c(2,1);
c2 = c(3,1);
c3 = c(4,1);
y(x) = c0+c1*x+c2*x.^2+c3*x.^3;
%拟合误差 Q3
Q3 = 0;
for i=1:1:10
    Q3 = Q3+double((y(X(i,1))-Y(i,1))^2);
end
Q3
```

```
subplot(2,1,2);% x 表示共有几行, y 表示有几列, n 第几幅图片
x=2:0.1:11;
plot(x,y(x),'r');%用红色曲线画图
title(['3 次最佳平方逼近 拟合误差: ',num2str(Q3)]);
grid;%画网格
```

4 次最佳平方逼近(four.m):

```
clear;clc;
%%运行的主函数
%样本数据
X = [2;3;4;5;6;7;8;9;10;11];
Y = [58;50;44;38;34;30;29;26;25;24];
syms x;
%% (1)4 次最佳平方逼近
m0 = [1;1;1;1;1;1;1;1;1];%定义基底
m1 = X;
m2 = m1.*m1;
m3 = m2.*m1;
m4 = m3.*m1;
```

```

m = [m0'*m0 m0'*m1 m0'*m2 m0'*m3 m0'*m4;
      m1'*m0 m1'*m1 m1'*m2 m1'*m3 m1'*m4;
      m2'*m0 m2'*m1 m2'*m2 m2'*m3 m2'*m4;
      m3'*m0 m3'*m1 m3'*m2 m3'*m3 m3'*m4
      m4'*m0 m4'*m1 m4'*m2 m4'*m3 m4'*m4];
c = m\[Y'*m0; Y'*m1; Y'*m2; Y'*m3; Y'*m4];
c0 = c(1,1);
c1 = c(2,1);
c2 = c(3,1);
c3 = c(4,1);
c4 = c(5,1);
y(x) = c0+c1*x+c2*x.^2+c3*x.^3+c4*x.^4;
%拟合误差 Q4
Q4 = 0;
for i=1:1:10
    Q4 = Q4+double((y(X(i,1))-Y(i,1))^2);
end
Q4
x=2:0.1:11;
plot(x,y(x),'r');%用红色曲线画图
title(['4 次最佳平方逼近 拟合误差: ',num2str(Q4)]);
grid;%画网格
y= a+b/x (y_ab.m):
    clear;clc;
%%运行的主函数
%样本数据
X = [2;3;4;5;6;7;8;9;10;11];
Y = [58;50;44;38;34;30;29;26;25;24];
syms x;
%% (2)a+b/x
syms t
T = X.^(-1);
m0 = [1;1;1;1;1;1;1;1;1;1];%定义基底
m1 = T;
m = [m0'*m0 m0'*m1; m1'*m0 m1'*m1];
c = m\[Y'*m0; Y'*m1];
a = c(1,1);
b = c(2,1);
y(t) = a+b*t;
%拟合误差 T1
T1 = 0;
for i=1:1:10
    T1 = T1+double((y(T(i,1))-Y(i,1))^2);
end

```

```

T1
y(x) = a+b/x;
x=2:0.1:11;
plot(x,y(x),'r');%用红色曲线画图
title(['y=a+b/x 拟合误差: ',num2str(T1)]);
grid;%画网格
y=a+blnx (y_ab1.m):
    clear;clc;
    %%运行的主函数
    %样本数据
    X = [2;3;4;5;6;7;8;9;10;11];
    Y = [58;50;44;38;34;30;29;26;25;24];
    syms x;
    syms t;
    %% (2)a+blnx
    T = log(X);
    m0 = [1;1;1;1;1;1;1;1;1;1];%定义基底
    m1 = T;
    m = [m0'*m0 m0'*m1; m1'*m0 m1'*m1];
    c = m\[Y'*m0; Y'*m1];
    a = c(1,1);
    b = c(2,1);
    y(t) = a+b*t;
    %拟合误差 T2
    T2 = 0;
    for i=1:1:10
        T2 = T2+double((y(T(i,1))-Y(i,1))^2);
    end
    T2
    y(x) = a+b*log(x);
    x=2:0.1:11;
    plot(x,y(x),'r');%用红色曲线画图
    title(['y=a+blnx 拟合误差: ',num2str(T2)]);
    grid;%画网格
y=ae^(bx) (y_ab2.m):
    clear;clc;
    %%运行的主函数
    %样本数据
    X = [2;3;4;5;6;7;8;9;10;11];
    Y = [58;50;44;38;34;30;29;26;25;24];
    syms x;
    syms t;
    %% (2)a*e^(bx)
    Z = log(Y);

```

```

m0 = [1;1;1;1;1;1;1;1;1;1];%定义基底
m1 = X;
m = [m0'*m0 m0'*m1; m1'*m0 m1'*m1];
c = m\[Z'*m0; Z'*m1];
c0 = c(1,1);
c1 = c(2,1);
a = exp(c0);
b = c1;
y(t) = a*exp(b*t);
%拟合误差 T3
T3 = 0;
for i=1:1:10
    T3 = T3+double((y(X(i,1))-Y(i,1))^2);
end
T3
y(x) = a+b*log(x);
x=2:0.1:11;
plot(x,y(x),'r');%用红色曲线画图
title(['y=a*e^(bx) 拟合误差: ',num2str(T3)]);
grid;%画网格

```

y=1/(a+bx) (y_ab3.m):

```

clear;clc;
%%运行的主函数
%样本数据
X = [2;3;4;5;6;7;8;9;10;11];
Y = [58;50;44;38;34;30;29;26;25;24];
syms x;
syms t;
%% (2)1/(a+bx)
Z = Y.^(-1);
m0 = [1;1;1;1;1;1;1;1;1;1];%定义基底
m1 = X;
m = [m0'*m0 m0'*m1; m1'*m0 m1'*m1];
c = m\[Z'*m0; Z'*m1];
c0 = c(1,1);
c1 = c(2,1);
a = c0;
b = c1;
y(t) = 1/(a+b*t);
%拟合误差 T4
T4 = 0;
for i=1:1:10
    T4 = T4+double((y(X(i,1))-Y(i,1))^2);
end

```

```

T4
t=2:0.1:11;
plot(t,y(t),'r');%用红色曲线画图
title(['y=a1/(a+bx) 拟合误差: ',num2str(T4)]);
grid;%画网格

```

运行结果：

