ИСПИТНА ПИТАЊА - ВЕРОВАТНОЋА

1. Простор елементарних исхода, догађаји и релације и операције над њима

ДЕФ 1: **Случајан експеримент** је комплекс услова који се могу понављати бесконачно пута, а не доводе увек до истог исхода

ДЕФ 2: **Елементарни исход** је појам који се формално не дефинише. То је оно што може да се деси у случајном експерименту.

ДЕФ 3: **Простор елементарних исхода** чини скуп свих елементарних исхода. Обележава се са Ω.

-Простор елементарних исхода може бити:

а) Коначан: Бацају се две коцкице ($\Omega = \{11, 12, \dots 16, \dots 66\}$)

б) Пребројив: Кошаркаш гађа на кош док га не погоди први пут ($\Omega = \{1, 01, 001, \dots, 00\dots01, \dots\}$)

в) Непребројив: Бира се број из сегмента $(0,1)$ ($\Omega = (0,1)$)

- Догађаји представљају подскуп простора елементарних исхода

ДЕФ 4: **Догађај A** се реализовао ако се реализовао исход који му припада:

- Сигуран догађај је Ω
- Немогућ догађај је $\emptyset$

Релације:

- Нека важи: $A, B \subset \Omega$

а) $A \subset B \Rightarrow$ Ако се A реализовао, онда се и B реализовао

б) $A = B \Rightarrow A$ се реализовао $\Leftrightarrow$ B се реализовао

Операције:

- Нека важи: $A, B \subset \Omega$

а) $\bar{A}$: $\bar{A}$ се реализовао ако се реализовао Ω, а није се реализовао A (комплемент)

б) $A \cdot B = A \cap B$: AB се реализовао ако се реализовао A и ако се реализовао B (пресек)

в) $A \cup B$: $A \cup B$ се реализовао ако се реализовао A или ако се реализовао B (унија)

Уопштење:

- $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$: $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ се реализује ако се реализује сваки $A_i, i \in [1, n]$
- $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$: $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ се реализује ако се реализује било који $A_i, i \in [1, n]$

* Догађај који се реализује акко се реализује бесконачно много догађаја $A_1, A_2, A_3, \dots$

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

* Догађај који се реализује акко се реализује скоро сваки догађај

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

2. σ-алгебра догађаја

Ω-ПЕИ

ДЕФ 1: Колекција $\mathcal{F}$ подскупова простора где важи:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
3) $(\forall n \in N)(A_n \in \mathcal{F}) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

зове се σ-алгебра (σ-поље)

Особине:

- Нека је колекција $\mathcal{K} = \{A, B, C, \dots\}$ σ-алгебра. Онда важи:

а) $\emptyset \in \mathcal{F}$

Δ: $\Omega \in \mathcal{F} \overset{②}{\Rightarrow} \bar{\Omega} \in \mathcal{F} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F}$

б) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Δ: $\bigcup_{\substack{n=1 \\ n \in N}}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{\bigcup_{n=1}^{n} A_n} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{n} \bar{A}_n \in \mathcal{F} \Rightarrow (\forall n \in N)(\bar{A}_n \in \mathcal{F})$

$$(\forall n \in N)(A_n \in \mathcal{F}) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

в) Коначна и пребројива унија припада $\mathcal{F}$

Примери:

а) $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$; б) $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$; в) $\mathcal{F}_3 = P(\Omega)$

Лема: Произвољан пресек много σ-алгебри дефинисаних на истом простору је σ-алгебра

Δ: 1) $(\forall i\in I)\ \Omega\in\mathcal{F}_i \Rightarrow \Omega\in\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$

2) $A\in\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i \Rightarrow (\forall i\in I)\ A\in\mathcal{F}_i \Rightarrow (\forall i\in I)\ \bar{A}\in\mathcal{F}_i \Rightarrow \bar{A}\in\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$

3) $(\forall n\in N)\ A_n\in\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i \Leftrightarrow (\forall n\in N)(\forall i\in I)\ A_n\in\mathcal{F}_i$

$\Rightarrow (\forall i\in I)(\forall n\in N)\ A_n\in\mathcal{F}_i \Rightarrow (\forall i\in I)\ \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}_i \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$

ДЕФ 2: Минимална σ-алгебра генерисана колекцијом у ознаци $\sigma(\mathcal{K})$ је најмања σ-алгебра која садржи $\mathcal{K}$, у том смислу да свака σ-алгебра која садржи $\mathcal{K}$ је надскуп од $\sigma(\mathcal{K})$

ТЕОРЕМА: Минимална σ-алгебра генерисана непразном колекцијом $\mathcal{K}$ увек постоји.

Δ: $P(\Omega)\supset\mathcal{K}$, $P(\Omega)$ је σ-алгебра

- Минимална σ-алгебра је пресек свих могућих надпородњи, јер она припада свакој σ-алгебри.

3. Борелова σ-алгебра

ДЕФ 1: **Борелова σ-алгебра** је σ-алгебра облика:

1) $\Omega=R$

2) $\mathcal{K}=\{(a,b]\mid a,b\in R,\ a<b\}$

$\mathcal{B}=\sigma(\mathcal{K})$, допуњавање

- За скуп $S\subset R$ кажемо да је Борелов скуп ако важи $S\subset\mathcal{B}$

Став:

а) $\{a\}$ је Борелов скуп

Д: $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a-\frac{1}{n}, a]}_{\text{Борелов скуп}}$

б) $[a,b]$ је -II-

Д: $[a,b] = (a,b] \cup \{a\}$

в) (a,b) је -II-

Д: $(a,b) = (a,b] \cap \overline{\{b\}}$

г) $(-\infty, b]$ је -II-

Д: $(-\infty, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (b-n, b]$

д) $[a, +\infty)$ је -II-

Д: $[a,+\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, a+n]$

ђ) R је -II-

- следи из г) и д)

Уопштење: Ако је $\Omega = R^n$ и

$\mathcal{K} = \{(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_n, b_n] \mid a_i < b_i,\ a_i, b_i \in R\}$

$\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{K})$

4. ДЕФИНИЦИЈА ВЕРОВАТНОЋЕ. Основна својства вероватноће.

ДЕФ 1: Нека је Ω простор елементарних исхода и $\mathcal{F}$ σ-алгебра над Ω. Тада уређени пар (Ω, F) се назива **мерљив простор**.

ДЕФ 2: **Вероватноћа (вероватносна мера)** је ф-ја на мерљивом простору $(\Omega, \mathcal{F})$ таква да $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ за коју важи:

(A_1) $(\forall A \in \mathcal{F})\ P(A) \geq 0$ (ненегативност)

(A_2) $P(\Omega) = 1$ (нормираност)

$(A_3)\ \forall A_1, A_2, A_3 \ldots,\ (\forall i,j\in N)(i\neq j)(A_iA_j=\emptyset)$

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad (\sigma\text{-адитивност})$$

Теорема: (Ω, F) мерљив простор, $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ веров.

а) $P(\emptyset)=0$?

Δ: $\emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots \cup \emptyset = \emptyset, \quad \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

$$\Rightarrow P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset \cup \ldots \cup \emptyset)$$

$$\overset{A_3}{\Rightarrow} = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset) \quad / -P(\emptyset)$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset)=0$$

б) $P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k), \quad A_iA_j=\emptyset$

Δ: $P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k + \emptyset + \emptyset \ldots\right)$

$$\overset{A_3}{\Rightarrow} = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)+\cancel{P(\emptyset)}^{0}+\cancel{P(\emptyset)}^{0}+\ldots$$

$$\overset{а)}{\Rightarrow} = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

в) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Δ: $P(\Omega) = P(A)+P(\bar{A}) \overset{A_1}{\Rightarrow} P(\bar{A}) = 1-P(A)$

г) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$B = A+\bar{A}B \Rightarrow P(B) = P(A+\bar{A}B)$

$$\overset{б)}{\Rightarrow} = P(A)+P(\bar{A}B), \quad P(\bar{A}B) \geq 0 \text{ по } A_1$$

$P(A) \leq P(A)+P(\bar{A}B)$

д) $0 \le P(A) \le 1$

Д: $0 \le P(A)$ по A_1

$$A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) \le P(\Omega) = 1$$

ђ) Лема о покривању: $P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Д: $A_1 + A_2 + A_3 + \dots = A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \dots$

$$\left.\begin{aligned} & A_1 = A_1 \\ & \bar{A}_1 A_2 \subseteq A_2 \\ & \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \subseteq A_3 \dots \end{aligned}\right\} (*)$$

$$P(A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \dots) \overset{A_3}{=} P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) + \dots$$

из $*$ и г) $\Rightarrow$ $\longrightarrow \le P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \dots$

$$\Rightarrow P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

е) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Д: $\left.\begin{aligned} & A \cup B = A + \bar{A}B \\ & B = AB + \bar{A}B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & P(A \cup B) = P(A + \bar{A}B) \overset{б)}{=} P(A) + P(\bar{A}B) \\ & P(B) = P(AB + \bar{A}B) \overset{б)}{=} P(AB) + P(\bar{A}B) \end{aligned}$

$$\Rightarrow P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

5. Формула укључења и искључења за вероватноћу. Својства непрекидности вероватноће

ж) $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i<j} P(A_iA_j)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)$

Δ: Метода мат. индукције:

БИ: $k=2$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$, доказано под е)

ИП: $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i<j} P(A_iA_j)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)$

ИК: $P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right)=\sum_{i=1}^{n+1} P(A_i)-\sum_{i<j} P(A_iA_j)+\ldots+(-1)^{n}P(A_1A_2\ldots A_nA_{n+1})$

$P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right)=P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k+A_{n+1}\right)=\underbrace{P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)}_{ИП}+P(A_{n+1})-P\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\cap A_{n+1}\right)$

$=\left(\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i<j} P(A_iA_j)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)\right)+P(A_{n+1})-P(A_1A_{n+1}+A_2A_{n+1}+\ldots)$

1) $\sum_{i=1}^{n} P(A_i)+A_{n+1}=\sum_{i=1}^{n+1} P(A_i)$

2) Нека је $B_1=A_1A_{n+1}, B_2=A_2A_{n+1}, \ldots, B_n=A_nA_{n+1}$
ради лакшег записа

$P(B_1+B_2+\ldots+B_n)\overset{ИП}{=}\sum_{i=1}^{n} P(B_i)-\sum_{i<j} P(B_iB_j)+\ldots+(-1)^{n-1}P(B_1B_2\ldots)$

$=\sum_{i=1}^{n} P(A_iA_{n+1})-\sum_{1\le i<j\le n+1} P(A_iA_jA_{n+1})+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_nA_{n+1})$

п.с. $A_iA_{n+1}A_jA_{n+1}=A_iA_jA_{n+1}$

из 1) и 2) следи:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\dots A_n)\right) + P(A_{n+1}) - P(A_1A_{n+1} + \dots)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\dots)\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} P(A_iA_{n+1}) - \sum_{i<j} P(A_iA_jA_{n+1}) + \dots + P(A_1A_2\dots A_{n+1})\right)$$

$$\sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j) + \sum_{i=1}^{n} P(A_iA_j) = \sum_{1\le i<j\le n+1} P(A_iA_j)$$

...

- исто важи и за пресеке са $3, 4, \dots, n+1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n+1} P(A_iA_j) + \dots (-1)^{n} P(A_1A_2\dots A_nA_{n+1})$$

Напомена: На местима где сам писао "$i<j$" формално је "$1\le 1<j\le n+1$"

3) Непрекидност одозго

Ако је $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$, онда је

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Δ: $B_1 = A_1 = A_1$

$B_2 = \overline{A_1} A_2 \subseteq A_2$ $\qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} B_n = A_n}$

$B_3 = \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3 \subseteq A_3$

...

$B_iB_j = \emptyset$

$$P(B_1 \cup B_2 \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(B_k) = \lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n} B_k\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

и) Непрекидност одозго

Ако је $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ онда је

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

Δ: $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \Rightarrow \overline{A_1} \subset \overline{A_2} \subset \overline{A_3} \subset \dots$

$\Rightarrow P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\Big) = \lim_{n \to \infty} P(\overline{A_n})$, негирамо обе стране

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

ј) Непрекидност у нули.

Ако је $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, онда је $\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0$

Δ: директно следи из <u>и)</u>

Додатак: Борел-Кантелијева лема:

Нека је A_n произвољан низ догађаја из мерљивог простора $(\Omega, \mathcal{F})$ таква да је:

$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, онда важи: $P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = 0$

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow (\forall_{n \in N})(B_n \supset B_{n+1})$$

$$\Rightarrow P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \lim_{n \to \infty} P(B_n) = \lim_{n \to \infty} P\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big)$$

$\leq \lim_{n \to \infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$ (остатак конв. реда)

$$\Rightarrow P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = 0$$

6. Простор вероватноће. Дискретан простор вероватноће. Геометријска вероватноћа

ДЕФ: Простор вероватноће или вероватносни модел је уређена тројка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ где је Ω простор елементарних исхода, $\mathcal{F}$ је σ-алгебра подскупова од Ω, а P функција вероватноће.

– Елементи σ-алгебре се зову случајни догађаји.

ДЕФ: Нека је $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ највише пребројив скуп елементарних исхода, а $\mathcal{F}$ скуп свих подскупова од Ω $(\mathcal{F} = P(\Omega))$ и нека су $P_1, P_2, \dots$ ненегативни реални бројеви придружени одговарајућим елементарним исходима $\omega_1, \omega_2, \dots$ такви да важи: $\sum P_i = 1$, $i \in \{1, 2, \dots\}$. Вероватноћу $P: \mathcal{F} \to [0, 1]$ дефинишемо као:

Ако је $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, онда важи:

$$P(A) = P_{j_1} + P_{j_2} + \dots$$

Таква уређена тројка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ је **дискретан простор вероватноће**.

Напомена: Ако имамо простор са коначно много једнаких исхода, онда ту вероватноћу можемо рачунати као:

$$P = \frac{\text{број повољних исхода}}{\text{укупан број исхода}}$$ класична дефиниција вероватноће

ДЕФ: Ако је Ω део праве, равни или простора онда се вероватноћа неког догађаја $A \subset \Omega$ (догађај који је представља дуж, површину или запремину) рачуна се преко мере. $m(m(A))$

$$\mathcal{F} = \{A \mid A \subset \Omega \land m(A) \text{ мера простора}\}$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \quad m - L, P, V \text{ (дужина, површина, запремина)}$$

Овај начин рачунања називамо **геометријска вероватноћа**

7. Условна вероватноћа:

ДЕФ: **Условну вероватноћу** дефинишемо као вероватноћу да се реализује догађај A ако се реализовао догађај B, где је $P(B) > 0$. Рачунамо је као:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Теорема: Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноће. За свако $B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$, функција $P_B : \mathcal{F} \to [0,1]$ коју дефинишемо као $P_B(A) = P(A \mid B)$ је вероватноћа на мерљивом простору $(\Omega, \mathcal{F})$ тј:

а) $(\forall A \in \mathcal{F})\ P_B(A) \geq 0$

б) $P_B(\Omega) = 1$

в) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, $(\forall i,j)\ A_i A_j = \emptyset$, $P_B\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_B(A_n)$

Доказ:

а) $P_B(A) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

$P(AB) \geq 0$, и $P(B) > 0 \Rightarrow P_B(A) \geq 0$

б) $P_B(\Omega) = \dfrac{P(\Omega B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

в) $P_B(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = P((\sum_{n=1}^{\infty} A_n) | B) = \dfrac{P((\sum_{n=1}^{\infty} A_n) B)}{P(B)}$

$= \dfrac{P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n B)}{P(B)} = \dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | B) = \sum_{n=1}^{\infty} P_B(A)$

Особине:

а) $P(A|A) = 1$

Δ: $P(A|A) = \dfrac{P(A \cdot A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

б) $A \subset B \Rightarrow P(B|A) = 1$

Δ: $A \subset B$, $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

в) $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$

Δ: $P(\bar{A}|B) = \dfrac{P(\bar{A}B)}{P(B)}$, $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$?

$P(\bar{A}B) + P(AB) = P(B)$, $(\bar{A}B)(AB) = \emptyset$

$P(\bar{A}B + AB) = P(B) \Rightarrow P(\bar{A}|B) = \dfrac{P(B) - P(AB)}{P(B)} = 1 - \dfrac{P(AB)}{P(B)} = 1 - P(A|B)$

г) $P((A+B)|C) = P(A|C) + P(B|C)$

Д: $$P((A+B)|C) = \frac{P((A+B)C)}{P(C)} = \frac{P(AC)+P(BC)}{P(C)}$$

$$= \frac{P(AC)}{P(C)} + \frac{P(BC)}{P(C)} = P(A|C) + P(B|C)$$

д) **формула множења вероватноће:**

$$P(AB) = P(A|B)P(B)$$
$$= P(B|A)\cdot P(A)$$

-следи директно из дефиниције

ђ) уопштење:

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1)\dots$$

где важи: $P(A_1A_2\dots A_{n-1})>0$, A_n није условно

8) Формула потпуне вероватноће; Бајесова формула

Теорема: **Формула потпуне вероватноће:** Нека су $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ дисјунктивни догађаји такви да је: $(\forall i \in \{1,2,\dots,n\})(P(H_1)>0)$ и $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$. Тада за свако $A \in \mathcal{F}$ важи:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$$

Доказ: $P(A) = P(A\Omega) = P(A(H_1 + H_2 + \dots + H_n))$

$= P(AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n) = P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n)$

$= \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$

Теорема: Бајесова формула:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}$$

Доказ: $P(H_i|A) = \frac{P(H_i A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$

g) Независност догађаја:

$P(A) = P(A|B)$, A је независно од B

$P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

ДЕФ: Догађаји A и B су независни ако је:

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

Теорема: Нека су догађаји A и B независни. Тада важи:

а) догађаји $\bar{A}$ и B су независни;

б) догађаји A и $\bar{B}$ су независни;

в) догађаји $\bar{A}$ и $\bar{B}$ су независни

* (дужој в) директно следи из а) и б))

а) A и B су независни:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

$$P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B)\ ?$$

$$AB+\bar{A}B=B \Rightarrow P(B)=P(AB+\bar{A}B) \quad ,(AB)(\bar{A}B)=\emptyset$$

$$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$$

$$P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)\cdot P(B)$$

$$P(\bar{A}B)=(1-P(A))\cdot P(B)=P(\bar{A})\cdot P(B)$$

$\Rightarrow$ догађаји $\bar{A}$ и B су независни

б) аналогно као под а)

Деф: Потпуна независност: Нека је $\mathcal{K}$ непразна колекција из простора $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Догађаји из $\mathcal{K}$ су потпуно независни ако за свако $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ и различите догађаје $A_{k_1}, A_{k_2}, \dots, A_{k_n}$ важи:

$$P(A_k)=P(A_{k_1})P(A_{k_2})\cdots P(A_{k_n}), \quad k=\overline{2,n}$$

*Напомена: Ако су догађаји независни на нивоу n то не значи да су независни на нивоима $n-1$ и $n+1$

Борел-Кантелијева теорема 2: Ако је низ A_n низ независних догађаја таквих да је $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$, онда је вероватноћа:

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1$$

Доказ: $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow \overline{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}$

$$(\forall n \in N)(\forall m \geq n)\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} \subset \bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right) \Rightarrow P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) \leq P\left(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right)$$

због независности догађаја следи:

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right) = \prod_{k=n}^{m} P(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{m} (1 - P(A_k))$$

$*$ $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 - x \leq e^{-x}$

доказ: $f(x) = e^{-x} + x - 1$, $f'(x) = -e^{-x} + 1 = 1 - \frac{1}{e^x} \geq 0$,

$\Rightarrow f(x)$ је растућа на интервалу $[0, 1]$

$f(0) = e^0 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow 1 - x \leq e^{-x}$

$$\prod_{k=n}^{m} (1 - P(A_k)) \leq \prod_{k=n}^{m} e^{-P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)}$$

$$\Rightarrow \lim_{m \to \infty} e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)} = 0, \text{ јер } \sum_{n=1}^{\infty} P(A_k) \sim +\infty$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = 0 \quad \left(0 \leq P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) \leq 0\right)$$

$$0 \leq P(\overline{B}) \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) \underset{\uparrow}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = 0$$

лема о покривању

$$\Rightarrow P(\overline{B}) = 0 \quad (0 \leq P(\overline{B}) \leq 0)$$

$$\Rightarrow P(B) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1$$

10) Случајна величина. Расподела вероватноће

Деф: Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноће, а $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ мерљив простор. Ф-ја $X: \Omega \to \mathbb{R}$ је **случајна величина** ако $(\forall B \in \mathcal{B})\ X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

Теорема: Случајна величина X дефинисана на простору вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ дефинише простор вероватноће $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$, где је
$(\forall B \in \mathcal{B})\ P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\omega \mid X(\omega) \in B)$

Доказ: $P_X: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$

1) $(\forall B \in \mathcal{B})\ P_X(B) \geq 0$?

Δ: $P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \geq 0$

2) $P_X(\mathbb{R}) = 1$?

Δ: $P_X(\mathbb{R}) = P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = 1$

3) $\forall B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}$, $\underset{i \neq j}{B_i B_j} = \emptyset$

$P_X\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_X(B_n)$?

Δ: $P_X\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right)$

$= P\left(\sum_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n)\right)$, својство инверзне слике

$= \sum_{n=1}^{\infty} P(X^{-1}(B_n))$, дисјунктни скупови

$= \sum_{n=1}^{\infty} P_X(B_n)$

$\Rightarrow P_X$ јесте вероватноћа

Деф: Функција $P_X : \mathcal{B} \to R$ дефинисана у претходној теореми зове се **расподела вероватноће случајне величине X.**

Деф: Функција $F_X : R \to R$ дефинисана на следећи начин:

$(\forall x \in R)\, F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P\{X \le x\}$, зове се **функција расподеле случајне величине X.**

$* \; P_X((a,b]) = P\{a < x \le b\} = F_X(b) - F_X(a)$

Теорема: Функција расподеле F_X има следеће особине:

а) Неопадајућа је: $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) < F_X(x_2)$

б) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

в) Непрекидна са десне стране:
$\lim\limits_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$

Д: а) $x_1 < x_2 \Rightarrow (-\infty, x_1) \subset (-\infty, x_2)$

$\Rightarrow P_X((-\infty, x_1]) \le P_X((-\infty, x_2])$

$\Rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$

б) Примењујемо Хајнеов принцип

$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $x_1 > x_2 > \dots > \dots$

$\Rightarrow (-\infty, x_1] \supset (-\infty, x_2] \supset \dots \supset \dots$, непрекидност одозго

$\lim\limits_{n \to -\infty} P_X((-\infty, x_n]) = P_X\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]\right) = 0 \; (= P(\emptyset))$

$$\lim_{n\to+\infty} F_X(x_n) = \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$$

Аналогно се преко непрекидности одоздо доказује и $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$ преко Хајнеовог принципа

в) $\lim_{x\to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0^+} F_X(x) - F_X(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} P_X((x, x_0]) = 0$$

- Због монотоности важи:

$$x_1 > x_2 > \dots > x_0 \Rightarrow (-\infty, x_1] \supset (-\infty, x_2] \supset \dots \supset \dots$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n] = (-\infty, x_0] \Rightarrow P_X\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]\right) = \lim_{n\to\infty} P_X((-\infty, x_n])$$

$$\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to\infty} P_X((-\infty, x_n]) = P_X((-\infty, x_0]) = F_X(x_0)$$

$\Rightarrow$ (Хајнеов принцип) $\lim_{x\to x_0} F_X(x) = F_X(x_0)$

Напомена: Важи и обрнуто. Ако нека ф-ја F има особине (а, б, в) онда је она ф-ја расподеле неке случајне величине X тј. постоји случајна величина X којој је она ф-ја расподеле.

12) Основни типови случајних величина. Примери.

Деф: Нека је скуп $S=\{a_1, a_2, \dots\}$ скуп реалних бројева који је по кардиналности највише пребројив. Случајна величина X над скупом S је **дискретна случајна величина** ако важи $P\{X \notin S\}=0$

- директно из дефиниције следи: $\sum_{k=1}^{n} P\{X=a_k\}=1$, $n=|S|$

Индикатор догађаја: $I_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin A \\ 1, & \omega \in A \end{cases}$

$$I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-P(A) & P(A) \end{pmatrix}, \text{ општије: } I : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

*неједнака вероватноћа за $p \neq 0{,}5$

Биномна расподела: $X : \mathcal{B}(n,p)$, $n \in N$, $p \in [0,1]$

$$P\{X=k\} = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad k \in N$$

$$\sum_{k=0}^{n} P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{n} p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1$$

*Мери вв. успеха догађаја A_k који се реализује, ако се реализује код n независних догађаја од којих сваки има p вв. да се реализује.

Геометријска расподела: $X : G(p)$, $p \in [0,1]$

$$P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad k \in N$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{X=k\} = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = p \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1-\cancelto{0}{(1-p)^n}}{1-(1-p)} = 1$$

*Мери вв. успеха догађаја A_k који се реализује ако се прво реализује $k-1$ неуспеха, а онда се реализује први успех, где је сваки покушај независан догађај

Пуасонова расподела: $P(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$P\{X=k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \leftarrow \text{Тејлоров развој за } e^{\lambda}$$

$$= e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$$

* Представља гранични случај биномне расподеле за $n \to \infty$. У пракси се користи за апроксимацију биномне расподеле за $n \geq 30$.

Деф: Случајна величина је **апсолутно непрекидна** ако постоји ф-ја $f: R \to R$, таква да важи:
$(\forall (a,b] \subset R)\ P\{a < X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx$, ф-ја f се назива густина расподеле.

$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \Rightarrow F_X(x)$ је непрекидна
($F_X(x)$ је ф-ја расподеле)

$\Rightarrow F'(x) = f(x)$ у свакој тачки.

$P\{X=a\} = \int_a^a f(x)dx = 0$ (лако се види из Њутн-Лајбницове теореме)

$\Rightarrow P\{a < X \leq b\} = P\{a < X < b\} \ldots$ |неке особине|

Став: Особине ф-је f:

а) $(\forall x \in R)\ f(x) \geq 0$

б) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Униформна расподела: $X : \mathcal{U}(a, b)$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \le x \le b$$

$F_X(x)$?

1) $x < a$, $F_X(x) = 0$

2) $x > b$, $F_X(x) = 1$

3) $x \in (a, b)$

$$F_X(x) = \int_a^x \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^x dx = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

Експоненцијална расподела: $X : \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \ge 0$$

$F_X(x) = ?$

$\ln t = -\lambda x$

1) $x < 0$, $F_X(x) = 0$

2) $x \ge 0$

$$\int \lambda e^{-\lambda x} = \left(\begin{matrix} t = e^{-\lambda x} \\ dt = -\lambda e^{-\lambda x} dx \end{matrix} \right) = -\int dt = -e^{-\lambda x} + C$$

$$F_X(x) = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -e^{-\lambda t}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

Нормална расподела: $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-m)^2}{\sigma^2}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Стандардизована нормална расподела: $\mathcal{N}(0,1)$

$X^* : \mathcal{N}(0,1)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

* користе се таблице за рачунање расподеле.

Лема: Ако је $X : (m, \sigma^2)$ нормална расподела, онда $\frac{X-m}{\sigma}$ има стандардну нормалну расподелу $\mathcal{N}(0,1)$

$Y : \frac{X-m}{\sigma}$, $\quad Y : \mathcal{N}(0,1)$?

$$F_Y(x) = P\left\{Y \le x\right\} = P\left\{\frac{X-m}{\sigma} \le x\right\}$$

$$= P\left\{X \le \sigma x + m\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\sigma x + m} \frac{dt}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-m)^2}{\sigma^2}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

смена: $z = \frac{t-m}{\sigma}$

$$= \int_{-\infty}^{z} \frac{dt \cdot \cancel{\sigma}}{\sqrt{2\pi \cancel{\sigma^2}}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} = F_{X^*}(x) \Rightarrow Y : \mathcal{N}(0,1)$$

Наставак теореме Моавр-Лапласа:

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t^2}{2n}\frac{p\cancel{(1-p)}}{\cancel{1-p}}-\frac{t^2}{2n}(1-p)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t^2}{2n}\cdot p-\frac{t^2}{2n}+\frac{t^2}{2n}\cdot p+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \qquad \boxed{\ln(1+x)=x+o(x)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{n\left(-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{\left(-\frac{t^2}{2}+o(1)\right)}$$

$$=e^{-\frac{t^2}{2}} \Rightarrow \frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\xrightarrow[n\to\infty]{R}X^*:\mathcal{N}(0,1)$$

13) Апроксимација биномне расподеле нормалном расподелом. Доказ интегралне теореме Моавр-Лапласа.

Теорема: Моавр-Лапласова теорема: Нека је X случајна величина са расподелом $X : \mathcal{B}(n,p)$. За $p>0$ и $n\to\infty$ важи:

$$a)\ P\{X=k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot n \cdot p(1-p)}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(k-np)^2}{np(1-p)}}$$

$$б)\ P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

$$1:\ \frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{R} X^* : \mathcal{N}(0,1)$$

$$(\forall t\in\mathbb{R})\ \lim_{n\to\infty} \varphi_{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}}(t) = \lim_{n\to\infty} E\left(e^{it\cdot\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}}\right) = \lim_{n\to\infty} E\left(e^{\frac{itX_n}{\sqrt{np(1-p)}}}\cdot e^{\frac{-itnp}{\sqrt{np(1-p)}}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-itnp}{\sqrt{np(1-p)}}}\cdot E\left(e^{\frac{itX_n}{\sqrt{np(1-p)}}}\right) = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-itnp}{\sqrt{np(1-p)}}}\,\varphi_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$\boxed{X_n = \sum_{k=1}^{n} I_k,\ \text{где је } I_k \text{ идентификатор:}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-itnp}{\sqrt{np(1-p)}}}\left(1-p+p\,e^{\frac{it}{\sqrt{np(1-p)}}}\right)^n \text{ (теорема о производу)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left((1-p)\,e^{\frac{-itp}{\sqrt{np(1-p)}}} + p\,e^{it\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}-\frac{p}{\sqrt{np(1-p)}}\right)}_{\frac{1-p}{\sqrt{np(1-p)}}}}\right)^n$$

$$\boxed{e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left((1-p)\left(1+\frac{-itp}{\sqrt{np(1-p)}}-\frac{t^2p^2}{2np(1-p)}\right)+p\left(1+\frac{it(1-p)}{\sqrt{np(1-p)}}-\frac{t^2(1-p)}{2np}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\cancel{\frac{-itp}{\sqrt{np(1-p)}}}-\frac{t^2p}{2n(1-p)}-\cancel{p}+\cancel{\frac{itp^2}{\sqrt{np(1-p)}}}-\frac{t^2p^2}{2n(1-p)}\right.$$
$$\left.+\cancel{p}+\frac{itp(1-p)}{\sqrt{np(1-p)}}-\frac{t^2(1-p)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

Апроксимација у пракси:
- пребацујемо из дискретних сл. величина у апсолутно непрекидне па морамо водити рачуна о границама:

$P\{X<k\} \Rightarrow P\{X<k-0,5\}$, $k\in N$

$P\{X\leq k\} \Rightarrow P\{X<k+0,5\}$

14) Апроксимација биномне расподеле Пуасоновом расподелом

Теорема: Нека је $X: B(n,p)$ сл. величина, где важи $p=p(n)=\frac{\lambda}{n}$, $\lambda>0$, онда важи:

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\Delta: \lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\cancel{\frac{n}{n}}^{1}\cdot\cancel{\frac{n-1}{n}}^{1}\cdots\cancel{\frac{n-k+1}{n}}^{1}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{-n}{\lambda}\right)}\right)^{\frac{n-k}{-\lambda}\cdot(-\lambda)}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Када користимо коју апроксимацију за велико n?

$n \geq 30$

Пуасонова расподела: $np < 10 \lor n(1-p) < 10$

Нормална расподела: $np \geq 10 \land n(1-p) \geq 10$

15) Дводимензионална случајна величина

Деф: Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноће и $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ мерљив простор. Функција $X: \Omega \to \mathbb{R}^n$ је **вишедимензиона случајна величина** ако важи:

$$(\forall B \in \mathcal{B}^n)\ X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

- у случају дводимензионалне сл. величине, X дефинишемо као уређени пар.

Теорема: Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноће и дефинишимо функције $X_i: \Omega \to \mathbb{R}$. Тада је $(X_1, X_2, \dots X_n)$ n-димензиона сл. величина акко $(\forall i \in \{1, 2, \dots n\})$ X_i је сл. величина.

Д: $\boxed{\Rightarrow}$ $(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\})(\forall B \in \mathcal{B})\ X_i^{-1}(B) = \{\omega \mid X_i \in B, X_j \in \mathbb{R}\ (i \neq j)\}$

$= \{\omega \mid X_1(\omega) \in \mathbb{R}, X_2(\omega) \in \mathbb{R}, \dots X_{i-1}(\omega) \in \mathbb{R}, X_i(\omega) \in B, \dots X_n(\omega) \in \mathbb{R}\}$

$= \{\omega \mid (X(\omega), X(\omega) \dots X_n(\omega)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times B \times \dots \times \mathbb{R}$

$= X^{-1}(\mathbb{R}^{i-1} \times B \times \mathbb{R}^{n-i}) \in \mathcal{F}$

$\boxed{\Rightarrow}$ $I = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \ldots \times (a_n, b_n] \in \mathcal{B}^n$ $(B_1 \times B_2 \times \ldots)$

$$X^{-1}(I) = \{\omega \mid (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots X_n(\omega)) \in I\}$$

$$= \{\omega \mid X_1(\omega) \in (a_1, b_1]\} \cap \{\omega \mid X_2(\omega) \in (a_2, b_2]\} \cap \ldots$$
$$\ldots \cap \{X_n(\omega) \in (a_n, b_n]\}$$

$$= \underbrace{X_1^{-1}((a_1, b_1])}_{\in \mathcal{F}} \cap \underbrace{X_2^{-1}((a_2, b_2])}_{\in \mathcal{F}} \cap \ldots \cap \underbrace{X_n^{-1}((a_n, b_n])}_{\in \mathcal{F}}$$

X_i је сл. величина $\Rightarrow X_i^{-1}((a_i, b_i]) \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}((a_i, b_i]) \in \mathcal{F}$

Став: Сваки скуп $B \in \mathcal{B}^n$ је највише пребројив, па на основу својства инверзне слике важи:

а) $X^{-1}(A \cup B) = X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)$

б) $X^{-1}(A \cap B) = X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)$

в) $X^{-1}(\overline{A}) = \overline{X^{-1}(A)}$

16) Борелова функција случајних величина:

Деф: функција $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ је Борелова ф-ја ако важи:
$(\forall B \in \mathcal{B})\ f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n$

*Свака непрекидна ф-ја је Борелова

Теорема: Нека су $X_1, X_2, \ldots, X_n$ сл. величине дефинисане на простору вјл. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и нека је $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Борелова ф-ја. Тада је Y случајна величина $(Y = f \circ X)$

Δ: $X=(X_1, \dots X_n)$

$X:\Omega \to \mathbb{R}^n,\ f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \Rightarrow Y:\Omega \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Y је добро дефинисана.

Да ли је Y сл. величина? Јесте, ако важи:

$(\forall B \in \mathcal{B})\ Y^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Нека је $B \in \mathcal{B}$ произвољно

$Y^{-1}(B) = (f \circ X)^{-1}(B) = X^{-1} \circ f^{-1}(B)$ * инверзна слика композиције: $(f\circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

$= X^{-1} \circ f^{-1}(B)$

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n \Rightarrow X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \mathcal{F}$

* $x, y \in B \Rightarrow (x+y) \in B,\ (3xy^2) \in B,\ (e^x) \in \mathcal{B}$

Деф: Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноће и $X:\Omega \to \mathbb{R}^n$ n-димензионална сл. величина. Ф-ја $P_X: \mathcal{B}^n \to \mathbb{R}$ дефинисана са:

$(\forall B \in \mathcal{B}^n)\ P_X(B) = P(X^{-1}(B))$, зове се **расподела вероватноће n-димензионалне случајне величине X**, простор вероватноће $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_X)$

Деф: Функција $F_X:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дефинисана за сваку торку $(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$F_X(x_1, x_2, \dots x_n) = P\big((-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \dots \times (-\infty, x_n]\big)$$
$$= P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots X_n \le x_n\}$$

је функција расподеле n-димензионалне случајне величине $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$

Теорема: Функција расподеле $F_X:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ има следећа својства (X је n-димензионална сл. величина)

а) $\lim\limits_{x_i\to-\infty} F_X(x_1,x_2,\dots,x_n)=0,\quad i\in\{1,2,\dots n\}$

б) $\lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty\\ x_2\to+\infty\\ \vdots\\ x_n\to+\infty}} F_X(x_1,x_2,\dots,x_n)=1$

в) Непрекидност са десне стране по свакој координати

г) За сваки n-димензионални интервал I важи: $\Delta_F(I)\geq 0$, где је

$\Delta_F(I)=\sum\limits_{x\in T} F(x)\, z_I(x)$, T скуп свих темена

$I=(a_1,b_1]\times\dots(a_n,b_n]$, $z_I=\begin{cases}1, & a_i\equiv_2 0\\ -1, & \text{иначе}\end{cases}$

Деф: Нека је скуп $S=\{(x_1^{k_1},x_2^{k_2},\dots,x_n^{k_n})\}$, $x_i\in R$, $k_1\in N, k_2\in N,\dots k_n\in N$ највише пребројив по координатама. Случајна n-димензионална величина $X=(X_1,X_2,\dots X_n)$ над скупом S је **дискретна n-димензионална случајна величина** ако важи: $P\{X\in\bar{S}\}=0$

Деф. Случајна n-димензионална величина је апсолутно непрекидна ако постоји ненегативна ф-ја $f:R^n\to R$ таква да важи:
$(\forall B\in\mathcal{B}^n)\ P\{(X_1,X_2,\dots X_n)\in B\}=\underbrace{\int\dots\int}_{n} f(x_1,\dots x_n)\,dx_1dx_2\dots dx_n$,
где f густина расподеле n-димензионалне сл. величине X

17) Маргинална расподела:

Деф: Маргинална расподела је расподела било ког подвектора сл. величине

$$F'_{X_1' \dots X_m'}(X_1', X_2', \dots X_m') = \lim_{\substack{X_{i_1} \to +\infty \\ X_{i_2} \to +\infty \\ \vdots \\ X_{i_k} \to +\infty}} F_{X_1, \dots X_n}(X_1, \dots X_n), \text{ где } i_j \in \{1, 2, \dots n\} \text{ за } j \in \{1, 2, \dots k\}$$

Ф-ја расподеле $F'_{X_1' \dots X_m'}$ одговара подвектору од $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ чија је димензија за k мања.

Напомена: Ако знамо $F_{X_1, \dots, X_n}$, онда можемо наћи било који подвектор.

* Посматрамо сл. величину (X, Y) и тражимо закон маргиналне расподеле X у:

а) дискретном случају:

$$P\{X = x\} = \sum_i P\{X = x, Y = y_i\}$$

б) Апсолутно непрекидни случај

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y \in R\} = \int_{-\infty}^{x} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy\, dx$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy$$

18) Условна расподела:

Општи случај: (X,Y) сл. величина, $B \in \mathcal{B}$. Условна вероватноћа за X при $Y \in B$ је:

$$F_X(x \mid \{Y \in B\}) = \frac{P\{X \le x, Y \in B\}}{P\{Y \in B\}}$$

Дискретан случај: (X,Y) дискретна сл. вел.

$$P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}}$$, слично и формула множења

Апсолутно непрекидни случај: (X,Y) апсолутно непр. сл. величина са густином $f_{X,Y}(x,y)$

$$F_X(x \mid Y = y) = \lim_{h \to 0} F_{X \mid \{y-h < Y < y+h\}}(x)$$
$$= \lim_{h \to 0} P\{X \le x \mid y-h < Y < y+h\}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{P\{X \le x, y-h < Y < y+h\}}{P\{y-h < Y < y+h\}}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x} \int_{y-h}^{y+h} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv}{\int_{y-h}^{y+h} f_Y(v)\,dv}$$

• Ако је f непр. на $[a,b]$, онда постоји $c \in (a,b)$ тако да важи: (у овом случају $(y-h, y+h)$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \Rightarrow \int_{y-h}^{y+h} f_{X,Y}(u,v)\,dv = f_{X,Y}(u,c_1) \cdot 2h$$

и $\int_{y-h}^{y+h} f_Y(v)\,dv = f_Y(c_2) \cdot 2h$

$$\Rightarrow F_X(x \mid Y = y) = \lim_{h \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,c_1) \cdot 2h\,du}{f_Y(c_2) \cdot 2h} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f_{X,Y}(u,y)}{f_Y(y)}\,du$$

$c_1 \to y$, $c_2 \to y$

Слично:

$$F_{Y|X=x} = \int_{-\infty}^{y} \frac{f_{X,Y}(x,v)}{f_X(x)}\, dv$$

* формула множења: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_{Y|X=x}$

Лема: Условна густина дефинисана као:

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$ је густина расподеле вр.в.

Δ: а) $f_{Y|X=x}(y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$,

$$f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \wedge f_X(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \geq 0$$

б) $$\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X=x}(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}\,dy = \frac{1}{f_X(x)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy}_{\text{подлектор}}$$

$$= f_X(x)\cdot f_X(x) = 1$$

$\Rightarrow f_{Y|X=x}(y)$ је густина расподеле вероватноће

14) Независност случајних величина

Деф. Нека су $X_1, X_2, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ сл. величине дефинисане на простору вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ове сл. величине су независне ако важи:

$$(\forall B_1, B_2, \dots B_n \in \mathcal{B})\ P\{X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_n \in B_n\}$$

$$= P\{X_1 \in B_1\}\cdot P\{X_2 \in B_2\}\cdot \ldots P\{X_n \in B_n\}$$

Теорема: Нека су f и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Борелове ф-је, а X и Y независне сл. вел. дефинисане на неком простору вероватноће. Онда су и $f(X)$ и $g(Y)$ независне сл. вел.

Δ: $(\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B})$ $P\{f(X)\in B_1, g(Y)\in B_2\}$

$$= P\{X \in f^{-1}(B_1), Y \in g^{-1}(B_2)\}$$

$$= P\{X \in f^{-1}(B_1)\} P\{Y \in g^{-1}(B_2)\}$$

$$= P\{f(X) \in B_1\} P\{g(X) \in B_2\}$$

$\Rightarrow f(X)$ и $g(Y)$ су независне сл. вел.

Теорема: Нека су $F_{X_1}, F_{X_2}, \dots, F_{X_n}$ и F_X ф-је расподеле сл. величина $X_1, X_2, \dots, X_n$ и $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Случајне величине $X_1, X_2, \dots, X_n$ су независне акко:

$$(\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n)\, F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

Теорема: Нека су $X_1, X_2, \dots, X_n : \Omega \to R$ сл. величине дефинисане на простору врв $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ове сл. величине су независне Акко:

$$(\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n)\, P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\}$$
$$= P\{X_1 = x_1\} \cdot P\{X_2 = x_2\} \ldots P\{X_n = x_n\}$$

Теорема: Нека су $f_{X_1}, f_{X_2}, \dots, f_{X_n}$ густине расподеле сл. величина $X_1, X_2, \dots, X_n$ дефинисане на простору вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, а $f_X(x)$ густина n-димензионалне сл. величине $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Случајне величине $X_1, X_2, \dots, X_n$ су независне акко:

$$(\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n)\, f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

20) Математичко очекивање. Основна својства. Примери.

Деф: а) Нека је X коначна дискретна случајна величина са законом расподеле:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$, тада је **математичко очекивање** једнако:

$$EX = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$$

Δ: б) $X: \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow EX = c$

д) $E(cX) = \sum_{k=1}^{n} c \cdot x_k P\{cX = cx_k\} = c\sum_{k=1}^{n} x_k P\{X = x_k\} = cE(X)$

ђ) $E(X+Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i + y_j) P\{X = x_i, Y = y_j\}$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i P\{X = x_i, Y = y_j\} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j P\{X = x_i, Y = y_j\}$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i P\{X = x_i\} + \sum_{j=1}^{m} y_j P\{Y = y_j\}$ (МАРГИНАЛНА РАСПОДЕЛА)

$= EX + EY$

е) $E(aX+b) = \sum_{k=1}^{n}(ax_k + b) P\{aX + b = ax_k + b\}$

$= a\sum_{k=1}^{n} x_k P\{X = x_k\} + b\sum_{k=1}^{n} P\{X = x_k\} = aE(X) + b$

в) $P\{X \geq 0\} = 1 \Rightarrow EX = \sum_{k=1}^{n} x_k P\{X = x_k\} \geq 0$, јер $x_k \geq 0 \wedge P\{X = x_k\} \geq 0$

г) $P\{X \geq Y\} = 1 \Rightarrow EX \geq EY$

$P\{X - Y \geq 0\} = 1 \Rightarrow E(X-Y) \geq 0 \Rightarrow EX - EY \geq 0 \Rightarrow EX \geq EY$

а) $-|X| \leq X \leq |X| \Rightarrow -E|X| \leq EX \leq E|X| \Rightarrow EX \Rightarrow |EX| \leq E|X|$

б) Нека је X пребројива случајна величина са законом расподеле $P\{X=x_k\}=p_k, k\in N$. Тада **математичко очекивање** постоји ако ред

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$ апсолутно конвергира и једнако је EX.

в) Нека је X апсолутно непрекидна случајна величина са густином расподеле $f(x)$. Тада **математичко очекивање** постоји ако интеграл

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$ апсолутно конвергира и једнако је EX.

Теорема: Особине математичког очекивања:

а) $|E(X)| \leq E|X|$

б) $P\{X=C\}=1 \Rightarrow EX=C$

в) $P\{X\geq 0\}=1 \Rightarrow EX\geq 0$

г) $P\{X\geq Y\}=1 \Rightarrow EX\geq EY$

д) $E(CX)=C\cdot EX$

ђ) $E(X+Y)=EX+EY$

е) $E(aX+b)=aEX+b$

Теорема: Нека су X и Y независне сл. величине са математичким очекивањима EX и EY. Тада важи:

$$EXY=EX\cdot EY$$

Напомена: Не важи у супротном смеру.

а) Дискретан случај:

$$EX \cdot EY = \sum_i x_i P\{X=x_i\} \cdot \sum_j x_j P\{Y=y_j\}$$

$$= \sum_i \sum_j x_i y_j P\{X=x_i\} \cdot P\{Y=y_j\}$$

$$= \sum_i \sum_j x_i y_j P\{X=x_i, Y=y_j\}$$

$$= EXY$$

$*$ $P\{X=x_i\} \cdot P\{Y=y_j\} = P\{X=x_i, Y=y_i\}$ важи због незави-сности и величина X и Y

б) Апсолутно непрекидан случај:

$$EX \cdot EY = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) \cdot f_Y(y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= EXY$$

○ Нека је X дискретна случајна величина датим законом расподеле и нека је $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Тада је математичко очекивање од $Y = f(X)$ једнако:

$$E(f(X)) = \sum_i f(x_i) \cdot P\{X=x_i\} \quad \text{(последица деф)}$$

Општији случај: $E(f(X_1, X_2, \dots, X_n)) = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_n} f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) P\{X_1 = x_{i_1}\} \dots P\{X_n = x_{i_n}\}$

за $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

○ Нека је X апсолутно непрекидна случајна величина са датом густином расподеле и ф-ја $f: R \to R$ непрекидна ф-ја. Тада је математичко очекивање од $Y = f(X)$ једнако:

$$E(f(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(x) dx \quad (\text{последица деф})$$

Општији случај:

$$E(f(X_1, X_2, \dots X_n)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots x_n) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

за $f: R^n \to R$

21) Дисперзија. Основна својства, Примери.

Деф: Нека је X сл. величина дефинишемо:

а) $E(X^n)$ као **n-ти момент реда**

б) $E(|X|^n)$ као **апсолутни n-ти момент реда**

в) $E(X - EX)^n$ као **n-ти централни момент**

* $E(x^n)$ постоји $\Leftrightarrow$ $E(|X|^n)$ постоји

Деф: Централни момент другог реда називамо **дисперзија** случајне величине X и означавамо је као:

$$DX = E(X - EX)^2$$

* Дисперзија мери средње квадратно одступање средње величине од случајне величине X.

* Стандардна девијација: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Теорема: Особине дисперзије. Нека је X произвољна случајна величина (погледати особине за EX)

а) $DX = E(X^2) - (EX)^2$

б) $0 \le DX \le EX^2$

в) $D(X) = 0 \iff P\{X=c\} = 1$

г) $D(aX+b) = a^2 D(X), \quad a, b \in R$

Д: а) $DX = E(X-EX)^2 = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2)$

$= EX^2 - E(2XE(X)) + E(EX)^2$

$= EX^2 - 2EX \cdot EX + (EX)^2$

$= EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2$

$= EX^2 - (EX)^2$

б) $DX = E(X-EX)^2 \ge 0$ јер $(X-EX)^2 \ge 0$

$DX = EX^2 - (EX)^2 \ge EX^2$

в) $\boxed{\Leftarrow}$ $P\{X=c\} = 1 \Rightarrow EX = c, \quad EX^2 = c^2$

$DX = EX^2 - (EX)^2 = c^2 - c^2 = 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ $D(X) = 0$

$E(X-EX)^2 = 0 \Rightarrow \sum_k (X_k - EX)^2 \cdot P\{X=k\} = 0$

$\Rightarrow X_k - E(X) = 0$

$\Rightarrow X_k = E(X)$ ($E(X)$ је константа)

• Сваки X_k је једнак константи $E(X)$

г) $D(aX+b) = E(aX+b)^2 - (E(aX+b))^2$

$= E(a^2X^2 + abX + b^2) - (aEX + b)^2$

$= a^2EX^2 + \cancel{abEX} + \cancel{b^2} - a^2(EX)^2 + \cancel{abEX} - \cancel{b^2}$

$= a^2(EX^2 - (EX)^2)$

$= a^2 DX$

Теорема: Нека су X и Y произвољне случајне величине. Ако су X и Y независне онда важи:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

Δ:
$$\begin{aligned}
D(X+Y) &= E(X+Y)^2-(E(X+Y))^2\\
&= E(X^2+2XY+Y^2)-(EX+EY)^2\\
&= EX^2+2EXY+EY^2-(EX)^2-2EXEY-(EY)^2\\
&= (EX^2-(EX)^2)+(EY^2-(EY)^2)+2(EXY-EXEY)\\
&= DX+DY
\end{aligned}$$

$*$ X и Y су независне $\Rightarrow EXY=EX\cdot EY$

Додатак:
$$\begin{aligned}
D(X-Y) &= D(X)+D(-Y)\\
&= D(X)+(-1)^2D(Y)\\
&= D(X)+D(Y), \text{ за } X \text{ и } Y \text{ независне}
\end{aligned}$$

Примери:

а) $I:\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-p & p\end{pmatrix} \Rightarrow EI=p,\ EI^2=p$

$$D(I)=EI^2-(EI)^2=p-p^2=p(1-p)$$

б) $X: B(n,p)=I_1+I_2+\ldots+I_n$, I_i и I_j су независни за $i\neq j$, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$

$$\begin{aligned}
D(X) &= D(I_1)+D(I_2)+\ldots D(I_n)\\
&= n\cdot p(1-p)
\end{aligned}$$

в) $X: P(\lambda)$

$$P\{X=k\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad EX=\lambda$$

$$EX^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot k\cdot\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$ (за $k=0$, сабирак је 0)

$$=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}(k-1)\frac{\lambda^k}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$ (за $k=1$, сабирак у левој суми је 0)

$$=\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

1) $\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}=\lambda^2\sum_{i=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}=\lambda^2\cdot 1$ (јер $\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=1$)

смена: $i=k-2$

2) $\lambda\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda\sum_{i=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}=\lambda\cdot 1$

смена: $i=k-1$

$\Rightarrow EX^2=\lambda^2+\lambda$

$DX=EX^2-(EX)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$

г) $X:\mathcal{N}(m,\sigma)\Rightarrow DX=\sigma^2$

д) $X:\mathcal{E}(\lambda)$, $E(X)=\frac{1}{\lambda}$

$$EX^2=\int_0^{\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=\begin{pmatrix}t=\lambda x\\ dt=\lambda dx\end{pmatrix}\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{\infty}e^{-t}t^2=\frac{1}{\lambda^2}\Gamma(3)=\frac{2}{\lambda^2}$$

*може и директно интеграцијом

$D(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$

22) Чебишовљева неједнакост

Теорема: Чебишовљева неједнакост:
Нека је X произвољна сл. величина. За $\varepsilon > 0$ и $n \in N$ важи:

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E(|X|^n)}{\varepsilon^n}$$

Δ: Помоћна сл. величина $Y = \begin{cases} 0, & |X| < \varepsilon \\ \varepsilon, & |X| \geq \varepsilon \end{cases}$

$$\Rightarrow Y \leq |X| \Rightarrow Y^n \leq |X|^n$$

$$\Rightarrow E(Y^n) \leq E(|X|^n) \Rightarrow \varepsilon^n P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq E(|X|^n)$$

$$\Rightarrow P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E(|X|^n)}{\varepsilon^n}$$

23) Коефицијент корелације

Деф: Нека је X произвољна случајна величина. **Стандардизован облик** случајне променљиве

$$X^* = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}}$$

* Тривијално: $EX^* = 0$, $DX^* = 1$

Деф: Нека су X и Y неке коначне случајне величине. **Коваријанса** сл. величина X и Y је:

$$cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

$$* \; cov(X,Y) = E((X-EX)(Y-EY)) = E(XY - E(X)Y - XE(Y) + E(X)E(Y))$$
$$= E(XY) - E(X)\cdot E(Y) - \cancel{E(X)E(Y)} + \cancel{E(X)E(Y)}$$
$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

Деф: Нека су X и Y неке сл. величине са коначним дисперзијама строго већим од нуле. Коефицијент корелације сл. величина X и Y је коваријанса од X и Y као $\rho_{X,Y} = cov(X^*, Y^*)$

$$\rho_{X,Y} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

$$*\rho_{X,Y} = cov(X^*, Y^*) = E((X^* - \cancel{E(X^*)})(Y^* - \cancel{E(Y^*)})) = E(X^* Y^*)$$

$$= E\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right) = \frac{E(XY - E(X)Y - XE(Y) + E(X)E(Y))}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

$$= \frac{E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)(Y) + E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}}$$

$$= \frac{E(XY) - E(X)EY)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

Деф: Нека су X и Y неке величине са коначним дисперзијама строго већим од нуле. Ако је $\rho_{X,Y} = 0$, онда су сл. величине X и Y **некорелисане** случајне величине.

Лема: Ако су случајне величине X и Y независне онда су оне некорелисане.

Δ: $E(XY) = E(X)E(Y)$, јер су X и Y независне

$$\Rightarrow \rho_{X,Y} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = 0$$

Напомена: Не важи у супротном смеру

2) $0 \le D(X^* \pm Y^*) = D(Y^*) \pm 2\,cov(X^*, Y^*) + D(X^*)$

$\Rightarrow -2 \le 2\,cov(X^*, Y^*) \Rightarrow |\rho_{x,y}| \le 1$

Теорема: Нека су сл. величине X и Y произвољне са коначним дисперзијама строго већим од нуле. Тада важи:

а) $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$

б) $|\rho_{X,Y}| = 1 \iff Y = aX + b$

скоро сигурно линеарно зависне

Δ: $D(Y^* + X^*) = E(Y^* + X^*)^2 - \left(E(Y^* + X^*)\right)^2$

$= E\left((Y^*)^2 + 2Y^*X^* + (X^*)^2\right) - \left(\cancel{EY^*}^{0} + \cancel{EX^*}^{0}\right)^2$

$= E\left((Y^*)^2\right) + \left(2E(Y^*X^*) - \underbrace{2E(X^*)E(Y^*)}_{0}\right) + E\left((X^*)^2\right)$

$= D(Y^*) + 2\operatorname{cov}(X^*, Y^*) + D(X^*)$

$* \operatorname{cov}(X^*, Y^*) = E(X^*Y^*) - E(X^*)E(Y^*)$

$* D(X^*) = E\left((X^*)^2\right) - \underbrace{\cancel{E(X^*)^2}}_{0} = E\left((X^*)^2\right)$

слично: $D(Y^* - X^*) = D(Y^*) - 2\operatorname{cov}(X^*, Y^*) + D(X^*)$

1) $\rho_{X,Y} = 1 \iff D(Y^* - X^*) = D(Y^*) - 2\operatorname{cov}(X^*, Y^*) + D(X^*)$

$= 1 - 2\operatorname{cov}(X^*, Y^*) + 1 = 0$

(јер $\rho_{X,Y} = \operatorname{cov}(X^*, Y^*) \wedge D(Y^*) = D(X^*) = 1$

$\iff Y^* - X^* = C$ (по особини дисперзије)

$\iff \dfrac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} + C$

$\iff Y = \dfrac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}} \cdot X + \left(-\dfrac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}} E(X) + C\sqrt{D(Y)} + EY\right)$

$a = \dfrac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}$, $b = -\dfrac{\sqrt{DY}}{\sqrt{DX}} E(X) + C\sqrt{D(Y)} + EY$

2) $\rho_{X,Y} = -1 \iff D(Y^* + X^*) = D(Y^*) + 2\operatorname{cov}(X^*, Y^*) + D(X^*)$

$$= 1 - 2 + 1 = 0,$$

јер $\rho_{X,Y} = \operatorname{cov}(X^*, Y^*) \wedge D(Y^*) = D(X^*) = 1$

$$\iff Y^* + X^* \overset{s.s}{=} C$$

$$\iff Y \overset{s.s.}{=} -\frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}} + \left(\frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}} EX + \sqrt{DY}\, C + EY\right)$$

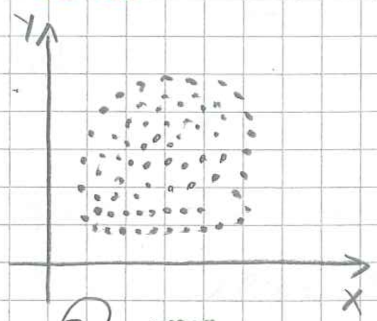
$a = -\frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}$, $b = \frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}} EX + \sqrt{DY}\, C + EY$

Напомена: а) За $\rho_{X,Y} = 1$: $X \nearrow \Rightarrow Y \nearrow$, јер $a > 0$

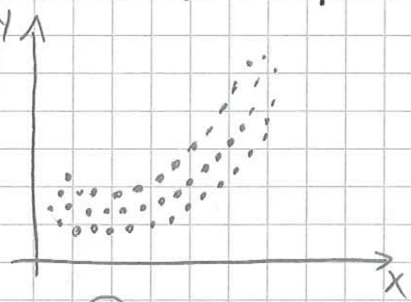
б) За $\rho_{X,Y} = -1$: $X \nearrow \Rightarrow Y \searrow$, јер $a < 0$

Примена: Статистика: линеарна регресија

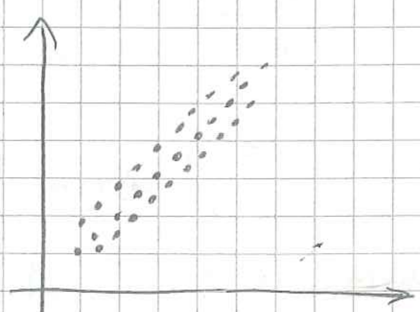
а)



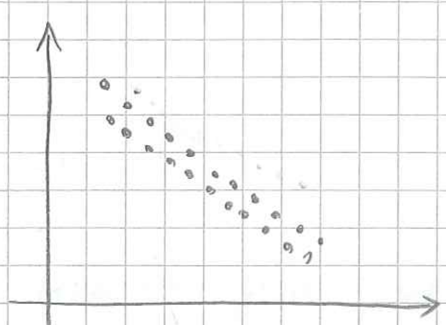
$\rho_{X,Y} \overset{approx.}{=\!=} 0,1$



$\rho_{X,Y} \overset{approx.}{=\!=} 0,3$



$\rho_{X,Y} \overset{approx.}{=\!=} 0,91$



$\rho_{X,Y} \overset{approx.}{=\!=} -0,98$

24) Карактеристична функција. Основна својства. Примери

Деф: Карактеристична функција случајне величине X дефинише се као: ($f_X : R \to C$)

$$(\forall t \in R)\ f_X(t) = E(e^{itX})$$

Напомена: $e^{itX} = \cos tX + i \sin tX$ (Ојлерова формула)

а) дискретан случај:

$$f_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_k e^{itx_k} P\{X = x_k\}$$

б) Апсолутно непрекидни случај:

$$f_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(t)\, dx$$

Теорема: За карактеристичну ф-ју f_X сл. величине X важе следеће особине:

а) $|f_X(t)| \le f_X(0) = 1$

б) $f_X(-t) = \overline{f_X(t)}$

в) $f_{aX+b}(t) = e^{itb} f_X(at)$

г) f_X је равномерно непрекидна на R

Д: а) $f_X(0) = E(e^{i0X}) = E(e^0) = E(1) = 1$

- други део без доказа

б) $f_X(-t) = E(e^{-itX}) = E(\cos(-tX) + i\sin(-tX))$

$= E(\cos(tX)) - iE(\sin(tX)) = \overline{E(\cos(tX)) + iE(\sin(tX))}$

$= E(\overline{\cos(tX) + i\sin(tX)}) = \overline{E(e^{itX})} = \overline{f_X(t)}$

в) $f_{ax+b}(t) = E(e^{i(ax+b)t}) = E(e^{iaxt} \cdot e^{itb})$

$= e^{itb} E(e^{iaxt}) = e^{itb} f_x(ax)$

г) без доказа

Теорема: Нека је X случајна величина чија је карактеристична ф-ја $f_X(t)$. Ако постоји $n \in N$ т.д. $E(|X|^n) < +\infty$, онда важи да за свако $k \in N, k \le n$ постоји $f_X^{(k)}(t)$ где важи:

а) $E(X^k) = \dfrac{f_X^{(k)}(0)}{i^k}$ (без доказа)

б) $f_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(it)^k}{k!} E(X^k) + o(t^n)$, $t \to 0$ (без доказа)

Теорема: (О производу карактеристичних функција):
Ако су $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независне случајне величине и $f_{X_i}(t)$ карактеристична ф-ја сл. величине X_i за $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ онда важи:

$$f_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(t) = f_{X_1}(t) \cdot f_{X_2}(t) \cdot \ldots f_{X_n}(t)$$

Д: $f_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(t) = E(e^{it(X_1+X_2+\ldots+X_n)}) = E(e^{itX_1 + itX_2 + \ldots + itX_n})$

$= E(e^{itX_1} \cdot e^{itX_2} \cdot \ldots \cdot e^{itX_n}) = E(e^{itX_1}) \cdot E(e^{itX_2}) \cdot \ldots E(e^{itX_n})$ (независност)

Теорема: Ако су тачке a и b тачке непрекидности ф-је F и f одговарајућа карактеристична ф-ја онда важи:

$$F(b) - F(a) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} f(t)\,dt$$

Формула инверзије

$$F(X)=\lim_{a\to-\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itx}}{it}f(t)\,dt\,,\quad X\in C(F)$$

Теорема: Нека је F функција расподеле и f њена карактеристична ф-ја. Ако је

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt<+\infty$$, онда је f апсолутно непрекидног типа и за њену густину важи:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f(t)\,dt$$

Теорема: (о јединствености) Ако неке две ф-је расподеле имају исту карактеристичну ф-ју, онда су оне идентичне

Лема: Линеарна комбинација коначно много независних нормалних расподела има нормалну расподелу.

$$\Delta:\ \left.\begin{array}{l} X_1 : \mathcal{N}(m_1,\sigma_1^2)\\ X_2 : \mathcal{N}(m_2,\sigma_2^2)\\ \vdots\\ X_n : \mathcal{N}(m_n,\sigma_n^2)\\ \text{независне}\end{array}\right\}\ ?\ a_1X_1+a_2X_2+\dots+a_nX_n : \mathcal{N}(m,\sigma^2)\ ?$$

$$E(a_1X_1+a_2X_2+\dots+a_nX_n)=a_1E(X_1)+a_2E(X_2)+\dots+a_nE(X_n)$$

$$D(a_1X_1+a_2X_2+\dots+a_nX_n)=a_1^2D(X_1)+a_2^2D(X_2)+\dots+a_n^2D(X_n)\ \text{(независне)}$$

$$f_{\sum_{k=1}^{n} a_k X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{a_k X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} E(e^{i t a_k X_k}) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(a_k t)$$

(теорема о производу)

$$= \prod_{k=1}^{n} e^{i a_k t m_k - \frac{t^2}{2} a_k^2 \cdot \sigma_k^2} = e^{\sum_{k=1}^{n} i a_k t m_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^2}{2} a_k^2 \cdot \sigma_k^2}$$

$$= e^{it \sum_{k=1}^{n} a_k m_k - \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sigma_k^2} = f_{\sum_{k=1}^{n} a_k X_k}(t)$$

$$Z : \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k m_k, \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sigma_k^2\right) \Rightarrow f_Z(t) = f_{\sum_{k=1}^{n} a_k X_k}(t)$$

$\Rightarrow$ (теорема о јединствености)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k X_k = Z \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k X_k : \left(\sum_{k=1}^{n} a_k m_k, \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sigma_k^2\right)$$

27] Конвергенција у расподели низа случајних величина.

(X_n) - низ случајних величина на простору вер. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Деф: Нека је (X_n) низ случајних величина на простору вер. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Низ (X_n) конвергира у вероватноћи ка X у ознаци:

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, ако важи: ($X$ је сл. величина)

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to\infty} P\{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} = 0$$

Деф: Нека је (X_n) низ случајних величина на простору вер. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Низ (X_n) скоро сигурно конвергира ка сл. величини X у ознаци:

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.s} X$, ако важи:

$$P\{\omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1$$

Деф: Нека је (X_n) низ случајних величина на простору $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Низ (X_n) конвергира средње квадратно ка случајној величини X у ознаци:

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{S.K.} X \text{ , ако важи: } \lim_{n\to\infty} E(X_n - X)^2 = 0$$

Деф: Нека је (X_n) низ случајних величина на простору вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Низ (X_n) конвергира у расподели ка случајној величини X у ознаци:

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{R} X$, ако за сваку тачку непрекидности x ф-је расподеле F_X важи:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Теорема: Нека је (X_n) низ случајних величина на простору вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Низ (X_n) скоро сигурно конвергира ка случајној величини X, АККО:

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to\infty} P\{\omega \mid \sup_{k\geq n} |X_k(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} = 0$$

(без доказа)

Теорема: Нека је (X_n) низ случајних величина на простору вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Низ (X_n) скоро сигурно конвергира ка случајној величини X ако важи:

$$(\forall \varepsilon > 0) \sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} < +\infty$$

Δ: $(\forall \varepsilon > 0) \sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} < +\infty$

(Борел Кантелијева лема I) $\Rightarrow$

$\Rightarrow P\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega \mid |X_k(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}\} = 0$

$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| \Rightarrow B_n \supset B_{n+1}$

(непрекидност одозго) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0) \lim_{n \to \infty} P\{\bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}\} = 0$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \lim_{n \to \infty} P\{\omega \mid \sup |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} = 0$

(претходна теорема) $\Rightarrow X_n \xrightarrow{s.s.} X, \ n \to \infty$

Теорема: Нека је (X_n) низ независних случајних величина на простору вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тада важи:

$$X_n \xrightarrow[n \to \infty]{s.s.} 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega \mid |X_n(\omega) - 0| \geq \varepsilon\} < +\infty$$

Δ: $\boxed{\Leftarrow}$ специјалан случај претходне теореме

$\boxed{\Rightarrow}$ Контрапозиција $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

$\neg(\forall \varepsilon > 0) \sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega) \geq \varepsilon\} < +\infty$

$(\exists \varepsilon > 0) \sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega) \geq \varepsilon\} = +\infty$

(Борел Кантелијева лема II) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists \varepsilon > 0) P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega \mid |X_n(\omega)| \geq \varepsilon\}\right) = 1$

$\Rightarrow |X_n(\omega)| \geq \varepsilon \Rightarrow$ Не важи: $P\{\omega \mid \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = 0\} = 1$

Јер за толико ε неће скоро сигурно важити: $\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = 0$

$\Rightarrow X_n \underset{n\to\infty}{\overset{s.s.}{\not\longrightarrow}} 0$ (доказана контрапозиција)

$\Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.s.} 0 \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0) \sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega \mid |X_n(\omega)| \geq \varepsilon\} < +\infty$

Напомена: Теорема важи и за константу C, али не и за променљиву X

Теорема: Нека је F_n низ ф-ја расподеле и φ_n низ одговарајућих карактеристичних ф-ја.

а) Ако за сваку тачку непрекидности x неке ф-је F важи $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, онда важи:

$(\forall t \in R) \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ и $\varphi(t)$ је

карактеристична ф-ја која одговара ф-ји расподеле F.

б) Ако је $(\forall t \in R) \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ и $\varphi(t)$ је непр. у 0, карактеристична ф-ја, онда за сваку тачку непрекидности ф-је F важи:

$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ и F је ф-ја расподеле чија је карактеристична ф-ја φ

28) Односи између конвергенција низа случајних величина.

Теорема: Ако низ сл. вел. X_n конв. скоро сигурно ка сл. вел. X, онда низ X_n конв. у вероватноћи ка X $(n \to +\infty)$

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$$

Δ: $$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s.s} X \iff (\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to+\infty} P\{\underbrace{\omega \mid \sup_{k\ge n} |X_k(\omega) - X(\omega)| \ge \varepsilon}_{A}\} = 0$$

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} X \iff (\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to+\infty} P\{\underbrace{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| \ge \varepsilon}_{B}\} = 0$$

$$\boxed{B \subseteq A} \Rightarrow P(B) \le P(A) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P(B) \le \lim_{n\to\infty} P(A) = 0$$

$$\Rightarrow P(B) = 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$$

Теорема: Ако низ сл. вел. X_n конв. у вероватноћи ка сл. вел. X, онда низ X_n конв у расподели ка сл. вел. X $(n \to +\infty)$

Теорема: Ако низ сл. вел. X_n конв у расподели ка константи C, онда низ X_n конв. у вероватноћи ка константи C $(n\to\infty)$

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{R} C \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} C$$

Δ $$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} C \iff (\forall \varepsilon>0) \lim_{n\to+\infty} P\{|X_n - C| \ge \varepsilon\} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (1 - P\{|X_n - C| < \varepsilon\})$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1 - P\{-\varepsilon < X_n - C < \varepsilon\})$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1 - P\{c-\varepsilon < X_n < c+\varepsilon\}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1 - P\{X_n \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)\}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1 - P\{X_n \in \bigcup_{k=n_0}^{\infty} (c-\varepsilon, c+\varepsilon-\tfrac{1}{k}]\}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1 - P\{\bigcup_{k=n_0}^{\infty} X_n^{-1}(c-\varepsilon, c+\varepsilon-\tfrac{1}{k}]\}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1 - P\{\underbrace{\bigcup_{k=n_0}^{\infty} X_n \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon-\tfrac{1}{k}]}_{B_k \subset B_{k+1}}\}\right)$$

$\Rightarrow$ (непрекидност одозго)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \lim_{k\to+\infty} P\{c-\varepsilon < X_n \le c+\varepsilon-\tfrac{1}{k}\}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \lim_{k\to+\infty} \left(F_{X_n}(c+\varepsilon-\tfrac{1}{k}) - F_{X_n}(c-\varepsilon)\right)\right)$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \ge c \end{cases}}$$

$$\lim_{k\to+\infty} (c+\varepsilon-\tfrac{1}{k}) > c \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} F_{X_n}(c+\varepsilon-\tfrac{1}{k}) = 1$$

$$c-\varepsilon \Rightarrow F_{X_n}(c-\varepsilon) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \lim_{k\to+\infty} \left(F_{X_n}(c+\varepsilon-\tfrac{1}{k}) - F_{X_n}(c-\varepsilon)\right)\right)$$

$$= 1 - 1 + 0 = 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} c$$

Теорема: Ако низ сл. вел. X_n конв. средње квадратно ка сл. вел. X, онда низ сл. вел. X_n конв. у вероватноћи ка сл. вел. X $(n\to+\infty)$

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{S.K} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} X$$

Д: $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{S.K} X \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} E|X_n - X|^2 = 0$

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} X \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to+\infty} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0 \; ?$$

- Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E|X_n - X|^2}{\varepsilon^2} = 0$$

$$\Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} X$$

Последица: (из претходне две теореме) Ако низ сл. вел. X_n конв. средње квадратно ка сл. вел. X, онда сл. вел. X_n конв. у расподели ка сл. вел. X $(n\to+\infty)$

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{S.K} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{R} X$$

Скица:

$$\begin{tikzcd}
X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{S.S} X \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
& X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} X \arrow[r, Rightarrow] & X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{R} X \arrow[l, bend right, "(X=c)"'] \\
X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{S.K} X \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

29) Слаби закон великих бројева

Деф: Ако за низ сл. вел. (X_n) дефинисаних на простору вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ важи:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} EX_k}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$, онда за тај низ сл. вел. важи слаби закон великих бројева

Теорема: (Бернулијев закон великих бројева)
Ако (X_n) има биномну расподелу $B(n,p)$, онда

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} p$$

Δ: $(\forall \varepsilon > 0) \lim\limits_{n\to+\infty} P\{|\frac{X_n}{n} - p| \geq \varepsilon\}$

$$= \lim_{n\to+\infty} P\{|\frac{X_n - np}{n}| \geq \varepsilon\} = \lim_{n\to+\infty} P\{|X_n - np| \geq n\varepsilon\}$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} \frac{E|X_n - np|^2}{n^2\varepsilon^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{DX}{n^2\varepsilon^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2} = 0$$

Теорема: (Чебишовљев закон великих бројева) Ако низ независних сл. вел. X_n, за који постоји константа $C>0$, таква да је $(\forall n \in \mathbb{N}) DX_n \leq C$, онда за тај низ важи слаби закон великих бројева

Δ:

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to+\infty} P\{|\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} EX_k}{n}| \geq \varepsilon\} = \lim_{n\to+\infty} P\{|\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} EX_k| \geq n\varepsilon\}$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} \frac{E|\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} EX_k|^2}{n^2\varepsilon^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{D(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{n^2\varepsilon^2} =$$

(независност) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} DX_k}{n^2\varepsilon^2} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nC}{n^2\varepsilon^2} = 0 \Rightarrow$ СЗВБ

Теорема: (Хинчинов закон великих бројева) Ако низ независних сл. вел. са истом расподелом и коначним математичким очекивањем (m), онда за тај низ важи слаби закон великих бројева

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} m$$

Δ: (метод карактеристичних функција)

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}}(t) = \lim_{n\to\infty} E\left(e^{it\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{\sum_{k=1}^{n} X_k}\left(\frac{t}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) \qquad \boxed{\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) + o(t^n),\ t\to 0}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{i\frac{t}{n}}{1} E(X) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + i\frac{t}{n} m + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n \ln\left(1 + i\frac{t}{n}\cdot m + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{n\left(i\frac{t}{n}\cdot m + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{itm + o(1)} = e^{itm}$$

e^{itm} је непр. у нули

$$\Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{R} m \overset{(X=m)}{\Longrightarrow} \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} m$$

30) Јаки закон великих бројева

Деф: Ако за низ сл. вел. (X_n) дефинисаних на простору вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ важи:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} EX_k}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{s.s} 0$$

, онда за тај низ сл. вел. важи јаки закон великих бројева

Теорема: Ако за низ (X_n) сл. вел. важи јаки закон великих бројева, онда за тај низ важи слаби закон великих бројева

$$\text{ЈЗВБ} \Rightarrow \text{СЗВБ}$$

Теорема: (Колмогоров I закон великих бројева)

Ако за низ независних сл. вел. (X_n) важи:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(X_n)}{n^2} < +\infty$$

, онда за тај низ важи јаки закон великих бројева

Теорема: (Колмогоров II закон великих бројева)

За низ независних сл. вел. (X_n) са истом расподелом и коначним математичким очекивањем (m) важи јаки закон великих бројева

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{s.s.} m$$

Теорема: (Борелов закон великих бројева) Ако је (X_n) број успеха у n независних покушаја, а вер. успеха p $(B(n,p))$ у сваком од њих покушаја важи, тада важи:

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{s.s} p$$ (следи из II Колмогоровог закона)

31) Централна гранична теорема:

Теорема: Ако је (X_n) низ независних сл. вел. са истом расподелом и коначним строго већим од нуле дисперзијом $(DX_n>0)$, онда важи:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{R} X^* : \mathcal{N}(0,1)$$

Δ: $EX_n = m$, $DX_n = \sigma^2$

- $Y_n = X_n - E(X_n)$

$EY_k = E(X_n - E(X_n)) = E(X_n) - E(X_n) = 0$

$D(Y_k) = D(X_k - E(Y_k)) = DX_k = \sigma^2$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow[n\to+\infty]{R} X^* : \mathcal{N}(0,1)$$

метода карактеристичних функција:

$$(\forall t \in R) \lim_{n\to+\infty} f_{\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{\sqrt{n}\sigma}}(t) = \lim_{n\to+\infty} E\left(e^{it\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{\sqrt{n}\sigma}}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} f_{\sum_{k=1}^{n} Y_k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} f_{Y_k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{it}{\sqrt{n}\sigma}\cancel{E(Y_k)}^{0} + \frac{\left(i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2}{2!}\underbrace{EY_k^2}_{\sigma^2} + o\left(\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{t^2}{2\cancel{\sigma^2} n}\cancel{\sigma^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(-\frac{t^2}{2n}+\cancel{o\left(\frac{1}{n}\right)}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \Rightarrow \frac{\sum_{k=0}^{n} Y_k}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{R} X^*(0,1)$$