1. Бацају се истовремено новчић и коцкица. Одредити скуп ел. исхода.

$\Omega = \{П1, П2, П3, П4, П5, П6, Г1, Г2, Г3, Г4, Г5, Г6\}$

2. У кутији су четири листића означена са бројевима 1, 2, 3, 4. Извлачимо листиће:
а) без враћања
б) са враћањем
све док не извучемо листић са непарним бројем. Одредити скуп ел. исхода

а) $\Omega = \{1, 3, 21, 23, 41, 43, 243, 423, 241, 423\}$

б) $\Omega = K \cup P$, K - скуп коначних ел. исхода
P - скуп беск. пребројивих ел. исхода

$K = \{1, 3, 21, 23, 221, 223, \ldots, 41, 43, 441, 443, \ldots 241, 421, \ldots\}$

$P = \{222\ldots, 444\ldots, 2424\ldots, 42224\ldots\}$

3. Стрелац гађа у циљ облика кружне мете полупречника дужине K, при чему се мери растојање поготка од центра мете. Одредити скуп ел. исхода.

$\Omega = [0, K] \cup \{промашај\}$

4. Посматра се n гостију у ресторану и региструје се да ли су наручили кафу или не, а онда се посматра још онолико гостију колико је међу првих n гостију наручило кафу и код њих се, такође, региструје да ли су наручили кафу или не. Одредити скуп ел. исхода Ω и број ел. тог скупа. Сматра се да је укупан број гостију у ресторану бар $2n$.

n - део гостију који се прво посматра

k - део изабраних гостију

$|\Omega| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^k$, $\Omega = \bigcup_{k=0}^{n} A_{n+k}$, A_{n+k} - скуп исхода са k наручених кафа.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \cdot 1^{n-k} = 3^n$$

5. Коцка чије су све стране обојене је подељена на 1000 мањих коцки једнаке величине. Израчунати вероватноћу да случајно изабрана коцка има тачно две обојене стране.

- свака ивица је подељена на 10 делова.

A - бира се коцкица са две обојене стране

$P(A) = \frac{12 \cdot 8}{1000}$, 12 страница, на свакој 8 повољних коцки

6. Из кутије у којој се налазе цедуље означене бројевима 1 до n извлачи се једна по једна цедуља

а) без враћања

б) са враћањем

и бележе се добијени бројеви. Израчунати вероватноћу да буду редом извучени бројеви 1,2,3, . . . , n.

A - извучени бројеви редом: 1, 2, 3, . . ., n

a)
$$P(A) = \frac{1}{n!}$$

б) $P(A) = \frac{1}{n^n}$

7. Хотел има n соба поређаних једна до друге. На случајан начин k(k<n) гостију се размешта по собама. Израчунати вероватноћу да они заузму k суседних соба.

A - гости су заузели k узастопних соба

$$P(A) = \frac{(n-k+1)!\cdot k!}{\binom{n}{k}\cdot k!} = \frac{(n-k+1)}{\binom{n}{k}}$$

8. На случајан начин се N људи размешта за округли сто. Израчунати вероватноћу да два одабрана лица не седе један до другог.

A - два одабрана лица не седе један до другог

$\bar{A}$ - два одабрана лица седе један до другог

• N људи можемо распоредити око стола на $(N-1)!$

$$P(\bar{A}) = \frac{(N-2)!\,2}{(N-1)!} = \frac{2}{N-1}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{N-1} = \frac{N-3}{N-1}$$

9. Играчи A и B имају једнаке шансе да у једној партији неке игре освоје бод. Нема нерешених игара. Побеђује онај играч који први сакупи 6 бодова. Израчунати вероватноћу да победи играч A, односно играч B, ако је тренутни резултат 4:2 за играча A

резултат: 4:2

A_1 - побеђује играч A

A_2 - побеђује играч B , 1-победа, 0-губиток

$$A_1 = \{ 11, \quad \binom{1}{1}$$
$$011, 101, \quad \binom{2}{1}$$
$$0011, 0101, 1001 \quad \binom{3}{1}$$
$$00011, 00101, 01001, 10001 \quad \binom{4}{1}$$

$$A_2 = \{ 1111, \quad \binom{4}{4}$$
$$01111, 10111, 11011, 11101 \quad \binom{5}{4}$$

$|A_1| = 10$ $\qquad P(A_1) = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{13}{16}$

$|A_2| = 5$ $\qquad P(A_2) = 1\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{16}$

$|\Omega| = 15$

Напомена: исходи нису једнако вероватни

10. Из складишта са n предмета, од којих је k неисправно, узима се одједном m елемената. Израчунати врв. да међу тих m предмета има тачно l неисправних.

A - l од m изабраних из n је неисправно

$$P(A) = \frac{\binom{k}{l}\cdot\binom{n-k}{m-l}}{\binom{n}{m}}$$

11. Израчунати вероватноћу да се записивањем по случајним редоследу две цифре 1, једне цифре 2, три цифре 3, две цифре 4 и једне цифре 6 добије деветоцифрени број који на непарним местима има непарне цифре.

А - на непарним местима непарне цифре:

2x '1'

1x '2' $\overline{n}\ \_\ \overline{n}\ \_\ \overline{n}\ \_\ \overline{n}\ \_\ \overline{n}$

3x '3'

2x '4' $P(A) = \dfrac{\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}\ \dfrac{4!}{1!\cdot 2!\cdot 1!}}{\dfrac{9!}{2!1!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!}}$

1x '6'

12. Двадесет идентичних куглица девојчица на случајан начин распоређује у пет кутија. Израчунати вероватноћу да:

а) у свакој кутији буду бар две куглице:

б) тачно две кутије буду празне

а) А - а),

- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 2$
- смена $x_i = k_i + 2$, $i = \{1,2,3,4,5\}$

$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 10$

$$P(A) = \frac{\binom{10+5-1}{10}}{\binom{20+5-1}{20}} = \frac{\binom{14}{10}}{\binom{24}{20}}$$

б) В - б) $P(B) = \dfrac{\binom{5}{2}\cdot\binom{17+3-1}{17}}{\binom{20+5-1}{20}} = \dfrac{\binom{5}{2}\binom{19}{17}}{\binom{24}{20}}$

13. Четири брачна пара на случајан начин седају у ред са 8 столица. Израчунати вероватноћу да ниједан пар не седи заједно.

A_1 - први брачни пар седи заједно
A_2 - други -||-
A_3 - трећи -||-
A_4 - четврти -||-

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i A_j) + \sum_{i,j,k} P(A_i A_j A_k) - P(A_1 A_2 A_3 A_4)$$

$$P(A_i) = \frac{7!}{8!} \cdot 2, \quad P(A_i A_j) = \frac{6!}{8!} \cdot 2^2, \quad P(A_i A_j A_k) = \frac{5!}{8!} 2^3, \quad P(A_1 A_2 A_3 A_4) = \frac{4!}{8!} \cdot 2^4$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \binom{4}{1} \cdot P(A_i) - \binom{4}{2} P(A_i A_j) + \binom{4}{3} P(A_i A_j A_k) - \binom{4}{4} P(A_1 A_2 A_3 A_4)$$
$$= 8 \cdot \frac{7!}{8!} - 24 \frac{6!}{8!} + 48 \cdot \frac{5!}{8!} - 16 \cdot \frac{4!}{8!}$$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ - бар један пар седи заједно
B - ниједан пар не седи заједно
B_1 - први брачни пар седи одвојено
B_2 - други -||-
B_3 - трећи -||-
B_4 - четврти -||- , $B_i = \overline{A_i}$

$$B = B_1 B_2 B_3 B_4 = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4} = \overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)}$$
$$P(B) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$$

14. За биоскопску салу која има n нумерисаних места све карте су распродате. Гледаоци случајно бирају места без обзира на карте које имају. Израчунати вероватноћу да бар један гледалац седне на место за које има карту. Чему тежи та вероватноћа кад је $n \to \infty$?

A - бар један гледалац седи на свом месту.

A_k - k-ти гледалац седи на свом месту

$$A = \sum_{k=0}^{n} A_k$$

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k) - \sum_{i,j} P(A_i A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

$$P(A_k) = \frac{(n-1)!}{n!} =$$

$$P(A_i A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$\dots$$

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = \frac{1}{n!}$$

$$P(A) = \binom{n}{1}\frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} + \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n!}$$

$$= \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-1)!}\,1!}\cdot\frac{\cancel{(n-1)!}}{\cancel{n!}} - \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-2)!}\,2!}\cdot\frac{\cancel{(n-2)!}}{\cancel{n!}} + \dots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}$$

$n \to \infty$

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \dots$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots +$$

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - e^{-1}$$

13. У воз који има m вагона беже се n $(n \geq m)$ путника. Израчунати вероватноћу да у сваки вагон уђе бар по један путник.

A - у сваки вагон је ушао бар један путник
$\bar{A}$ - и неки вагон није ушао ниједан путник
A_i - у i-ти вагон није ушао ниједан путник

$$P(A_i) = \frac{(m-1)^n \cdot \cancel{n!}}{m^n \cdot \cancel{n!}} = \frac{(m-1)^n}{m^n}$$

$$P(A_i A_j) = \frac{(m-2)^n \cdot n!}{m^n \, n!} = \frac{(m-2)^n}{m^n}$$

...

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = 0$$

$$P(\bar{A}) = \binom{m}{1}\left(\frac{m-1}{m}\right)^n - \binom{m}{2}\left(\frac{m-2}{m}\right)^n + \dots + 0$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i}\left(\frac{m-i}{m}\right)^n \cdot (-1)^{i+1}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i}\left(\frac{m-i}{m}\right)^n (-1)^{i+1}$$

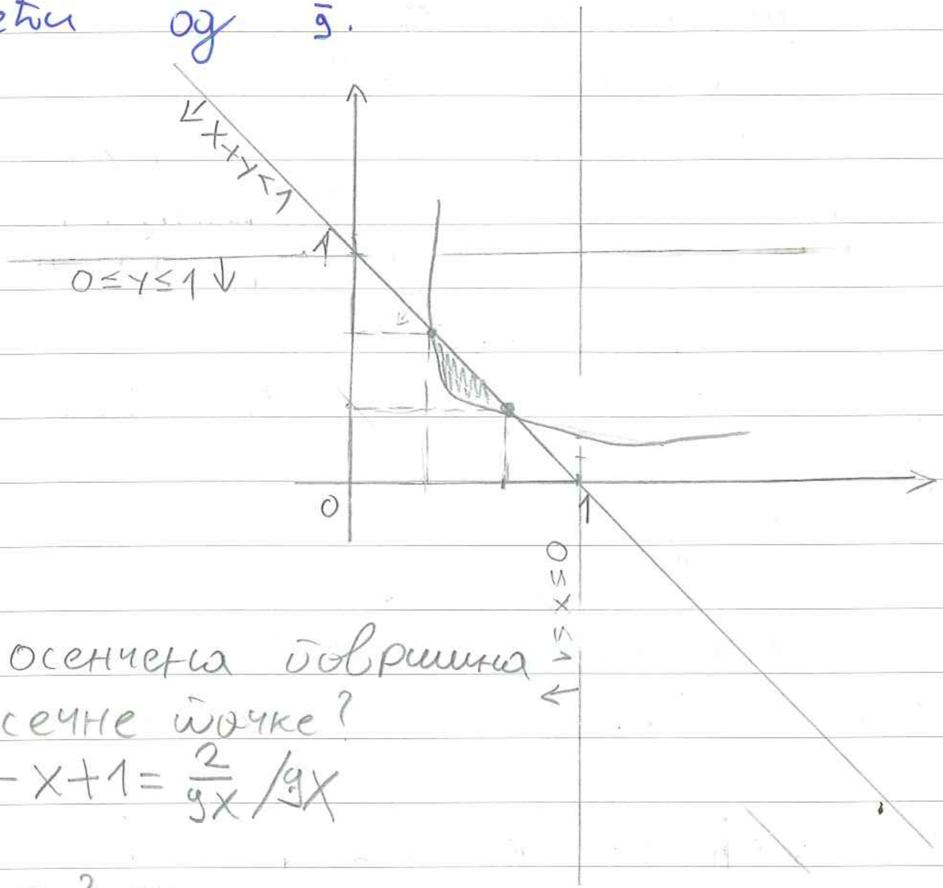
16. Из сегмента [0,1] на случајан начин бирају се два броја. Израчунати врв. да њихов збир буде мањи од 1, а производ већи од $\frac{2}{9}$.

1) $0 \leq x \leq 1$

2) $0 \leq y \leq 1$

3) $x+y<1$

4) $x \cdot y > \frac{2}{9}$



3) $y < -x+1$

x	0	1
y	1	0

P - осенчена површина

4) $x \cdot y > \frac{2}{9}$

$y > \frac{2}{9x}$

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
y	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$

- пресечне тачке?

$-x+1 = \frac{2}{9x} \,/\cdot 9x$

$-9x^2+9x-2=0$

$D = 81-4\cdot 2\cdot 9 = 9$

$x_{1/2} = \frac{-9\pm 3}{-18} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, \; x_2 = \frac{2}{3}$

- пресечне тачке су границе интеграла:

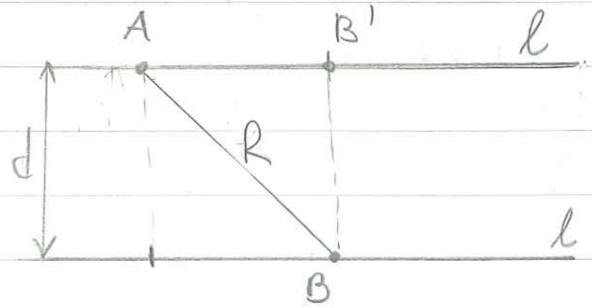
$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left(-x+1-\frac{2}{9x}\right)dx = -\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} x\,dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} dx - \frac{2}{9}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{x}$$

$$= -\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} + x\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}\ln\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \underbrace{-\left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2}\right) + \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{9}\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{3}\right)\right)}_{P}$$

$P(A) = \frac{P}{1^2}$

17. Растојање између две телефонске линије дужине l је d $(d<l)$. На свакој од телефонских линија на произвољном месту постоји прекид. Израчунати врв. да је растојање R међу тачкама прекида не веће од a $(d<a<\sqrt{l^2+d^2})$

$d<l$, $d<a<\sqrt{l^2+d^2}$



1) $d<l$

2) $d<a<\sqrt{l^2+d^2}$

3) $R \le a$

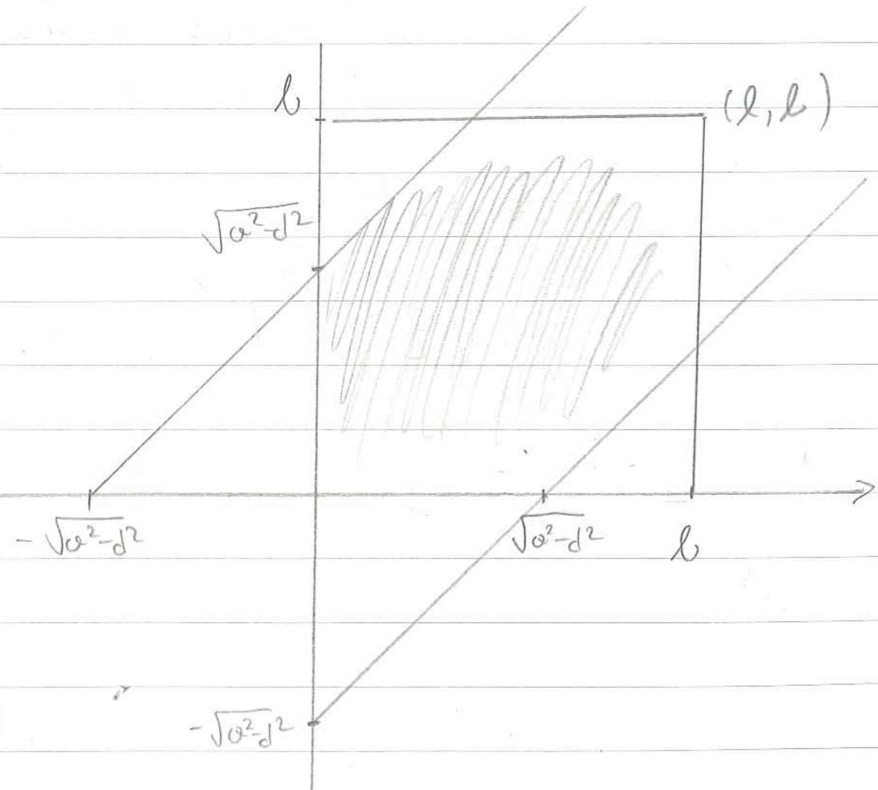
$$R=|AB|=\sqrt{d^2+(x_B-x_A)^2} \quad X=|AB'|$$

$$R \le a \Rightarrow \sqrt{d^2+(x_B-x_A)^2} \le a \Rightarrow (x_B-x_A)^2 \le a^2-d^2$$

$$x_B \le x_A+\sqrt{a^2-d^2} \quad \wedge \quad x_B \ge x_A-\sqrt{a^2-d^2}$$

$$Y_1 = X+\sqrt{a^2-d^2}, \quad Y_1=x_B, \quad X=x_A$$

$$Y_2 = X-\sqrt{a^2-d^2}$$



Y_1:

X	0	$-\sqrt{a^2-d^2}$
Y	$\sqrt{a^2-d^2}$	0

Y_2:

X	0	$\sqrt{a^2-d^2}$
Y	$-\sqrt{a^2-d^2}$	0

$$P=l^2-2\cdot\frac{(l-\sqrt{a^2-d^2})^2}{2}$$

$$P=2l\sqrt{a^2-d^2}-(a^2-d^2)$$

$$P(A)=\frac{P}{l^2}$$

18. Из скупа $\{1,2,...,22\}$ случајно је изабран један број. Израчунати вероватноћу да је изабран паран број ако је познато да је изабран број дељив са 3.

A – изабран бр. дељив са 3

B – изабран је паран број

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$P(A) = \frac{7}{22}$, $\{3,6,9,12,15,18,21\}$

$P(AB) = \frac{3}{22}$ $\{6,12,18\}$

$$P(B|A) = \frac{3}{7}$$

19. У ред са 10 седишта на случајан начин седају три особе. Особе X и Y нису седе једна до друге. Израчунати врв. да је особа Z села између X и Y.

X, Y, Z

B – особе X и Y не седе заједно

$\overline{B}$ – особе X и Y седе заједно

$$P(\overline{B}) = \frac{9\cdot 8\cdot 2}{10\cdot 9\cdot 8} = \frac{1}{5} \Rightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{4}{5}$$

AB – XZY и YZY

$$P(AB) = \frac{8\cdot 2}{10\cdot 9\cdot 8} = \frac{1}{45}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{\cancel{45}\,9}}{\frac{4}{\cancel{5}}} = \frac{1}{36}$$

20. У чинији се налазе 4 јабуке сорте 1 и пет јабука сорте 2. Девојчица сваког дана поједе по једну. Израчунати вер. да ће девојчица прво да поједе јабуке сорте 2.

A – девојчица је појела прво све јаб. сорте 2.

$$P(A) = \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}$$

21. Свако од 15 испитних цедуља садржи по два питања која се не понављају. Студент зна одговор на 25 питања. Да би се положио испит он треба или на оба питања са цедуље коју прво извуче или једно питање са прве цедуље и прво питање са друге цедуље коју извуче. Која је вероватноћа да студент положи испит.

A – положио испит

A_1 – одговорио на оба питања са I цедуље

A_2 – одговорио на прво са I и I са друге

A_3 – одговорио на друго са I и I са друге

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3, \quad A_1A_2 = A_2A_3 = A_1A_3 = \emptyset$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$P(A_1) = \frac{25}{30}\cdot\frac{24}{29}, \quad P(A_2) = \frac{25}{30}\cdot\frac{5}{29}\cdot\frac{24}{28}, \quad P(A_3) = \frac{25}{30}\cdot\frac{5}{29}\cdot\frac{24}{28}$$

$$P(A) = \frac{25}{30}\cdot\frac{24}{29}\left(1 + \frac{10}{28}\right) = \frac{25\cdot 24\cdot 39}{30\cdot 29\cdot 28} = 96\%$$

22. Човек има у џепу n кључева од којих само један отвара врата. Кључеве редом вади (без враћања) док не дође до одговарајућег. Израчунати врв. да тражени кључ извуче у k-том извлачењу, где је k фиксиран бр тд. $1 \leq k \leq n$.

A - извлачи кључ у k-том извлачењу

$$P(A) = \frac{\cancel{n-1}}{n} \cdot \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \cdots \frac{\cancel{n-k}}{\cancel{n-k+1}} \cdot \frac{1}{\cancel{n-k}} = \frac{1}{n}$$

23. Под претпоставком да су врв. рођења мушког и женског детета једнаке, израчунати да ли су догађаји независни:

A - деца нису истог пола;
B - међу децом је највише једна девојчица
 а) у породици има троје деце
 б) у породици има четворо деце

а) $\bar{A}$ - деца су истог пола

$$P(\bar{A}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

AB - једна девојчица и 2 дечака

$$P(AB) = \frac{3}{8} = P(A) \cdot P(B)$$

$\Rightarrow$ догађаји су независни

б) $P(\bar{A}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow P(A) = \frac{7}{8}$

$P(B) = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$

$P(AB) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(B)$

24. <=> 9.

23. На турниру треба одиграти три партије стоног тениса шампиона А и неког слабијег играча В по једној од шема:
1) А – В – А
2) В – А – В , награда се добије ако се победе бар две партије узастопно.

C – прва шема (победа)
D – друга шема (победа)

$P(A) = x, \quad P(B) = y$

$C = ABA + AB\bar{A} + \bar{A}BA$

$P(C) = x^2y + xy(1-x) + (1-x)xy = xy(x + 2(1-x))$
$= xy(x+2-2x) = xy(2-x)$

$D = BAB + \bar{B}AB + BA\bar{B}$

$P(D) = xy^2 + (1-y)xy + xy(1-y) = xy(y + 2(1-y))$
$= xy(y+2-2y) = xy(2-y)$

$\Rightarrow \frac{P(C)}{P(D)} = \frac{2-x}{2-y}, \quad 2-y < 2-x \Rightarrow C$ је боља шема

26. У ~~[illegible]~~ партији између играча A и B, играч A побеђује са вероватноћом p и нема нерешених исхода. Игра траје или док A не добије m партија, или док A не изгуби n партија (B победник). Израчунати вероватноћу да A победи у целој игри:

$P(A)=p \Rightarrow P(B)=1-p$

C - A побеђује на крају

D - B побеђује на крају

$C=A^m+A^mB+A^mB^2+\dots A^mB^{n-1}$

$P(C)=\binom{m+0-1}{0}p^m+\binom{m+1-1}{1}p^m\cdot(1-p)+\dots\binom{m+n-2}{n-1}p^m(1-p)^{n-1}$

$=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{m+i-1}{i}p^m\cdot(1-p)^i$

$P(D)=\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n+i-1}{i}p^i(1-p)^n$

27. ~~[illegible]~~

У кутији са резервним деловима, који се по изгледу не разликују, је пет нових и три старо дела. Случајно се бирају два дела одједном и користе се извесно време, после чега се враћају у кутију. Након тога се опет случајно бирају два дела одједно

а) Израчунати врв. да оба другоодабрана дела буду нова;

б) Ако су другоодабрани делови нови, израчунати врв.

да су првоодабрани делови били стари.

5 нова, 3 стара

а) A – одабрани делови су нови:

A_1 – прво су одабрана 2 стара
A_2 – прво су одабрани нови и стари
A_3 – прво су одабрана два нова

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

$$P(A_1) = \frac{3\cdot 2}{8\cdot 7}\cdot\frac{5\cdot 4}{8\cdot 7},\quad P(A_2) = \frac{2\cdot 5\cdot 3}{8\cdot 7}\cdot\frac{4\cdot 3}{8\cdot 7},\quad P(A_3) = \frac{5\cdot 4}{8\cdot 7}\cdot\frac{3\cdot 2}{8\cdot 7}$$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{8^2\cdot 7^2}(2+3+2) = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{8\cdot 8\cdot 7}$$

б) $$P(H_1|A) = \frac{P(H_1A)}{P(A)} = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{\cancel{3}\cdot 2}{\cancel{8}\cdot 7}\cdot\frac{\cancel{5}\cdot\cancel{4}}{\cancel{8}\cdot\cancel{7}}}{\frac{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}}{8^2\cdot\cancel{7}}} = \frac{2}{7}$$

28. У кутији се налазе три куглице, од којих свака може бити бела или црна. Све претпоставке о броју белих куглица су једнако вероватне. Из кутије се четири пута са враћањем, бира куглица. Који је највероватнији састав кутије ако је једном извучена црна и три пута бела куглица?

A_k – у кутији се налази k белих куглица, $k=\overline{0,3}$
$\Rightarrow P(A_k)=\frac{1}{4}$

B_k – једном црна и 3 пута бела са k белих куглица

$P(B_0)=0$, $P(B_1)=4\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$, $P(B_2)=4\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$
$P(B_3)=0$

$$P(A_1|B)=\frac{P(BA_1)}{P(B)}=\frac{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{81}}{\frac{40}{81}}=\frac{1}{20}$$

$*\ P(B)=P(B_1)+P(B_2)=\frac{40}{81}$, $P(B|A_1)=P(B_1)$

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{32}{81}}{\frac{40}{81}}=\frac{1}{5}$$

$*\ P(B|A_2)=P(B_2)$

29. Вероватноћа да је одређена књига у библиотеци је p. Ако је та књига у библиотеци, онда се са истом вер. налази на било којој од n полица. Прегледано је m полица $(m<n)$ и та књига није нађена. Израчунати вер. да је она сада у библиотеци.

A-књига се не налази на првих m полица, а јесте у библиотеци

$P(A) = p \cdot m(1-p)$, -(

B- налази се на

30. У првој кутији налазе се само беле куглице, а у другој кутији их $\frac{1}{4}$ црне и $\frac{3}{4}$ беле. Случајно се бира кутија и из ње се извлачи једна куглица. Испоставило се да је бела. Куглица се враћа назад у исту кутију одакле је извучена. Израчунати вер. да се сад извуче црна куглица из те кутије.

A-извучена куглица је бела (I извлачење)

$P(A) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{8}$

B- извучена куглица је црна (II извлачење)

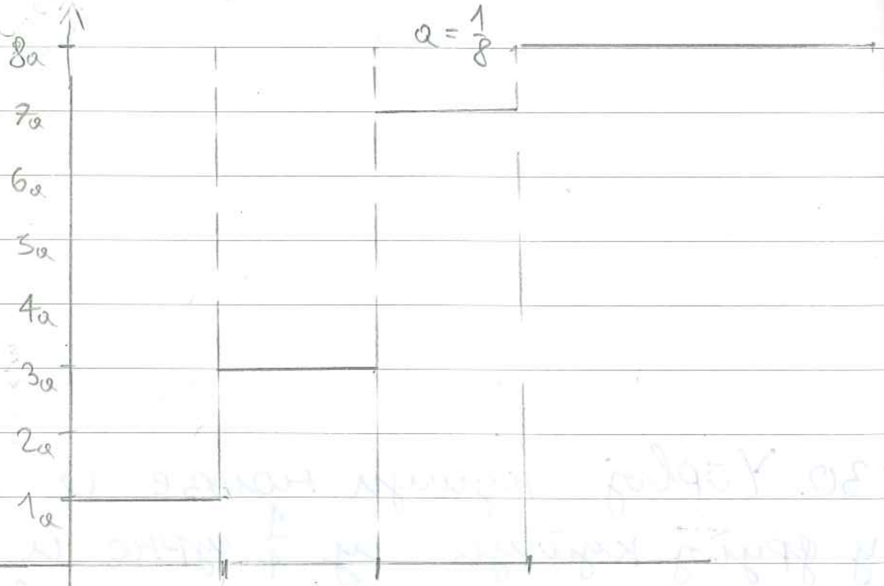
$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{7}{8}} = \frac{3}{28}$$

31. У смеру кретања аутомобила налазе се редом три семафора који раде независно један од другог. На сваком семафору се с вероватноћом $p=0,5$ појављује црвено светло а с вер. $q=0,5$ зелено светло. Случајна величина X представља број семафора поред којих пролази аутомобил до заустављања. Одредити закон и ф-ју расподеле вероватноћа случајне величине X.

$p=0,5, \quad q=0,5$

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & q\cdot p & q^2 p & q^3 \end{pmatrix} \Rightarrow X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$F_X=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1 \\ \frac{3}{4}, & 1\le x<2 \\ \frac{7}{8}, & 2\le x<3 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$



32. У кутији у којој су четири цедуље нумерисане бројевима 1,2,3,4 извлачимо, без враћања, док не извучемо цедуљу са непарним бројем. Ако је x збир извучених бројева, а Y број извлачења, одредити законе расподеле вер. сл. вел. X и Y. Израчунати њихово мат. очекивање и дисперзију.

COUNO:→ 1, 3, 5, 7, 9, 7, 9

$$\Omega = \{1, 3, 21, 23, 41, 43, 241, 243, 421, 423\}$$

P:→ $\frac{1}{4} = \frac{6}{24}$ $\qquad \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{24}$ $\qquad \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{24}$

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ \frac{6}{24} & \frac{8}{24} & \frac{4}{24} & \frac{4}{24} & \frac{2}{24} \end{pmatrix} \Rightarrow X: \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$Y: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2\cdot\frac{1}{4} & 4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} & 4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow Y: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$EX = \frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{3} + 5\cdot\frac{1}{6} + 7\cdot\frac{1}{6} + 9\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{4} + 1 + 2 + \frac{3}{4} = 4$$

$$EY = \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{3}$$

$$EX^2 = \frac{1}{2} + 9\cdot\frac{1}{3} + 25\cdot\frac{1}{6} + 49\cdot\frac{1}{6} + 81\cdot\frac{1}{12} = \frac{261}{6}$$

$$EY^2 = \frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{3} + 9\cdot\frac{1}{6} = \frac{10}{3}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{261}{6} - 16 = \frac{165}{6}$$

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{10}{3} - \frac{25}{9} = \frac{5}{9}$$

33. У кутији се налазе три куглице нумерисане бројевима 1, 2, 3. Из кутије се на случајан начин бирају две куглице, једна по једна са враћањем. Нека је X количник бројева добијених у првом и другом извлачењу.

а) Одредити закон расподеле случајне величине X

б) Скицирати график ф-је расподеле F_X

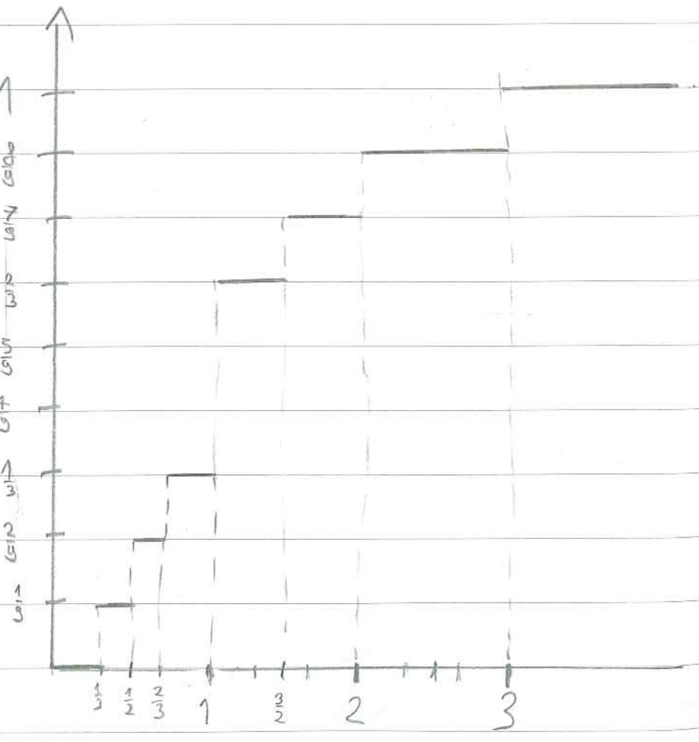
в) Израчунати вер. да X узме целобројну вредност.

$$\Omega = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$$

$$X \to \quad 1 \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{3} \quad 2 \quad 1 \quad \tfrac{2}{3} \quad 3 \quad \tfrac{3}{2} \quad 1$$

$$X: \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$F_X = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{3}; \\ \frac{1}{9}, & x < \frac{1}{2}; \\ \frac{2}{9}, & x < \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{3}, & x < 1; \\ \frac{2}{3}, & x < \frac{3}{2}; \\ \frac{7}{9}, & x < 2; \\ \frac{8}{9}, & x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$



A - целобројна вредност:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{5}{9}$$

34. $M=\{1,2,\dots n\}$, $n\geq 2$, бирају се X и Y
$S=\max\{X,Y\}$, X-расподела сл. X

$P\{0{,}3<S\leq 3{,}3\}$, $P(S>2\}$, ES?

$$P\{S=k\}=P\{\max\{X,Y\}=k\}=\frac{2(k-1)}{2\binom{n}{2}}=\frac{k-1}{\binom{n}{2}}$$

$$P(0{,}3<S\leq 3{,}3\}=\cancel{P(1)}^{0}+P(2)+P(3)=\frac{1}{\binom{n}{2}}+\frac{2}{\binom{n}{2}}=\frac{3}{\binom{n}{2}}$$

$$P\{S>2\}=1-P\{S\leq 2\}=1-P(2)=1-\frac{2}{\binom{n}{2}}$$

$$ES=\sum_{k=1}^{n}k\cdot P\{S=k\}=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{k-1}{\binom{n}{2}}=\frac{1}{\binom{n}{2}}\sum_{k=1}^{n}k(k-1)$$

$$=\frac{1}{\binom{n}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k\right)=\frac{1}{\binom{n}{2}}\left(\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$=\frac{\frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{6}\,3}}{\frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{2}}}\left(2n+1-3\right)=\frac{n+1}{3(n-1)}2(n-1)=\frac{2}{3}(n+1)$$

$$ES=\frac{2}{3}(n+1)$$

$$*\ \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

35. 10 питања, потребно 7 за пролаз, $p=0,5$
вероватноће два одговора. $Q=0,5$

X - број тачних одг.

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & 10 \\ \binom{10}{0}\cdot Q^{10} & \binom{10}{1}\cdot p\,Q^{9} & \binom{10}{2}\, p^2 Q^8 & \cdots & \binom{10}{10}\, p^{10} \end{pmatrix}$$

$$P\{X=k\} = \binom{10}{k} p^k Q^{n-k}$$

a) $P\{X \geq 7\} = P\{X=7\} + P\{X=8\} + P\{X=9\} + P\{X=10\}$

$$= \binom{10}{7} p^7 Q^3 + \binom{10}{8} p^8 Q^2 + \binom{10}{9} p^9 Q^1 + \binom{10}{10} p^{10}$$

$$= \frac{1}{2^{10}} \left(\binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} \right)$$

б) $P\{X>2\} = 1 - \left(P(0) + P(1) + P(2)\right) = 1 - \frac{1}{2^{10}}\left(\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2}\right)$

36. $p \in (0,1)$

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \\ p & p\cdot Q & p\,Q^2 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$P\{X=k\} = p\cdot Q^{k-1}$$

$$EX = \sum_{k=1} k\cdot P\{X=k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p\cdot Q^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot Q^{k-1}$$

$$= p\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot Q^{k-1} = p\cdot\left(\frac{1}{1-Q}\right)' = p\cdot\frac{1}{(1-Q)^2} = p\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

37. $P\{X=k\} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$, $\underline{EX=\lambda}$, $\underline{DX=\lambda}$

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P\{X=\} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= \lambda \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda$$

$$* \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1 \ ? \Rightarrow e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2$$

$$EX^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda \sum_{i=0}^{\infty} i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} + \lambda \sum_{i=0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda \cdot \lambda + \lambda \cdot 1 = \lambda^2 + \lambda$$

$$DX = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda$$

38. X - број свих бацања

p_i - шанса да у неком бацању добијемо нови бр.

$p_1 = 1, \quad p_2 = \frac{5}{6}, \quad p_3 = \frac{4}{6}, \quad p_4 = \frac{3}{6}, \quad p_5 = \frac{2}{6}, \quad p_6 = \frac{1}{6}$

$$E_X = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{p_i} = 1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = 1 + \frac{6}{5} + \frac{3}{2} + 2 + 3 + 6$$

$$= 12 + \frac{6}{5} + \frac{3}{2} = \frac{120 + 12 + 15}{10} = \frac{147}{10} = 14{,}7$$

39. $X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, број промена: "01" или "10"

Y - број промена, $m = n-1$

$$Y: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & m \\ \binom{m}{0} b^m & \binom{m}{1} a b^{m-1} & \dots & \binom{m}{m} a^m \end{pmatrix}$$

a - вер да се деси промена, $b = 1-a$

$a = p \cdot q + q \cdot p = 2pq$

$$EY = \sum_{k=0}^{m} k \cdot \binom{m}{k} \cdot a^k b^{m-k} = \sum_{k=1}^{m} k \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} a^k b^{m-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!} a^k b^{m-k} = m \cdot a \sum_{k=1}^{m} \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} \cdot a^{k-1} b^{m-k}$$

$$= m \cdot a \sum_{k=1}^{m} \binom{m-1}{k-1} a^{k-1} b^{m-k} = m \cdot a \cdot 1 = ma = 2(n-1) \cdot pq$$

$$EY = 2(n-1)p(1-p)$$

40. $X: \mathcal{B}(n,p)$, $Y = n - X$, (Y, EY, DY)?

$$P\{X=k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad X = n-Y$$

$$P\{n-Y=k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P\{-Y=k-n\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P\{Y=n-k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P\{Y=-k\} = \binom{n}{k-n} p^{k-n} (1-p)^{-k}.$$

$$P\{Y=k\} = \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{k}$$

$$P\{Y=k\} = \binom{n}{k} p^{n-k} (1-p)^{k} \Rightarrow Y: \mathcal{B}(n, 1-p)$$

$$EY = n(1-p)$$

$$DY = np(1-p)$$

41.
$$X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p & 1-2p & p \end{pmatrix}, \quad Y = X^2, \ Z = e^X$$

$$Y: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-2p & 2p \end{pmatrix} \qquad Z: \begin{pmatrix} \frac{1}{e} & 1 & e \\ p & 1-2p & p \end{pmatrix}$$

$$EY = 2p, \quad EY^2 = 2p \Rightarrow DY = 2p - (2p)^2 = 2p(1-2p)$$

$$EZ = \frac{p}{e} + (1-2p) + pe, \quad EZ^2 = \frac{p}{e^2} + (1-2p) + pe^2 \Rightarrow DZ = \frac{p}{e}\left(1-\frac{1}{e}\right) + pe(1-e)$$

42. четири бацања новчића

0 → писмо, 1 → глава

$\Omega = \{0000, \| 0001, 0010, 0100, 1000 \| 0011, 0101, 1001, 0110, 1010, 1100, \| 0111, 1011, 1101, 1110, \| 1111\}$

- Ови ел. исходи су једнако вер.

X - број писама, Y - највећи бр. уз. писама

X \ Y	0	1	2	3	4
0	$\frac{1}{16}$	0	0	0	0
1	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	0
3	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
4	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$

$\sum = 1$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{5}{16} & \frac{2}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$P\{X=0, Y=0\} = \frac{1}{16} \neq P\{X=0\} \cdot P\{Y=0\} = \frac{1}{256}$$

43. $\Omega = \{\underline{1}, \underline{3}, \underline{21}, \underline{23}, \underline{41}, \underline{43}, \underline{241}, 243, \underline{421}, 423\}$

X - збир извлачења, Y - број извлачења

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \qquad P\{X=9\} = 2 \cdot \frac{1}{24}$$

$P\{X=1\} = \frac{1}{4}$, $P\{X=3\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$, $P\{X=5\} = 2 \cdot \frac{1}{12}$, $P\{X=7\} = \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{24}$

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 7 \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{4} + 1 + 2 + \frac{3}{4} = 4$$

$$EY = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$$

$$EXY = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=j}^{m} x_i x_j \cdot P\{X = x_i\} P\{Y = y_i\}$$

Y \ X	1	3	5	7	9	M_Y
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{3}$
3	0	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
M_X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\sum = 1$

$$M_Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad M_X : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$EXY = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{6}{12} + \frac{10}{6} + \frac{14}{12} + \frac{21}{12} + \frac{27}{12} = 1 + \frac{78}{12} = \frac{90}{12} = \frac{15}{2}$$

44. $Z = XY$

$Y=1$, Z: 1, $\boxed{3}$, 5, 7, $\boxed{9}$

$Y=2$, Z: 2, 6, 10, 14, 18

$Y=3$, Z: $\boxed{3}$, $\boxed{9}$, 15, 21, 27

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 9 & 10 & 14 & 15 & 18 & 21 & 27 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{12} & \frac{5}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{7}{72} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{72} \end{pmatrix}$$

провера:

$$\frac{9+6+15+6+8+6+7+4+4+2+2+2+1}{72} = \frac{72}{72} = 1$$

43. $G(p)$, $0<p<1$, $P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2\} = P\{X_1 = x_1\} P\{X_2 = x_2\}$

$Y = \max\{X_1, X_2\}$, $P\{Y=m\} = ?$

$$P\{\max\{X_1,X_2\} = m\} = P\{X_1 = m, X_2 = m\} + P\{X_1 = m, X_2 < m\} + P\{X_1 < m, X_2 = m\}$$

$$= P\{X_1=m\} \cdot P\{X_2 = m\} + P\{X_1 = m\} P\{X_2 < m\} + P\{X_1 < m\} P\{X_2 = m\}$$

$P\{X_1 = m\} = p\cdot(1-p)^{m-1}$, $P\{X_1 < m\} = \sum_{k=1}^{m-1} p(1-p)^{k-1}$

$$= p \sum_{i=0}^{m-2} (1-p)^i = p \cdot \frac{1-p^{m-2}}{p} = 1 - p^{m-2}$$

Аналогно за X_2

$$\Rightarrow P\{Y=m\} = \left(p\cdot(1-p)^{m-1} \cdot p(1-p)^{m-1}\right) + p(1-p)^{m-1} \cdot (1-p^{m-2}) + (1-p^{m-2}) \cdot p(1-p)^{m-1} = p(1-p)^{m-1}\left(2p(1-p)^{m-1} + 1 - p^{m-2}\right)$$

46. $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$

$Z = X + Y$

$$P\{X=k\} = e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{k}}{k!}, \quad P\{Y=k\} = e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{k}}{k!}$$

$$P\{X+Y=k\} = ?, \quad P\{X=x, Y=y\} = P\{X=x\}P\{Y=y\}$$

$$※ \Rightarrow \quad P\{X+i=k, Y=i\} = P\{X=k-i, Y=i\}$$

$$= P\{X=k-i\}P\{Y=i\} = \left(e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{k-i}}{(k-i)!}\right)\left(e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{i}}{i!}\right)$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \frac{\lambda_1^{k-i}\cdot\lambda_2^{i}}{(k-i)!\cdot i!} \cdot \frac{k!}{k!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \frac{\lambda_1^{k-i}\cdot\lambda_2^{i}}{k!} \cdot \frac{k!}{(k-i)!\,i!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \cdot \binom{k}{i} \lambda_1^{k-1} \lambda_2^{i}$$

$$P\{X+Y=k\} = \sum_{i=0}^{k} P\{X+i=k, Y=i\} = \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \cdot \binom{k}{i} \lambda_1^{k-i} \lambda_2^{i}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^{k-i} \lambda_2^{i} = e^{-\lambda_1+\lambda_2} \cdot \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^{k}}{k!} = P(\lambda_1+\lambda_2)$$

47. $p=0{,}02,\ n=100 \Rightarrow B(100, 0{,}02) \quad \lambda = n\cdot p = 2$

$B(100; 0{,}02) \Rightarrow P(2)$

X - бр деф артикала , $P(2) = e^{-2}\cdot\frac{2^k}{k!}$

a) $P\{X=0\} = e^{-2}\frac{2^0}{0!} = e^{-2} = 0{,}13534$

б) $P\{X>5\} = 1 - P\{X\le 5\} = 1 - F(5) = 1 - 0{,}98344 = 0{,}01656$

48. $p=0{,}02,\ q=0{,}01,\ n=100$

$B(100; 0{,}02) \Rightarrow P(2)$
$B(100; 0{,}01) \Rightarrow P(1)$
$B(100; 0{,}03) \Rightarrow P(3)$

$P\{2\le X\le 6\} = F(6) - F(1) = 0{,}96649 - 0{,}19915 = 0{,}767$

49. $S=\{1,2,\dots n\}$, $2n$ извлачења $(n\ge 100)$

A - вероватноћа извлачења бар k четворки је 0,05
$P(A)\le 0{,}05$; p - извучена четворка : $\boxed{p=\frac{1}{n}}$ $\boxed{q=\frac{n-1}{n}}$

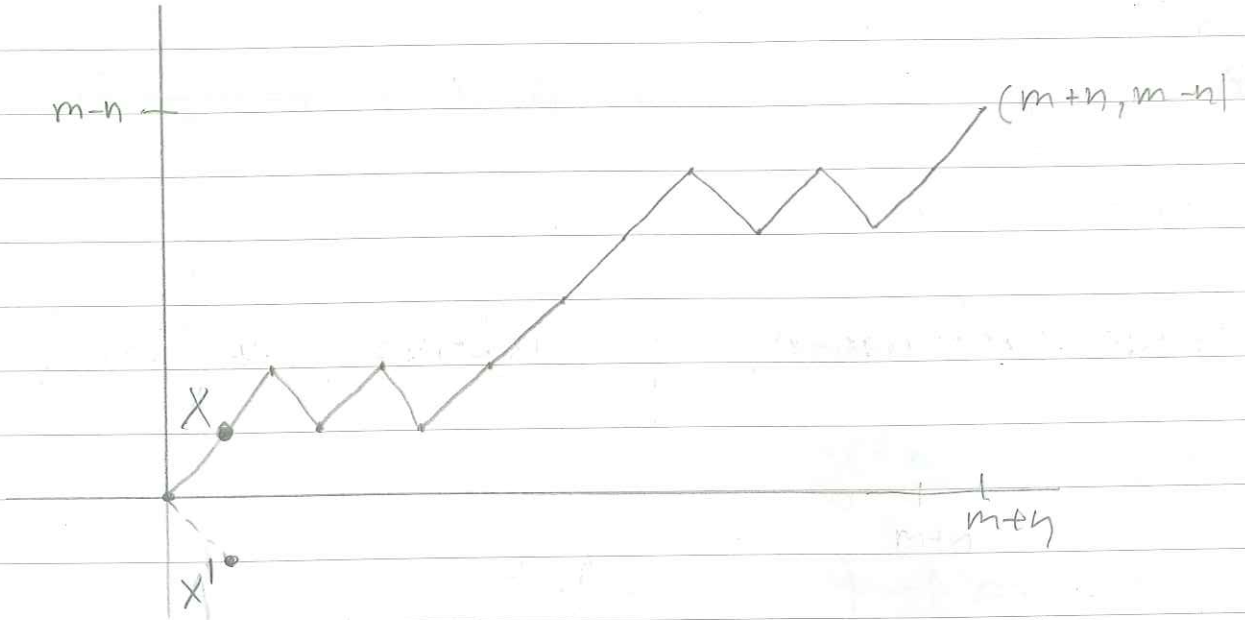
$P(A) = \sum_{i=k}^{2n}\binom{2n}{i}p^i q^{n-i}$

$B(2n, \frac{1}{n}) \Rightarrow P(2)$

$P(A) = P\{X\ge k\} = 1 - P\{X<k\} = 1 - F(k-1) \le 0{,}05$

$F(k-1)\ge 0{,}95 \Rightarrow k-1=5 \Rightarrow \boxed{k=6}$ НАЈМАЊЕ K

30.



M - вер да се гласа за бирача A, $P(M)=\frac{m}{m+n}$

N - вер. да се гласа за бирача B, $P(N)=\frac{n}{m+n}$

X - у сваком тренутку води бирач A

$P(X)=\frac{\text{број повољних трајекторија}}{\text{укупан број трајекторија}}$

УКУПАН број трајекторија: $\binom{m+n}{n}$

- број повољних трајекторија је број трајекторија од X до $(m+n, m-n)$ које немају пресек са x-осом је једнак броју трајекторија од $(1,1)$ до $(m+n, m-n)$ минус оне које имају пресек са x-осом (што је број трајекторија од $(1,-1)$ до $(m+n, m-n)$ по следећој леми):
Лема: Принцип симетрије. Нека су дате тачке у дискретном координатном систему $A(a_1,b_1)$ и $B(a_1,b_2)$ за које важи: $a_2>a_1>0$ и $b_1, b_2>0$ и нека је $A'(a_1,-b_1)$ симетрична тачки A у односу на x осу. Тада је број трајекторија од A до B које имају пресек са X осом једнак броју трајекторија

од A до B

1) Број траекторија од $(1,1)$ до $(m+n, m-n)$

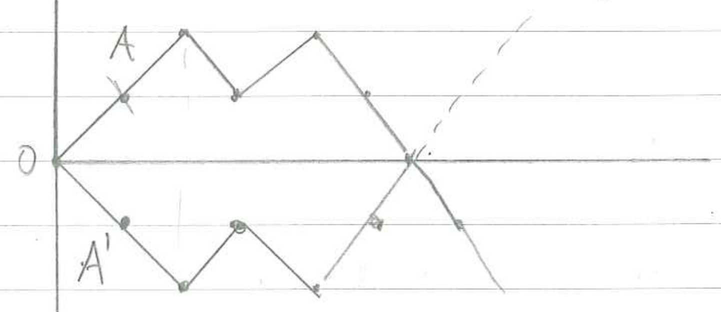
u - успони

p - падови

$$\left.\begin{array}{l} u+s=m+n-1 \\ u-s=m-n-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} u=m-1 \\ s=n \end{array}$$

$$\binom{u+s}{s}=\binom{m+n-1}{n}$$

Скица за лему



2) Број траекторија од $(1,-1)$ до $(m+n, m-n)$

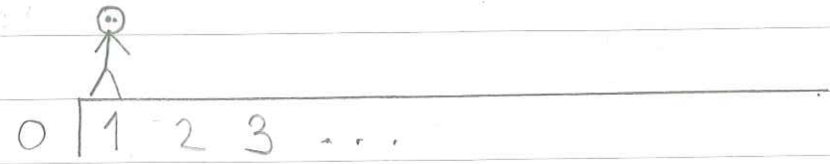
$$\left.\begin{array}{l} u+s=m+n-1 \\ u-s=m-n+1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} u=m \\ s=n-1 \end{array}$$

$$\binom{u+s}{s}=\binom{u+s}{u}=\binom{m+n-1}{m}$$

$$P(x)=\frac{\binom{m+n-1}{n}-\binom{m+n-1}{m}}{\binom{m+n}{m}}=\frac{\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\cdot \cancel{n!}}-\frac{(m+n-1)!}{(n-1)!\cdot \cancel{m!}}}{\frac{(m+n)!}{\cancel{n!\cdot m!}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{(m-1)!}-\frac{1}{(n-1)!}}{m+n}$$

51. p, $q = 1-p$



P_1 - вер. да са позиције 1 пређе на поз. 0
P_2 - вер. да са поз. 2 пређе на поз 0

$$P_1 = p + (1-p)\cdot P_2$$

$$P_2 = P_1^2$$

$$P_1 = p + (1-p)\cdot P_1^2 \quad , X = P_1$$

$$X^2(1-p) - X + p = 0$$

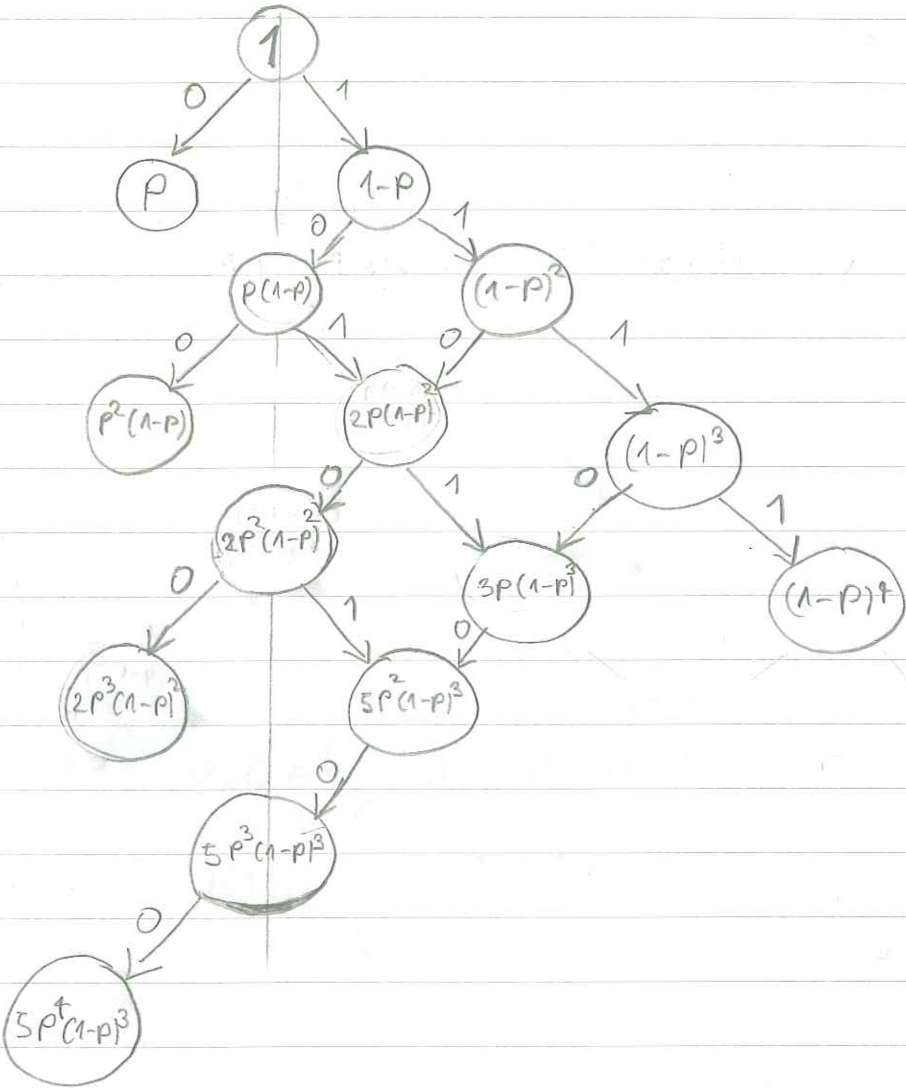
$$D = 1 - 4p(1-p)$$
$$D = 1 - 4p + 4p^2 = (2p-1)^2$$

$$X_{1/2} = \frac{1 \pm (2p-1)}{2(1-p)}$$

$$X_1 = \frac{1+2p-1}{2(1-p)} = \frac{p}{1-p} \qquad X_2 = \frac{1-2p+1}{2(1-p)} = 1$$

$$X = \begin{cases} 1, & \frac{p}{1-p} > 0 \\ \frac{p}{1-p}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Други начин: 0 - пао, 1 - удавио се



1, 1, 2, 5, 14, 42, 132 ... Каталанови бројеви

$$S(x) = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + \ldots = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

$x = p(1-p)$

- Шанса да пијаница дође до позиције k и падне у провалију је $P(X_k) = C[k] \cdot p^k \cdot (1-p)^{k-1}$

52.

$X : U[0,1]$, $a=0$, $b=1$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{0}^{x} f(x)\,dx \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ x, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

53.

$$f(x) = \begin{cases} a(1-x)^2, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

а) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} a(1-x)^2\,dx = \begin{pmatrix} t = 1-x \\ dt = -dx \end{pmatrix} - \int_{1}^{0} a t^2\,dt = \int_{0}^{1} a t^2\,dt$$

$$\Rightarrow a \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = 1 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

б) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = 3\int_{0}^{x} (1-x)^2\,dx$, за $x \in [0,1]$: $F(x) = -(1-x)^3 \Big|_0^x$

$= 1-(1-x)^3$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ 1-(1-x)^3, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

б) $P\{X > \frac{1}{3}\} = 1 - P\{X \leq \frac{1}{3}\} = 1 - F(\frac{1}{3}) = 1 - (1 - (1 - \frac{1}{3})^3)$

$= \frac{8}{27}$

г) $EX = \int_0^1 x f(x)dx = \int_0^1 x \cdot 3(1-x)^2 dx = 3\int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)dx$

$= 3\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

$EX^2 = \int_0^1 x^2 f(x)dx = 3\int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)dx = 3\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1$

$= 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{10}$

54. $Y = aX + b$, $a, b \in R$ и $X : N(m, \sigma^2)$

$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{aX + b \leq y\} = P\{X \leq \frac{y-b}{a}\}$

$= F_X\Big(\underbrace{\frac{y-b}{a}}_{z}\Big) = \int_{-\infty}^{z} \frac{dt}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-m)^2}{\sigma^2}}$

55. $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$

$Y = X^2$

$$P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx$$

$$P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\} = P\{|X| \le \sqrt{y}\} = P\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\}$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{y}}^{0} e^{x}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\sqrt{y}} e^{-x}dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{x}\Big|_{-\sqrt{y}}^{0} - \frac{1}{2}e^{-x}\Big|_{0}^{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\sqrt{y}} - e^{-\sqrt{y}} + 1\right) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$$

$F_Y(y) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$, $y \in R$

$f_Y(y) = F'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}$, $f_Y(y) \ge 0$ за $y \in R$

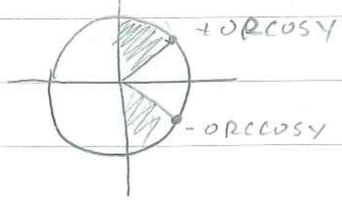
56. $X : U\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $Y = \cos X$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{\pi}dt = \frac{t}{\pi}\Big|_{0}^{x} = \frac{x}{\pi}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{x}{\pi}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right) \end{cases}$$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\cos X\le y\}$$



$$=P\left\{-\frac{\pi}{2}\le X\le -\arccos y\right\}+P\left\{\arccos y\le X\le \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arccos y} f_X(x)\,dx+\int_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}} f_X(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arccos y} dx+\int_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}} dx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\arccos y+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\arccos y\right)$$

$$=1-\frac{2\arccos y}{\pi}\quad,\quad y\in[0,1]$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{-2}{\pi}\,\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

57. $X:\mathcal{E}(\lambda)$

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}\qquad F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ & \end{cases}$$

$$F_X(x)=\int_0^x f_X(t)\,dt=\lambda\int_0^x e^{-\lambda t}\,dt=-e^{-\lambda t}\Big|_0^x=-e^{-\lambda x}+1$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$$

a) $Y=|1-X|$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|1-X|\le y\}=P\{-y\le 1-X\le y\}$$

$$P\{-y-1\le -X\le y-1\}=P\{1-y\le X\le 1+y\}$$

$$P\{1-Y \leq X \leq 1+Y\} = F_X(1+Y) - F_X(1-Y)$$

$$= 1 - e^{-\lambda(1+Y)} - 1 + e^{-\lambda(1-Y)} = e^{-\lambda(1-Y)} - e^{-\lambda(1+Y)}$$

$$F_Y(Y) = e^{-\lambda(1-Y)} - e^{-\lambda(1+Y)}, \quad Y \in [-\infty, 1]$$

$$f_Y(Y) = F_Y'(Y) = \left(e^{-\lambda+\lambda y} - e^{-\lambda-\lambda y}\right)' = \lambda\left(e^{-\lambda+\lambda y} + e^{-\lambda-\lambda y}\right)$$

προσερα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(Y) = \lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-\lambda+\lambda y} + e^{-\lambda-\lambda y}\right) = \left(e^{-\lambda+\lambda y} + e^{-\lambda-\lambda y}\right)\Big|_{-\infty}^{1} = +\infty$$

δ) $Z = \min\{X, X^2\}$

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{\min\{X, X^2\} \leq z\}$$

$z \geq 0$

$$= 1 - P\{\min\{X, X^2\} > z\} = 1 - P\{z < X, z < X^2\}$$

για $x \geq 0 \Rightarrow F_Z(z) = 1 - P\{X > z, X^2 > z\} = 1 - P\{X > z, X > \sqrt{z}\}$

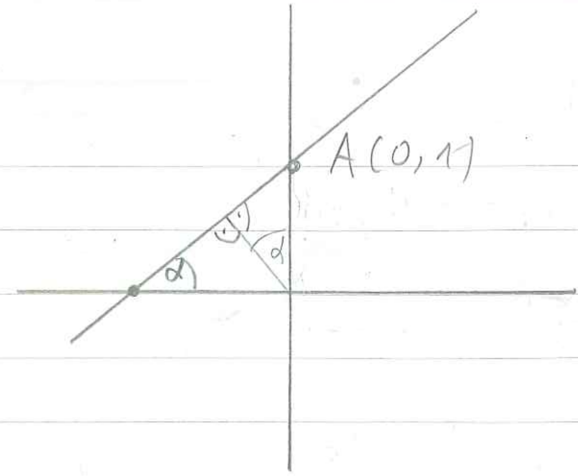
$$= 1 - P\{X > \max\{z, \sqrt{z}\}\} = P\{X \leq \max\{z, \sqrt{z}\}\}$$

$$= F_X\{\max\{z, \sqrt{z}\}\}$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \min\{z, \sqrt{z}\}, & z \geq 0 \end{cases}$$

$\boxed{\alpha=\rho}$

58. $\alpha : U[0,\frac{\pi}{2}]$



$$f_\alpha(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}, & \alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

$$F_\alpha(x)=\int_0^x f_\alpha(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^x dt=\frac{2}{\pi}x \quad, \text{за } x\in[0,\tfrac{\pi}{2}]$$

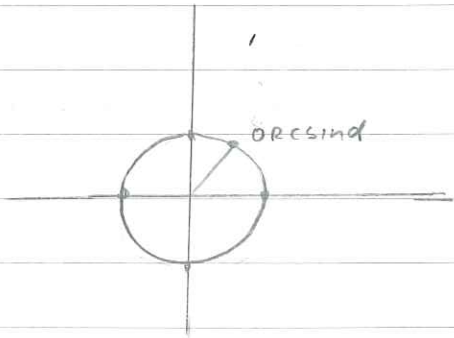
$$F_\alpha(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,0)\\ \frac{2}{\pi}x, & x\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ 1, & x\in(\frac{\pi}{2},+\infty)\end{cases}$$

права p: $x\sin\alpha+y\cos\alpha=D \Rightarrow D=\sin\alpha$

$P\{D\le d\}=P\{\cos\alpha\le d\}$

$=P\{\alpha\le \arccos d\}$

$$=\int_0^{\arccos d}\frac{2}{\pi}\,dt=\frac{2}{\pi}\cdot\arccos d$$



$$F_D(d)=\begin{cases}0, & d\in(-\infty,0)\\ \frac{2}{\pi}\arccos d, & d\in[0,1]\\ 1, & d\in(1,+\infty)\end{cases}$$

$$f_D(d)=F_D'(d)=\frac{2}{\pi}\frac{-1}{\sqrt{1-d^2}} \quad \text{за } d\in[0,1]$$

$$f_D(d)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-d^2}}, & d\in[0,1]\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

59. $X : U[0, b-a]$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [0, b-a] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x}{b-a}, & x \in [0, b-a] \\ 1, & x \in (b-a, +\infty) \end{cases}$$

за $x \in [0, b-a]$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\min\{X, b-a-X\} \leq y\}$$

$$= P\{X \leq y\} + P\{b-a-X \leq y\}, \quad \text{за } x \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]$$

$$= F_X(y) + P\{X \geq b-a-y\}$$

$$= F_X(y) + (1 - F_X(b-a-y))$$

$$F_X(b-a-y) = \frac{b-a-y}{b-a} = 1 - \frac{y}{b-a} = 1 - F_X(y)$$

$$F_Y(y) = F_X(y) + (1 - 1 + F_X(y)) = 2F_X(y)$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{2y}{b-a}, & y \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right] \\ 1, & y \in \left(\frac{b-a}{2}, +\infty\right) \end{cases}$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \frac{2}{b-a}, & y \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad EY = \frac{b-a}{4}$$

*штап не може бити дужи од $\frac{b-a}{2}$

60. $X : U[-1,2]$

$Y = \min\{X, 1\}$

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in [-1,2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty,-1) \\ \frac{x+1}{3}, & x \in [-1,2] \\ 1, & x \in (2,+\infty) \end{cases}$

$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{\min\{X,1\} \le y\}$

$= 1 - P\{\min\{X,1\} > y\} = 1 - P\{X > y, 1 > y\}$

а) за $y \in [-1, 1]$

$F_Y(y) = 1 - P\{X > y, 1 > y\} = 1 - P\{X > y\} = P\{X \le y\} = F_X(y)$

б) за $y \in (1, 2]$

$F_Y(y) = 1 - P\{1 > y\} = P\{1 \le y\} = 1$

$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in [-\infty,-1) \\ \frac{y+1}{3}, & y \in [-1,1] \\ 1, & y \in (1,+\infty) \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & y \in [-1,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$EY = \int_{-1}^{1} \frac{1}{3} y\,dy + P\{Y = 1\} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$P\{Y = 1\} = P\{X \ge 1\} = \int_{1}^{2} \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}$

61. $X: [-1,4]$

$Y = |X|$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & x \in [-1,4] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty,-1) \\ \frac{x+1}{5}, & x \in [-1,4] \\ 1, & x \in (4,+\infty) \end{cases}$$

за $y \in [-1,4]$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{|X| \le y\} = P\{-y \le X \le y\} = F_X(y) - F_X(-y)$$

а) за $y \in [-1,1]$

$$F_X(y) - F_X(-y) = \frac{y+1}{5} - \frac{-y+1}{5} = \frac{2y}{5}$$

б) за $y \in [1,4]$

$$F_X(y) - \overset{0}{\cancel{F_X(-y)}} = F_X(y) = \frac{y+1}{5}, \quad \text{јер } -y \in [-4,-1]$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty,-1) \\ \frac{2y}{5}, & y \in [-1,1] \\ \frac{y+1}{5}, & y \in (1,4] \\ 1, & y \in (4,+\infty) \end{cases} \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{5}, & y \in [-1,1] \\ \frac{1}{5}, & y \in (1,4] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

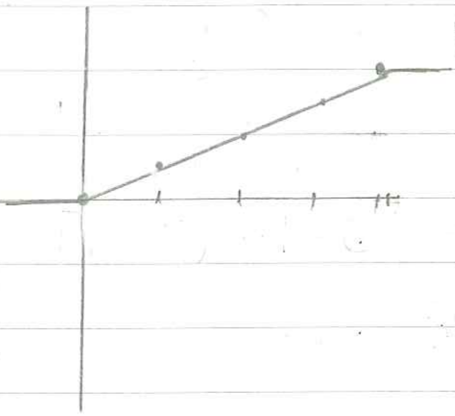
$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\,dy = \frac{2}{5}\overset{0}{\cancel{\int_{-1}^{1} y\,dy}} + \frac{1}{5}\int_{1}^{4} y\,dy = \frac{1}{5}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_1^4 = \frac{16-1}{10} = \frac{3}{2}$$

62. $X : \mathcal{U}[0,4]$, $Y = [X]$

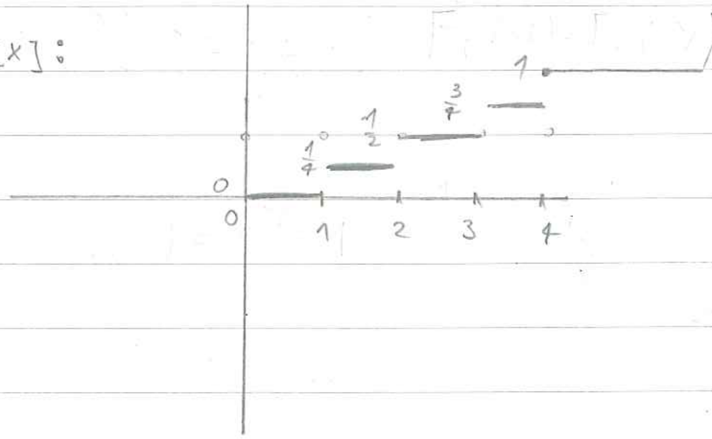
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in [0,4] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x}{4}, & x \in [0,4] \\ 1, & x \in (4, +\infty) \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{[X] \le y\} = ?$$

$F_X : y = \frac{x}{4}$



$F_{[X]}$:



$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{4}, & x \in [1,2) \\ \frac{1}{2}, & x \in [2,3) \\ \frac{3}{4}, & x \in [3,4) \\ 1, & x \in [4, +\infty) \end{cases}$$

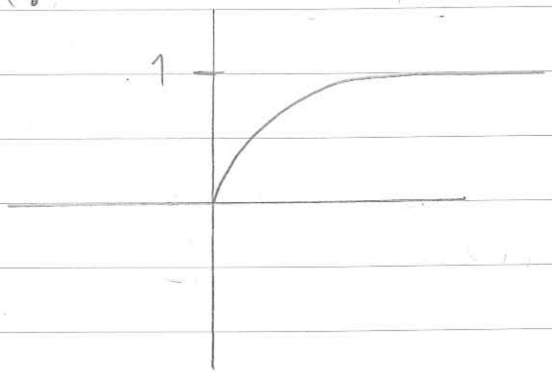
$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

63. $X : \mathcal{E}(1)$

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ 1 - e^{-x}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

a) $Y = [X]$

F_X:



$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \\ 0 & 1-e^{-1} & 1-e^{-2} & \cdots \end{pmatrix}$$

б) $Y = X - [X]$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X - [X] \leq y\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X - [X] \leq y, [X] = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X - k \leq y, k \leq X \leq k+1\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X = y + k, k \leq X \leq k+1\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{k \leq X \leq y + k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(F_X(y+k) - F_X(k)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\cancel{1} - e^{-y-k} - \cancel{1} + e^{-k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-k} - e^{-y-k}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}(1 - e^{-y}) = (1 - e^{-y}) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} = \frac{1 - e^{-y}}{1 - e^{-1}}$$

64. $X : \mathcal{U}[0,1]$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ x, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

$$Y = \frac{1}{X} - \left[\frac{1}{X}\right] \leq 1$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\left\{\frac{1}{X} - \left[\frac{1}{X}\right] \leq y\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{\frac{1}{X} - \left[\frac{1}{X}\right] \leq y, \left[\frac{1}{X}\right] = k\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{\frac{1}{X} - k \leq y, k \leq \frac{1}{X} \leq k+1\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{\frac{1}{X} \leq y+k, k \leq \frac{1}{X} \leq k+1\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{k \leq \frac{1}{X} \leq y+k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{\frac{1}{y+k} \leq X \leq \frac{1}{k}\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(F_X\left(\frac{1}{k}\right) - F_X\left(\frac{1}{y+k}\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{y+k}\right) \longrightarrow \text{конвергира}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{y+k}\right), & y \in [0,1] \\ 1, & y \in (1, +\infty) \end{cases}.$$

65. $X: ум:(\alpha, \beta), \alpha>0, \beta>0$

$$f_X = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}, x \geq 0$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}$$

$$EX = \int_0^{+\infty} x \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha} e^{-\beta x} \beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \overset{1}{\cancel{\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha} e^{-\beta x} \beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}}} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}$$

* одговора расподели $ум:(\alpha+1, \beta)$, па нен интеграл по сите од 0 до $+\infty$ је 1

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}$$

$$EX^2 = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha+1} e^{-\beta x} \beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \overset{1}{\cancel{\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha+1} e^{-\beta x} \beta^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)}}} \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$= \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$$

* одговора расподели $ум(\alpha+2, \beta)$ па је интеграл по сите од 0 до $+\infty$ еднок 1

$$DX = \frac{\alpha^2+\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

66. $X: f_X = n(n+1)x^{n-1}(1-x), \; x \in (0,1), \; n \in N$

$$EX = \int_0^1 x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^1 n(n+1)x^n(1-x)\,dx$$

$$= n(n+1)\int_0^1 (x^n - x^{n+1})\,dx = n(n+1)\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= n(n+1)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = n(n+1)\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}$$

$$EX^3 = \int_0^1 x^3 f_X(x)\,dx = \int_0^1 n(n+1)x^{n+2}(1-x)\,dx$$

$$= n(n+1)\left(\frac{x^{n+3}}{n+3} - \frac{x^{n+4}}{n+4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{n(n+1)}{(n+3)(n+4)}$$

67. $X: B(1000, 0{,}05)$ $np = 50 > 10$

=> користимо нормалну расподелу за апроксимацију

$P\{X \le C\} = 0{,}9$

$P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{C-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\} = 0{,}9$

$P\left\{X^* \le \frac{C-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\} = 0{,}9$, $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95}$
$= \sqrt{5 \cdot 9{,}5} = 6{,}892$

$\Phi\left(\frac{C-50}{6{,}892}\right) = 0{,}9$

$C = \Phi^{-1}(0{,}9) \cdot 6{,}892 + 50$
$= 1{,}28 \cdot 6{,}892 + 50$

$C = 58{,}82176 \Rightarrow \boxed{C' = 59}$

68. $p = 0{,}4$, $n = ?$

=> користимо нормалну расподелу за апроксимацију

$P\{X \ge 80\} = 0{,}9$

$P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{79-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\} = 0{,}1$

$\Phi\left(\frac{79-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 0{,}1$

$\frac{79-np}{\sqrt{np(1-p)}} = -1{,}28 \Rightarrow \frac{79-0{,}4n}{\sqrt{n \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} + 1{,}28 = 0$

$t = \sqrt{n} \Rightarrow 79 - 0{,}4t^2 + 1{,}28 \cdot \sqrt{0{,}24} \cdot t = 0$

$D = 126{,}8$, $\sqrt{D} \approx 11{,}26$

$t = \frac{0{,}627 + 11{,}26}{2 \cdot 0{,}4} = 14{,}86 \Rightarrow n = 220{,}8 \Rightarrow \boxed{n' = 221}$

69. $n=1000 \quad p=0{,}5 \quad X:\mathcal{B}(1000,\, 0.5) \quad np=500$

$\Rightarrow$ користимо нормалну расподелу за апроксимацију

m - места, $500 \le m \le 1000$, $m \in \mathbb{N}$

$$P\{X \le m,\ 1000-X \le m\} = 0{,}99$$

- Ако у прву просторију уђе X гостију, онда у другу уђе 1000-x гостију.

$$P\{X \le m,\ 1000-X \le m\} = P\{X \le m,\ X \ge 1000-m\}$$

$$= P\{1000-m \le X \le m\} = P\left\{\frac{1000-m-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\} = 0{,}99$$

$$\sqrt{np(1-p)} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1000} = 15{,}81139$$

$$P\left\{\frac{1000-m-500}{15{,}81139} \le X^* \le \frac{m-500}{15{,}81139}\right\} = 0{,}99$$

$$\Phi\left(\frac{m-500}{15{,}81139}\right) - \Phi\left(\frac{500-m}{15{,}81139}\right) = 0{,}99$$

$$\Phi\left(\frac{m-500}{15{,}81139}\right) - \left(1-\Phi\left(\frac{m-500}{15{,}81139}\right)\right) = 0{,}99$$

$$\Phi\left(\frac{m-500}{15{,}81139}\right) = 0{,}995$$

$$m = \Phi^{-1}(0{,}995)\cdot 15{,}81139 + 500$$

$$m = 2{,}58\cdot 15{,}81139 + 500$$

$$m = 540{,}79339 \qquad \boxed{m' = 541}$$

$(a^x)' = a^x \ln a$

70. $(X,Y): F(x,y) = \begin{cases} 1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & x\geq 0, y\geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

а) $f(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x \partial y} F(x,y) = +2^{-x-y}(\ln 2)^2$

за $x\geq 0, y\geq 0$

иначе $f(x,y)=0$

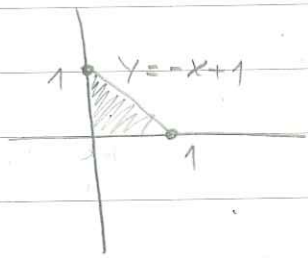
б) $F_X(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y) = \lim\limits_{y\to\infty} (1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}) = 1-2^{-x}$

$F_Y(y) = 1-2^{-y}$

$F_X(x)\cdot F_Y(y) = (1-2^{-x})(1-2^{-y}) = (1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y})$

$\Rightarrow$ jесу независне сл. величине

в) $T = \{(x,y) \mid x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$, $P\{(X,Y)\in T\} = ?$



$P\{(X,Y)\in T\} = \iint\limits_T f(x,y)\,dy\,x$

$= \iint\limits_T (2^{-x-y}(\ln 2)^2)\,dy\,dx$

$= (\ln 2)^2 \int_0^1 2^{-x} \cdot \int_0^{-x+1} 2^{-y}\,dy\,dx$

$= (\ln 2)^2 \int_0^1 2^{-x} \left. \frac{-2^{-y}}{\ln 2} \right|_0^{-x+1} dx = \ln 2 \int_0^1 2^{-x}(1-2^{x-1})\,dx$

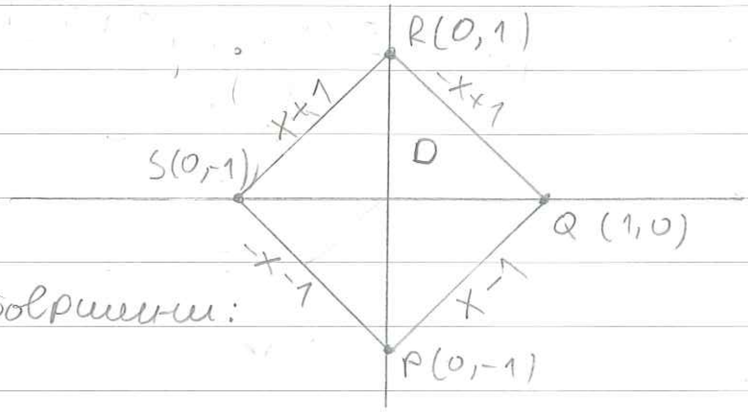
$= \ln 2 \int_0^1 2^{-x}\,dx - \ln 2 \int_0^1 2^{-1} = -\frac{\cancel{\ln 2}}{\cancel{\ln 2}} 2^{-x}\Big|_0^1 - \frac{\ln 2}{2} x\Big|_0^1$

$= -(\frac{1}{2}-1) - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2}(1-\ln 2)$

71. $A(X,Y) \in D: \{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}$

$f_{X,Y}(x,y) = ?$, $F_X(x) = ?$, $F_Y(y) = ?$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m(D)}, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



Униформна расподела по површини:
$P_D = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 = m(D)$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

ПРОВЕРА: $\iint\limits_D f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$ за $(x,y) \in D$

$$= \int_{-1}^{0}\int_{-x-1}^{x+1} \frac{1}{2}\,dy\,dx + \int_{0}^{1}\int_{x-1}^{-x+1} \frac{1}{2}\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} \left(y \Big|_{-x-1}^{x+1} \right) dx + \int_{0}^{1} \left(y \Big|_{x-1}^{-x+1} \right) dx \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} (x+1+x+1)\,dx + \int_{0}^{1} (-x+1-x+1)\,dx \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\int_{-1}^{0} (x+1)\,dx + 2\int_{0}^{1} (-x+1)\,dx \right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x \right)\Big|_{-1}^{0} + \left(-\frac{x^2}{2} + x \right)\Big|_{0}^{1} = \left(0 - \frac{1}{2} + 1\right) + \left(-\frac{1}{2} + 1 - 0\right) = 1$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_{-x-1}^{x+1} dy, & x\in[-1,0]\\ \frac{1}{2}\int_{x-1}^{-x+1} dy, & x\in(0,1]\end{cases} \quad (0, \text{иначе})$$

$$=\begin{cases}1+x, & x\in[-1,0]\\ 1-x, & x\in(0,1]\end{cases} = 1-|x|, \text{ за } x\in[-1,1]$$

слично: $f_Y(y)=1-|y|$, за $y\in[-1,1]$ (0, иначе)

72. $X:\mathcal{E}(\lambda)$, $Y=\frac{\lambda}{\mu}X$

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}, \quad F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\tfrac{\lambda}{\mu}X\le y\}=P\{X\le \tfrac{\mu}{\lambda}y\}$$

$$=F_X(\tfrac{\mu}{\lambda}y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ 1-e^{-\mu x}, & y>0\end{cases} \Rightarrow Y:\mathcal{E}(\mu)$$

$$F_{X,Y}(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}=P\{X\le x, \tfrac{\lambda}{\mu}X\le y\}$$

$$=P\{X\le x, X\le \tfrac{\mu}{\lambda}y\}=P\{X\le \min\{x,\tfrac{\mu}{\lambda}y\}\}$$

$$=F_X(\min\{x,\tfrac{\mu}{\lambda}y\}), \quad x,y\ge 0, \ (0, \text{иначе})$$

73. $X : \mathcal{E}(1)$, $Y : \mathcal{E}(1)$, X и Y су независне.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ e^{-y}, & y \geq 0 \end{cases}$$

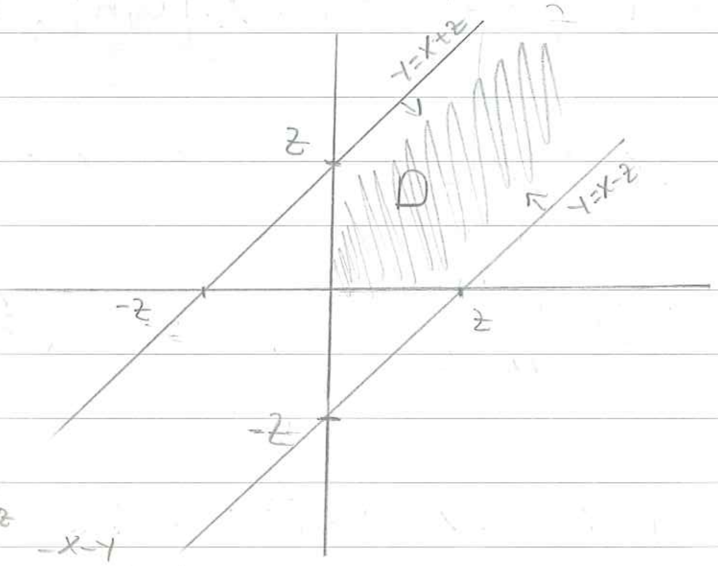
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ 1-e^{-y}, & y \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = |X-Y|$$

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{|X-Y| \leq z\} = P\{-z \leq X-Y \leq z\}$$

1) $-z \leq X-Y \Rightarrow Y \leq X+z$

2) $X-Y \leq z \Rightarrow Y \geq X-z$



$$F_Z(z) = \iint_D f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$

$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = e^{-x-y}$
за $x,y \geq 0$ (0, иначе)

$$F_Z(z) = \int_0^z \int_0^{x+z} e^{-x-y}\,dy\,dx + \int_z^{+\infty}\int_{x-z}^{x+z} e^{-x-y}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^z e^{-x}\int_0^{x+z} e^{-y}\,dy\,dx + \int_z^{+\infty} e^{-x}\int_{x-z}^{x+z} e^{-y}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^z e^{-x}\cdot(-e^{-y})\Big|_0^{x+z}\,dx + \int_z^{+\infty} e^{-x}\cdot(-e^{-y})\Big|_{x-z}^{x+z}\,dx$$

$$= \int_0^z e^{-x}(-e^{-x-z}+1)\,dx + \int_z^{+\infty} e^{-x}(-e^{-x-z}+e^{-x+z})\,dx$$

$$= \int_0^{z} \left(-e^{-2x-z} + e^{-x}\right) dx + \int_z^{+\infty} \left(-e^{-2x-z} + e^{-2x+z}\right) dx$$

$$= \left(\tfrac{1}{2} e^{-2x-z} - e^{-x}\right)\Big|_0^{z} + \left(\tfrac{1}{2} e^{-2x-z} - 2e^{-2x+z}\right)\Big|_z^{+\infty}$$

$$= \left[\left(\tfrac{1}{2} e^{-2z-z} - e^{-z}\right) - \left(\tfrac{1}{2} e^{-z} - 1\right)\right] + \left[(0-0) - \left(\tfrac{1}{2} e^{-2z-z} - \tfrac{1}{2} e^{-2z+z}\right)\right]$$

$$= \cancel{\tfrac{1}{2} e^{-3z}} - e^{-z} - \cancel{\tfrac{1}{2} e^{-z}} + 1 - \cancel{\tfrac{1}{2} e^{-3z}} + \cancel{\tfrac{1}{2} e^{-z}} = 1 - e^{-z}$$

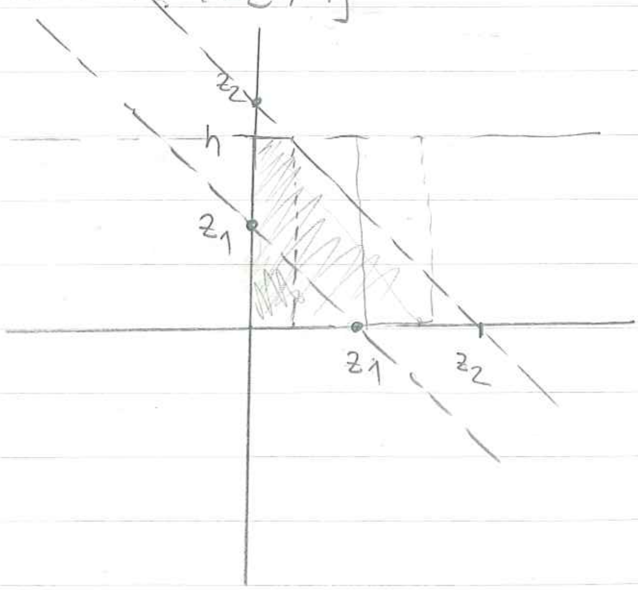
$$\Rightarrow Z : \mathcal{E}(1)$$

74. $X : \mathcal{E}(a),\ a > 0;\ Y : \mathcal{U} : [0, h],\ X$ и Y су независне

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ a e^{-ax}, & x \geq 0 \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-ax}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & y \in [0, h] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{x}{h}, & y \in [0, h) \\ 1, & y \geq h \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \underbrace{f_X(x) \cdot f_Y(y)}_{\text{независне сл. величине}} = \frac{a}{h} e^{-ax} \quad \text{за } x \geq 0 \wedge y \in [0, h]$$



$Z = X + Y$

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\}$$

$X + Y \leq z$

$Y \leq -x + z$

a) $z \in [0, n]$

$$F_Z(z) = \int_0^z \int_0^{-x+z} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = \int_0^z \int_0^{-x+z} \frac{a}{n} e^{-ax}\,dy\,dx$$

$$= \frac{a}{n} \int_0^z e^{-ax} \int_0^{-x+z} dy\,dx = \frac{a}{n} \int_0^z e^{-ax}\, y \Big|_0^{-x+z} dx = \frac{a}{n} \int_0^z \left(-x e^{-ax} + z e^{-ax}\right) dx$$

$$= -\frac{a}{n} \underbrace{\int_0^z x e^{-ax}\,dx}_{I_1} + z \underbrace{\int_0^z e^{-ax}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_0^z x e^{-ax}\,dx = \begin{pmatrix} t = -ax \\ dt = -a\,dx \\ x = -\frac{t}{a} \end{pmatrix} \frac{1}{a^2} \int_0^{-az} t e^t\,dt$$

$u = t \qquad du = dt$

$dv = e^t \qquad v = e^t$

$$I_1 = \frac{1}{a^2}\left(e^t \cdot t \Big|_0^{-az} - \int_0^{-az} e^t\,dt\right) = \frac{1}{a^2}\left(e^t t - e^t\right)\Big|_0^{-az}$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(-az e^{-az} - e^{-az} + 1\right)$$

$$I_2 = \int_0^z e^{-ax}\,dx = \begin{pmatrix} t = -ax \\ dt = -a\,dx \end{pmatrix} \frac{-1}{a} \int_0^{-az} e^t\,dt = -\frac{1}{a} e^t \Big|_0^{-az} = -\frac{1}{a}\left(e^{-az} - 1\right)$$

$$F_Z(z) = -\frac{\cancel{a}}{n} \cdot \frac{1}{a^{\cancel{2}}}\left(-az e^{-az} - e^{-az} + 1\right) + z \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)\left(e^{-az} - 1\right)$$

$$= \cancel{\frac{z}{n} e^{-az}} + \frac{1}{an} e^{-az} - \frac{1}{an} - \cancel{\frac{z}{a} e^{-az}} - \frac{z}{a} = \frac{1}{an}\left(e^{-az} - 1\right) - \frac{z}{a}$$

δ) $z \in (h, +\infty)$

$$F_Z(z) = \int_0^{z-h}\int_0^{h} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx + \int_{z-h}^{z}\int_0^{-x+z} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{z-h}\int_0^{h} \frac{a}{h} e^{-ax}\,dy\,dx + \int_{z-h}^{z}\int_0^{-x+h} \frac{a}{h} e^{-ax}\,dy\,dx$$

$$= \frac{a}{h}\int_0^{z-h} e^{-ax}\cdot h\,dx + \frac{a}{h}\int_{z-h}^{z} e^{-ax}(-x+h)\,dx$$

$$= \frac{a}{\cancel{h}}\cdot\frac{\cancel{h}}{-a} e^{-ah}\Big|_0^{z-h} - \frac{a}{h}\int_{z-h}^{z} x e^{-ax}\,dx + \frac{a}{\cancel{h}}\cdot \cancel{h}\int_{z-h}^{z} e^{-ax}\,dx$$

$$= -\left(e^{-a(z-h)} - 1\right) - I' + \frac{a}{-a} e^{-ax}\Big|_{z-h}^{z}$$

$$I' = \frac{a}{h}\int_{z-h}^{z} x e^{-ax}\,dx = \begin{pmatrix} t = -ax \\ dt = -a\,dx \\ x = \frac{t}{-a} \end{pmatrix} \frac{\cancel{a}}{h}\cdot\frac{1}{-\cancel{a}}\int_{a(h-z)}^{-az} \frac{t}{-a} e^{t}\,dt$$

$$= \frac{1}{-ah} e^{t}(t-1)\Big|_{a(h-z)}^{-az} = \frac{1}{ah}\cdot\left(e^{-az}(-az-1) - e^{a(h-z)}(a(h-z)-1)\right)$$

$$F_Z(z) = 1 - e^{-a(z-h)} + \frac{1}{ah}\left(e^{a(h-z)}(a(h-z)-1) + e^{-az}(az+1)\right) + e^{-a(z-h)} - e^{-az}$$

75. $X : Ben(\frac{1}{2}),\ Y : [0,1]$, X и Y независне

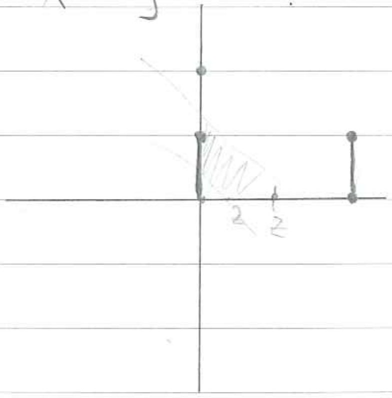
$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & y\in[0,1]\\ 0, & \text{иначе}\end{cases} \qquad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\in(-\infty,0)\\ y, & y\in[0,1]\\ 1, & y\in(1,+\infty)\end{cases}$$

$$X:\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$Z=X+Y$$

$$F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)=\begin{cases}0, & x<0 \lor y\leq 0\\ \frac{y}{2}, & x\in[0,1),\ y\in[0,1]\\ y, & x\geq 1,\ y\in[0,1]\\ \frac{1}{2}, & x\in[0,1),\ y\in(1,+\infty)\\ 1, & x\geq 1 \land y\geq 1\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{X+Y\leq z\}=P\{Y\leq -X+z\}$$



а) $z\in(-\infty,0)$ $F_Z(z)=0$

б) $z\in[0,1)$

$$F_Z(z)=P\{X+Y\leq z\}=P\{X=0, Y\leq z\}$$

$$=P\{X=0\}P\{Y\leq z\}=\frac{1}{2}\cdot z=\frac{z}{2}$$

в) $z\in[1,2)$

$$F_Z(z)=P\{X+Y\leq z\}=P\{X=0, Y\leq z\}+P\{X=1, Y\leq z-1\}$$

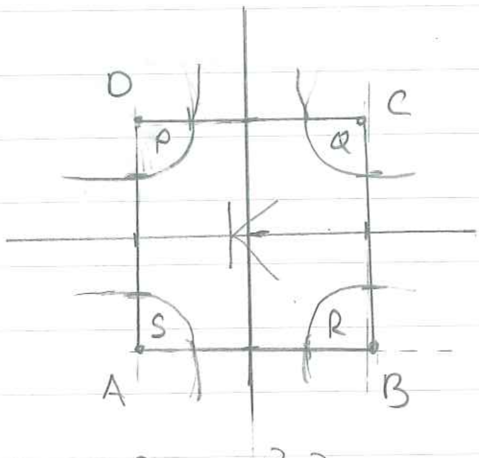
$$=P\{X=0\}P\{Y\leq z\}+P\{X=1\}P\{Y\leq z-1)$$

$$=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}(z-1)$$

г) $z\in[2,+\infty)$

$$F_Z(z)=1$$

76. $(X,Y) \in K(ABCD)$



$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in K \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$Z = XY$

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{XY \leq z\} = P\{Y \leq \frac{z}{X}\}$$

$Y \leq \frac{z}{X}$ хипербола

$$\left.\begin{array}{l} X \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ Y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{array}\right\} z \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$$

а) $z \in (-\infty, -\frac{1}{4}) \Rightarrow F_Z(z) = 0$

б) $z \in [-\frac{1}{4}, 0) \Rightarrow$ одговорају површине P и R

$$F_Z(z) = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{2z}\int_{\frac{z}{x}}^{\frac{1}{2}} dy\,dx = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{2z}\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{x}\right)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{2z}\left(1 - \frac{2z}{x}\right)dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{2z} dx - 2z\int_{-\frac{1}{2}}^{2z}\frac{1}{x}\,dx = (2z + \tfrac{1}{2}) - 2z(\ln(2z) - \ln$$

$= 2z + \frac{1}{2}$

б) $z \in [0, \frac{1}{4}]$ => одговарају површине $P \wedge Q \wedge K$

односно $P_{ABCD} - (S + Q)$

• S и Q имају исте површине као и P и R

P и R: $2z + \frac{1}{2}$ за $z \in [-\frac{1}{4}, 0]$ => $-2z + \frac{1}{2}$ за $z \in [0, \frac{1}{4}]$

$\Rightarrow F_Z(z) = 1 - (-2z + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + 2z$

г) $z \in (\frac{1}{4}, +\infty)$

$F_Z(z) = 1$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \in (-\infty, \frac{1}{4}) \\ \frac{1}{2} + 2z, & z \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \\ 1, & z \in (\frac{1}{4}, +\infty) \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 2, & z \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\Rightarrow Z : U[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$

77. Чебишевљева неједнакост: $P\{|X|\geq\varepsilon\}\leq\frac{E|X|^n}{\varepsilon^n}$

$EX=3,\ DX=0{,}01$

$P\{2{,}5<X<3{,}5\}=P\{2{,}5-EX<X-EX<3{,}5-EX\}$

$=P\{-0{,}5<X-EX<0{,}5\}=P\{|X-EX|<0{,}5\}=1-P\{|X-EX|\geq 0{,}5\}$

$=1-\frac{E|X-EX|^2}{(0{,}5)^2}=1-\frac{0{,}01}{0{,}25}=1-\frac{1}{25}=0{,}96$

78. $DX<+\infty,\ EX>a\ ,\ a\in R$

$P\{X<a\}\leq\frac{DX}{(EX-a)^2}$

$P\{X\leq a\}=P\{\underbrace{X-EX}_{<0}<\underbrace{a-EX}_{<0}\}=P\{|X-EX|>|a-EX|\}$

$(a-EX<0)\wedge(X-EX<a-EX)\Rightarrow(|X-EX|>|a-EX|)$

За $\varepsilon=|a-EX|\Rightarrow P\{X<a\}=P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{E|X-EX|^2}{\varepsilon^2}$

$\Rightarrow P\{X<a\}\leq\frac{DX}{(EX-a)^2}$

79. $A=\{-2,-1,1,2\}$, $Y=X^2$

$X: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ $Y: \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$cov(X,Y)=EXY-EXEY$

$EX=\frac{1}{4}(-2-1+1+2)=0$, $EY=\frac{1}{2}(1+4)=\frac{5}{2}$

$XY=XX^2=X^3$

$X^3: \begin{pmatrix} -8 & -1 & 1 & 8 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow EX^3=0$

$cov(X,Y)=0 \Rightarrow X$ и Y су некорелисане
$Y=X^2 \Rightarrow$ јесу (директно) зависне

80. X и Y су независне

$Z=-2Y$, $W=3X+1$

$\rho_{Z,W}=?$ $\rho_{Z,W}=\frac{cov(Z,W)}{\sqrt{DZ}\sqrt{DW}}=\frac{EZW-EZEW}{\sqrt{DZ}\sqrt{DW}}$

X и Y су независне $\Rightarrow Z$ и W су независне
$\Rightarrow cov(Z,W)=0 \Rightarrow \rho_{Z,W}=0$

81. $X : U : [-1,1]$, $Y = |X|$

$\rho_{X,Y} = ?$, $\rho_{X,Y} = \dfrac{EXY - EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

$EXY = EX|X| =$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1,1] \\ 0, & иначе \end{cases}$$

$$EX|X| = \int_{-1}^{1} x|x| \cdot f_X(x)\,dx \quad за\ x \in [-1,1]$$

$$EX|X| = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x|x|\,dx = 0$$ (интеграл непарне ф-је на сим. интервалу)

$$EX = \int_{-1}^{1} x \cdot f_X(x)\,dx = 0 \quad (-11-)$$

$\Rightarrow \rho_{X,Y} = 0$

82. $X : U[-1,1]$, $Y = \operatorname{sgn} X$, $\rho_{X,Y} = ?$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1,1] \\ 0, & иначе \end{cases}$$

$EX = 0$ (претходни задатак) $\Rightarrow EY$ није потребно

$$EXY = E(x \operatorname{sgn} x) = \int_{-1}^{1} x \operatorname{sgn} x\, f_X(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |x|\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} x\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} x\,dx = -\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$EX^2 = \int_{-1}^{1} x^2 f_X(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

$$EY^2 = E(\text{sgn}x)^2 = E(1) = 1$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{3}$$

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = 1$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{EXY - EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{1}{3}}} = 1 \Rightarrow X \text{ и } Y \text{ су зависне}$$

83. $X_1, X_2, \dots, X_n$ независне, $X_i : U[0,1]$

$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

$\rho_{X_{(1)}, X_{(n)}} = ?$

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ x, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

$$F_{X_{(n)}}(x) = P\{X_{(n)} \le x\} = P\{\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \le x\}$$

$$= P\{X_1 \le x, X_2 \le x, \dots, X_n \le x\} = P\{X_1 \le x\}P\{X_2 \le x\}\dots P\{X_n \le x\}$$

јер су $X_1, X_2, \dots, X_n$ независне

$$= F_{X_1}(x) \cdot F_{X_2}(x) \dots F_{X_n}(x) = (F_{X_i}(x))^n$$

$$F_{X(1)}(x) = P\{X \le x\} = P\{\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \le x\}$$

$$= 1 - P\{\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \ge x\} = 1 - P\{x \ge X_1\}\, P\{x \ge X_2\} \dots P\{x \ge X_n\}$$

$$= 1 - \left(P\{x \ge X_i\}\right)^n = 1 - \left(1 - F_{X_i}(x)\right)^n = 1 - (1-x)^n \quad \text{за } x \in [0,1]$$

$$f_{X(1)}(x) = \left(F_{X(1)}(x)\right)' = n(1-x)^{n-1} \quad \text{за } x \in [0,1]$$

$$f_{X(n)}(x) = \left(F_{X(n)}(x)\right)' = n x^{n-1} \quad \text{за } x \in [0,1]$$

$$EX(1) = -\int_0^1 x n (1-x)^{n-1} dx = \left(\begin{matrix} t = 1-x \\ dt = -dx \end{matrix}\right) = -\int_1^0 (1-t) n t^{n-1} dt$$

$$= -\int_0^1 (t-1) n t^{n-1} dt = -n \int_0^1 t^n dt + n \int_0^1 t^{n-1} dt = -n \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 + n \frac{t^n}{n}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{n}{n+1} + 1 = \frac{1}{n+1}$$

$$EX(n) = \int_0^1 x \cdot n x^{n-1} dx = n \int_0^1 x^n dx = n \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{n}{n+1}$$

$$EX^2_{(1)} = \int_0^1 x^2 n (1-x)^{n-1} dx = n \int_0^1 (t-1)^2 t^{n-1} dt = -n\left(\int_0^1 t^{n+1} dt - 2\int_0^1 t^n + \int_0^1 t^{n-1}\right)$$

$$= +n \frac{t^{n+2}}{n+2}\Big|_0^1 - 2n \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 + n \frac{t^n}{n}\Big|_0^1$$

$$= +\frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1 = \frac{\cancel{+n^2} \cancel{+n} \cancel{-2n^2} \cancel{-4n} \cancel{+n^2} + 3n + 2}{(n+1)(n+2)}$$

$$EX_{(1)}^2 = \frac{+2}{(n+1)(n+2)}$$

$$DX_{(1)} = EX_{(1)}^2 - (EX_{(1)})^2 = \frac{+2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{+2n+2-n-2}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$EX_{(n)}^2 = \int_0^1 x^2 n x^{n-1} = n\int_0^1 x^{n+1} dx = n \frac{x^{n+2}}{n+2}\Big|_0^1 = \frac{n}{n+2}$$

$$DX_{(n)} = EX_{(n)}^2 - (EX_{(n)})^2 = \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$\frac{\cancel{n^3} + \cancel{2n^2} + n - \cancel{n^3} - \cancel{2n^2}}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$EX(1)X(n) = \iint xy\, f_{X(1),X(n)}(x,y)\,dy\,dx = ?$$

$$F_{X(1),X(n)}(x,y) = P\{\min\{X_1,\dots,X_n\} \le x, \mathrm{MAX}\{X_1,\dots,X_n\} \le y\}$$

$$= P\{(X_1 \le x \vee X_2 \le x \vee \dots \vee X_n \le x), (X_1 \le y \wedge X_2 \le y \wedge \dots X_n \le y)\}$$

$$= \sum_{k=1}^n P\{X_k \le x, X_1 \le y, \dots, X_k \le y, \dots, X_n \le y\}$$

$$= \sum_{k=1}^n P\{X_k \le \min\{x,y\}, X_1 \le y, \dots X_{k-1} \le y, X_{k+1} \le y, \dots, X_n \le y\}$$

независне и. вел.

$$= \sum_{k=1}^n P\{X_k \le \min\{x,y\}\} P\{X_1 \le y\} \cdot \dots \cdot P\{X_{k-1} \le y\} \cdot P\{X_{k+1} \le y\} \dots P\{X_n \le y\}$$

$$= n \cdot F_{X_i}(\min\{x,y\}) \cdot (F_{X_i}(y))^{n-1} = n \cdot \min\{x,y\} \cdot x^{n-1}$$

$$f_{X(1),X(2)}(x,y) = \frac{dF_{X(1),X(2)}'}{dx\,dy} = \begin{cases} 0, (x<y) \vee (x \notin [0,1]) \vee (y \notin [0,1]) \\ n(n-1)x^{n-2}, (y<x) \wedge (x \in [0,1]) \wedge y \in [0,1] \end{cases}$$

84. $X : U[0,1]$

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} I\left\{ \frac{k-1}{n} < X < \frac{k}{n} \right\}, n \in N, n \neq 1$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1] \\ 0, \text{иначе} \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} x, x \in [0,1] \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

$$EX = \int_0^1 x f_X(x) dx = \frac{1}{2}$$

$$EX^2 = \int_0^1 x f_X(x) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$EY_n = E\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} P\left\{ \frac{k-1}{n} < X < \frac{k}{n} \right\} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} P\left\{ \frac{k-1}{n} < X < \frac{k}{n} \right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (k-1) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n}$$

$$EY_n^2 = E\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} P\left\{ \frac{k-1}{n} < X < \frac{k}{n} \right\} \right)^2$$

$$= E\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^2} \left(P\left\{ \frac{k-1}{n} < X < \frac{k}{n} \right\} \right)^2 + \cancel{2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k-1}{n} P\left\{ \frac{k-1}{n} < X < \frac{k}{n} \right\} \cdot \frac{k}{n} P\left\{ \frac{k}{n} < X < \frac{k+1}{n} \right\}} \right)$$

0

jep: $P\left\{ \frac{k-1}{n} < X < \frac{k}{n} \right\} = 0$

$\vee$

$P\left\{ \frac{k}{n} < X < \frac{k+1}{n} \right\} = 0$

$(I^2 = I)$

$$\Rightarrow \left(P\left\{ \frac{k-1}{n} < X < \frac{k}{n} \right\} \right)^2 = P\left\{ \frac{k-1}{n} < X < \frac{k}{n} \right\}$$

$$\Rightarrow EY_n^2 = E\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^2} P\left\{\frac{k-1}{n} < X < \frac{k}{n}\right\}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^2} P\left\{\frac{k-1}{n} < X < \frac{k}{n}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^2} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^2}\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^{\cancel{3}\,2}} \frac{(n-1)\cdot \cancel{n}\cdot(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$DY_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}^{\llcorner 2} - \frac{(n-1)^2}{4n^2}^{\llcorner 3} = \frac{2(2n^2-3n+1) - 3(n^2-2n+1)}{12n^2}$$

$$= \frac{4n^2-6n+2-3n^2+6n-3}{12n^2} = \frac{n^2-1}{12n^2}$$

Наставак на крају

85. $X_1, X_2, \dots X_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, $0<p<1$, $X_1, X_2, \dots X_n$ су незав.

$X_1 | X_1 + X_2 + \dots + X_n = k$

$$P\{X_1 = 1 \mid X_1+X_2+\dots+X_n = k\} = \frac{P\{X_1=1, X_1+X_2+\dots+X_n=k\}}{P\{X_1+X_2+\dots+X_n=k\}}$$

$$= \frac{P\{X_1=1, X_2+X_3+\dots+X_n=k-1\}}{P\{X_1+X_2+\dots+X_n=k\}} = \frac{P\{X_1=1\}P\{X_2+X_3+\dots+X_n=k-1\}}{P\{X_1+X_2+\dots+X_n=k\}} \text{ (незав.)}$$

$X_2+X_3+\dots+X_n : B(n-1,p)$, $X_1+X_2+\dots+X_n : B(n,p)$

$$\Rightarrow \frac{P\{X_1=1\}\cdot P\{X_2+X_3+\dots+X_n=k-1\}}{P\{X_1+X_2+\dots+X_n=k\}} = \frac{\cancel{p}\cdot\binom{n-1}{k-1}\cancel{p^{k-1}}\cancel{(1-p)^{n-k}}}{\binom{n}{k}\cancel{p^k}\cancel{(1-p)^{n-k}}}$$

$$= \frac{\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\cancel{(n-k)!}}}{\dfrac{n!}{k!\cancel{(n-k)!}}} = \frac{k}{n}$$

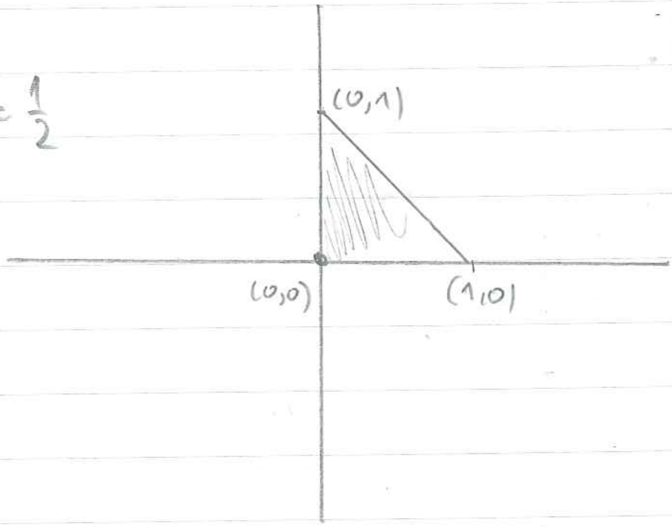
$$P\{X_1=0 \mid X_1+X_2+\dots+X_n\} = \dots = \frac{P\{X_1=0\}P\{X_2+X_3+\dots+X_n=k\}}{P\{X_1+X_2+\dots+X_n=k\}}$$

$$= \frac{\cancel{(1-p)}\binom{n-1}{k}\cancel{p^k}\cancel{(1-p)^{n-k-1}}}{\binom{n}{k}\cancel{p^k}\cancel{(1-p)^{n-k}}} = \frac{\frac{\cancel{(n-1)!}}{\cancel{k!}(n-k-1)!}}{\frac{\cancel{n!}}{\cancel{k!}(n-k)!}} = \frac{n-k}{n}$$

$$X_1 \mid X_1+X_2+\dots+X_n=k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{n-k}{n} & \frac{k}{n} \end{pmatrix}$$

86.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & (x,y)\in T \\ 0, & иначе \end{cases}, \quad P_\Delta = \frac{1}{2}$$



$$f_{X|Y=y} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f(y)}$$

$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} f_{X,Y}(x,y)\,dx = 2\int_0^{1-y} dx = 2-2y \quad за \ y\in[0,1]$$

$$f_{X|Y=y} = \frac{2}{2(1-y)} = \frac{1}{1-y}, \quad y\in[0,1]$$

$$\Rightarrow X \mid Y=y : U[0,1-y]$$

87. $X : U[0,1]$, $Y : U[\frac{X}{2}, X]$

$$f_X(X) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_{Y|X=x} = \begin{cases} \frac{2}{x}, & 0 \leq \frac{x}{2} \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_{Y|X=x} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X=x} \cdot f_X(x)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & y \in [\frac{x}{2}, x] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

а) $f_Y(y) = \int\limits_{y}^{2y} f_{X,Y}(x,y)\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx = 2\ln\Big|_{y}^{2y} = 2\ln 2$

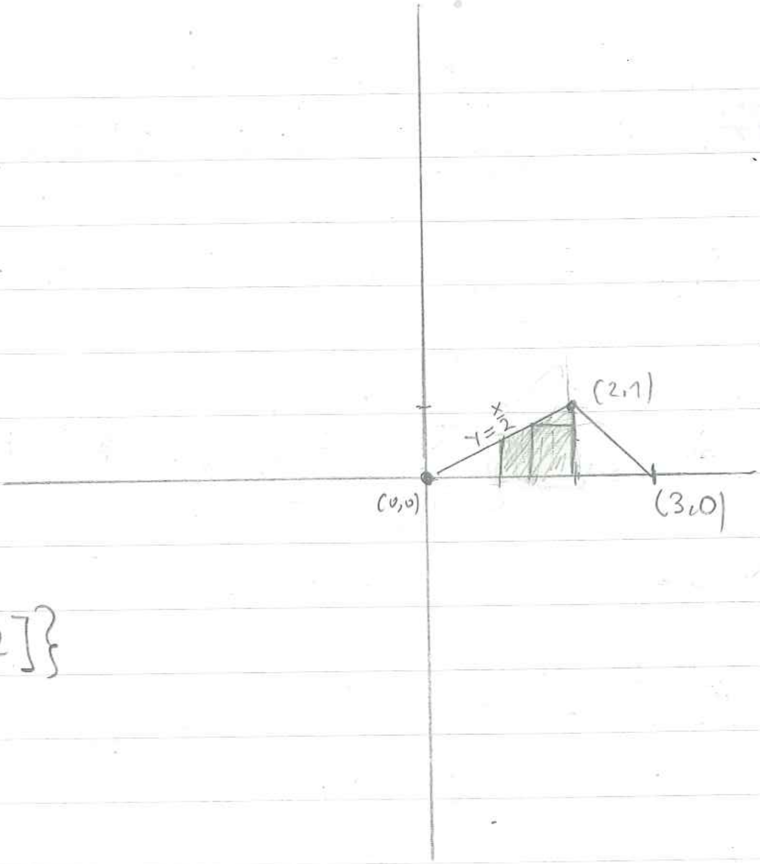
за $2y \leq 1$

б) $2y > 1$

$$f_Y(y) = \int\limits_{y}^{1} f_{X,Y}(x,y)\,dx = -2\ln y$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2\ln 2, & 0 < y < \frac{1}{2} \\ -2\ln y, & \frac{1}{2} < y < 1 \end{cases}$$

88. $(X,Y) \in T$ $\qquad P_\Delta = \frac{1\cdot 3}{2} = \frac{3}{2}$



$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & (x,y)\in T \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_{Y|X\in[1,2]}(y) = ?$$

$$F_{Y|X\in[1,2]}(y) = P\{Y\le y \mid X\in[1,2]\}$$
$$= \frac{P\{Y\le y, X\in[1,2]\}}{P\{X\in[1,2]\}}$$

$$P\{X\in[1,2]\} = \int_1^2 f_X(x)dx, \quad f_X(x) = ?$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^{\frac{x}{2}} f_{X,Y}(x,y)dy, & x\in[0,2] \\ \int_0^{3-x} f_{X,Y}(x,y)dy, & x\in[2,3] \end{cases}, \quad (0, \text{иначе})$$

$$\int_0^{\frac{x}{2}} f_{X,Y}(x,y)dy = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{x}{2}} dy = \frac{2}{3}\frac{x}{2} = \frac{x}{3}$$

$$\int_0^{3-x} f_{X,Y}(x,y)dy = \frac{2}{3}(3-x) = 2-\frac{2}{3}x$$

$$P\{X\in[1,2]\} = \int_1^2 f_X(x)dx = \frac{1}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{1}{6}(4-1) = \frac{1}{2}$$

$$P\{Y \le y;\ X \in [1,2]\} = ?$$

а) $y \in [0, \frac{1}{2}]$

$$P\{Y \le y, X \in [1,2]\} = \int_1^2 \int_0^y f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = \frac{2}{3}\int_1^2\int_0^y dy\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_1^2 y\,dx = \frac{2}{3}y$$

$$\Rightarrow F_{Y|X\in[1,2]}(y) = \frac{\frac{2}{3}y}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}y$$

б) $y \in (\frac{1}{2}, 1)$

$$P\{Y \le y, X \in [1,2]\} = \int_1^{2y}\int_0^{\frac{x}{2}} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx + \int_{2y}^{2}\int_0^{y} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\left(\int_1^{2y}\frac{x}{2}\,dx + \int_{2y}^{2} y\,dx\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{4}\Big|_1^{2y} + y\cdot x\Big|_{2y}^{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{4y^2-1}{4} + y(2-2y)\right)$$

$$= \frac{4y^2-1}{6} + \frac{4y-4y^2}{3} = \frac{-4y^2+8y-1}{6}$$

$$F_{Y|X\in[1,2]}(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ \frac{4}{3}y, & y\in[0,\frac{1}{2}) \\ \frac{-4y^2+8y-1}{3}, & y\in[\frac{1}{2},1) \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$

$$f_{Y|X\in[1,2]}(y) = \left(F_{Y|X\in[1,2]}(y)\right)' = \begin{cases} \frac{4}{3}, & y\in[0,\frac{1}{2}] \\ \frac{8-8y}{3}, & y\in[\frac{1}{2},1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

89. $f_X(t) = E(e^{itX})$

a) $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$

$E(e^{itX}) = e^{it\cdot 0}(1-p) + e^{it\cdot 1}\cdot p = (1-p) + p\cdot e^{it}$, $f_X(t) = E(e^{itX})$

б) $X : B(n,p)$

$E(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = ?$ (тежи начин)

$X = X_1 + X_2 + \dots X_n)$

$f_X(t) = f_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = f_{X_1}(t)\cdot f_{X_2}(t)\cdot \dots \cdot f_{X_n}(t)$ (теорема о производу)

$= ((1-p) + pe^{it})^n$

в) $X : P(\lambda)$

$f_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{itk}\lambda^k}{k!}$

$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{e^{it}\lambda} = e^{-\lambda(1-e^{it})}$

$* \; e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{k!} \quad (x = e^{it}\lambda)$

$Y : P(\mu) \Rightarrow f_Y(t) = e^{-\mu(1-e^{it})}$, X, Y су независне

$\Rightarrow f_{X+Y}(t) = f_X(t) \cdot f_Y(t) = e^{-\lambda(1-e^{it})} \cdot e^{-\mu(1-e^{it})} = e^{-(\lambda+\mu)(1-e^{it})}$

$\Rightarrow E(e^{it(X+Y)}) = e^{-(\lambda+\mu)(1-e^{it})} \Rightarrow X+Y : P(\lambda+\mu)$

ц) $X : \mathcal{E}(\lambda)$

$f_X(t) = E(e^{itX}) = \int_0^\infty e^{itx} \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx$

$\boxed{(it-\lambda) < 0}$

$= \lambda \int_0^\infty e^{x(it-\lambda)} = \frac{\lambda}{it-\lambda} e^{x(it-\lambda)} \Big|_0^\infty = 0 - \frac{\lambda}{it-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - it}$

ч) д) $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, x \in R$

$f_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-|x|} dx$

$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{itx+x} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{itx-x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{x(it+1)} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{x(it-1)} dx$

$= \frac{1}{2(it+1)} e^{x(it+1)} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2(it-1)} e^{x(it-1)} \Big|_0^{+\infty}$, $\boxed{\begin{matrix} it+1>0 \\ it-1<0 \end{matrix}}$

$= \frac{1}{2(it+1)}(1-0) + \frac{1}{2(it-1)}(0-1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{it+1} - \frac{1}{it-1}\right) = \frac{1}{2} \frac{\cancel{it}-1-\cancel{it}-1}{(it-1)(it+1)}$

$= \frac{-1}{(it)^2-1} = \frac{1}{1-(it)^2} = \frac{1}{1+t^2}$

$EX = ?$, $EY = ?$

Теорема: $EX^k = \dfrac{f_X^{(k)}(0)}{i^k}$

$EX = \dfrac{f_X'(0)}{i}$, $f'_X(t) = \left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)' = \dfrac{-2t}{(1+t^2)^2}$

$f_X'(0) = 0 \Rightarrow EX = 0$

$EX^2 = \dfrac{f_X''(0)}{i^2}$, $f''_X(t) = \left(\dfrac{-2t}{(1+t)^2}\right)' = \dfrac{-2(1+t)^2 - 2(1+t)(-2t)}{(1+t)^4}$

$= \dfrac{-2(1+2t+t^2)+4(t+t^2)}{(1+t)^4} = \dfrac{-2-4t-2t^2+4t+4t^2}{(1+t)^4} = \dfrac{2t^2-2}{(1+t)^4}$

$f_X''(0) = -2 \Rightarrow EX^2 = 2$

$\Rightarrow DX = EX^2 - (EX)^2 = 2$

90. $X_i \in \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$, X_i и X_j су независне за $i \neq j$, $i,j \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n : \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^n a_k m_k, \sum_{k=1}^n a_k^2 \sigma_k^2\right)$?

$f_{\sum_{k=1}^n a_k X_k}(t) = \prod_{k=1}^n f_{a_k X_k}(t)$ (теорема о производу)

$= \prod_{k=1}^n E(e^{i a_k X_k t}) = \prod_{k=1}^n f_{X_k}(a_k t) = \prod_{k=1}^n e^{i a_k t m_k - \frac{a_k^2 t^2 \sigma_k^2}{2}}$

$= e^{\sum_{k=1}^n i a_k t m_k - \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2 t^2 \sigma_k^2}{2}} = e^{it\sum_{k=1}^n a_k m_k - \frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^n a_k^2 \sigma_k^2}$

$f_Z(t)$, $Z : \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^n a_k m_k, \sum_{k=1}^n a_k^2 \sigma_k^2\right)$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k X_k : \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k m_k, \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sigma_k^2\right)$$

$\Rightarrow$ (теорема о јединствености) $Z = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$

91. а) $f_X(t) = \frac{3+\cos t}{4}$, $\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, $\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2}$

$E(e^{itX}) = \frac{3+\cos t}{4}$

$= \frac{3+\frac{e^{it}-e^{-it}}{2}}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{8}e^{it} - \frac{1}{8}e^{-it} = \frac{3}{4}\cdot e^{it\cdot 0} + \frac{1}{8}e^{it\cdot 1} - \frac{1}{8}e^{it(-1)}$

$$X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

б) $f_X(t) = (1-\beta)(1+\alpha)^{-1}(1+\alpha e^{-it})(1-\beta e^{it})^{-1}$, $0<\alpha<\beta<1$

$f_X(t) = \frac{(1-\beta)}{(1+\alpha)}\cdot(1+\alpha e^{-it})\frac{1}{1-\beta e^{it}}$

$= \frac{1-\beta}{1+\alpha}(1+\alpha e^{-it})\lim_{n\to\infty}\frac{1-\beta e^{itn}}{1-\beta e^{it}}$ $\boxed{0<|\beta e^{itn}|<1}$

$= \frac{1-\beta}{1+\alpha}(1+\alpha e^{-it})\sum_{n=0}^{\infty}(\beta e^{it})^n$

$= \frac{1-\beta}{1+\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(\beta e^{it})^n + \alpha\frac{1-\beta}{1+\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n e^{it(n-1)}$

$= \frac{1-\beta}{1+\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n e^{itn} + \alpha\frac{1-\beta}{1+\alpha}\sum_{n=-1}^{\infty}\beta^{n+1}e^{itn}$ $\boxed{n\to n+1}$

за $n=-1$ $P\{X=-1\} = \frac{\alpha(1-\beta)}{1+\alpha}\beta^{-1+1} = \frac{\alpha(1-\beta)}{1+\alpha}$

за $n\geq 1$ $P\{X=n\} = \frac{1-\beta}{1+\alpha}\beta^n(1+\alpha\beta)$
?

b) $f_X(t) = \frac{1}{2-e^{it}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{it}}$, $|\frac{1}{2}e^{it}| < 1$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}e^{it}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}e^{itn} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}e^{itn}$

$P\{X=n\} = \frac{1}{2^{n+1}}$

Провера: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cancel{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

92. Y и Z независне, $X = Y+Z$, $X : U(0, n+1)$, $Y : U(0,1)$

$Z = ?$, $f_X(t) = f_Y(t)\cdot f_Z(t)$ (независне и величине)
Теорема о производу

$f_Z(t) = \frac{f_X(t)}{f_Y(t)}$

$f_X(t) = E(e^{itX}) = \int_0^{n+1} e^{itx} f_X(x)\,dx$, $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & x\in[0,n+1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$f_X(t) = \frac{1}{n+1}\int_0^{n+1} e^{itx}\,dx = \frac{1}{(n+1)\cdot it}e^{itx}\Big|_0^{n+1}$

$= \frac{1}{(n+1)it}\left(e^{it(n+1)} - 1\right)$

$f_Y(t) = E(e^{itY}) = \int_0^1 e^{ity} f_Y(y)\,dy$, $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & x\in[0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$= \frac{1}{it}e^{ity}\Big|_0^1 = \frac{1}{it}\left(e^{it}-1\right)$

$$f_Z(t) = \frac{f_X(t)}{f_Y(t)} = \frac{\frac{1}{(n+1)\cancel{it}}\left(e^{it(n+1)}-1\right)}{\frac{1}{\cancel{it}}\left(e^{it}-1\right)} = \frac{1}{n+1}\,\frac{1-e^{it(n+1)}}{1-e^{it}}$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} e^{itk}$$

$$\Rightarrow Z : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

дискретна равномерна расподела

93. $\Omega = \{\omega_k \mid k \in N\}$, $P(\omega_k) = \frac{6}{\pi^2 k^2}$

$$X_n(\omega_k) = \begin{cases} n, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}, \quad Y_n = 1 - \frac{X_n}{n^2}$$

конвергенције за (X_n) и (Y_n)

$$\boxed{\begin{tikzcd} X_n \xrightarrow[n\to\infty]{S.S.} X \arrow[r, Rightarrow] & X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \arrow[r, Rightarrow] & X_n \xrightarrow[n\to\infty]{R} X \arrow[l, bend left, "C"] \\ & X_n \xrightarrow[n\to\infty]{S.K.} X \arrow[u, Rightarrow] & \end{tikzcd}}$$

$$X_n : \begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 - \frac{6}{\pi^2 n^2} & \frac{6}{\pi^2 n^2} \end{pmatrix}, \quad \underset{n\to\infty}{X_n} : \begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X_n \to 0?$$

$$X_n \xrightarrow{S.K.} 0, \; n \to \infty ?$$

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n-0)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(0\cdot\left(1-\frac{6}{\pi^2n^2}\right)+n^2\cdot\frac{6}{\pi^2 n^2}\right)=\frac{6}{\pi^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.k} 0}$$

(the arrow in this box is crossed out)

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.s.} 0$? Нека је $\varepsilon>0$ произвољно

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega \mid |X_n(\omega)-0|\geq\varepsilon\}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{EX_n^2}{\varepsilon^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{6}{\pi^2}}{\varepsilon^2}<+\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.s.} 0}\Rightarrow\boxed{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0}\Rightarrow\boxed{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{R} 0}$$

- $Y_n = 1-\frac{X_n}{n^2}$, вероватно конвергира ка 1

$$\lim_{n\to\infty} E(Y_n-1)^2=\lim_{n\to\infty}E\left(1-\frac{X_n}{n^2}-1\right)^2=\lim_{n\to\infty}=\frac{1}{n^2}E(X_n)^2\to 0$$

$$\Rightarrow\boxed{Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.k} 1}\Rightarrow\boxed{Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 1}\Rightarrow\boxed{Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{R} 1}$$

$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.s.} 1$? Нека је $\varepsilon>0$ произвољно

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{\omega \mid |Y_n(\omega)-1|\geq\varepsilon\}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(Y_n-1)^2}{\varepsilon^2}$$ Чебишевљева неједнакост

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{n^2}EX_n^2}{\varepsilon^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi^2\varepsilon^2 n^4}<+\infty$$

$$\Rightarrow\boxed{Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.s.} 0}$$

94. $X_n : [0, \frac{1}{n}]$, X_n и Y_n независне

$EX = \frac{1}{2n}$ (униформна расподела)

$DX = \frac{1}{12n^2} \Rightarrow EX^2 = DX + (EX)^2 = \frac{1}{3n^2}$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ nx, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1, & x > \frac{1}{n} \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_n(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$Y_n : \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} Y_n : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$Z_n = X_n + Y_n$, претпоставка: $Z_n \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} E|Z_n - 0|^2 = \lim_{n\to\infty} E|X_n + Y_n|^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (EX_n^2 + 2EX_nY_n + EY_n^2)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (EX_n^2 + 2EX_nEY_n + EY_n^2) \quad \text{(независне сл. вел.)}$$

$EY_n = \frac{1}{2n}$, $EY_n^2 = \frac{1}{2n^2}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3n^2} + 2 \cdot \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.k} 0} \Rightarrow \boxed{Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0} \Rightarrow \boxed{Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{R} 0}$$

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.s.} 0 \ ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega \mid |Z_n(\omega) - 0| \geq \varepsilon\} < +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n + Y_n| \geq \varepsilon\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{EZ_n^2}{\varepsilon^2}$$ Чебишејева неједнакост

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{n^2} < +\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.s.} 0}$$

95. $X_n : U[0,n]$, $Y_n = \{1, X_n\}$

$$EX_n = \frac{n}{2}$$

$$DX_n = \frac{n^2}{12} \Rightarrow EX^2 = \frac{n^2}{3}$$

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{n}, & x \in [0,n] \\ 1, & x > n \end{cases}$$

$$F_{Y_n}(y) = P\{Y_n \leq y\} = P\{\min\{1, X_n\} \leq y\}$$

1) за $y \in [0,1] \Rightarrow F_{Y_n}(y) = P\{X_n \leq y\} = F_{X_n}(y) = \frac{y}{n}$

2) за $y < 0$, $F_{Y_n}(y) = 0$

3) за $y > 1$, $F_{Y_n}(y) = 1$

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow Y : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Претпоставка $Y_n \to 1$

$$E|Y_n-1|^2 = EY_n^2 - 2EY_n + 1$$

$$EY_n = E(\min\{X_n,1\}) = \int_0^n \min\{x,1\}\frac{1}{n}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{n}dx + \int_1^n \frac{1}{n}dx = \frac{1}{2n} + \frac{n-1}{n} = \frac{2n-1}{2n}$$

$$EY_n^2 = \int_0^n \min^2\{x,1\}\frac{1}{n}dx = \int_0^1 \frac{x^2}{n}dx + \int_1^n \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{3n} + \frac{n-1}{n} = \frac{3n-2}{3n}$$

$$E|Y_n-1|^2 = \frac{3n-2}{3n} - 2\frac{2n-1}{2n} + 1 = \cancel{\frac{3n-2}{3n}} - \frac{6n-3}{3n} + \cancel{\frac{3n}{3n}} = \frac{1}{3n} \to 0$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.k} 1} \Rightarrow \boxed{Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 1} \Rightarrow \boxed{Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{R} 1}$$

$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.s} 1$? Нека је ε произвољно

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega \mid |Y_n(\omega)-1| \geq \varepsilon\} < +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|Y_n-1| \geq \varepsilon\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{1-Y_n \geq \varepsilon\} \quad (Y_n \leq 1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{Y_n \leq 1-\varepsilon\} = \sum_{n=1}^{\infty} F_{Y_n}(1-\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\varepsilon}{n} \to +\infty$$

$$\Rightarrow \cancel{Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.s} 1}$$

96. $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.k} X \Rightarrow EX_n \to EX \wedge DX_n \to DX$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} E(X_n - X)^2 = 0$

$0 \le |EX_n - EX| = |E(X_n - X)| \le E|X_n - X| \le \sqrt{E|X_n - X|^2} \longrightarrow 0, n\to\infty$

(Коши-Шварцова неједнакост)

$\Rightarrow$ (сендвич теорема) $EX_n - EX \to 0, \quad n\to\infty$

$\Rightarrow EX_n \to EX, n\to\infty$

$EX_n^2 = E(X_n - X + X)^2 = \underbrace{E(X_n - X)^2}_{\to 0} - 2E[(X_n - X)X] + EX^2$

$E[(X_n - X)\cdot X] \le \underbrace{\sqrt{E(X_n - X)^2 EX}}_{\to 0}$ (Коши-Шварцова неједнакост)

$\Rightarrow EX_n^2 \to EX^2$

$\Rightarrow DX_n \to DX$

97. $X_n : \begin{pmatrix} -\frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad S_n \to S_\infty : U[-1,1]$

$\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{\sum_{k=1}^n X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} E(e^{iX_k t}) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} e^{\frac{-it}{2^n}} + \frac{1}{2} e^{\frac{it}{2^n}}\right)$

$= \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{2^2}\right) \cdot \ldots \cos\left(\frac{t}{2^n}\right) \cdot \frac{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$

$\boxed{2\cdot \cos\left(\frac{t}{2^n}\right) \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) = \sin\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)}$

$= \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{2^2}\right) \cdot \ldots \cdot \cos\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right) \cdot \frac{2^{n-1} \sin\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} = \ldots = \frac{\sin t}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi_{S_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin t}{2^n \sin(\frac{t}{2^n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{\frac{1}{\sin(\frac{t}{2^n})}}{\frac{t}{2^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin t}{t}, \quad t \neq 0$$

$t=0, \quad \varphi_{S_n}(t) = 1$

$$\Rightarrow \varphi_{S_n}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t\neq 0 \\ 1, & t=0 \end{cases}, \quad n\to\infty$$

$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \Rightarrow \varphi_{S_n}(t), n\to\infty$ је нейрекидна $\wedge$ $S_n \to S_\infty, n\to\infty$

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \cdot e^{itx}\,dx = \frac{1}{2it}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{\sin t}{t}$$

T: Ако је $(\forall t\in R)(\varphi_n(t) \to \varphi(t)) \wedge \varphi$ је нейр. у 0, онда $X_n \xrightarrow{R} X, n\to\infty$

$\Rightarrow S_\infty \xrightarrow{R} X$

98. (X_n) низ независних сл. величина

a) $X_n : \begin{pmatrix} -\sqrt{\ln n} & \sqrt{\ln n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} E(X_k)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \;?$$

$EX_n = 0$ (симетрична расподела)

$EX_n^2 = \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln n = \ln n \quad \Rightarrow DX = \ln n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} < +\infty \Rightarrow \text{важи ЈЗВБ} \Rightarrow \text{важи СЗВБ}$$

б) $f_{X_n}(x) = n e^{-nx}, x \geq 0 \Rightarrow X_n : \mathcal{E}(n)$

$EX_n = \frac{1}{n}, \quad DX_n = \frac{1}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < +\infty \Rightarrow \text{важи ЈЗВБ} \Rightarrow \text{важи СЗВБ}$$

в) $X_n : \begin{pmatrix} -2^n & 2^n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$EX_n = 0$ (симетрична расподела)

$EX_n^2 = \frac{1}{2} 2^{2n} + \frac{1}{2} 2^{2n} = 2^{2n} \Rightarrow DX_n = 2^{2n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n^2} \longrightarrow +\infty$$ (и даље не знамо да ли важе закони)

Доказивање да не важи по деф:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} EX_k}{n} \not\xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty, \quad (EX_k = 0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \not\xrightarrow{P} 0, n \to \infty \Leftrightarrow \neg(\forall \varepsilon > 0) P\{|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k| \geq \varepsilon\} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0) P\{|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k| \geq \varepsilon\} \neq 0, \; n \to \infty$$

$$P\{|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k| \geq \varepsilon\} \geq P\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \geq \varepsilon\} = P\{\sum_{k=1}^{n} X_k \geq n\varepsilon\}$$

Неко је $\varepsilon = \frac{1}{2}$: $P\{\sum_{k=1}^{n} X_k \geq \frac{n}{2}\}$, $\left(\frac{n}{2} \leq 2^n\right)$

$$\Rightarrow P\{\sum_{k=1}^{n} X_k \geq \frac{n}{2}\} \geq P\{\sum_{k=1}^{n} X_k \geq 2^n\}$$

$$P\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k \geq 2^n\right\} \geq P\left\{X_n = 2^n, X_{n-1} = 2^{n-1}\right\}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k = 2^n + 2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} X_k \geq 2^n + 2^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-2} 2^k$$

$$= 2^n + 2^{n-1} - 2\,\frac{2^{n-2}-1}{2-1} = 2^n + 2^{n-1} - 2^{n-1} + 2 = 2^n + 2 \longrightarrow \infty, \; n \to \infty$$

$$\Rightarrow P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum X_k\right| \geq \varepsilon\right\} \geq P\left\{X_n = 2^n, X_{n-1} = 2^{n-1}\right\}, \; n \to \infty$$

$= P\{X_n = 2^n\} \cdot P\{X_{n-1} = 2^{n-1}\}$ (независне сл. величине

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \not\to 0 \;\Rightarrow\; P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum X_k\right| \geq \varepsilon\right\} \not\to 0, \; n \to \infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \overset{P}{\not\to} 0, \; n \to \infty$$

$\Rightarrow$ не важи СЗВБ $\Rightarrow$ не важи ЈЗВБ

99. (X_n): $EX_n = 0$, $DX_n \leq C$, $n \in \mathbb{N}$, $C > 0$

X_i и X_j су независни за $|i-j| > 1$

СЗВБ: $$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} EX_k}{n} \xrightarrow{P} 0, \; n \to \infty$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} 0, \; n \to \infty \quad (EX_k = 0, \; k \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right| \geq \varepsilon\right\} = 0, \; n \to \infty$$

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2}{\varepsilon^n} = \frac{E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j\right)}{n^2 \varepsilon^2}$$

$$= \frac{E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + \sum_{|i-j|=1} X_i X_j + \sum_{|i-j|>1} X_i X_j\right)}{n^2 \varepsilon^2} \qquad \left(P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right| \geq \varepsilon\right\} \geq 0\right)$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} E X_k^2 + \sum_{|i-j|=1} E(X_i X_j) + \sum_{|i-j|>1} E(X_i X_j)}{n^2 \varepsilon^2}$$

$$\boxed{\sum_{|i-j|>1} E X_i X_j = \sum_{|i-j|>1} \cancel{E X_i} E X_j = 0}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^{n} E X_k^2 + \sum_{|i-j|=1} E(X_i X_j) + \sum_{|i-j|>1} E(X_i X_j)}{n^2 \varepsilon^2}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} E X_k^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} E(X_i X_{i+1})}{n^2 \varepsilon^2} \leq \frac{n \cdot C + 2(n-1) \cdot C}{n^2 \varepsilon^2} \longrightarrow 0$$

$$E(X_i X_{i+1}) \leq \sqrt{E X_i^2 \, E X_{i+1}^2} \leq \sqrt{C \cdot C} = C \quad (D X_n \leq C \wedge E X_n = 0 \Rightarrow E X_n^2 \leq C)$$

$\Rightarrow$ (сендвич теорема) $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right| \geq \varepsilon\right\} \longrightarrow 0, \; n \to \infty$

$\Rightarrow$ важи СЗВБ

100. $X : U[-0{,}5 ; 0{,}5]$

a) $= n = 1300$, $\varepsilon = 15$

$$P\left\{\left|\sum_{k=0}^{n} X_k\right| > 15\right\} = 1 - P\left\{\left|\sum_{k=0}^{n} X_k\right| \le 15\right\}$$

$$= 1 - P\left\{-15 \le \sum_{k=0}^{n} X_k \le 15\right\}$$

$$= 1 - P\left\{\frac{-15 - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \le \frac{\sum_{k=0}^{n} X_k - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \le \frac{15 - ES_n}{\sqrt{DS_n}}\right\}$$

$$= 1 - P\left\{\frac{-15 - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \le X^* \le \frac{15 - ES_n}{\sqrt{DS_n}}\right\}$$

$$= 1 - \left(\phi\left(\frac{15 - ES_n}{\sqrt{DS_n}}\right) - \phi\left(\frac{-15 - ES_n}{\sqrt{DS_n}}\right)\right)$$

$EX_k = 0$, $k \in N$ (симетрични интервал расподјеле)

$$\Rightarrow ES_n = \sum_{k=1}^{n} EX_k = 0$$

$DS_n = \sum_{k=1}^{n} DS_k$ (независне сл. вел.)

$$= n \cdot DS_1 = n \cdot \frac{(0{,}5 - (-0{,}5))^2}{12} = \frac{n}{12} \Rightarrow \sqrt{DS_n} = \sqrt{\frac{n}{12}} = \sqrt{125} = 11{,}18$$

$$\Rightarrow 1 - \left(\phi\left(\frac{15}{11{,}8}\right) - \phi\left(\frac{-15}{11{,}8}\right)\right) = 1 - (\phi(1.34) - \phi(-1.34))$$

$$= 1 - (\phi(1.34) - (1 - \phi(1.34))) = 2(1 - \phi(1.34)) = 2(1 - 0{,}90988)$$

$$= 0{,}18024$$

$$\delta)\ ES_n = 0 \quad , \quad DS_n = \frac{c}{12} \Rightarrow DS_n = \sqrt{\frac{c}{12}}$$

$$P\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k < 10\right\} = 0,9$$

$$P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - ES_n}{\sqrt{DS_n}} < \frac{10 - ES_n}{\sqrt{DS_n}}\right\} = P\left\{X^* < \frac{10}{\sqrt{\frac{c}{12}}}\right\} = 0,9$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{c}}\right) = 0,9$$

$$\frac{10\sqrt{12}}{\sqrt{c}} = \Phi^{-1}(0,9)$$

$$c = \left(\frac{10\sqrt{12}}{\Phi^{-1}(0,9)}\right)^2 = \left(\frac{10\sqrt{12}}{1,28}\right)^2 = 732,422$$

$$\Rightarrow \boxed{c' = 732}$$

101. $n = 100$, $X_k : P(1)$

$P\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k \leq 120\right\}$ (нема $\frac{1}{n}$ јер се гледа укупно)

$$P\left\{\sum_{k=1}^{100} X_k \leq 120\right\}$$

$$P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{100} X_k - E\left(\sum_{k=1}^{100} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{100} X_k\right)}} \leq \frac{120 - E\left(\sum_{k=1}^{100} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{100} X_k\right)}}\right\}$$

$$= P\left\{X^* \leq \frac{120 - E\left(\sum_{k=1}^{100} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{100} X_k\right)}}\right\}$$

$$E\Big(\sum_{k=1}^{100} X_k\Big) = 100 \cdot \underset{i\in\{1,2,\dots 100\}}{EX_i} = 100$$

$$D\Big(\sum_{k=1}^{100} X_k\Big) = 100 \cdot \underset{i\in\{1,2,\dots 100\}}{DX_i} = 100$$

$$P\Big\{X^* \le \frac{120-100}{\sqrt{100}}\Big\} = P\{X^* \le 2\} = \Phi(2) = 0{,}97725$$

102.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n} = \frac{1}{2}$$ (подсета на Пуасонову расподелу)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n} = P\{Y \le n\}, \quad Y \sim P(n)$$

(збир независних Пуасонових расподела је Пуасонова расподела)

$$Y = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad X_k : P(1)$$

$$P\left\{ \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E\big(\sum_{k=1}^{n} X_k\big)}{\sqrt{D\big(\sum_{k=1}^{n} X_k\big)}} \le \frac{n - E\big(\sum_{k=1}^{n} X_k\big)}{\sqrt{D\big(\sum_{k=1}^{n} X_k\big)}} \right\}$$

$$E\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = n \underset{k\in\{1,2,\dots n\}}{X_k} = n \cdot 1 = n$$

$$\sqrt{D\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big)} = \sqrt{\underset{k\in\{1,2,\dots n\}}{n \cdot DX_k}} = \sqrt{n \cdot 1} = \sqrt{n}$$

$$P\left\{ \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n}{\sqrt{n}} \le \frac{n-n}{\sqrt{n}} \right\} = P\left\{ \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n}{\sqrt{n}} \le 0 \right\} \longrightarrow \frac{1}{2}, \ n \to +\infty$$

$$P\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k \le n\right\} = \sum_{k=0}^{n} P\left\{\sum_{i=1}^{n} = k\right\} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n} \longrightarrow \frac{1}{2}, \quad n \to +\infty$$

Додатак:

84. НАСТАВАК

$$EXY_n = E\left(X \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} P\left\{\frac{k-1}{n} < x < \frac{k}{n}\right\}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} E\left(X P\left\{\frac{k-1}{n} < x < \frac{k}{n}\right\}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \int_0^1 x P\left\{\frac{k-1}{n} < x < \frac{k}{n}\right\} dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} x\, dx \quad \text{(у осталим сумандима је 0)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2n} \left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2n^3}\left(\cancel{k^2} - \cancel{k^2} + 2k - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)(2k-1) = \frac{1}{2n^3} \sum_{k=1}^{n} (2k^2 - 3k + 1) =$$

$$= \frac{1}{2n^3}\left(\cancel{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{\cancel{6}} - 3\frac{n(n+1)}{2} + n\right)$$

$$= \frac{1}{12n^3}\left(2n(2n^2+3n+1) - 9(n^2+n) + 6n\right)$$

$$= \frac{1}{12n^3}\left(4n^3 + 6n^2 + 2n - 9n^2 - 9n + 6n\right)$$

$$= \frac{1}{12n^3}\left(4n^3 - 3n^2 - n\right) = \frac{4n^2 - 3n - 1}{12n^2}$$

$$\rho_{X,Y_n} = \frac{EXY_n - EXEY_n}{\sqrt{DX}\,\sqrt{DY_n}}$$

$$= \frac{\frac{4n^2-3n-1}{12n^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{2n}}{\sqrt{\frac{1}{12}}\cdot\sqrt{\frac{n^2-1}{12n^2}}} = \frac{\frac{4n^2 \cancel{-3n} - 1 - 3n^2 \cancel{+3n}}{\cancel{12}n^{\cancel{2}}}}{\frac{1}{\cancel{12}}\cdot\frac{\sqrt{n^2-1}}{\cancel{n}}}$$

$$= \frac{n^2-1}{n\sqrt{n^2-1}} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$$

Метод инверзне ф-је:

$X : \mathcal{E}(\lambda)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}, \quad F_X(x) \in [0,1)$$

-насумична врв. за $F_X(x)$ је $U[0,1]$

-нека је $u = F_X(x)$

$u = 1 - e^{-\lambda x}$

$1 - u = e^{-\lambda x} \,/\ln$

$\ln(1-u) = -\lambda x$

$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$

$F^{-1}(u) = F_X$